Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

# Методика розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей в курсі алгебри старшої школи

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІФ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Цьовка Наталія Василівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент: канд. тех. наук, доц. кафедри вищої математики Присяжнюк І. М.

Рівне – 2020 року

# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Одним із найважливіших видів навчальної діяльності є вміння розв’язувати математичні задачі, а саме рівняння та нерівності. В процесі такої діяльності, учні краще засвоюють матеріал, розвивають логічне мислення та творчі здібності.

Вивчення теми «Тригонометрія» умовно можна поділити на два етапи:

1) основи вивчення тригонометрії в курсі геометрії (7-9) клас;
2) поглиблене вивчення в курсі алгебри та початків аналізу.

Педагогічний досвід роботи багатьох вчителів показує, що вивчення теми «Тригонометрія» є однією з найскладніших в шкільному курсі математики. Для легкого сприймання, усвідомлення та більшого розуміння учнями матеріалу потрібно застосовувати не тільки традиційні засоби навчання. Серед нетрадиційних засобів можна виділити мультимедійні, які дозволяють відтворювати теоретичний матеріал у більш наочній формі, збільшувати мотивацію навчальної діяльності та темпи засвоєння, відтворення та застосування учнями матеріалу при розв’язуванні вправ.

Варто зауважити, що знання теоретичного та практичного матеріалу з тригонометрії включає в себе також програма зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) [51].

При цьому учні повинні знати:

- означення синуса, косинуса, тангенса числового аргументу;
- основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
- формули зведення;
- формули додавання та наслідки з них;
- методи розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Вміти:

- виконувати тотожні перетворення тригонометричних виразів та знаходити їх числове значення при заданих значеннях змінних;
- розв'язувати різні види тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Методиці викладання тригонометрії в школі присвячені праці З. І. Сліпканя, Г. П. Бевза, Є. П. Неліна, М. І. Шкіля та інших.

Дослідження методів розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей проводили: Ф. М. Фурман, О. М. Шебашова, А. М. Смоляков, Т. Г. Крамаренко та інші.

Над впровадженням мультимедійних технологій навчання працювали такі автори: М. І. Жалдак, Ю. В. Горошно, А. В. Матросов, Ю. І. Мишбиць, О. А. Здвижков та ін.

Зважаючи на актуальність вище викладеної проблеми нами була вибрана тема – ***«Методика розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей в курсі алгебри старшої школи»***.

**Мета роботи:** узагальнити і систематизувати навчально-методичні матеріали по вивчені тригонометричних рівнянь і нерівностей та розробити методику застосування ІКТ при вивчені теми дослідження.

Зважаючи на поставлену мету були сформульовані такі **завдання дослідження**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з теми дослідження;
2. Дослідити місце тригонометричних рівнянь та нерівностей в програмі вивчення математики;
3. Систематизувати методику формування вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності;
4. Запропонувати методику використання програм Gran1 і Maple задля формування основних компетентностей при вивчені математики.

**Об'єкт дослідження** – процес навчання алгебри і початків аналізу.

**Предметом дослідження** є система задач, яка спрямована на розвиток умінь і навиків розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності.

**Основні методи дослідження:** теоретичний аналіз; критичний аналіз; теоретичний синтез; спостереження за освітнім процесом у старших класах, бесіди з учителями математики, описовий метод.

**Практичне значення роботи** полягає в тому, що систематизовані матеріали дослідження можуть бути використані вчителями в освітній діяльні та студентами педагогічних ЗВО під час опрацювання питань з методики вивчення математики.

**Структура та обсяг роботи.** Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 3 розділів, списку використаних джерел (76 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи складається із 130 сторінок.

# РОЗДІЛ 1
# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У розділі зроблено теоретичний аналіз основних понять дослідження: охарактеризовано тригонометричні функції та їх властивості, основні тригонометричні тотожності, обернені тригонометричні функції, найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності, розкрито історію розвитку тригонометрії як науки, здійснено аналіз програм та підручників з математики для 10-го класу загальноосвітніх начальних закладів (до вивчення теми тригонометрія).

## 1.1. Історія розвитку тригонометрії як науки

Виникнення тригонометрії, як і будь-якої іншої науки пов'язане з людською діяльністю, а саме з вирішенням конкретних прикладних завдань. На початку свого розвитку, тригонометрія склалася із завдань на розв'язання плоских і сферичних трикутників [67].

Головну роль у формуванні та розвитку тригонометрії (сферичної тригонометрії), зіграла одна з найдавніших наук – астрономія. Саме вона була керівною силою математичних відкритів, з часів розвитку тригонометрії як науки до її повного становлення [68].

Потреба в складанні географічних карт, це вимагала точних обрахунків великих відстаней, зіграла велику роль не тільки для астрономії, а й тригонометрії зокрема. Лікарі, які складали гороскоп хворого, щоб визначити по розташуванню планет в сузір'ях, видужає хворий чи ні, не один раз при астрологічних дослідженнях зверталися до алгебри та тригонометрії [68].

Певні знання про математику були і у древніх народах Дворіччя. Їх знання про деякі найпростіші відомості з тригонометрії пов'язані з особливим розвитком астрономії. Стародавні єгиптяни теж мали уявлення про тригонометрію, оскільки використовували астрономічні спостереження у галузі сільського господарства [15].

В II-I століттях нашої ери у класичному трактаті «Математика в дев’яти книгах» був представлений ряд завдань на застосування прямокутних трикутників, серед яких, завдання на визначення відстані до недоступних предметів [67].

Значно пізніше тригонометрія розглядалася як частина астрономії. У Стародавній Греції першорядне значення отримали обчислювальні завдання сферичної тригонометрії, що були пов’язані з потребами астрономії та геодезії. Деяке уявлення про сферичну тригонометрію мав ще Фалес (640-548 рр. до н.е.) – давньогрецький математик і астроном; в першій половині 3 столітті до н.е. давньогрецький астроном і математик Аристарх Самоський (310-230 рр. до н.е.) та Архімед [68].

Особливий влив на розвиток тригонометрії мали роботи давньогрецького вченого Гіппарха (бл. 180-125 рр. до н.е.) – засновника наукової астрономії. Ні Гіппарх, ні у інших вченні у цей період не розглядали геометрію як окрему науку. Проте, завдяки знанням з елементарної геометрії, вони могли розв’язувати задачі, які зараз відносять до тригонометрії. За допомогою теореми Птолемея, яка була відома ще Гіппарху, греки виконували всі основні тригонометричні обчислення [67].

Наступний етап розвитку тригонометрії пов’язаний з народами індії з IV по XII ст., які велику увагу приділяли розвитку математики. Знаючи, що таке «синус» індійці ввели в тригонометрію «косинус». Сам термін «косинус» був введений значно пізніше в роботах європейських вчених австрійського математика Пейрбаха або Пурбаха (1423-1461) і німецького математика Региомонтана (1436), але це не завадило індійцям використовувати лінію косинуса у своїх обчисленнях [35, 75].

Історичні данні свідчать, що індійцям також було відомо співвідношення $sin^2\alpha + cos^2\alpha = r^2$, формули для синуса половинного кута, синуса суми і різниці двох кутів. Таким чином, індійці започаткували тригонометрію як вчення про тригонометричні величини. Варто зауважити, що розв'язанням трикутників вони приділяли мало уваги, а для вимірювань висот і відстаней були розроблені кілька правил, заснованих на зміні тіні вертикального жердини. Все це передбачало введення понять «тангенс» і «котангенс» [75].

Ще один етап розвитку тригонометрії пов'язаний з розквітом культури країн Арабського Халіфату. Так називалося об'єднання різних країн і народів, завойованих арабами в VII-VIII ст. в нього входили таджики, узбеки, перси, азербайджанці, єгиптяни, сирійці та інші народи. Запозичені з Індії необхідні відомості з тригонометрії, алгебри і арифметики, стали основою для досягнень в астрономії та деяких інших науках. Завдяки перекладам всіх праць Евкліда, Аполлонія, Архімеда, Птолемея і їх пізніших коментаторів, арабська математика розпочала свій розвиток, хоча панівне становище належало грецькій геометрії та астрономії. Успіхи в математиці, зокрема в тригонометрії, створили основу для досягнень в астрономії і в деяких інших науках [35].

Хоча тригонометрія і відігравала важливу роль в обчисленнях, але продовжувала розвиватися в тісному зв'язку з астрономією та географією.

У Багдаді в різний час займалися науковою роботою такі вчені, як ал-Хорезмі (783-830), ал-Хабаш (764-874), Ібн кора (836-901), Ібн Ірак (965-1035), ал-Біруні (973-1050) [15].

У XII ст. Європі почалася самостійна творчість європейських вчених. На базі досягнень древніх греків, їм довелося заново відкривати багато з того, що відкрито було задовго до них. На основі перекладів деяких арабських творів в Англії були написані роботи з тригонометрії Р. Уоллігрфордом (бл. 1292-1335) і його сучасником Д. Модюктом. Англійський учений Томас Брадвардін (бл. 1290-1349) вперше в Європі запропонував одиничний радіус тригонометричного кола, ввів в тригонометричні обчислення котангенса під значенням «прямої тіні» і тангенса під назвою «зворотної тіні». Важливо відзначити, що саме в цей період були створені таблиці синусів [10].

Науковець Региомонтан, незалежно від арабів, ввів в європейську науку функцію тангенса, склав таблицю синусів через $1'$ і таблицю тангенсів через $1°$. Саме він склав таблицю для обчислення катета прямокутного трикутника (сферичного) по лежачому проти нього кутку $A$ і по гіпотенузі $C$ згідно з формулою $sin\alpha - sinC sinA$, назвавши її таблицею «з подвійним входом». Ця робота Региомонтана зіграла дуже велику роль в подальшому розвитку тригонометрії [15].

Важливий внесок у розвиток тригонометрії зробив також польський астроном Микола Коперник (1473-1543), творець геліоцентричної системи світу, реформатор астрономії. Коперник самостійно обґрунтував деякі основні положення сферичної тригонометрії; він вперше зводить всю справу до триграника, проектує трикутник з центру. Коперник сам займався складанням тригонометричних таблиць [гейзер].

Німецький математик Петер Крюгер (1480-1532) був першим з європейських математиків, що склали окремо таблиці логарифмів тригонометричних функцій і таблиці логарифмів чисел. Датський математик Томас Фінк (1561-1656) в роботі «Геометрія круглого» (1583) вперше вводить терміни «синус», «тангенс» і «секанс» [15].

Англійський математик Абрахам Муавр (1667-1754), за походженням француз, знаходить правило для зведення в ступінь комплексного числа, заданого в тригонометричної формі, яке широко застосовується в тригонометрії і алгебри при вирішенні рівнянь і відоме тепер як «формула Муавра» [15, 67].

На даний момент тригонометрія складається з двох частин:

1) вчення про тригонометричні функції (входить до складу математичного аналізу);
2) обчислення елементів тригонометричних фігур (входить до складу геометрії).

Важливо відзначити, що тригонометричні обчислення застосовуються практично у всіх сферах життєдіяльності людей: астрономії, фізики, природі, музиці, медицині, біології і багатьох інших.

## 1.2. Аналіз програм з математики для 10 класів загальноосвітніх начальних закладів (до вивчення теми тригонометрія)

Вивчення математики у старшій школі проводиться за чотирма рівнями: рівень стандартну, академічний, профільний та поглиблений. Кожному з цих рівнів відповідає окрема навчальна програма.

Але згідно оновленої концепції профільного навчання з 2018-2019 н. р. навчання відбуватиметься тільки за двома рівнями: базовим та профільним. Варто зауважити, що для учнів, які у 8-9 класах навчалися програмою поглибленого рівня, розроблено окрему програму з математики, для продовження вивчення на поглибленому рівні [28].

**Програма профільного рівня** розрахована на 630 годин, з яких 175 (210) годин відведено на вивчення алгебри та початків аналізу в 10 класі [41, с. 13].

Тема «Тригонометричні функції» налічує 30 (30) годин навчального матеріалу.

Зміст навчального матеріалу:

- Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
- Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.

Учень (учениця):

виконує перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;

обчислює значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень;

формулює означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій; будує графіки періодичних функцій;

ілюструє властивості періодичних функцій за допомогою графіків;

перетворює тригонометричні вирази.

Тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» налічує 28 (36) годин навчального матеріалу.

При вивченні цієї теми учні дізнаються про:

- Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки.
- Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.
- Тригонометричні нерівності.
- Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.

Учень (учениця):

формулює означення обернених тригонометричних функцій;

обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь $sinx = a$, $coax = a, tgx = a, ctgx = a$;

розв’язує тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.

**Навчальна програма з математики поглибленого рівня** як і начальна програма профільного рівня для 10-11 класу розрахована на 630 годин. Для алгебри та початків аналізу на 10 клас відведено 210 годин, тобто 6 годин на тиждень [42, с. 15-16].

Тема «Тригонометричні функції» налічує 42 годин навчального матеріалу.

Зміст навчального матеріалу:

- Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
- Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.

Учень (учениця):

виконує перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;

обчислює значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень;

формулює означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій;

будує графіки періодичних функцій;

ілюструє властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків;

перетворює тригонометричні вирази.

Тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» налічує 42 годин навчального матеріалу.

При вивченні цієї теми учні дізнаються про:

- Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки.
- Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.
- Тригонометричні нерівності.

- Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.
- Системи тригонометричних рівнянь. Побудова графічних образів.

Учень (учениця):

формулює означення обернених тригонометричних функцій;

обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь $sinx = a,$ $coax = a, tgx = a, ctgx = a$;

розв'язує тригонометричні рівняння та їх системи, тригонометричні нерівності, зокрема з параметрами;

будує графічні образи, пов'язані з періодичними функціями.

**Навчальна програма з математики академічного рівня** для 10 класу налічує 315 годин навчального матеріалу. Для алгебри та початків аналізу на 10 клас відведено 70 годин, тобто 2 години на тиждень [39, с. 8-9].

Тема «Тригонометричні функції» налічує 16 годин навчального матеріалу.

Зміст навчального матеріалу:

- Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута.
- Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення.
- Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
- Тригонометричні формули: формули додавання; формули по двійного кута; формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток; формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Учень (учениця):

виконує перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки;

встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;

формулює означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута і числового аргументу; властивості тригонометричних функцій;

розпізнає і будує графіки тригонометричних функцій;

ілюструє властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків;

обчислює значення тригонометричних виразів; перетворює нескладні тригонометричні вирази;

застосовує тригонометричні функції до опису реальних процесів, зокрема гармонічних коливань.

Тема «Тригонометричні рівняння» налічує 8 годин навчального матеріалу.

При вивченні цієї теми учні дізнаються про:

- Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.

Учень (учениця):

обґрунтовує розв’язки найпростіших тригонометричних рівнянь $sinx = a, coax = a, tgx = a, ctgx = a$;

розв’язує нескладні тригонометричні рівняння.

**Навчальна програма з математики рівня стандарту** для 10 класу налічує 210 годин навчального матеріалу. Для алгебри та початків аналізу на 10 клас відведено 54 годин [40, с. 7].

Тема «Тригонометричні функції» налічує 18 годин навчального матеріалу.

Зміст навчального матеріалу:

- Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів.
- Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення.
- Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.
- Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них.
- Найпростіші тригонометричні рівняння.

Учень (учениця):

вміє переходити від радіанної міри кута до градусної й навпаки;

встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;

обчислює значення тригонометричних виразів і наближені значення тригонометричних виразів із заданою точністю за допомогою обчислювальних засобів;

розпізнає і будує графіки тригонометричних функцій;

ілюструє властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків;

перетворює нескладні тригонометричні вирази;

застосовує тригонометричні функції до опису реальних процесів;

розв'язує найпростіші тригонометричні рівняння.

Тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» не виділена окремо.

## 1.3. Аналіз підручників з математики для 10 класів загальноосвітніх начальних закладів (до вивчення теми тригонометрія)

Крім пояснення вчителя, для учні в основним джерелом знань є підручник. Для того, щоб краще зрозуміти методику вивчення теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» потрібно проаналізувати підручники з яких навчаються діти в школі. Проведемо аналіз деяких підручників з алгебри та початків аналізу для 10 класу:

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., Номіровський Д. А. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу (поглиблений рівень) 10 клас [3].

I. Структура досліджуваної теми

Підручник розділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів.

Теоретичний матеріал з тригонометрії представлений у двох параграфах:

1. Тригонометричні функції:

1.1. Радіанна міра кута;

1.2. Тригонометричні функції числового аргумент;

1.3. Знаки значень тригонометричних функцій;

1.4. Періодичність функцій;

1.5. Властивості та графіки функцій $y = sinx$ і $y = cosx$;

1.6. Властивості та графіки функцій $y = tgx$ і $y = ctgx$;

1.7. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;

1.8. Формули додавання;

1.9. Формули зведення;

1.10. Формули подвійного, потрійного та половинного кутів;

1.11. Формула для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій.

2. Тригонометричні рівняння та нерівності:

2.1. Рівняння $cosx = b$;

2.2. Рівняння $sinx = b$;

2.3. Рівняння $tgx = b$ і $ctgx = b$;

2.4. Функції $y = arcsinx$ і $y = arccosx$;

2.5. Функції $y = arctgx$ і $y = arcctgx$;

2.6. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних;

2.7. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники;

2.8. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь;

2.9. Про рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь;

2.10. Тригонометричні нерівності;

2.11. Тригонометрична підстановка.

II. Виклад теоретичного матеріалу

Перш ніж розпочати виклад теоретичного матеріалу теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» автори підручника подають теоретичний матеріал теми «Тригонометричні функції». Спочатку вводиться поняття радіанної міри кута, після цього поступово поняття тригонометричних функцій і їх застосування за допомогою різних тригонометричних формул. Після вивчення цієї теми, учням пропонується поняття найпростіших тригонометричних рівнянь та деякі із способів їх розв'язання. І закріплюючим пунктом є тригонометричні нерівності. Стиль підручника абстрактно-дедуктивний. У кожному пункті доступно викладено теоретичний матеріал за допомогою ілюстрацій на графіках тригонометричних функцій, а також на одиничному колі. У тексті курсивом або жирним шрифтом виділені основні поняття, правила та теоретичні відомості, які учень повинен засвоїти і знати.

III. Система задач

Виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язання задач. До кожного пункту підібрані задачі для самостійного розв'язання. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складніші, які позначенні «*». Для тих хто хоче знати більше є рубрика «Коли зроблені уроки», яка може бути використана для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

2. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас [25].

I. Структура досліджуваної теми

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, пунктів та рубрик.

Теоретичний матеріал з тригонометрії представлений у двох параграфах:

1. Тригонометричні функції:

1.1. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута;

1.2. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргумент;

1.3. Властивості тригонометричних функцій;

1.4. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;

1.5. Формули зведення;

1.6. Періодичність функції. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Гармонійні коливання;

1.7. Тригонометричні формули додавання;

1.8. Формули подвійного, потрійного та половинного кутів. Формули пониження степеня. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу;

1.9. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

2. Тригонометричні рівняння та нерівності:

2.1. Обернені тригонометричні функції, їх властивості і графіки;

2.2. Рівняння і нерівності, що містять обернені тригонометричні функції;

2.3. Найпростіші тригонометричні рівняння;

2.4. Розв’язування тригонометричних рівнянь за допомогою заміни змінної;

2.5. Розв’язування тригонометричних рівнянь різними способами;

2.6. Тригонометричні нерівності.

II. Виклад теоретичного матеріалу

Перш ніж розпочати виклад теоретичного матеріалу теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» автори підручника подають теоретичний матеріал теми «Тригонометричні функції». Спочатку вводиться поняття синуса, косинуса, тангенса та котангенса кута, радіанне вимірювання кутів, після цього поступово властивості та графіки тригонометричних функцій. Окремими параграфами виділені формули тригонометричних функцій. Після вивчення цієї теми, учням пропонується поняття обернених тригонометричних функцій. Найпростіші тригонометричні рівняння поміщені в один параграф, наводяться різні методи їх розв’язання. І закріплюючим пунктом є тригонометричні нерівності. Стиль підручника абстрактно-дедуктивний. У кожному пункті доступно викладено теоретичний матеріал за допомогою ілюстрацій на графіках тригонометричних функцій. Є багато прикладів розв’язаних задач.

III. Система задач

Усі задачі та вирази поділено відповідно до рівнів навчальних досягнень. Рубрика «Розв’яжіть задачі та виконайте вправи» містить значну кількість завдань для класної та домашньої роботи, усних вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа, допоможуть добре її опрацювати. «Вправи підвищеної складності» містять завдання для поглибленого вивчення, а також сприяють підготовці до різноманітних математичних конкурсів. У рубриці «Життєва математика» зібрані задачі, пов’язані з екологічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю. Для узагальнення і систематизації вивчення матеріалу запропоновано рубрики «Домашня самостійна робота» та «Завдання для перевірки знань». У рубриці «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» пропонується виконання вправ, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми. Ще одна рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» містить нестандартні задачі, задачі математичних олімпіад різних країн світу, а також задачі, авторами яких є видатні математики.

3. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас [43].

I. Структура досліджуваної теми

Підручник складається з теоретичного матеріалу, представленого у чотирьох розділах, довідкового матеріалу, практичних завдань та відповідей до них, історичної довідки та предметного покажчика. Всі розділи структуровані в пункти і підпункти.

Теоретичний матеріал з тригонометрії представлений у двох параграфах:

1. Тригонометричні функції:

1.1. Радіанна міра кутів;

1.2. Тригонометричні функції кута і числового аргументу;

1.3. Властивості тригонометричних функцій;

1.4. Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості;

1.5. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;

1.6. Формули додавання та їх наслідки;

1.7. Додаткові формули тригонометрії.

2. Тригонометричні рівняння та нерівності:

2.1. Обернені тригонометричні функції;

2.2. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

2.3. Розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших;

2.4. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь;

2.5. Найпростіші тригонометричні нерівності;

2.6. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем;

2.7. тригонометричні рівняння з параметрами;

2.8. Розв'язування тригонометричних нерівностей.

II. Виклад теоретичного матеріалу

Перш ніж розпочати виклад теоретичного матеріалу теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» автори підручника подають теоретичний матеріал теми «Тригонометричні функції». Спочатку вводиться поняття радіанної міри кута, після цього поступово поняття тригонометричних функцій і їх застосування за допомогою різних тригонометричних формул. Після вивчення цієї теми, учням пропонується поняття найпростіших тригонометричних рівнянь та деякі із способів їх розв'язання. У цьому підручнику розглядаються також системи тригонометричних рівнянь та наводяться приклади їх розв'язання. І закріплюючим пунктом є тригонометричні нерівності. Стиль підручника абстрактно-дедуктивний. Систему навчального матеріалу з кожної теми подано за двома рівнями. Основний матеріал наведено в параграфах, номери яких позначені синім кольором. Додатковий матеріал (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні. На початку багатьох параграфів наведено довідкові таблиці, які містять основі означення, властивості та орієнтири для пошуку плану розв'язування задач з теми.

III. Система задач

Для ознайомлення з основними ідеями розв'язання вправ наводяться приклади, у яких розв'язання міститься також коментар, що допоможе скласти план розв'язання аналогічного завдання. Систему вправ основного матеріалу подано за трьома рівнями. Задачі середнього рівня позначено символом «°», дещо складніші задачі достатнього рівня подано без позначень, а задачі високого рівня подано без позначень, а задачі високого рівня складності позначено символом «*». З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. У підручнику для багатьох задач поглибленого рівня також пропонується спеціальні орієнтири, які дають можливість опанувати методи їх розв'язування.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) 10 клас [8].

I. Структура досліджуваної теми

Підручник містить у собі найважливіші теми з алгебри, початків аналізу та з геометрії. Весь навчальний матеріал поділений на розділи, які у свою чергу складаються з параграфів.

Теоретичний матеріал з тригонометрії представлений в одному параграфі:

1. Тригонометричні функції:

1.1. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута;

1.2. Тригонометричні функції числового аргументу;

1.3. Основні тригонометричні формули;

1.4. Формули зведення;

1.5. Властивості та графіки тригонометричних функцій;
1.6. Періодичні функції та гармонійні коливання;
1.7. Формули додавання та наслідки з них;
1.8. Тригонометричні рівняння.

II. Виклад теоретичного матеріалу

Спочатку вводиться поняття синуса, косинуса, тангенса та котангенса кутів, після цього поступово поняття тригонометричних функцій. Наведено різні тригонометричні формули. Після вивчення цієї теми, учням пропонується поняття найпростіших тригонометричних рівнянь. Окремо не розглядаються тригонометричні нерівності, та деякі способи розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей. Стиль підручника абстрактно-дедуктивний. Матеріал кожного пункту виділений простими і доступними словами. В кожному параграфі виділені основні поняття, правила та властивості, в основному вони виділені курсивом або жирним шрифтом. Крім того, після пояснення у підручнику містяться запитання, які дозволяють закріпити пройдений матеріал на уроці або самостійно вдома.

III. Система задач

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв’язанням. Практичні завдання поділено на дві групи: А – завдання, що відповідають початковому і середньому рівню, Б – достатньому і високому. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи виділено кольором. Також є рубрика «Вправи для повторення». Варто зауважити, що у підручнику є окремі задачі – це задачі з реальними даними, які стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки та охорони здоров’я громадян, кількість показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо. Для узагальнення і систематизації вченого матеріалу запропоновано завдання рубрик «Самостійна робота» та «Скарбничка досягнень і набутих компетентносте». Для розвитку творчості та креативності – завдання рубрики «Творче завдання».

## 1.4. Тригонометричні функції та їх властивості

Означення тригонометричних функцій

Через прямокутний трикутник

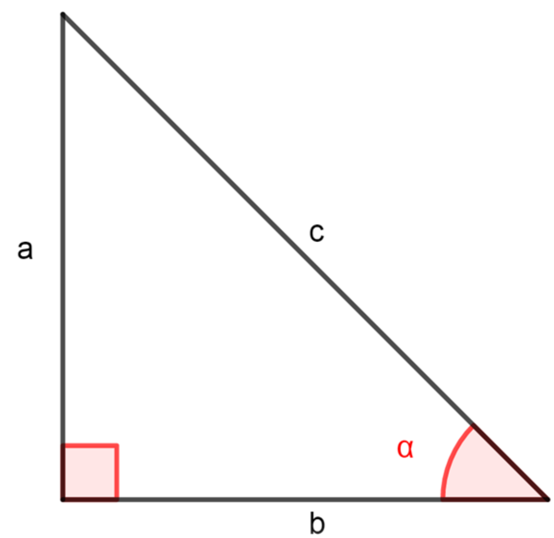



Рис. 1.1. Прямокутний трикутник

$$cos\alpha = \frac{b}{c}, sin\alpha = \frac{a}{c}, tg\alpha = \frac{a}{b}, ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Через коло довільного радіуса $R$

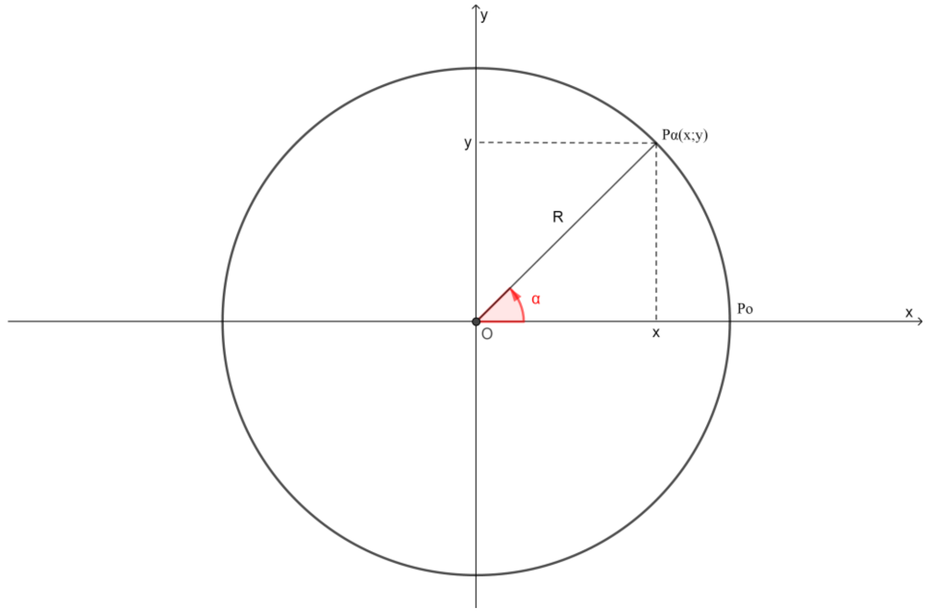



Рис. 1.2. Коло довільного радіуса R

$$cos\alpha = \frac{x}{R}, sin\alpha = \frac{y}{R}, tg\alpha = \frac{y}{x}, ctg\alpha = \frac{x}{y}.$$

Через одиничне коло (R=1)

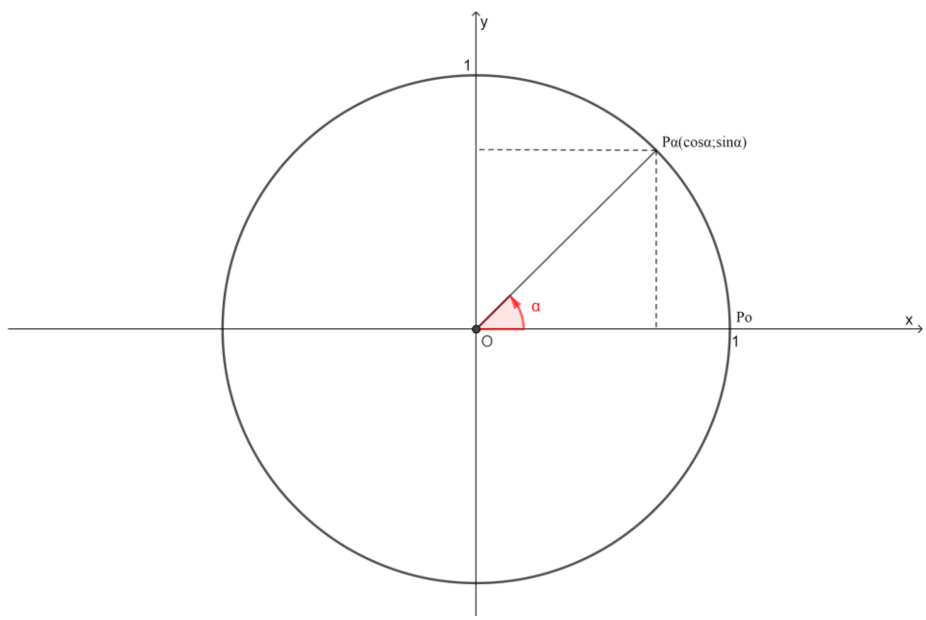



Рис. 1.3. Одиничне коло

$cos\alpha = x$ абсциса точки $P_\alpha$,

$sin\alpha = y$ ордината точки $P_\alpha$,

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}.$

Зв'язок між радіанною та градусною мірами кута

Кути вимірюються в градусах і радіанах.

Кутом $1°$ називається центральний кут, що спирається на дугу кола, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ частини його довжини.

Кутом в 1 радіан – називається центральний кут, який спирається на дугу кола, довжина якого дорівнює радіусу кола.

$$180° = \pi \text{ рад}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, 1° \approx 0{,}01745 \text{ рад}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}, 1 \text{ рад} \approx 57°17'44''$$

Формули переходу від градусної міри дуг і кутів до радіанної і навпаки:

Нехай $A°$ – градусна міра деякого кута, а $\alpha$ рад – його радіанна міра, тоді:

$$A° = A° \cdot \frac{\pi}{180°} \text{рад} = \alpha \text{ рад}$$

$$\alpha \text{ рад} = \alpha \cdot \frac{180°}{\pi} = A°$$

Приклади розв’язування типових вправ

Знайти радіанну міру кутів:

1. $30°$ [25, с. 175].

Розв’язання

$$30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} \text{рад} = \frac{\pi}{6} \text{ рад}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$ рад.

2. $72°$ [33].

Розв’язання

Використовуючи формулу переходу та взявши $\pi \approx 3{,}14$, отримаємо:

$$72° = 72° \cdot \frac{\pi}{180°} \text{рад} = \frac{2\pi}{5} \text{ рад} \approx 1{,}256 \text{ рад}$$

Відповідь. $\approx 1{,}256$ рад.

3. $18°15'$ [43].

Розв'язання

Використовуючи формулу переходу, взявши $\pi \approx 3{,}14$, та з урахуванням того, що $18°15' = 18°,25$, отримаємо:

$$18°15' = 18°,25 \cdot \frac{\pi}{180°} \text{рад} \approx 0{,}318 \text{ рад}$$

Відповідь. $\approx 0{,}318$ рад.

Знайти градусну міру кутів:

4. $\frac{\pi}{5}$ рад [5].

Розв'язання

$$\frac{\pi}{5} \text{ рад} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180°}{\pi} = 36°$$

Відповідь. $36°$.

5. 3,5 рад [43].

Розв'язання

Використовуючи формулу переходу та взявши $\pi \approx 3{,}14$, отримаємо:

$$3{,}5 \text{ рад} = 3{,}5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{630°}{\pi} \approx 200°,64 \approx 200°38' \approx 201°.$$

Відповідь. $\approx 201°$.

6. 3,68 рад [5].

Розв'язання

Використовуючи формулу переходу та взявши $\pi \approx 3{,}14$, отримаємо:

$$3{,}68 \text{ рад} = 3{,}68 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{662°,4}{\pi} \approx 210°,955 \approx 210°57'.$$

Відповідь. $\approx 210°57'$.

Властивості тригонометричних функцій

Функція синус [27]

$$y = \sin(x)$$

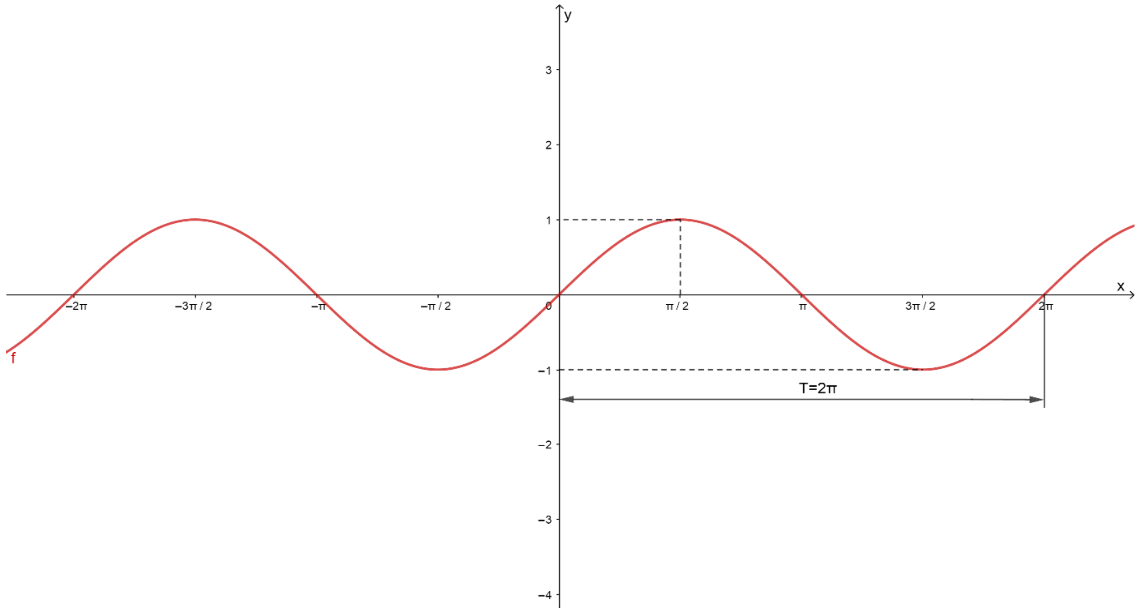



Рис. 1.4. Графік функції $y = \sin(x)$

Означення:

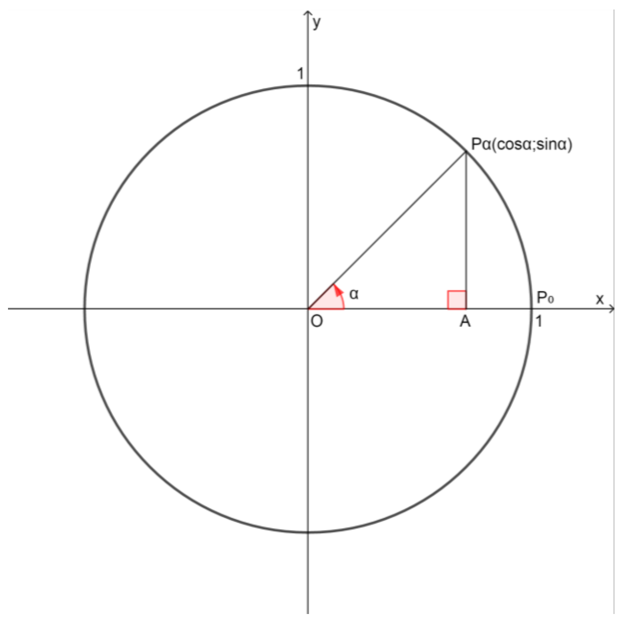



Рис. 1.5. Означення функції синус через одиничне коло

$sinx = AP_\alpha$ (ордината точки одиничного кола), $AP_\alpha$ – лінія синуса.

Область визначення функції – множина $R$ всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1; 1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\sin(-x) = -sinx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно початку координат.

Функція періодична з найменшим додатним періодом $2\pi$: $\sin(x + 2\pi k) = sinx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$sinx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.

$sinx > 0$ (додатна) для всіх $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

$sinx < 0$ (від'ємна) для всіх $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції:

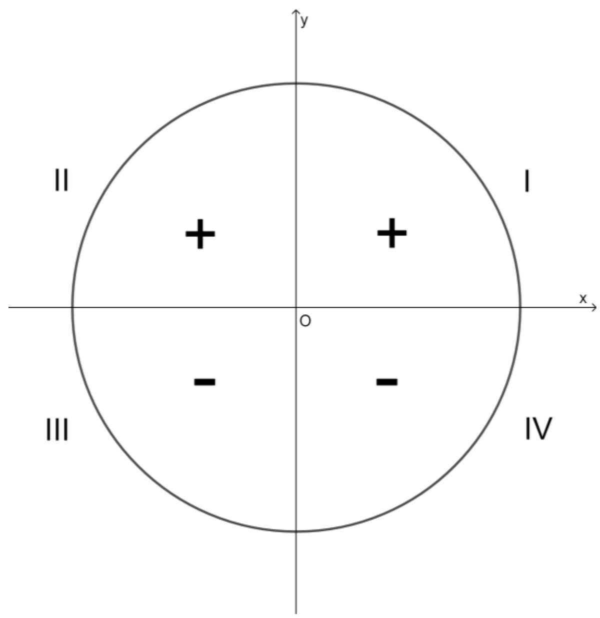



Рис. 1.6. Знаки функції синус

Функція зростає від $-1$ до 1 на проміжках: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Функція спадає від $-1$ до 1 на проміжках: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Перша важлива границя та її наслідки: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

Функція косинус [27]

$$y = \cos(x)$$

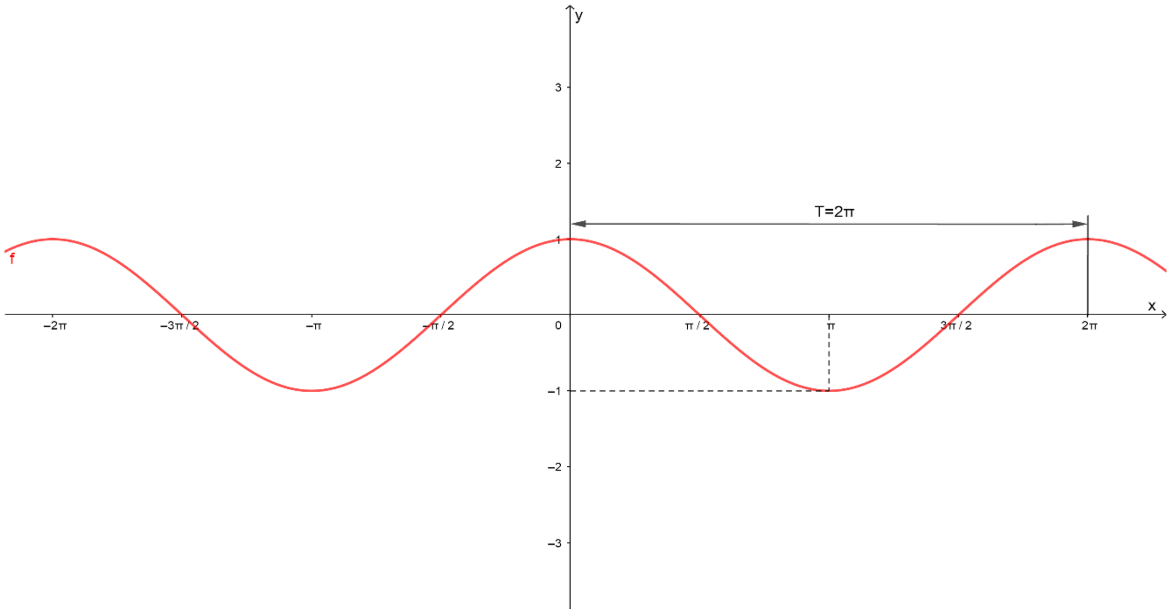



Рис. 1.7. Графік функції $y = \cos(x)$

Означення:

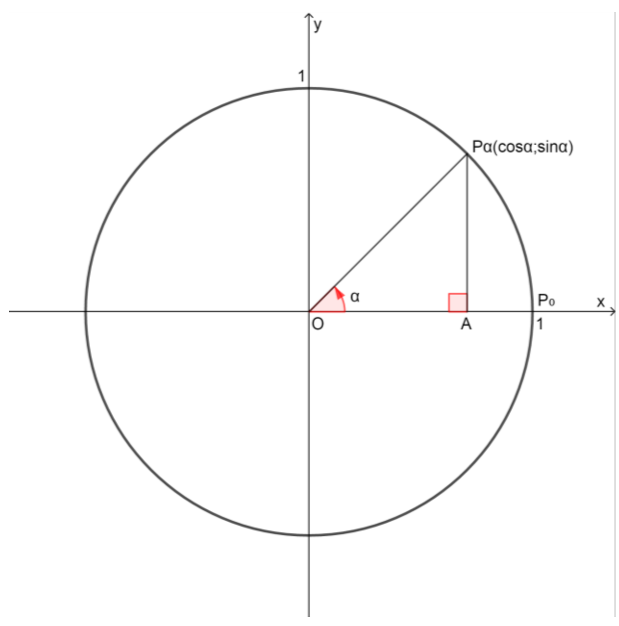



Рис. 1.8. Означення функції косинус через одиничне коло

$cosx = OA$ (абсциса точки одиничного кола), $OA$ – лінія косинуса.

Область визначення функції – множина $R$ всіх дійсних чисел.

Множина значень функції – відрізок $[-1; 1]$, тобто синус функція – обмежена.

Функція непарна: $\cos(-x) = cosx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно осі OY.

Функція періодична з найменшим додатним періодом $2\pi$: $\cos(x + 2\pi k) = cosx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 1)$.

Проміжки знакосталості:

$cosx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$cosx > 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, 2\pi k)$, $k \in Z$.

$cosx < 0$ для всіх $x \in (,\pi + 2\pi k, 2\,\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції:

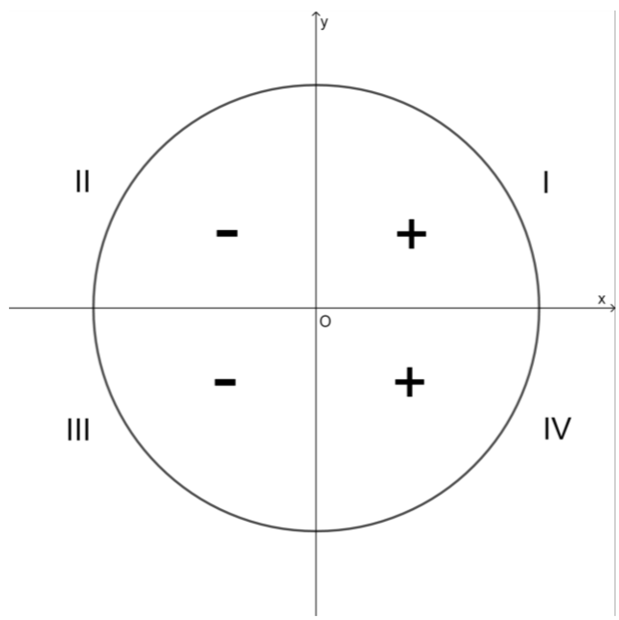



Рис. 1.9. Знаки функції косинус

Функція зростає від $-1$ до $1$ на проміжках: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Функція спадає від $-1$ до $1$ на проміжках: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках: $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Функція неперервна в області визначення. Графік функції немає асимптоти.

Функція тангенс [27]

$$y = \operatorname{tg}(x)$$

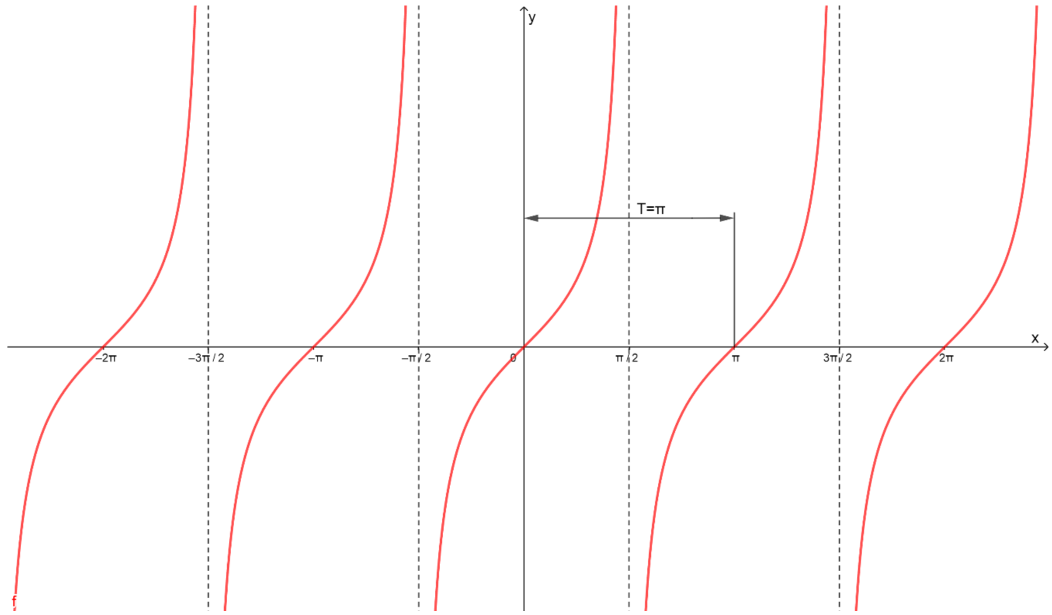



Рис. 1.10. Графік функції $y = \operatorname{tg}(x)$

Означення: $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$.

Область визначення функції – множина $R$ всіх дійсних чисел, крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто тангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -tgx$ для всіх $x$ з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY.

Функція періодична з найменшим додатним періодом $\pi$: $\operatorname{tg}(x + \pi k) = tgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$tgx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$.

$tgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.

$tgx < 0$ для всіх $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції:

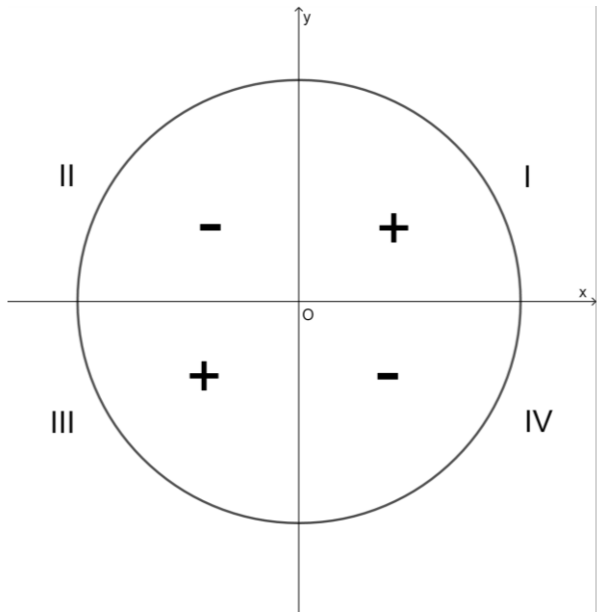



Рис. 1.11. Знаки функції тангенс

Функція зростає на проміжках: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Вертикальна асимптота $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Функція котангенс [27]

$$y = c\mathrm{tg}(x)$$

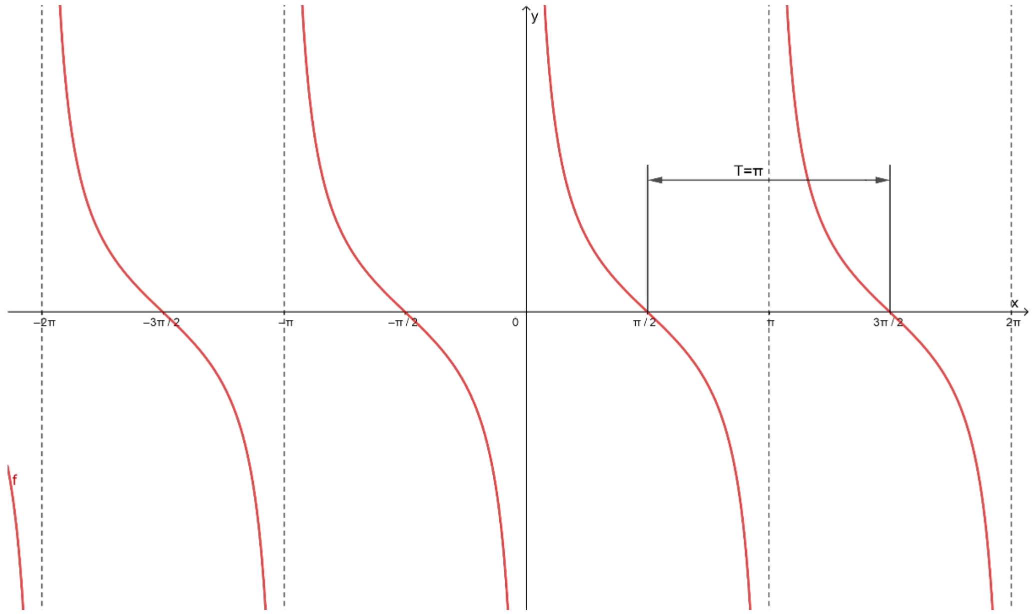



Рис. 1.12. Графік функції $y = c\text{tg}(x)$

Означення: $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

Область визначення функції – множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pi k, k \in Z$.

Множина значень функції – вся числова пряма, тобто котангенс – функція необмежена.

Функція непарна: $\text{tg}(-x) = -tgx$ для всіх $x$ з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY.

Функція періодична з найменшим додатним періодом $\pi$: $c\text{tg}(x + \pi k) = ctgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.

Координати точок перетину графіка функцій з осями координат:

З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$.

З віссю OY: $(0; 0)$.

Проміжки знакосталості:

$ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

$ctgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.

$ctgx < 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Знаки тригонометричної функції:

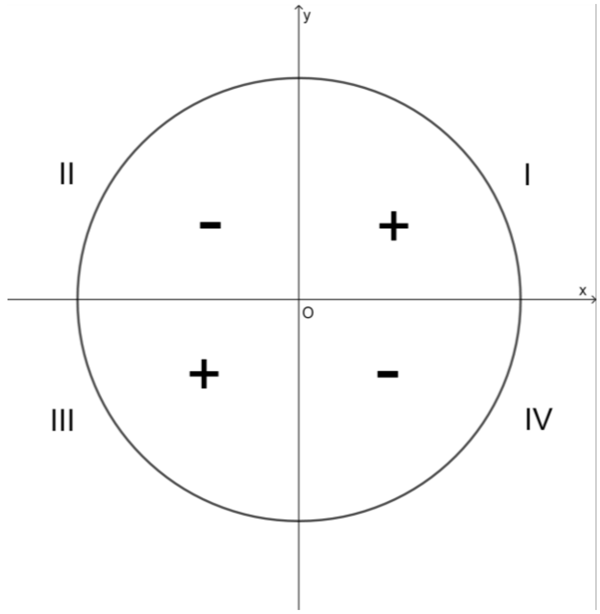



Рис. 1.13. Знаки функції котангенс

Функція зростає на проміжках: $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Вертикальна асимптота $x = \pi k, k \in Z$.

## 1.5. Основні тригонометричні тотожності

I. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж самого аргументу

Основні тригонометричні тотожності є рівності, що встановлюють зв'язок між синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом одного кута, і дозволяють знаходити будь-яку з цих тригонометричних функцій через відому іншу.

Відразу перерахуємо основні тригонометричні тотожності [13]:

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$
2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha},$
3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha},$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$
5. $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha},$

6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$.

II. Формули додавання:

7. $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$,

8. $\sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$,

9. $\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$,

10. $\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$,

11. $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$,

12. $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$,

13. $ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$,

14. $ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$,

III. Формули кратних аргументів

15. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

16. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$,

17. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k, \in Z$,

18. $ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \alpha \neq \pi k, n, k, \in Z$,

19. $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$;

20. $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$;

21. $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n, \in Z$;

22. $ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^3\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n, \in Z$.

IV. Формули пониження степеня

23. $cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}$;

24. $sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2}$;

25. $tg^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

26. $ctg^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{1-cos2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z;$

27. $cos^3\alpha = \frac{3cos\alpha+cos3\alpha}{4};$

28. $sin^3\alpha = \frac{3sin\alpha+sin3\alpha}{4}.$

V. Формули половинного аргументу

29. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}};$

30. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}};$

31. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$

32. $c\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}}, \alpha \neq 2\pi n, n \in Z;$

Зауваження. У цих формулах знак «+» або «–» обирається в залежності від того, який чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

33. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z;$

34. $c\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$

VI. Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

35. $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

36. $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

37. $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

38. $cos\alpha - cos\beta = -sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\beta-\alpha}{2};$

39. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

40. $tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

41. $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z;$

42. $ctg\alpha - ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{sin\alpha sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z;$

43. $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}sin(45° + \alpha);$

44. $cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}cos(45° + \alpha);$

45. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \pi n, n, k \in Z;$

46. $tg\alpha - tg\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \pi n, n, k \in Z;$

47. $tg\alpha + ctg\alpha = \frac{2}{sin2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

48. $tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Зауваження. Деякі допоміжні тригонометричні тотожності:

49. $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2};$

50. $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2};$

51. $1 + sin\alpha = 2cos^2(45° - \frac{\alpha}{2});$

52. $1 - sin\alpha = 2sin^2(45° - \frac{\alpha}{2});$

53. $1 + tg\alpha = \frac{\sin(45°+\alpha)}{cos45° \cdot cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)}{cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

54. $1 - tg\alpha = \frac{\sin(45°-\alpha)}{cos45° \cdot cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45°-\alpha)}{cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

55. $1 + tg\alpha tg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

56. $1 - tg\alpha tg\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

57. $ctg\alpha ctg\beta + 1 = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z;$

58. $1 - tg^2\alpha = \frac{cos2\alpha}{cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

59. $1 - ctg^2\alpha = -\frac{cos2\alpha}{sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z;$

60. $sin^2\alpha - sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta);$

61. $cos^2\alpha - cos^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha);$

62. $sin^2\alpha - cos^2\beta = -\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta);$

63. $sin^4\alpha - cos^4\beta = 1 - \frac{1}{2}sin^2 2\alpha = \frac{1}{4}(3 + cos4\alpha)$;

64. $sin^6\alpha - cos^6\beta = 1 - \frac{3}{4}sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}(5 - cos4\alpha)$;

65. $sin^8\alpha - cos^8\beta = \frac{1}{32}(cos^{24}\alpha + 14cos4\alpha - 17)$;

66. $tg^2\alpha - tg^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{cos^2\alpha\cdot cos^2\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

67. $ctg^2\alpha - ctg^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{sin^2\alpha\cdot cin^2\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z$;

68. $tg^2\alpha - sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot sin^2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

69. $ctg^2\alpha - cos^2\alpha = ctg^2\alpha \cdot cos^2\alpha, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$

VII. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

70. $sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$;

71. $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$;

72. $sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)]$;

73. $sin\alpha \cdot sin\beta \cdot sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) -$
$-\sin(\alpha + \beta + \gamma)]$;

74. $sin\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) +$
$+\sin(\alpha + \beta + \gamma)]$;

75. $sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) -$
$-cos(\alpha + \beta + \gamma)]$;

76. $cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha -$
$-\beta) + cos(\alpha + \beta + \gamma)]$;

Зауваження. Деякі допоміжні тригонометричні тотожності:

77. $sin\alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha) = \frac{1}{4}sin3\alpha$;

78. $cos\alpha \cdot \cos(60° - \alpha) \cdot \cos(60° + \alpha) = \frac{1}{4}cos3\alpha$;

79. $tg\alpha \cdot \text{tg}(60° - \alpha) \cdot \text{tg}(60° + \alpha) = tg3\alpha$;

80. $ctg\alpha \cdot \mathrm{ctg}(60° - \alpha) \cdot \mathrm{ctg}(60° + \alpha) = ctg3\alpha.$

VIII. Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу

81. $sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$

82. $cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$

83. $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

84. $ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}, \alpha, \neq \pi n, n \in Z.$

IX. Формули зведення (таблиця 1.1.)

Формули зведення

Таблиця 1.1.

| Кути / Функції | $90° - \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $90° + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $180° - \alpha$ $\pi - \alpha$ | $180° + \alpha$ $\pi + \alpha$ | $270° - \alpha$ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $270° + \alpha$ $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $360° - \alpha$ $2\pi - \alpha$ | $360° + \alpha$ $2\pi + \alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sin$ | $cos\alpha$ | $cos\alpha$ | $sin\alpha$ | $-sin\alpha$ | $-cos\alpha$ | $-cos\alpha$ | $-sin\alpha$ | $sin\alpha$ |
| $cos$ | $sin\alpha$ | $-sin\alpha$ | $-cos\alpha$ | $cos\alpha$ | $-sin\alpha$ | $sin\alpha$ | $cos\alpha$ | $cos\alpha$ |
| $tg$ | $ctg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $tg\alpha$ |
| $ctg$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ | $tg\alpha$ | $-tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ | $ctg\alpha$ |

Приклади застосування основних тригонометричних формул

1. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (формули 1–6)

Спростіть вирази:

№1. $cos^4\alpha(1 + tg^2\alpha) + sin^2\alpha$ [52].

Розв’язання.

$cos^4\alpha(1 + tg^2\alpha) + sin^2\alpha = cos^4\alpha \cdot \frac{1}{cos^2\alpha} + sin^2\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$

Відповідь. 1.

№2. $cos\alpha - sin\alpha \cdot ctg\alpha$ [52].

Розв'язання.

$$cos\alpha - sin\alpha \cdot ctg\alpha = cos\alpha - sin\alpha \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = cos\alpha - cos\alpha = 0.$$

Відповідь. 0.

№3. $\frac{1}{1+sin\alpha} + \frac{1}{1-sin\alpha}$ [21].

Розв'язання.

$$\frac{1}{1 + sin\alpha} + \frac{1}{1 - sin\alpha} = \frac{1 - sin\alpha + 1 + sin\alpha}{(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha)} = \frac{2}{1 - sin^2\alpha} = \frac{2}{cos^2\alpha}.$$

Відповідь. $\frac{2}{cos^2\alpha}$.

№4. $1 - sin\beta \cdot cos\beta \cdot tg\beta$ [7, с. 152].

Розв'язання.

$$1 - sin\beta \cdot cos\beta \cdot tg\beta = 1 - sin\beta \cdot cos\beta \cdot \frac{sin\beta}{cos\beta} = 1 - sin^2\beta = cos^2\beta.$$

Відповідь. $cos^2\beta$.

№5. $cos^2x - cos^4x + sin^4x$ [43, с. 275].

Розв'язання.

$$cos^2x - cos^4x + sin^4x = cos^2x \cdot (1 - cos^2x) + sin^4x = cos^2x \cdot sin^2x + sin^4x$$
$$= sin^2x \cdot (cos^2x + sin^2x) = sin^2x.$$

Відповідь. $sin^2x$.

№6. $\frac{sin\alpha \cdot sin\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} \cdot ctg\beta \cdot tg\alpha + 1$ [22].

Розв'язання.

$$\frac{sin\alpha \cdot sin\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta} \cdot ctg\beta \cdot tg\alpha + 1 = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot ctg\beta \cdot tg\alpha + 1 = tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}.$$

Відповідь. $\frac{1}{cos^2\alpha}$.

Доведіть тотожності:

№7. $3(sin^4\alpha + cos^4\alpha) - 2(sin^6\alpha + cos^6\alpha) = 1$ [7, с. 154].

Доведення.

$3(sin^4\alpha + cos^4\alpha) - 2(sin^6\alpha + cos^6\alpha) = 3(sin^4\alpha + cos^4\alpha) - 2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) \times$
$\times (sin^4\alpha - sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^4\alpha) = 3sin^4\alpha + 3cos^4\alpha - 2sin^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha -$
$-2cos^4\alpha = sin^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha + cos^4\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha)^2 = 1.$

Отже, значення лівої частини дорівнює значенню правої частини. Що й потрібно було довести.

№8 $sin^3\alpha(1 + ctg\alpha) + cos^3\alpha(1 + tg\alpha) = sin\alpha + cos\alpha$ [7, с. 154].

Доведення.

$$sin^3\alpha(1 + ctg\alpha) + cos^3\alpha(1 + tg\alpha) = sin^3\alpha\left(1 + \frac{cos\alpha}{sin\alpha}\right) + cos^3\alpha\left(1 + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right) =$$
$$= sin^2\alpha(sin\alpha + cos\alpha) + cos^2\alpha(cos\alpha + sin\alpha) = (sin\alpha + cos\alpha)(sin^2\alpha + cos^2\alpha) =$$
$$= sin\alpha + cos\alpha.$$

Отже, $sin\alpha + cos\alpha = sin\alpha + cos\alpha$. Що й потрібно було довести.

2. Формули додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій (формули 7-14)

Обчисліть:

№1. $sin15$ [43, с. 281].

Розв’язання

$$sin15° = \sin(45° - 30°) = sin45° \cdot cos30° - cos45° \cdot sin30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

№2. $cos75°$ [43, с. 283].

Розв’язання

$$cos75° = \cos(30° + 45°) = cos30° \cdot cos45° - sin30° \cdot sin45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

№ 3. Спростіть вираз: $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ [33].

Розв'язання

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Відповідь. 1.

№4. Дано: $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=b$ [50].

Знайти: $tg\alpha$.

Розв'язання

Виразимо кут $\alpha$ через відомі кути $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{4}-\alpha$ , а саме: $\alpha=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Отже отримаємо:

$$tg\alpha=tg\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1-b}{1+b}.$$

Відповідь. $\frac{1-b}{1+b}$.

№ 5. Довести тотожність:

$tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg(\alpha+\beta)$ [7, с. 181].

Доведення

$$tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta=tg(\alpha+\beta)\left(1-\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}\right)=tg(\alpha+\beta)\times$$

$$\times\left(1-\frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)}{tg\alpha+tg\beta}\right)=tg(\alpha+\beta)(1-1+tg\alpha tg\beta)=$$

$$=tg\alpha tg\beta tg(\alpha+\beta).$$

Що й потрібно було довести.

№ 6. Довести, що якщо $tg\alpha = \frac{1}{2}$ і $tg\beta = \frac{1}{3}$, причому $\alpha$ і $\beta$ гострі кути, то $\alpha + \beta = 45°$ [7, с. 182].

Доведення

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1.$$

Звідси, оскільки за умовою $\alpha$ і $\beta$ гострі, то $\alpha + \beta = 45°$. Що й треба було довести.

3. Формули кратних аргументів (формули 15-22)

Спростити вирази:

№ 1. $\frac{sin14\alpha}{cos14\alpha + sin^2 7\alpha}$ [69].

Розв'язання

$$\frac{sin14\alpha}{cos14\alpha + sin^2 7\alpha} = \frac{sin14\alpha}{cos^2 7\alpha - sin^2 7\alpha + sin^2 7\alpha} = \frac{2cos7\alpha \cdot cos7\alpha}{cos^2 7\alpha} = \frac{2cos7\alpha}{cos7\alpha} =$$
$$= 2tg7\alpha.$$

Відповідь. $2tg7\alpha$.

№ 2. $cos^4\alpha - 6cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha + sin^4\alpha$ [59].

Розв'язання

$$cos^4\alpha - 6cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha + sin^4\alpha = (cos^4\alpha - 2cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha + sin^4\alpha) -$$
$$-4cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha = (cos^2\alpha - sin^2\alpha)^2 - (2cos\alpha \cdot sin\alpha)^2 = cos^2 2\alpha - sin^2 2\alpha =$$
$$= cos4\alpha.$$

Відповідь. $cos4\alpha$.

Обчислити:

№ 3. $cos\frac{\pi}{9} \cdot cos\frac{2\pi}{9} \cdot cos\frac{4\pi}{9}$ [61].

Розв'язання

$$cos\frac{\pi}{9} \cdot cos\frac{2\pi}{9} \cdot cos\frac{4\pi}{9} =$$

Відповідь.

№ 4. $sin18°$ [43, с. 204].

Розв'язання.

Скористаємося тотожністю $sin36° = cos54°$.

Нехай $18° = \alpha$, тоді $sin2\alpha = cos3\alpha$;

$$2sin\alpha \cdot cos\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha.$$

Оскільки $cos\alpha \neq 0$, то поділимо обидві частини рівності на цей вираз і отримаємо:

$$2sin\alpha = 4cos^2\alpha - 3;$$

$$2sin\alpha = 4(1 - sin^2\alpha) - 3;$$

$$4sin^2\alpha + 2sin\alpha - 1 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $sin\alpha$, знайдемо:

$sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ або $sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

Оскільки $\alpha = 18°$ (кут 1 координатної чверті), то $sin\alpha > 0$, тому друге значення не підходить.

Отже, $sin18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Відповідь. $sin18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

№ 5. Довести тотожність: $tg\alpha \cdot tg(60° - \alpha) \cdot tg(60° + \alpha) = tg3\alpha$ [66].

Доведення.

$$tg\alpha \cdot tg(60° - \alpha) \cdot tg(60° + \alpha) = tg\alpha \cdot \frac{tg60° - tg\alpha}{1 + tg60° \cdot tg\alpha} \cdot \frac{tg60° + tg\alpha}{1 - tg60° \cdot tg\alpha} =$$

$$= tg\alpha \cdot \frac{tg^2 60° - tg^2\alpha}{1 - tg^2 60° \cdot tg^2\alpha} = tg\alpha \cdot \frac{3 - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} = tg3\alpha.$$

Що й потрібно було довести.

№ 6. Спростіть вираз:

$tg3° \cdot tg17° \cdot tg23° \cdot tg37° \cdot tg43° \cdot tg57° \cdot tg63° \cdot tg77° \cdot tg83°$ [34].

Розв'язання.

Представимо даний вираз у вигляді:

$$tg3° \cdot tg17° \cdot tg23° \cdot tg37° \cdot tg43° \cdot tg57° \cdot tg63° \cdot tg77° \cdot tg83° =$$

$$= (tg3° \cdot tg57° \cdot tg63°) \cdot (tg17° \cdot tg43° \cdot tg77) \cdot (tg23° \cdot tg37° \cdot tg83°) =$$

$$= tg9° \cdot tg51° \cdot tg69° = tg27°.$$

Підчас перетворень було використано тотожність доведену у № 5.

Відповідь. $tg27°$.

4. Формули пониження степення (формули 23-28)

№ 1. Спростити вираз: $2sin^2\frac{\alpha}{2} + cos\alpha$ [50].

Розв'язання.

$$2sin^2\frac{\alpha}{2} + cos\alpha = 2 \cdot \frac{1 - cos\alpha}{2} + cos\alpha = 1 - cos\alpha + cos\alpha = 1.$$

Відповідь. 1.

№ 2. Обчисліть: $sin^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\frac{5\pi}{8} + sin^2\frac{7\pi}{8}$ [22].

Розв'язання.

Нехай м=

Тоді.

$$sin^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\frac{5\pi}{8} + sin^2\frac{7\pi}{8} = \frac{1 - cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1 - cos\frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1 - cos\frac{5\pi}{4}}{2} +$$

$$+ \frac{1 - cos\frac{7\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - cos\frac{\pi}{4} + 1 - cos\frac{3\pi}{4} + 1 - cos\frac{5\pi}{4} + 1 - cos\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Відповідь. 2.

Знайдіть без допомоги таблиць значення функцій:

№ 3. $sin\frac{\pi}{12}$ [60].

Розв'язання.

$$sin\frac{\pi}{12} = \frac{1 - cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{4}}{4}.$$

Оскільки $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, то $sin\frac{\pi}{12} > 0$, тому $sin\frac{\pi}{12} = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$.

Відповідь. $sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$.

№ 4. $tg\frac{5\pi}{8}$ [32].

Розв’язання.

$$tg^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1-cos\frac{5\pi}{8}}{1+cos\frac{5\pi}{8}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

Оскільки $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{8}<\pi$, то $tg\frac{5\pi}{8}<0$, тому

$$tg\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=-\left|\sqrt{2}+1\right|=-\left(\sqrt{2}+1\right)=-\sqrt{2}-1.$$

Відповідь. $-\sqrt{2}-1$.

5. Формули половинного аргументу (формули 29-34)

Обчислити значення виразів, не застосовуючи таблиці тригонометричних функцій та мікрокалькулятор

№ 1. $tg\ 15°$ [60].

Розв’язання.

Оскільки $0°<15°<90°$, то $tg15°>0$.

Тому

$$tg\ 15°=\sqrt{\frac{1-cos30°}{1+cos30°}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}.$$

Відповідь. $tg\ 15°=2-\sqrt{3}$.

№ 2. $sin22°30'$ [32].

Розв’язання.

$$sin22°30' = \sqrt{\frac{1 - cos45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Знак «+» перед коренем взято тому, що кут $22°30'$ належить 1 чверті, а синус у 1 чверті додатний.

Отже, $sin22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Відповідь. $sin22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

№ 3. Довести, що $\frac{1-tg^2 15°}{1+tg^2 15°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [22].

Доведення.

$$\frac{1 - tg^2 15°}{1 + tg^2 15°} = \frac{1 - \frac{1 - cos30°}{1 + cos30°}}{1 + \frac{1 - cos30°}{1 + cos30°}} = \frac{1 + cos30° - 1 + cos30°}{1 + cos30° + 1 - cos30°} = \frac{2cos30°}{2} = cos30° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Що й потрібно було довести.

№ 4. Дано: $cos\alpha = -\frac{4}{5}, 180° < \alpha < 270°$ [61].

Знайти: $sin\frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання.

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}.$$

Оскільки $180° < \alpha < 270°$, то $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$, а тому $sin\frac{\alpha}{2} > 0$.

Отже,

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Відповідь. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

6. Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток (формули 35-48)

№ 1. Обчислити значення виразу: $\frac{cos68° - cos22°}{sin68° - sin22°}$ [43, с. 298].

Розв'язання.

$$\frac{cos68° - cos22°}{sin68° - sin22°} = \frac{-2sin45° \cdot sin23°}{2sin23° \cdot cos45°} = -tg45° = -1.$$

Відповідь. $-1$.

№ 2. Спростити вираз: $tg\alpha - ctg\alpha$ [69].

Розв'язання.

$$tg\alpha - ctg\alpha = tg\alpha - tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{cos\alpha \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{cos\alpha \cdot sin\alpha} =$$

$$= -\frac{sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\frac{1}{2} \cdot 2sin\alpha \cdot cos\alpha} = -\frac{2\,cos2\alpha}{sin2\alpha} = -2ctg2\alpha.$$

Відповідь. $-2ctg2\alpha$.

№ 3. Довести, що коли $\alpha, \beta, \gamma$ – внутрішні кути трикутника $(\alpha + \beta + \gamma = \pi)$, то справджується рівність $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\gamma}{2}$ [7, с. 200].

Доведення.

Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, а $\alpha + \beta = \pi - \gamma$.

Отже,

$$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = (sin\alpha + sin\beta) + \sin\big(\pi - (\alpha + \beta)\big) = 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2} +$$

$$+sin(\alpha + \beta) = 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2} + 2sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2sin\frac{\alpha + \beta}{2}\left(cos\frac{\alpha - \beta}{2} + cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2sin\frac{\pi - \gamma}{2} \cdot 2cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(-\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot 2cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = 4cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Що й треба було довести.

№ 4. Доведіть тотожність $\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha} = tg3\alpha$ [73].

Доведення.

$$\frac{sin\alpha + sin3\alpha + sin5\alpha}{cos\alpha + cos3\alpha + cos5\alpha} = \frac{sin3\alpha + (sin\alpha + sin5\alpha)}{cos3\alpha + (cos\alpha + cos5\alpha)} =$$

$$= \frac{sin3\alpha + 2sin3\alpha \cdot \cos(-2\alpha)}{cos3\alpha + 2cos3\alpha \cdot \cos(-2\alpha)} = \frac{sin3\alpha \cdot (1 + 2cos2\alpha)}{cos3\alpha \cdot (1 + 2cos2\alpha)} = \frac{sin3\alpha}{cos3\alpha} = tg3\alpha.$$

Що й потрібно було довести.

7. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суми (формули 70-80)

№ 1. Доведіть тотожність $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\alpha + sin\beta \cdot cos\beta$ [66].

Доведення.

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \alpha + \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2}(sin2\alpha + sin2\beta) = sin\alpha \cdot cos\alpha + sin\beta \cdot cos\alpha.$$

Що й потрібно було довести.

№ 2. Не користуючись калькулятором, знайдіть значення виразу $cos45° \cdot cos15°$ [60].

Розв’язання.

$$cos45° \cdot cos15° = \frac{1}{2} \cdot (cos30° + cos60°) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

№ 3. Довести, що $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ [22].

Доведення.

$$cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = \frac{sin\frac{\pi}{7} \cdot cos\frac{2\pi}{7} + sin\frac{\pi}{7} \cdot cos\frac{4\pi}{7} + sin\frac{\pi}{7} \cdot cos\frac{6\pi}{7}}{sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$=\frac{sin\frac{3\pi}{7}-sin\frac{\pi}{7}+sin\frac{5\pi}{7}-sin\frac{3\pi}{7}+sin\pi-sin\frac{5\pi}{7}}{2sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-sin\frac{\pi}{7}+sin\pi}{2sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{sin\frac{\pi}{7}}{2sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Що й потрібно було довести.

№ 4. Спростити вираз $sin3\alpha\cdot sin^3\alpha+cos3\alpha\cdot cos^3\alpha$ [27].

Розв'язання.

$$sin3\alpha\cdot sin^3\alpha+cos3\alpha\cdot cos^3\alpha=(sin3\alpha\cdot sin\alpha)\cdot sin^2\alpha+(cos3\alpha\cdot cos\alpha)\cdot cos^2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(cos2\alpha-cos4\alpha)\cdot sin^2\alpha+\frac{1}{2}(cos2\alpha+cos4\alpha)\cdot cos^2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}cos2\alpha\cdot sin^2\alpha-\frac{1}{2}cos4\alpha\cdot sin^2\alpha+\frac{1}{2}cos2\alpha\cdot cos^2\alpha+\frac{1}{2}cos4\alpha\cdot cos^2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}cos2\alpha(sin^2\alpha+cos^2\alpha)+\frac{1}{2}cos4\alpha(cos^2\alpha-sin^2\alpha)=\frac{1}{2}cos2\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}cos4\alpha\cdot cos2\alpha=\frac{1}{2}cos2\alpha\cdot(1+cos4\alpha)=\frac{1}{2}cos2\alpha\cdot 2cos^2 2\alpha=cos^3 2\alpha.$$

Відповідь. $cos^3 2\alpha$.

8. Формули, що виражають тригонометричні функції, через тангенс половинного аргументу (формули 81-84)

№ 1. Обчисліть $\sin(2\alpha+\frac{5\pi}{4})$, якщо $tg\alpha=\frac{2}{3}$ [32].

Розв'язання.

$$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)=sin2\alpha\cdot cos\frac{5\pi}{4}+cos2\alpha\cdot sin\frac{5\pi}{4}=sin2\alpha\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$$

$$+cos2\alpha\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(sin2\alpha+cos2)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2tg\alpha+1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

Знаючи що $tg\alpha=\frac{2}{3}$, отримаємо:

$$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{2}{3}+1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{17}{9}}{\frac{13}{9}}=-\frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

Відповідь. $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

№ 2. Дано $tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{4}$ [32].

Знайти: $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha, \pi<\alpha<2\pi$.

Розв'язання.

$$sin\alpha=\frac{2\cdot(-\frac{3}{4})}{1+\frac{9}{16}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}}=-\frac{3}{2}:\frac{25}{16}=-\frac{24}{25};$$

$$cos\alpha=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}}=\frac{7}{25};$$

$$tg\alpha=\frac{2\cdot(-\frac{3}{4})}{1-\frac{9}{16}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=-\frac{24}{7}=-3\frac{3}{7}.$$

Відповідь. $sin\alpha=-\frac{24}{25}; cos\alpha=\frac{7}{25}; tg\alpha=-3\frac{3}{7}$.

№ 3. Знайти $tg\frac{x}{2}$, якщо відомо, що $sinx-cosx=1{,}4$ [60].

Розв'язання.

Скористаємося формулами 81, 82, враховуючи те, що вони справедливі лише при $x\neq\pi(2n+1), n\in Z$.Але в даному випадку $x$ не може набувати цих значень. Дійсно, якби $x=\pi(2n+1), n\in Z$, то $\sin\left(\pi(2n+1)\right)-\cos\left(\pi(2n+1)\right)=0-$ $-(-1)=1=1{,}4$. Отже, перепишемо дану рівність у вигляді $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$. Нехай $tg\frac{x}{2}=\alpha$, тоді отримаємо рівняння:

$$\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}; 2\alpha-1+\alpha^2-1{,}4-1{,}4\alpha^2=0;\ -0{,}4\alpha^2+2\alpha-2{,}4=0;$$

$$\alpha^2-5\alpha+6=0;\ \left[\begin{array}{l}\alpha=2\\ \alpha=3\end{array}\right..$$

Отже, $tg\frac{x}{2} = 2$ або $tg\frac{x}{2} = 3$.

Відповідь. $tg\frac{x}{2} = 2$ або $tg\frac{x}{2} = 3$.

9. Формули зведення

Спростіть вираз:

№ 1. $sin2281°$ [22].

Розв'язання.

$$sin2281° = \sin(360° \cdot 6 + 121°) = sin121° = \sin(90 + 31°) = cos31°.$$

Відповідь. $cos31°$.

№ 2. $ctg\frac{19\pi}{3}$ [60].

Розв'язання.

$$ctg\frac{19\pi}{3} = ctg\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = ctg\left(2\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) = ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

№ 3. $sin^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) + sin^2(2\pi - \alpha)$ [32].

Розв'язання.

$$sin^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) + sin^2(2\pi - \alpha) = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$$

Відповідь. 1.

№ 4. $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$ [22].

Розв'язання.

$$\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - tg(\pi + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{tg\alpha - tg\alpha - cos\alpha}{-cos\alpha} = 1.$$

Відповідь. 1.

№ 5. $\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2sin^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(6\alpha-\frac{3}{2}\pi)}$ [22].

Розв'язання.

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)} =$$

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 6\alpha\right)} = \frac{cos2\alpha + 2cos^2 2\alpha - 1}{1 + cos2\alpha + cos4\alpha + cos6\alpha} =$$

$$= \frac{cos2\alpha + cos4\alpha}{2cos^2\alpha + 2cos5\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{2cos3\alpha \cdot cos\alpha}{2cos\alpha \cdot (cos\alpha + cos5\alpha)} = \frac{2cos3\alpha \cdot cos\alpha}{2cos\alpha \cdot 2cos3\alpha \cdot cos2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2cos2\alpha.}$$

Відповідь. $\frac{1}{2cos2\alpha.}$.

## 1.6. Обернені тригонометричні функції: означення, графіки та властивості

**Арксинусом** числа $\alpha$ називають кут або число з відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює $\alpha$ [24].

$y = arcsinx$ – функція, обернена до $y = sinx$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Запис $b = arcsina$ означає, що $b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $sinb = a$.

Зауважимо, що у деяких випадках не можна назвати точного значення $arcsina$. Наприклад, $arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, але для $arcsin\frac{1}{5}$ можемо знайти тільки наближене значення.

Властивості функції:

1) область визначення $[-1; 1]$;
2) область значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) функція непарна, бо $[-1; 1]$ – симетрична відносно 0; $\arcsin(-x) = -arcsinx$.

Отже, графік $y = arcsinx$ симетричний відносно початку координат;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: $(0; 0)$,

З віссю ОУ: $(0; 0)$;

6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на відрізку $[-1; 1]$;

7) проміжки знакосталості:

$arcsinx > 0$ при $x \in (0; 1]$,

$arcsinx < 0$ при $x \in [-1; 0)$;

8) найбільше значення – $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, найменше – $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку:

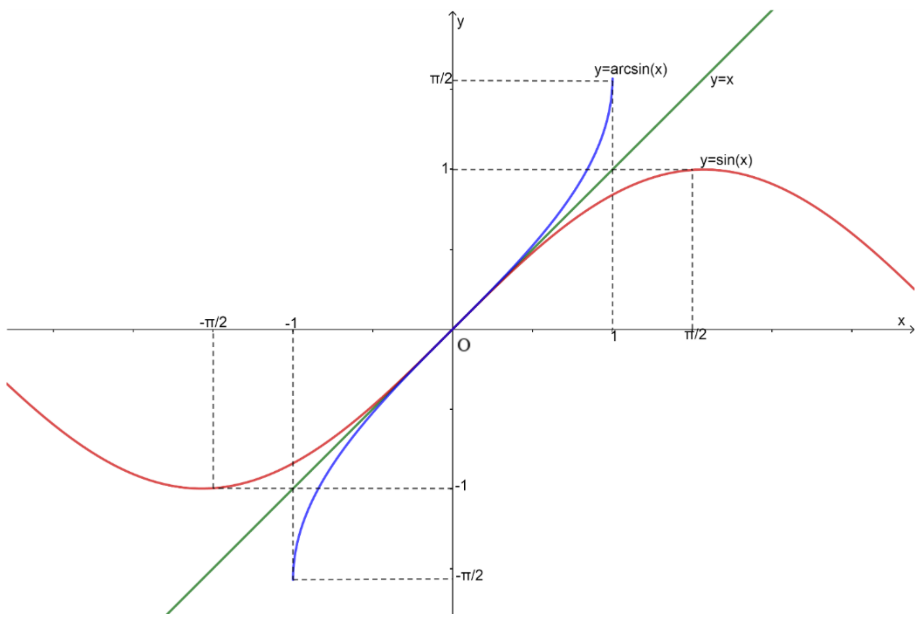



Рис. 1.15. Графік функції арксинус

Звернемо увагу на рівності:

$\arcsin(sinx) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$\sin(arcsinx) = x, -1 \leq x \leq 1$.

**Арккосинусом** числа $\alpha$ називають кут або число з відрізку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює $\alpha$ [24].

$y = arccosx$ – функція, обернена до $y = cosx$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Запис $b = arccosa$ означає, що $b \in [0; \pi]$; $cosb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $[-1; 1]$;

2) область значень $[0; \pi]$;

3) функція не є ні парною, ні непарною;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: $(1; 0)$;

З віссю ОУ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

6) функція спадає від $\pi$ до $0$ на відрізку $[-1; 1]$;

7) проміжки знакосталості:

$arccosx > 0$ на всій області визначення;

8) найбільше значення – $\pi$, якщо $x = -1$, найменше – $0$, якщо $x = 1$;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції $y = arccosx$ зображений на рисунку:

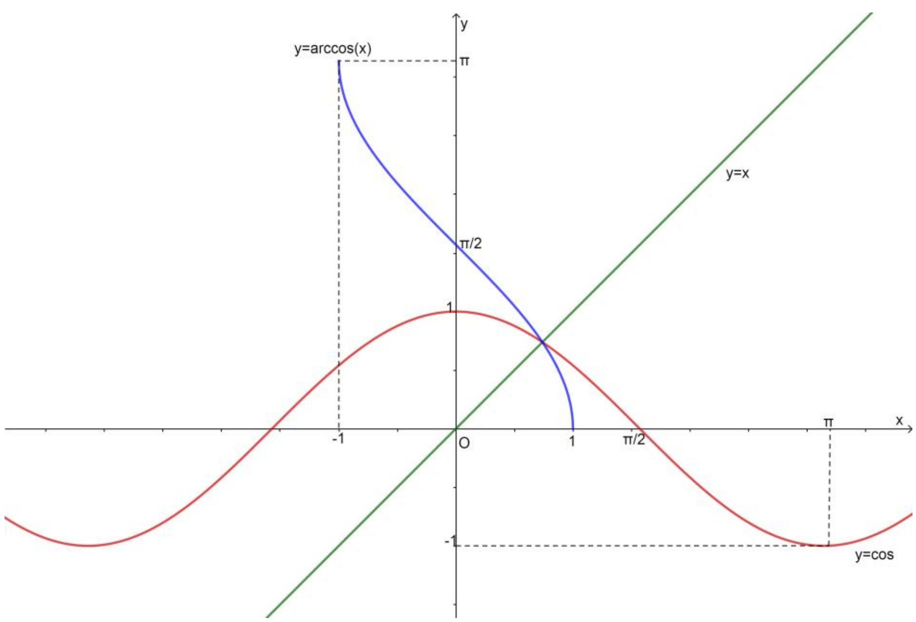



Рис. 1.16. Графік функції арккосинус

Звернемо увагу на рівності:

$\arccos(cosx) = x, 0 \leq x \leq \pi,$

$\cos(arccosx) = x, -1 \leq x \leq 1.$

Зауважимо: $y = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

**Арктангенсом** числа $\alpha$ називають кут або число з відрізку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює $\alpha$ [24].

$y = arctgx$ – функція, обернена до $y = tgx$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Запис $b = arctga$ означає, що $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);\ tgb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;

2) область значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) функція непарна, симетрична відносно 0; $\mathrm{arctg}(-x) = -arctgx$.

Отже, графік симетричний відносно початку координат;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: $(0; 0)$,

З віссю ОУ: $(0; 0)$;

6) функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) проміжки знакосталості:

$arctgx > 0$ при $x > 0$,

$arctgx < 0$ при $x < 0$;

8) функція не набуває найбільшого і найменшого значень;

9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку:

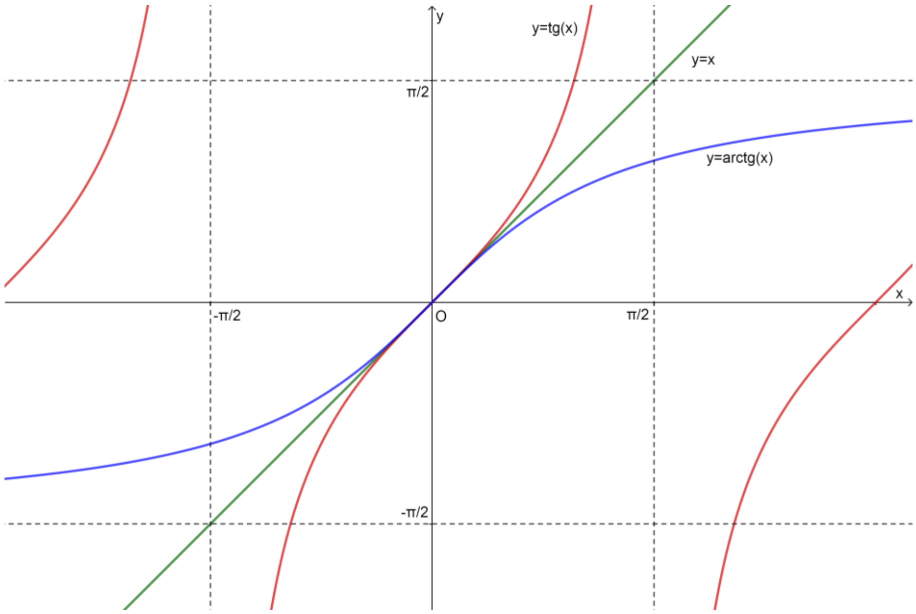



Рис. 1.17. Графік функції арктангенса

Звернемо увагу на рівності:

$\text{arctg}(tgx) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$\text{tg}(arctgx) = x, x \in (-\infty; +\infty)$,

$arctg(-x) = -arctgx$.

**Арккотангенсом** числа $\alpha$ називають кут або число з відрізку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює $\alpha$ [24].

$y = arcctgx$ – функція, обернена до $y = ctgx$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Запис $b = arcctga$ означає, що $b \in (0; \pi)$; $ctgb = a$.

Властивості функції:

1) область визначення $(-\infty; +\infty)$;

2) область значень $(0; \pi)$;

3) функція не є ні парною, ні непарною;

4) функція не є періодичною;

5) координати точок перетину графіка функції з осями координат:

З віссю ОХ: немає;

З віссю ОУ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

6) функція спадає від $\pi$ до 0 на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

7) додатна на всій області визначення;
8) функція не набуває найбільшого і найменшого значень.;
9) неперервна в області визначення.

Графік функції зображений на рисунку:

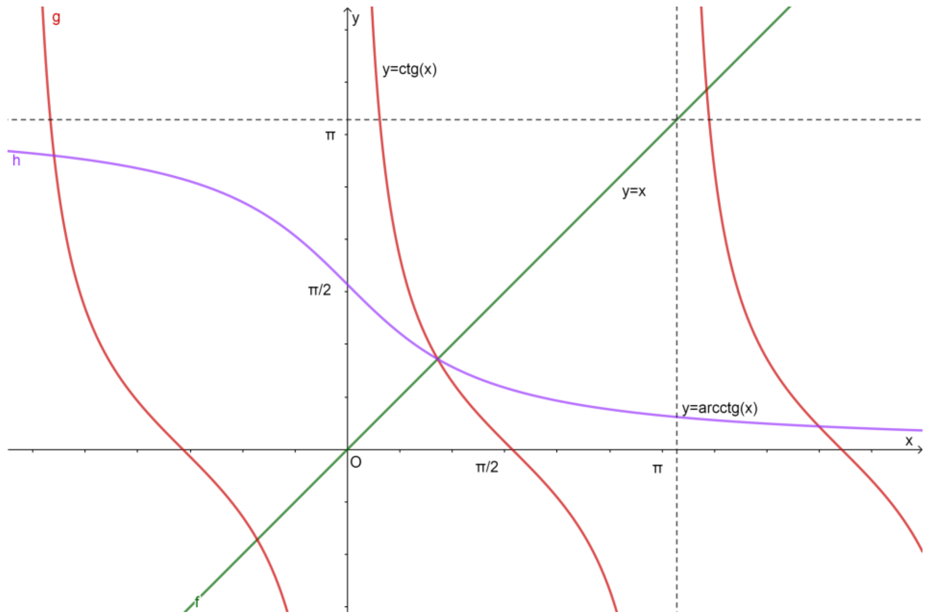



Рис. 1.18. Графік функції арккотангенса

Звернемо увагу на рівності:

$\operatorname{arcctg}(ctgx) = x, 0 \leq x \leq \pi,$

$\operatorname{ctg}(arcctgx) = x, -\infty \leq x \leq \infty.$

Зауважимо: $y = \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, -\infty \leq x \leq \infty.$

## 1.7. Найпростіші тригонометричні рівняння

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції.

Розв’язати тригонометричне рівняння – означає знайти множину значень невідомого, що задовольняють його [27].

Найпростіші тригонометричні рівняння [27, 29].

Рівняння виду $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a,$ де $x$ – невідома величина, $a$ – довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Рівняння $\sin x = a$ [27].

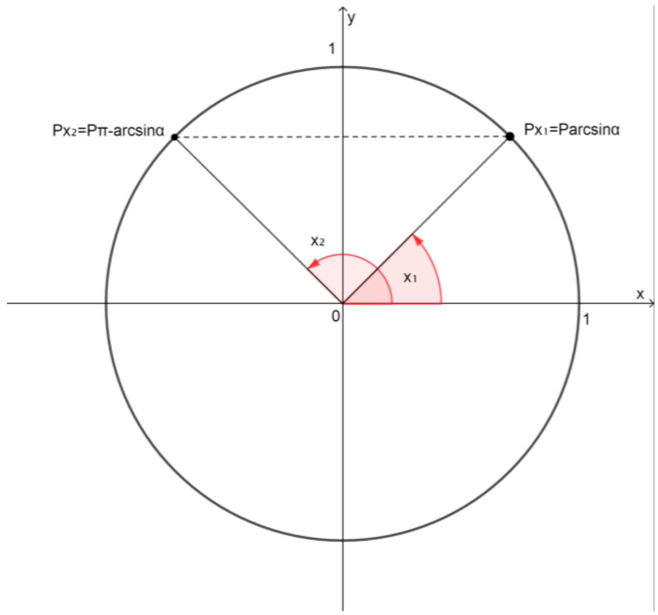



Рис. 1.19. Рівняння $sinx = a$ на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \sin x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arcsina + 2\pi k, & k\epsilon Z; \\ x_2 = \pi - arcsina + 2\pi k, & k\epsilon Z. \end{cases}$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z.$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|sinx| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $sinx = -1$.

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a = 0$, $sinx = 0$.

$$x = k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a = 1$, $sinx = 1$.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Зауваження:

1) $\arcsin(-\alpha) = -arcsin\alpha.$

2) Якщо $0 < \alpha < 1$,то рівняння $sinx = -\alpha$ має таку множину розв'язків:

$x = (-1)^{k+1} arcsina + \pi k, k\epsilon Z.$

Приклад 1.1. $sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ [25, с. 291].

Розв’язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in Z$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Приклад 1.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ [4, с. 206].

Розв’язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Приклад 1.3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1$ [8].

Розв’язання.

За формулою коренів рівняння $sina = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 1.4. $sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$ [4, с. 206].

Розв’язання.

$$sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z;$$

$$x = \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z;$$

$$x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1}+6k}, k \in Z.$

Приклад 1.5. $\sqrt{3}cosx + sinx = 2$ [4, с. 206].

Розв’язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$sin\frac{\pi}{3}cosx + cos\frac{\pi}{3}sinx = 2.$$

Використовуючи формулу синуса суми $sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Рівняння $cosx = a$ [29].

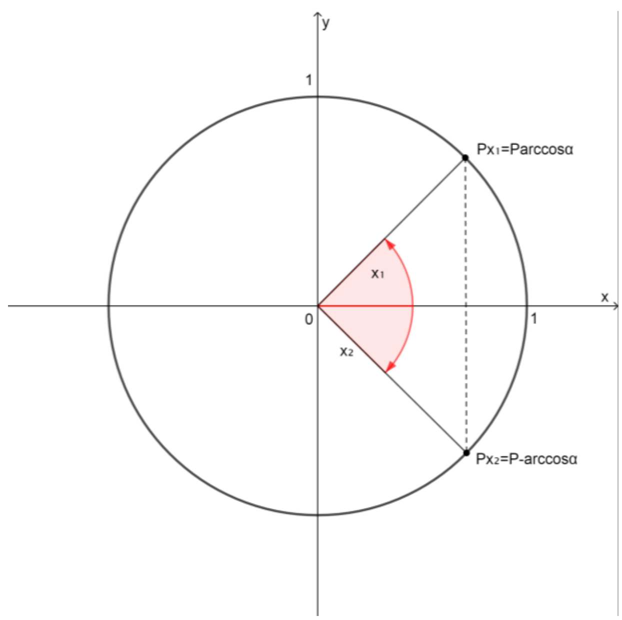



Рис. 1.20. Рівняння $cosx = a$. на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \cos x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z; \\ x_2 = -arccosa + 2\pi k, & k\epsilon Z. \end{cases}$

Ці формули можна об’єднати в одну: $x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв’язків немає, бо $|cosx| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a$= $-1$, $cosx = -1$.

$$x = \pi + 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a$= 0, $cosx = 0$.

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Якщо $a$= 1, $cosx = 1$.

$$x = 2k\pi, \qquad k\epsilon Z.$$

Зауваження: $\arccos(-\alpha) = \pi - arccos\alpha$.

Приклад 1.6. $cos4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ [4, с. 199].

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = \pm\arccos(b) + 2\pi n, n \in Z$, можемо записати:

$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$.

Далі отримаємо:

$4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Приклад 1.7. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ [4, с. 199].

Розв'язання.

Маємо:

$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

$\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z$.

Відповідь. $x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z$.

Приклад 1.8. $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$ [4, с. 199].

Розв’язання.

Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Отримаємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \arccos 0 + \pi n, n \in Z.$$

Тоді:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$7x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n, n \in Z;$$

$$7x = \pm \frac{7\pi}{10} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z$.

Приклад 1.9. $cos\pi x^2$ =1 [4, с. 199].

Розв’язання.

Маємо:

$\pi x^2 = 2\pi n, n \in Z;$

$x^2 = 2n, n \in Z.$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in N \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

1. Рівняння t$gx = a\ i\ ctgx = a$ [27, 29].

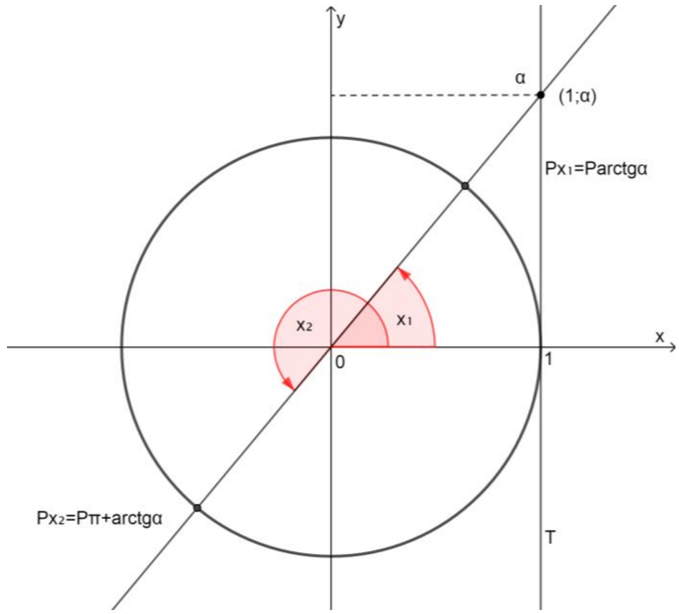



Рис. 1.21. Рівняння $tgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа $a$ на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут $\alpha$ такий, що $tg\ x = a$. Це кут $\alpha = arctga.$ Враховуючи періодичність функції $y = tg\ x$, одержуємо формулу коренів рівняння $tg\ x = a$: $x = arctga + \pi k, k\epsilon Z$.

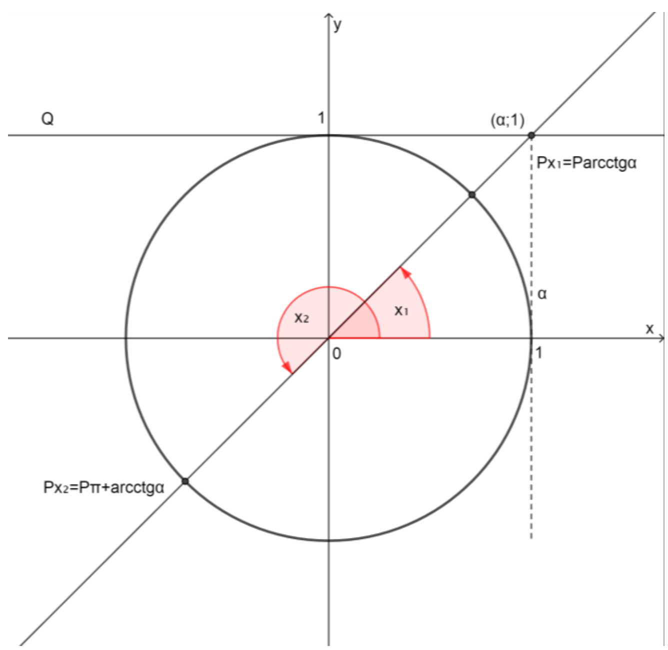



Рис. 1.22. Рівняння $ctgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа $a$ на проміжку $(0;\pi)$ існує тільки один кут $\alpha$ такий, що $ctgx = a$. Це кут $\alpha = arcctga.$ Враховуючи періодичність функції $y = ctgx$, одержуємо формулу коренів рівняння $ctg\ x = a$: $x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z$.

Окремі випадки

Якщо $tgx = 0$, то

$$x = \pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $ctgx = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Зауваження:

1) $arctg(-\alpha) = -arctg\alpha,$

2) $arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha.$

Приклад 1.10. $tg\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$ [4, с. 213].

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + nk, k \in Z;$$

$$\frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + nk, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$

Приклад 1.11. $ctg(\frac{2\pi}{3} - x) = -1$ [4, с. 213].

Розв'язання.

Маємо:

$$ctg\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = arcctg1 + nk, k; \in$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + nk, k \in Z;$$

$$x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{11\pi}{12} + nk, k \in Z.$

Приклад 1.12. $tg2x = 5$ [25, с. 285].

Розв'язання.

$$2x = atctg5 + \pi k, k \in Z;$$

$$x = 0{,}5arctg5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Відповідь. $0{,}5arctg5 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Приклад 1.13. $ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [25, с. 285].

Розв'язання.

За формулою $x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z.$ маємо:

$$x = arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k\epsilon Z; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$

## 1.8. Найпростіші тригонометричні нерівності

Нерівності, які містять зміну під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними.

Наприклад, $\cos x \leq \frac{1}{3}; 5sin^2x + 3\cos x > 6$ тощо.

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a, \cos x <> a, tg\ x <> a, ctg <> a.$

1. Нерівності $sinx > a; sinx < a$ [30].

$$sinx > a$$

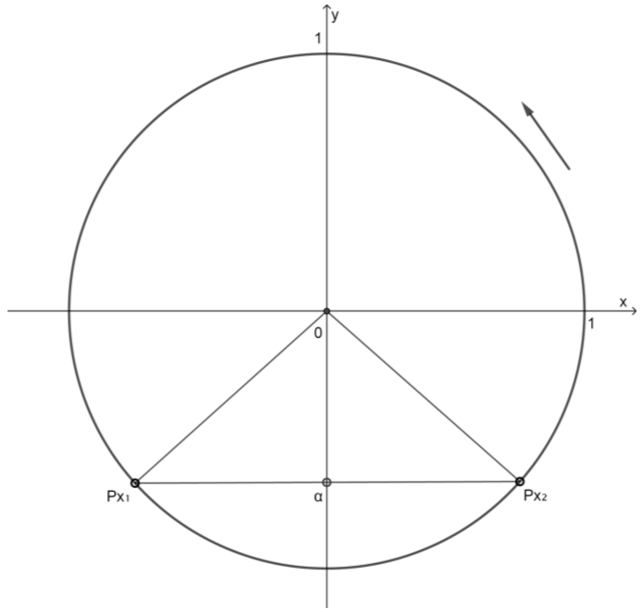



Рис. 1.23. Нерівність $sinx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcsina, x_2 = \pi - arcsina, x_1 < x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

$$sinx < a$$

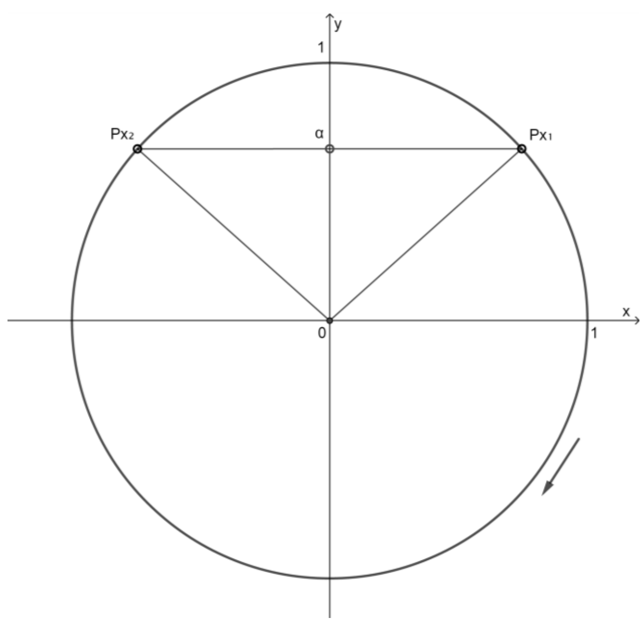



Рис. 1.24. Нерівність $sinx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcsina, x_2 = -\pi - arcsina, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

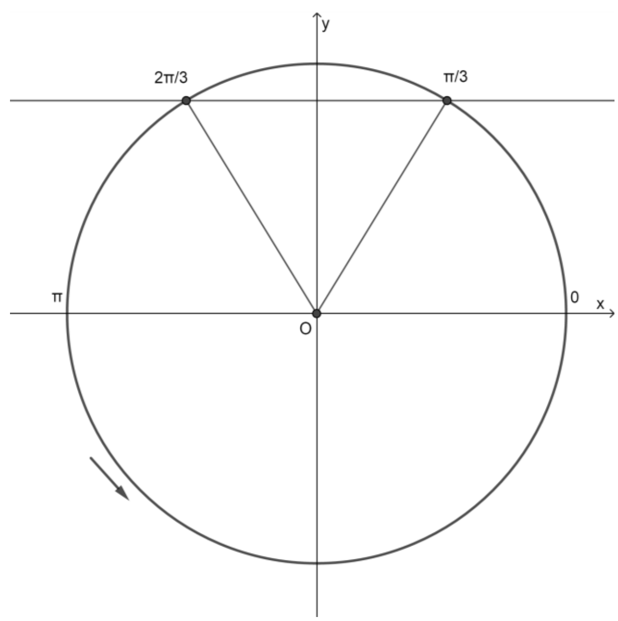
Якщо $a \geq 1$, то $x \in R.$

Приклад 1.14. $sinx < \frac{\sqrt{2}}{3}$ [4, с. 250].

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| \leq 1$, отже розвязок нерівності існує.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$або $\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{\sqrt{2}}{3}$, другої дуги – меншу.




Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$

2. Нерівності $cosx < a; cosx > a$ [58].

$$cosx < a$$

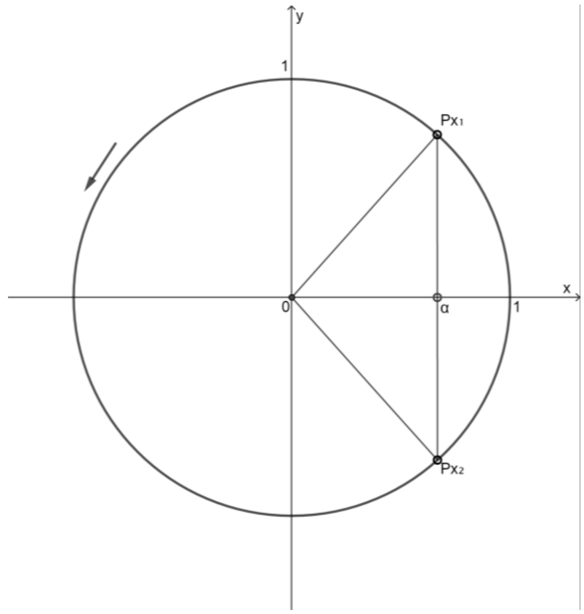



Рис. 1.25. Нерівність $cosx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arccosa, x_2 = 2\pi - arccosa, x_1 < x_2.$$

Якщо $a \leq -1$, то розв’язків немає.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то $arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a > 1$, то $x \in R$.

$$cosx > a$$

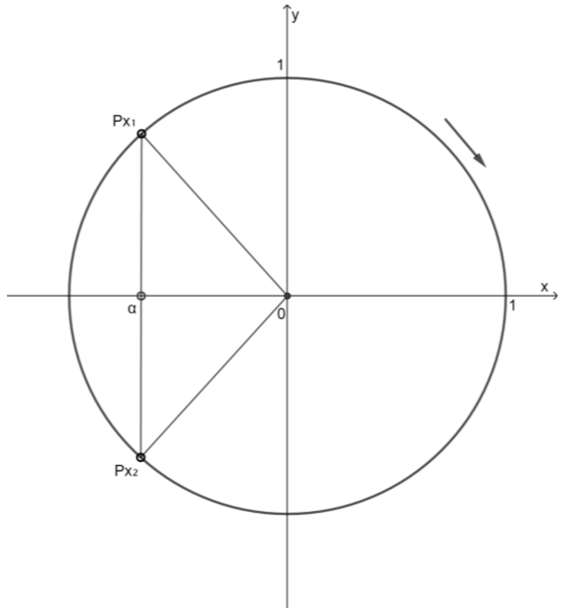



Рис. 1.26. Нерівність $cosx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcscosa, x_2 = -arccosa, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

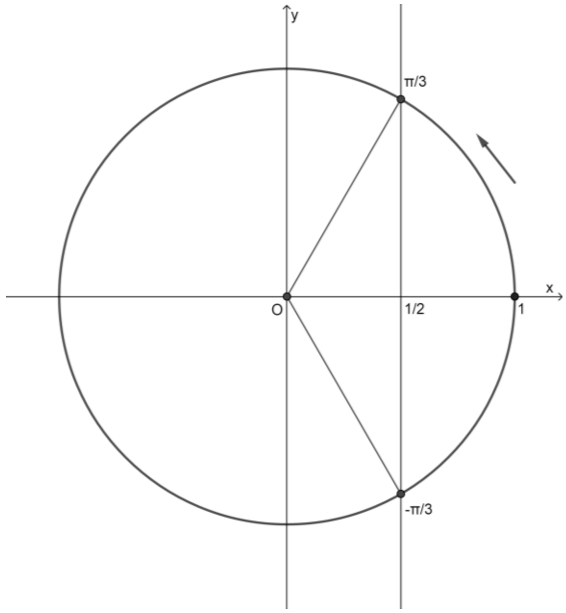
Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-arccosa + 2\pi n < x < arcscosa + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a \geq 1$, то розв’язків немає.

Приклад 1.15. $cosx \geq \frac{1}{2}$ [50].

Розв’язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-arccos\frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу.




Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$

3. Нерівність $tgx > a; tgx < a$ [58].

$$tgx > a$$

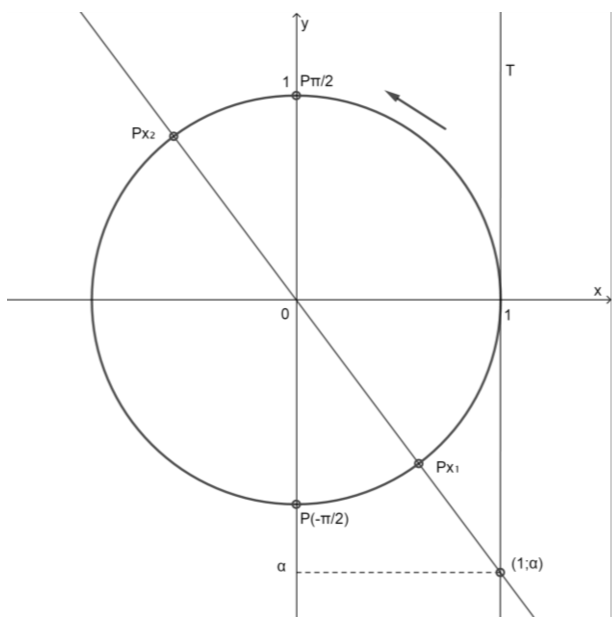



Рис. 1.27. Нерівність $tgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$tgx < a$$

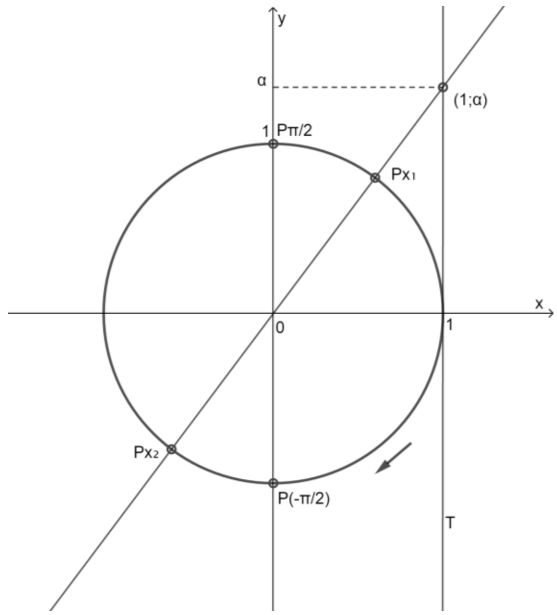



Рис. 1.28. Нерівність $tgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in Z$.

Приклад 1.16. $tgx \geq 2$ [73].

Розв'язання.

Враховуючи, що функція $y = tgx$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z,$$

отримаємо:

$$arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

4. Нерівність $ctgx > a; ctgx < a$ [30].

$$ctgx < a$$

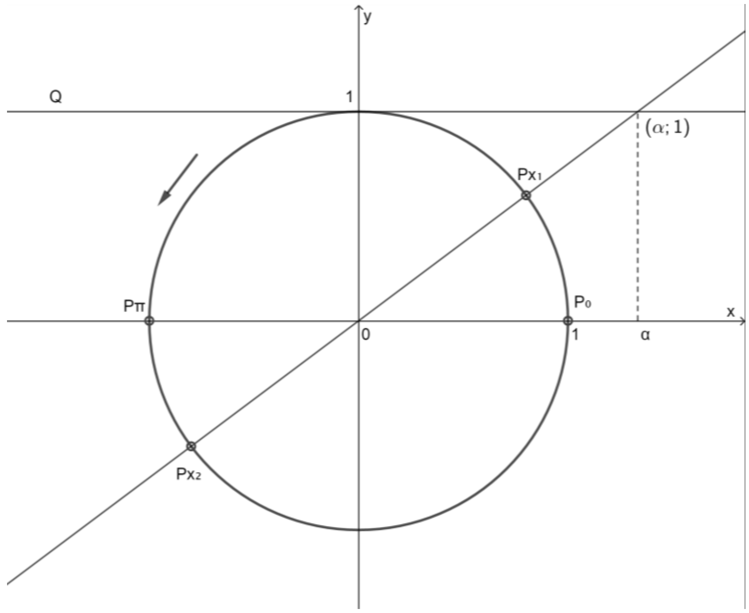



Рис. 1.29. Нерівність $ctgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 < \pi.$$

Множина розв’язків: $arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z.$

$$ctgx > a$$

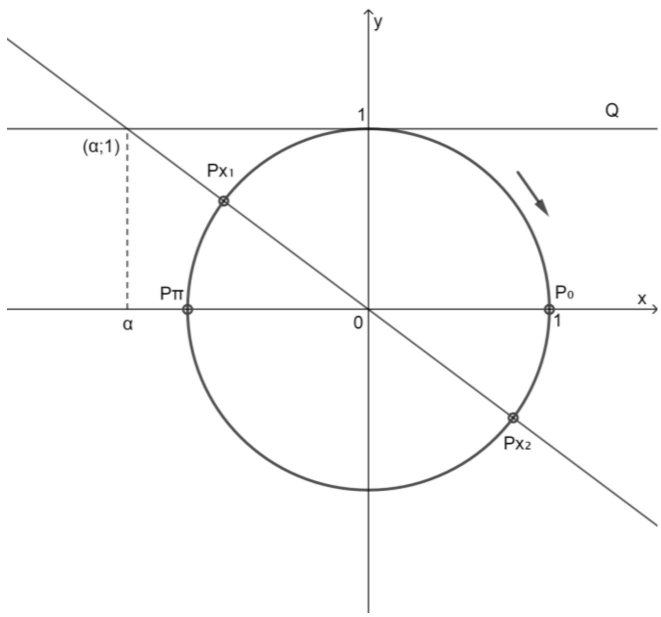



Рис. 1.30. Нерівність $ctgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 > 0.$$

Множина розв’язків: $\pi n < x < arcctga + \pi n, n \in Z.$

# РОЗДІЛ 2.
# МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

У розділі розглянуто методику та методичні особливості розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

## 2.1. Методики розв’язування тригонометричних рівнянь

I. Рівняння, що зводяться до алгебраїчних

Це рівняння, до складу яких входять однакові або різні тригонометричні функції одного й того самого аргументу [3]. Це, наприклад, рівняння виду:

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx + c = 0;\ a \cdot cos^3x + b \cdot cosx + c = 0;$$
$$a \cdot tg^4 3x + b \cdot tg^2 3x + c = 0;\ a \cdot ctg^2 2x + b \cdot ctg2x + c = 0;$$
$$a \cdot sin^2x + b \cdot cosx + c = 0;\ a \cdot cos^2x + b \cdot sinx + c = 0;$$
$$a \cdot tgx + b \cdot ctgx = 0.$$

Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв’язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції [3].

Приклад 2.1. $cos^2x - 5cosx = 6$ [2, с. 221].

Розв’язання.

$$cos^2x - 5cosx - 6 = 0.$$

Нехай $cosx = t$, де $|t| \leq 1$, тоді маємо:

$$t^2 - 5t - 6 = 0;$$
$$t_1 = -1, t_2 = 6.$$

Корінь $t_2 = 6$ не задовольняє умову $|t| \leq 1$.

Повернемося до заміни:

$$cosx = -1;$$
$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.1. $tgx - 2ctgx + 1 = 0$ [43, с. 337].

Розв'язання.

$$tgx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} + 1 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$a - \frac{2}{a} + 1 = 0;\ \frac{a^2 + a - 2}{a} = 0;$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = 1, \end{array}\right. \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

1) $tgx = -2$;

$$x = -arctg2 + \pi n, n \in Z;$$

2) $tgx = 1$;

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь.1) $x = -arctg2 + \pi n, n \in Z$;

2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.2. $2sin^2x + cos4x - 2 = 0$ [4, с. 231].

Розв'язання.

Можна записати: $1 - cos2x + 2cos^2 2x - 1 - 2 = 0$.

Звідси $2cos^2 2x - cos2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $cos2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши його, отримаємо:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $cos2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}\pi n, n \in Z.$

Приклад 2.3. $sinx - 3cos2x = 2$ [4, с. 233].

Розв’язання.

Використовуючи формулу $cos2x = 1 - 2sin^2x$, перетворимо дане рівняння:

$sinx - 3(1 - 2sin^2x) - 2 = 0;$

$6sin^2x + sinx - 5 = 0.$

Нехай $sinx = t$. Отримаємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0.$

Звідси $t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}.$

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} sinx = -1, \\ sinx = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо:

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n arcsin\frac{5}{6} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=(-1)^n arcsin\frac{5}{6}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$

II. Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до них Рівняння виду:

$$a \cdot sinx + b \cdot cosx = 0;$$

$$a \cdot sin^2x + b \cdot sinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x = 0;$$

$$a \cdot sin^3x + b \cdot sin^2x \cdot cosx + c \cdot sinx \cdot cos^2x + d \cdot cos^3x = 0.$$

також називають однорідними відносно $sinx$ і $cosx$. Сума показників степенів при $sinx$ і $cosx$ у всіх членів такого рівняння однакова. Ця сума називається степенем однорідності рівняння або показником однорідності [43].

У загальному випадку однорідне рівняння можна записати так:

$$a_0 \cdot sin^n x + a_1 \cdot sin^{n-1} x \cdot cosx + a_2 \cdot sin^{n-2} x \cdot cos^2 x + \dots + a_n \cdot cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – дані числа, $a_0 \neq 0$, $n$ – натуральне число.

Розв'язують однорідні рівняння $n$-го степеня шляхом ділення обох частин на $cos^n x \neq 0$ (або $sin^n x \neq 0$) і зведенням його до цілого алгебраїчного відносно функції $tgx$ (або $ctgx$):

$$a_0 \cdot tg^n x + a_1 \cdot tg^{n-1} x + a_2 \cdot tg^{n-2} x + \dots + a_{n=}0;$$

$$(\text{або } a_n \cdot ctg^n x + a_{n-1} \cdot ctg^{n-1} x + a_{n-2} \cdot ctg^{n-2} x + \dots + a_0 = 0);$$

при цьому область визначення рівняння звужується на значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (або $x = \pi n$), де $n \in Z$.

Зауважимо, що попередньо перед діленням слід довести, що $cos^n x \neq 0$ (або $sin^n x \neq 0$).

До вигляду однорідних можна звести деякі рівняння, що не є однорідними, шляхом множення на тригонометричну одиницю $(sin^2 x + cos^2 x)^k, k \in Z$. Так, до вигляду однорідного можна звести рівняння виду $a_0 \cdot cos^{2n} x + a_1 \cdot cos^{zn-1} x \cdot sinx + a_2 \cdot cos^{2n-2} x \cdot sin^2 x + \dots + a_n \cdot sin^{2n} x = b$.

Для цього необхідно помножити $b$ на тригонометричну одиницю $b = b \cdot (sin^2 x + cos^2 x)^k$, підібравши показник $k$ так, щоб рівняння стало однорідним [43].

Зауваження. Іноді, під час розв'язання неповних однорідних рівнянь, необхідно звертати увагу на яку з функцій $cos^n x$ або $sin^n x$ можна ділити. Так, наприклад, в рівнянні $cos^2 x + sinx \cdot cosx = 0$, не можна ділити на $cos^n x \neq 0$, бо можемо загубити множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні $cosx$ може дорівнювати нулю. Отже, дане рівняння можна розв'язати, поділивши його обидві частини на $sin^n x \neq 0$ або способом розкладання на множники його лівої частини [43].

Приклад 2.4. $sinx - cosx = 0$ [25, с. 310].

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx - 1 = 0;$$

$$tgx = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.5. $3sin^2x + sinx \cdot cosx - 2cos^2x = 0$ [43, с. 338].

Розв'язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Значення $x$, при яких $cosx = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $cosx = 0$, то мала б виконуватись рівність $3sin^2x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $cos^2x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$

$$Д = 1 + 24 = 25;\ \sqrt{Д} = 5;$$

$$a_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3};\ a_2 = \frac{-1+5}{6} = -1.$$

Повернемось до заміни:

1) $tgx = \frac{2}{3}$;

$$x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$$

2) $tgx = -1$;

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$;

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.6. $sin^3x = cosx$ [2, с. 226].

Розв'язання.

Помножимо праву час тину на рівняння на тригонометричну одиницю $sin^2x + cos^2x$, отримаємо:

$$sin^3x = cosx \cdot (sin^2x + cos^2x);$$

$$sin^3x = cosx \cdot sin^2x + cos^3x;$$

$$sin^3x - cosx \cdot sin^2x - cos^3x = 0.$$

Дістали однорідне рівняння третього степеня, відносно $sinx$ і $cosx$. У випадку $cosx = 0$, розв'язків, очевидно, немає.

Поділивши обидві частини останнього на $cos^3x \neq 0$, отримаємо:

$$tg^3x - tg^2x - 1 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді маємо:

$$y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи штучний спосіб:

$$y^3 - y^2 + y^3 - 1 = 0;$$

$$y^2(y-1) + (y-1) \cdot (y^2 + y + 1) = 0;$$

$$(y-1) \cdot (2y^2 + y + 1) = 0;$$

$$y - 1 = 0;$$

$$y = 1;$$

або

$$2y^2 + y + 1 = 0;$$

$$Д = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Отже, $2y^2 + y + 1 > 0$ для будь-якого $y \in R$. Рівняння дійсних коренів немає.

Повернемося до заміни:

$$tgx = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.7. $7sin^2x - 8sinxcosx - 15cos^2x = 0$ [43, с. 310].

Розв'язання.

Якщо $cosx = 0$, то з даного рівняння випливає, що $sinx = 0$. Але $cosx$ і $sinx$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $sin^2x + cos^2x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел $x$, при яких $cosx \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $cos^2x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7sin^2x}{cos^2x} - \frac{8sinxcosx}{cos^2x} - \frac{15cos^2x}{cos^2x} = 0;$$

$$7tg^2x - 8tgx - 15 = 0.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = \frac{15}{7}. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -arctg\frac{15}{7} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=-arctg\frac{15}{7}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$

III. Рівняння, що розв'язуються способом розкладання на множники

Під час розв'язання тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівнянь переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку, використовуючи всі відомі способи розкладання на множники, а саме: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення, штучні способи та використання тригонометричних формул. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток кількох співмножників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають силу [43].

Приклад 2.8. $sin2x - cosx = 0$ [43, с. 303].

Розв'язання.

$$sin2x - cosx = 0;$$

$$2sinx \cdot cosx - cosx = 0;$$

$$cosx(2sinx - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ sinx = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.9. $cos^2 2x - cos2x = 0$ [52, с 22].

Розв'язання.

$$cos^2 2x - cos2x = 0;$$

$$cos2x \cdot (cos2x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos2x = 0, \\ cos2x = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $\pi k, k \in Z$.

Приклад 2.10. $tg^3 x = tgx$ [31].

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z$.

$$tg^3 x = tgx;$$

$$tg^3x - tgx = 0;$$

$$tgx(tg^2x - 1) = 0;$$

$$tgx(tgx - 1)(tgx + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 0, \\ tgx = 1, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z; \end{array}\right.$$

Об'єднавши множини розв'язки другого і третього рівнянь сукупності, остаточно отримаємо розв'язки вихідного рівняння:

$$x_1 = \pi n, n \in Z;\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z.$$

Відповідь. $\pi n, n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}, p \in Z$.

IV. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад 2.11. $\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1$ [55].

Розв'язання.

$$\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1;$$

$$2sin\frac{15° + x + 45° - x}{2} \cdot cos\frac{15° + x - 45° + x}{2} = 1;$$

$$2sin30° \cdot \cos(x - 15°) = 1;$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15°) = 1;$$

$$\cos(x - 15°) = 1;$$

$$x - 15° = 360° \cdot n, n \in Z;$$

$$x = 15° + 360° \cdot n, n \in Z.$$

Відповідь. $15° + 360° \cdot n, n \in Z$.

Приклад 2.12. $sin7x - sinx = cos4x$ [2, с. 220].

Розв'язання.

$$sin7x - sinx = cos4x;$$

$$2sin\frac{7x-x}{2}\cdot cos\frac{7x+x}{2}=cos4x;$$

$$2sin3x\cdot cos4x-cos4x=0;$$

$$cos4x(2sin3x-1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos4x=0, \\ sin3x=\frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ 3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z, \\ 3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z, \\ 3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, k\in Z. \end{array}\right.$

V. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад 2.13. $cos^2\frac{3x}{2}=\frac{1}{4}$ [2, с. 228].

Розв'язання.

$$cos^2\frac{3x}{2}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{1+cos3x}{2}=\frac{1}{4};$$

$$1+cos3x=\frac{1}{2};$$

$$cos3x=-\frac{1}{2};$$

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, n\in Z;$$

$$3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$

Приклад 2.14. $0{,}5(cos5x+cos7x)-cos^2 2x+sin^2 3x=0$ [52].

Розв’язання.

$$0{,}5(cos5x+cos7x)-cos^2 2x+sin^2 3x=0;$$

$$0{,}5(cos5x+cos7x)-\frac{1+cos4x}{2}+\frac{1-cos6x}{2}=0;$$

$$2cos6x\cdot cosx-cos4x-cos6x=0;$$

$$2cos6x\cdot cosx-2cos5x\cdot \cos(-x)=0;$$

$$2cos6x\cdot cosx-2cos5x\cdot \cos x=0;$$

$$2\cos(cos6x-cos5x)=0;$$

$$-4cosx\cdot sin\frac{11x}{2}\cdot sin\frac{x}{2}=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx=0, \\ sin\frac{11x}{2}=0, \\ sin\frac{x}{2}=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ \frac{11x}{2}=\pi k, \\ \frac{x}{2}=\pi m; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ x=\frac{2\pi k}{11}, k\in Z, \\ x=2\pi m, m\in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки корені третього рівняння сукупності містяться серед коренів другого рівняння, то остаточним розв’язком даного рівняння будуть групи коренів:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\ x_2=\frac{2\pi k}{11}, k\in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\ \frac{2\pi k}{11}, k\in Z.$

VI. Рівняння, що розв’язуються за допомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Деякі тригонометричні рівняння під час перетворень можуть бути зведені до рівності тригонометричних функцій. Такі рівняння розв’язуються на основі рівності однойменних тригонометричних функцій [55].

1) Для того, щоб синуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$sinx=siny\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=\pi+2\pi k, k\in Z, \\ x-y=2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

2) Для того, щоб косинуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$cosx = cosy \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 2\pi k, k \in Z, \\ x - y = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

3) Для того, щоб тангенси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо одночасне виконання двох умов:

$$tgx = tgy \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x - y = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Приклад 2.15. $sin4x = sin3x$ [55].

Розв’язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} 4x + 3x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ \quad 4x - 3x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 7x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ \quad x = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}, k \in Z, \\ \quad x = 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z, \\ x=2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

Приклад 2.16. $tg3x \cdot tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ [55].

Розв’язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $tg3x$.

Це можливо, бо з умови слідує, що $tg3x \neq 0$.

Отже,

$$tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{tg3x};\ tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = ctg3x;$$

$$tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) (*)$$

На основі умови рівності тангенсів двох кутів, отримаємо:

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi k, k \in Z;$$

$$8x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z.$$

При кожному значенні $x$ з цієї множини розв'язків кожна з частин рівняння $(*)$ існує.

Відповідь. $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z.$

VII. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад 2.17. $sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0$ [31].

Розв'язання.

$$sin6x \cdot sinx - cos6x \cdot cosx = 0;$$

$$-(cos6x \cdot cosx - sin6x \cdot sinx) = 0;$$

$$-cos7x = 0;$$

$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n,}{7} n \in Z.$

Приклад 2.18. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ [52].

Розв'язання.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$sin\frac{\pi}{4} \cdot cosx + cos\frac{\pi}{4} \cdot sinx + cosx \cdot cos\frac{\pi}{4} + sinx \cdot sin\frac{\pi}{4} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot cosx + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot sinx + cosx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + sinx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$2cosx + 2sinx = 0; cosx + sinx = 0.$$

Маємо однорідне рівняння І степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx + 1 = 0; tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

VIII. Рівняння, що розв'язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад 2.19. $sin2x \cdot sin6x = sin3x \cdot sin5x$ [52, с. 30].

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(cos4x - cos8x) = \frac{1}{2}(cos2x - cos8x);$$

$$cos4x - cos8x = cos2x - cos8x;$$

$$cos4x - cos2x = 0;$$

$$-2 \cdot sin3xsinx \cdot= 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} sin3x = 0, \\ sinx = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3x = \pi n, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки множина розв'язків другого рівняння сукупності включається в множину розв'язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.20. $8sin5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = 1$ [55].

Розв'язання.

$$sin5x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right) = \frac{1}{8};$$

$$sin5x \cdot \frac{1}{2}(cos10x - cos\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{8};$$

$$sin5x \cdot (cos10x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4};$$

$$2sin5x \cdot cos10x + sin5x = \frac{1}{2};$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (sin15x - sin5x) + sin5x = \frac{1}{2};$$

$$sin15x = \frac{1}{2};$$

$$15x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{90} + \frac{\pi k}{15}, k \in Z.$

IX. Рівняння виду $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$

В рівнянні $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$; $a, b$ і $c$ – будь-які дійсні числа.

Якщо $a = b = 0$, а $c \neq 0$ то рівняння розв'язків не має.

Якщо $a = b = c$, то рівняння має безліч розв'язків, тобто рівняння перетворюється у тотожність.

Якщо $a, b$ і $c$ – довільні дійсні числа, то рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ можна розв'язати різними способами. Розглянемо деякі з них.

Перший спосіб – введення допоміжного кута

Для розв'язання рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ винесемо за дужки вираз $\sqrt{a^2 + b^2}$, отримаємо:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot cosx\right) = c.$$

Так як $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$ і $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$, то можна підібрати такий кут $\varphi$, щоб $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = cos\varphi, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = sin\varphi$. Тоді рівняння нобуде вигляду:

$\sqrt{a^2 + b^2}(cos\varphi \cdot sinx + sin\varphi \cdot cosx)$; $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi) = c$,

звідки $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Це рівняння має розв'язки, якщо $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$, тобто $a^2 + b^2 \geq c^2$, тоді

$$x + \varphi = (-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in Z;$$

Кут $\varphi$ можна знайти з рівності $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{b}{a}$, звідки $\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$.

Якщо ж $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, тобто $a^2 + b^2 < c^2$, тоді рівняння розвязків не має.

Відповідь. $(-1)^k \cdot arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n, n \in Z$.

Приклад 2.21. $\sqrt{3}sinx - cosx = 1$ [43].

Розв’язання.

$$a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, a^2 + b^2 = 4, c^2 = 1, a^2 + b^2 > c^2.$$

Отже, рівняння має розв’язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ за дужки і отримаємо:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx\right) = 1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx = \frac{1}{2}.$$

Використаємо заміну $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = sin\frac{\pi}{6}$.

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$sinx \cdot cos\frac{\pi}{6} - cosx \cdot sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Другий спосіб – метод раціоналізації

Цей метод полягає у застосуванні універсальної підстановки, тобто формул, що виражають $sinx, cosx, tgx$ і $ctgx$ через $tg\frac{x}{2}$. Тому рівняння

$a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ завжди може бути зведене до раціонального алгебраїчного рівняння відносно $tg\frac{x}{2}$ за допомогою формул 81-84.

При такій заміні область визначення рівняння звужується на значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$. Тому під час розв'язування рівнянь цим способом слід перевірити додатково, чи не має серед значень $x = \pi(2n+1), n \in Z$ розв'язків даного рівняння.

Зауваження! Цей метод розв'язування рівнянь використовують у крайніх випадках, коли не можна знайти більш простіший спосіб розв'язування, тому що під час здійснення заміни можна отримати алгебраїчні рівняння високих степенів.

Приклад 2.22. $5sinx - cosx = 5$ [52, с. 19].

Розв'язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях $x$. Здійснюючи заміну за допомогою формул 81, 82, отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5;$$

яке визначено при $x \neq \pi(2n+1), n \in Z$, тобто при переході від $sinx$ і $cosx$ до $tg\frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$.

Нехай $tg\frac{x}{2} = t$, тоді отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5;$$

$$10t - 1 + t^2 = 5 + 5t^2; 4t^2 - 10t + 6 = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0;\ t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = 1, \\ tg\frac{x}{2} = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{x}{2} = arctg\frac{3}{2} + \pi k; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$.

Так як $2\pi$ – період $sinx$ і $cosx$, то достатьо перевірити значення $x = \pi$:

$$5sin\pi - cos\pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n+1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Третій спосіб – зведення до однорідного відносно $sinx$ та $cosx$.

Використовуючи формули подвійного аргументу, перепишемо рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ у вигляді:

$$a \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) + b \cdot co\,s\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = c \cdot 1;$$

$$2a \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + b \cdot \left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) = c \cdot \left(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}\right);$$

тобто отримаємо однорідне рівняння другого порядку відносно $sin\frac{x}{2}$ та $cos\frac{x}{2}$:

$$(c+b) \cdot sin^2\frac{x}{2} - 2a \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + (c-b) \cdot cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

розв'язання якого розглядалося у пункті II.

Четвертий спосіб – піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Можна піднести обидві частини рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ до квадрату і звести його до однорідного:

$$(a \cdot sinx + b \cdot cosx)^2 = c^2;$$

$$a^2 \cdot sin^2x + 2 \cdot asinx \cdot bcosx + b^2 \cdot cos^2x = c^2 \cdot (sin^2x + cos^2x);$$

$$(a^2 - c^2) \cdot sin^2x + 2 \cdot asinx \cdot bcosx + (b^2 - c^2) \cdot cos^2x = 0.$$

Цей спосіб розв'язання неприйнятий, бо отримаємо сторонні корені.

П'ятий спосіб – графічний.

Можна переписати рівняння $a \cdot sinx + b \cdot cosx = c$ у вигляді:

$$a \cdot sinx = c - b \cdot cosx.$$

Побудуємо графіки функцій $y_1 = a \cdot sinx;\ y_2 = c - b \cdot cosx$.

Абсциси точок перетину цих графіків будуть розв'язками даного рівняння. Цей спосіб розв'язування розглянуто в пункті XIII.

X. Рівняння, раціональні відносно виразів $sinx \neq cosx$ та $sinx \cdot cosx$

Під час розв'язування рівнянь виду $F(sinx \neq cosx\ , sinx \cdot cosx) = 0$ доцільно застосовувати підстановку $sinx \pm cosx = t$, тоді після піднесення останньої рівності до квадрата отримаємо:

$$2sinx \cdot cosx = \pm(t^2 - 1),$$

а саме рівняння після підстановки змінних зведеться до алгебраїчного [55].

Приклад 2.23. $sinx - 2sinx \cdot cosx = 1 - cosx$ [55].

Розв'язання.

$$sinx + cosx - 2sinx \cdot cosx - 1 = 0.$$

Нехай $sinx + cosx = t$, де $|t| \leq \sqrt{2}$, тоді

$$2sinx \cdot cosx = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0;\ t^2 - t = 0;$$

$$t^2(t - 1) = 0;$$

$$t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 0, \\ sinx + cosx = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x + \frac{\pi}{4} = \pi n, nZ \in, \\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Приклад 2.24. $sin^4 2x + cos^4 2x = sin2x \cdot cos2x$ [73, с. 122].

Розв'язання.

$$sin^4 2x + cos^4 2x = sin2x \cdot cos2x;$$

$$(sin^2 2x + cos^2 2x)^2 - 2sin^2 2x \cdot cos^2 2x = sin2x \cdot cos2x.$$

Нехай $sin2x \cdot cos2x = t$, Зрозуміло, що $|t| \le \frac{1}{2}$.

Отримаємо:

$$1 - 2t^2 = t;\ 2t^2 + t - 1 = 0;$$

$$= 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9;\ \sqrt{Д} = 3;$$

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2};\ t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Корінь $t_2 = -1$ не задовольняє умову $|t| \le \frac{1}{2}$.

Отже, повернемося до заміни:

$$sin2x \cdot cos2x = \frac{1}{2};$$

$$sin4x = 1;$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

XI. Дробово-раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад 2.25. $\frac{2sin^2x + 3sinx}{1 - cosx} = 0$ [52, с. 34].

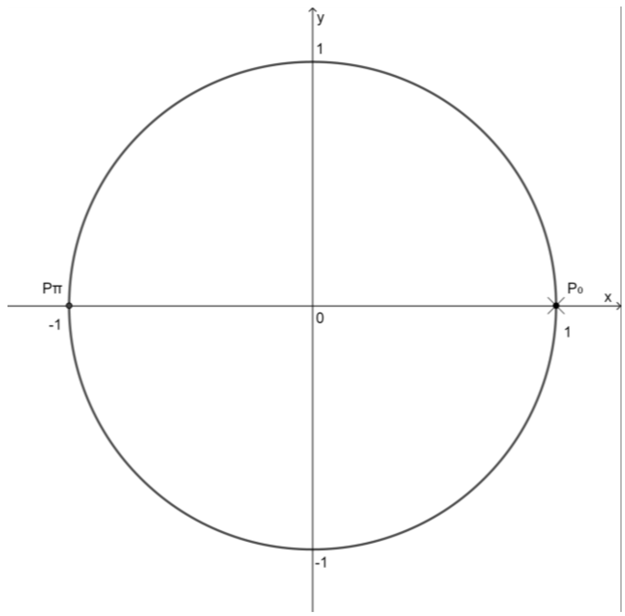
Розв'язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2sin^2x + 3sinx = 0, \\ 1 - cosx \ne 0; \end{cases} \begin{cases} 2sinx(sinx + 1{,}5) = 0, \\ cosx \ne 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = -1{,}5, \end{array}\right. \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} sinx = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками рівняння $sinx = 0$ системи. Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$.




Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.26. $\frac{sin^4x-1}{cos^4x} = 1$ [55].

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $cosx \neq 0; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$$sin^4x - 1 = cos^4x;$$

$$sin^4x - cos^4x = 1;$$

$$(sin^2x - cos^2x)(sin^2x + cos^2x) = 1;$$

$$-(cos^2x - sin^2x) = 1;$$

$$cos2x = -1;$$

$$2x = \pi + 2\pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Оскільки множина розв'язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

XII. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад 2.27. $4arctg(x^2-3x-3)-\pi=0$ [31].

Розв'язання.

$$4arctg(x^2-3x-3)-\pi=0;$$

$$arctg(x^2-3x-3)=\frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$$x^2-3x-3=1;$$

$$x^2-3x-4=0;$$

$$x_1=-1;\ x_2=4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

Приклад 2.28. $arcsin4x+\arcsin(1-4x)=\frac{\pi}{3}$ [55].

Розв'язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1-4x))=\sin\left(\frac{\pi}{3}-arcsin4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1-4x=sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos(arsin4x)-cdos\frac{\pi}{3}\cdot\sin(arcsin4x);$$

$$1-4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-16x^2}-\frac{1}{2}\cdot 4x;$$

$$2-4x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-16x^2};$$

$$4-16x+16x^2=3-48x^2;$$

$$64x^2-16x+1=0;\ (8x-1)^2=0; x=0{,}125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x = 0{,}125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. 0,125

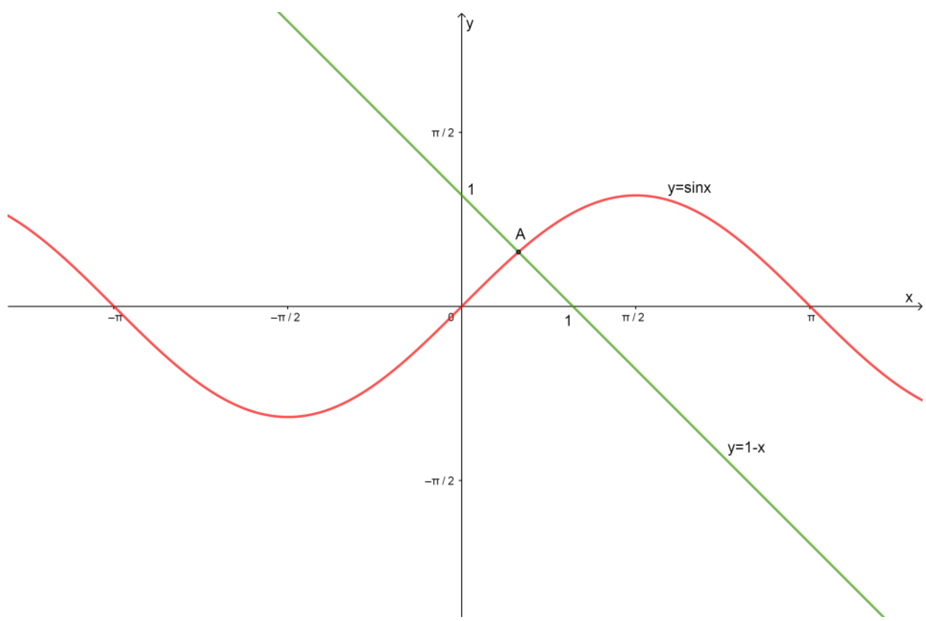
XIII. Розв'язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Іноді під час розв'язування практичних задач, доводиться стикатися з такими рівняннями, для розв'язування яких іноді неможливо взагалі вказати способу, який би дозволив знайти корені абсолютно точно. В таких випадках обмежуються знаходженням лише наближених значень коренів. Одним з таких способів є – графічний.

Приклад 2.29. $sinx = 1 - x$ [52].

Розв'язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = sinx$ і $1 - x$.




Ці графіки перетинаються в одній точці $A$. Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0{,}5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0{,}5 \rightarrow sinx \approx 0{,}4794, 1 - 5 = 0{,}5$. Отже, $sinx < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $sinx = 1 - x$ буде більший ніж 0,5.

Перевіримо значення $x = 0{,}6$. Маємо: $sinx \approx 0{,}5446, 1 - x = 0{,}4$. Отже, $sinx > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь $x_0$ повинен бути менший, ніж 0,6.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0{,}5; 0{,}6]$. Тому з точністю до 0,1:

$x_0 \approx 0{,}5$ (з недостачею), $x_0 \approx 0{,}6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0{,}5$

XIV. Розв'язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад 2.20. $cos3x + cos\frac{5x}{2} = 2$ [55].

Розв'язання.

Оскільки $|cos3x| \leq 1$ і $\left|cos\frac{5x}{2}\right| \leq 1$, то

$$\left|cos3x + cos\frac{5x}{2}\right| \leq 2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} cos3x = 1, \\ cos\frac{5x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \frac{4\pi k}{5}, k \in Z. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$;

$$5\pi n = 6\pi k; 5n = 6k.$$

Маємо: $n = 6m; k = 5m, m \in Z$.

Отже, $x = 4\pi m, m \in Z$.

Відповідь. $4\pi m, m \in Z$.

Приклад 2.31. $sin^n x + cos^n x = 1, n \in Z$ [55].

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то рівняння зводиться до вигляду $sinx + cosx = 1$ (IX тип)

Якщо $n = 2$ маємо тотожність $sin^2 x + cos^2 x = 1$, де $x$ – будь-яке дійсне число.

При $n \geq 3$, якщо $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$, маємо

$$\begin{cases} sin^n x < sin^2 x, \\ cos^n x < cos^2 x, \end{cases}$$

бо показникова функція з основою, меншою за одиницю, спадна. Додавши почлено отримані нерівності, знайдемо, що:

$sin^n x + cos^n x < 1, n \geq 3$, при всіх ч,для яких $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$.Таким чином:

a) Якщо $n$ – непарне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = 1, \end{cases}$

з яких відповідно отримаємо розв'язки даного рівняння $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ або $x = 2\pi n, n \in Z$.

b) Якщо $n$ – парне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = \pm 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = \pm 1, \end{cases}$

з яких отримуємо розв'язки даного рівняння у вигляді $x = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$.

XV. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами

Приклад 2.32. $cos3x = m \cdot cosx$ [52].

Розв'язання.

Використовуючи формулу 20, отримаємо:

$$4cos^3 x - 3cosx - mcosx = 0;$$

$$cosx \cdot (4cos^2 x - 3 - m) = 0;$$

$$cosx = 0 \text{ або } 4cos2x - 3 - m = 0.$$

1) $cosx = 0;$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

2) $4cos^2 x - 3 - m = 0;$

$$4 \cdot \frac{1 + cos2x}{2} - 3 - m = 0;$$

$$2 + 2cos2x - 3 - m = 0;$$

$$2cos2x = m + 1;$$

$$cos2x = \frac{m+1}{2}.$$

$2x = \pm arccos\frac{m+1}{2} + 2\pi n, n \in Z,$ якщо $-1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1;$

$x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \pm\frac{1}{2}arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$

Приклад 2.33. Для кожного значення параметра $a$ розв'язати рівняння $sin^6x + cos^6x = a$ [31].

Розв'язати.

Здійснюючи перетворення виразу, що стоїть у лівій частині рівняння:

$$sin^6x + cos^6x = (sin^2x + cos^2x)^3 - 3sin^2x \cdot cos^2x(sin^2x + cos^2x) =$$
$$= 1 - \frac{3}{4}sin^2 2x = 1 - \frac{3(1 - cos4x)}{8} = \frac{5 + 3cos4x}{8}.$$

Отже, $\frac{5+3cos4x}{8} = a;$

$$3cos4x = 8a - 5;$$

$$cos4x = \frac{8a-5}{3}.$$

Це рівняння має розв'язки:

$$x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

якщо $-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1$, тобто $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

При інших значеннях параметра $a$ розв'язки немає

Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$, то розв'язків немає;

якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

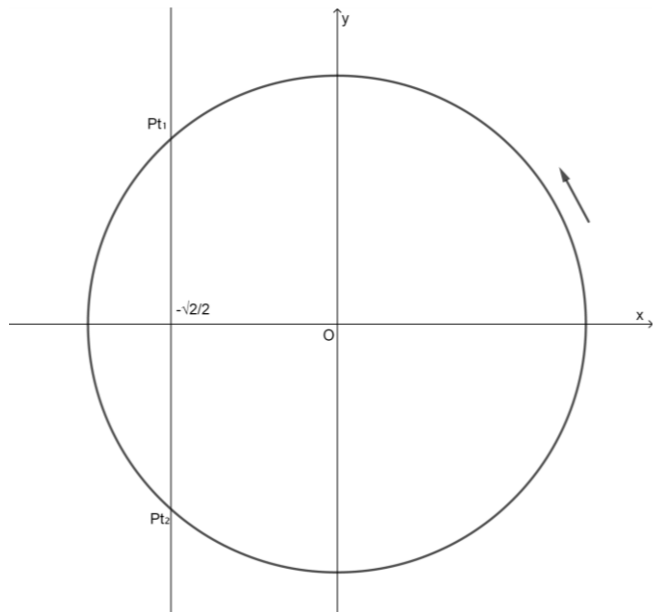
## 2.2. Методи розв'язування тригонометричних нерівностей

I. Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Приклад 2.34. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ [52, с. 64].

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.




Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

Запишемо умову, за якої точка t належить дузі $P_1P_2$: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z.$ Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

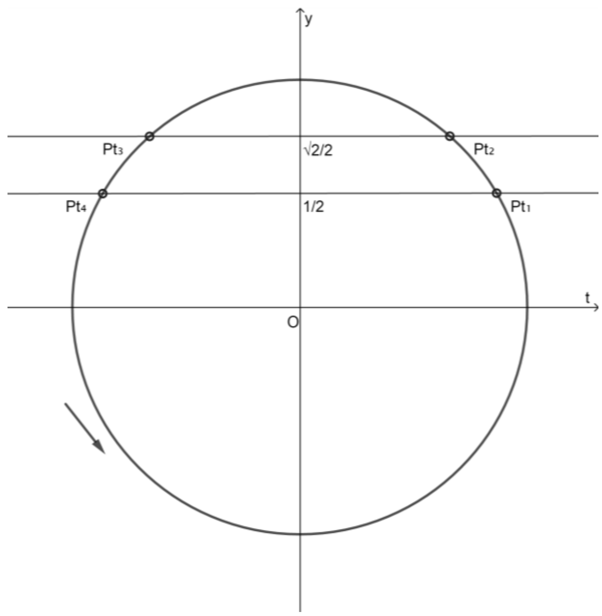
$-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k\epsilon Z.$

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right], k\epsilon Z.$

II. Подвійні тригонометричні нерівності

Приклад 2.35. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ [25, с. 323].

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги $P_1P_2$ і $P_3P_4$).




Знайдемо значення $t_1, t_2, t_3, t_4.$ здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2, t_3 < t_4.$

$$t_1 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};\ t_3 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - arcsin\ \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

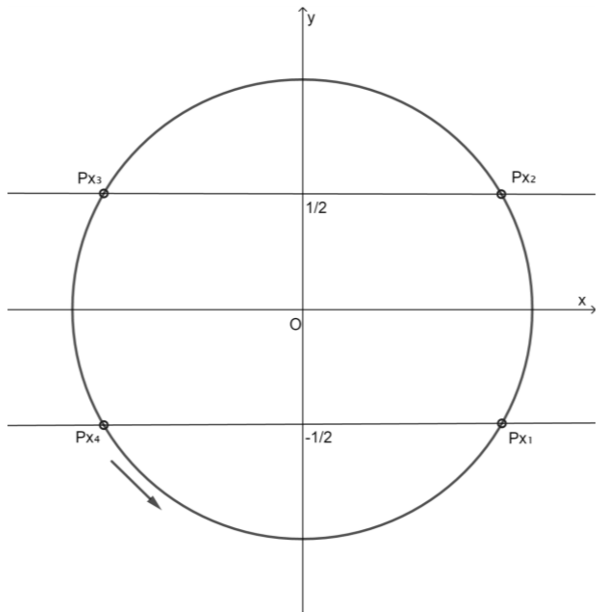
Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно $X$: $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z.$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k\epsilon Z.$

III. Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Приклад 2.36. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$ [52, с. 72].

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги $P_1P_2$ і $P_3P_4$).




Знайдемо значення $x_1, x_2, x_3, x_4$, виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2,\ x_3 < x_4,\ x_1 = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};\ x_2 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ x_3 = \pi - arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6};$ $x_4 = \pi + arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка $x$ є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z.$ Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги $P_1P_2$ і $P_3P_4$ симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k), k\epsilon Z.$

## 2.3. Методичні особливості розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей

Тригонометрія вважається одним із найскладніших розділів у шкільному курсі математики. Виконання завдань з цього розділу викликає серйозні проблеми у школярів.

Для того, що мотивувати учнів вивчати тригонометрію і математику загалом, потрібно показати на прикладах, де можна застосувати ті чи інші знання та вміння. Важливо навести не тільки один приклад, який знайомий учням, наприклад використання тригонометрії у фізиці та астрономії, а варто пригадати інші наукові галузі, такі як: навігація, акустика, оптика, електроніка, сейсмологія, метеорологія, океанологія, картографія, топографія та багато інших. Особливо цікавим є використання тригонометрії у медицині (ультразвукове дослідження, комп'ютерна томографія) [1].

Над розробленням методики вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей працювали такі методисти, як Бевз Г.П., Бевз В.Г., Слєпкань З.І. ті ін., але розроблені методики не завжди відповідають новим підручникам з алгебри і початків аналізу для 10 класу.

Проаналізувавши літературу [6, 52], можна зробити такі висновки.

Процес розвитку вмінь і навиків розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності можна умовно поділити на 5 етапів:

1) підготовчий;
2) формування вмінь розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння;
3) розв'язування інших видів тригонометричних рівнянь;
4) формування вмінь розв'язувати тригонометричні нерівності;
5) розв'язування тригонометричних нерівностей інших видів.

Ціль першого етапу полягає в ознайомлені учнів з поняттями тригонометричних функцій та обернених до них. Загалом вивчення теми «Тригонометрія» розпочинається з 8 класу. Саме тут учні вперше знайомляться з поняттями тригонометричних функцій і виконують найпростіші вправи, наприклад: знайти за таблицями значення гострих кутів, якщо $cosx = 0{,}0175, sinx = 0{,}5015$. У 9 класі, після введення понять обернених тригонометричних функцій, учням пропонують знайти множину розв'язків деякого рівняння. У 10 класі перед темою «Тригонометричні рівняння та нерівності», окремо виділено тему

«Тригонометричні функцій», де детально розглядаються основні поняття про тригонометричні функції, та вводяться деякі співвідношення між ними [54].

Другий етап безпосередньо пов'язаний з розв'язанням найпростіших тригонометричних рівнянь в 10 класі. Тут детально розглядається розв'язання рівняння $cosx = a.$ Аналогічно до попереднього вчитель з допомогою учнів виводить формулу коренів рівняння $sinx = a.$ Аналогічні міркування проводять для розв'язання рівнянь $tgx = a, ctgx = a.$ Автор зауважує, що для наочності і кращого розуміння та сприймання матеріалу розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь потрібно супроводжувати зображенням коренів на одиничному колі чи графіках функцій. [54].

Коли учні достатньо зрозуміли як розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння, варто розпочинати третій етап, з введення функції $y = arccosx$ та її властивості. Аналогічно – функції $y = arcsinx$ та, $y = arctgx$ та, $y = arcctgx$ та їх властивості. Після цього потрібно поступово ускладнювати вправи і розглядати різні види тригонометричних рівнянь. Рекомендується спочатку розглянути тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних, розв'язування рівнянь методом розкладання на множники, а згодом познайомити учнів з більш складнішими видами і методами розв'язування тригонометричних рівнянь. [6, 54].

Четвертий етап розпочинається після формування в учнів розв'язування тригонометричних рівнянь загалом. Детально розглядають розв'язання нерівностей $sinx > a, sinx < a$ та $tgx > a, tgx < a.$ Аналогічно розв'язують нерівності виду $cosx > a, cosx < a$ та $ctgx > a, ctgx < a.$ Розв'язування тригонометричних нерівностей відбувається графічно та демонструється на прикладах [54].

Після опрацювання матеріалу про найпростіші нерівності, можна перейти до п'ятого етапу, який переважно використовується на поглибленому рівні вивчені математики. Тут вчитель показує і пояснює, як розв'язувати рівняння з модулями, подвійні нерівності, та нерівності з складним аргументом [6].

Варто зауважити, що ці 5 етапів не завжди відповідають начальним програмам або підручника.

# РОЗДІЛ 3.
# ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ І ПРЕДМЕТНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ» ЗА ДОПОМОГОЮ ІКТ

У розділі виявлено деякі особливості використання математичних програмних засобів на уроках математики, наведені методики розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей за допомогою засобів Gran 1, MAPLE.

## 3.1. Деякі особливості використання математичних програмних засобів на уроках математики

Сучасний етап розвитку системи освіти характеризується все більшим використанням комп’ютерних засобів в навчанні. Враховуючи цей факт, була створена велика кількість програм різних рівнів складності і методики їх застосування при вчені математики. Завдяки реалізації таких програм навчальні заклади були облаштовані комп’ютерною технікою і підключені до глобальної мережі Інтернет, а вчителі в свою чергу покращили свій рівень комп’ютерної грамотності [56].

Технічні засоби навчання достатньо добре себе зарекомендували. Їх функції різноманітні, але в основному вони полягають в тому, щоб допомогти розкрити зміст і об’єм нових понять, спряти формуванню необхідних навиків, бути засобом контролю і самоконтролю [26].

Найбільш відомими програмними продуктами для комп’ютерного супроводу розв’язування різноманітних задач з математики є Derive, Eureka, MathCad, MathLab, Mathematika, MapleV, Gran1, Gran-2D, Gran-3D, Advanced Grapher, Математика+ тощо. Варто зауважити, що не всі ці програми можна використовувати в школі. Однією з таких є програма Mathematika, для вивчення якої потрібно проводити більшу кількість уроків, порівняно з іншими погромами.

При всіх позитивних моментах, можна виділити і декілька негативних, кі в загальному можна поділити на дві групи:

- недоліки програмного забезпечення;
- помилки користувача.

При використані певної програми, варто враховувати ї особливості. Для прикладу, деякі програми розв'язують різноманітні рівняння методом символьних перетворень. бувають випадки коли програма показує неправильну відповідь, зокрема, що рівняння немає розв'язки, хоча насправді вони є або виводить лише окремі корені рівнянь, без врахування, наприклад, періоду функції. Докладні приклади можна знайти в [18].

Помилки другої групи найчастіше пояснюються відсутністю у користувачів остатніх знань програми, ведення даних у програмі, а рідше проблеми з використанням комп'ютера.

Для того, щоб користуватися програмою необхідно знати, як потрібно вводити математичні вирази. Це є однією із найголовніших проблем, оскільки дуже часто учні намагаються в програмі записати ідентичний приклад з зошита.

Для прикладу розглянемо вираз $\frac{\sqrt[3]{cos^2 5x+3}}{e^x}+\frac{\sqrt{x}}{7x-2}$, запис якого переважно записується у всіх програмах так: *(cos(5*x)^2+3)^(1/3)/exp(x) sqrt(x)/(7*x 2)* [12].

При введені цього виразу учні можуть допускати такі помилки:

1. Пропуск знака множення. Наприклад, замість *cos(5*x)* записується *cos(5x)* аналогічно запису в зошиті. Але деякі програми не вимагають запису знака множення, наприклад програми Derive, MathCad тощо.

2. Пропуск дужок. Наприклад, замість *cos(5*x)* пишуть *cos5x* або *cos5*x* , а замість *x/(7*x–2)* – вираз *x/7*x–2*. Це пояснюється незнанням пріоритету виконання операцій, неуважністю учня або ж звичкою попускати знаки, які не записуються у зошиті. Учням варто наголошувати, що в програмах передбачено тільки обчислення квадратного кореня, а для обчислення інших кренів потрібно використовувати властивості кореня. Наприклад, $\sqrt[3]{cos^2 5x+3}=(cos^2 5x+3)^{1/3}$.

3. Неправильне використання дії піднесення до степеня. Знаючи, що запис виразу $cos^2 5x$ передбачає спочатку запис піднесення косинуса до квадрату, а вже потім запис аргументу функції, учні дуже часто намагаються це так і записати в програмі записі – *cos^2(5*x)*. Існує проблема не розуміння запису функції *exp(x),* яка вже означає піднесення числа е до степеня х, тому намагаються записати *exp^x* або *exp^(x)*, що є помилкою.

4. Недостатнє знання правил запису виразів в конкретній програмі. Хоча всі програми схожі, але деякі відмінності у введені виразі все ж таки існують. Наприклад, у деяких програмах можна пропускати знак множення, в інших можна не оголошувати змінні, або ж навпаки оголошення є обов'язковим.

Варто зауважити, який би програмний засіб не був використаний, завжди є ймовірність помилки при розв'язувані математичних задач. Це не означає, що потрібно відмовлятись від використання відповідних програм, навіть якщо вони і містять певні недоліки, оскільки «переваги однієї системи важать більше, ніж аналогічні недоліки ряду систем, бо ці переваги завжди є реальними, а вказані недоліки можна подолати» [12].

Зменшити кількість таких недоліків можна і необхідно. Для цього розробники програмного забезпечення повинні вносити корективи у відповідні алгоритми опрацювання даних, в чому їм повинні допомогти вчителі та методисти, тримаючи з розробниками зв'язок та повідомляючи їх про знайдені недоліки, висувати свої пропозиції щодо вдосконалення програмного забезпечення.

## 3.2. Розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей за допомогою ППЗ GRAN1

Програний засіб GRAN1, який був розроблений М.І. Жалдаком та його учнями, призначений для розв'язання математичних задач, включаючи ті, які входять в шкільний курс математики [19].

Ця програма є найбільш використаною в школах України. Її застосовують при розв'язувані різних типів математичних задач, побудови графіків функцій та дослідження властивостей функцій. Вчителі зауважують, що завдяки GRAN1 в учнів збільшується мотивація навчальної діяльності не тільки щодо математики, а й до окремих її тем [17].

Оскільки вивчення тригонометрії є важким для учнів, застосування цієї програми на уроках значно полегшує сприймання та розуміння матеріалу. Також використання цього програмного засобу допомагає учням оволодіти графічним методом розв'язання, сформувати дослідницькі вміння і сприяє розвитку творчого підходу до розв'язання задач [56].

Алгоритм розв'язування рівнянь, нерівностей та систем рівнянь графічним способом складається з трьох етапів:

1. Побудова графіка функції;
2. Знаходження на координатній площині точку перетину графіка залежності з віссю Ох;
3. Визначення координати вказівника, які відображаються у верхньому вікні Графік. Це і буде наближеним коренем рівняння.

Приклад 3.1. Розв'язати рівняння: $sinx - cosx = 0$ [18].

Побудувавши графік функції $f(x) = sinx - cosx$ (Рис. 3.1.), на проміжку $[-3\pi; 3\pi]$, дивимось, у яких точках даний графік перетинає вісь ОХ. Щоб отримати правильніші відповіді, звертаємось до послуги «Операції/Відповіді» та у вікні «Відповіді» (Рис. 3.2.), ми одержимо, що найменший додатній корінь дорівнює $0{,}7854 = \frac{\pi}{4}$.

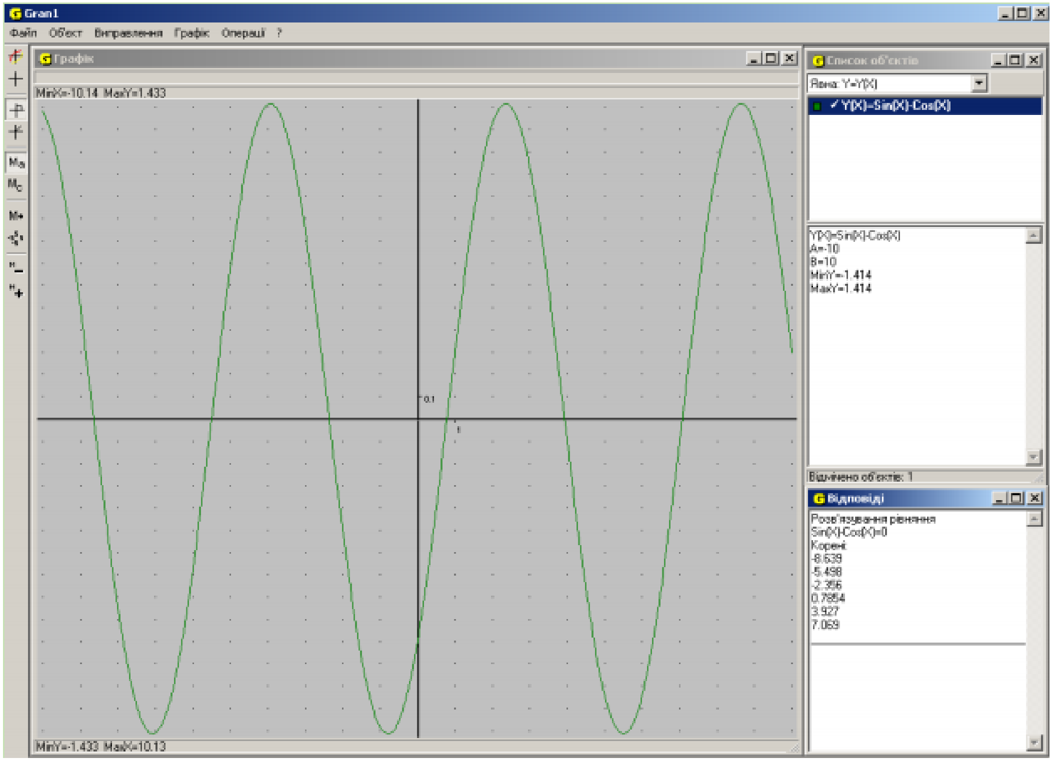



Рис.3.1.

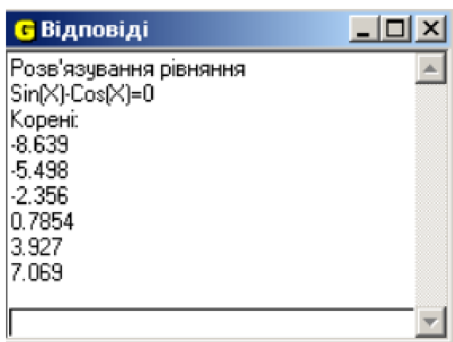



Рис. 3.2.

З одержаного графіка ми бачимо, що розв'язки повторюються з періодом $\pi$, тобто $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ .... Отже дане рівняння буде мати таку множину розв'язків: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\epsilon Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\epsilon Z$.

Приклад 3.2. Розв'язати рівняння: $sin2x \cdot tg3x \cdot ctg(x - \frac{\pi}{3})$ [19]

Побудувавши графік функції $f(x =)sin2x \cdot tg3x \cdot ctg(x - \frac{\pi}{3}).)$ (Рис. 3.3.), на проміжку

$[-3\pi; 3\pi]$, дивимось, у яких точках даний графік перетинає вісь OX.

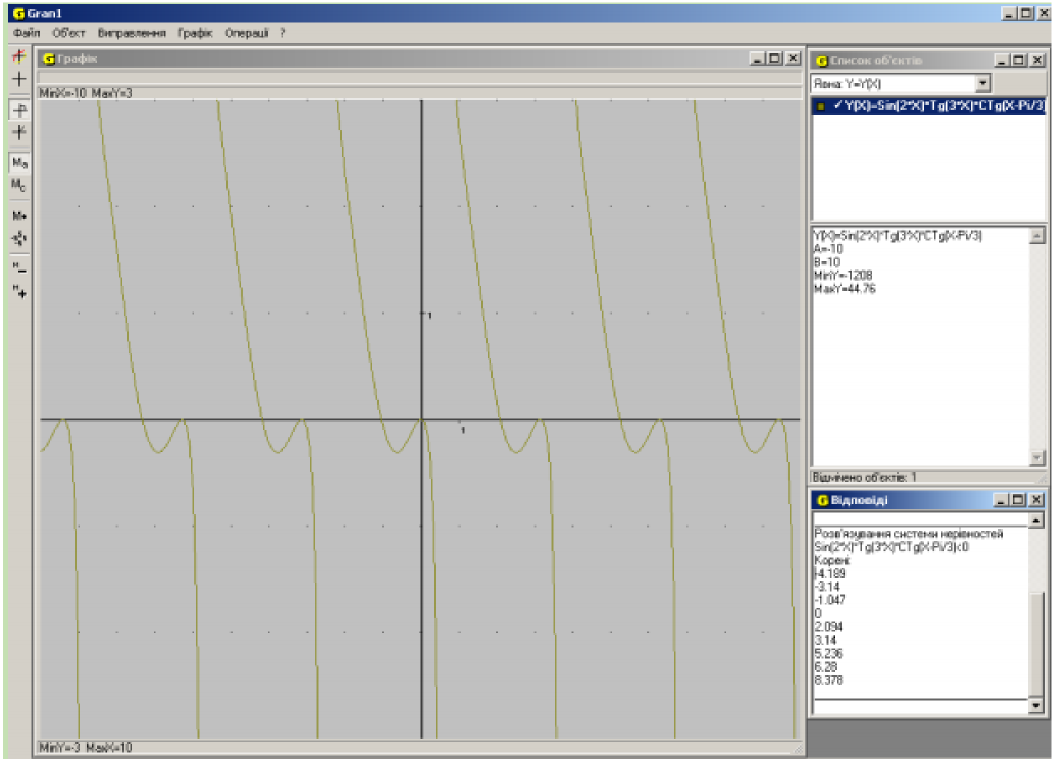


Рис. 3.3.

Щоб отримати правильніші відповіді звертаємось до послуги «Операції/Відповіді» та у вікні «Відповіді» (Рис. 3.4.), ми одержимо, що розв’язки даного рівняння поділяються на дві множини:

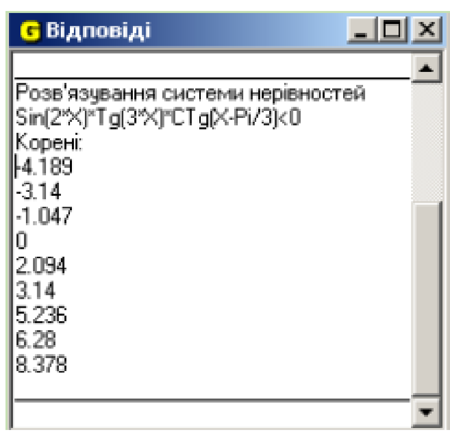



Рис. 3.4.

Перша: $\ldots -3{,}14 = -\pi, 0 = \pi, 3{,}13 = \pi, 6{,}28 = 2\pi \ldots$, тобто $x = \pi k, k \in Z$.

Друга: $\ldots -4{,}189 = -\frac{4\pi}{3}, -1{,}047 = -\frac{\pi}{3}, 2?094 = \frac{2\pi}{3}, 5?236 = \frac{5\pi}{3},$ $8{,}378 = \frac{8\pi}{3} \ldots$, тобто $x = \frac{2\pi}{3} + m\pi, m \epsilon Z$.

Відповідь. $x = \pi k, k \in Z$, $x = \frac{2\pi}{3} + m\pi, m\epsilon Z$

Приклад 3.3. Розв'язати нерівність: $cosx \geq \frac{1}{2}$.

Будуємо графік функції $f(x) = cosx$ (Рис. 3.5.), на проміжку $[-5; 5]$. Після цього звертаємось до послуги «Операції/Нерівність». У спливаючому вікні на Рис. 3.5. вказуємо потрібний нам знак нерівності. У результаті отримаємо зображення, подане на Рис. 3.6., де видно, що розв'язком нерівності є множина $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$.

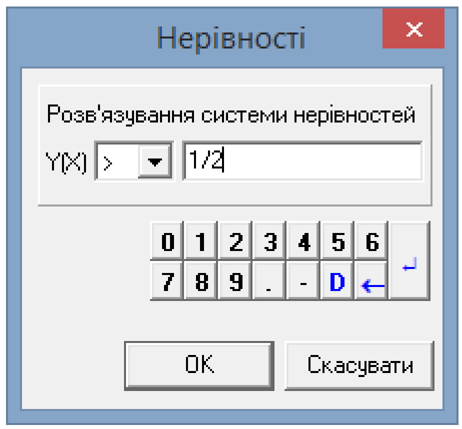



Рис. 3.5.

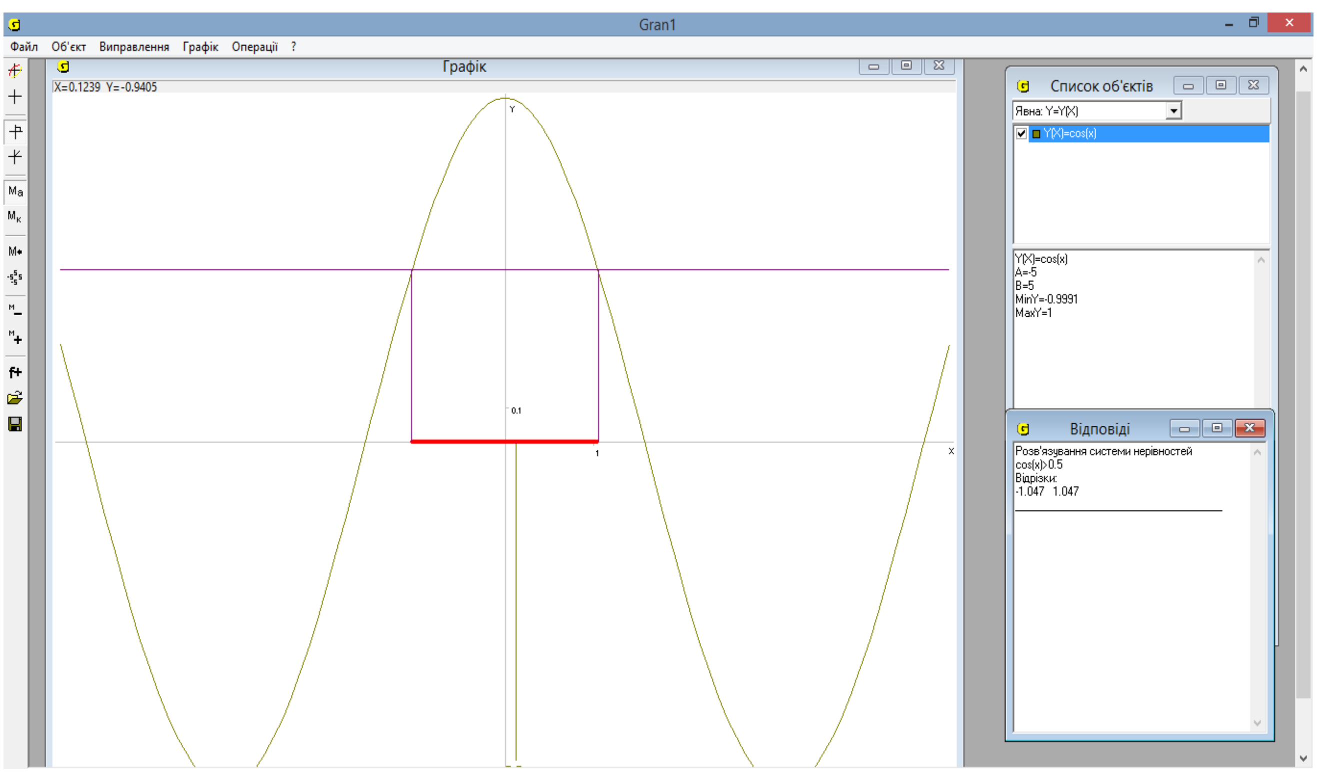


Рис. 3.6.

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$

Приклад 3.4. Розв’язати рівняння $tgx \le \sqrt{3}$.

Будуємо графік функції $f(x) = tgx$ (Рис. 3.5.), на проміжку $[-5; 5]$. Після цього звертаємось до послуги «Операції/Нерівність». У спливаючому вікні на Рис. 3.7. вказуємо потрібний нам знак нерівності. У результаті отримаємо зображення, подане на Рис. 3.8., де видно, що розв’язком нерівності $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

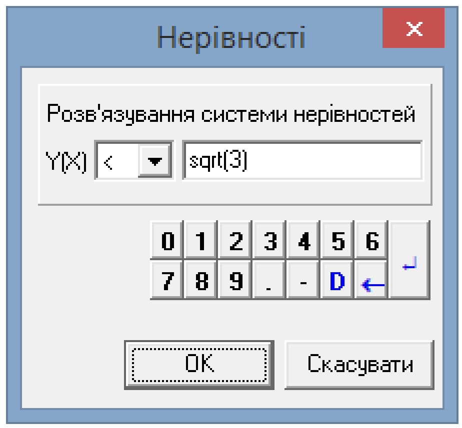



Рис.3.7.

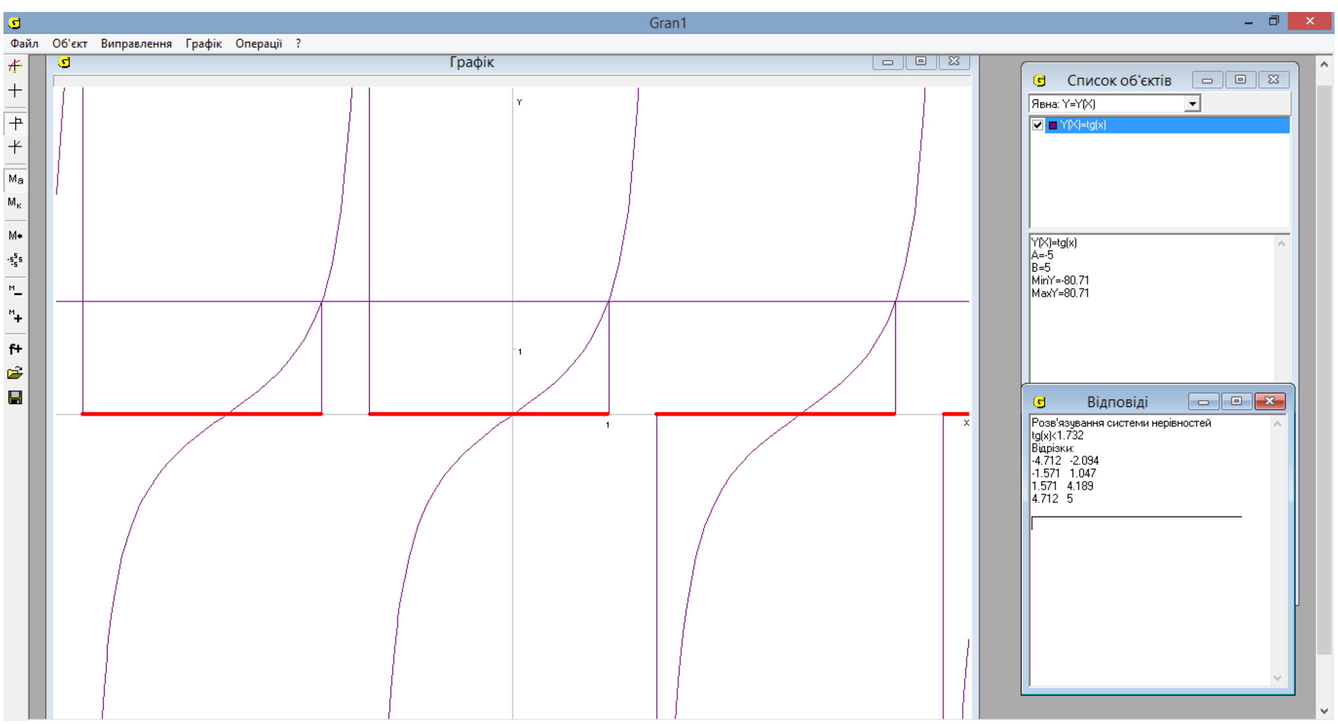



Рис. 3.8.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

## 3.3. Розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей за допомогою засобів MAPLE

Однією із математичних програм, яка визнана в світі є програма Maple. Для кращого розуміння учнями теоретичного матеріалу розроблена значна кількість методичних рекомендацій, щодо застосування Maple на уроках математики [16].

Особлива увага приділяється також розв'язуванню тригонометричних рівнянь за допомогою цієї програми. Варто зауважити, що для тригонометричних функцій в Maple окремо створена технічна бібліотека lib.qrz.ru. У цьому програмному засобі тригонометричні рівняння розв'язуються за допомогою функції solve. При використані цієї функції знаходяться тільки загальні розв'язки. Якщо набрати _EnvAllsolutions:=true програма показує множину усіх коренів. Так як ця тема викликає значні труднощі в учнів, програма за допомогою графіків, допоможе краще зрозуміти алгоритм розв'язання типових завдань [38].

Після тривалих досліджень, автори прийшло до висновку, що програма дуже часто може показувати неправильні відповіді. Тому при розв'язувані більш складніших прикладів, потрібно розв'язати рівняння і аналітичним методом і потім звірити з відповіддю у програмі [36].

Приклад 3.5. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

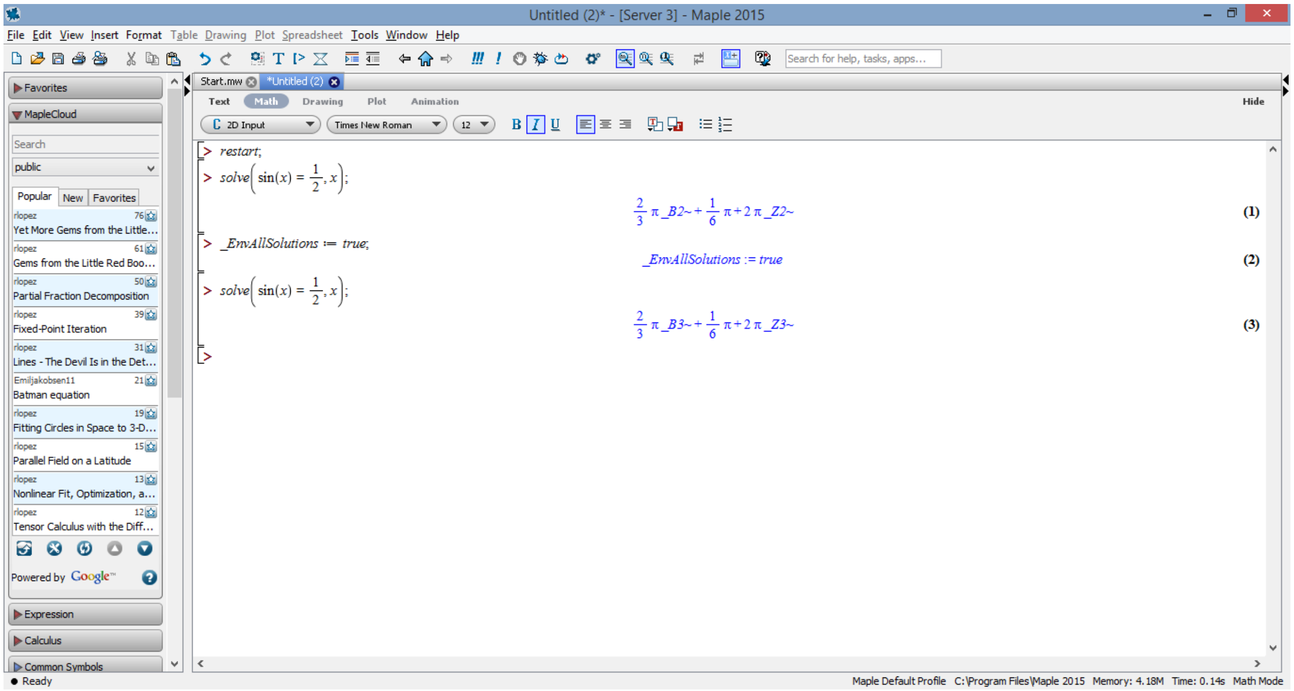


Рис.3.9.

Приклад 3.6. Розв’язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$.

Розв’язання.

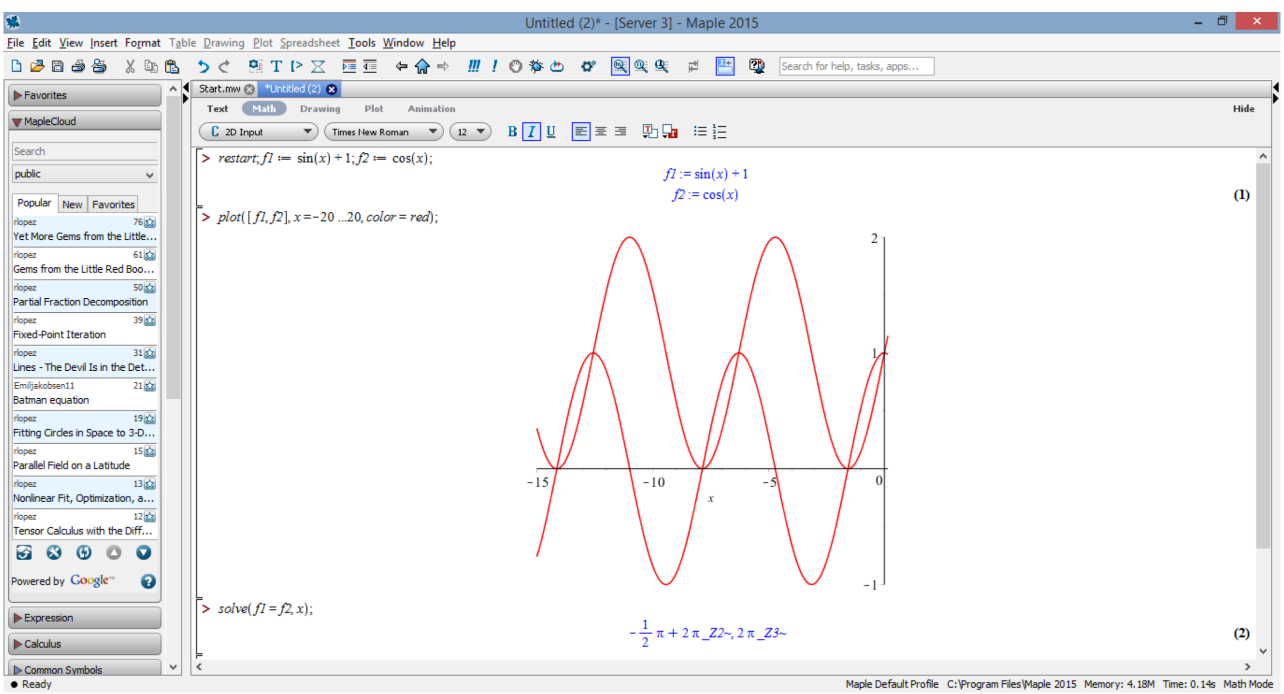


Рис. 3.10.

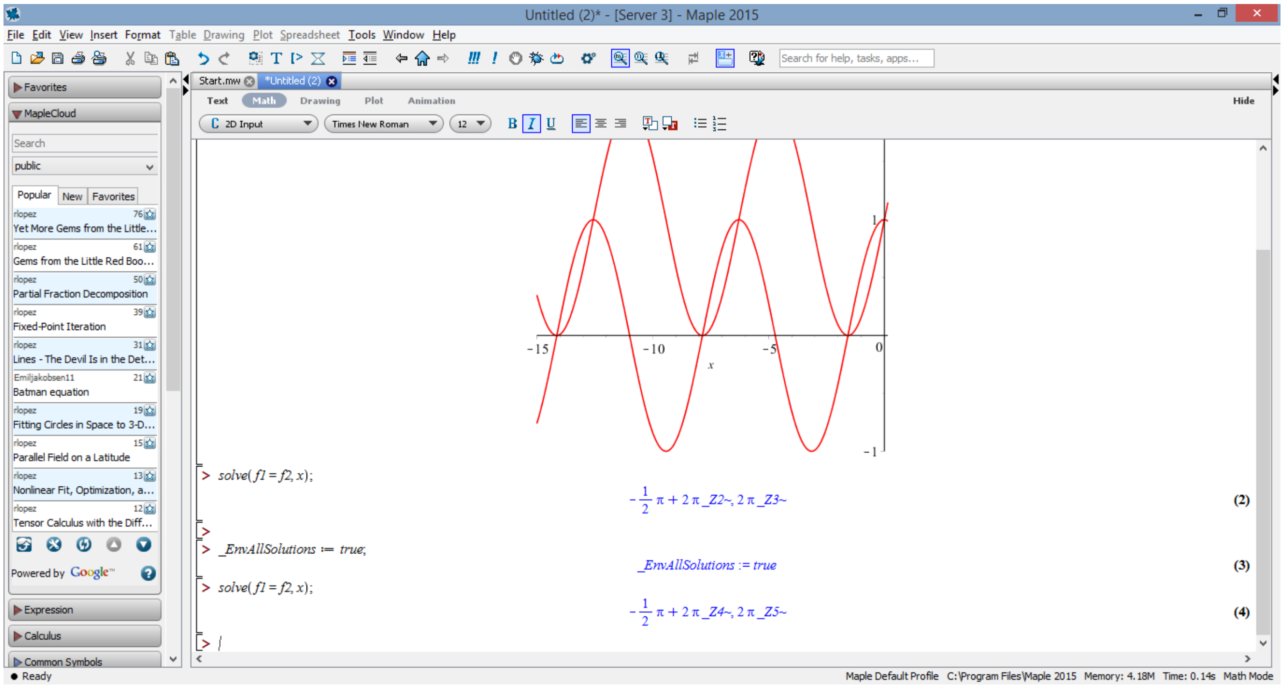



Рис. 3.11.

Приклад 3.7. Розв’язати рівняння $3\,sin^7x + 5\,cos^{16}\,x = 8$ [56].

Розв’язання.

Оскільки $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$, то

$|3\,sin^7x + 5\,cos^{16}\,x| \le 3|sin^7| + 5|cos^{16}x| \le 3 + 5 = 8.$ Знак «=» з урахуванням наведених нерівностей може мати місце тільки у тому випадку, коли

$$\begin{cases} sin^7x = 1 \\ cos^{16}x = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ |\cos x| = 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in \emptyset \text{ (оскільки } sin^2x + cos^2x = 1).$$

Відповідь: $\emptyset$.

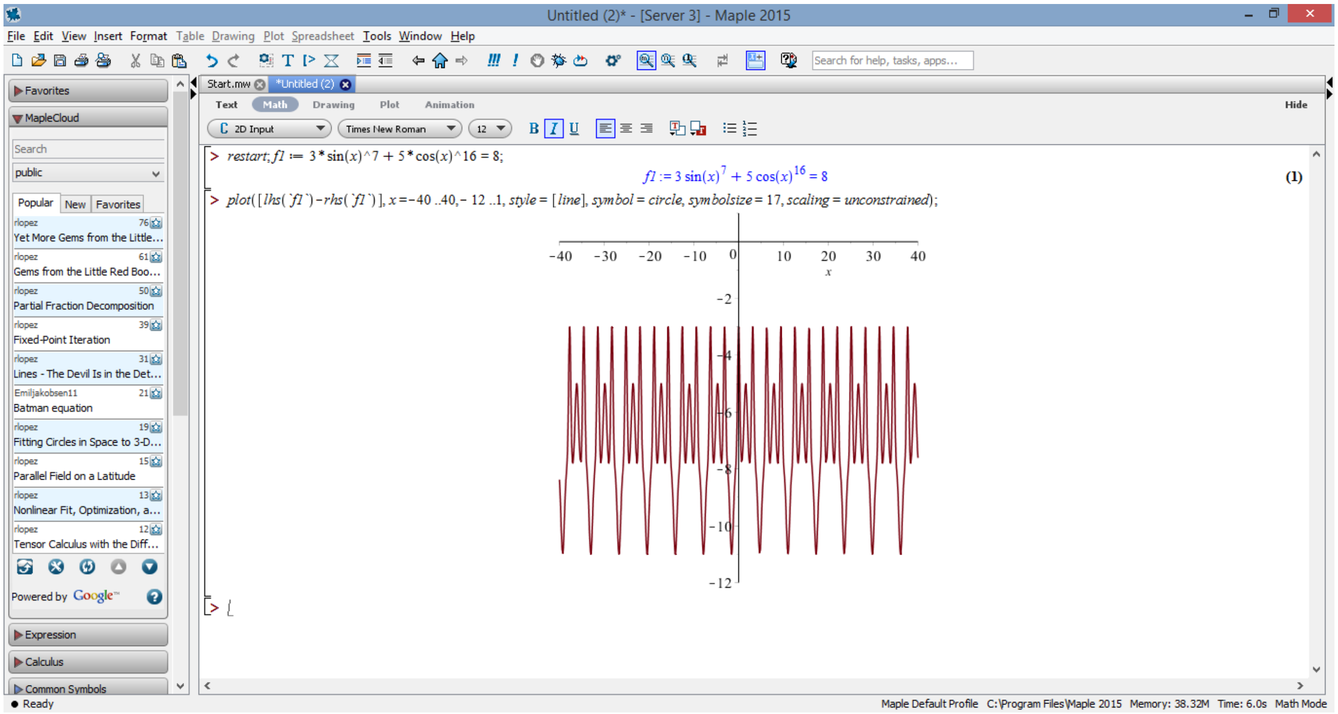


Рис. 3.11.

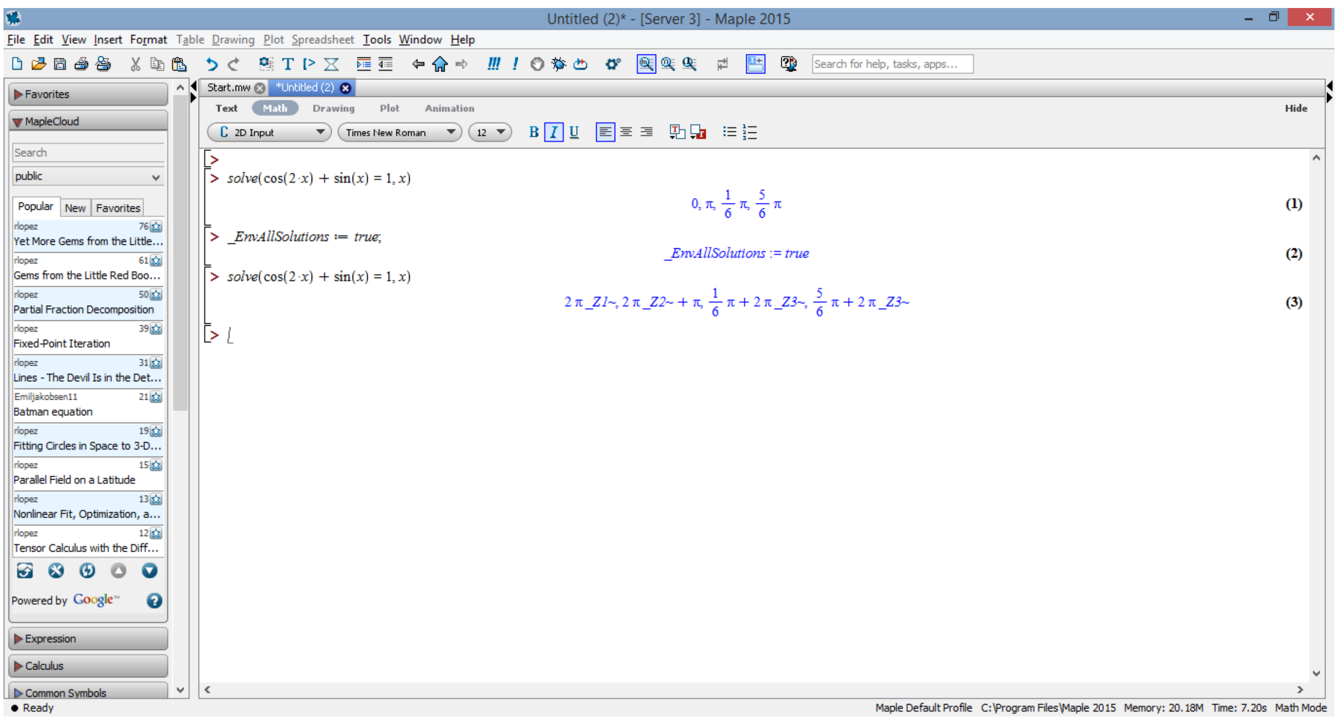


Рис. 3.12.

Із графіка видно, що точок перетину з віссю абсцис не існує, отже відповідь правильна.

# ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене узагальненню і систематизації навчально-методичних матеріалів по вивченню «Тригонометричні рівняння та нерівності», а також розробці методики застосування ІКТ при вивчені теми дослідження.

Зроблено теоретичний аналіз основних понять дослідження: охарактеризовано тригонометричні функції та їх властивості, досліджено історію розвитку тригонометрії як галузі математичних знань, основні тригонометричні тотожності, обернені тригонометричні функції, найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності, здійснено аналіз програм та підручників з математики для 10-го класу загальноосвітніх начальних закладів (до вивчення теми тригонометрія).

Розкрито методи та особливості розв’язання тригонометричних рівнянь і нерівностей в класичному курсі тригонометрії.

Розроблено методику застосування ІКТ процесі розв’язувані тригонометричних рівнянь та, нерівностей, а також визначено деякі особливості проведення уроків за допомогою програмного забезпечення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Адров І. А., Ромашко І. В. Модульний урок в Х класі на тему «Розв‘язання тригонометричних рівнянь». *Математика в школі.* 2001. № 4. С. 28-32.
2. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / Мерзляк А. Г., НоміровськиД. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2010. 352 с.
3. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С.  Харків: Гімназія, 2018. 416 с.
4. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С.  Харків: Гімназія, 2018. 400 с.
5. Алгебра. Розв’язування задач та вправ / Гайштут О. А. та ін. Київ: Магістр–8, 1997. 256 с.
6. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
8. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.
9. Вибранні питання елементарної математики. / Вишневський В. А. та ін. – Київ: Вища школа, 1981. 456 с.
10. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Москва: ГИФМЛ, 1960. 468 с.
11. Вишенський В. А., Ієрестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2001. 432 с.

12. Вінниченко, Є. Ф. Деякі особливості використання математичних програмних засобів на уроках математики. *Комп'ютерно-орієнтовні системи навчання:* зб. наук. праць. – Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. Вип. 6. С. 152-161.
13. Гайшут О. Тригонометрія: довідник-задачник. Київ: Магістр-8, 1997. 256 с.
14. Гетьманцев В. Д., Саушкін О. Ф. Математика: тригонометрія. Київ: Либідь, 1994. 144 с.
15. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X классы. Пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1983. 352 с.
16. Говорухин В. Н., Цыбулин В. Г. «Введение в Maple. Математический пакет для всех». Москва: Мир, 1997. 208 с.
17. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 1997. 304 с.
18. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 1997. 303 с.: іл.
19. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою: навч. посіб. Київ: МАУІІ, 2004. 456 с.
20. Жалдак М. І., Міхалін О. Г. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів. Видання 3-те. Київ: Шкільний світ, 2002. 120с.
21. Задачи по математике. Алгебра: справочное пособие / Вавилов В. В. и др. Москва: Наука, 1987. 432 с.
22. Збірник задач з математики для вступників до ВНЗ / Єгерев В. К., Зайцев В. В., Кордемський Б. А. та ін.; за ред. М. І. Сканаві. Київ: Арій, 2011. 604 с.
23. Збірник задач з математики з розв'язками / Геворкян Ю. Л. та ін. Харків: Прапор, 1999. 448 с.
24. Істер А. С. Аркфункция от А до Я. Київ: Факт, 1998. 160 с.
25. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.

26. Колесник К. Наочність у навчальному процесі : Педагогіка і психологія. 1997. №2. С. 32-37
27. Конет І. М. Тригонометрія: теорія і практика: посібник : Кам'янецьПодільський держ. ун-т. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. 243 с.
28. Концепція Нової української школи. URL: http://zakinppo.org.ua/images/2017/docs/10/konczepcziya.pdf
29. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. В. С. Крамор; перекл. з рос. А. Кравчука. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2012. 412 с.: іл.
30. Кушнир И. Неравенства. Астарта, 1996. 541 с.
31. Кушнир И. Уравнения. Задачи и решения. Астарта, 1996. 604 с.
32. Кушнир И. Функции. Задачи и решения. Астарта, 1996. 540 с.
33. Кушнир И. А. Тригонометрия: задачи и решения. Київ: Астарта, 1997. 390 с.
34. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по злементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. Москва: Просвещение, 1991. 352 с.
35. Матвиевская Г. П. Сферика и сферическая тригонометрия в древности и на средневековом Востоке: Развитие методов астрономических исследований, Вып. 8. М. Л., 1979.
36. Матворов А. В. Основы роботы в Maple. Санкт-Петербург. 1999. 61 с.
37. Математика. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту / Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Київ: Зодіак-ЕКО, 2010. 288 с.
38. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
39. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. URL: https://vseosvita.ua/library/navcalna-programa-z-matematiki-dla-ucniv-10-11-klasiv-zagalnoosvitnih-navcalnih-zakladiv-akademicnij-riven-20817.html

40. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx
41. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx
42. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx
43. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.
44. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Світ дитинства, 2006. 448 с.
45. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів / Машбиць Ю. І., Гокунь О. О, Жалдак М. І. та ін.; за ред. Машбиця Ю. І. / Інститут психології ім. Г.С. Костюка АПН України. Київ: ІЗМН, 1997. 264 с.
46. Перехейда О. М., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. Харків: Основа, 2003. 96 с.
47. Пичурин Л. Ф. Про тригонометрию и не только о ней. Москва: Просвещение, 1985. 128 с.
48. Пінчук О. П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. Київ, Логос, 2002. Том XXXIII. С.109–116.

49. Погребиський І. Б., Фільчаков П. Ф. Тригонометрія : посіб. для учителів. Київ: Рад. шк., 1951. 251с.
50. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. Київ: Вища школа, 1978. 478 с.
51. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 26 червня 2018. №696. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Math.pdf (дата звернення: 16.04.2020)
52. Резуненко В. О., Ярмак В. О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Харків: Основа, 2011. 94 с.
53. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. Солон-пресс, 2003. 176 с.
54. Слєпкань З. І Методика викладання математики. Київ: Педагогічна преса, 2002. 512 с.
55. Смоляков А. Н., Севрюков П. Ф. Прийоми розв‘язання тригонометричних рівнянь. *Математика в школі*. 2004. № 1. С. 24-26.
56. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр. Випуск 44 / редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. 414 с.
57. Тарасенкова Н. А., Кірман В. К. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика в школі. 2008. №6. С. 3-9
58. Токарева А. Тригонометричні нерівності. Математика. Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р.
59. Толок В. О., Киричевський В. В., Волкова Т. Д. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник. Запоріжжя: Просвіта, 2000. 656 с.
60. Тригонометричні функції. Завдання та розв'язки. Київ: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».

61.Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Київ: Генеза, 2008. 352 с.

62.У світі математики: збірник науково-популярних статей. Випуск 14. Київ: Радянська школа, 1983. 255 с.

63.У світі математики: збірник науково-популярних статей. Випуск10. Київ: Радянська школа, 1979. 207 с.

64.Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник; за ред. М. Й. Ядренка. Київ: Техніка, 1999. 504 с.

65.Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: учителю математики о педагогической психологии. Москва: Просвещение, 1983. 160 с.

66.Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. Харків: Вид. група «Основа», 2010. 159 с.

67.Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 456 с.

68.Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.-Л.: ГТТИ, 1932. 230 с.

69.Цукарь А. Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії. Математика в школах України. 1993. №3. С. 45–50.

70.Шабашова О. В. Прийоми відбору коренів в тригонометричних рівняннях. Математика в школі. 2004. №1. С.20–24.

71.Шарапа В. Цикл уроків з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності». Математика в школі. 2007. №1. С. 10-16

72.Шарова Л. И. Уравнения и неравенства. Пособие для подготовительных отделений. К: Вища школа, 1981. 280 с.

73.Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. з поглиб, вивч. математики в серед, закладах освіти. Київ: Освіта, 2004. 318 с.

74. Шкіль М. І., Слєпкань І. З., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. з поглиб, вивч. математики в серед, закладах освіти. Київ: Освіта, 2006. 272 с.

75. Юшкевич А. П. История математики в Средние века. Москва: ГИФМЛ, 1961. 448 с.

76. Ясінський В. В. Метематика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ»; за ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. Київ: НТУУ «КПІ», 2005. 372 с.

# ДОДАТКИ

## Додаток А

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

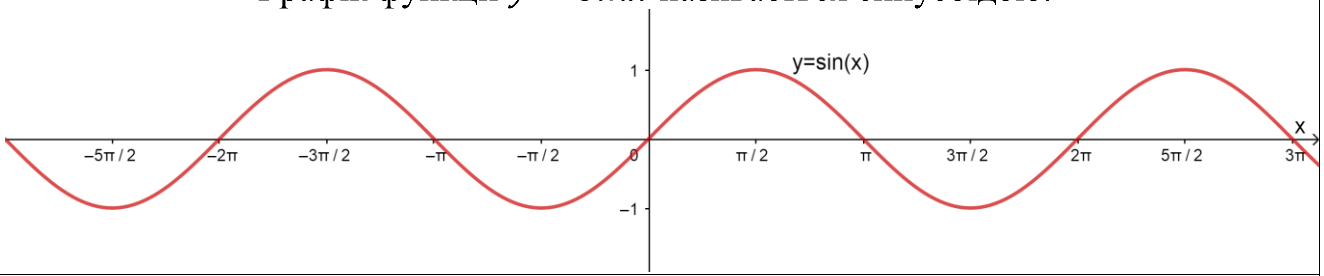
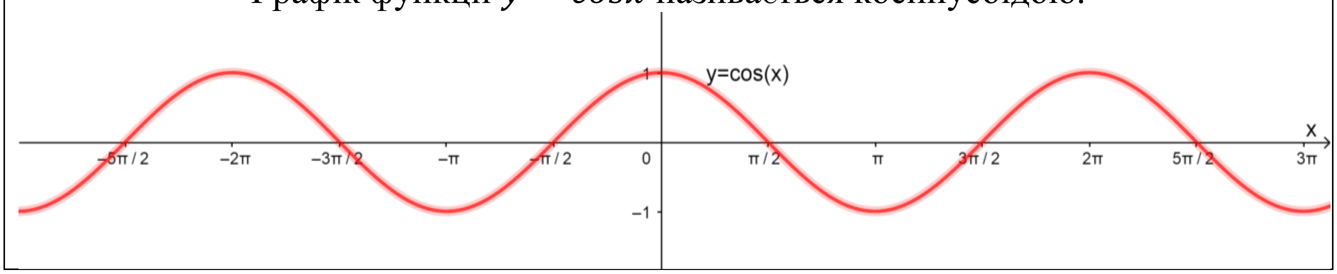
Таблиця 1

| Аргумент $\alpha$ | | Функції | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| градуси | радіани | $sin\alpha$ | $cos\alpha$ | $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ |
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | $\infty$ (не визначений) |
| 15° | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| 18° | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| 36° | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | 1 |
| 54° | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 75° | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ | $2+\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | $\infty$ (не визначений) | 0 |
| 120° | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 135° | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $-1$ |
| 150° | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{3}$ |
| 180° | $\pi$ | 0 | $-1$ | 0 | $\infty$ (не визначений) |

| Продовження таблиці 1 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $210°$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| $225°$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $1$ | $1$ |
| $240°$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $270°$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | $0$ | $\infty$ (не визначений) | $0$ |
| $300°$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $315°$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $1$ |
| $330°$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $360°$ | $2\pi$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\infty$ (не визначений) |

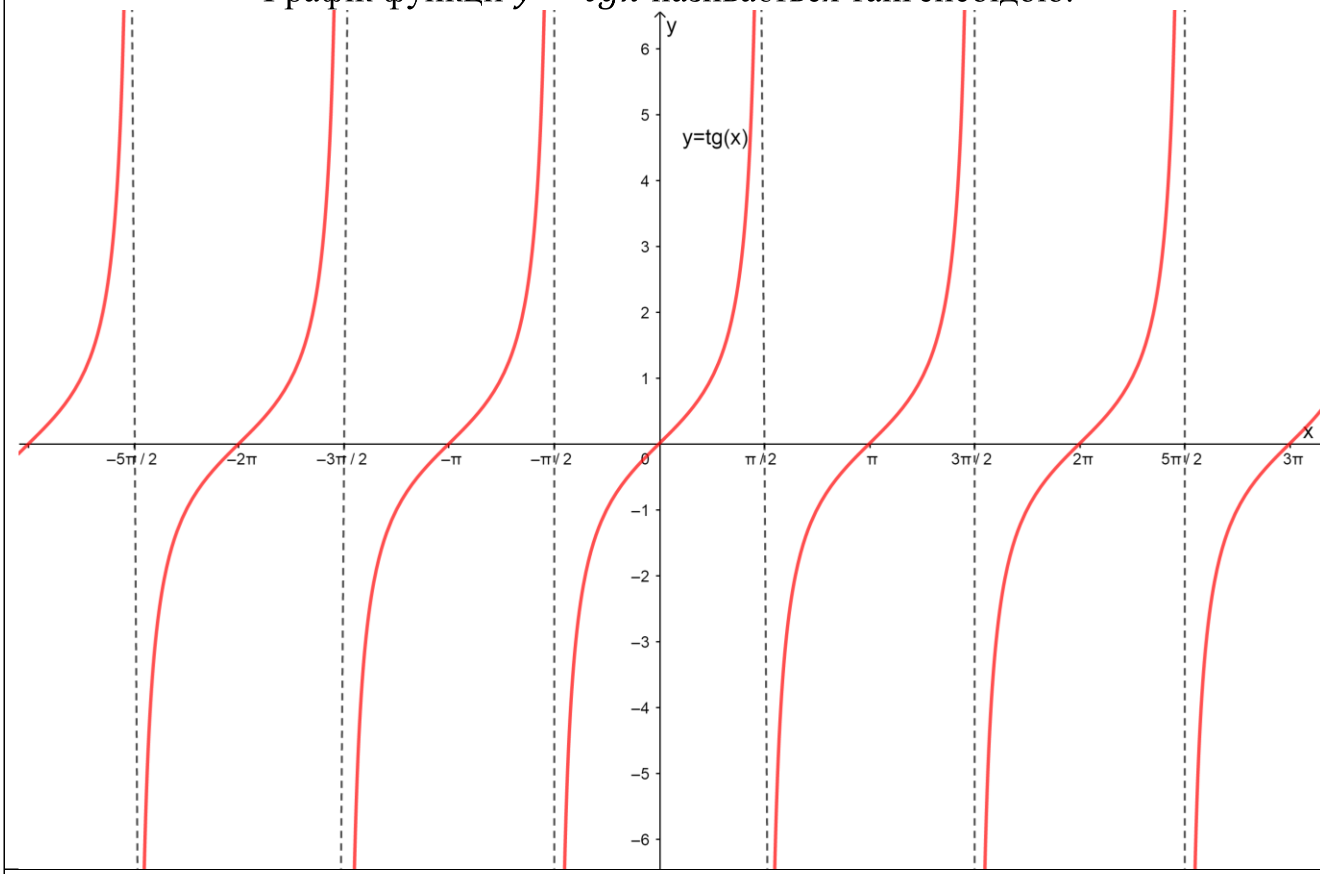
## Додаток В
## Графіки тригонометричних функцій

Таблиця 2

<table>
<tr><td>Графік функції $y = sinx$ називається синусоїдою.<br><br></td></tr>
<tr><td>Графік функції $y = cosx$ називається косинусоїдою.<br><br></td></tr>
</table>

Продовження таблиці 2

Графік функції $y = tgx$ називається тангенсоїдою.




Графік функції $y = ctgx$ називається котангенсоїдою.