Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Особливості методики вивчення теми «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики

Виконала: студентка 4 курсу
групи МІФ-41
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Лопачук Юлія Юріївна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри
математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

____

Рецензент: канд. фіз.мат. наук, доц. кафедри ВМ
Марач Віктор Сильвестрович

____

м. Рівне – 2020 рік

Зміст

ВСТУП

Нова українська школа – це важлива реформа Міністерства освіти і науки. Основна мета – створити школу, де навчання приємне, яка не лише надає учням знання, а й можливість застосувати їх у житті [31].

Математика має особливе місце у системі знань, накопиченої людством протягом багатовікової історії свого розвитку, завдяки її виконуючої ролі потужного універсального методу пізнання та вивчення світу. Тому однією із важливих цілей навчання учнів є забезпечення необхідного рівня математичної підготовки для успішного саморозвитку в соціальному середовищі, для їх подальшого вибору та оволодіння спеціальностями, що потребують відповідних математичних знань, навичок та розвиненого математичного апарату для встановлення і вивчення реальних закономірностей процесів та явищ.

В даний час нові програми з математики будуються відповідно до вимог Державного стандарту базової та повної середньої освіти, який передбачає вивчати тему «Числові послідовності» у 9 та 10 класах поглибленого рівня.

Числові послідовності є дуже важливою частиною курсу алгебри середньої та старшої загальноосвітньої школи. Розвиток мислення учнів є завданням для всіх шкільних предметів, однак саме математичний курс відіграє дуже важливу роль через свої особливості. Дійсно, при вивченні предметних концепцій високого ступеня абстрактності формуються уявлення про математичне моделювання, систематично і послідовно проводиться аргументація, чіткі логічні міркування, точність, стислість, інформативність мови – усе це властиво процесу навчання математики, що сприяє вихованню ментальної культури учнів.

У шкільному курсі математики одним із найважливіших понять є поняття функції. Числові послідовності, будучи одним з найважливіших класів числових функцій, виникли і розвинулися задовго до створення вчення про функції і є об'єктом самостійного вивчення [5].

Вперше задачі на числову послідовність, а саме арифметичну та геометричну прогресії з'явилися від спостережень за природніми явищами. Ще в давньоруському збірнику «Руська правда» міститься інформація про розведення великої рогатої худоби та бджіл за конкретний проміжок часу, про кількість зерна, зібраного з конкретних земель та ін.

Методика вивчення числових послідовностей в курсі алгебри є **актуальною**, оскільки послідовності відіграють велику і важливу роль не тільки в шкільному курсі алгебри, але і в подальшому навчанні у вищих навчальних закладах. Важливість цього, на перший погляд, невеликого розділу шкільного курсу полягає в його надзвичайно широких сферах застосування:

- *прогресії в медицині* («Хворий приймає ліки за наступною схемою: в перший день він приймає 5 крапель ліків, а в кожен наступний день – на 5 крапель більше, ніж в попередній. Прийнявши 40 крапель ліків, потім він пив 40 крапель протягом 3 днів, а потім щодня зменшує прийом на 5 крапель, довівши його до 5 крапель. Скільки бутилочок ліки потрібно купити хворому, якщо в кожному міститься 20 мл ліки (що становить 250 крапель)?»);
- *прогресії в спорті* (У змаганні зі стрільби за кожен промах у серії з 25 пострілів стрілець отримував штрафні очки: за перший промах – одне штрафне очко, за кожну наступну – на 0,5 очка більше, ніж за попередній. Скільки разів влучив у ціль стрілок, який отримав 7 штрафних очок?);
- *прогресії в банківських розрахунках* («Уявіть собі, що ви відкрили в банку вклад в сумі a грн. Під m % річних на t років. У вас є дві стратегії поведінки: або в кінці кожного року зберігання вкладу знімати відсотки за вкладом, або прийти в банк один раз – в кінці терміну зберігання вкладу. Якій дохід ви отримаєте в тому і в іншому випадках?» Щоб відповісти на це питання, треба вирішити задачу на геометричну прогресію.);
- *прогресії в природі* (Всі організми володіють інтенсивністю розмноження в геометричній прогресії. Відомо, що бактерії розмножуються поділом: одна бактерія ділиться на дві; кожна з цих двох в свою чергу теж

ділиться на дві, і виходять чотири бактерії; з цих чотирьох в результаті поділу виходять вісім бактерій і т. д.).

- *прогресії в літературі* (Ябм – це віршований розмір з наголосом на парних складах $2; 4; 6; 8; \ldots$ Номери ударних складів утворюють арифметичну прогресію $a_1 = 2$, $d = 2$. Хорей – це також віршований розмір з наголосом на непарних складах вірша. Номери ударних складів утворюють арифметичну прогресію $1; 3; 5; 7; \ldots$.

«Коли пісні мойого краю
Пливуть у рідних голосах»

Віршовий розмір даної поезії– ямб.)

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри в 9-10 класах поглибленого рівня.

Предметом дослідження виступає методика вивчення числових послідовностей в класах поглибленого вивчення математики.

Мета роботи полягає у розгляді основних принципів вивчення теми «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики.

Реалізація поставленої мети передбачає розв’язання таких **завдань**:

- аналіз наукової та методичної літератури, а також шкільних підручників;
- ретельне вивчення та опрацювання вибраного теоретичного та практичного матеріалу;
- розкрити і систематизувати методику вивчення теми в класах поглибленого вивчення математики;
- провести порівняльний аналіз теми «Числові послідовності» в діючих підручниках з алгебри;
- розглянути основні задачі з даної теми для класів із поглибленим **рівнем** вивченням математики;
- розглянути завдання ЗНО з даної теми.

Для досягнення даної мети та розв’язання всіх завдань застосовувались такі методи дослідження:

- теоретичні: вивчення та аналіз навчальної літератури, синтез отриманих результатів (розробка теоретичного і практичного матеріалу);
- емпіричні: педагогічний експеримент, вивчення та узагальнення методичного досвіду вчителів з даної проблеми, аналіз продуктів діяльності, обробка експерименту.

Бакалаврська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 32 найменувань. Обсяг роботи становить 52 сторінок, в тому числі додатки -16 сторінок.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМИ

1.1. Історія виникнення послідовностей та прогресій

Основні теоретичні відомості про числову послідовність з'явилися і розвинулися задовго до створення вчення про функцію. У давнину послідовність поділялася на арифметичну і геометричну прогресію. Великий вчений АРХІМЕД (близько 287-212 рр. до н. е.) першим виявив зв'язок між прогресіями.

Слово «прогресія» має латинське коріння «progressio» що означає «рух в перед». Цей термін вперше як математичний застосував у своїх працях римський філософ, богослов і державний діяч Боецій (480-524 рр.). У папірусах II тисячолітті до н. е. трапляються такі види числових послідовностей, як прогресії. Перші завдання на прогресію, були пов'язані із господарською діяльністю, а саме ─ з поділом спадку та розподілом продуктів [9].

Найдавніші задачі, знаходили в клинописних вавилонських табличках і єгипетських папірусах Ахмеса (бл.2000 р.до н.е.).

«Поділити 10 мірок ячменю між 10 людьми так, щоб другий одержав на $\frac{1}{8}$ мірки ячменю більше, ніж перший, третій – на $\frac{1}{8}$ мірки більше, ніж другий, …, десятий ─ на $\frac{1}{8}$ мірки більше, ніж дев'ятий. Скільки мірок ячменю одержить кожна людина?» [7]

Не тільки умова задачі подається у папірусі, але також пропонується правило виражене формулою $a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$, для того щоб обчислити частку першої з десяти осіб.

У цій задачі йдеться про арифметичну прогресію, тобто умову завдання з використанням сучасних позначень можна записати так:

$$S_{10} = 10,\ \ d = \frac{1}{8},$$

знайти $a_1,\ \ a_2, \dots, a_{10}$.

Відповідь: $\frac{25}{16}$; $\frac{23}{16}$; $\frac{21}{16}$; $\frac{19}{16}$; $\frac{17}{16}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{13}{16}$; $\frac{11}{16}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$ мір ячменю.

Завдання Стародавнього Єгипту з папірусу Ахмеса (Райнд). «У семи людей по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму?» [7].

У папірусі дано два розв'язки цієї задачі:

ПЕРШИЙ – це безпосереднє множенням і подальше додавання членів послідовності:

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5$$

ДРУГИЙ – це множенням числа 2801 на 7. Число 2801 утворюється в результаті додавання:

$$1+7+7^2+7^3+7^4$$

Відповідь: 7, 49, 343, 2401, 16807. Сума – 19607.

Очевидно, що навіть єгиптянам загальна формула для суми членів геометричної прогресії для випадку $b_1 = q$ була відома. Ця стародавня задача на геометричну прогресію неодноразово зустрічається у різних народів із трохи зміненим текстом.

Математичний папірус Ахмеса – посібник з арифметики та геометрії періоду Середнього царства Стародавнього Єгипту, переписаний Ахмесом, близько 1650 р. до н. е. на сувій папірусу довжиною 5,25 м. і шириною 33 см. Папірус Ахмеса був відкритий в 1858 році його часто називають папірусом Райнд названий на честь його першого власника. У 1870 році папірус був розшифрований, перекладений та опублікований. В даний час велика частина рукопису знаходиться в Британському музеї в Лондоні, а друга частина – в Нью-Йорку [8].

У Стародавній Греції за часів Евкліда та Архімеда властивості прогресій розглядались не лише у розв'язування практичних завдань, а й у зв'язку з теоретичними дослідженнями.

У XVIII ст. позначення двох прогресій з'явилися в англійських підручниках.

Арифметична — ÷

Геометрична — ∺

Прогресії також були знайдені і в російських математичних рукописах XI – XVII століть. Велика кількість завдань на прогресію міститься у чудовому спогаді математичної літератури початку XVIII ст. «Арифметиці» Л. П. Магнітського. Протягом 50 років ця книга була головним підручником з математики в Росії. М. В. Ломоносов високо оцінив книгу Л. П. Магнітського, назвавши її «втратою». Пошук $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ пов'язаний з такою цікавою історією: Карл Гаус (1777-1875) – відомий німецький математик, проявив чудові математичні навички у школі. «Вчитель запропонував учням віднайти суму перших 100 натуральних чисел. Маленький Гаус вирішив це завдання за 1 хвилину. Враховуючи, що суми $1 + 100$, $2 + 99$ і т. д. рівні, він $101 \cdot 50$, тобто кількість таких сум. Іншими словами, він побачив закономірність, властиву арифметичній прогресії» [9].

1.2. Основні цілі і завдання вивчення теми «Числові послідовності» в поглибленому курсі алгебри загальноосвітньої школи

Основним завданням викладання математики в загальноосвітньому навчальному закладі є забезпечення рівня математичної культури, безперервної освіти та праці. Математика – це унікальний засіб формування не лише навчального, а й інтелектуального потенціалу особистості.

У профільних класах з поглибленим вивченням математики основні завдання дещо доповнюються. Це тому, що необхідно виявити та розвинути математичні здібності школярів, щоб вони мали сильний інтерес до математики та професійної діяльності, підготовки учнів до навчання у ВНЗ [6].

Викладання в таких класах рекомендується будувати відповідно таким принципам :

по-перше, навчання математики має давати дітям широкий математичний розвиток та глибокі математичні знання на основі базового курсу математики.

При цьому повинні бути забезпечені такі умови, щоб питання чинної програми та традиції навчання математики були органічно переплетені та розглянуті із сучасного погляду;

по-друге, випускники математичних класів – повинні мати такі знання і вміння, які б цілком відповідали вимогам школи, водночас були б глибшими та сильнішими. При цьому математичний розвиток учнів, отриманий у процесі навчання, повинен дати їм змогу творчо підійти до процесу вивчення математики. Діти повинні навчитися самостійно працювати з математичною літературою та мати велику зацікавленість до предметів математичного циклу до кінця навчання;

по-третє, процес викладання в таких класах ставить перед вчителем складні завдання, а саме вміння здійснювати оптимальну індивідуалізацію навчання, використання учнями евристичного методу навчання та проблемну форму навчання, тобто широкі можливості для оптимальної активізація навчання. Широко використовується розв’язування задач для вирішення проблем нестандартного, конкурентного характеру, пропонованих на вступних іспитах до вищих навчальних закладів та проблемних завдань. Теоретичні та прикладні завдання повинні вирішуватися протягом року відповідно до розділів програми.

Поглиблене вивчення алгебри і геометрії повинно відповідати віку та потребам учнів.

Навчання в профільному класі старшої школи з розширеним вивченням математики передбачає насамперед сильний і свідомий інтерес до алгебри та геометрії, прагнення в майбутньому мати професію, яка неминуче пов'язана з математикою [22].

Результати навчання повинні забезпечити підготовку старшокласників для продовження навчання у ВНЗ. Більшість сучасних уроків математики покликані підготувати дітей для продовження освіти за професіями, які широко застосовують математику. Тому основним принципом, навчання математики на заняттях математичного профілю, є поетапне моделювання принципу професійної діяльності з математики.

Які професійні риси повинен мати фахівець-математик? В першу чергу це особистість, яка добре розбирається не тільки в математиці, але і в суміжних галузях, постійно готова доповнити свої знання і самостійно їх здобувати. Професійному математику властива здатність отримувати все нові і нові результати в даній галузі, а також вміти використовувати такий інструмент, як математика, для вирішення прикладних задач. Тому математичне навчання на уроках математики повинно органічно зливатися з університетом і навіть стимулювати вдосконалення останнього, а також сприяти професійному розвитку викладання – починаючи від базової математичної підготовки, впливати на всі ланки.

Основний курс математики повинен дещо відрізнятися від відповідного курсу загальноосвітньої школи. Відмінності у наступному: в глибині вивчення матеріалу, у формуванні критичного стилю мислення. Розширення матеріалу – є основою сучасної програми профільного класу, який має 4-річний термін навчання з поглибленим вивчення алгебри та геометрії. Лише невелика частка учнів у спеціальних математичних школах може свідомо засвоїти зміст. Протягом багатьох років досвіду роботи в Україні класів поглибленого вивчення математики переконує, що непотрібно переобтяжувати програми зайвими питаннями. Це спричиняє перевантаження учнів.

Підвищену увагу слід приділяти математичному моделюванню. Саме в цьому курсі створюються основи формування здатності старшокласників застосовувати математичні знання. Мета полягає не в тому, щоб поверхнево працювати по всіх розділах математики, а заглибитись в її окремі ланки [30].

Порівняно із загальноосвітніми класами теоретичний рівень навчального матеріалу значно підвищується. Курс алгебри та геометрії, призначений для класів із поглибленим вивченням сприяє:

- розвитку вміння учнів застосовувати математику при дослідженні реальних процесів і явищ;

- забезпеченню високого рівня математичної культури [22].

Для поступового ознайомлення учнів з новими формами організаційної роботи рекомендується використовувати більш широке різноманіття спецкурсів, факультативних курсів та курсів за вибором. Метою факультативу з математики є поглиблення знань учнів, набутих при вивченні основного курсу, та розвиток їх логічного мислення, цікавості та винахідливості.

Факультативні заняття з алгебри і геометрії повинні бути пов'язані з базовим курсом математики. Наприклад, вивчення такої факультативної теми як «Методи підсумування числових послідовностей та числових рядів» можна здійснювати під час вивчення числових послідовностей у 9 класі, або «Послідовності та їх границі» в 10 класі.

План теми «Обчислення сум числових послідовностей та рядів» для 9 класу може мати такий вигляд:

1) основні теоретичні поняття про числові послідовності та числові ряди;

2) аналітичні методи підсумування числових послідовностей та числових рядів («метод туди назад», метод скінченних різниць);

3) неаналітичний метод підсумування числових послідовностей та числових рядів (геометричний метод, метод розфарбування) [16].

План теми «Обчислення суми числових послідовностей та рядів» для 10 класу може бути таким:

1) основні теоретичні поняття про числові послідовності та числові ряди;

2) аналітичні методи підсумування числових послідовностей та числових рядів (метод скінченних різниць, підсумування частинами; підсумування факторіальних послідовностей; застосування інтеграла для знаходження наближеної суми послідовності);

3) геометричні конструкції обчислення сум числових послідовностей та рядів [16].

Учні 10-го класу профільного рівня 2019/2020 навчального року вивчають 9 год. математики в тиждень. Для класів математичного профілю, складено дві навчальні програми. Одна для учнів, які вивчали математику поглиблено у 8-9 класах, друга програма – для учнів, які навчалися в звичайних класах і обрали математичний профіль лише у 10 класі. Основна мета оновлення програми – забезпечити перехід від традиційної та інформаційної парадигми знань до компетентнісної. Програми [29-30] враховують компетентнісний підхід, кінцевим результатом навчання якого є формування математичних компетентностей, що надає учням можливість здійснювати успішні дії в навчальних ситуаціях. Результати навчально-пізнавальної діяльності, упорядковані за такими компонентами як: знання, діяльність та цінність, які конкретизуються за їх складниками («розуміє», «називає», «класифікує» та «зображує»).

Сьогодні технології розвиваються дуже швидко, без них ми не можемо уявити своє життя, які стали всебічною допомогою людині у світі. Використання інформаційних технологій у процесі навчання допомагає вирішувати дидактичні завдання, що активізують мотиваційні фактори та формує позитивне відношення до навчання.

Ефективність того, як учні засвоюють новий матеріал за допомогою інформаційних технологій, насамперед залежать від педагогічного програмного забезпечення, що дозволяють поєднувати високі можливості моделювання та обчислення при вивченні різних математичних об'єктів з уточненням результатів на всіх етапах навчального процесу.

Сьогодні існує багато програмних засобів, які можна використовувати при вивченні алгебри та геометрії. Такими програмами є: GRAN1, Maple, Mathematika, MathLab, Maxima, MathCAD, Reduce та інші.

Ці програми призначені для розв’язання широкомасштабних завдань за допомогою моделювання об'єктів, присутніх у задачі.

Реалізація ідей щодо комп’ютерного забезпечення навчального процесу відбувається, як правило, за допомогою міжпредметних зв’язків у вигляді інтегрованих уроків з вивчення таких тем, як, наприклад: «границя числової послідовності» « границя функцій»; «дослідження функцій на неперервність».

Розглянувши основні принципи викладання у 9-10 класах з поглибленим вивченням математики, перейдемо безпосередньо до цілей і завдань навчання по темі «Числові послідовності» в програмі алгебри загальноосвітньої школи.

Учні знайомляться з числовою послідовністю в 9 класі, яку вони продовжують вивчати в 10 класі, але більш поглиблено. В результаті вивчення цієї теми їм слід знати основні поняття, визначення та властивості, що входять до підручників алгебри дев'ятого та десятого класів, відповідно до змісту [2,14].

Після вивчення параграфу «Числові послідовності», школярі відповідно до навчальної програми [29-30] повинні вміти:

- пояснювати, які є способи задання числової послідовності;
- виділяти основні класи послідовності;
- формулювати визначення та властивості арифметичної та геометричної прогресії;
- доводити властивості та основні формули членів прогресії;
- розв'язувати різнотипні вправи, які включають в себе знання всього теоретичного матеріалу з даної теми;
- застосовувати теорему про границю числової послідовності.

1.3. Аналіз теоретичного і практичного матеріалу підручників 9-го і 10-го класів по темі «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики

Розглянувши та проаналізувавши підручники з алгебри 9-го та 10-го класів поглибленого вивчення математики за темою «Числові послідовності», можна помітити, що цю тему починають вивчати в кінці 9-го класу, головна мета якої – ознайомити учнів з поняттями послідовності та способами її задання. Числові послідовності в підручнику алгебри 9 класу [29] починають вивчати в сьомому параграфі, який розподілений на пункти. Кожен пункт містить блоки з новою інформацією, а також практичними завданнями для їх закріплення. Усі основні правила, визначення у підручнику виділені курсивом і жирним шрифтом. Він містить завдання для самостійного вирішення.

Автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір підручника алгебри 9-го класу вводять визначення числової послідовності, розглядаючи задачу Леонардо Фібоначчі: «Пара кроликів, починаючи з двомісячного віку, щомісяця виробляє нову пару. Скільки всього пар кроликів буде в грудні, якщо перша пара новонароджених кроликів з'явилася в січні (при умові, що всі кролики залишаться живі)?» [29], отримуючи при розв'язуванні числа Фібоначчі, які слугують яскравим прикладом числових послідовностей.

Після введення визначення розглядається словесне, рекурентне та аналітичне завдання послідовності, використовуючи приклади та завдання. Учні знайомляться з арифметичною і геометричною прогресією під час розгляду рекурентного завдання послідовності. У наступному пункті вводиться визначення арифметичної прогресії та наводяться приклади. Даний параграф містить пункт де виводиться «Сума n перших членів арифметичної прогресії», після якої наведено кілька прикладів, які детально описані.

Вивчення наступної теми, а саме геометричної прогресії, будується так само, як і арифметична прогресія, оскільки автори підручника стверджують, що її так легше вивчати. Тобто, визначення геометричної прогресії вводиться відразу рекурентним способом задання. На основі цього визначення виводиться «Сума n перших членів геометричної прогресії». В кінці цього параграфа учні ознайомлюються з двома найважчими для них темами: «Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1» та «Сумування» [29].

Опрацьований підручник з алгебри 10 класу [30] складається з семи параграфів, які розділено на пункти, що містять теоретичний матеріал. Тема «Числові послідовності» виділена окремим параграфом, пункти якої виділено таким чином:

1. Числові послідовності.
2. Границя числової послідовності.
3. Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
   - Доведення теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
4. Властивості збіжних послідовностей.
5. Теорема Вейєрштрасса.
   - Число Ейлера.

Дану тему учні вивчають на початку другого семестру. Вона містить важливі визначення, які виділені жирним шрифтом, але слід також звернути увагу на визначення, які виділені курсивом, оскільки вони також є важливими. Приклади розв'язування задач наводяться після викладення теоретичного матеріалу, вони містять такі рівні складності: (°) – початковий і середній, (•) – достатній, (••) – високий, та (*)– задачі для факультативів і математичних гуртків. Кожний пункт містить завдання для самостійного розв'язання [30].

Учні десятих класів мають не лише підручник з алгебри поглибленого вивчення математики (А. Г. Мерзляк та ін.), а й збірник задач і контрольних робіт [1].

У підручнику завдання розміщені відразу після теоретичного матеріалу параграфу. Збірник задач складений відповідно до викладу теоретичного матеріалу у підручнику і складається з двох частин:

1) тренувальні вправи, які до кожного параграфу поділені на три варіанти по 229 номерів до кожного. Складні задачі мають відповіді або вказівки для розв'язання.

2) контрольні роботи, які мають два варіанти відповідно до кожної із семи тем. Вони умовно поділяються на дві частини: перша відповідає початковому та середньому рівням навчальних досягнень учнів, а друга частина – достатньому та високому рівню.

Різні рівні позначаються різними символами (n° – початковий та середній, n° – достатній, $n^{\circ\circ}$ – високий рівні навчальних досягнень). Максимальна оцінка першої частини – 6 балів, другої – 4 бали, третьої – 2 бали, тобто, виконавши всі завдання правильно, учень може отримати максимальну оцінку 12 балів [1].

Третя частина цього посібника має дві підсумкові контрольні роботи. Ці контрольні роботи не обов'язкові.

Кожен її варіант має три частини завдань у тестовій формі різного ступеня складності.

Перша частина підсумкової контрольної роботи складається з 16 завдань, у яких потрібно обрати лише одну правильну відповідь з чотирьох запропонованих.

У другій частині роботи пропонується 4 задачі з короткою відповіддю.

Третя частина містить лише 2 завдання із розгорнутою відповіддю. Ці завдання є найважчими для учнів.

Оцінювання даних робіт здійснюється за допомогою системи нарахування балів, які представлені у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Номер завдання	Кількість балів	Всього
1–16	по 1 балу	16 балів
17–20	по 2 бали	8 балів
21; 22	по 4 бали	8 балів
Всього балів		32 бали

Система оцінювання навчальних досягнень учнів за 12-бальною шкалою відповідно кількості набраних балів наведена у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою
$1-2$	1
$3-4$	2
$5-7$	3
$8-10$	4
$11-13$	5
$14-16$	6
$17-19$	7
$20-22$	8
$23-26$	9
$27-28$	10
$29-30$	11
$31-32$	12

Отже, проаналізувавши всі вправи в підручнику та збірнику задач по темі «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики, їх умовно можна розділити на такі види завдань, як:

1. Завдання на розуміння поняття числової послідовності, використання термінів та символіки.
2. Завдання на знаходження члена прогресії.
3. Завдання на складання формули n-го члена послідовності.
4. Дослідження послідовності на обмеженість та зростання.
5. Задачі на знаходження суми n-перших доданків арифметичної та геометричної прогресії.
6. Завдання з параметром.
7. Завдання на доведення методом математичної індукції.

8. Завдання на обчислення границі послідовності.
9. Дослідити послідовність на збіжність.
10. Задачі на знаходження кількості членів послідовності.
11. Розв’язування рівнянь.

Приклади завдань з навчальних посібників [2,14] та збірника [1] по кожному перерахованому вище типу завдань наведено в Додатку А.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ В КЛАСАХ ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методика вивчення арифметичної та геометричної прогресії в класах поглибленого вивчення математики

Учні знайомляться з прогресіями в курсі алгебри дев'ятого класу в розділі «Числові послідовності», час навчання якого за навчальною програмою становить 32 години. Тобто, вивчення арифметичної прогресії та її похідних займає 10 годин, геометричної – 9 годин [29].

Основна мета цієї теми – дати поняття про арифметичну і геометричну прогресії як числових послідовностях особливого виду.

На першому уроці цієї теми потрібно з'ясувати значення поняття послідовності, виробити вміння використовувати індексні позначення.

Відповідно до методики вивчення понять, важливо працювати з ознаками поняття, зафіксованими в його визначенні. Виділенню цих ознак сприяє логіко-математичний аналіз визначення.

Виділені ознаки допомагають скласти вправи для узагальнення поняття (вправи на «так» і «ні»). Для цього корисно скласти таблицю обліку (або спростування) відповідних ознак. Крім того, таблиця дозволяє проаналізувати складені приклади за обсягом (чи розглянуті всі окремі випадки чи враховані всі суттєві ознаки і т. д.). Подібна підготовча робота вчителя (проведення логіко-математичного аналізу і складання вправ на підведення під визначення) показана в розглянутій нижче методиці.

Готуючи урок, вчителі повинні проаналізувати логіко-математичну структуру визначення, щоб виділити основні характеристики поняття, на якому засноване визначення, що дозволить скласти приклади на приведення об’єктів під визначення.

Проаналізуємо визначення: арифметичною прогресією називається послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, складеному з одним і тим же числом.

Термін – арифметична прогресія.

Рід – послідовність.

Видові відмінності – $a_{n+1} = a_n + d$ де a_1 і d – задані, n– будь-яке натуральне число.

Це визначення є рекурсивним, оскільки видову різницю вказані дії отримання наступного члена, якщо попередній відомий. Видові відмінності можна розписати докладніше: другий член дорівнює сумі першого і якогось числа, третій дорівнює другому, складеному з цим же числом, і т. д.

Виконаємо дії підведення об'єктів під визначення, результати запишемо у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Приклад	Послідовність	$a_{n+1} = a_n + d$	Висновок: даний приклад є арифметичною прогресією
$0;\ -5;\ -10;\ -15;\ \ldots;\ -5(n-1),\ldots$	Так	Так	Так
$1;\ 3;\ 5;\ 10;$	Так	Ні	Ні
$x + 7$	Ні	Ні	Ні
$7;\ 7;\ 7;\ 7;$	Так	Так	Так
$\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ 1\frac{1}{3};$	Так	Так	Так

У таблиці представлені всі види арифметичної прогресії; зростаюча, спадна, постійна, кінцева, нескінченна, різницею може бути додатне, від’ємне число і нуль; члени прогресії можуть бути натуральними, цілими, дробовими.

На цьому ж уроці доречно показати різні способи задання послідовності, використовуючи різнотипні завдання з підручника [14].

Геометрична прогресія за визначенням також є послідовністю, задана рекурентним співвідношенням $b_{n+1} = b_n \cdot d$ де b_1 і d – задані, n – будь-яке натуральне число.

Дещо складніше учням дається геометрична прогресія, тому що характер її поведінки залежить від значень q. Слід розібрати різні приклади із дев'ятикласниками більш детально:

1) Нехай $q > 1$, тоді члени геометричної прогресії такі, що їх значення мають однаковий знак і зростають по модулю.

Приклад 1.

а) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81, \dots\ (a_1 = 1,\ \ q = 3)$;

б) $-2, -8, -32, -128, \dots\ (a_1 = 1,\ \ q = 4)$.

2) Якщо $0 < q < 1$, то члени геометричної прогресії такі, що їх значення мають такий самий знак і зменшуються по модулю.

Приклад 2.

а) $2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32}, \dots\ \left(a_1 = 2,\ \ q = \frac{1}{4}\right)$;

б) $-1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \dots\ \left(a_1 = -1,\ \ q = \frac{1}{5}\right)$.

3) Нехай $q < -1$, тоді члени геометричної прогресії приймають знакозмінні значення, зростаючі по модулю.

Приклад 3.

$-3,\ 6,\ -12,\ 24, \dots\ (a_1 = -3,\ \ q = -2)$.

4) Якщо $-1 < q < 0$, то члени геометричної прогресії приймають знакозмінні значення, що спадають по модулю.

Приклад 4.

$-8,\ 1,\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{64}, \dots\ \left(a_1 = -8,\ \ q = -\frac{1}{8}\right)$.

5) При $q = 1$ всі члени геометричної прогресії однакові, $b_1, b_1, b_1,$, а при $q = 1$ всі члени геометричної прогресії відрізняються один від одного лише знаками, $b_1, -b_1, b_1, -b_1, \dots$ [14].

Обов'язковою умовою набуття вмінь розв'язувати задачі та приклади з прогресією є знання всіх формул з теми та навички їх перетворення. Тому на практиці необхідно звернути особливу увагу на прийоми, які можуть підвищити ефективність засвоєння формул та вираження з них невідомих значень.

Результатом вивчення цієї теми має стати розуміння того, що, знаючи b_1, можна знайти b_2 за відомим правилом; знаючи b_2, можна знайти і b_3 і так далі. Рекурентним способом визначаються обидві прогресії, тому учням складніше даються базові завдання на розпізнавання арифметичних та геометричних прогресій при різних способах задання послідовностей: перерахуванням перших кількох членів, рекурентною формулою, формулою n-го члена.

2.2. Вивчення теми «Числові послідовності» у 10-му класі поглибленого вивчення математики

З поняттям «числова послідовність» учні познайомилися в 9 класі, знання якої вони більш поглиблять у 10 класі, де познайомляться з границею числової послідовності, теоремою про арифметичні дії зі збіжними послідовностями, та їх властивостями.

У першому пункті розділу «Числові послідовності» десятикласники повторюють основний матеріал даної теми за попередній рік: що таке числова послідовність, яка послідовність називається зростаючою (спадною), що таке неспадна (незростаюча) числова послідовність, потім даються визначення обмеженої і монотонної послідовностей [2].

Тема «Границя числової послідовності» вивчається у другому пункті даного розділу. Основною метою вивчення даної теми є формування уявлення про границю і розуміння її властивостей, а також отримання первинних навичок обчислення границь послідовностей. Тому перед вивченням даної теми учням необхідно знати поняття функції, натуральних чисел, основні поняття пов'язані з послідовностями, вміти використовувати елементарні перетворення в алгебраїчних виразах.

В даному підручнику [2] після розгляду прикладів дається визначення границі послідовності на мові ε:

Означення. «Число a називають границею послідовності (a_n), якщо $\forall$ додатного числа ε, $\exists$ такий номер n_0, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$»[2].

Наступний пункт містить теореми про границі суми, добутку й частки двох послідовностей, для того щоб полегшити процес пошуку границь.

Після вивчення даних понять, учні розглядають такі властивості збіжності послідовностей [2]:

Теорема 1. Збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $a > b$ $(a < b)$, то, починаючи з деякого номера a_0, виконується нерівність $a_n > b$ $(a_n < b)$.

Теорема 3. Якщо для всіх $n \epsilon N$ виконується нерівність $a_n \geq b_n$, причому $\exists$ границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ то $a \geq b$.

Теорема 4 (про двох конвоїрів). Якщо для всіх $n \epsilon N$ виконується подвійна нерівність $a_n \leq c_n \leq b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ то послідовність (c_n) також є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Теорема 5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.»

Теорема 6 (границя кореня). 2Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ де $k \in$ N, $k > 1$.»

«Важливою ознакою збіжності послідовності є така теорема.

Теорема (теорема Вейєрштрасса). Кожна зростаюча й обмежена зверху (спадна й обмежена знизу) послідовність має границю.»

Зазначені вище властивості учням даються з доведенням, так як школярі вже володіють необхідними знаннями. В кінці параграфа представлені завдання для самостійного розв'язання.

2.3. Тестові завдання з теми дослідження в системі математичної підготовки школярів

Згідно нової програми побудованої з урахуванням вимог «Державного стандарту базової і повної середньої освіти» для 5-9 класів на вивчення теми «Числові послідовності» відводиться 32 години [29]. Оскільки ця тема є дуже складною для школярів, то для кращого засвоєння даного матеріалу, пропонуються тестові завдання, які повною мірою узгоджуються з програмними вимогами до математичної підготовки учнів з цієї теми та всебічно, комплексно й системно охоплюють її математичний зміст.

Методика навчання стверджує, що метою тесту є визначення рівня знань. Окрім функцій контролю, тест виконує і інші функції навчання: розвиток, освіту та контроль.

Дійсно, тестування показує загальну картину успішності класу та визначає, наскільки добре кожен учень засвоює матеріал. Таким чином, ви можете продовжувати займатися індивідуальною роботою з учнями які мають як і високі, так і низькі знання.

Періодична перевірка за допомогою тесту організовує та направляє роботу учнів, допомагає знайти та позбутися прогалини у знаннях та сформувати бажання розвивати свої здібності.

Тестування сприяє інтуїтивному, логічному мисленню, оскільки він містить завдання, які розвивають індивідуалізацію, об'єктивність, порівняння, узагальнення, пошук альтернатив тощо. Крім того, учні також стикаються з вибором відповідей – пошуку або відгадування. Багато школярів обирають відповідь методом виключення: виключають неможливий варіант, а потім перевіряють ті що залишилися [15].

Тести полегшують процес перевірки знань, дозволяючи учням зайнятися самоперевіркою і взаємоперевіркою. Він дає можливість перевірити не лише знання, а й розуміння навчального матеріалу. За допомогою тесту дуже зручно розділяти матеріал на кілька рівнів в залежності від характерних особливостей школярів.

Об'єктивність тестування – ще одна його перевага. Цей тест дає можливість визначити не лише «проблемні зони», але й конкретні «больові точки»:

- в залежності від структури тесту, його можна використовувати як інструмент навчання та вдосконалювати здатність до самоконтролю;
- завдяки використанню тестових завдань вчителі можуть визначити, як учні володіють знаннями, вміннями і навичками, та проаналізувати свою педагогічну діяльність;
- батьки мають можливість дізнатися результати навчання своїх дітей.

Тестові завдання можна використовувати на різних етапах уроку: перевірка домашнього завдання, вивчення нового матеріалу, первинна перевірка засвоєння знань, та ін. [26].

Для ефективного застосування тестів необхідно дотримання наступних умов:

1. Учні абсолютно самостійні в процесі виконання завдань.
2. Завдання пропонуються в порядку складності.
3. Чітко сформульовані питання та відповіді.

Робота над тестовими завданнями дозволить учням актуалізувати свої знання про числові послідовності та їх окремі види (прогресії) на рівні розпізнавання та відтворення відповідних означень й основних властивостей; оновити в пам’яті основні формули прогресій. [14].

Особливості пропонованої системи тестових завдань (тематичний добір, чітко виражений рівневий характер вправ, специфіка формулювань) уможливлюють її ефективне поліфункціональне використання.

Розв'язування поданих тестових завдань (додаток Б) дозволить комплексно повторити зміст теми «Числові послідовності», систематизувати та узагальнити знання про прогресії, сконцентрувати увагу учнів на найсуттєвішому в системі знань з теми, забезпечити здійснення всебічного та об'єктивного контролю або самоконтролю навчальних досягнень школярів, за результатами якого спланувати і здійснити необхідну корекцію [15].

Аналіз завдань ДПА з математики виявив обов'язкову наявність у щорічних добірках вправ, присвячених прогресіям. Відтак пропоновану систему завдань можна використовувати також як засіб підготовки до ДПА з математики.

2.4. Деякі нетрадиційні застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач у шкільному курсі математики

Числові послідовності вважаються одним із основних об'єктів математичного аналізу. Відомі традиційні застосування числових послідовностей в теорії чисел, при обчисленні інтегралів та границь, сум рядів , визначників, а також в хімії, фізиці, біології, економіці та криптографії.

Нетрадиційне застосування їх при розв'язуванні олімпіадних задач ґрунтується на найважливіших властивостях числових послідовностей, у тому числі і рекурентних. Останнім часом задачі, пов'язані з числовими послідовностями, все частіше і частіше з'являються в математичних олімпіадах. Існує достатньо природних олімпіадних задач, які розв'язуються за допомогою специфічних властивостей числових послідовностей [18].

Наведемо приклади завдань нетрадиційного застосування числових послідовностей при розв'язуванні шкільних олімпіадних задач з математики:

Задача 1. «Барон Мюнхгаузен заявив Георгу Кантору про те, що він може виписати в ряд всі натуральні числа без одиниці так, що тільки скінченне їх число буде більше за свій номер. Чи не хизується барон» [18] ?

Розв'язання. Нехай $a_1, a_2, a_3 \dots -$виписані в ряд всі натуральні числа без одиниці. Побудуємо для цього нову послідовність (b_n) натуральних чисел, задану таким чином: $b_1 = 1, b_{n+1} = a_{b_n}$ при $n \geq 2$. Доведемо, що всі члени послідовності (b_n) різні. Дійсно, нехай $b_k = b_m$, причому $k > m > 1$, то $a_{b_{k-1}} = a_{b_{m-1}}$, звідки $b_{k-1} = b_{m-1}$, так як всі члени послідовності (a_n) різні. Продовжуючи аналогічно, отримаємо $b_{k-2} = b_{m-2}, \dots, b_{k-m+1} = b_1$, тобто $a_{b_{k-m}}$. Отримали протиріччя, бо послідовність (a_n) не містить одиниці. Оскільки $(b_n) -$ нескінченна послідовність різних натуральних чисел, то вона містить в собі нескінченно багато членів, які більші за попередні (в іншому випадку вона б спадала, починаючи з деякого номеру, що є неможливим). Іншими словами, $b_{k+1} = b_k$, тобто $a_{b_k} > b_k$ для нескінченного натурального числа k. А це і означає, що існує нескінченне число членів послідовності (a_n), які за значенням більші за свій номер.

Відповідь. Барон хизується.

Задача 2. «Монету кидають 10 разів. Знайдіть ймовірність того, що жодного разу не випадуть два герба поспіль [18].»

Розв'язання. Загальна кількість випадків при десяти підкиданнях монети дорівнює 2^{10}. Знайдемо число комбінацій, де немає двох гербів підряд. Нехай монету кидають n раз, $f(n) -$ число варіантів підкидань без двох гербів підряд, $f(n-1) -$ число допустимих комбінацій, в яких на останньому місці стоїть цифра, $f(n-2) -$ число допустимих комбінацій, в яких стоїть герб на останньому місці, бо перед гербом на передостанньому місці обов'язково повинна стояти цифра. Таким чином, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Оскільки $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, то послідовно обчислюємо, що $f(3) = 5$, $f(4) = 8$, …, $f(10) = 144$. Отже, шукана ймовірність дорівнює: $\frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$.

Відповідь. $\frac{9}{64}$.

Зауважимо, що числа $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ є членами послідовності чисел Фібоначчі. Зазвичай, особливо у сучасному вигляді, послідовність доповнюється іншим початковим членом : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ Числа Фібоначчі –

нескінченна числова послідовність (F_n), в якій кожне наступне число − це сума двох попередніх чисел:

$$«F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2»[14].$$

Задача 3. Розв'яжіть в цілих числах рівняння: $x^2 - xy - y^2 = 1$ [18].

Розв'язання. Зауважимо, що при підстановці пари F_{2n+1}; F_{2n} в задане рівняння, ми приходимо до окремого випадку тотожності Кассіні: $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ − одне з відомих співвідношень для чисел Фібоначчі. Воно було доведено французьким астрономом Кассіні в 1680 році [2]. Покажемо, що у вихідного рівняння немає інших розв'язків. Знайдемо спочатку тільки натуральні розв'язки, оскільки $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 = f(-x, -y)$. Неважко перевірити, що тоді $y < x \leq 2y$. Крім того, кожна пара розв'язків (x, y) породжує цілий ланцюжок розв'язків за правилом:

$$(x, y) \to (x - y, 2y - x) \to (x, y) \to (2x + y, x + y) \to \cdots$$

При русі по цьому ланцюжку вліво числа в парах зменшуються:

$$0 < x - y < x, 0 < 2y - x < y.$$

Тому на певному етапі вийде пара, в якій $y = 0$, $x = 1$, тобто пара $(F_1;\ F_0)$. Але ця пара породжує ланцюжок:

$$(F_1;\ F_0) \to (F_3;\ F_2) \to\ \ldots\ \to (F_{2n+1};\ F_{2n}) \to \cdots$$

Значить, вихідна пара повинна мати вигляд $(x, y) = (F_{2n+1};\ F_{2n})$.

Відповідь: $(x, y) = \pm(F_{2n+1};\ F_{2n}),\ n \in Z$.

Розглянемо тепер дві послідовності, які мають у собі n чисел: $(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n)$ та $(b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n)$. Запишемо їх у вигляді наступної таблиці:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Такого виду послідовність будемо називати одномонотонною, якщо найбільше з чисел $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ знаходиться над найбільшим з чисел b_1, $b_2, \ldots,\ b_n$, а друге за величиною з чисел $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ знаходиться над другим за величиною з чисел $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$ і т. д. Наприклад, послідовність

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$ не є одномонотонною, а послідовність $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{a_{n1}} & \frac{1}{a_{n-1}} & \dots & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix}$ – одномонотонною.

Якщо ввести таке позначення:

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n,$ [18] тоді буде правильним наступним факт.

Теорема. *«Якщо* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *та* $(b_1, b_2, \dots, b_n) -$ *одномонотонні послідовності та* $(b_1', b_2', \dots, b_n') -$ *деяка перестановка чисел* $b_1, b_2, \dots, b_n$. *Тоді виконується нерівність* $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1' & b_2' & \dots & b_n' \end{bmatrix}$*»*[18].

Розглянемо декілька прикладів на застосування даної теореми.

Задача 4. «Довести нерівність $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + +d^2a,$ якщо $a, b, c, d -$ додатні дійсні числа» [18].

Доведення: Помітимо, що $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}$, а $a^2b + b^2c + c^2d + d^2a = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

Зрозуміло, що послідовність (a, b, c, d) та (a^2, b^2, c^2, d^2) одномонотонні, то згідно вище зазначеної теореми, є справедливою наступна нерівність: $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$, яка основі вище зазначеного позначення рівносильна наступній:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

Задача 5. «Довести, що якщо $a, b, c -$ додатні дійсні числа, то виконується нерівність $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$» [18].

Доведення: Застосуємо до розв'язання цієї нерівності одномонотонність. Оскільки $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix}$ і послідовність $(a + b, a + c, b + c, a, b, c)$ та $(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b})$ одномонотонні, то згідно з вище зазначеною теоремою, виконується нерівність: $\begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$, тобто доведено, що $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

Задача 6. «Доведіть нерівність:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1},$$

якщо $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ – додатні дійсні числа, сума яких дорівнює s» [18].

Оскільки $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & \ldots & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix}$, а також послідовності $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ та $(\frac{1}{S-a_1},\ \frac{1}{S-a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{S-a_n})$ одномонотонні, то на основі теореми є справедливими такі $n-1$ нерівності:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \dfrac{1}{S-a_1} & \dfrac{1}{S-a_2} & \ldots & \dfrac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-1} & n \\ \dfrac{1}{S-a_k} & \dfrac{1}{S-a_{k+1}} & \ldots & \dfrac{1}{S-a_{k-(n-1)}} & \dfrac{1}{S-a_{k-(n-2)}} & \ldots & \dfrac{1}{S_{k-1}} \end{bmatrix}$$

Додаючи їх одержуємо потрібне.

2.5. Задачі на числову послідовність у завданнях ЗНО

Важливим етапом навчання є успішне складання ЗНО з математики учнями 11 класів, до яких вчитель математики готує їх з 5 по 11 класи.

Зовнішнє незалежне оцінювання – це процес визначення рівня знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів, незалежних від загальноосвітніх та вищих навчальних закладів.

Діюча програма зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО), затверджена наказом МОН № 696 від 26 червня 2018 року.

Практики і науковці рекомендують учителеві готувати учнів до ЗНО на різних етапах процесу здобування знань:

- у процесі вивчення нового матеріалу;

- при перевірці знань;
- під час закріплення нового матеріалу;
- як домашнє завдання для контролю над собою.

Усе це так, але використання вчителем подібних (минулорічних) тестових завдань ЗНО призводить до сформованого в учнів свідомого сприйняття особливостей їх виконання.

Наведемо приклади завдань з теми «Числові послідовності», які зустрічаються в ЗНО з математики [32].

Завдання 1. (пробне ЗНО 2019 р.) «За якого від'ємного значення x значення виразів $x^2 - 4$, $3 - 5x$, та $2 - 3x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?»[32]

Розв'язання: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$;

$$3 - 5x = \frac{x^2 - 4 + 2 - 3x}{2}\Bigg| \cdot 2$$

$$6 - 10x = x^2 - 4 + 2 - 3x$$

$$-x^2 + 3x - 10x + 6 - 2 = 0$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -8.$$

Відповідь: -8.

Завдання 2. (ЗНО 2019 р.) «Четвертий член геометричної прогресії у 8 разів більший за перший член. Сума третього й четвертого членів цієї прогресії на 14 менша за їхній добуток. Визначте перший член прогресії, якщо всі її члени є додатними числами.» [32]

Розв'язання: $b_n > 0$;

$$b_4 > b_1 \text{ у 8 разів}$$

$$b_3 + b_4 < b_3 \cdot b_4 \text{ на 14}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$b_1 \cdot q^3 = 8 \cdot b_1 | : b_1$$

$$q^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$4b_1 \cdot 8b_1 - (4b_1 + 8b_1) = 14$$

$$32b_1^2 - 12b_1 - 14 = 0|:2$$

$$16b_1^2 - 6b_1 - 7 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-7) = 36 + 448 = 484 = 22^2$$

$$b_1 = \frac{6+22}{2 \cdot 16} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

$$b_2 = \frac{6-22}{2 \cdot 16} < 0$$

$$\frac{7}{8} = 0{,}125 \cdot 7 = 0{,}875.$$

Відповідь: 0,875

Завдання 3. (ЗНО 2019 р. додаткова сесія) «Укажіть ненульове значення x, за якого значення виразу $x - 8,$ та $6x$ є послідовними членами геометричної прогресії.» [32]

Розв'язання: $(3x)^2 = (x-8) \cdot 6x$

$$9x^2 = 6x^2 - 48x$$

$$3x^2 = -48x$$

$$3x^2 + 48x = 0$$

$$3x(x+16) = 0$$

$$3x = 0; \quad x + 16 = 0$$

$$x = 0; \quad x = -16.$$

Відповідь: -16.

Завдання 4. (пробне ЗНО 2018 р.) «Сума другого та четвертого членів зростаючої прогресії дорівнює 45, а їхній добуток -324. Визначте перший член цієї прогресії.» [32]

Розв'язання: $\begin{cases} b_2 + b_4 = 45; \\ b_2 \cdot b_4 = 324. \end{cases}$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

За т. Вієтта: $b_2 = 9; \quad b_4 = 36$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 9; \\ b_1 \cdot q^3 = 36. \end{cases}$$

$$q^2 = 4$$

$$q = 2$$

$$b_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Відповідь: 4,5.

Завдання 5. (ЗНО 2018 р.) «Знаменник (b_n)дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайдіть перший член цієї прогресії.» [32]

Розв’язання: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$$65 = \frac{b_1(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n)}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{b_1\left(1 - \frac{16}{81}\right)}{\frac{1}{3}} = 65$$

$$3b_1 \cdot \frac{65}{81} = 65$$

$$\frac{3b_1}{81} = 1$$

$$3b_1 = 81$$

$$b_1 = 27.$$

Відповідь: 27.

Завдання 6. (ЗНО 2018 р. додаткова сесія) «Третій член арифметичної прогресії вдвічі більший за її перший член. Визначте різницю цієї прогресії, якщо сума перших п’яти її членів дорівнює190.» [32]

Розв’язання: $a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d$

За умовою $a_3 = 2a_1$

$$a_1 + 2d = 2a_1$$

$$a_1 = 2d$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{2 \cdot 2d + (5-1)d}{2} \cdot 5 = \frac{8d}{2} \cdot 5 = 20d$$

$$20d = 190$$

$$d = \frac{190}{20} = 9{,}5.$$

Відповідь: 9,5.

Завдання 7. (пробне ЗНО 2017 р.) «Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = -0{,}25,\ \ b_4 = 2.$» [32]

А	Б	В	Г	Д
$0{,}5$	$0{,}25$	$-0{,}5$	-1	-2

Розв’язання: $$b_4 = b_1 q^3;$$

$$q^3 = \frac{b_4}{b_1};$$

$$q^3 = \frac{2}{-0{,}25} = -8;$$

$$q = -2;$$

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_2 = -0{,}25 \cdot (-2) = 0{,}5.$$

Відповідь: А.

Завдання 8. (ЗНО 2017 р.) «В арифметичній прогресії (a_n): $a_1 = -4$, $a_5 = a_4 + 3$. Визначте десятий член a_{10} цієї прогресії.» [32]

А	Б	В	Г	Д
-31	-27	26	27	23

Розв’язання: $$d = a_5 - a_4 = a_4 + 3 - a_4 = 3;$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 3 = 23.$$

Відповідь: Д.

Завдання 9. (ЗНО 2017 р. додаткова сесія) «В арифметичній прогресії перший член $a_1 = -21$, різниця $d = 1{,}5$. Скільки всього *від'ємних* членів має ця прогресія?» [32]

А	Б	В	Г	Д
13	14	15	16	18

Розв'язання: $-21;\ -19{,}5;\ -18;\ -16{,}5;\ -15;\ -13{,}5;\ -12;\ -10{,}5;\ -9;$ $-7{,}5;\ -6;\ -4{,}5;\ -3;\ -1{,}5.$

Відповідь: Б.

Завдання 10. (пробне ЗНО 2016 р.) «Під час підготовки до заліку з вищої математики студент розв'язав за 9 днів 315 задач. У перший день він розв'язав 11 задач, а кожного наступного дня розв'язував на одну й ту ж саму кількість задач більше, ніж попереднього дня. Визначте кількість задач, які студент розв'язав дев'ятого дня.» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$S_9 = 315; \quad a_1 = 11;$$

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9$$

$$(11 + a_9) \cdot 9 = 2 \cdot 315$$

$$a_9 = 630 : 9 - 11 = 59.$$

Відповідь:59.

Завдання 11. (ЗНО 2016 р.) «Задано арифметичну прогресії (a_n), у якій різниця $d = 0{,}5$, п'ятнадцятий член $a_{15} = 12$. Визначте перший член прогресії a_1.» [32]

А	Б	В	Г	Д
24	12,5	6	5	4,5

Розв'язання: $a_{15} = a_1 + 14d;$

$$a_1 = a_{15} - 14d = 12 - 14 \cdot 0{,}5 = 12 - 7 = 5.$$

Відповідь: Г.

Завдання 12. (ЗНО 2016 р. додаткова сесія) «В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 + a_3 = 18$, різниця $d = -4$. Визначте перший член прогресії a_1 цієї прогресії.» [32]

А	Б	В	Г	Д
5	10	13	15	22

Розв'язання: $$a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{18}{2} = 9;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_1 = a_2 - d = 9 + 4 = 13.$$

Відповідь: В.

Завдання 13. (пробне ЗНО 2015 р.) «Повна вартість доставки великогабаритних меблів у фірмі із перевезень складається з вартості їх доставки на 1-й поверх будинку і вартості підйому меблів на потрібний поверх. Вартість підйому меблів на кожний наступний поверх перевищує вартість їх підйому на попередній на одну й ту саму величину. Визначте повну вартість (у грн) доставки меблів на 11-й поверх будинку, якщо повна вартість доставки меблів на 4-й та 7-й поверхи цього будинку становить 142 грн та 154 грн відповідно.» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_4 = 142; \; a_7 = 154;$$

$$a_7 = a_4 + 3d;$$

$$d = \frac{a_7 - a_4}{3};$$

$$d = \frac{154 - 142}{3} = 4;$$

$$a_{11} = a_7 + 4d;$$

$$a_{11} = 154 + 4 \cdot 4 = 170.$$

Відповідь: 170.

Завдання 14. (ЗНО 2015 р.) «На першому тренуванні дистанція плавця становила 450 м. Після цього його відстань для кожного тренування була на 50 м більше, ніж раніше, доки не було досягнуто результату $-$ 1000 м за одне тренування. Після цього, кожного разу, відвідуючи басейн, плавець пропливає 1000 м. Скільки кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренується 3 рази на тиждень?» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 450; \quad d = 50.$$

$$a_n = 1000;$$

$$«a_n = a_1 + d(n-1)»$$

$$450 + 50(n-1) = 1000;$$

$$50(n-1) = 550; \ (n-1) - 11;$$

$$n = 12.$$

$$S = S_{12} + 18 \cdot 1000;$$

$$S_{12} = \frac{450 + 1000}{2} \cdot 12 = 1450 \cdot 6 = 8700;$$

$$S = 8700 + 18000 = 26700.$$

Відповідь: 26700

Завдання 15. (ЗНО 2015 р. додаткова сесія) «В інструкції з медичного застосування настою лікарської рослини вказано, що його рекомендовано приймати щоденно упродовж 20 діб. У перший день пацієнт повинен випити 370 мл настою, а кожного наступного дня – кількість настою буде зменшуватися на одну й ту саму кількість, ніж попереднього дня. В останній день прийом лікарського засобу повинен становити 85 мл. Скільки настою вип'є пацієнт протягом цих 20 діб, якщо слідувати інструкції?» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 370; \quad n = 20;$$

$$a_n = 85;$$

$$S_{20} = \frac{370 + 85}{2} \cdot 20 = 455 \cdot 10 = 4550.$$

Відповідь: 4550.

Завдання 16. (пробне ЗНО 2014 р.) «Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією, знаменник якої $q < 0$?» [32]

А	Б	В	Г	Д
$-25; 20; -15; 10$	$-80; -40; -20; -10$	$30; 10; -10; -30$	$10; -20; 40; -80$	$-15; -30; -45; -60$

Розв’язання: $\frac{-20}{10} = \frac{40}{-20} = \frac{-80}{40}$

Відповідь: Г.

Завдання 17. (ЗНО 2014 р.) «Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.» [32]

А	Б	В	Г	Д
8	4	-2	-4	-8

Розв’язання: $a_1 = 4 - 8 \cdot 1 = -4;$

$$a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12;$$

$$d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8.$$

Відповідь: Д.

Завдання 18. (ЗНО 2014 р. додаткова сесія) «У геометричній прогресії (b_n) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{4}$. Визначте b_4.» [32]

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	2	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Розв’язання: $q = \frac{b_2}{b_1};$

$$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

$$b_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.$$

Відповідь: Г.

Завдання 19. (пробне ЗНО 2013 р.) «У першому ряді кінотеатру встановлено 15 крісел, а у кожному наступному – на 3 крісла більше, ніж у попередньому. Скільки всього крісел встановлено в сьомому ряді цього кінотеатру?» [32]

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
21	27	30	33	36

Розв’язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 15; \quad d = 3;$$

$$a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$a_7 = 15 + 3 \cdot 6 = 15 + 18 = 33.$$

Відповідь: Г.

Завдання 20. (ЗНО 2013 р.) «В арифметичній прогресії (a_n) задано $a_1 = 4$, $a_2 = -1$. Укажіть формулу для знаходження n-го члена цієї прогресії.» [32]

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$a_n = -1 + 5n$	$a_n = 7 - 3n$	$a_n = 5 - n$	$a_n = 1 + 3n$	$a_n = 9 - 5n$

Розв’язання: $$a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$d = a_2 - a_1;$$

$$d = -1 - 4 = -5;$$

$$a_n = 4 - 5(n-1) = 4 - 5n + 5 = 9 - 5n.$$

Відповідь: Д.

Завдання 21. (ЗНО 2013 р. додаткова сесія) «У геометричній прогресії (b_n) задано $b_3 = 0{,}2$, $b_4 = \frac{3}{4}$. Знайти знаменник цієї прогресії.» [32]

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{20}$

Розв'язання: $$q = \frac{b_n}{b_{n-1}};$$

$$q = \frac{\frac{3}{4}}{0{,}2} = \frac{3}{4} : \frac{2}{10} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 2} = \frac{15}{4}.$$

Відповідь: А.

Завдання 22. (пробне ЗНО 2012 р.) «З певного аеропорту за розкладом авіарейсів виконується через кожні 10 хв. Перший літак за розкладом відлітає о шостій годині ранку. Укажіть час відльоту за розкладом тридцятого за рахунком літака.» [32]

А	Б	В	Г	Д
10год 40 хв	10год 50 хв	11год 00 хв	11год 30 хв	12год 00 хв

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 6; \quad d = \frac{1}{6};$$

$$a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$a_{30} = 6 + \frac{1}{6} \cdot 29 = 6 + 4\frac{5}{6} = 10\frac{5}{6} = 10\text{год } 50\text{хв}.$$

Відповідь: Б.

Завдання 23. (ЗНО 2012 р.) «У кінозалі міститься 18 рядів. Перший ряд має 7 місць, а в кожному наступному ряду кількість місць збільшується на 2 місця порівняно з переднім рядом. Скільки місць має цей зал?» [32]

А	Б	В	Г	Д
432	438	369	450	864

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 7; \quad d = 2; \quad n = 18;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$S_{18} = \frac{2 \cdot 7 + 2 \cdot 17}{2} \cdot 18 = 48 \cdot 9 = 432$$

Відповідь: А.

Завдання 24. (пробне ЗНО 2011 р.) «В арифметичній прогресії (a_n) $a_2 = -9$, $a_4 = -4$. Визначте різницю цієї прогресії.» [32]

А	Б	В	Г	Д
2,5	6,5	$-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$	$-2{,}5$	$-6{,}5$

Розв'язання: $a_3 = \frac{a_4+a_2}{2}$;

$$a_3 = \frac{-4+(-9)}{2} = \frac{-13}{2} = -6{,}5;$$

$$d = a_3 - a_{2;}$$

$$d = -6{,}5 - (-9) = -6{,}5 + 9 = 2{,}5.$$

Відповідь: А.

Завдання 25. (ЗНО 2011 р.) «Визначте знаменник геометричної прогресії (b_n) якщо $b_9 = 24,\ b_6 = -\frac{1}{9}$.» [32]

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	3	6	-6

Розв'язання: $b_9 = b_6 \cdot q^3$;

$$q^3 = \frac{b_9}{b_6}\ ;$$

$$q^3 = \frac{24}{-\frac{1}{9}} = -216;$$

$$q = -6.$$

Відповідь: Д.

Завдання 26. (пробне ЗНО 2010 р.) «Задано геометричну прогресію (b_n), для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник $q = -2$. Знайдіть b_1.» [32]

А	Б	В	Г	Д
24	14	10	-6	-24

Розв'язання: $b_2 = b_1 q;$

$$b_1 = \frac{b_2}{q};$$

$$b_1 = \frac{12}{-2} = -6.$$

Відповідь: Г.

Завдання 27. (ЗНО 2010 р.) «Оператор мобільного зв'язку запустив акцію «Довше розмовляєш – менше платиш», переваги якої: відсутня плати за з'єднання; перша хвилина розмови абоненту коштуватиме 30 *коп*, а кожна наступна буде меншою на 3 *коп* ніж попередня хвилина; за одинадцяту хвилину та всі наступні хвилини не нараховується плата; ці умови діють для користувачів усіх мобільних операторів країни. Згідно з умовами акції, скільки коштуватиме 8-хвилинний дзвінок (у *грн*) для абонента мобільного оператора?» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 0{,}3; \quad d = -0{,}03; \quad n = 8;$$

$$S_n = \frac{2a_1 - d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot 0{,}3 - 0{,}03 \cdot 7}{2} \cdot 8 = 0{,}39 \cdot 4 = 1{,}56.$$

Відповідь: 1,56.

Завдання 28. (ЗНО 2010 р. додаткова сесія) «Робітники одержали замовлення викопати криницю. За один викопаний метр криниці їм платять 50 *грн*, за кожний наступний– на 20 *грн* більше, ніж попередній. Скільки заплатять робітникам за викопану криницю глибиною 12 *м*?» [32]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 50; \quad d = 20; \quad n = 12;$$

$$S_n = \frac{2a_1 - d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot 50 - 20 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 320 \cdot 6 = 1920.$$

Відповідь: 1920.

Завдання 29. (ЗНО 2009 р. основна сесія) «Яка з поданих нижче послідовностей є арифметичною прогресією?» [32]

А	Б	В	Г	Д
$9;\ 7; 4; 1$	$-4;\ -2; 0; 1$	$3; 6; 12; 24$	$1; 3; 6; 10$	$3; 7; 11; 15$

Розв'язання: $d = a_{n+1} - a_n;$

$$a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4;$$

$$a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4;$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4.$$

Відповідь: Д.

Завдання 30. (ЗНО 2008 р. основна сесія) «Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.» [32]

Розв'язання: $b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = \frac{5}{3};$

$$b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = \frac{5}{2};$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3};$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Відповідь: 2,5.

Завдання 31. (ЗНО 2007 р. основна сесія) «Знайдіть суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел» [32]

А	Б	В	Г	Д
$9;\ 7; 4; 1$	$-4;\ -2; 0; 1$	$3; 6; 12; 24$	$1; 3; 6; 10$	$3; 7; 11; 15$

Розв'язання: Перші 12 непарних натуральних чисел 1, 3, …, 23 утворюють арифметичну прогресію:

$$a_1 = 1; a_{12} = 23; d = 2;$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{1 + 23}{2} \cdot 12 = 24 \cdot 6 = 144.$$

Відповідь: 144.

2.6. Практична перевірка результатів дослідження

З метою вивчення ефективності такої форми контролю і обліку знань учнів, як тестування з математики було проведено експериментальну перевірку знань. Систематичний тестовий контроль є мотивацією для учнів постійно готуватися до уроків. Більше того, тести, проведені за порівняно короткий проміжок часу, можуть перевірити якість засвоєння великого обсягу навчального матеріалу.

Перевірка знань, умінь і навичок учнів з математики проводилася в період навчальної та педагогічної практик м. Рівне ЗОШ І-ІІ №22 в 9-А класі.

Перед початком експерименту була проведена самостійна робота, результати якої занесено у таблицю 2.2.

Таблиця 2.2

Клас	Кількість учнів	Рівні засвоєння знань			
		Високий	Достатній	Середній	Низький
9-А	31	5 учнів	11 учнів	14 учнів	1 учень

Проаналізувавши результати самостійної роботи, можна помітити, що всі учні засвоїли матеріал по цій темі на різних рівнях. Кількість школярів, які отримали середній і низький бал, ще досить висока, тому було розроблено і проведено тестування в системі онлайн (додаток Б) на тему: «Числові послідовності».

На основі аналізу шкільних підручників і матеріалів ДПА був розроблений тест, завдання якого розбиті на секції за рівнем складності. Це дозволяє використовувати один і той же тест для учнів з різним рівнем підготовки.

У зв’язку із запровадженням карантинних заходів згідно розпорядженням Міністерства освіти і науки України №1/9-154 підсумковий контроль у вигляді тесту був проведений онлайн. Результати якого засвідчили ефективність дослідження.

ВИСНОВКИ

Мета бакалаврської роботи полягала у дослідженні методичних особливостей вивчення теми «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики загальноосвітньої школи, розробка методичних рекомендацій по вивчені даної теми.

В роботі розглянуто історичні аспекти виникнення понять арифметичної і геометричної прогресій. Виявлено основні цілі і завдання вивчення теми «Числові послідовності» в поглибленому курсі математики. Визначено, що вивчення числових послідовностей грає важливу роль не тільки в шкільному курсі алгебри, а й в подальшому навчанні математики у ВНЗ. Дана тема дозволяє визначити такі основні поняття математичного аналізу, як: нескінченність, границя і безперервність.

Виконано аналіз змісту теоретичного і практичного матеріалу по темі «Числові послідовності» в підручниках і навчальному посібнику поглибленого рівнів алгебри загальноосвітньої школи. Визначено, що даний матеріал вивчається у дев'ятому та десятому класах. Поняття арифметичної та геометричної прогресій ґрунтуються на понятті числової послідовності. При введенні понять і теорем даної теми простежується аналогія між цими двома прогресіями. Виділено основні типи завдань по темі «Числові послідовності», наведені приклади їх кожного типу.

В роботі розглянуто особливості вивчення теми числових послідовностей, розроблено методичні рекомендації з навчання учнів по темі «Арифметична і геометрична прогресії» в поглибленому курсі алгебри. Навчання з теми «Прогресії» і «Числові послідовності» має починатися з історичної довідки, підготовленої заздалегідь вчителем або учнями, щоб зацікавити їх і привернути увагу до даної теми. Далі поступово слід вводити основні визначення і формули відповідно до календарного плану і змісту підручників алгебри 9-го та 10-го класів.

У роботі було використано тестові завдання для математичної підготовки школярів. Метою тесту є визначення рівня знань. Окрім функцій контролю, тест виконує і інші функції навчання, такі як: розвиток, освіту та контроль.

Розглянуто застосування числових послідовностей при розв’язуванні олімпіадних задач, які ґрунтуються на їх властивостях. Проведено аналіз завдань ЗНО по темі «Числові послідовності», наведені приклади задач.

Отже, підібрані навчальні матеріали для викладання теми «Числові послідовності», а також розроблені тестові завдання для зазначеної теми ефективні для навчання школярів. Все це дає підставу вважати, що завдання, поставлені в дослідженні, повністю вирішені.

Результати роботи можуть бути використані при викладанні математики у загальноосвітній школі та методиці викладання математики у вищому навчальному закладі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2011. 144 с.

2. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл., закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків, 2018. 512 с.

3. Бевз В. Г., Буковська О. І. Математика: у 2 ч. Комплексне видання для підготовки до ЗНО та ДПА. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 176 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Вид. 3-тє. Київ: Вища школа, 1989. 397 с.

5. Бевз Г. П. Методика навчання математики. Харків: «Основа», 2003. 96 с.

6. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі.* 2017. №7-8. С. 2-9.

7. Воєвода А. Л Зацікавити математикою: (методичні матеріали для підвищення інтересу до математики): Методичний посібник. Вид. 2-ге, допов. і перероб. Вінниця: ФОП «Легкун В.М.», 2012. 181с.

8. Глейзер Г. И. История математики в школе 9-10 классов: пособие для учителей. Москва, 1853. 351 с.

9. Депман. И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. Москва, 1966. 415 с.

10. Істер О. С., Глобін О. І., Комаренко О. В. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9 кл. Вид. 2-ге, доопрац. Київ, 2012. 112 с.

11. Коваль В. В., Крайчук О. В., Клекоць О. В. Загальна методика викладання математики. Рівне: РДГУ, 2005. 165 с.

12. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник / О. І. Глобін та ін. Київ: Центр навч.-метод. л-ри, 2015. 245 с.

13. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях: навч. посіб. для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг, 2016. 78 с.

14. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 416 с.

15. Москаленко О., Черкаська Л., Коваленко О. Числові послідовності в системі математичної підготовки школярів. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №2. С. 2-8.

16. Нежива О. О., Пихтар М. П. Методи підсумування числових послідовностей та числових рядів. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №10. С. 38–40.

17. Нюкіна Т. Геометрична прогресія. Урок алгебри в 9-му класі. *Газета Математика.* Київ: Шкільний світ, 2018. №22 (850). С. 19 – 22

18. Пихтар М. П., Чеберяко К. М. Про деякі нетрадиційні застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач у шкільному курсі математики. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2019. №16. С. 35 – 37.

19. Пихтар М. П. Методична система розвитку математичних здібностей школярів – членів Малої академії наук України: навчально-методичний посібник. Чернігів, 2014. 224 с.

20. Плис Т. Значення прикладних задач під час вивчення шкільного курсу алгебри на прикладі тем "Нерівності" та "Прогресії". *Математика в рідній школі.* 2016. № 7/8. С. 26–29.

21. Полонський В., Якір М., Мерзляк А. Новий підхід до викладання алгебри та геометрії у 9-му класі (геометрична прогресія). *Газета Математика* К.: Педагогічна преса, 2017. №16 (820). С. 5 – 7

22. Програма поглибленого вивчення математики в10-11 профільних класах. *Математика в рідній школі.* / Бурда М. І. та ін. 2016. №6. С. 19–25.

23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики підручник. Вид.2-ге, допов. і переробл. Київ: Вища шк, 2006. 240 с.

24. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль, 2004. 240 с.

25. Старова О. О. Готуємося до державної підсумкової атестації. Математика. 9 клас (тестові завдання за темою «Арифметична та геометрична прогресії». *Журнал Математика в школах України.* Київ: Основа, 2016. №12 (492). С. 33 – 34

26. Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Коваленко О. В. Тестові завдання як засіб формування в школярів математичної компетентності. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №2. С. 2 –4.

27. *Шолом* Г. Оновлення прийомів навчання математики в контексті розвитку навичок критичного мислення. *Математика в рідній школі.* Київ: Педагогічна преса, 2019. № 6 (209). С. 2–3.

28. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про освіту» (Відомості Верховної Ради, 2017, №38-39, ст. 380). URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19 (дата звернення: 13.12.2019).

29. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/ matematika-algebra-geometriya. (дата звернення: 01.02.2020).

30. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://ru.osvita.ua/doc/files/news/309/30993/42. (дата звернення:04.02.2020).

31. Нова українська школа. URL: https: // mon.gov.ua / ua / tag / nova-ukrainska-shkola (дата звернення: 08.11.2019).

32. Тести ЗНО з предмета «математика». URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/ (дата звернення: 02.03.2020).

ДОДАТКИ

Додаток А

Різні види задач по темі «Числові послідовності» у діючих підручниках з алгебри 9-го та 10-го класів поглибленого вивчення математики

1. Завдання на розуміння поняття числова послідовність, використання термінів і символіки.

Задача 1. 30.1. «Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:

1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;

2) неправильних звичайних дробів із чисельником 11;

3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5;

Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.» [14]

Розв'язання:

1) 12; 16; 20; 24; 28;

2) $\frac{11}{10}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{11}{6}$;

3) 13; 21; 29; 37; 45;

Перша і друга послідовності скінченні, а третя нескінчена.

Задача 2. №31.17. «Як зміниться різниця скінченної арифметичної прогресії, якщо переставити її члени у зворотному порядку?» [14]

Розв'язання: Давайте розглянемо таку скінчену арифметичну прогресію:

1; 3; 5; 7; 9; 11;

Переставивши її члени у зворотному порядку, ми отримаємо: 11; 9; 7; 5; 3; 1;

Отже, проаналізувавши дані прогресії, очевидно, що різниця змінить знак на протилежний.

Задача 3. №31.30. «Чи можуть утворювати арифметичну прогресію довжини сторін і периметр трикутника?» [14]

Розв'язання: Припустимо, що це так. Тоді $a -$ довжина однієї із сторін трикутника, $a + d -$ довжина другої сторони, $a + 2d -$ довжина третьої сторони, а $a + 3d -$ периметр даного трикутника.

Периметр трикутника також можна виразити через суму довжин всіх сторін: $a + 3d = a + a + d + a + 2d$.

Якщо: $a + 3d = 3a + 3d, a = 0$. Це означає, що сторона трикутника являється точкою, чого бути не може. Отже, довжини сторін і перметр трикутника не можуть утворювати арифметичну прогресію.

2. Завдання на знаходження члена прогресії.

Задача 4. «№30.6. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n), якщо:

1) $b_1 = 18;\ \ b_{n+1} = -\frac{b_n}{3};$

2) $b_1 = -1;\ \ b_2 = 2;\ \ b_{n-2} = b_n^2 + 2b_{n+1};$

3) $b_1 = -1;\ \ b_{n-1} = \frac{1}{b_n}$;» [14]

Розв'язання:

1) $b_1 = 18;\ \ b_{n+1} = -\frac{b_n}{3};$

$b_2 = -\frac{18}{3} = -6;\ \ b_3 = \frac{-6}{3} = -2;\ \ b_4 = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3};\ \ b_5 = \frac{-\frac{2}{3}}{3} = -\frac{2}{9};$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд: $-6;\ -2;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{9};\ -\frac{2}{27}$.

2) $b_1 = -1;\ \ b_2 = 2;\ \ b_{n-2} = b_n^2 + 2b_{n+1};$

$b_3 = 1 + 2 \cdot 2 = 5;\ \ b_4 = 2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14;\ \ b_5 = 25 + 2 \cdot 14 = 53$

$b_6 = 196 + 2 \cdot 53 = 196 + 106 = 302;$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд: $-1;\ 2;\ 5;\ 14;\ 53;\ 302.$

3) $b_1 = -1;\ \ b_{n-1} = \frac{1}{b_n};$

$$b_2 = -\frac{1}{1} = -1;\ \ b_3 = \frac{1}{-1} = -1;\ \ b_4 = \frac{1}{-1} = -1;\ \ b_5 = \frac{1}{-1} = -1.$$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд: $-1;\ -1;\ -1;\ -1;\ -1.$

Задача 5. «31.24. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо: $a_7 + a_{13} = -104;\ \ a_2 \cdot a_6 = -240$.» [14]

Розв'язання:

$$\begin{cases} a_7 + a_{13} = -104 \\ a_2 \cdot a_6 = -240 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 6d + a_1 + 12d = -104 \\ (a_1 + d)(a_1 + 5d) = -240 \end{cases}$$

$2a_1 + 18d = -104;\quad a_1 + 9d = -52;\quad a_1 = -52 - 9d;$

$(-52 - 8d) \cdot (-52 - 9d + 5d) = -240;$

$(-52 - 8d) \cdot (-52 - 4d) = -240;$

$-4(13 + 2d) \cdot (-4)(13 + d) = -240;$

$(13 + 2d)(13 + d) = 15;$

$169 + 26d + 13d + 2d^2 - 15 = 0;$

$2d^2 + 39d + 154 = 0;$

$D = 39^2 - 4 \cdot 2 \cdot 154 = 1521 - 1232 = 289 = 17^2;$

$d_1 = \frac{-39+17}{4} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} = -5{,}5;$

$d_2 = \frac{-39-17}{4} = -\frac{56}{4} = -14;$

$a_1 = -52 - 9 \cdot (-5{,}5) = -52 + 49{,}5 = -2{,}5;$

$(a_1)' = -52 - 9 \cdot (-14) = -52 + 126 = 74;$

Відповідь: $a_1 = -2{,}5;\ \ d = -5{,}5;$ або $a_1 = 74;\ \ d = -14.$

Задача 6. «№ 33.14. Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменник $q = \frac{2}{7}$;

2) $c_6 = 100,\ \ c_9 = 100\,000$.» [14]

Розв'язання:

1) $c_4 = \frac{1}{98};\ \ q = \frac{2}{7};$ Знайти c_1

$c_4 = c_1 \cdot q^3;\quad c_1 = \frac{c_4}{q^3} = \frac{1}{98} : \frac{8}{49 \cdot 7} = \frac{7}{2 \cdot 8};\quad c_1 = \frac{7}{16}.$

2) $c_6 = 100,\ \ c_9 = 100\,000;$

$c_9 = c_6 \cdot q^3$; $q^3 = \frac{100\,000}{100} = 1000$; $q = 10$;

$100 = c_1 \cdot 10^5$; $c_1 = \frac{100}{10^5} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$; $c_1 = \frac{1}{1000}$.

Відповідь: 1) $c_1 = \frac{7}{16}$; 2) $c_1 = \frac{1}{1000}$.

3. *Завдання на складання формули n-го члена послідовності.*

Задача 7. «№ 30.28. Знайти формулу n-го члена послідовності, заданої рекурентно:

1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$;

2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$;

3) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$» [14]

Розв'язання:

1) Якщо $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ то:

а) $n = 1$; $a_2 = 2 + 1 = 3$;

б) $n = 2$; $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$;

в) $n = 3$; $a_4 = 15$;

Маємо: 1; 3; 7; 15; отже $a_n = 2^n - 1$;

$a_1 = 2 - 1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2^3 - 1 = 7$;

$a_4 = 16 - 1 = 15$; $a_5 = 32 - 1 = 31$; отже, $a_n = 2^n - 1$;

2) Якщо $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ то:

а) $n = 1$; $a_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

б) $n = 2$; $a_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{2}} = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

в) $n = 3$; $a_4 = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$;

Отже, можна припустити, що $a_n = \frac{n}{n+1}$;

3) Якщо $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$ то:

а) $n = 1$; $a_2 = 0 + 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$;

б) $n = 2$; $a_3 = 3 + 2\sqrt{3 + 1} + 1 = 3 + 4 + 1 = 8 = 3^2 - 1$;

в) $n = 3;\ a_4 = 8 + 2\sqrt{9} + 1 = 8 + 6 + 1 = 15 = 4^2 - 1;$

г) $n = 4;\ a_4 = 15 + 2\sqrt{16} + 1 = 15 + 8 + 1 = 24 = 25 - 1 = 5^2 - 1;$

д) $n = 5;\ a_4 = 24 + 2\sqrt{25} + 1 = 24 + 10 + 1 = 35 = 6^2 - 1.$

Отже, $a_n = n^2 - 1.$

Відповідь: 1) $a_n = 2^n - 1$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2 - 1$.

Задача 8. «№ 31.8. Знайдіть формулу n-го члена послідовності:

1) $-5, -7, -9, -11, \dots;$

2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2}, \dots;$

3) $a^2,\ 2a^2,\ 3a^2,\ 4a^2, \dots;$

4) $a + 3,\ a + 1,\ a - 1,\ a - 3, \dots$.» [14]

Розв’язання:

1) $-5, -7, -9, -11, \dots;$

$a_1 = -5;\ \ d = -7 + 5 = 2$

$a_n = -5 - 2(n - 1);$

2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2}, \dots;$

$a_1 = 2;\ \ d = 2\frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{6};$

$a_n = 2 + \frac{1}{6}(n - 1);$

3) $a^2,\ 2a^2,\ 3a^2,\ 4a^2, \dots;$

$a_1 = a^2;\ \ d = 2a^2 - a^2 = a^2;$

$a_n = a^2 + a^2(n - 1);$

4) $a + 3,\ a + 1,\ a - 1,\ a - 3, \dots.$

$a_1 = a + 3;\ \ d = a + 1 - (a + 3) = -2;$

$a_n = a + 3 - 2(n - 1) = a + 5 - 2(n - 1).$

Відповідь: 1) $a_n = -5 - 2(n - 1);$ 2) $a_n = 2 + \frac{1}{6}(n - 1);$ 3) $a_n = a^2 + a^2(n - 1);$ 4) $a_n = a + 3 - 2(n - 1) = a + 5 - 2(n - 1).$

4. Дослідження послідовності на обмеженість та зростання.

Задача 9. «№32.10. Доведіть, що послідовність (x_n) є необмеженою:

1) $x_n = (-1)^n \cdot n;$ 2) $x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n \cdot n}$» [2]

Розв'язання:

1) $x_n = (-1)^n \cdot n;$

$x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3;\ x_4 = 4;\ x_5 = -5$ ....

Отже, послідовність не є обмеженою ні зверху ні знизу.

2) $x_n = \dfrac{n}{n+1+(-1)^n \cdot n}$

$x_1 = \dfrac{1}{2-1};\ x_2 = \dfrac{2}{2+1+2} = \dfrac{2}{5};\ x_3 = \dfrac{3}{4-3} = 3$ ....

Отже, послідовність не є обмеженою.

Задача 10. «№32.1. Доведіть, що послідовність (a_n) є зростаючою, якщо:

1) a_n =5n-12; 2) $a_n = n^2 + n - 1$; 3) $a_n = 3^n - 2^n$; 4) $a_n = \frac{n}{n+1}$;» [2]

Розв'язання:

1) a_n =5n-12;

Числова послідовність називається зростаючою, якщо для будь-якого натурального числа n виконується $a_n < a_{n+1}$;

Нехай $n = 1;\ a_1 = -7;\ a_2 = 10 - 12 = -2;\ -2 > -7;$

Взагалі: $a_n = 5_n - 12;\ a_{n+1} = 5(n+1) - 12 = 5n - 7;$

$5n - 12 < 5n - 7;\ a_n < a_{n+1};$

2) $a_n = n^2 + n - 1 -$ зростаюча;

$n+1;\ a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 =$

$= n^2 + 3n + 1;$

$n^2 + 3n + 1 > n^2 + n - 1;$ для $n \in N$.

3) $a_n = 3^n - 2^n;$

Отже, $a_n = 3^n - 2^n;\ a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n;\ a_{n+1} > a_n;$

4) $a_n = \frac{n}{n+1};\ a_{n+1} - \frac{n+1}{n+2};\ \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2_{n+1}-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0;$

отже, $a_{n+1} > a_n -$ зростаюча.

5. Задачі на знаходження суми n-перших членів арифметичної і геометричної прогресії.

Задача 11. «№32.12. Знайдіть суму двадцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 44$, а різниця прогресії $d = 4$.» [14]

Розв'язання: $a_{10} = 44$; $d = 4$ Знайти S_{25}

$a_1 + 9d = 44$; $a_1 + 36 = 44$; $a_1 = 8$;

$S_{25} = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 24}{2} \cdot 25 = \frac{16+96}{2} \cdot 25 = 56 \cdot 25 = 1400.$

Відповідь: $S_{25} = 1400.$

Задача 12. «№32.13. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n),, якщо $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ і $a_5 + a_{22} = 101$.» [14]

Розв'язання: $\begin{cases} a_6 + a_8 - a_{14} = -17 \\ a_5 + a_{22} = 101 \end{cases}$ Знайти S_{20}.

Використаємо формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$; тоді:

$$\begin{cases} a_1 + 5d + a_1 + 7d - a_1 - 13d = -17 \\ a_1 + 4d + a_1 + 21d = 101 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - d = -17 \\ 2a_1 + 25d = 101 \end{cases} \Big| 2 \quad -\begin{cases} 2a_1 - 2d = -34 \\ 2a_1 + 25d = 101 \end{cases}$$

$$-27d = -135;$$

d=5

$a_1 - 5 = -17$; $a_1 = 12$;

$S_{20} = \frac{2 \cdot (-12) + 5 \cdot 19}{2} \cdot 20 = (-24 + 95) \cdot 10 = 71 \cdot 10 = 710.$

Відповідь: $S_{20} = 710.$

Задача 13. «№34.8. Геометричну прогресію (y_n) задано формулою n-го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$ знайдіть суму десяти перших членів прогресії.» [14]

Розв'язання: щоб знайти суму десяти перших членів прогресії, необхідно в першу чергу знайти :

$y_1 = \frac{(-2)^2}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; $y_2 = \frac{(-2)^3}{20} = \frac{-8}{20} = \frac{-2}{5}$;

тоді $q = \frac{-2}{5} : \frac{1}{5} = -2$; $y_1 = \frac{1}{5}$; $q = -2$;

$S_{10} = \frac{\frac{1}{5}\cdot((-2)^{10}-1)}{-2-1} = \frac{1024-1}{5\cdot(-3)} = -\frac{341}{5} = -68{,}2.$

Відповідь: $S_{10} = -68{,}2$

6. Завдання з параметром

Задача 14. «№31.38. При якому значенні *x* значення виразів $x^2 - 4;\ 5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? знайдіть члени цієї прогресії.» [14]

Розв'язання: нехай $x^2 - 4;\ \ 5x + 3;\ \ \ 3x + 2 -$ буде арифметичною прогресією.

Використаємо властивість членів арифметичної прогресії $\frac{x^2-4+3x+2}{2} = 5x + 3;$

$x^2 + 3x - 2 = 10x + 6;\quad x^2 + 3x - 10x - 2 - 5 = 0;$

$x^2 - 7x - 8 = 0;\quad x_1 = 8;\quad x_2 = -1;$ (за т.Вієта)

Отже, $60;\ 43;\ 26$ або $-3;\ -2;\ -1;$

Відповідь: $x = 8;\ \ x = -1$

7. Завдання на доведення методом математичної індукції.

Задача 15. « Доведіть рівність: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.» [2]

Доведення: розглянемо дану рівність справа наліво при $n = 2$: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 = 1 + 2$, таким чином, отримаємо, що існує n, для якого дана нерівність виконується. Далі розглянемо цю ж саму рівність для $n + 1$: «$\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)(n+1+1)}{2} = 1 + \cdots + n + n + 1$». Тепер підставимо в дану формулу $m = n + 1$, отримаємо: $\frac{m(m+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + m$, що і потрібно було довести.

8. Завдання на обчислення границі послідовності.

Задача 16. «№34.1. Обчисліть границю:

1) $\log_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1};$

2) $\log_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+4};$

3) $\log_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}$.»[2]

Розв’язання:

1) $\log_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \log_{n\to\infty}\frac{2n+2-2}{n+1} = \log_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right) = 2;$

2) $\log_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+4} = \log_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+4}\right) = 1;$

3) $\log_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1} = \log_{n\to\infty}\frac{1000n}{n+\frac{1}{n}} = 0;$

Задача 17. «№35.15. Обчисліть границю: $\log_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3n}\right)$» [2]

Розв’язання:

$\log_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3n}\right) = \log_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2-3n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3n}} = \log_{n\to\infty}\frac{-3n+1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)} =$

$$= \log_{n\to\infty}\frac{n(-3+\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)} = \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

9. Дослідити послідовність на збіжність

Задача 18. «№33.18. У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?» [2]

Розв’язання: послідовність залишається збіжною, границя не зміниться.

Задача 19. «№33.23. Відомо, що послідовність ($|a_n|$) є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?» [2]

Розв’язання: Ні

10. Задачі на знаходження кількості членів послідовності.

Задача 20. «№33.16. Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$, ... Знайдіть номер цього числа.»[14]

Розв’язання: $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$, ... $b_n = 96;$

$b_1 = \frac{3}{8};\ \ q = \frac{3}{4}:\frac{3}{8} = \frac{3\cdot 8}{4\cdot 3} = 2;\ \ \ 96 = \frac{3}{8}\cdot 2^{n-1};$

$2^{n-1} = 96:\frac{3}{8} = \frac{96\cdot 8}{3} = 32\cdot 8 = 2^5\cdot 2^3 = 2^8;$

$2^{n-1} = 2^8$; $n - 1 = 8$; $n = 9$.

Відповідь: $n = 9$.

11. Розв'язання рівнянь.

Задача 21 «№35.18. Розв'яжіть рівняння:

$1 + x + x^2 + \cdots = 4$, якщо $|x| < 1$» [14]

Розв'язання:

$1 + x + x^2 + \cdots = 4$, якщо $|x| < 1$;

$b_1 = 1$; $q = x$; $\frac{1}{1-x}$; $1 = 4 - 4x$; $4x = 3$; $x = \frac{3}{4}$;

Відповідь: $x = \frac{3}{4}$.

Додаток Б

Тестові завдання з теми: « Числові послідовності»

Для завдання 1-13 існує п’ять варіантів відповідей, лише один з яких є правильним.

Завдання 14-15 містить чотири рядки інформації, до кожного з яких потрібно вибрати правильний на Вашу думку варіант позначений буквою.

1 варіант

1. $(a_n) -$ арифметична прогресія, $a_1 = 2;\ \ a_2 = 7$. Знайдіть a_{21}.

А	Б	В	Г
97	102	107	інша відповідь

2. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії $\frac{1}{3};\ -1;\ \ 3;\ \dots$

А	Б	В	Г
-9	9	27	-27

3. Обчисліть різницю арифметичної прогресії 8; $\ 3;\ -2;\ -7;\ \dots$

А	Б	В	Г
5	-5	8	3

4. Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 5$, $d = 3$, $a_n = 29$.

А	Б	В	Г
8	9	7	10

5. Дано геометричну прогресію (b_n). Знайдіть b_4, якщо $b_1 = -32,\ \ q = -\frac{1}{2}$

А	Б	В	Г
-4	4	-2	2

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії $-6;\ \ 1;\ \ -\frac{1}{6};\ \dots$

А	Б	В	Г
$-7\frac{1}{5}$	$5\frac{1}{7}$	$7\frac{1}{5}$	$-5\frac{1}{7}$

7. Серед поданих послідовностей укажіть арифметичну прогресію.

А	Б	В	Г
$5;\ 8;\ 13;\ 18$	$45;\ 40;\ 33;\ 27$	$0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4$	$7;\ 9;\ 12;\ 14$

8. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 2,3$ $a_2 = 3,2$.

А	Б	В	Г
$0,9$	$-0,9$	9	-9

9. Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 8$, а $d = 0,5$.

А	Б	В	Г
11	10	$10,5$	$9,5$

10. Обчисліть суму десяти перших членів a_n, перший член якої $a_1 = -11$, а різниця $d = 4$.

А	Б	В	Г
55	60	65	70

11. Яка з наступних послідовностей є геометричною прогресією?

А	Б	В	Г
$2;\ 6;\ 18;\ 36$	$80;\ 40;\ 20;\ 5$	$4;\ 8;\ 16;\ 32$	$2;\ -10;\ 50;\ 250$

12. Обчисліть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = \frac{14}{15}$; $b_7 = \frac{2}{3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{3}$

13. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \frac{1}{27}$, а знаменник $q = -3$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

14. Укажіть відповідність між формулою та її визначенням

1	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	А	Різниця арифметичної прогресії
2	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2n}$	Б	Сума членів арифметичної прогресії
3	$g = \dfrac{b_2}{b_1}$	В	Член арифметичної прогресії
4	$S = \dfrac{b_1}{1-g}$	Г	Сума членів нескінченої геометричної прогресії
		Д	Знаменник геометричної прогресії

15. Укажіть відповідність між формулами і першим членом даної послідовності

1	$a_n = 3n - 2$	А	0
2	$a_n = n + 7$	Б	1
3	$a_n = n^3 - 6$	В	8
4	$a_n = 2n^2 - 2$	Г	−5
		Д	−1

2 варіант

1. Яка з даних послідовностей є арифметичною прогресією?

А	Б	В	Г
$2;\ 6;\ 10;\ 15$	$14;\ 17;\ 20;\ 23$	$-7;\ 5;\ -3$	$12;\ 9;\ 6;\ 4$

2. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 5$, а знаменник $q = 2$.

А	Б	В	Г
70	85	80	75

3. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -2$, $a_2 = 3$.

А	Б	В	Г
1	-1	5	-5

4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 18$, а знаменник $q = \frac{2}{3}$.

А	Б	В	Г
6	36	54	58

5. Чому дорівнює десятковий член арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = 11$, а різниця $d = -5$.

А	Б	В	Г
-34	-39	-29	-44

6. Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 20$, і $a_6 = 15$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

7. Укажіть серед наведених послідовностей геометричну прогресію.

А	Б	В	Г
6; 18; 54; 162	1; 2; 3; 5	3; 8; 13; 18	21; 19; 17; 15

8. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_2 = \frac{1}{12}$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

9. Чому дорівнює четвертий член геометричної прогресії, якщо $b_1 = 6$, а $q = -2$.

А	Б	В	Г
-48	48	24	-24

10. Чому дорівнює сума чотирьох перших членів b_n-го, перший доданок $b_1 = 0{,}8$, а знаменник $q = 3$.

А	Б	В	Г
$10{,}4$	$-10{,}4$	32	$3{,}2$

11. Віднайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, якщо перший член $b_1 = 12$, знаменник $q = \frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г
15	16	9	18

12. Обчисліть суму перших п'яти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 3,\ d = -2$.

А	Б	В	Г
-4	20	-5	-10

13. Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 5,\ d = 3,\ a_n = 29$.

А	Б	В	Г
8	9	7	10

14. Укажіть відповідність між даними та сумою перших 10 членів арифметичної прогресії

1	a_1=−7, a_{10}=2	А	−5

2	a_1=−5, a_{10}=4	Б	−25
3	a_1=11, a_{10}=−1	В	50
4	a_1=5, a_{10}=23	Г	−50
		Д	140

15. Знайдіть відповідність між геометричними прогресіями та сумою перших шести членів .

1	5,10, …	А	21
2	32, −16,…	Б	315
3	3, 3, 3, 3,…	В	7812
4	2, 10,….	Г	6250
		Д	24