Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Методика вивчення систем алгебраїчних рівнянь в основній школі

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІФ-41
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Бондарчук Наталія Анатоліївна
Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, проф. Крайчук О.В.
Рецензент ___________________

Рівне-2020 року

Зміст

ВСТУП

Актуальним завданням процесу навчання математики є перетворення учня з пасивного об'єкта, що лише накопичує знання, у суб'єкт пізнавальної діяльності, який своєю активністю значною мірою визначає результати навчальної діяльності. Модернізація національної української школи потребує підвищення активності та самостійності учнів, формування в них вмінь опрацьовувати та плідно використовувати освітню інформацію.

Основним завданням вивчення математики в освітньому закладі загальноосвітньої середньої школи є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і умінь, формування рівня математичної культури, вміти розв'язувати самостійні роботи, що є необхідним у продовженні освіти та майбутній трудовій діяльності.

Як відомо, 75 % всіх розрахункових математичних задач розв’язуються за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Оскільки математичні моделі тих або інших явищ чи процесів або відразу побудовані на основі лінійних алгебраїчних рівнянь, або зводяться в процесі роботи до них. Таким чином, велике значення має правильний вибір ефективного методу обчислення СЛАР. Вимоги сучасного суспільства до загальноосвітньої школи з однієї сторони, і інтереси особистості, що розвивається з іншої сторони, викликали необхідність нових підходів до організації навчально-виховного процесу школи, необхідність диференціації навчання відповідно до здібностей учнів, потреб, інтересів і нахилів.

Об’єкт дослідження: процес навчання алгебри в класах з поглибленим вивченням математики.

Предмет дослідження: методичні особливості застосування методів під час вивчення систем рівнянь на уроках математики .

Мета дослідження: розробити методику вивчення основних типів систем рівнянь у курсі алгебри та розробити самостійні роботи з даної теми і експериментально перевірити її ефективність.

Об'єкт, предмет і мета дослідження дозволили сформулювати такі **завдання:**

1. Систематизувати теоретичні відомості та методи про розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі алгебри основної школи.

2. З'ясувати місце систем рівнянь в діючій та проекті нової програми з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.

3. Розробити дидактичне забезпечення по курсу алгебри сьомого та дев'ятого класу у формі самостійних робіт.

Для розв'язання поставлених завдань були використані такі **методи дослідження:**

- теоретичний аналіз наукової, методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження;
- бесіди з педагогами - предметниками, учнями;
- спостереження, аналіз дидактичних програмних засобів;
- комплексний аналіз, отриманих в ході дослідження, даних;
- цілеспрямований експеримент із статистичним опрацюванням результатів.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація навчально-виховного процесу на основі розробки системи самостійних робіт забезпечить покращення вмінь та навичок в порівнянні з традиційною методикою навчання, сприятиме розвитку особистості, формуванню стійкого інтересу до предмету.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що матеріал роботи можна використовувати на уроках математики в класах з поглибленим вивченням.

Теоретичне значення дослідження полягає у розробці методики використання різних методів при розв'язуванні систем рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики.

Результати роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Кілька рівнянь, які розв'язують сумісно, називаються системою алгебраїчних рівнянь. Лінійним рівнянням з n невідомими називається рівняння виду:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b – дійсні числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі. Система рівнянь є лінійною, якщо всі рівняння системи лінійні [4].

Розглянемо задачу.

У 7-А і 7-Б класах навчаються разом 56 учнів, до того ж, у 7- А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б. Скільки учнів у кожному класі?

Для розв'язання задачі позначимо кількість учнів 7-А класу через x, а кількість учнів 7-Б класу – через y. За умовою задачі, у 7-А і 7-Б класах разом навчаються 56 учнів, тобто $x + y = 56$. У 7-А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б, тому різниця $x - y$ дорівнює 4: $x - y = 4$ [4].

Маємо два лінійні рівняння із двома змінними:

$$x + y = 56;$$

$$x - y = 4.$$

І в першому, і в другому рівняннях змінні позначають одні й ті ж велечини – кількості учнів 7-А і 7-Б класів. Тому потрібно знайти такі значення змінних, які перетворюють у правильну числову рівність і перше, і друге рівняння, тобто потрібно знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівняннь, то кажуть, що ці рівняння утворюють систему рівнянь.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Систему лінійних рівнянь із двома змінними, складену за умовою нашої задачі, записують так:

$$\begin{cases} x + y = 56; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Спільним розв'язком обох рівнянь цієї системи є пара значень змінних $x = 30$, $y = 26$, бо рівності $30 + 26 = 56$ і $30 - 26 = 4$ є правильними. Цю пару називають розв'язком системи рівнянь.[4]

Означення. Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару чисел $(x_0; y_0)$, які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність[4].

Означення. Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що вона розв'язків не має (несумісна).

Якщо система має розв'язки, то вона називається сумісною.

Для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3. \end{cases}$$

розв'язком є трійка значень змінних $(x_0; y_0; z_0)$, при підстановці яких в кожне рівняння системи дістанемо тотожність.

Рівносильні системи – це системи, множини розв'язків яких збігаються.

Якщо поставлено задачу знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см^2, а периметр 14 см, то зрозуміло, що треба знайти спільний розв'язок рівнянь $xy = 12$ і $2x + 2y = 14$, де x см і y см – довжини сусідніх сторін.

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

Так, запис $\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см^2, а периметр 14 см.

Розв'яжемо систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

Очевидно, що перше рівняння цієї системи розв'язків не має, а отже, не існує й спільних розв'язків рівнянь, що входять до системи. Висновок: система розв'язків не має.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовуємо метод виключення невідомих. Суть цього методу розглянемо на прикладі [9].

1. $\begin{cases} x + 3y + z = 5, \\ 3x - 4y - z = 8, \\ 5x + 2y + z = 20. \end{cases}$

Щоб позбутися невідомого z, додамо почленно перші два рівняння, а потім друге та третє рівняння і дістанемо систему:

$$\begin{cases} 4x - y = 13, \\ 8x - 2y = 28, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 4x - y = 13, \\ 4x - y = 14. \end{cases}$$

Система не має розв'язків.

1.2. Нелінійні системи

Системи рівнянь дрогого степеня з одним лінійним рівнянням

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + kx + my = c_2 \end{cases}$$

розв'язують способом підстановки: з першого рівняння, якщо $a_1 \neq 0$, знаходять $x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1y)$ і підставляють у друге рівняння системи [3].

Розглянемо систему виду $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=m. \end{cases}$ (1)

За теоремою Вієта маємо, що x та y – корені квадратного рівняння: z^2-az+ $+m=0$. Якщо дискримінант цього рівняння $a^2-4m>0$, то квадратне рівняння має два корені: z_1 та z_2, а система (1) має відповідно два розв'язки: $x_1=z_1$, $y_1=z_2$ та $x_2=z_2$, $y_2=z_1$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39, \\ x-y=7. \end{cases}$

Розв'язання:

З другого рівняння визначаємо $x=y+7$. Замінивши у першому рівнянні змінну x виразом $y+7$, маємо $(y+7)^2-y(y+7)+y^2=39$. Корені цього рівняння $y_1=-5$, $y_2=-2$, тобто $x_1=2$, $x_2=5$.

Відповідь: $(2;-5);(5;-2)$.

Розглянемо систему рівнянь другого степеня виду

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=m. \end{cases} \qquad (2)$$

Перше рівняння системи однорідне. Якщо $c_1\neq 0$, $a_1\neq 0$, то поділимо обидві частини цього рівняння на y^2:

$a_1(\frac{x}{y})^2+b_1\frac{x}{y}+c_1=0$. Заміна змінних $\frac{x}{y}=z$ зводить це рівняння до квадратного рівняння

$$a_1z^2+b_1z+c_1=0. \qquad (3)$$

Якщо існують корені цього рівняння z_1 та z_2, то система (2) розпадається на дві:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}=z_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=m, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y}=z_2, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=m. \end{cases}$

Ці системи розв'язуємо способом підстановки. Якщо рівняння (3) не має дійсних коренів, то система (2) несумісна [13].

Розглянемо випадок, коли один з коефіцієнтів (a_1 чи c_1) дорівнюють нулю. Нехай $a_1=0$. Перше рівняння системи (2) матиме вигляд b_1xy+ $+c_1y^2=0$ або $y(b_1x+c_1y)=0$ і система (2) розпадеться на дві:

а) $\begin{cases} y = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m, \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_1x + c_1y = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m, \end{cases}$

які розв'язуємо способом підстановки.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = m_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m_2. \end{cases} \qquad (4)$$

де $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$. Цю систему легко звести до виду (2), якщо помножити обидві частини першого рівняння на m_2, обидві частини другого рівняння на m_1, а потім почленно відняти рівняння.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6. \end{cases}$

Поділивши обидві частини першого (однорідного) рівняння на y^2, маємо рівняння $2(\frac{x}{y})^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0$. Далі виконуємо заміну $\frac{x}{y} = z$ і дістаємо рівняння $2z^2 - 5z + 2 = 0$, корені якого $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Потім розв'язуємо дві системи:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x = 2y, \\ 3(2y)^2 - 2y^2 - 4y^2 = 6, \end{cases}$

тобто $\begin{cases} x = 2y, \\ y = \pm 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6, \end{cases}$ або $\begin{cases} y = 2x, \\ 3x^2 - 2x^2 - 4(2x)^2 = 6 \end{cases}$ (ця система несумісна).

Відповідь: $(2; -1)$; $(-2; 1)$.

1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики

Розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1)

Означення. Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій області визначення, якщо **їх** розв'язки на ній збігаються (тобто кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої системи і навпаки – кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої) [9].

Дві системи, що не мають розв'язків на даній області визначення, також вважаються рівносильними на цій області.

Очевидно, що при заміні одного рівняння система рівносильним рівнянням, система переходить у рівносильну їй систему рівнянь. Тому описаний нами загальний підхід до виконання рівносильних перетворень рівнянь може бути використано і при рівносильних перетвореннях систем рівнянь. Отже, щоб гарантувати рівносильність перетворень систем рівнянь, досить:

1) знайти область визначення системи (і ні в якому разі не звужувати її без дослідження тих значень, які не входять до області визначення нової системи);

2) гарантувати оборотність на області визначення кожного перетворення.

Твердження про рівносильність систем рівнянь:

1. Якщо змінити порядок рівнянь системи (1), то отримана система буде рівносильна системі (1).

2. Якщо одне із рівнянь системи (1) замінити на рівносильне йому рівняння, то отримана система рівнянь буде рівносильна системі (1).

3. Якщо перше рівняння системи (1) замінити рівнянням, рівним сумі першого рівняння, помножене на деяке відмінне від нуля число α, і друге рівняння, помножене на деяке відмінне від нуля число β, то отримана система рівнянь буде рівносильна системі (1).

4. Нехай в системі рівнянь (1) одне із рівнянь записано у вигляді, де в лівій частині стоїть одне із невідомих, наприклад, x в першому степені, а в правій частині – функція відносно y. Тоді говорять, що невідома x виражено через невідоме y. Якщо невідоме x виражено із першого рівняння системи (1),

то підставивши в друге рівняння системи (1) замість x цю функцію від y, отримаємо систему , рівносильну системі (1).

Слід обговорити з учнями, що поряд з рівносильними перетвореннями при розв'язуванні систем рівнянь можуть використовуватися системи-наслідки (коли кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої системи). В цьому випадку ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені. Необхідно звернути увагу учнів на те, що у випадку, коли ми користуємося системою-наслідком, можливе виникнення сторонніх розв'язків, і тому в цьому випадку перевірка розв'язків є складовою частиною розв'язування системи.

Розглядаючи методи розв'язування систем рівнянь, необхідно звернути увагу учнів на метод алгебраїчного додавання рівнянь і метод заміни змінних.

Одним із видів стандартних замін є заміни, пов'язані з системами симетричних рівнянь [9].

Рівняння називається симетричним відносно змінних, якщо воно не зміниться за будь-яких перестановок змінної.

Симетричні системи – це такі системи, які не змінюються при взаємній заміні невідомих.

Розв'язання симетричних систем рівнянь зручно виконувати за схемою:

1.Виконувати заміну $x + y = u, xy = v$.

2.Задана система розв'язується відносно змінних u, v.

3. Знаючи u і v, змінні x і y знаходять як розв'язок системи $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ при цьому зручно користуватись оберненою теоремою Вієта, на підставі якої x і y є коренями квадратного рівняння $z^2 - uz + v = 0$. Якщо z_1 і z_2 – корені цього рівняння, то відповідні розв'язки системи будуть $\{(z_1, z_2), (z_1, z_2)\}$. Корисно знати такі співвідношення:

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$,

2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$,

3) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$.

Ці співвідношення не обов'язково пам'ятати, але потрібно вміти їх виводити самостійно.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

Розв'язання.

Легко побачити, що при заміні x на y, а y на x система не змінює свій вигляд. Отже, дана система симетрична відносно змінних.

1. Введемо заміну $x + y = u, xy = v$ і виразимо через них ліві частини рівнянь.

2. Відносно u і v система набуває вигляду

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = u^2 - v \\ x + xy + y = u + v. \end{cases}$$

Дана система зведена до наступної $\begin{cases} u^2 - v = 21, \\ u + v = 9. \end{cases}$

Додавши почленно ці рівняння, отримуємо квадратне рівняння $u^2 + u - 30 == 0$.

Використаємо теорему Вієта, отримаємо що $u_1 = 5$ і $u_2 = -6$. Так як $v = 9 - u$, то $v_1 = 4$ і $v_2 = 15$.Таким чином, отримали дві пари $(5; 4)$ і $(-6; 15)$, які задовольняють систему рівнянь.

Дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу із отриманих систем (наприклад, методом підстановки), знаходимо $x_1 = 1,\ y_1 = 4,\ x_2 = 4,\ y_2 = 1.$

Друга система розв'язків не має, а тому розв'язком сукупності є тільки розв'язки першої системи.

Відповідь: $\{(1; 4)(4; 1)\}$.

1.4. Системи двох рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1)

Щоб позбутися y, помножимо обидві частини першого рівняння на b_2, а другого – на b_1, віднімемо почленно ці рівняння [3]:

$$x(b_2a_1 - b_1a_2) = c_1b_2 - c_2b_1,$$

звідки $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{b_2a_1 - b_1a_2}$ при $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$. (2)

Аналогічно знаходимо y:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_2a_1 - b_1a_2}. \quad (3)$$

Аналогічно можна дістати:

$$\begin{cases} x(b_2a_1 - b_1a_2) = c_1b_2 - c_2b_1, \\ y(b_2a_1 - b_1a_2) = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \quad (4)$$

Вираз $b_2a_1 - b_1a_2$ називається визначником системи (1) і позначається так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (5)$$

За допомогою визначника можна знайти, скільки розв'язків має система (1):

а) якщо $\Delta \neq 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система (1) має один розв'язок, який знаходиться за формулами (2) та (3);

б) якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система (1) несумісна;

в) якщо $\Delta = \Delta_x = 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, то система (1) має безліч розв'язків. У цьому випадку $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$. І систему (1) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \text{або} \begin{cases} a_2x + b_2y = c_2, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Маємо систему двох однакових рівнянь, тому вона має безліч розв'язків: $x \in R, y = \frac{1}{b_2}(c_2 - a_2x)$.

Теорема 1. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_1 f_1(x;y) + a_2 f_2(x;y) = 0, \\ b_1 f_1(x;y) + b_2 f_2(x;y) = 0 \end{cases}$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} f_1(x;y) = 0, \\ f_1(x;y) \pm f_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

За допомогою системи рівнянь (4) розглянемо такі детермінанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Тепер систему (4) коротко можна записати так:

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta_x, \\ \Delta y = \Delta_y. \end{cases} \qquad (6)$$

Теорема 2. Система рівнянь (6) є наслідком системи рівнянь (1).

Доведення. Нехай $x = \alpha$ і $y = \beta$ є довільний розв'язок системи (1). Тоді маємо такі дві тотожності $a_1\alpha + b_1\beta = c_1$ і $a_2\alpha + b_2\beta = c_2$.

Першу з цих тотожностей множимо на b_2, а другу – на b_1 і від обох частин першої тотожності віднімемо відповідні частини другої тотожності. Маємо:

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)\alpha = c_1 b_2 - c_2 b_1. \qquad (7)$$

Аналогічно дістаємо, що

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)\beta = a_1 c_2 - a_2 c_1. \qquad (8)$$

Із тотожностей (7) і (8) виходить, що $x = \alpha$ і $y = \beta$ є розв'язком системи (6). Зазначимо, що у загальному випадку системи (1) і (6) нееквівалентні [14].

1.5. Системи однорідних рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = A, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \cdots + b_ny^n = B. \end{cases} \qquad (1)$$

ліві частини яких є однорідні многочлени однакового степеня n відносно невідомих x і y, а праві – відмінні від нуля константи. Таку систему називають системою однорідних рівнянь з двома невідомими.

Нехай в жодному з розв'язків системи (1) не може бути y=0. Робимо заміну $\frac{x}{y} = t$. Тоді $x = yt$.

В обидва рівняння системи (1) підставляємо $x = yt$ (тобто у системі (1) переходимо від невідомих x і y до невідомих t і y). Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0y^nt^n + a_1y^nt^{n-1} + a_2y^nt^{n-2} + \cdots + a_ny^n = A, & (2) \\ b_0y^nt^n + b_1y^nt^{n-1} + b_2y^nt^{n-2} + \cdots + b_ny^n = B. & (3) \end{cases}$$

Обидві частини одного з рівнянь системи (2), (3) ділимо на відповідні частини іншого рівняння. Дістанемо рівняння з одним невідомим t:

$$\frac{a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0t^n + b_1t^{n-1} + b_2t^{n-2} + \cdots + b_n} = \frac{A}{B}. \qquad (4)$$

Нехай рівняння 4 має такі корені:

$$t_1 = a_1, t_2 = a_2, \dots, t_k = a_k, \qquad (5)$$

де, очевидно, $k \leq n$. Тоді, оскільки $\frac{x}{y} = t$,

$$\frac{x}{y} = a_1, \frac{x}{y} = a_2, \dots, \frac{x}{y} = a_k, \qquad (6)$$

Оскільки за умовою $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то система рівнянь (2) і (3) еквівалентна системі, утвореній з рівняння (4) і будь-якого з рівнянь системи (2) і (3). Але рівняння (4) еквівалентне сукупності рівнянь (5). Тому система рівнянь (2), (3) еквівалентна сукупності k систем, утворених приєднанням до кожного з рівнянь (5) будь-якого з рівнянь (2) і (3).

Тепер, переходячи до невідомих x і y, дістаємо, що дана система (1) еквівалентна сукупності k систем, утворених приєднанням до кожного з рівнянь (6) будь-якого з рівнянь системи (1) [14].

Приклад. Розв'язати циклічну систему рівнянь $\begin{cases} xy + z^2 = 2, \\ yz + x^2 = 2, \\ zx + y^2 = 2. \end{cases}$

Розв'язання:

Замінимо перше рівняння системи різницею першого і другого рівняння, друге – різницею другого і третього, а третє оставимо без змін. Тоді отримаємо систему:

$$\begin{cases} xy - yz + z^2 - x^2 = 0, \\ yz - xz + x^2 - y^2 = 0, \\ xz + y^2 = 2, \end{cases}$$

тобто систему

$$\begin{cases} (z - x)(z + x) - y(z - x) = 0, \\ (x - y)(x + y) - z(x - y) = 0, \\ xz + y^2 = 2, \end{cases}$$

яка за теоремою 1 рівносильна даній. Маємо далі:

$$\begin{cases} (z - x)(z + x - y) = 0, \\ (x - y)(x + y - z) = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

Цій системі рівнянь рівносильна наступна сукупність систем:

$$\begin{cases} z - x = 0, \\ x - y = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z - x = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z + x - y = 0, \\ x - y = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z + x - y = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо системи цієї сукупності методом підстановки. Із першої системи знаходимо: $(1; 1; 1), (-1; -1; -1)$;

із другої: $(\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$;

із третьої: $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$;

із четвертої: $(0; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(0; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Перевірка. В процесі розв'язування всі перетворення були рівносильними, тому знайдені вісім розв'язків є розв'язками заданої системи рівнянь.

1.6. Аналіз психолого-педагогічної та методологічної літератури з проблеми дослідження

Математика - це знаряддя для міркування. У ній сконцентровані мислення багатьох людей».

Р. Фейнман (американський фізик). Провідна ідея в педагогічній і методичній практиці — максимально розкрити перед учнем спектр застосування математичних знань, передати своє захоплення предметом вихованцям. Саме в цьому аспекті ми розуміємо один із принципів дидактики в навчанні математики, а саме: принцип свідомості, активності й самостійності

Цей принцип полягає в цілеспрямованому, активному сприйманні явищ, що вивчаються, їх осмисленні, творчій переробці й застосуванні. Реалізація цього принципу має на меті виконання таких умов:

а) відповідність пізнавальної діяльності учнів закономірностям процесу учіння;

б) пізнавальна активність учнів у процесі учіння;

в) осмислення учнями процесу учіння;

г) оволодіння учнями прийомами розумової діяльності в процесі пізнання нового.

Активність є дієвий стан учня, який характеризується прагненням до учіння, напругою і проявом волі в процесі оволодіння знаннями. Тому активність учнів і називають пізнавальною активністю.

Загальний смисл вимоги активної навчально-пізнавальної діяльності учнів полягає в тому, що ця вимога має два аспекти: внутрішній (психолого-педагогічний) і зовнішній (організаційний)[13].

Внутрішній аспект активної навчальної діяльності учнів полягає в тому, що вона визначається такими компонентами, як інтерес до навчання, ініціативність у навчальній роботі, пізнавальна самостійність, напруження фізичних і розумових сил для розв'язання поставленої пізнавальної задачі. Розвиток цих компонентів і складає необхідну умову організації активної навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Зовнішній аспект активної навчальної діяльності школярів полягає в тому, що до цієї діяльності необхідно залучити всіх учнів даного класу і кожного з них.

Основною методологічною концепцією педагогічної психології є положення про те, що особистість формується лише в процесі активної діяльності. Формування особистості можна і слід відповідно спрямувати. Важливим засобом є керування дорослих діяльністю дітей або - в широкому розумінні - організація всього їхнього життя й активного спілкування.

Вчені стверджують, що з погляду активізації пізнавальної діяльності, розумових здібностей і підвищення якості знань найкращим способом є цілком самостійне добування знань на основі пошуку і дослідження. Хоч в пізнанні не можна обійтись без репродуктивної діяльності.

Найбільш яскраво питання самостійного мислення, творчості і активності розроблялись в епоху Відродження педагогами-гуманістами Еразмом Роттердамським, Вітторіно да Фельтре, Франсуа Рабле, Томасом Мором. Пізніше - Ян Амос Коменський у «Великій дидактиці» писав: «Яке б заняття не починати, перш за все треба викликати в учнів любов до нього, довести особливість цього предмета, його користь, приємність і що тільки можливо Великий вчений пов'язував рішення цієї проблеми з процесом навчання і виховання, особистістю вчителя, його підготовкою, якістю підручника, умінням ним користуватись. Я.А. Коменський впритул підійшов до ідеї формування в учнів творчого мислення, завдяки якому учень був би здатний до самостійного відкриття, творчості.

В епоху становлення і розвитку капіталізму західноєвропейська педагогічна думка продовжує розробляти проблему навчання учнів, прийомів свідомого й осмисленого сприймання і запам'ятовування знань, способів застосування їх на практиці (Г. Песталоцці, І.Ф. Гербарт), формування навичок інтелектуальної праці (Ж. Руссо, Д. Дідро, К. Гельвецій), деяких прийомів творчості, евристики (А. Дістервег).

Серед українських вчених XVIII століття можна назвати Стефана Яворського, який в своїх творах закликав людину де активної розумової Діяльності, саме таким чином він намагався читати курс психології в Києво-Могилянській академії, а пізніше - в Московській слов'яно-греко-латинській академії [1].

Цінні, на наш погляд, думки щодо активізації розумової діяльності дитини висказав великий український поет і філософ, педагог і художник Т.Г. Шевченко. Критикуючи сучасну йому школу, де учні зубрять незрозумілі церковнослов'янські книги, ці безкінечні «тму-мну», Шевченко мріяв про нову школу в новому суспільстві, яка б давала дітям глибокі знання, викликала інтерес до навчання, бажання навчитись. А для цього потрібні ще й хороші підручники, вважав педагог і створив один такий – «Букварь южнорусский», мріяв написати ще серію книжок для школи

Цінні розробки в контексті нашої проблеми є у А.С. Макаренка. Він стверджував, що для хорошої школи перш за все повинні бути науково організована система усіх впливів. В роботі А.С. Макаренко така система забезпечувала у вихованців жагу до навчання, як висловлювався сам педагог. В лекціях для батьків вчений розкриває деякі методичні прийоми активізації пізнавальної діяльності: підказку, що викликає здогадку, постановку цікавого запитання, введення нового факту, розглядання ілюстрацій, що викликають запитання, пробуджують інтерес до уточнень, пошуку залежностей і причин.

Саме так вдавалось педагогу працювати в своїх незвичайних навчальних закладах

О.Я. Савченко досить фундаментально розробила шляхи формування загально-навчальних умінь і навичок у відношенні до початкових класів. Вона відмічає, що процес пізнавальної діяльності іде таким шляхом: прийняття мети - відбір засобів її досягнення - виконавські дії - контроль і оцінка результатів. Вчена вважає, що найголовніше - навчити дітей міркувати і дедуктивно (теза, розвиток, доведення чи спростування), і індуктивно (факти, аналіз і синтез, висновок). Ядро навчання - індивідуальна мислительна діяльність учня. Це той самий процес, до якого багато вчителів спонукають дитину коротким словом: «Думай!». Наказуючи учневі думати, мало хто з вчителів уявляє повною мірою, що в цей напружений момент йому треба досить швидко і безпомилково на очах усього класу виконати різні мислительні операції, серед багатьох способів вибрати один. Це важка робота. Треба цілеспрямовано керувати цим процесом. Ряд педагогів і психологів розробляли проблему рівнів розвитку інтересу до навчання. Так, Г.І. Щукіна вважає, що за основу слід взяти активність і самостійність учнів, бажання перебороти будь-які труднощі (високий рівень - висока активність, самостійна робота протікає із захопленням, бажання перебороти труднощі у складних завданнях; середній рівень - пізнавальна активність викликається за допомогою стимулювання вчителя, ситуативне виконання самостійної роботи, труднощі долає з допомогою вчителя; низький рівень - пізнавальна інертність, мінімальна самостійність, бездіяльність при затрудненнях.

Повноцінна навчально-пізнавальна діяльність містить три складові: орієнтувальну, виконавчу, контрольну. Контроль відіграє важливе навчальне, розвивальне і виховне значення. Він дозволяє виявити повноту, глибину, свідомість і міцність знань на різних етапах навчання, сприяє корекції, управлінню і самоуправлінню процесом навчання, спонукає учнів до активної розумової діяльності, сприяє виробленню свідомого їх ставлення до систематичної навчальної праці. Це залежить як від індивідуальних особливостей учнів, так і від об'єктивно існуючих умов (змісту навчального матеріалу, логіки предмета математики, закономірностей навчального процесу, гносеологічних основ учіння тощо).

Рушійною силою процесу пізнання є внутрішні суперечності між завданнями, які ускладнюються, і вимогами до навчання та наявними можливостями учня. Розвиток процесу навчання математики є поступовим, еволюційним, у ньому неперервне поєднуються протилежні процеси: суто логічні міркування: уява, інтуїція, чуттєво-наочне, конкретне і абстрактне, індуктивні і дедуктивні матеріали, змістовні і формалізовані. Найбільш поширеною суперечністю навчально-пізнавальної діяльності є суперечність між особистим досвідом школяра і елементами наукових знань з математики, які він набуває в школі.

Необхідною умовою активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів є систематичне і цілеспрямоване виховання їх в процесі навчання математики прийомами розумової і навчальної діяльності. Ці прийоми різноманітні як за змістом, так і за функціями та джерелами їх оволодіння. Одні повідомляє вчитель, а учні опановують і використовують у процесі навчання - інші учні знаходять і опановують самостійно, застосовують при виконанні певних навчальних завдань.

Нарешті, принцип індивідуалізації і диференціації як один з провідних принципів розвивального навчання, створює сприятливі умови для активізації знань школярів. У вирішенні проблеми дослідження важливим чинником є взаємозв'язок різних видів навчальної діяльності для її активізації, що допомагає розкриттю потеніційних можливостей кожного учня[1].

Отже, аналіз психолого-педагогічної та методологічної літератури свідчить, що багато вітчизняних і зарубіжних педагогів займалися проблемою активізації навчально-пізнавальної активності дітей на уроці. Дослідження практиків показали, що потрібно ураховувати чинники, що гальмують розвиток навчально-пізнавальної діяльності учнів. Запобігати перевантаженню розумових сил або тривалої одноманітності навчальної праці, необ'єктивного зниження оцінки під час виконання ними завдань.

1.7. Формування творчої активності та мислення на уроках математики

Сучасна педагогіка і психологія спрямовує свої зусилля на те, щоб виявити здібності учня, максимально використати їх для розвитку його особистості. Цього можна досягнути не лише вдосконаленням змісту шкільного курсу будь-якої дисципліни, а й впровадженням таких методів, засобів та організаційних форм навчання, які б активізували пізнавальну діяльність учнів, розвивали їх мислення, здібності, привчали працювати самостійно і творчо.

Одним із видів творчих завдань є завдання по складанню задач. Такі завдання можуть бути запропоновані як на етапі вивчення нового матеріалу, так і на етапі його закріплення. Такі завдання давати і в класі, і додому.

Викладачі інколи вчать дитину думати, відкривають перед нею першоджерела думки,— навколишній світ, дають їй велику людську радість — радість пізнання.

Гра «Математичний капусняк» не тільки сприяє глибокому повторенню та систематизації знань за матеріалом, а ще й допоміг викликати інтерес до предмета, спонукав дітей у майбутньому до творчої активності, довів дітям, що математика — наука строга і вимоглива, а також весела і жартівлива.

Отже, такі форми роботи значно підвищують мовну активність і тим самим сприяють позитивному впливу на мислення, творчість дітей та спонукають їх бути впевненими в собі.

Викликати творчу активність (збудити) допомагає розвивальне навчання; учень повинен розуміти цілі і завдання уроку, повинен захотіти вивчати матеріал («Ти можеш, він може, я можу»).

Якщо ми розв'яжемо проблеми: а) від «знати» до «володіти»; б) відійти від слова «боюсь»; в) від «знати» перейти до вільного мислення, - то це дасть учневі радість розумової праці[10].

Одним з ефективних є метод створення проблемних ситуацій, що набагато покращує засвоєння матеріалу учнями та розвиває в них увагу, гнучкість розуму, наслідком чого є висока активність учнів на уроці. Необхідно давати учням можливість експериментувати та не боятися помилок, виховувати у них сміливість не погоджуватись з учителем.

Пропонуємо кілька прикладів створення проблемних ситуацій.

Приклад 1

На дошці швидко записується розв’язання рівняння. При цьому умисно робиться помилка:

(3x+7)Ч2-3=17,

6x+14-3=17,

6x=0,

x=0.

Звичайно, при перевірці відповідь не співпадає. Діти шукають помилку, таким чином розв’язують проблему. Результат – уважність і зацікавленість учнів на уроці.

Приклад 2

Оголошується домашнє завдання зі словами : «У мене не виходить розв’язати цю задачу. Спробуйте ви». Хоча розв’язок відшукати нескладно. На наступному уроці – радісні обличчя - вони розв’язали.

Приклад 3

Звичайна форма завдання .

Функцію задано формулою

$$y = x+5$$

Знайдіть значення функції, якщо :

$$x = 0,\ 7,\ -5{,}1.$$

Цікава форма завдання.

Запрошую до дошки учня, даю йому картку, на якій записано

$$y = x+5$$

На дошці підготовлено таблицю.

Учень з класу називає довільне значення x. Учень біля дошки записує це число до таблиці і, підставивши його до формули, знаходить і записує до таблиці відповідне значення y. Потім інший учень з класу називає інше значення x і учень біля дошки виконує ту саму операцію. Завдання для учнів класу – відгадати формулу, записану на картці. Виграє той учень, який першим назве формулу.

Приклад 4.

Задачі на кмітливість.

1. Півень на одній нозі важить 4 кг. Скільки важить півень , якщо він стоїть на двох ногах ?

Відповідь. 4 кг.

2. Половина числа дорівнює третині числа . Яке це число ?

Відповідь. 0.

3. У сім’ї п’ять синів і у кожного є сестра . Скільки дітей в сім’ї?

Відповідь. 6.

Велику цікавість викликає у дітей розв’язування старовинних задач .

Колективну та індивідуальну увагу учнів активізують такими прийомами, як метод евристичної бесіди, різного роду дидактичної опори (наочно-образні, або логічні схеми, плани-конспекти, тощо), самостійні завдання, які передбачають активізацію уваги учнів (наприклад, самостійно закінчити деяке тотожне перетворення, розв'язати рівняння, відтворити тільки що викладене доведення математичного твердження (або його фрагмент), виконати завдання, аналогічне розглянутому викладачем, тощо), порівняння результату своїх дій із зразком (контроль), прийом самоконтролю на різних етапах уроку з використанням відкидних дощок або виконання окремими учнями роботи на плівці з наступним проектуванням на екран, «захист робіт» (шляху виконання, доведення чи розв'язування), рецензування робіт чи відповідей учнями чи вчителем, самоперевірка та взаємоперевірка.

Можна періодично проводити математичні диктанти. Вони привчають дітей уважно стежити за мовою вчителя, відразу включатися у виконання завдання, сприяють виробленню певного ритму роботи. Математичні диктанти можуть застосовуватися у всіх класах для різних дидактичних цілей, проте є завжди засобом активізації уваги учнів.

Ще один прийом активізації уваги учнів. Під час розв'язування задачі нового виду, особливо з геометрії, часто після аналізу її умови та усного розбору пред'являти заготовлений на зворотньому боці дошки запис умови задачі та розв'язування з пропусками. Завдання учням – заповнити пропуски. В цей час є можливість перевірити, як учні підготовлені до сприйняття нового матеріалу, на якому етапі в них, виникають труднощі. Такий прийом активізує навчальну діяльність усіх учнів, формує навички самоконтролю, а також сприяє розвитку алгоритмічного мислення.

Отже, з метою активізації навчальної та розумової діяльності учнів доцільно створювати проблемні та ігрові ситуації тощо. Уроки КВВМ, уроки-семінари, уроки-мандрівки виховують повагу до математики. На таких уроках учні дискутують, виробляють математичний стиль мислення, подорожуючи з алгебри до геометрії і до інших дисциплін, вчаться перефразовувати умови за рисунками, вчаться культури графіки, алгоритмічному стилю мислення. Навчатися із захопленням у ліцеї – це вміння виховувати в собі почуття обов'язку і вчитися виконувати його охоче, творчо, на мою думку, розв'язання проблеми – найбільш реальний і ефективний шлях розвитку мислення учнів – формування в них розумових здібностей. На уроках постійно звучать слова «Чому? Для чого? Як ти вважаєш? Яка твоя думка?» Доведи, що це так!

Самостійне здобування учнями нових знань - творчий процес. Потрібно підбирати для учнів творчі завдання, які є засобом активізації їх пізнавальної діяльності[10]

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом

Як нам вже відомо, розв'язування систем рівнянь виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

геометрично пояснюється як визначення координат точок перетину ліній, заданих рівняннями системи.

Його суть полягає в наступному:

✓ побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;

✓ знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;

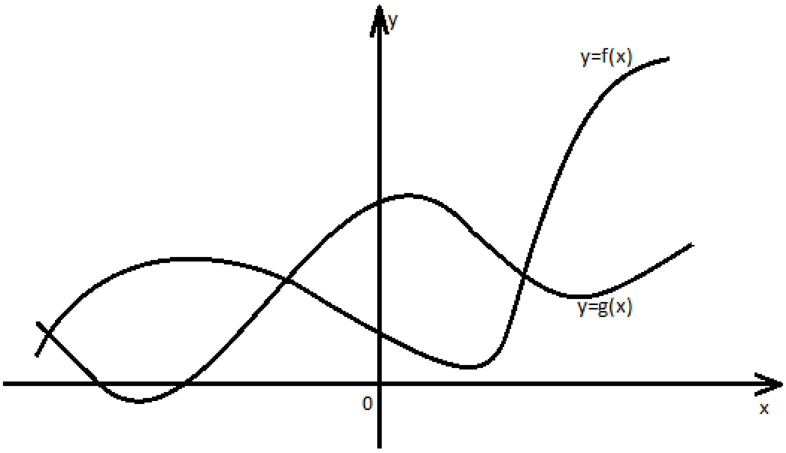
✓ отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Не будь-яку систему рівнянь доцільно розв'язувати графічно. Наприклад, якщо пара $(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85})$ є розв'язком якоїсь системи, то зрозуміло, що графічновстановити цей факт вкрай складно. А тому графічний метод зазвичай застосовують тоді, коли розв'язок достатньо знайти наближено. Те, що пара (1;3) є розв'язком системи

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13, \end{cases}$$

підтверджує безпосередня підстановка цієї пари в кожне з рівнянь системи, тобто перевірка [4].

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи. Наприклад, на малюнку 2 зображено графіки деяких функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Ці графіки мають три спільні точки. Це дає змогу стверджувати, що система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ має три розв'язки.



Мал. 2

Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- ✓ якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- ✓ якщо прямі збігаються, то система має нескінченно багато розв'язків;
- ✓ якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має [4].

Випадок, коли така система має єдиний розв'язок, було вже розглянуто. Тепер розглянемо приклади, які ілюструють дві інші можливості.

Так, якщо в системі

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обидві частини першого рівняння помножити на 2, то розв'язки цього рівняння, а отже, і всієї системи не зміняться.

Маємо:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи збігаються з розв'язками рівняння $x - 2y = 2$. Проте таке рівняння має безліч розв'язків, а значить, і розглядувана система також має безліч розв'язків.

Ось приклад системи, яка не має розв'язків:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Справді, помножимо обидві частини першого рівняння системи на 3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Зрозуміло, що не існує такої пари значень x і y, при яких вираз $2x + 3y$ одночасно набуває значення і 6, і 7.

Зазначимо, що саме графічний метод підказав, що не існує системи лінійних рівнянь, яка мала б, наприклад, рівно 2, або рівно 3, або рівно 100 і т. п. розв'язків.

Приклади.

Розв'яжіть графічно системи лінійних рівнянь.

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3 - x, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

Визначимо точки для побудови графіків кожного з рівнянь системи:

Для рівняння $y = 3 - x$:

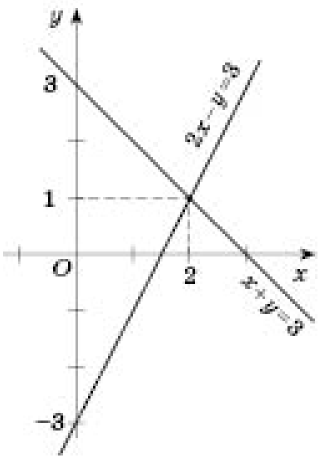
x	0	3

y	3	0

Для рівняння $y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

Побудуємо графіки й знайдемо точку їх перетину.



Відповідь: (2;1).

2) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

Визначимо точки для побудови графіків кожного з рівнянь системи:

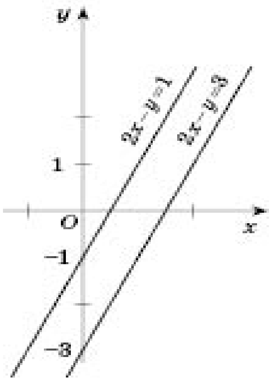
Для рівняння $y = 2x - 1$:

x	0	1
y	-1	1

Для рівняння $y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

Побудуємо графіки й знайдемо точку їх перетину.



Відповідь: розв'язків немає.

2.2. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Якщо математикам зустрічається нова задача, то зазвичай вони намагаються її розв'язування звести до вже знайомої задачі.

Покажемо, як розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними звести до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а остання задача добре знайома [4].

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x. Маємо:

$$y = 2x - 8.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість змінної y вираз $2x - 8$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ця і вихідна системи мають одні і ті самі розв'язки. Прийнято цей факт без обґрунтувань.

Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$

$$3x + 4x - 16 = 5;$$

$$7x = 21;$$

$$x = 3.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у рівняння $y = 2x - 8$. Матимемо:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$

$$y = -2.$$

Пара (3;-2) – шуканий розв'язок.

Описаний тут спосіб розв'язування системи рівнянь називають **методом підстановки.**

Отже, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;

6) записати відповідь [4].

Цю послідовність дій, яка складається з шести кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними методом підстановки.

Приклади:

1) $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 5x - 2y = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 5x - 2(4 - 3x) = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x, \\ 5x - 8 + 6x = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x, \\ 11x = 22; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4 - 3 \cdot 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$

Відповідь: (2;-2).

2) $\begin{cases} 4x - 5y = 7, \\ 3x + 4y = -18; \end{cases}$

$\begin{cases} 5y = 4x - 7, \\ 3x + 4y = -18; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x - 7}{5}, \\ 3x + 4\dfrac{4x - 7}{5} = -18; \ /\cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x - 7}{5}, \\ 15x + 4(4x - 7) = -90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x - 7}{5}, \\ 15x + 16x - 28 = -90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x - 7}{5}, \\ 31x = -62; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3, \\ x = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $(-2; -3)$.

2.3. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Розглянемо ще один спосіб, який дає змогу звести розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною [4].

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Оскільки в цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, то рівняння з однією змінною можна отримати, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Запишемо:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$

$$6x = 12;$$

$$x = 2.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у будь-яке з рівнянь системи, наприклад, у перше. Отримаємо:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$

$$-5y = 3;$$

$$y = -0{,}6.$$

Отже, розв'язком системи є пара $(2; -0{,}6)$.

Описаний спосіб розв'язування системи називають **методом додавання.**

Цей метод, як і будь-який інший математичний метод, потребує обґрунтування його законності. Приймемо без доведення, що метод додавання дає правильні результати.

Розв'яжемо ще одну систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Якщо додати почленно ліві і праві частини рівнянь системи, то знову отримаємо рівняння з двома змінними. Дана система ще не готова до застосування методу додавання.

Помножимо обидві частини першого рівняння на -3. Отримаємо систему, розв'язки якої збігаються з розв'язками вихідної системи:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Уже для такої системи метод додавання є ефективним:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$

$$14y = -14;$$

$$y = -1.$$

Підставимо знайдене значення y в перше рівняння вихідної системи. Маємо:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$

$$2x = 8;$$

$$x = 4.$$

Пара (4;-1) – шуканий розв'язок.

Розглянемо систему, в якій обидва рівняння треба підготувати до застосування методу додавання:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Щоб виключити змінну y, помножимо обидві частини першого рівняння на число 5, а другого – на число -8 і застосуємо метод додавання:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$

$$11x = -11;$$

$$x = -1.$$

Підставивши знайдене значення x у перше рівняння даної системи, отримаємо:

$$-7 + 8y = 9;$$

$$y = 2.$$

Отже, пара $(-1; 2)$ - розв'язок даної системи.

Алгоритм розв'язування системи рівнянь методом додавання можна записати так:

1) дібравши вигідні множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;

3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;

4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;

5) обчислити значення другої змінної;

6) записати відповідь [4].

Приклади:

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 10x + 6y = 8; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 15x = 15; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ 6y = 5 - 7; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ y = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Відповідь: $(1; -\frac{1}{3})$.

2) $\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ 2x - 2y = 5; /\cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ 4x - 4y = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} 7y = -7, \\ 4x + 3y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1, \\ 4x + 3 \cdot (-1) = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1, \\ 4x - 3 = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1, \\ x = 1{,}5. \end{cases}$

Відповідь: $(1{,}5; -1)$.

3) $\begin{cases} 3x - 5y = 14, /\cdot 2 \\ 2x - 7y = 2; /\cdot 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x - 10y = 28, \\ 6x - 21y = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11y = 22, \\ 2x - 7y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ 2x = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = 8. \end{cases}$$

Відповідь: $(8; 2)$.

2.4. Методика розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Розглянемо задачі, у яких системи двох лінійних рівнянь з двома змінними використовують як математичні моделі реальних ситуацій [4].

Приклад 1. На пошиття одного плаття і 4 спідниць пішло 9 м тканини, а на 3 таких самих плаття і 8 таких самих спідниць – 21 м тканини. Скільки тканини треба для пошиття одного плаття і однієї спідниці окремо?

Розв'язання:

Нехай на одне плаття йде x м тканини, а на одну спідницю – y м. Тоді на одне плаття і 4 спідниці йде $(x + 4y)$ м тканини, що за умовою становить 9 м. Отже, $x + 4y = 9$.

На 3 плаття і 8 спідниць треба $(3x + 8y)$ м тканини, або 21 м. Значить, $3x + 8y = 21$.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 8y = 21. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо: $x = 3,\ y = 1{,}5$. Отже, на пошиття одного плаття піде 3 м тканини, а однієї спідниці – 1,5 м.

Відповідь: 3 м, 1,5 м.

Приклад 2. З міста А до міста В, відстань між якими 264 км, виїхав мотоцикліст. Через 2 год після цього назустріч йому з міста В виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 2 год мотоцикліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедист за 5 год.

Розв'язання:

Нехай швидкість мотоцикліста дорівнює x км/год, а велосипедиста – y км/год. До зустрічі мотоцикліст рухався 3 год і проїхав 3x км, а велосипедист відповідно – 1 год і y км. Разом вони проїхали 264 км. Тоді $3x + y = 264$.

Велосипедист за 5 год проїжджає 5y км, а мотоцикліст за 2 год – 2x км, що на 40 км більше за 5y км. Тоді $2x - 5y = 40$.

Отримано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 80,\ y = 24$.

Отже, швидкість мотоцикліста дорівнює 80 км/год, а велосипедиста – 24 км/год.

Відповідь: 80 км/год, 24 км/год.

Приклад 3. Стіл і стілець коштували разом 680 грн. Після того як стіл подешевшав на 20%, а стілець подорожчав на 10%, вони стали коштувати разом 580 грн. Знайдіть початкову ціну стола і початкову ціну стільця.

Розв'язання:

Нехай початкова ціна стола становила x грн., а стільця – y грн. Тоді за умовою $x + y = 680$.

Нова ціна стола становить 80% початкової і дорівнює $0{,}8x$ грн. Нова ціна стільця становить 110% початкової і дорівнює $1{,}1y$ грн. Тоді $0{,}8x + +1{,}1y = 580$.

Отримано систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $x = 560,\ y = 120$.

Отже, початкова ціна стола була 560 грн., а стільця – 120 грн.

Відповідь: 560 грн., 120 грн.

Приклад 4. Скільки грамів 3-відсоткового і скільки грамів 8–відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 500 г 4-відсоткового розчину?

Розв'язання:

Нехай першого розчину треба взяти x г, а другого – y г. Тоді за умовою $x + y = 500$.

У 3-відсотковому розчині міститься 0,03x г солі, а у 8-відсотковову – 0,08y г солі. У 500 г 4-відсоткового розчину міститься $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (г) солі. Отже, $0{,}03x + 0{,}08y = 20$.

Складено систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$$

Отже, треба взяти 400 г 3-відсоткового розчину і 100 г 8-відсоткового розчину.

Відповідь: 400 г, 100г.

Приклад 5. У Петра були купюри по 5 грн. і по 20 грн. Він каже, що купив велосипед за 255 грн., віддавши за нього 20 купюр, а Василь каже, що такого бути не може. Хто правий?

Розв'язання:

Нехай було x купюр по 5 грн. і y купюр по 20 грн. Тоді:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $(x; y)$, у якій $y = 10\frac{1}{3}$, що не відповідає змісту задачі, оскільки кількість купюр може бути тільки натуральним числом.

Відповідь: правий Василь.

2.5. Методика розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь другого степеня використовуються як математичні моделі реальних ситуацій [6].

Приклад 1.

З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч один одному двоє туристів і зустрілися через 2 год. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо для проходження всієї відстані між пунктами одному з них потрібно на 54 хв більше, ніж другому?

Розв 'язання:

Нехай швидкість першого туриста дорівнює x км/год, а другого – y км/год, x < y. До зустрічі перший турист пройшов 2x км, а другий – 2y км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Усю відстань між пунктами перший турист проходить за $\frac{18}{x}$ год, а другий – за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першому туристу для проходження цієї відстані потрібно на 54 хв $= \frac{54}{60}$ год $= \frac{9}{10}$ год більше, ніж другому, то

$$\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Розв'язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корінь –36 не підходить за змістом задачі. Отже, y = 5, x = 4.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год.

Приклад 2.

Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи один із них був переведений на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що зроблено 3 всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання:

Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий– за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів – $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів – $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують всю роботу, то $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1.$

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3},\end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15, y = 30$. Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий – за 30 днів.

Відповідь: 15 днів, 30 днів.

Приклад 3.

При діленні двоцифрового числа на добуток його цифр одержимо неповну частку 5 і остачу 2. Різниця цього числа і числа, отриманого перестановкою його цифр, дорівнює 36. Знайдіть це число.

Розв'язання:

Нехай шукане число містить x десятків і y одиниць. Тоді воно дорівнює $10x + y$. Оскільки при діленні цього числа на число xy отримуємо неповну частку 5 і остачу 2, то $10x + y = 5xy + 2$.

Число, отримане перестановкою цифр даного, дорівнює $10y + x$. За умовою $(10x - y) - (10y - x) = 36$. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}10x + y = 5xy + 2,\\ (10x + y) - (10y + x) = 36,\end{cases}$$

розв'язками якої є дві пари чисел: $x = 6$; $y = 2$ або $x = 0{,}2$; $y = 3{,}8$. Проте друга пара не підходить за змістом задачі.

Отже, шукане число дорівнює 62.

Відповідь: 62.

2.6. Методика вивчення систем алгебраїчних рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики

2.6.1. Методика вивчення систем, що містять лінійні рівняння

Розглянемо систему

$$(\mathrm{L},\mathrm{F})\begin{cases}\left.\begin{array}{c}\mathrm{L}_1(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0, \mathrm{L}_2(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0,\\ \dots,\mathrm{L}_k(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0\end{array}\right\}(\mathrm{L})\\ \left.\begin{array}{c}\mathrm{F}_1(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0\\ \mathrm{F}_2(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0\\ \dots,\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y},\dots,\mathrm{u},\mathrm{v},\dots,\mathrm{w})=0\end{array}\right\}(\mathrm{F})\end{cases}$$

рівнянь з невідомими $x, y, \dots, u, v, \dots, w$, в якій рівняння (L) є лінійні, інші ж рівняння (F) – алгебраїчні степеня більшого ніж 1.

Розглянемо окремо лінійну систему (L).

Коли система (L) суперечлива, то й система (L, F) суперечлива.

Коли система (L) має єдиний розв'язок, то досить знайдені з (L) числові значення невідомих підставити в рівняння (F). Коли всі рівняння (F) задовольняються, то розв'язок (L) є єдиним розв'язком системи (L, F), якщо ж хоч би одне з рівнянь (F) не задовольняється, то система (L, F) розв'язків не має [9].

Коли система (L) мас нескінченну множину разв'язків, то формули загального розв'язку виражають деякі невідомі у вигляді лінійних функцій від інших невідомих; останнім можна надавати довільних значень. Нехай, наприклад, із системи (L) невідомі $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \dots, \mathrm{w}$ виражені через невідомі $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \dots$; підставивши вирази $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \dots, \mathrm{w}$ в рівняння (F), дістанемо систему m рівнянь (за числом рівнянь (F) а невідомими x; $\mathrm{y}, \dots$. В даному випадку розв'язання системи (L, F) зводиться до розв'язання системи меншого числа рівнянь з меншим числом невідомих. Оскільки невідомі $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \dots, \mathrm{w}$ є нелінійними функціями від невідомих $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \dots$, то при підставлянні в рівняння (F) степінь кожного з цих рівнянь не підвищується, отже, матимемо систему рівнянь, степені яких не перевищують степенів відповідних рівнянь початкової системи.

Геометрична інтерпретація. Розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \\ \varphi(x, y) = 0 & (\varphi) \end{cases} \qquad (1, \varphi)$$

геометрично інтерпретується як знаходження точки перетину лінії (φ) з прямою (1). Число точок перетину не перевищує степеня многочлена $\varphi(x, y)$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y - 8z = -13, & (1) \\ 5x + 3y - z = 0, & (2) \\ 2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6yz - 8xz + 15xy + 51x + 18y + 8 = 0. & (3) \end{cases}$$

Розв'язування:

Знаходимо спільний розв'язок системи рівнянь (1) і (2). Помноживши (1) на 5, віднімаємо його з (2) і дістаємо (після скорочення):

$$y + 3z = 5. \qquad (1{,}2)$$

З рівнянь (1) і (1,2) дістаємо шуканий спільний розв'язок у такому вигляді:

$$x = -3 + 2z, \quad y = 5 - 3z.$$

Підставивши в рівняння (3), після спрощення матимемо:

$z^2 - 3z + 2 = 0$, звідки $z_1 = 1, z_2 = 2$.

Система має два розв'язки:

$$x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 1 \text{ і } x_2 = 1, y_2 = -1, z_2 = 2.$$

2.6.2. Методика вивчення систем двох рівнянь другого степеня з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \ (F) \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0 \ (F') \end{cases} \qquad (F, F')$$

або в скороченому запису: $F = 0, \quad F' = 0.$

Припустимо, що обидва рівняння містять члени з квадратами обох невідомих, тобто ні один з коефіцієнтів $a_{11}, a'_{11}, a_{22}, a'_{22}$ не дорівнює нулеві. З рівнянь (1) і (2) можна виключити квадрат одного з невідомих. Так, наприклад, рівняння

$$a'_{22}F - a_{22}F' = 0$$

не має y^2 і разом з одним з рівнянь (F) або (F') становить систему, рівносильну системі (F, F'). На підставі викладеного досить розглянути систему (F, F'), в якій одне з рівнянь, наприклад (F) не має y^2, тобто a'_{22}= 0:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0 \qquad (F')$$

Права частина (F') є многочлен першого степеня відносно y:

$$2(a'_{12}x + a'_2)y + (a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0) = 0. \qquad (F)$$

Коли $x \neq -\frac{a'_2}{a'_{12}}$, то з (F') маємо:

$$y = -\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2}.$$

Ця формула дає загальний розв'язок (F') за додатковою умовою: $a'_{12}x +$ $+a'_2 \neq 0$. Підставивши це значення в рівняння (F), дістанемо дробове рівняння:

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}x\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2} + a_{22}\left(\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2}\right)^2 + 2a_1x -$$
$$-2a_2\left(\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2}\right) + a_0 = 0,$$

яке в загальному випадку зводиться до алгебраїчного рівняння четвертого степеня. Отже, в загальному випадку система (F, F') має чотири розв'язки [12].

Викладеним прийомом не можна знайти розв'язки (якщо вони існують), для яких невідоме x має значення $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$. Коли це значення x не задовольняє рівняння

$$a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0 = 0, \qquad (1)$$

то (F'), а, отже, і система (F, F') не має розв'язків вигляду $(-\frac{a'_2}{a'_{12}}, y)$. Коли значення $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$ задовольняє рівняння (1), то (F') при $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$ задовольняється тотожно відносно y. Підставивши $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$в рівняння (F), дістанемо квадратне (в загальному випадку) рівняння для визначення відповідного значення y.

Рівняння для визначення одного з невідомих можна дістати так: розглянемо ліві частини рівнянь (F) і (F') як квадратні тричлени відносно одного з невідомих, наприклад y (припустивши, що хоч би одне з чисел a_{22} або a'_{22} відмінне від нуля):

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_2)y + (a_{11}x^2 + 2a_1x + a_0) = 0, \qquad (F)$$

$$a'_{22}y^2 + 2(a'_{12}x + a'_2)y + (a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0) = 0, \qquad (F')$$

Коли пара чисел $x = x_1, y = y_1$ є розв′язок системи (F, F'), то при $x = x_1$ квадратні рівняння (F) і (F') мають спільний корінь y_1, і тому їх результант $R(F, F')$ перетворюється в нуль і, отже, x є корінь рівняння

$$(ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0, \qquad (R)$$

де $a = a_{22}, a_1 = a'_{22}, b = 2(a_{12}x + a_2)$ і т. д.

Навпаки, коли x_1є корінь рівняння (R), то рівняння (F) і (F') при $x = x_1$ мають спільний корінь $y = y_1$. Рівняння (R) у цьому загальному випадку має четвертий степінь відносно x, воно є результат виключення y з рівнянь (F) і (F').

Геометрична інтерпретація. Кожне з рівнянь (F) і (F') зокрема зображає лінію другого порядку; розв'язання системи (F, F') є відшукання точок перетину цих ліній. Дві лінії другого порядку можуть мати не більше чотирьох точок перетину ; деякі точки можуть бути кратними (дотик).

Коли кожна з ліній розпадається на пару прямих, причому обидві пари мають спільну пряму, то система $(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$ має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, & (1) \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. & (2) \end{cases}$$

Розв'язування: Помножимо (1) на 2 і віднімемо від нього (2):

$$3xy - 2y^2 - 3x + 9y - 7 = 0. \qquad (1,2)$$

Звідки $3(y-1)x = 2y^2 - 9y + 7$ і $x = \frac{2y^2-9y+7}{3(y-1)}$ при $y \neq 1$.

Підставивши знайдений вираз для x в (1), матимемо:

$$\frac{y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 2}{y - 1} = 0.$$

Чисельник має корені: $y_1 = -1,\ y_2 = 2,\ y_{3,4} = 1.$

Для коренів $y_1 = -1$ і $y_2 = 2$ знаходимо відповідні розв'язки системи:

$x_1 = -3, y_1 = -1$ і $x_2 = -1, y_2 = 2$.

При значенні $y = 1$ рівняння (1,2) задовольняється тотожно. Припустивши в рівняння (1) або (2), що $y = 1$, дістанемо квадратне рівняння:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;$$

Знайдемо ще два розв'язки системи:

$$x_3 = 3, y_3 = 1 \text{ і } x_4 = 1, y_4 = 1$$

РОЗДІЛ III. РОЗРОБКА САМОСТІЙНИХ РОБІТ

3.1. Розробка системи самостійних робіт

Розробка системи самостійних робіт є необхідною умовою для систематичної, цілеспрямованої організації самостійної діяльності на уроках алгебри у сьомих та дев'ятих класах .

Самостійні роботи розроблені по основним методам курсу алгебри у сьомих та дев'ятих класах по темі "Системи лінійних алгебраїчних рівнянь" і розраховані на 15-20 хвилин, у двох варіантах.

Зміна порядку завдань в структурі самостійних робіт на конкретну тему дає можливість збільшити кількість варіантів, що націлюватиме учня на самостійне розв'язування завдань [11].

Оформлення самостійних робіт полягає в наступному: окремі листки містять завдання і табличку, які роздаються кожному учневі; учень заповнює табличку,тобто вписує свої дані – ім'я, прізвище та клас, а також напроти номера завдання вказує варіант вірної відповіді; саме розв'язання проводиться в робочих зошитах; після завершення відведеного часу учень розриває листок по відмітці на дві частини; частину листка, яка містить табличку учні здають вчителеві, а іншу – залишають собі.

Проведення самостійної роботи таким шляхом значно полегшує роботу вчителя, а учні мають можливість вдома ще раз розв'язати свої завдання, тим самим зробити самоперевірку. Прикладом оформлення самостійної роботи є самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом».

3.1.1. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом»

В-І

1. Розв'яжіть графічно системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

а) $(4; 2)$; б) $(2; 1)$; в) $(9; 1)$; г)$(-1; 7)$.

2) $\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

а) $(2; 5)$; б) $(0; 8)$; в) $(-1; 1)$; г)$(8; -7)$.

3) $\begin{cases} 4x - y = 8; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

а) $(0; -4)$; б) $(3; 4)$; в) $(0; -8)$; г)$(-6; 7)$.

2. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3. \end{cases}$

а)Безліч; б) Немає; в) Один.

2) $\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 4x + 6y = -4. \end{cases}$

а)Безліч; б) Немає; в) Один.

3. Доведіть ,що значення виразу $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ ділиться на 8 для будь-якого цілого значення n [4]

3.1.2. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки»

В-І

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 2; \\ 4x - 6y = 1. \end{cases}$

а) $(0; 2)$; б) $(1; 0{,}5)$; в) $(-3; 1{,}1)$; г)$(-1; 0{,}4)$.

$$2)\begin{cases} 5x - 6y = 1; \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$$

а) $(4; 2)$; б) $(2; 1{,}5)$; в) $(3; 1)$; г) $(-1; 2)$.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} -2(6x + 3) + 1 = 2y - 3; \\ 11 - 4(x - 2) - 5 = y - 2. \end{cases}$$

а) $(-13; 4)$; б) $(-2; -1)$; в) $(1{,}2; 1)$; г) $(-11; 65)$.

3. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

$$x - y = 4 \text{ і } x + 2y = -2.$$

а) $(0; 2)$; б) $(2; -2)$; в) $(-3; 1)$; г) $(2; 4)$

4. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-2; 6), B(3; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

а) $y = -x + 4$; б) $y = x + 3{,}6$; в) $y = 0{,}3x + 2$; г) $y = -2x + 1$

3.1.3. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання»

В-І

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом додавання:

$$1)\begin{cases} 4(x + 3) - 5(x^2 - y - 3) = 9; \\ 6(x + 3) + 5(x^2 - y - 3) = 1. \end{cases}$$

а) $(5; 2)$; б) $(-2; 1)$; в) $(-2; 2)$; г) $(-0{,}1; 2)$.

$$2)\begin{cases} (x - 4)^2 - (x + 4)^2 = 4y; \\ (y + 2)^2 - (y + 1)^2 = 2x. \end{cases}$$

а) $(2; 2)$; б) $(0{,}3; -1; 2)$; в) $(0{,}4; -1)$; г) $(-1{,}1; -1{,}2)$.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}1x + 3y = 5; \\ 0{,}3x - 7y = -1. \end{cases}$$

а) $(-4; 2)$; б) $(0; 1)$; в) $(20; 1)$; г) $(-1; 9)$.

3. Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 11x + 17y = 25; \\ 11x + 17y = 27. \end{cases}$

а) Так; б) Ні.

2) $\begin{cases} 8x + 3y = 2; \\ 6x + 2y = 1; \\ 4x + 4y = 1. \end{cases}$

а) Так; б) Ні.[6]

3.1.4. Самостійна робота на тему «Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь»

В-І

1. Мама за 2 кг помідорів і 1 кг огірків заплатила 8 грн. Якби вона купувала 1 кг помідорів і 2 кг огірків, то її потрібно було б заплатити 7 грн. Скільки коштує 1 кг помідорів і 1 кг огірків?

а) 3 грн; 2 грн; б) 3 грн; 3 грн; в) 4 грн; 3 грн.

2. До магазину завезли 5 ящиків слив і 7 ящиків винограду, загальна маса яких дорівнює 89 кг. Знайдіть масу одного ящика слив і масу одного ящика винограду, якщо 1 ящик слив легший від 2 ящиків винограду на 6 кг.

а) 6 кг; 5 кг; б) 8 кг; 7 кг; в) 9 кг; 8 кг.

3. На двох полицях стоїть 60 книжок. Коли четверту частину книжок першої полиці переставили на другу, то на другій полиці книжок стало утричі більше, ніж на першій. Скільки книжок стояло на кожній полиці спочатку?

а) 30 і 10 книжок; б) 15 і 30 книжок; в) 20 і 40 книжок.

4. На двох гілках сиділо 25 горобців. Коли з першої гілки на другу перелетіло 5 горобців, а з другої полетіло 7 горобців, то на першій гілці їх стало удвічі

більше, ніж на другій. Скільки горобців було на кожній гілці спочатку?

а)17 і 8 горобців; б) 15 і 4 горобців; в) 19 і 10 горобців.[4]

3.1.5. Самостійна робота на тему «Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня»

В – І

1. За 8 зошитів і 5 альбомів заплатили 9 грн. Скільки коштує один зошит і скільки один альбом, якщо 4 зошити дешевші від 6 альбомів на 4 грн.?

а) 50 к.; 1 грн; б) 2 грн; 60 к.; в) 80 к.; 3 грн.

2. Різниця двох чисел дорівнює 10, а сума їх квадратів – 82. Знайдіть ці числа.

а) $-8; 1$; б) $-1; 4$; в) $9; -1$.

3. Відомо, що 3 банки фарби і 2 банки лаку коштували 90 грн. Після того як фарба подешевшала на 10%, а лак – на 20%, за 4 банки фарби і 1 банку лаку заплатили 60 грн. Якою була початкова ціна банки фарби і банки лаку?

а) 20 грн; 40 грн; б) 10 грн; 30 грн; в) 15грн; 35 грн.

4. Із двох пунктів А і В, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно виїхали два автомобілі назустріч один одному. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з пункту А, прибув у пункт В через 16 хв., а другий автомобіль – у пункт А через 4 хв. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

а) 2км/год; 7 км/год; б) 70км/год; 150 км/год; в) 60км/год; 120 км/год.[6]

3.1.6. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем двох рівнянь другого степеня з двома невідомими»

В-І

1. Розв'яжіть системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7; \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5). \end{cases}$$

а) $(-2;-5),(2;5)$; б) $(1;-\frac{5}{4}),(-\frac{1}{4};-\frac{5}{2})$; в) $(8;4),(-8;-4)$.

2) $\begin{cases} x^2+y^2+2x=23-2y; \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x. \end{cases}$

а) $(2;2)$; б) $(2;-5),(3;2)$; в) $(0{,}4;-1),(-1;2)$; г) $(-1{,}1;-1{,}2)$.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12; \\ 4x+3xy-x^2=16. \end{cases}$

а) $(-2;3)$; б) $(0;1)$; в) $(2;2)$; г) $(-1;8)$.[4]

3.2. Поняття експеримент

Експеримент є головним методом збирання інформації у науці. Його проведення пов'язане з пошуком причинно-наслідкових відносин досліджуваних явищ дійсності. Цей метод є розвитком методу спостереження та логічного аналізу. Але якщо спостереження - це пасивний метод збирання інформації, то експеримент передбачає активний вплив на об'єкт дослідження кількох контрольованих чинників. Проведення експерименту завжди пов'язане з активним впливом на об'єкт, який веде до його переструктурування, тому планувати експеримент у соціологічному дослідженні можна тільки тоді, коли є певність, що цей вплив ні в якому разі не утискуватиме інтереси учасників експерименту. Цінність інформації, отриманої у результаті проведення експерименту, полягає в тому, що вона не просто описує об'єкт, але й дозволяє пояснити існування й розвиток певних зв'язків, відносин, процесів. “Експеримент дає можливість, - пише Г.Г. Ващенко, - робити спостереження в такій кількості й протягом такого часу, як це потрібно для досконалого вивчення явиша. …В експерименті є змога розкласти явище на його складові елементи і вивчати кожен з них зокрема” [2].

Для проведення експерименту необхідно створити певні умови. Сукупність умов, в яких відбувається експеримент, має назву експериментальної ситуації. Експериментальна ситуація має гарантувати, що саме досліджуваний у цьому експерименті чинник, а не будь-який інший, є причиною зафіксованих у ході експерименту змін в об'єкті. Експеримент ґрунтується на розробці певної гіпотетичної моделі розглядуваного явища. На підставі цієї моделі явище описують як систему змінних, серед яких виокремлюють незалежні та залежні змінні. Незалежна змінна - це той новий чинник, що його вводять у діяльність експериментальної групи. Він повинен мати такі якості, як усталеність, самостійність, можливість справляти вплив на стан об'єкта дослідження. Залежною змінною називають такий чинник, який змінюється під впливом незалежної змінної. Царина використання експериментального методу в педагогічних дослідженнях останнім часом розширюється, але ефективність його використання безпосередньо пов'язана як з глибиною теоретичних знань про об'єкт експериментування, так і з розвитком методів і технічних засобів проведення експерименту [5].

3.2.1. Сутність і види педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент передбачає активний вплив на педагогічне явище чи процес шляхом створення нових умов, що відповідають меті дослідження. Експеримент як самостійний метод характеризується такими ознаками: - діяльність, що організована на основі наукових даних у відповідності з теоретично обґрунтованою гіпотезою; - запланований вплив на досліджуваний об’єкт, створення нових явищ тощо; 26 - глибокий аналіз та теоретичне узагальнення одержаних результатів; - можливість багаторазового повторення; - дотримання точно врахованих і змінюваних умов. Педагогічний експеримент, на відміну від інших методів, створює умови для: 1) перевірки ефективності запроваджень у навчально-виховний процес; 2) порівняння ролі та впливу різних факторів на педагогічний процес; 3) вибору оптимальних факторів для організації певних ситуацій навчання та виховання; 4) виявлення умов реалізації певних педагогічних задач; 5) виявлення специфіки та закономірностей протікання педагогічного процесу в конкретних, в тому числі й заданих, умовах [8].

Педагогічний експеримент - своєрідний навчальний процес, організований так, щоб можна було спостерігати педагогічні явища в контрольованих умовах. Основними ознаками педагогічного експерименту, які одночасно становлять і його сутність, є: - внесення в навчальний процес певних змін у відповідності з планом і гіпотезою дослідження; - створення умов, у яких можна найбільш яскраво бачити зв'язки між різними сторонами навчального процесу; - облік результатів навчального процесу і формулювання остаточних висновків [7].

Сутнісний зміст експерименту полягає в розкладанні цілісного педагогічного явища на складові елементи; внесенні змін до умов, в яких ці елементи функціонують; відслідковуванні окремих досліджуваних сторін і явищ; фіксуванні результатів навчально-виховного процесу в умовах експерименту. Отже, експеримент у загальній системі методів дослідження допомагає встановити наукові факти, пояснити та узагальнити нові дані з позицій більш загальних теорій; будувати на базі одержаних результатів нові гіпотези та теорії. Експериментальна робота в навчальних закладах повинна передбачати щонайменше: - чітку фіксацію стартових умов; - точне та зрозуміле формулювання гіпотез й очікуваних результатів; - фіксування незалежних змінних, тобто того, що спеціально впроваджується в експериментальну ситуацію; - фіксування умов експерименту; - виявлення реальних результатів і їх відповідності гіпотезі [7].

Як правило, розрізняють такі види педагогічного експерименту :

1. Констатувальний експеримент полягає в тому, що дослідник експериментальним шляхом встановлює лише стан педагогічної системи, що

вивчається: констатує наявність зв`язків, залежностей між явищами, визначає вихідні дані для подальшого дослідження.

.2. Формувальний експеримент супроводжується застосуванням спеціально розробленої системи заходів, спрямованих на формування в учнів певних якостей, на покращення результатів їх навчання, виховання, трудової діяльності тощо.

3. Контрольний експеримент визначає рівень знань, умінь та навичок за матеріалами формувального експерименту. Педагогічний експеримент Констатувальний експеримент Формувальний експеримент Контрольний експеримент .

Види педагогічного експерименту у залежності від логічної структури доведення гіпотези виокремлюють паралельний та послідовний експерименти. При паралельному експерименті створюється експериментальна група, на яку впливають незалежною змінною, а відтак порівнюють стан цієї групи з контрольною групою, яка такого впливу не зазнавала. При послідовному експерименті вивчають стан тієї самої групи до й після введення незалежної змінної. Відбір контрольної групи найчастіше здійснюють або за частотою розподілу ознак, або попарним способом. При частотному розподілі відбір до контрольної групи здійснюють шляхом наближення частот розподілу ознак, які цікавлять дослідника, у контрольній та експериментальній групах. Попарний відбір полягає в тому, що експериментальну й контрольну групу добирають з пар учасників на підставі схожості ознак - один учасник потрапляє до експериментальної групи, а інший - до контрольної [5].

За рівнем вимог до ситуації експерименти поділяють на лабораторні, природні та чисті. Природний експеримент проводиться у звичних умовах навчання і виховання при їх збереженні, що дає можливість враховувати та багаторазово відтворювати досліджувані явища. Лабораторний експеримент проводиться в спеціально створюваних умовах, що дає можливість більш точно їх враховувати, а також ізолювати досліджувані зв`язки від інших впливів. Чистим експеримент називають тоді, коли учасники не знають про його проведення [5;8]

3.2.3. Розроблення програми експерименту.

Підготовка програми експерименту передбачає: - визначення мети та завдань експерименту; - місце, час проведення експерименту та його об`єм; - характеристику вибірки та задіяних в експерименті груп; - опис використовуваних для проведення експерименту матеріалів; - опис методики проведення експерименту; - опис додаткових змінних, що впливають на результати експерименту; - опис методики фіксування, обробки та інтерпретації результатів експериментального дослідження. Для одержання достовірної інформації важливим є виділення з об`єкту дослідження тої сукупності, яка буде підлягати вивченню, тобто формування вибіркової сукупності. Вибіркова сукупність - частина генеральної сукупності, що виступає в якості основних об`єктів спостереження. Вибіркова сукупність повинна відображати властивості та ознаки генеральної сукупності.

Генеральна сукупність - це та сукупність об`єктів, на яку експериментатор поширює висновки дослідження, тобто та множина об`єктів, яка має спільну характеристику і вивчається в рамках дослідження на територіально-часових границях. Процес формування вибіркової сукупності характеризується такими ознаками: - числом ступенів відбору; - типом виділення об`єктів репрезентації на проміжних етапах відбору; - способом районування, виділених на проміжних етапах відбору, об`єктів репрезентації; - способом відбору об`єктів репрезентації та одиниць спостереження на кожному етапі; - об`ємом вибіркової сукупності (кількість одиниць спостереження). Перші чотири ознаки описують тип вибірки, тобто особливості процесу відбору одиниць спостереження, п`ятий - об`єм вибіркової сукупності, що дозволяє розрізняти вибірку в рамках вибраного типу за кількістю одиниць спостереження [5].

Для забезпечення рівності умов в експериментальних і контрольних класах слід: - залучити до проведення занять у групі одного вчителя; - визначити експериментальним більш слабкий клас чи групу; - обміняти місцями у кожній наступній серії дослідів експериментальні та контрольні класи (групи); 30 - розділити склад учнів на кількісно однакові (співрозмірні) групи за рівнем успішності чи іншими важливими для експерименту ознаками [8].

Програма дослідно-експериментальної роботи в навчальному закладі обговорюється та затверджується на засіданні науково-методичної ради і направляється на проведення незалежної зовнішньої експертизи. Експертиза програми педагогічного експерименту передбачає оцінку за такими параметрами:

1. Обґрунтованість вибору теми (грамотність, актуальність, практична значимість, посильність, доступність, наявність необхідних ресурсів тощо).

2. Зрілість і наукова обґрунтованість ідей експерименту, його концептуальної основи, її відповідність загальній системі цінностей школи.

3. Наявність і виваженість рішення про склад учасників роботи, розподіл обов’язків між ними, керівництво експериментом.

4. Доцільність і обґрунтованість вибору бази експерименту, достатність експериментальних об’єктів.

5. Наявність та зрозумілість (чіткість) мети, гіпотези, задач, очікуваних результатів експериментальної роботи і критеріїв їх оцінки

. 6. Обґрунтованість критеріїв і послідовності етапів роботи

7. Наявність обґрунтування методів дослідження і засобів досягнення мети, необхідність та достатність методів і методик, їх взаємодоповнюваність.

8. Продуманість ресурсного забезпечення роботи (програмного, методичного, матеріального, фінансового, нормативного, консультативного, управлінського).

9. Повнота відображення в програмі логіки експерименту: - назва етапів, терміни їх початку та завершення; - зміст роботи, процедури, методики; - хто організовує, проводить дослідження, бере у ньому участь; - необхідне забезпечення; - очікувані результати, критерії і показники їх оцінки; - способи контролю та фіксації результатів; - відмітка про виконання.

10. Наявність та обґрунтованіпрогнозу можливих негативних наслідків експерименту, пропозиції з профілактики, компенсації та подолання цих наслідків.

11. Наявність та обґрунтованість рішення про форми подання результатів роботи.

12. Наявність та обґрунтованість варіантів перспектив подальшого розвитку експерименту [8].

ВИСНОВКИ

Зробимо висновок, що кілька рівнянь, які розв'язують сумісно, називаються системою алгебраїчних рівнянь. Лінійним рівнянням з n невідомими називається рівняння виду:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b – дійсні числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі. Система рівнянь є лінійною, якщо всі рівняння системи лінійні.

Системи рівнянь дрогого степеня з одним лінійним рівнянням

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + kx + my = c_2 \end{cases}$$

розв'язують способом підстановки: з першого рівняння, якщо $a_1 \neq 0$, знаходять $x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1y)$ і підставляють у друге рівняння системи.

Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій області визначення, якщо **їх** розв'язки на ній збігаються (тобто кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої системи і навпаки – кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).

Математика - це знаряддя для міркування. У ній сконцентровані мислення багатьох людей».

Р. Фейнман (американський фізик). Провідна ідея в педагогічній і методичній практиці — максимально розкрити перед учнем спектр застосування математичних знань, передати своє захоплення предметом вихованцям. Саме в цьому аспекті ми розуміємо один із принципів дидактики в навчанні математики, а саме: принцип свідомості, активності й самостійності

Цей принцип полягає в цілеспрямованому, активному сприйманні явищ, що вивчаються, їх осмисленні, творчій переробці й застосуванні. Реалізація цього принципу має на меті виконання таких умов:

а) відповідність пізнавальної діяльності учнів закономірностям процесу учіння;

б) пізнавальна активність учнів у процесі учіння;

в) осмислення учнями процесу учіння;

г) оволодіння учнями прийомами розумової діяльності в процесі пізнання нового.

Активність є дієвий стан учня, який характеризується прагненням до учіння, напругою і проявом волі в процесі оволодіння знаннями. Тому активність учнів і називають пізнавальною активністю.

Загальний смисл вимоги активної навчально-пізнавальної діяльності учнів полягає в тому, що ця вимога має два аспекти: внутрішній (психолого-педагогічний) і зовнішній (організаційний).

Внутрішній аспект активної навчальної діяльності учнів полягає в тому, що вона визначається такими компонентами, як інтерес до навчання, ініціативність у навчальній роботі, пізнавальна самостійність, напруження фізичних і розумових сил для розв'язання поставленої пізнавальної задачі. Розвиток цих компонентів і складає необхідну умову організації активної навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Зовнішній аспект активної навчальної діяльності школярів полягає в тому, що до цієї діяльності необхідно залучити всіх учнів даного класу і кожного з них.

Основною методологічною концепцією педагогічної психології є положення про те, що особистість формується лише в процесі активної діяльності. Формування особистості можна і слід відповідно спрямувати. Важливим засобом є керування дорослих діяльністю дітей або - в широкому розумінні - організація всього їхнього життя й активного спілкування.

Вчені стверджують, що з погляду активізації пізнавальної діяльності, розумових здібностей і підвищення якості знань найкращим способом є цілком самостійне добування знань на основі пошуку і дослідження. Хоч в пізнанні не можна обійтись без репродуктивної діяльності.

Без сумніву, підвищення якості знань, формування пізнавальної активності, самостійності, позитивної мотивації, інтелектуальних умінь є головними завданнями самостійної роботи. В основі самостійної навчальної діяльності учня повинні бути глибокі мотиваційні сили, які змушують особистість безперервно домагатися вдосконалення знань.

На сьогоднішній день немає необхідності переконувати вчителів у важливості розробки та впровадження у педагогічну практику більш досконалих методик навчання, які забезпечують підвищення якості навчального процесу, сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів, розвивають їх розумові здібності. У розв’язанні цієї проблеми значна роль відводиться формуванню в них умінь і навичок самостійного мислення і практичного застосування знань. Важливим є формування навичок самостійної розумової праці. Це тим більш важливо, що, які б знання і у якому обсязі не отримували учні, ці знання мають незворотну тенденцію застарівати, відставати від потреб життя. Вихід у розв’язанні задачі – навчити учнів навчатися самостійно, здобувати знання з різних джерел інформації самостійним шляхом, оволодіти якомога більшою різноманітністю видів і прийомів самостійної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аніпонова М. Активізація творчої діяльності учнів на уроках математики. Математика. – 2009. – Червень. № 23. – С. 3–6.

2. Ващенко Г.Г. Загальні методи навчання. Підручник для педагогів. - К.: Всеукраїнське Педагогічне Товариство ім. Г.Ващенка, 1997. – 410 с.

3. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: посібник для вчителя : - Київ : Радянська школа, 1991. - 254 с.

4. Кравчук В.Р. , Підручна М.В., Янченко Г.М.: підручник 7 клас загальноосвіт. навч. закл. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2014.- 224 с.

5. Логіка та методологія наукового пізнання http: //refine.org.ua/ – Київ, 2007.

6. Мерзляк А.Г., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. сер. шк. / А.Г. Мерзляк, М.С. Якір – Харків: Гімназія, 2009. – 317 с.

7. Методика викладання фізики як педагогічна наука, її зміст і завдання : Лекції та семінари http://fizmet.iatp.org.ua/L1.htm/

8. Методи педагогічних досліджень: Бібліотека он-лайн http://www.readbookz.com/book/. – Київ, МОН, 2007.

9. Моргун О. О. Алгебра: підруч. для 9 кл. серед. шк. / О. О. Моргун, М. С. Фурман. – Х.: Основа, 2006. – 222с.

10. Повстемська В. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики як засіб підвищення результативності навчального процесу // Математика в школах України. – 2004. – № 34. – С. 2–5.

11. Хабіб Р. А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики: метод. посібник. / Р. А. Хабіб. – К.: Рад. школа,1985. – 154 с.

12. Цыпкин А.Г.*, Пинский* А.*И.* Справочник *по методам решения задач по* математике *для средней школы. / А.Г.* Цыпкин, А.И. Пинский. – М.:Наука, 1989. – 574 с.

13. Щукина Г.И. Познавательные интересы в учебной деятельности школьников. – М.: Знание. – 1972. – 164 С.

14. Янченко Г.М., Кравчук В.Р. Алгебра 9 клас. / Г.М.Янченко, В.Р.Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 223 с.