Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

Бакалавр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:

Методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач у 8 класі

Виконав: студент IV курсу, групи МІФ-41
напряму підготовки
014.04 Середня освіта (Математика)
Супрунюк Станіслав Станіславович

Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, проф. Крайчук О.В.

Рецензент ___________________

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв’язувати задачі. Здобути таке вміння допомагає знання прийомів і методів розв’язування задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів, що цікавляться математикою.

Завдання олімпіад полягає в тому, щоб виявляти і залучати до поглиблених занять улюбленим предметом талановитих учнів, щоб з них готувати майбутніх творчих працівників. На математичних олімпіадах пропонуються завдання, мета яких – виявляти рівень математичних здібностей і математичної підготовки учнів, рівень їх математичної культури, зокрема, володіння правилами логіки. Результати олімпіадних змагань значною мірою залежать від розвитку комбінаційних умінь і швидкості знаходження способу розв’язування нестандартних задач.

Здавалося б, що для учасників олімпіад цілком достатньо тих знань з елементарної математики, яких вони здобули в школі. Проте багато навіть кращих учнів розгублюються під час проведення олімпіад і не можуть розв’язати запропоновані задачі. Якщо у завданні з’являється щось нове, нестандартне – учні стають безпорадними. І це не дивно – вони засвоїли не способи міркувань, які ведуть до знаходження відповідей, а типові прийоми розв’язування деяких задач.

У працях М. І. Бурди, Л. М. Фрідмана, Е. Н. Турецького, Ю. М. Колягіна, З. І. Слєпканя, що змістовно займалися дослідженням поняття і психологічної характеристики процесу розв’язання задач, в тому числі і нестандартних, розглянуті можливості педагогічного регулювання розумової діяльності учнів, виявлені роль і місце задач в процесі навчання математики, систематизовані прийоми пошуку розв’язку задачі.

Питаннями підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач займалися Вишенський В.А., Ядренко М.Й., Михайловський В.І., Бабинська І.Л., Карташов Н.В., Лейфура В.М., Мітельман І.М., Ясінський В.А. та ін. Проте безпосереднім дослідженням проблеми навчання учнів 8 класів розв’язуванню олімпіадних задач з математики та розробкою методики підготовки учнів вони не займались.

Це і визначає **актуальність** теми нашого дослідження. Підготовці учнів до розв’язування олімпіадних задач у програмі не приділяється увага. Адже розв’язування задач підвищеного рівня складності та нестандартних задач, виховує навички дослідницької діяльності, сприяє розвитку логічного мислення, дає високий ефект практичної спрямованості математики, що приводить до глибшого розуміння предмету. А це дуже важливий аспект у підготовці учнів до участі в олімпіадах.

Метою дослідження є розробка методики підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач у 8 класі.

Об’єктом дослідження є процес навчання учнів 8 класів розв’язуванню математичних задач.

Предметом дослідження є зміст та методика навчання учнів розв’язуванню олімпіадних задач у 8 класі.

В основу дослідження було покладено **гіпотезу**: поєднання самостійної та гурткової роботи забезпечить покращення знань, вмінь, навичок учнів восьмих класів розв’язувати олімпіадні задачі у порівнянні з традиційними методами навчання.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати наявну науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрити поняття «задача» та її місце у навчанні математики;

2. Систематизувати олімпіадні математичні задачі в 8 класах відповідно до їх видів;

3. Відповідно до цієї систематизації розробити зміст та методику позакласної роботи, методичні рекомендації для підготовки учнів 8 класу до розв’язування олімпіадних задач;

4. Експериментально перевірити розроблену методику.

Практичне значення дослідження полягає у систематизації конкурсних, нестандартних задач з математики для учнів 8 класів, і розробці на її основі змісту та методики гурткових занять, методичних рекомендацій.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у ході дослідження результатів обумовлюється аналізом науково-методичної літератури, а також змісту та структури роботи учнів при розв’язуванні нестандартних математичних задач.

Апробація основних результатів дослідження. Результати роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Поняття «задача», «нестандартна задача» та їх місце у навчанні математики

У наявній літературі з педагогіки і психології немає єдиного трактування поняття «задача». Автори тлумачать це поняття залежно від підходу до зв’язку між суб’єктом і задачею. У загальному значенні, задача – це ціль, якої необхідно досягнути, питання, що потребує вирішення на основі знань і логічних операцій [3, с.74].

У дидактиці і методиці навчання математики задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб’єкта діяльності. Тому здебільшого задача тут – будь-яка вимога обчислити, перетворити, побудувати або довести [37, с.112].

А.М. Леонтьев [37, с.68] стверджує, що задача – це ціль плюс умови. Вперше у педагогічну культуру поняття «навчальна задача» вводить Д. Б. Ельконін. Він формулював її як задачу, у процесі розв’язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач Д. Б. Ельконін [37, с.70] вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

В. М. Брадіс [43, с.51] визначає задачу як певне математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу.

Поняття «задача» і «проблемна ситуація» є досить схожими, але це не тотожні поняття. Ю. М. Колягін [32] стверджує, що проблемна ситуація породжує задачу не сама по собі, а за активної участі суб’єкта, який вбачає в деякій ситуації проблемний характер. Кожна задача стає задачею за суттю лише тоді, коли суб’єкт «приймає» цю задачу, тобто починає роботу над її розв’язанням. Під задачею правильно розуміти «ситуацію для суб’єкта», а не зовнішню ситуацію. Л. М. Фрідман [48, с.93] вважає поняття проблемної ситуації вихідним. Тобто, задача – це результат визначеного типу діяльності людини. Постановка і формулювання задачі залежить від того, як була проаналізована проблемна ситуація.

Л. М. Фрідман пояснює відмінності між поняттям «задача» і «проблемна ситуація» тим, що остання існує реально, а задача являється моделлю реальної ситуації, і тому проблемна ситуація завжди багатша за змістом, ніж задача, яка відображає лише деякі її сторони. Для кожної проблемної ситуації існує одна або декілька задач, які можуть різнитися між собою як сукупністю представлених в них властивостей ситуації. Л.М. Фрідман визначає задачу як «знакову модель проблемної ситуації».

Цікаво уявити сукупність задач як щось, що існує в зовнішньому світі і не залежне від того, хто вирішує задачу. Проте такий підхід є тільки першим наближенням до проблеми, Д. Берлайн справедливо відзначає, що про задачу часто говорять як про щось, що існує в зовнішньому світі. Вона пред’являється людині на листі паперу, або вона виявляє її десь в природі. Однак те, що складає задачу для одного, може не бути задачею для іншого. Під задачею можна розуміти не просто зовнішню ситуацію, а ситуацію для суб’єкта, що характеризується не лише незнанням, а усвідомленням людиною того, що у відомому є щось невідоме, істотно важливе для неї і, що його не можна відразу з’ясувати. Аналіз поняття задачі, як одного з центральних понять психології, дає можливість зробити висновок про доцільність визначати задачу широко, а саме розуміти під задачею всяку ситуацію, що вимагає від людини деякої дії [42, с.185]. З філософської точки зору задача – це «знання про незнання, що виникає в протиріччі між об’єктом і суб’єктом» [53].

Задача в загальнонауковому сенсі – це ситуація, що визначає дії деякої розв’язуючої системи. Тут задачу вирішує необов’язково людина. Розв’язуючі системи можуть бути біологічними, технічними, соціальними, нарешті, системами, до складу яких входять люди і автомати. При такому розширенні поняття розв’язуючої системи дія також трактується ширше, ніж прийнято в психології. Мета розглядається як закодована у розв’язуючій системі вимога до стану предмету дії. Мотиву в загальному випадку вказати не можна. Предмет дії, іншими словами, перетворюваний об'єкт або сукупність об'єктів, разом з вимогою про переважний стан цього об'єкту можна розглядати при описі розв'язування задачі як єдине ціле [47, с.24].

Ввівши поняття задачної і розв'язуючої систем, можна уточнити загальне визначення задачі. Під задачею розуміють задачну систему, що розглядається в її відношенні до існуючої або потенційної розв'язуючої системи. Обговорюване тут загальне поняття задачі називають кібернетичним. При цьому виходимо з того, що розв'язування задачі будь-якою розв'язуючою системою можна розглядати як процес управління, в якому задачна система грає роль керованого об'єкту, а розв'язуюча система – роль керівника.

Задача називається стандартною, якщо при її вирішенні застосовується відомий алгоритм чи її можна вирішити за зразком.

Задача називається нестандартною, якщо при її вирішенні важко сказати на який теоретичний матеріал вона спирається, якщо невідомо яким способом вона вирішується. В ході вирішення таких завдань необхідно спочатку провести пошук плану розв'язання задачі, визначити теоретичний матеріал, який дає ключ до вирішення завдання. Вирішувати такі завдання цікаво і захоплююче. За допомогою нестандартних завдань можна самостійно встановити математичний факт, більш глибоко вникнути в теоретичний матеріал. Рішення задач творчого характеру допомагають розвивати математичне мислення, адже математика – це наука для молодих, вона – гімнастика розуму [60].

Нестандартні задачі – це такі для яких в курсі математики немає спільних правил і положень, які визначають точну програму їх розв'язування. Однак варто зауважити, що поняття «нестандартна задача» являється відносним. Одна і таж задача може бути стандартною чи нестандартною. Нестандартна задача – це задача, алгоритм розв'язування якої учням невідомий, учень не знає попереднього способу її розв'язування, ні того на який навчальний матеріал опирається розв'язок [55].

Олімпіада задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв’язання. Тому серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв’язання яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але які можуть розв’язуватися оригінальним способом [59].

Розв’язуючи задачу підвищеної складності, доцільно розглянути різні способи її Розв’язування. Корисніше одну й ту ж задачу розв’язати декількома способами, аніж декілька однотипних задач – одним і тим же способом. Саме відступ від шаблону і конкретний аналіз умови задачі є запорукою її успішного розв’язання.

У математиці задачі відіграють одну з найважливіших ролей. Історія свідчить, що математика як наука виникла із задач і розвивається в основному для розв’язування задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси – це збірки задач.

Задачі стимулювали не лише виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Задачі, поставленні життям, примушували вчених розробляти нові алгоритми, виявляти нові закономірності, створювати нові методи дослідження.

У навчальному процесі, розв’язуючи задачі, учні вчаться застосовувати набуті теоретичні знання для практичних потреб, розвивають мислення і просторову уяву, виховують волю, наполегливість.

Навчаючу роль математичні задачі виконують в процесі формування в учнів системи знань, умінь і навичок з математики та її конкретних дисциплін. Зазвичай виділяють чотири основні функції задач – навчальна, розвивальна, виховна і контролююча.

Навчальна функція спрямована на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань; в процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування у них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо.

Виховна функція задач спрямована на формування в учнів наукового світогляду, сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція задач спрямована на встановлення вченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому [42].

Жодна із названих функцій не може бути ізольованою від інших, але в кожній конкретній задачі виділяють провідну функцію. Кожна з основних функцій задач особлива в загальній системі навчання, але останніми роками особлива увага приділяється розвивальній функції. Задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розуму, діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються.

1.2. Структура математичної задачі

Розуміння задачі визначається не тільки розкриттям її змісту, але і її структурою. Ю.Н. Кулюткін [49, с.26] виділяє в структурі задачі два компоненти: а) умову, тобто наявну сукупність об'єктів, впорядкованих певними відносинами; б) вимогу, вказуючи на те, що потрібно шукати в даній умові.

Також два компоненти виділяє в задачі А. Ф. Эсаулов [60]: умова і вимога. Умова розуміється як «певні інформаційні системи, з яких слід виходити при спробах рішення», а вимога – як те, «до чого треба прагнути або що потрібно досягти в процесі перетворення інформаційних систем». Л. М. Фрідман виділяє такі елементи в структурі задачі: умова, вимога і оператор. Під оператором задачі він розуміє сукупність тих дій (операцій), які треба провести над умовою задачі, щоб виконати її вимоги.

Більш узагальнений підхід до рішення питання про структуру задачі здійснений академіком В. М. Глушковим. Він в задачі розділяє задачну і розв’язуючу системи. До задачної системи відносяться умови і вимоги задач. У розв’язуючу систему входять наукові методи, способи і засоби, які в нашому розумінні є джерелами створення конкретних алгоритмів і евристик для розв’язування задач [48].

Ю. М. Колягін [32, с.14] підходить до характеристики задачі, використовуючи поняття системи, визначаючи її як дещо ціле, абстрактне і реальне, що складається із взаємозалежних частин: елементів деякої множини і їх властивостей.

Ю. М. Колягін в математичній задачі виділяє такі компоненти:
- початковий стан (умова задачі);
- кінцевий стан (висновок задачі);
- розв’язування (перетворення умови для знаходження шуканого);
- базис розв’язування (його теоретична основа).

Доцільно до визначення навчальної задачі підходити з позицій кібернетики, тобто разом з виділенням в задачі задачної системи виділяти і розв’язуючу систему. Такий підхід принципово по-новому визначить як процес розв’язування задач, так і процес навчання учнів їх розв’язуванню. При цьому навчальна задача розглядається у вигляді системи, що включає задачну і розв’язуючу підсистеми, і визначається взаємодіями між ними. Задана підсистема як складова частина задачі існує об’єктивно і задається учням завданнями і вправами в підручнику (може створюватися вчителем або учнем). Але задачі з’являється для суб’єкта за умови, якщо вона припускає для досягнення вимог ситуацій задачі певних перетворень із сторони розв’язуючого.

1.3. Розвиток евристичної діяльності учнів у процесі розв'язування задач

Проблема формування прийомів евристичної діяльності учнів у процесі навчання математики – одна з актуальних проблем методичної науки.

Необхідно зазначити, що проблемі реалізації евристичних ідей у навчанні математики приділяли увагу такі математики і методисти як Ж. Адамар, М. Я. Антоновський, В. Г. Болтянський, Г. Д. Балк, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, С. Г. Губа, Г. В. Дорофєєв, І. І. Зільберберг, Ю. М. Колягін, Ю. М. Кулюткін, О. І. Скафа та ін.

У своїх роботах ці дослідники вказують на необхідність використання евристичних прийомів, методів, схем під час навчання математики. В основі евристичного підходу лежить психологія творчого мислення, процедура пошуку нового, намагання формалізації творчої діяльності.

Під час розгляду різних прийомів навчання розв'язанню математичних задач, формуванню понять, навчанню доведенням теорем на неалгоритмічній основі, виникає проблема дослідження творчої розумової діяльності.

«Виникнення питань – перша ознака думки, – писав С.Л.Рубінштейн, – яка починає працювати, та розуміння, яке починає зароджуватися. Протиріччя завжди є мотивом, що збуджує ці питання. Тому, для того щоб у школярів сформувати творчий підхід до справи, розвивати їхні творчі здібності, вчитель (викладач) повинен показувати, як питання виникають, спонукати учнів задавати їх» [37].

Треба відмітити, що в практиці роботи загальноосвітніх шкіл розвитку евристичної діяльності школярів не приділяється належної уваги. Причина в першу чергу є нерозробленість методичного забезпечення вчителів і недостатня організація евристичної діяльності учнів в підручниках та навчальних посібниках з математики.

Під евристичними уміннями розуміються уміння здійснювати цілеспрямований пошук розв'язування евристичної задачі шляхом використання евристичних прийомів. Застосування евристичних умінь на практиці – це процес усвідомленого здійснення учнями цілеспрямованого пошуку розв'язування певної проблеми (зокрема математичної задачі) за допомогою евристичних прийомів, для якого характерним є самостійність й елементи творчої діяльності, спрямовані на пізнання навколишньої дійсності [40].

Виділяються чотири етапи формування евристичних умінь: мотиваційно-діагностичний, етап «занурення» в евристичну діяльність, самостійне застосування евристичних прийомів, рефлексивно-оцінювальний.

Евристичне навчання математики являє собою реалізацію теоретико-методичних основ формування прийомів навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів в умовах застосування сучасних технологій навчання.

Метою евристичного навчання математики є надання учням можливості створювати знання, продукувати освітню продукцію з математики у вигляді уміння будувати означення понять та використовувати їх, висловлювати судження й будувати умовиводи, розв'язувати різного виду математичні задачі, а також сприяти процесу зміни особистісних якостей учня, які розвиваються у навчальному процесі [5].

Цілі математичної освіти зумовлюють цілі евристичного навчання математики. Відомими є різні способи постановки цілей навчання: визначення їх через досліджуваний зміст; діяльність учителя; навчальна діяльність школяра; внутрішні процеси інтелектуального, емоційного, особистісного розвитку учня. Для евристичного навчання математики характерним є визначення цілей через навчальну діяльність учнів і частково через внутрішні процеси інтелектуального розвитку учня. Навчально-пізнавальній евристичній діяльності, як і навчальній діяльності, властиве виконання певних окреслених дій, тому трансформація мети у дію дозволяє здійснити діагностику й управління процесом опанування знань, умінь школярів, їх розвитку.

Як корегувати цілі в евристичному навчанні математики? Знання неможливі без дій, тому доцільно, щоб цілі фіксували не тільки суму знань, необхідних для оволодіння змістом, а й описували евристичні вміння, яких мають набути учні в процесі вивчення конкретної математичної теми [41].

В евристичному навчанні математики цілі корегуються завдяки виокремлення не тільки навчальних умінь, але й евристичних, яких мають набути учні у процесі вивчення конкретної математичної теми.

Евристична діяльність, що включає алгоритми як важливий компонент, разом з тим створює нові системи дій, відкриває нові для учнів закономірності. Особливістю евристичної діяльності учнів є фактор відкриття, що, як правило, має лише суб'єктивну значимість. Евристики в більшості випадків не усвідомлюються, вони зливаються із продуктами дій, оскільки увага зосереджується на пошуку розв'язання. У зв'язку з цим, з метою підсилення потреб в евристиках доцільно застосовувати спеціально актуалізовані евристичні ситуації, в основі яких перебуває евристична задача. Розвиток евристичної діяльності є сходженням на структурні рівні, де обсяг свідомого і логічно упорядкованого знання, на основі несвідомого, зростає. У процесі розв'язання задач під час проходження евристичних ситуацій відбувається багаторазове перевтілення несвідомого у свідоме і навпаки.

Під евристичною задачею розуміють таку, яка припускає самостійне формулювання способу її розв'язання, в процесі якого учень потрапляє в ситуацію, в якій він має проявити власну евристичну позицію [39].

У процесі розв'язування евристичних задач та їх систем здійснюється становлення інтелектуально-творчої та евристичної діяльності. Такі задачі виступають основою для створення евристичних ситуацій актуалізації, орієнтування, пошуку, перетворення та інтеграції, метою формування навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів, засобом використання різних видів евристичних прийомів під час формування математичних понять, вивчення теорем, розв'язання задач.

В основі розв'язання будь-якої евристичної задачі знаходяться як загальні, так і спеціальні евристичні прийоми. Тому робота з формування прийомів евристичної діяльності повинна проходити за двома взаємозалежними напрямками. З одного боку, треба враховувати досвід евристичної діяльності, який вже існує у школярів, а з другого – треба забезпечити виконання учнями такої системи завдань за програмами шкільних курсів й за таких умов, які гарантують формування прийомів на потрібному рівні [9].

Система задач допомагає актуалізації евристичних ситуацій, яка буде сприяти розвиткові евристичної діяльності учнів, якщо вона базуватиметься на принципах максимальної зацікавленості, наочності, евристичності, поступового нарощування складності і відповідатиме таким вимогам: повноті подання евристик; раціональному співвідношенню між логічним і евристичним компонентами навчальної діяльності; спрямованості на відкриття; відповідності життєвій практиці учнів; комплексному і доцільно виправданому використанню традиційних і сучасних засобів навчання; забезпеченню рівневої диференціації.

Евристична складова задачі визначається рівнем пізнавальних потреб учня. Це дозволяє відбити динамічний характер формування евристичної діяльності, пов’язаний із можливістю трансформування евристичної складової задачі в алгоритмічну. Важливо підкреслити, що для творчого самовираження і розвитку евристичної діяльності потрібні не просто задачі з невідомим учню способом розв’язання, а саме ті, що відповідають його пізнавальним потребам і можливостям [55].

Успіх навчання школярів навчально-пізнавальній евристичній діяльності залежить від виконання таких умов: вільне володіння вчителем теоретичними та практичними основами процесу формування прийомів евристичної діяльності учнів; уміння організовувати та керувати такою діяльністю; уміння вчителя зацікавити школяра евристичною діяльністю й мотивувати її; своєчасна індивідуальна допомога школярам, які зазнають труднощів під час використання евристик; включення школярів до творчої діяльності, пов’язаної з розширенням можливостей виконання евристичної діяльності, за допомогою системи евристичних і творчих задач, а також використання різного виду евристико-дидактичних конструкцій; допомога учням визначити та усвідомити особистісні отримані результати цієї діяльності.

1.4. Самостійна робота як засіб пізнавальної діяльності учнів

Поряд з усним викладом теоретичних знань, поясненням учителем способів розв'язування різних типів задач та колективним їх розв'язуванням значне місце в процесі навчання математики посідає самостійна робота учнів. Одне з основних завдань школи – підготовка учнів до життя в сучасному суспільстві, виховання мислячої людини, яка б уміла аналізувати, порівнювати, орієнтуватися в потоці інформації. А для цього необхідно створити умови для виявлення творчих сил дитини, формувати в учнів самостійне мислення, підштовхувати їх до самостійної творчості, готувати до безперервної освіти й самоосвіти, до усвідомлення необхідності поповнювати свої знання і вміння [53, с.51].

Учень, який розв'язує навчальну задачу самостійно, виходить з-під настирливого нагляду, контролю вчителя, що звичайно сковує ініціативу, свободу мислення, уяву, посилює страх перед помилкою. Ця обставина має колосальне значення в процесах становлення особистості, бо тільки в атмосфері свободи можливий творчий рух думки.

До самостійної роботи можна віднести самостійне вивчення учнями навчального матеріалу на уроці або під час виконання домашнього завдання за підручниками, навчальними посібниками та науково-популярною літературою, самостійне доведення теорем та розв'язування задач, роботу в зошитах з друкованою основою, програмоване навчання за допомогою програмованих посібників та персональних комп'ютерів.

Самостійна навчально-пізнавальна діяльність учнів ефективна, якщо вона:

- допомагає учням засвоювати математику глибоко і міцно;
- розвиває їхні пізнавальні здібності;
- формує вміння самостійно розширювати й поглиблювати знання та застосувати їх на практиці;

- відповідає основним принципам дидактики: доступності, систематичності, зв'язку теорії з практикою, свідомості, творчої активності, навчанню на високому рівні [56].

Завдання, що входять до системи самостійної діяльності, мають бути різними за дидактичною метою та змістом. Послідовність виконання домашніх і класних самостійних робіт повинна бути такою, щоб виконання одних робіт логічно випливало з попередніх і підготовлювало учнів до виконання наступних. Самостійна робота повинна носити цілеспрямований характер, що досягається чітким визначенням її мети. Недооцінення цієї вимоги призводить до того, що учні або неправильно виконують завдання, або вимагають від учителя додаткових пояснень, через що відбувається нераціональне використання часу. Самостійна робота має бути дійсно самостійною, а її зміст та обсяг – посильними для учнів на цьому етапі.

Спочатку в учнів необхідно сформувати елементарні навички самостійної діяльності як під час роботи з підручником, так і під час виконання практичних завдань, рисунків, простих вимірів, розв'язування задач. Цьому повинна передувати наочна демонстрація вчителем цих видів роботи, яка супроводжується чіткими поясненнями і записами на дошці. Для самостійної роботи учням необхідно пропонувати завдання, що розв'язуються за готовими алгоритмами, а також такі, які вимагають їх створення.

Необхідно враховувати те, що різним учням потрібна різна кількість часу для засвоєння одних і тих самих знань, умінь та навичок. Завдання мають бути цікавими для учнів. Надмірне захоплення самостійною роботою учнів може сповільнити темп навчання. Учитель визначає мету, зміст, обсяг, методи і види самостійної роботи.

Ефективність самостійної роботи збільшується, якщо вона є однією зі складових навчального процесу і проводиться планомірно та систематично, якщо на кожному уроці для неї відводиться певний час. Тільки за таких умов формуються стійкі вміння та навички учнів щодо виконання різних видів самостійної роботи.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ У 8 КЛАСАХ

2.1. Методика гурткової роботи при підготовці учнів до розв'язування олімпіадних задач

Математичні гуртки є основною формою позакласної роботи з математики. Заняття в них доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми.

Методикою проведення гурткової роботи з математики у школі займалися В. Д. Степанов [44], В. І.Коба [18], О. О.Хмура [18] та ін.

Основним напрямом роботи гуртка є поглибленням знань з математики і паралельно з цим підвищення інтересу до предмету. Математичний гурток найкраще організовувати на початку навчального семестру. Як правило, заняття гуртка проводять двічі на місяць. Тривалість заняття 45 хвилин. Залучення учнів до гурткової роботи найкраще здійснювати на уроках, запропонувавши їм нестандартну задачу або фрагмент з історії розвитку математики і запросити продовжити розгляд цієї теми на заняттях гуртка.

Діяльність гуртка буде ефективнішою, якщо він об'єднує відносно стабільний склад учасників і працює за заздалегідь складеним планом [3, с.167].

Не можна переносити методи, прийоми, організаційні форми і засоби навчання математики в класі на гурткові заняття. Слід врахувати, що учні цих заняттях мають більші можливості для навчання та стійку цікавість до математики. Більше часу необхідно приділяти самостійній роботі.

Особливістю методики проведення гуртка є те, що гурткові заняття не схожі на звичайні уроки математики. Тут учитель виступає консультантом та співбесідником при розв'язуванні задач. При поясненні матеріалу часто створюється проблемна ситуація, в результаті вирішення якої учні самі приходять до розв'язку нестандартної задачі. Що ж до змісту роботи гуртка, то тут основними є розв'язування різних видів задач, розгляд нових доведень теорем, виведення формул тощо.

Гурток з розв’язування задач протягом року являє собою систему декількох тем, відносно не пов’язаних між собою. Кожна з них розвиває деякі з основних для шкільної математики ідей, понять, методів. Зміст та тематика гурткових занять залежать лише від вчителя.

На заняттях гуртка використовують наступні принципи навчання:

- регулярності;

- випереджаючої складності (Не потрібно завантажувати учня великою за об’ємом, але нескладною роботою, так само як і, задавати непосильні для нього завдання. Учень має право відкласти важке завдання, якщо він подумав над його розв’язком певний час. В цьому випадку процес засвоєння нових ідей буде ефективнішим. Дія цього принципу буде тим краще, чим ближче один до одного по рівню математичного розвитку члени гуртка);

- швидкого повторення (по мірі накопичення числа виконаних завдань слід переглядати і деяким чином розкладати по поличкам задачний архів, треба розібратися в своїх записах або ж запитати про деякі завдання вчителя) [44, с.42].

Цілісну систему навчальної діяльності учнів на занятті становлять фронтальна, індивідуальна та групова діяльність. Вони пронизують увесь навчальний процес.

Як і на звичайних уроках, на гурткових заняттях треба дбати не лише про знання і вміння учнів, а й про їх виховання: наукового світогляду, культури поведінки, колективізму та ін. В окремому журналі відводять окремі сторінки для відображення гурткових занять з математики, де записують назви опрацьованих тем, відмічають відвідування учнів, виставляють оцінки.

2.2. Програма математичного гуртка з розв’язування олімпіадних задач

Формування в учнів навичок самостійної пізнавальної і дослідницької діяльності і невіддільного від них стійкого інтересу до навчання є одним із найважливіших завдань сучасної школи.

Теоретичний аналіз літератури [35], [18] дозволив виділити основні завдання математичного гуртка:

1. Формування і розвиток розумових операцій: аналізу і синтезу, порівнянь, аналогій, класифікацій, узагальнень.

2. Розвиток та тренінг мислення взагалі й творчого зокрема.

3. Підтримання інтересу до предмета (унікальність красивих та цікавих задач слугує мотивом до навчальної діяльності).

4. Розвиток таких якостей творчої особистості, як пізнавальна активність, посидючість, завзятість у досягненні мети, самостійна творчість.

5. Підготовка учнів до творчої діяльності, математичних досліджень Тут потрібно сприяти творчому засвоєнню знань, способів дій, розвивати уміння переносити знання і способи дій у незнайому ситуацію і бачити нові функції об'єкта.

№ з/п	Тема заняття	Кількість годин	Примітка
1	Цілі числа із вказаними властивостями	1	
2	Ігрові задачі	1	
3	Подільність цілих чисел	1	
4	Лишки (остачі) в задачах	1	
5	Комбінаторика	1	
6	Діофантові рівняння	1	
7	Правило крайнього	1	
8	Принцип Діріхле	1	
9	Інваріанти та напівінваріанти	1	
10	Графи. Відображення	1	
11	Теорема Піфагора та її доведення	1	

Тема № 1. Цілі числа із вказаними властивостями

Мета: формувати вміння та навички розв'язувати вправи на знаходження натуральних чисел з певними властивостями.

Хід заняття

Теоретичні відомості

При розв'язуванні задач на знаходження натуральних чисел з певними властивостями десятковий запис натурального числа $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ часто зручно позначити $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Іноді буває зручним розгляд натурального числа N в системі числення з основою p: $N = (\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0})_p = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$, де a_i – цифри цієї системи числення (причому виконуються умови $0 \le a_i \le p-1, i = 0,1, \dots, n$). При цьому часто допомагають різні оцінки та ознаки подільності.

Розв'язування вправ

1. Знайти всі чотиризначні числа, які дорівнюють четвертому степеню суми своїх цифр.

Розв'язування.

Нехай – $\overline{abcd}$ шукане число. Тоді

$$10^3 \le a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = (a+b+c+d)^4 \le 10^4,$$

звідки отримуємо, що $6 \le a+b+c+d \le 9$. Зробивши перевірку, маємо, що серед чисел 6^4, 7^4, 8^4, 9^4 умову задачі задовольняє лише одне число $7^4 = 2401$.

2. Фабрика випустила товар у пачках масою 3 кг і 5 кг. Довести, що з цих пачок можна скласти пачку будь-якої маси, більшої за 7 кг.

Розв'язування.

Оскільки кожну масу, яка ділиться на 10, можна дістати з пачок по 5 кг, а кожну масу, яка ділиться на 3, – з пачок по 3 кг, то залишається переконатися, що можна дістати з пачок по 3 і 5 кг таку масу 8 кг, 11 кг, 13кг, 14 кг, 17 кг, а це випливає з рівностей: 8=3+5; 11=3·2+5; 13=3+5·2; 14=3·3+5; 17=3·4+5.

3. Два різних 100-цифрових числа записані за допомогою 40 одиниць, 30 двійок, 20 трійок і 10 четвірок. Довести, що ці числа не діляться одне на одне.

Розв'язування.

Позначимо ці числа через M і N Сума цифр кожного з цих чисел дорівнює $40\cdot 1+30\cdot 2+20\cdot 3+10\cdot 4=200$. Оскільки кожне число при діленні на 9 дає таку саму остачу, яку дає при діленні на 9 сума його цифр, то числа M і N при діленні на 9 дають остачу 2. Нехай $N=9n+2$. Припустимо, що число M ділиться на N. Тоді $M=pN=9np+2p$, де p - ціле число, причому $1<p\le 4$. Для того, щоб число M при діленні на 9 давало остачу 2, треба, щоб число $2p$ при діленні на 9 також давало остачу 2. Але для цілих p з проміжку $1<p\le 4$ це неможливо. Отже, припущення, що M ділиться на N, неправильне.

4. Нехай a, b, c, d – цілі числа. Довести, що вираз $((a-c)^2+(b-d)^2)(a^2+b^2)-(ad-bc)^2$ є квадратом деякого цілого числа.

Розв'язування.

Маємо $((a-c)^2+(b-d)^2)(a^2+b^2)-(ad-bc)^2=(a^2+b^2-ac-bd)^2$. Оскільки a,b,c,d – цілі числа, то заданий вираз є квадратом цілого числа $a^2+b^2-ac-bd$.

5. Визначити, яке з чисел більше $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ (75 раз) чи $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (74 рази).

Розв'язування.

Введемо такі позначення: $a=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}75\text{ раз},\quad b=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\right\}74\text{ рази}$.

Тоді $a=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}}\right\}72\text{ рази},\quad b=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{27}}}}}}\right\}72\text{ рази}$. Оскільки $2^{16}<3^{27}$, то $2^{2^{16}}<3^{3^{27}}, 2^{2^{2^{16}}}<3^{3^{3^{27}}},\ldots$. Отже $a<b$.

6. Знайти всі такі стоцифрові числа a, які задовольняють рівність: a="сума всіх цифр числа a"+"сума всіх попарних добутків цих цифр"+"сума всіх

добутків по три цифри"+…+"добуток усіх цифр".

Розв'язування.

Нехай $a = \overline{b_1 b_2 ... b_{100}}$. Тоді рівність, про яку йдеться в умові задачі, можна записати в такому вигляді:

$b_1 \cdot 10^{99} + b_2 \cdot 10^{98} + ... + b_{99} \cdot 10 + b_{100} = (b_1 + 1)(b_2 + 1)(b_3 + 1)...(b_{100} + 1) - 1$. Оскільки кожна з цифр числа не перевищує 9, то для правої частини цієї рівності маємо

$$(b_1 + 1)(b_2 + 1)...(b_{100} + 1) - 1 = b_1(b_2 + 1)...(b_{100} + 1) + (b_2 + 1)...(b_{100} + 1) - 1 \le$$
$$\le b_1 \cdot 10^{99} + (b_2 + 1)...(b_{100} + 1) - 1 = b_1 \cdot 10^{99} + b_2(b_3 + 1)...(b_{100} + 1) +$$
$$+ (b_3 + 1)...(b_{100} + 1) - 1 \le b_1 \cdot 10^{99} + b_2 \cdot 10^{98} + (b_3 + 1)...(b_{100} + 1) - 1 \le ... \le$$
$$\le b_1 \cdot 10^{99} + b_2 \cdot 10^{98} + ... + b_{99} \cdot 10 + b_{100} = a$$

Очевидно, рівності будуть виконуватись тоді і тільки тоді, коли $b_2 = b_3 = ... = b_{100} = 9$. Отже, шукані числа мають вигляд $\overline{b_1\, 99...9}$, де b_1 – довільна цифра, відмінна від 0.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 4, 5, 9, 11 дає відповідно остачі 3, 4, 8, 10.

Розв'язування.

Числа 4, 5, 9, 11 взаємно прості, тому $4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 = 1980$ – найменше число, яке ділиться на кожне з них. Якщо число *a* ділити на *b,* то число $a - 1$ при діленні на *b* дає остачу $b - 1$. Кожна з остач 3, 4, 8, 10, про які йдеться в умові задачі, на 1 менша від відповідного дільника 4, 5, 9, 11. Тому шукане число 1979.

2. Довести, що коли принаймні одне з натуральних чисел *a* або *b* відмінне від 1, виконується нерівність $3(a^2 + b^2) \ge 5(a + b)$.

Розв'язування.

Оскільки для всіх натуральних чисел $a \ge 2, b \ge 2$ виконуються нерівності $3a > 5, 3b > 5$, то для цих чисел виконуватимуться і нерівності $3a^2 > 5a, 3b^2 > 5b$. Додавши ці нерівності, дістанемо $3(a^2 + b^2) > 5(a + b)$. Якщо $a = 1$, то дана в задачі нерівність перетворюється в нерівність $3b^2+3\geq 5b+5$. Неважко перевірити, що вона справджується для кожного натурального $b\geq 2$. Випадок $b=1$ розглядається аналогічно.

3. На дошці було записано дію множення двох двоцифрових чисел. Учень замінив кожну цифру новою, більшою від попередньої на одне і те саме число. Ось що вийшло:

$$\begin{array}{r} 43 \\ 54 \\ \hline 64 \\ 85 \\ \hline 894 \end{array}$$

Що було записано на дошці спочатку?

Розв’язування.

I. Оскільки у першому рядку зустрічається цифра 3, то числом, що додається до кожної із записаних цифр, може бути лише 0, 1, 2 або 3. Аналізуючи кожну з цих можливостей, переконуємося, що до кожної цифри учень додав число 2.

II. Позначимо число, що додається до кожної із записаних цифр через a. Бачимо, що при додаванні цифр другого розряду, переносу в старший розряд не було. Отже $(6-a)+(5-a)=9-a$, звідки $a=2$.

Тема № 2. Ігрові задачі

Мета: формувати вміння та навички розв’язувати ігрові задачі, задачі на кмітливість, задачі-жарти.

Хід заняття

Теоретичні відомості

У математичних іграх припускається, що грають двоє (інколи троє), ходи роблять по черзі (жоден з гравців не може пропустити хід), причому гравці не роблять помилок. А тому в таких іграх наперед можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити, який з гравців може забезпечити собі виграш. Для розв’язання задачі-гри необхідно сформулювати виграшну стратегію одного з гравців та довести, що така стратегія веде до виграшу (незалежно від ходів суперника).

У багатьох ігрових задачах виграшна стратегія досягається за допомогою вдалого ходу-відповіді на будь-який хід суперника. Існування такого ходу може забезпечуватись симетрією, розбиттям на пари, доповненням до числа.

Існує клас виграшних стратегій, що характеризується такими властивостями:

а) за один хід з однієї виграшної позиції не можна перейти до іншої виграшної позиції;

б) з будь-якої невиграшної позиції за один хід можна перейти до деякої виграшної (відмінної від попередньої виграшної) позиції.

Знаходження такого класу виграшних позицій для гри рівносильне її розв’язанню. Пошук виграшних позицій у більшості випадків доцільно проводити за допомогою аналізу кінцівки гри, іноді до таких позицій можна перейти інтуїтивно.

Розв’язування вправ

1. Маємо три купи каменів: у першій - 10, у другій - 15, у третій - 20. За хід дозволяється розділити будь-яку купу на дві менші; програє той, хто не може зробити ходу. Як треба грати другому гравцю, щоб виграти?

Розв’язування.

Наприкінці гри, коли не можна зробити ходу, маємо 45 куп по одному каменю. За будь-який хід кількість куп збільшується на одиницю, тому вся гра має тривати точно 45 - 3 = 42 ходи.

Отже, другий гравець завжди виграє.

2. Двоє гравців по черзі виймають із двох ящиків кулі. За один хід кожен гравець може брати з будь-якого (тільки одного) ящика довільну, кількість куль. Виграє той, хто бере останнім. Як має грати учасник, який починає, щоб виграти, якщо в першому ящику 73 кулі, а в другому - 118 куль?

Розв’язування.

Якщо перший гравець спочатку візьме 45 куль із другого ящика, то в ящиках залишиться куль порівну. Після цього перший гравець на кожен хід суперника має симетричну відповідь, тобто якщо другий гравець бере *n* куль з якогось ящика, то перший має брати *n* куль з іншого ящика.

3. Двоє по черзі ставлять слонів на клітинки шахової дошки так, що слони не б’ють один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити ходу.

Розв’язування.

Шахова дошка симетрична відносно свого центра, тому, на перший погляд, другий гравець на кожен хід першого має симетричний хід. Однак це не так, бо якщо перший гравець ставить слона на одну з клітинок головної діагоналі, то другий гравець симетричного ходу не має.

Щоб розв’язати задачу за допомогою симетричної стратегії, необхідно знайти симетрію, за якої попередній хід суперника не перешкоджає дотриманню обраної стратегії. Такою є симетрія відносно прямої, що розділяє четверту і п’яту горизонталі. Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і тому слони, поставлені на такі поля, не б’ють один одного.

Отже, другий гравець виграє, якщо на кожен хід першого гравця відповідає ходом, симетричним відносно вказаної прямої.

4. У коробці знаходиться 60 сірників. За один хід можна взяти будь-яку кількість від 1 до 5 сірників. Програє той, хто не може зробити ходу. Хто з гравців (перший чи другий) може забезпечити собі виграш?

Розв’язування.

Проаналізуємо кінцівку такої гри. Якщо кількість сірників менша за 5, то той гравець, чия черга ходити, закінчує гру. Якщо кількість сірників більша за 6, то гра закінчиться через два або більше ходи. Якщо ж кількість сірників дорівнює 6, то гравець, чий хід передував цій позиції, точно наступним своїм ходом закінчує гру (для цього він на хід суперника в k сірників бере $6 - k$ сірників). Тобто така позиція є виграшною для цього гравця. Очевидно, що позиції 12, 18, 24 (і т. д.) сірників для нього також є виграшними, бо таким самим способом він від позиції «24 сірники» переходить до позиції « 18 сірників», від «18» до «12».

Отже, початкова позиція виграшна для другого гравця, а його виграшною стратегією є доповнення ним ходів першого гравця до 6 сірників.

5. Двоє гравців по черзі розламують шоколадну плитку 6 х 8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків уздовж заглиблення на плитці Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія ?

Розв’язування.

Перемога першого гравця досягається незалежно від його гри, все ж можна було б запропонувати для нього цілком осмислену стратегію. Припустимо, що своїм першим ходом він розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6х4. Тоді, яку б із цих частин не розламав другий гравець, у першого є можливість зробити аналогічний (симетричний) розлом у тотожній їй другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Тоді, який би шматок не розламав другий гравець, перший знову має змогу зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в ту ж саму пару. Таким чином, скільки б не продовжувалася гра, ходи першого гравця не зможуть вичерпатися раніше, ніж ходи другого. А оскільки число розломів плитки є скінченним, ми дістаємо, що врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. З попередніх міркувань випливає, що останній хід при цьому буде за починаючим гру, який і здобуде перемогу.

6. Двоє гравців по черзі кладуть однакові монети на круглий стіл, причому так, щоб вони не накладалися одна на одну. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв’язування.

В цій грі виграє перший гравець, незалежно від розмірів столу. Першим ходом він кладе монету так, щоб центри монети і столу співпали. Після цього на кожний хід другого гравця перший гравець відповідає симетрично щодо центру столу. При такій стратегії після кожного ходу першого гравця позиція симетрична. Тому, якщо черговий хід другого гравця можливий, то можливий і симетричний йому відповідний хід першого гравця. Отже, перший гравець перемагає.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Прямокутна шоколадка розділена 4 повздовжніми та 9 поперечними заглибленнями на $5 \times 10 = 50$ квадратних частин. Перший гравець розламує шоколадку по деякому заглибленню на дві прямокутні частини. Два гравці по черзі одну із отриманих частин по заглибленнях ділять на дві прямокутні частини. Хто виграє при правильній грі, якщо той, хто відламає частку 1×1: а) програє; б) виграє.

Розв’язування.

В обох випадках виграє перший гравець, і першим своїм ходом він має розламати шоколадку на дві частини 5×5.

У варіанті а) на кожний хід другого гравця на одній половині шоколадки першому треба зробити такий же хід на іншій. Очевидно, що частку 1х1 раніше отримає другий гравець.

У варіанті б) перший гравець дублює ходи другого в іншій половині шоколадки, поки другий не відламає якусь частку $1\times n$. Тоді з цієї частини перший отримує частку 1×1.

2. Дано смужку розміром 1×2005. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку смужки або деякі дві послідовні клітинки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – перший гравець чи його суперник?

Розв'язування.

Перемогу може забезпечити собі перший гравець. Першим ходом він закреслює 1003-тю (центральну) клітинку, а потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

3. Два гравці записують по черзі числа 1 і –1 в одиничні клітинки таблиці розміром 1987 × 1987. Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, стовпця і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить перший хід, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 1990 додатних.

Розв'язування.

Оскільки число 1987 непарне, то існує клітинка, центром якої є центр симетрії даної таблиці. Для кожної іншої клітинки існує клітинка, симетрична з нею відносно центра таблиці. Якщо перший гравець хоче домогтись вказаного в задачі результату, то своїм першим ходом він має записати в центральну клітинку число (-1), а після кожного ходу другого гравця йому слід записувати число протилежного знаку в клітинку, симетричну відносно центра таблиці із клітинкою "суперника". Якщо, наприклад, другий гравець своїм першим ходом записує число (+1) в клітинку першого стовпця, то перший гравець записує число (-1) в симетричну з нею клітинку 1987-го стовпця. Після цього обміну ходів в кожному із заданих стовпців залишиться по 1986 клітинок, тому в першому стовпцеві буде 993+1 число (+1) і 993 числа (-1), тобто добуток чисел буде дорівнювати –1. В 1987 стовпцеві буде 994 клітинки з числами (-1) і 993 – з числами (+1). Добуток всіх чисел дорівнює (+1). Таким чином, в тому рядку чи в тій діагоналі, де перший запис робить перший гравець, добуток чисел дорівнює (+1). Сюди відносяться, перш за все, обидві діагоналі, той рядок і той стовпець, які містять центральну клітинку (всього 4). В решті рядків і стовпців буде 1986 з додатними добутками і 1986 – з від'ємними.

$$1986 + 4 = 1990$$

Тема № 3. Подільність цілих чисел

Мета: формувати знання, уміння, навички учнів розв'язувати вправи на подільність цілих чисел

Хід заняття

Теоретичні відомості

Якщо числа a і b діляться на c, то їхня сума $a+b$ також ділиться на c;

Якщо числа a і b діляться на c і $a > b$, то різниця $a–b$ також ділиться на c;

Якщо a ділиться на c, а b ділиться на d, то добуток $a\cdot b$ ділиться на добуток $c\cdot d$;

Якщо a ділиться на b, то будь-якого натурального степеня n a^n ділиться на b^n;

Якщо a ділиться на добуток $b= b_1\cdot b_2$, то воно ділиться і на кожен зі співмножників b_1 і b_2;

Якщо число a ділиться на кожне з двох взаємно простих чисел b_1 і b_2, то воно ділиться і на добуток $b = b_1\cdot b_2$ цих чисел;

Якщо добуток натуральних чисел a і b ділиться на c, а числа a і c – взаємно прості, то число b ділиться на число c;

Ознака подільності на 7, 11 і 13

Натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ ділиться на 7 (на 11 або на 13) тоді і тільки тоді, коли на 7 (відповідно на 11 або на 13) ділиться ціле число $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3}$, тобто, різниця між числом, записаним з допомогою трьох останніх цифр даного числа a, і числом, записаним усіма рештою його цифрами (у тому ж порядку).

Цікава ознака подільності Рачинського:

Натуральне число $n=10a+b$ ділиться на натуральне число $n_1 = 10a_1 + b_1$ ($n > n_1$ і a, b, a_1, b_1 – натуральні числа, причому a_1 і b_1 – взаємно прості), тоді, коли на n_1 ділиться різниця $r_1 = a\, b_1 - a_1 b$

Часто при розв'язуванні задач пов'язаних з подільністю чисел, доцільно застосовувати також наступні важливі формули для розкладу на множники. Ці формули виконуються для будь-яких чисел a і b:

$a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

$a^n – b^n = (a – b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + … + ab^{n-2} + b^{n-1})$

При непарних n виконується також співвідношення:

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} – a^{n-2} b + … – ab^{n-2} + b^{n-1})$

Розв'язування вправ

1. Число $a + 2$ ділиться на 5. Довести, що $3a + 16$ також ділиться на 5.

Розв'язування.

$3a + 16 = 3a + 6 + 10 = 3(a + 2) + 10$

Кожен з доданків ділиться на 5, то й вся сума ділиться на 5.

2. Довести, що при кожному цілому n число $n^3 – n^2+2n$ ділиться на 6.

Розв'язування.

$n^3 – 3n^2 + 2n = n(n^2 – 3n + 2) = n(n^2 – n – 2n + 2) = n(n(n – 1) –$ $–$
$2(n – 1)) = n(n – 1)(n – 2)$

Маємо добуток трьох послідовних чисел, який завжди ділиться на 2 та на 3. Отже, даний добуток поділиться на 6, що й треба було довести.

3. Довести, що при кожному цілому n число $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ також є цілим числом.

Розв'язування.

$$\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30} = \frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$$

Щоб довести, що даний дріб є цілим числом достатньо довести, що число $n^5 - 5n^3 + 4n$ при будь-якому цілому n ділиться на 120.

Маємо:

$n(n^4 - 5\,n^2 + 4) = n((n^4 - 4n^2 - n^2 + 4) = n(n^2(n^2 - 4) - (n^2 - 4)) = n(n^2 - 4)\times \times(n^2 - 1) = n(n-2)(n+2)(n-1)(n-1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

Отримали добуток п'яти послідовних чисел. З них принаймні по одному діляться на 3, 4, 5. А також одне з чисел, що не ділиться на 4, ділиться на 2.

Отже, добуток ділиться на 120. Число $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ – ціле.

4. Довести, що число $n^2+5n+16$ ні при якому натуральному n не ділиться на 169.

Розв'язування.

Запишемо число $n^2+5n+16$ у вигляді $n^2 - 8n+16+13n=(n-4)^2+13n$

Отримане число повинно ділитись на 13, так як $169^2=13$. Тоді на 13 повинно ділитись $n - 4$, а $(n-4)^2$ на 169.

Маємо $(n-4)^2$ ділитись на 169, а $13n$ не ділиться на 169, бо n не ділиться на 13. Отже сума $(n-4)^2 + 13n$ не ділиться на 169 ні при якому натуральному n.

5. Нехай a, b – натуральні числа, причому сума $6a + 11b$ ділиться на 31. Довести, що тоді число $a + 7b$ також ділиться на 31.

Розв'язування.

Розглянемо добуток $(a+7b)\cdot 6 = 6a + 42b = (6a+11b) + 31b$, $(a + 7b)\cdot 6$ – ділиться на 31, то й $(6a + 11b) + 31b$ ділиться на 31

Отже, доданок $6a + 11b$ повинен ділитися на 31.

6. Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати те саме число, то утворене чотирицифрове число буде квадратом деякого іншого натурального числа. Знайти таке двоцифрове число.

Розв'язування.

Дане число $\overline{ab}$, шукане число $\overline{aabb}$.

$$\overline{aabb} = \overline{aa} \cdot 100 + \overline{bb} = (10a + a) \cdot 100 + 10b + b = 11a \cdot 100 + 11b =$$
$$= 11(100a + b)$$

Щоб дане число було квадратом 11 потрібно, щоб $100a+ b$ ділилося на 11.

$100a+ b=99a+(a+ b)$

Отже на 11 має ділитися сума цифр даного числа:

A	2	3	4	5	6	7	8	9
B	9	8	7	6	5	4	3	2

Число $\overline{aabb}$ поділимо на 11^2

$11(99a+(a+b)):11=99a+a+b=100a+ b$

$$\begin{array}{r|l} 100a+b & 11 \\ \cline{2-2} \underline{99a\quad} & 9a+1 \\ a+b & \\ \underline{a+b} & \\ 0 & \end{array}$$

Потрібно щоб $9a + 1$ теж було точним квадратом. Це досягається лише при a=7 і b=4 (встановлюється перевіркою). Шукане число 74.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на чотири частини і т.д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилось, що їх всього 1962. Довести, що підрахунок був неправильний.

Розв’язування.

Очевидно, після розрізування одного аркуша паперу на 4 частини загальна кількість аркушів збільшиться на 3. Отже, якщо таку операцію провести n разів, то після цього матимемо $4+3n$ аркушів. Якщо вважати, що підрахунок було виконано правильно, то $4+3n=1962$. Звідки $3n=1958$. Але 1958 не ділиться на 3. Отже, підрахунок було виконано неправильно.

2. Довести, що при будь-якому $n \in Z$ число $n(n-3)(n^2-3n+14)$ ділиться на 24.

Розв’язування.

Позначимо $T_n = n(n-3)(n(n-3)+14)$. Тоді дістанемо

$T_n = n(n-3)(n^2 - n - 2n + 2 + 12) = n(n-3)(n-1)(n-2) + 12n(n-3)$.

Число $n(n-1)(n-2)(n-3)$ є добутком чотирьох послідовних чисел і тому ділиться на 8 і 3. Число $12n(n-3)$ ділиться на 24, бо добуток $n(n-3)$ є парним числом (n і $n - 3$ є числами різної парності). Тому T_n ділиться на 24.

3. На дошці написано числа 1, 2, 3, ... , 1966. Дозволяється витерти будь-які два числа, а замість них написати їх різницю. Внаслідок багатократного виконання цієї операції на дошці залишилося одне число. Довести, що це число не може бути нулем.

Розв’язування.

При кожній операції, коли витираються будь-які два числа, а замість них пишеться їх різниця, сума всіх чисел, записаних на дошці, зменшується на парне число. справді, якщо витерти числа a і b, то замість суми $a + b$, маємо різницю $a - b$. Отже, і вся сума зменшиться на $2b$. Багаторазовим повторенням цієї операції, після чого на дошці залишиться тільки одне число, всю суму можна зменшити на будь-яке парне число. Зазначимо, що спочатку сума всіх чисел на дошці 1+2+…+1966 – непарне число, тому що серед цих чисел 983 непарних, а решта – парні. Отже, останнє число на дошці ніколи не може бути нулем.

4. Нехай a і b – такі цілі числа, що добуток $(16a+17b)(17a+16b)$ ділиться на 11. Довести, що він ділиться на 121.

Розв’язування.

Позначимо $n=16a+17b$, $m=17a+16b$. За умовою задачі число nm ділиться на 11. Звідси випливає, що принаймні одне з чисел n або m ділиться на 11, бо 11 – просте число. Але сума цих чисел $n+m=33(a+b)$ також ділиться на 11. Тому за умови, що одне з них кратне 11, друге також кратне 11. Отже, nm ділиться на $11^2 = 121$.

Тема № 4. Лишки (остачі) в задачах

Мета: розвивати в учнів вміння та навички розв'язувати задачі з використанням лишків

Хід заняття

Теоретичні відомості

Поділити з остачею число a на число b (число a і b натуральні числа) – означає знайти таке натуральне число q і таке ціле $0 \leq r < b$, що $a = bq+ \gamma$

При цьому число q називається неповною часткою, а число r – остачею від ділення a на b. При $r = 0$ ділення з остачею є ділення націло.

Будь-яке натуральне число a при довільному вибраному натуральному $k >1$ можна однозначно подати якоюсь однією з наступних k формул при належному виборі цілого невід'ємного n.

$a = k\, n$

$a = k\, n+1$

…………

$a = k\, n+(k \,- 1)$

Якщо при діленні чисел a_1, a_2 на число b одержують остачі r_1, r_2,то остача від ділення на b суми $a_1 + a_2$ (відповідно добутку $a_1 \cdot a_2$) дорівнює остачі від ділення на b суми $r_1 + r_2$ (відповідно добутку $r_1 \cdot r_2$) остач r_1, r_2.

Розв'язування вправ

1. Довести, що сума чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8.

Розв'язування.

Нехай перше з парних чисел буде $2k$. Наступні числа: $2k + 2$; $2k + 4$; $2k + 6$.

Сума: $8k + 12$. При діленні цієї суми на 8 одержуємо неповну частку $k + 1$ та остачу 4. Отже, націло на 8 ця сума не ділиться, що й треба було довести.

2. Довести, що при жодному натуральному n число $7n + 5$ не може бути квадратом іншого натурального числа (точним квадратом).

Розв'язування.

Кожне натуральне число можна записати в одній із таких форм (при певному $k \geq 0$):

$7k$; $7k + 1$; $7k + 2$; $7k + 3$; $7k + 4$; $7k + 5$; $7k + 6$.

В загальному вигляді $7k + m$, де m набуває значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Квадрати цих чисел мають вигляд: $49k^2 + 14km + m^2$. При діленні на 7 цих квадратів остачі збігатимуться з остачами від ділення чисел m^2 на 7 і відповідно будуть дорівнювати 1; 4; 2; 2; 4; 1.

Але задане число $7n + 5$ при діленні на 7 дає остачу 5, отже, воно не може бути квадратом натурального числа.

3. Довести, що число $2^{70} + 3^{70}$ ділиться на 13.

Розв'язування.

Знайдемо остачі від ділення відповідних степенів 2 і 3

$n = 1$	2	$n = 1$	3
$n = 2$	4	$n = 2$	9
$n = 3$	8	$n = 3$	1
$n = 4$	3		
$n = 5$	6		
$n = 6$	12		
$n = 7$	11		
$n = 8$	9		
$n = 9$	5		
$n = 10$	10		
$n = 11$	7		
$n = 12$	1		

$2^{70}=(2^{12})^5 \cdot 2^{10}$ – остача від ділення 2^{70} на 13 буде дорівнювати остачі від ділення добутку $1 \cdot 10$ на 13, тобто – 10.

$3^{70}=(2^3)^{23}\cdot 3$ – остача від ділення 3^{70} на 13 буде дорівнювати остачі від ділення добутку $1\cdot 3$ на 13, тобто – 3.

Сума остач від ділення на 13 чисел 2^{70} і 3^{70}дорівнює 10+3=13, тобто ділиться на 13. Отже на 13 ділиться і сама сума чисел 2^{70} і 3^{70}, що і треба було довести.

4. Доведіть, що жодне з чисел послідовності: 11; 111; 1111; …. Не є точним квадратом.

Розв'язування.

Легко побачити, що кожне натуральне число при діленні на 4 має остачу 3:

11 – 3

111 = 100+11 – 3

11111 = 11100+11 – 3

Будь-яке натуральне число можна записати у вигляді: $4k + m$, де m=0, 1, 2, 3, $k + n$.

Його квадрат буде мати вигляд: $(4^k + m)^2 = 16k^2 + 8km + m^2$. Остачі від ділення квадрата цього числа на 4 будуть співпадати з остачами від ділення на m^2: 0, 1, 0, 5. Тобто, точний квадрат при діленні на 4 не може мати остачу *3*. Жодне з чисел 11, 111, 1111, 11111, …. не може бути точним квадратом.

5. Довести, що число $6^n - 5^n$ є точним квадратом натурального числа лише при n=1.

Розв'язання

Розглянемо остачу від ділення числа $6^n - 5^n$ на 4.

n = 1   1

n = 2   3

n = 3   3

………

n = k   3

З попередньої задачі відомо, що точні квадрати чисел при діленні на 4 мають остачі 0; 1; 5. тобто, число $6^n - 5^n$ може бути точним квадратом тільки при n =1.

6. Довести, що число $6n^3 + 3$ не може бути шостим степенем цілого числа ні при якому натуральному n.

Розв'язування.

Число $6n^3 + 3$ при діленні на 7 може давати остачі 3, 2 та 4, а шостий степінь при діленні на 7 може давати остачі 0, 1.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Відомо, що p, $p + 10$, $p + 14$ – прості числа. Знайти число p.

Розв'язування.

Число p при діленні на 3 може давати остачі 0, 1, 2. Якщо $p = 3k + 1$, то $p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5)$ – складне число. Якщо $p = 3k + 2$, то $p + 10 = 3k + 12 = = 3(k + 4)$ – складне число. Отже, може бути лише $p = 3k$.

Враховуючи, що p – просте число, отримаємо $p = 3$. У такому разі маємо прості числа 3, 13, 17.

2. Знайти остачу від ділення числа $9^{1999} + 1997 \cdot 1998 \cdot 1999$ на 8.

Розв'язування.

Числа 9^{1999} та $1^{1999} = 1$ при діленні на 8 дають одну і ту саму остачу 1. Числа 1997, 1998, 1999 при діленні на 8 дають відповідно остачі 5, 6, 7, тому їхній добуток дає таку ж остачу, як і число $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, тобто 2.

Отже, остача дорівнює $1 + 2 = 3$.

3. Довести, що $n^5 + 4n$ ділиться на 5 при будь-якому натуральному n.

Розв'язування.

Якщо n при діленні на 5 дає остачу 1, то n^5 так само дає остачу 1, $4n$ дає остачу 4, $1 + 4 = 5$, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає остачу 2, то n^5 дає остачу 2, $4n$ дає остачу 3, 2 + 3 = 5, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає остачу 3, то n^5 так само дає остачу 3, $4n$ дає остачу 2, 3 + 2 = 5, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає остачу 4, то n^5 так само дає остачу 4, $4n$ дає остачу 1, 4 + 1 = 5, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо ж n ділиться на 5, то твердження задачі очевидне.

4. Чи може квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, рівний 23?

Розв'язування.

Число $b^2 - 4ac$ при діленні на 4 може давати остачу 0 або 1, а число 23 дає остачу 3. Отже, не може.

Тема № 5. Комбінаторика

Мета: формувати вміння та навички розв’язувати задачі, в яких необхідно розглядати підмножини деякої множини, розміщення елементів цих підмножин та обчислювати кількість способів таких розміщень при певних умовах.

Хід заняття

Теоретичні відомості

Задачі, в яких необхідно розглядати підмножини деякої множини, розміщення елементів цих підмножин та обчислювати кількість способів таких розміщень при певних умовах, називаються комбінаторними.

Комбінаторика – розділ математики, який вивчає методи розв’язування комбінаторних задач. Найпростішими поняттями комбінаторики є розміщення, перестановки, комбінації (без повторень та з повтореннями).

Кількість розміщень, перестановок, комбінацій легко встановлюється за допомогою таких очевидних принципів.

Правило суми: якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, причому кожен вибір елемента a не співпадає з жодним вибором елемента b, то один з елементів a або b можна вибрати $m+k$ способами.

Правило добутку: якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b після вибору елемента a можна вибрати k способами, то пару елементів (a, b) можна вибрати mk способами.

Нехай $M=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ – множина з n елементів. Впорядкований набір k різних елементів із множини, яка містить n елементів, називається розміщенням з n елементів по k (без повторень). Розміщення можуть відрізнятись як порядком елементів, так і способом їх вибору. Кількість розміщень з n елементів по k позначається A_n^k.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Розміщення з n елементів по n без повторень називається перестановкою з n елементів. Кількість перестановок без повторень позначається P_n. Очевидно, що $P_n = n!$

Набір k різних елементів із множини, що містить n елементів, без урахування порядку цих k елементів, називається комбінацією з n елементів по k (без повторень). Кількість комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k. Оскільки кожній комбінації з n елементів по k відповідає $k!$ Розміщень з n елементів по k (отриманих усіма можливими перестановками), то

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Розв’язування вправ

1. З міста А в місто Б можна проїхати 4 дорогами, а з міста А в місто В – 3 дорогами. З міста Б в місто Д можна проїхати 2 дорогами, а з міста В в місто Д – 5 дорогами. Скільки є способів проїхати з міста А в місто Д?

Розв’язування.

З міста А в місто Д можна проїхати за маршрутом А-Б-Д або за маршрутом А-В-Д. Оскільки за маршрутом А-Б-Д можна проїхати $4 \cdot 2 = 8$ дорогами, а за маршрутом А-В-Д можна проїхати $3 \cdot 5 = 15$ дорогами, то є 23 способи проїхати з міста А в місто Д.

2. Скільки є способів вишикувати в ряд групу із 7 учнів?

Розв’язування.

Першого учня можна вибрати 7 способами, після цього другого – 6 способами, тому перших двох учнів можна вибрати $7 \cdot 6$ способами. Оскільки після їхнього вибору третього учня можна вибрати 5 способами, тому першу трійку учнів можна вибрати $7 \cdot 6 \cdot 5$ способами. Продовживши такі міркування, отримуємо, що є $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ способів вишикувати в ряд групу із 7 учнів.

3. Скільки є способів вибрати команду з трьох учнів у класі, в якому навчається 25 чоловік?

Розв'язування.

Першого учня можна вибрати 25 способами, другого – 24 способами, третього – 23 способами. Отримуємо 25 · 24 · 23 варіантів вибору. Але при цьому кожна команда враховується кілька разів, бо одна і та ж трійка учнів *A, B, C* може бути вибрана і як *A, C, B*, і як *B, A, C* і т.д., всього 3! = 6 разів. Отже, кількість способів дорівнює $\frac{25\cdot24\cdot23}{6}=2300$.

4. Назвемо натуральне число "симпатичним", якщо в його запису зустрічаються тільки непарні цифри. Скільки існує 4-цифрових "симпатичних" чисел?

Розв'язування.

Зрозуміло, що одноцифрових "симпатичних" чисел рівно 5. До кожного одноцифрового "симпатичного" числа друга непарна цифра може бути дописана п'ятьма різними способами.

Таким чином, двоцифрових "симпатичних" чисел 5 · 5 = 25. Аналогічно, три цифрових "симпатичних" чисел 5 · 5 · 5 = 125, а чотирицифрових – 5 · 5 · 5 · 5 = 625.

5. Скількома способами можна зробити трикольоровий прапор з горизонтальними смугами однакової ширини, якщо є матерія шести різних кольорів?

Ровʼязування.

Колір для верхньої смуги прапору можна вибрати шістьма різними способами. Після цього для середньої смуги прапора залишається п'ять можливих кольорів, а потім для нижньої смуги прапора - чотири різні кольори. Таким чином, прапор можна зробити 6 · 5 · 4 = 120 способами.

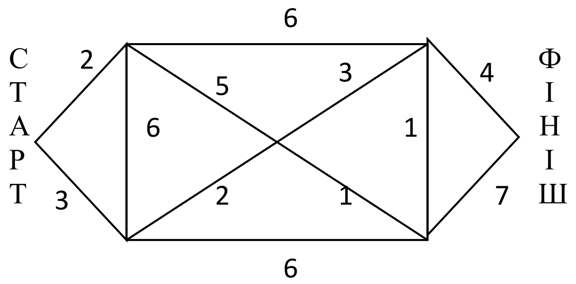

Рис. 1

6. На доріжках стадіону розставлені бар’єри (їх число на кожній доріжці вказане на рисунку). Кенгуру хоче пробігти від старту до фінішу, перестрибуючи через найменше число бар’єрів.

Скільки разів кенгуру доведеться перестрибнути через бар’єри?

Розв’язування.

Розіб’ємо весь стадіон на трикутники. В кожному трикутнику відкинемо «невигідну» сторону. Ту, в якій число бар’єрів більше (або рівне), ніж сума бар’єрів двох інших сторін (це доріжки з числом бар’єрів 6, 3, 6, 7).

Тепер легко перебрати всі варіанти

$2 + (6 + 4) = 12$, $2 + 5 + (1 + 1 + 4) = 13$,

$(3 + 2) + 5 + (6 + 4) = 20$, $(3 + 2) + (1 + 1 + 4) = 11$.

Вправи для самостійного розв’язування

1. З 10 авторитетних колишніх гравців футбольного клубу вибирають головного тренера, тренера та почесного президента клубу. Скількома способами це можна зробити?

Розв’язування.

Головного тренера можна вибрати 10 способами, після цього тренера – 9 способами, президента – 8 способами. Отримуємо $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ варіантів вибору.

2. В магазині «Все до чаю» продається 5 чашок, 3 блюдця та 4 чайні ложки. Скількома способами можна купити два предмети з різними назвами?

Розв’язування.

Можливі три різні випадки: перший – купується чашка з блюдцем, другий – чашка з ложкою, третій – блюдце та ложка. У кожному з цих випадків легко порахувати кількість можливих варіантів (в першому – 15, у другому - 20, у третьому - 12). Додаючи, отримуємо загальну кількість можливих варіантів: 47.

3. В країні 20 міст, кожні два з яких з’єднані авіалінією. Скільки авіаліній в цій країні?

Розв’язування.

Кожна авіалінія з’єднує два міста. За перше місто можна взяти будь-яке з 20 міст (місто A), за друге - будь-яке з 19, які залишилися (місто B). Перемноживши ці числа, дістаємо $20 \cdot 19 = 380$. Але при цьому підрахунку кожна авіалінія врахована двічі (перший раз, коли за перше місто було вибрано місто A, друге - місто B, а другий раз - навпаки). Таким чином, кількість авіаліній дорівнює $380:2 = 190$.

4. Скільки діагоналей в опуклому "n"-кутнику?

Розв’язування.

За перший кінець діагоналі можна взяти будь-яку з n вершин, а за другу – будь-яку з $n - 3$ вершин, відмінних від вибраної та двох сусідніх з нею. При цьому підрахунку кожна діагональ обліковується двічі.

Відповідь. $n(n - 3)/2$.

Тема № 6. Діофантові рівняння

Мета: формувати в учнів знання, уміння і навички розв'язувати діофантові рівняння.

Хід заняття

Теоретичні відомості

Рівняння виду $P(x, y, ...z) = 0$, де $P(x, y, ...z)$ – многочлен декількох змінних з цілими коефіцієнтами для яких потрібно знайти цілі розв'язки, називають діофантовими рівняннями. Названі вони ім'ям грецького математика Діофанта, який жив у ІІІ столітті н.е. Його книга «Арифметика» містила 189 задач з цілими числами, для кожної з яких наводилося один або декілька розв'язків.

Розв'язати діофантове рівняння означає:

- з'ясувати, чи має рівняння хоча б один ненульовий розв'язок в цілих числах;

- якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків;

- знайти всі цілі розв'язки рівняння.

Рівняння виду $ax + by = c$ де a, b, c – числа, а x, y – змінні, називають діофантовим рівнянням першого степеня з двома змінними. Для розв'язання рівняння застосовують наступні теореми.

Теорема1. Якщо a і b взаємно прості числа, то для будь якого цілого c, рівняння $ax + by = c$ має хоча б один розв'язок в цілих числах.

Теорема2. Якщо a і b мають спільний натуральний дільник $d \neq 1$, а ціле число c не ділиться на d, то рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків в цілих числах.

Теорема3. Якщо a і b взаємно прості числа, то рівняння $ax + by = c$ має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами

$x = x_0 + bk; y = y_0 - ak$, де $(x_0; y_0)$ – будь який цілий розв'язок даного рівняння, $k \in Z$

Теорема4. НСД (a, b) = d може бути записаний у вигляді $d = am + bn$, де m, n цілі числа.

Теорема5. Лінійне діофантове рівняння $ax + by + cz = d$ має розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли d ділиться на НСД *(a, b, c)*.

Розв'язки знаходять за формулами $x = u_0 - mt + b_1k; y = v_0 - nt - a_1k; z = t$, де $(u_0;\ v_0)$ – частинний розв'язок.

Розв'язування вправ

- Розкладання на множники.

1. Розв'язати в цілих числах рівняння:

а) $x^2 - y^2 = 2007$

Розв'язування.

Дане рівняння запишемо у вигляді $(x - y)(x + y) = 2007$. Існує 12 різних способів розкладання числа 2007 на множники:

$3 \cdot 669;\ 669 \cdot 3;\ 9 \cdot 223;\ 223 \cdot 9;\ 1 \cdot 2007;\ 2007 \cdot 1;\ -3 \cdot (-669);$
$-669 \cdot (-3);\ -9 \cdot (-223);\ -223 \cdot (-9);\ -1 \cdot (-2007);\ -2007 \cdot (-1).$

В даному випадку легко помітити, що якщо пара $(x; y)$ задовольняє даному рівнянню, то йому задовольняють і пари: $(-x; -y), (x; -y), (-x; y)$. Тому достатньо шукати розв'язки серед невід'ємних цілих чисел. Маємо

$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 669; \end{cases}$ або $\begin{cases} x - y = 9, \\ x + y = 223; \end{cases}$ або $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2007. \end{cases}$

Звідки маємо пари розв'язків: $(336;333); (116;107); (1004;1003)$. Враховуючи $(-x;-y)$ $(-x; y)$ $(x;-y)$, маємо розв'язки даного рівняння:
(336;333); (116;107); (1004;1003); (–336;–333); (–116;–107); (–1004;–1003);
(–336;333); (–116;107); (–1004;1003); (336;–333); (116;–107); (1004;–1003);

Відповідь.

(336;333); (116;107); (1004;1003); (–336;–333); (–116;–107); (–1004;–1003); (–336;333); (–116;107); (–1004;1003); (336;–333); (116;–107); (1004;–1003);

б) $x^2 - 3xy - 2 = x - 3y$

Розв’язування.

Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 - 3xy - x + 3y = 2$. Розкладемо на множники ліву частину рівняння.

$(x^2 - 3xy) - (x - 3y) = 2;$ $x(x - 3y) - (x - 3y) = 2;$ $(x - 3y)(x - 1) = 2$.

Можливі випадки:

$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ x - 1 = 1; \end{cases}$ або $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x - 1 = 2; \end{cases}$ або $\begin{cases} x - 3y = -2, \\ x - 1 = -1; \end{cases}$ або $\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x - 1 = -2. \end{cases}$

Маємо розв’язки систем: $(2;0);\ (3;\frac{2}{3});\ (0;\frac{2}{3});\ (-1;0)$, але пари $(3;\frac{2}{3})$ та $(0;\frac{2}{3})$ не задовольняють умові рівняння, так як $x, y \in Z$.

Отже розв’язки рівняння $(2;0);\ (-1;0)$.

Відповідь: $(2;0);\ (-1;0)$

- *Метод виділення цілої та дробової частини*

2. Розв’язати рівняння в цілих числах

а) $x + y = xy$

Розв’язування.

Розв’яжемо дане рівняння відносно x:

$xy - x = y;$ $x(y - 1) = y;$ $x = \frac{y}{y-1}$.

З дробу $\frac{y}{y-1}$ виділимо цілу й дробову частини.

Маємо $x = 1 + \frac{1}{y-1}$;

Так як $\frac{1}{y-1} \in Z$, то $y-1=\pm 1$, звідки знаходимо дві пари цілих розв'язків: (2; 2), (0; 0).

Відповідь: (2; 2), (0; 0).

б) $y^2 - 2xy - 2x = 6$

Розв'язування.

Запишемо рівняння у вигляді:

$$y^2 - 6 = 2xy + 2x;\ y^2 - 6 = 2x(y-1); y \neq 1 \Rightarrow 2x = \frac{y^2-6}{y-1}.$$

З дробу $\frac{y^2-6}{y-1}$ виділимо цілу й дробову частини.

Маємо $2x = (y+1) - \frac{5}{y-1}$

Так як $\frac{5}{y-1} \in Z$, то й $y-1=\pm 1$ або $y-1=\pm 5$.

Звідки знаходимо пари цілих розв'язків (–1; 2), (3; 0), (3; 6), (–1; –4).

Відповідь: (–1; 2), (3; 0), (3; 6), (–1; –4).

- *Метод розгляду остач*

Метод розгляду остач при діленні на деяке число як правило можна використовувати лише для доведення того, що дане рівняння не має розв'язків в цілих числах.

3. Розв'язати в цілих числах рівняння:

а) $x^2 - 7y = 10$

Розв'язування.

Запишемо рівняння у вигляді $x^2 + 4 = 7(y+2)$, отже $x^2 + 4$ повинно ділитися на 7, тобто x^2 при діленні на 7 повинно давати остачу 3. Однак x^2 при діленні на 7 може давати остачі 0, 1, 4, 2. Отже, рівняння не має розв'язків в цілих числах.

Відповідь: не має розв’язків в цілих числах

б) $x^2 - y^2 = 402$

Розв’язування.

Залишками від ділення квадратів цілих чисел на 4 можуть бути лише 0 або 1, отже, різниця квадратів $x^2 - y^2$ при діленні на 4 може давати задишка 0 або ± 1, з іншого боку залишок від ділення 402 на 4 дорівнює 2. Отже, дане рівняння не має розв’язків в цілих числах.

Відповідь: не має розв’язків в цілих числах.

Вправи для самостійного розв’язування

1. Довести, що рівняння $2x^2 - 5y^2 = 7$ не має розв’язків в цілих числах.

Розв’язування.

Знайдемо залишки від ділення на 4.

x^2 при діленні на 4 дає остачі 0 або 1, тоді $2x^2$ дає остачі 0 або 2.

y^2 при діленні на 4 дає остачі 0 або 1, тоді $5y^2$ дає остачі 0 або 1.

Різниця $2x^2 - 5y^2$ при діленні на 4 дає остачі 0,1,2, а 7 при діленні на 4 дає остачу 3. Тобто рівняння не має розв’язків в цілих числах.

Відповідь. не має розв’язків в цілих числах.

2. Розв’язати в цілих числах рівняння:

а) $13x + 21y = 55$

Розв’язування.

Так як НСД(13,21)=1, то дане рівняння має безліч розв’язків. Підбором встановлюємо частинний розв’язок $(x_0; y_0) = (1;2)$.

Тоді загальний розв’язок має вигляд $x = 1 + 21k; y = 2 - 13k; k \in Z$.

Відповідь. $x = 1 + 21k; y = 2 - 13k; k \in Z$.

б) $2y^2 - 2x^2 + 3xy + x - 2y - 2 = 0$

Розв’язування.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$(2y^2+4xy-2y)-(2x^2+xy-x)=2;\ 2y(y+2x-1)-x(y+2x-1)=2;$
$(2y-x)(y+2x-1)=2$

Можливі випадки:

$\begin{cases}2y-x=1\\ y+2x-1=2\end{cases}$ або $\begin{cases}2y-x=2\\ y+2x-1=1\end{cases}$ або $\begin{cases}2y-x=-1\\ y+2x-1=-2\end{cases}$ або $\begin{cases}2y-x=-2\\ y+2x-1=-1\end{cases}$

Маємо розв'язки систем: $(1;1);\ (\frac{2}{5};\frac{6}{5});\ (-\frac{1}{5};-\frac{3}{5});\ (\frac{2}{5};-\frac{4}{5})$, але задовольняє лише $(1;1)$.

Отже, пара $(1;1)$ - розв'язок рівняння.

Відповідь. $(1;1)$

в) $6x^2-xy-y^2+7x+4y-3=0$

Розв'язування.

Розв'яжемо дане рівняння, як квадратне відносно x.

Маємо $6x^2-(y-7)x-(y^2-4y+3)=0$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:

$D=(y-7)^2+24(y^2-4y+3)=y^2-14y+49+24y^2-96y+72=25y^2-110y+121=(5y-11)^2$

$x_1=\dfrac{y-7+5y-11}{12}=\dfrac{y-3}{2};\qquad x_2=\dfrac{y-7-5y+11}{12}=\dfrac{-y+1}{3}.$

Так як $x_1,x_2\in Z,$ то маємо $(t;2t+3);\ (t;1-3t)$, де $t\in Z$ - розв'язки даного рівняння.

Відповідь. $(t;2t+3);\ (t;1-3t)$ де $t\in Z$

Тема № 7. Правило крайнього

Мета: формувати вміння та навички розв'язувати задачі методом крайнього об'єкта.

Хід заняття

Теоретичні відомості

У багатьох задачах розглядаються скінченні сукупності елементів - набори чисел, множини точок, групи людей тощо. Розв'язування таких задач корисно починати із розгляду особливого крайнього об'єкта.

Таким об'єктом може бути, наприклад, найбільше число, найближча точка, граничний випадок. За крайній може бути прийнято також геометричний елемент, на якому певна величина (наприклад довжина сторони, величина кута) набуває найменшого або найбільшого значення.

Розв'язування вправ

1. У математичному турнірі беруть участь 7 учнів. Кожен учень знайомий принаймні з 4 іншими. Доведіть, що серед учасників турніру є хоча б одна трійка учнів, знайомих між собою.

Розв'язування.

Якщо кожен учень знайомий принаймні з 4 іншими, це означає, що він знайомий з 4 або 6 учнями, незнайомий із 2 : 7 = 1 + 4 + 2.

Виберемо мінімальну кількість учнів, які між собою знайомі. Це двоє учнів. Кожен із них не знатиме принаймні по 2 учні. Тоді найбільша кількість для обох друзів таких незнайомих буде 4: 7 – 2 – 4 = 1.

Є ще один учень, який знайомий з обома друзями разом. Отже, серед учасників турніру є хоча б одна трійка учнів, знайомих між собою.

2. Доведіть, що у многогранника є дві грані з однаковою кількістю сторін.

Розв'язування.

Розглянемо грань *G* із найбільшою кількістю сторін *n.* До кожної сторони грані *G* прилягає грань многогранника - всього їх *n.* Якщо в многограннику є ще одна грань із кількістю *n* сторін, то твердження задачі доведене. Якщо ж більше такої грані немає, то в граней, які прилягають до *G,* кількість сторін міститься між числами 3 та (*n* -1), усього (*n* - 3) можливості.

Оскільки число можливостей менше від *n,* то якась із можливостей повториться, тобто серед граней, що прилягають до грані *G,* знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

3. У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більш як двома дорогами.

Розв'язування.

Розглянемо місто А, з якого виходить найбільша кількість доріг, а саме точно *n* доріг. Нехай існує місто В, в яке не можна проїхати з А однією чи двома дорогами. Тоді з міста В обов'язково виходять дороги до міста А та до всіх міст, до яких виходить дорога з міста А - усього хоча б *n* + 1 дорога. Це суперечить тому, шо з міста А виходить найбільша кількість доріг. Отже, з міста А в будь-яке інше місто можна проїхати не більш як двома дорогами.

4. Дано прямокутну таблицю розміром $m \times n$, в усі клітинки якої вписано деякі числа. Дозволяється одночасно змінювати знак всіх чисел одного рядка або всіх чисел одного стовпчика. Доведіть, що, застосовуючи цю операцію кілька разів, ми завжди можемо отримати таблицю, в якій суми чисел кожного рядка і кожного стовпчика невід' ємні.

Розв'язування.

Розглянемо всі таблиці, які ми можемо отримати з даної. У кожній клітинці таких таблиць стоїть або таке число, що і в початковій, або йому протилежне. Усього в нас *mn* чисел, тому ми можемо дістати не більше ніж *2mn* різних таблиць - скінченну кількість. Оберемо серед них ту, що має максимальну суму елементів (якщо таких таблиць кілька, візьмемо одну з них). У цій таблиці суми чисел кожного рядка і кожного стовпчика невід'ємні.

Адже в протилежному випадку ми могли б змінити знак всіх чисел рядка або стовпчика з від'ємною сумою і отримати таблицю з більшою сумою елементів.

5. Доведіть, що хоча б одна з основ перпендикулярів, опущених із поданої внутрішньої точки опуклого многокутника на його сторони, лежить на самій стороні, а не на її продовженні.

Розв'язування.

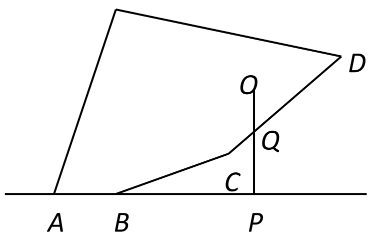

Рис. 2

Нехай O – дана точка. Серед усіх перпендикулярів, опущених із O на сторони, виберемо найкоротший (якщо їх кілька, візьмемо один із них). Нехай цей перпендикуляр опущений на сторону AB, а P – його основа.

Тоді P обов'язково лежить на стороні *AB*. Адже в протилежному випадку відрізок *OP* перетинає якусь іншу сторону *CD* у точці *Q, OQ*< OP. Тоді перпендикуляр, опущений на *CD*, буде не більший за *OQ* і коротший від OP, що суперечить вибору OP.

Вправи для самостійного розв'язування

1. На кожній планеті деякої системи знаходиться астроном, що спостерігає найближчу планету. Відстані між планетами попарно різні. Доведіть, що якщо кількість планет непарна, то якусь планету ніхто не спостерігає.

Розв'язування.

Візьмемо дві планети з найменшою відстанню між ними. Зрозуміло, що астрономи на цих планетах дивляться один на одного. Залишаються ще n - 2 планети та n - 2 астрономи. Якщо хтось із них дивиться на вже обрану планету, то на одну з n - 2 планет не вистачить астрономів. Якщо на дві обрані планети ніхто не дивиться, то знову можна провести ті ж самі міркування - із n - 2 планет обираємо дві найближчі і т. д. Оскільки кількість планет непарна, в кінці залишиться одна планета, яку ніхто не спостерігає.

2. Протягом дня в бібліотеці побувало 100 читачів. Кожен читач відвідав бібліотеку рівно один раз. Виявилось, що в цей день з будь-яких трьох читачів принаймні двоє зустрілись у бібліотеці. Довести, що працівник бібліотеки міг зробити повідомлення в такі два моменти часу, щоб усі 100 читачів його почули.

Розв'язування.

Нехай A – той читач, який першим вийшов з бібліотеки, B – той читач, який першим після виходу читача A зайшов до бібліотеки, C – довільний читач із читачів, які зайшли до бібліотеки після читача B. Оскільки читач A не зустрівся ні з B, ні з C, то читачі B і C обов'язково зустрілись, а тому читач B знаходився в бібліотеці доти, поки всі читачі не прийшли в бібліотеку. Розглянувши читачів A, C та довільного, відмінного від C, читача D, що прийшов у бібліотеку після В, отримуємо з умови задачі, що читачі C і D обов'язково зустрілись. Тому жоден з читачів, які прийшли в бібліотеку після читача B, не вийшли з бібліотеки раніше за нього.

Отже, потрібні моменти часу такі: перший момент – безпосередньо перед виходом читача A, другий момент – безпосередньо перед виходом читача B.

3. На площині дано скінченну кількість точок, причому довільна пряма, яка проходить через дві з даних точок, містить ще хоча б одну з даних точок. Довести, що всі дані точки лежать на одній прямій.

Вказівка. Проведіть через кожну пару даних точок пряму та розгляньте деяку точку A і пряму BC (A, B, C – дані точки), такі, що $A \notin BC$ та відстань від A до BC є найменшою з усіх відстаней.

Тема № 8. Принцип Діріхле

Мета: формувати знання, уміння та навички розв’язувати задачі використовуючи принцип Діріхле.

Хід заняття

Теоретичні відомості

Традиційно принцип Діріхле пояснюють на прикладі «кроликів і кліток»: якщо N кроликів сидять у n клітках і $N > n$, то хоча б в одній клітці сидить більше ніж один кролик. Часто застосовують узагальнення принципу Діріхле: якщо кроликів $N > nk$, то хоча б в одній клітці сидить більше ніж k кроликів. З допомогою цього принципу німецький математик Діріхле (1805-1859) досяг значних результатів у деяких розділах теорії чисел. Один з теоретико-числових результатів Діріхле ми ще сформулюємо, а поки що розглянемо задачі, які можна розв’язати, застосовуючи принцип Діріхле.

Наведемо ще декілька схожих на «принцип Діріхле» тверджень, які використовуються в геометрії та аналітичних задачах:

- якщо сума площ декількох фігур менша за S, то ними не можна покрити фігуру, площа якої дорівнює S;

- якщо на відрізку довжиною 1 розташовано декілька відрізків з сумою довжин l, то знайдеться точка цього відрізка, яка буде накрита не більше ніж $[l]$ цими відрізками;

- якщо середнє арифметичне декількох чисел більше a, то хоча б одне з цих чисел більше a.

- якщо з розбиттям множини, яка складається з $n + 1$ елементів на n класів в одному з класів буде принаймні два елементи

- якщо $n+1$ предметів розкладено в n ящиків, то знайдеться два предмети, які лежать в одному й тому самому ящику.

Розв'язування задач

1. Яку максимальну кількість натуральних чисел від 1 до 50 можна вибрати так, щоб серед них не було двох чисел, одне з яких вдвічі більше за друге?

Розв'язування.

Розіб'ємо всі числа від 1 до 50 на 33 групи таким чином: {1; 2}, {3; 6}, {5; 10},..., {25; 50}, {27}, {29},..., {49} (всього 25 груп), {4; 8}, {12; 24}, {20; 40}, {28}, {36}, {44} (6 груп), {16; 32}, {48}. У нас рівно 33 групи, причому з кожної групи можна взяти не більше одного елемента, тому всього буде не більше 33-х чисел. Взявши по першому елементу із кожної групи, ми одержимо шуканий набір, бо в розкладі кожного з цих елементів на прості множники двійка входить у парному степені (частка двох таких чисел або непарна, або ділиться на 4 і не може бути рівною).

Відповідь: 33.

2. Чи можна покрити квадрат зі стороною 1,5 трьома квадратами зі стороною, що дорівнює 1?

Розв'язування.

Дві вершини більшого квадрата не можуть бути покритими одним маленьким, бо $\sqrt{2} < 1.5$. Тому, для покриття більшого квадрата потрібно не менше 4-х маленьких квадратів (по числу вершин великого квадрата).

Відповідь: Ні, не можна.

3. Прямокутник розміром 20×30 розбито на клітинки 1×1. Чи можна провести пряму, яка перетинає (по внутрішніх точках) 50 клітинок прямокутника?

Розв'язування.

При переході із клітинки в сусідню пряма перетинає або вертикальну, або горизонтальну лінію сітки. Жодну з цих ліній вона не може перетнути двічі.

Всередині прямокутника розташовано 19 + 29 = 48 ліній сітки. Отже, пряма не може перетнути більше 49 клітинок.

Відповідь: Ні, не може.

4. Дано 70 різних натуральних чисел, кожне з яких не перевищує 200. Доведіть, що деякі два з них відрізняються на 4, на 5 або на 9.

Розв'язування.

Розглянемо нові 70 чисел, які дістаємо з вихідних додаванням до кожного з них 4. Якщо початкова і одержана множини перетинаються, то у початковій множині знайдеться пара чисел з різницею 4. Припустимо, що ці множини не перетинаються. Розглянемо ще 70 чисел, які дістаємо з другого набору чисел, збільшенням кожного його елемента на 5. Якщо ця третя множина чисел перетинається або з першою, або з другою множинами, то знайдеться два числа, які відрізняються одне від одного на 5 або на 9. Якщо ж цього не відбудеться, то є 210 різних натуральних чисел, кожне з яких не перевищує 200 + 4 + 5 = 209, що неможливо.

5. Після проведення шахового турніру в одне коло з'ясувалось, що всі партії були результативними і всі гравці знали імена тих гравців, які виграли у них, а також тих, хто виграв у їх переможців. Доведіть, що знайдеться шахіст, який знає імена всіх учасників турніру.

Розв'язування.

Нехай гравець А набрав менше всіх очок (точніше, не більше, ніж кожен інший). Цей гравець знає імена всіх, хто виграв у нього. Припустимо, що В програв А. Тоді В виграв у когось, хто виграв у А (інакше у В було б менше очок, ніж у А, а це суперечить вибору А). Тому, А знає й ім'я гравця В. Отже, А – шуканий учасник турніру.

6. Березовий гай має форму круга радіусом 215 м. Відстань між двома деревами в цьому гаю не менша 10 м. Доведіть, що в гаю менше 1990 дерев.

Розв'язування.

Нехай в гаю n беріз. Опишемо навколо кожного дерева круг радіусом 5 м. За умовою задачі ці круги не перетинаються і розташовані у крузі радіусом 215 + 5 = 220 м. Отже, площа «збільшеного березового гаю» не менша сумарної площі маленьких кругів. Розв'язавши нерівність $\pi \cdot 220^2 \geq \pi \cdot 5^2 \cdot n$, дістаємо $n \leq 44^2 = 1936$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Серед n+1 чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на п. Довести це.

Доведення.

Поділимо кожне з даних чисел на n. Всього може бути n різних остач від ділення: $0,1,2,\ldots,n-1$. А чисел ми маємо n+1. Тому принаймні два числа при діленні на n дають однакову остачу (принцип Діріхле). Ясно, що різниця цих чисел ділиться на n.

2. Є n натуральних чисел, які записані в певному порядку. Довести, що серед них можна так вибрати кілька чисел, які стоять поруч, щоб їх сума ділилась на n.

Розв'язування.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – дані числа. Розглянемо n чисел a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Якщо одне з цих чисел ділиться на n, то твердження задачі правильне. Припустимо, що жодне з розглянутих чисел не ділиться на n. Тоді може бути всього n– 1 різних остач від ділення на n: $1, 2, \ldots, n - 1$. Тому принаймні два числа при діленні на n дають однакову остачу. Різниця цих чисел ділиться на n. Але будь-яка різниця є сумою кількох чисел, які стоять поруч. Задачу розв'язано.

3. Довести, що серед чисел, які записуються лише одиницями, є число, яке ділиться на 1987.

Розв'язування.

Розглянемо 1988 чисел виду 1, 11, 111, ..., 111...11 (останнє складатиметься з 1988 одиниць) і розмістимо їх у 1987 «кліток» з номерами 0, 1, 2, ..., 1986 – кожне число потрапляє у клітку з номером, який дорівнює остачі від ділення його на 1987. Тоді знайдуться два числа, які мають однакові остачі від ділення на 1987. Нехай це числа 11...11 (m одиниць) і 11...11 (n одиниць), причому $m > n$. Їх різниця, яка ділиться на 1987, дорівнює 11..1100...00 ($m - n$ одиниць і n нулів). Відкинемо всі нулі, оскільки вони не впливають на остачу від ділення числа на 1987, і отримаємо число, що складається лише з одних, одиниць і яке ділиться на 1987.

4. Сто людей сидять за круглим столом, причому більше половини з них – чоловіки. Довести, що якісь два чоловіки сидять діаметрально один до одного.

Розв'язування.

Розіб'ємо всіх людей на 50 пар так, щоб у кожній парі було двоє людей, які сидять діаметрально один до одного. Оскільки чоловіків більше ніж 50, то в одній з цих пар обов'язково будуть тільки чоловіки.

Тема № 9. Інваріанти та напівінваріанти

Мета: формувати вміння та навички розв'язувати вправи з величинами, що не змінюються в результаті деяких операцій.

Хід заняття

Теоретичні відомості

Інваріант – це величина, яка не змінюється в результаті деякої операції. Із поняттям інваріанта учні знайомі з курсу фізики - закон збереження енергії, імпульсу. Визначивши інваріант деякого процесу, у багатьох випадках можна з'ясувати питання про можливість певного результату цього процесу. При цьому рівність інваріанта на початку та наприкінці процесу ще не забезпечує такої можливості. Тому, як правило, в таких задачах відповідь на це запитання негативна. У ролі інваріанта може використовуватися парність, залишок від ділення на деяке число та інше.

Напівінваріант - величина, яка в процесі перетворень змінюється монотонно, тобто збільшується чи зменшується, і при цьому набуває лише скінченної кількості різних значень.

Розв'язування вправ

1. В одній клітинці квадратної таблиці 8 × 8 стоїть знак мінус, а в інших стоять плюси. Дозволяється за один хід у якомусь із квадратів 2 × 2 змінювати знаки на протилежні. Доведіть, що за допомогою таких ходів не можна дістати таблицю з одних плюсів.

Розв'язування.

Під час заміни знаків у квадраті 2 × 2 на протилежні кількість мінусів може змінитись лише на 2 або на 4, тобто в усій таблиці кількість мінусів зберігає свою парність, а тому змінитись з 1 на 0 не може.

2. На кожному з 44 дерев, що розміщені по колу, сидить один горобець. Час від часу якісь два горобці перелітають на сусіднє дерево - один за ходом

годинникової стрілки, а другий - проти. Чи можуть усі горобці зібратись на одному дереві?

Розв'язування.

Занумеруємо дерева по колу з 1 по 44. Сума номерів дерев, на яких сидять горобці, за їх перелітання або не змінюється, або змінюється на 44, тобто остача від ділення цієї суми на 44 не змінюється. Спочатку ця остача була 22, а якщо всі горобці сядуть на одне дерево, ия остача дорівнюватиме нулю. Отже, горобці не можуть зібратись на одному дереві.

3. Кінь вийшов з поля al і через декілька ходів повернувся на нього. Доведіть, що він зробив парну кількість ходів.

Розв'язування.

Із кожним ходом коня змінюється колір поля, на якому стоїть кінь, тобто має місце чергування кольорів - білого і чорного. Після першого ходу кінь стоятиме на білому полі, а після останнього - на чорному полі *01.* Отже, кінь має зробити парну кількість ходів.

4. На площині розміщено 11 зубчатих коліс, з'єднаних у вигляді замкнутого ланцюжка. Чи зможуть вони всі обертатись одночасно?

Розв'язування.

Занумеруємо всі колеса в порядку обходу їх уздовж ланцюжка числами від 1 до 11. Нехай перше колесо обертається за годинниковою стрілкою. Тоді всі колеса з непарними номерами будуть обертатися за годинниковою стрілкою, а всі колеса з парними номерами - проти годинникової стрілки. Зауважимо, що будь-які два сусідні колеса повинні обертатися в протилежних напрямках. Але перше й одинадцяте колеса - сусідні, обертаються в одному напрямку. Протиріччя показує, що всі зубчаті колесі обертатись одночасно не можуть.

5. Чи може пряма, що містить вершини замкненої 11-ланкової ламаної, перетинати всі ланки?

Розв’язування.

Будемо обходити контур ламаної, переходячи з кожної вершини в наступну. При цьому кожного разу, коли будемо перетинати пряму, ми попадатимемо в іншу півплощину відносно цієї прямої. Отже, має місце чергування. Тому, щоб обійти контур ламаної і повернутися в початкову вершину, треба перетнути парну кількість ланок, але їх кількість непарна.

Тому відповідь на питання задачі негативна.

6. Опуклий 101-кутник симетричний відносно прямої. Доведіть, що вісь симетрії проходить через одну з його вершин.

Розв’язування.

Якщо вісь симетрії не проходить через вершину, то дані 101 точка повинні розбиватися на пари симетричних, що неможливо.

7. Чи можливо опуклий 13-кутник розрізати на паралелограми?

Розв’язування.

Якщо опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми, то його сторони обов’язково розбиваються на пари паралельних. Але 13 сторін не можна розбити на пари. Тому таке розрізання неможливе.

Вправи для самостійного розв’язування

1. Автобусні квитки мають номери від 000000 до 999999. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі решти трьох. Доведіть, що загальна кількість щасливих квитків є парною.

Розв’язування.

Якщо у квитка $\overline{abcdeh}$ перші три цифри відповідно співпадають із трьома останніми, тобто $\overline{abc} = \overline{deh},$ то таких щасливих квитків стільки ж, скільки й квитків $\overline{abc}$, тобто парне число 1000. Якщо ж $\overline{abc} \neq \overline{deh},$ то поряд із щасливим квитком $\overline{abcdeh}$ буде й квиток $\overline{dehabc}$. Отже, такі щасливі квитки можна розбити на пари. А тому їх загальна кількість теж є парною.

2. По колу розставлені n чисел. Якщо підряд стоять числа а, b, с, d і при цьому $(a - d)(b - c) > 0$, то числа b і c дозволяється міняти місцями. Доведіть, що після декількох таких дій ми не зможемо зробити жодної перестановки.

Розв’язування.

Нерівність $(a - d)\ (b - c) > 0$ еквівалентна нерівності $ab + bc + cd > > ac + cb + bd$.

Розглянемо суму всіх попарних добутків сусідніх чисел. Вона, як ми бачимо з останньої нерівності, під час виконання нашої дії щоразу зменщується. Ця сума може набувати лише скінченної кількості значень, оскільки існує лише скінченна кількість розстановок даних чисел по колу. Ми зможемо виконати нашу операцію не більше разів, ніж існує розстановок із сумою меншою, ніж у початковій розстановці.

3. У кожного члена парламенту не більше ніж три вороги. Доведіть, що парламент можна розбити на дві палати так, щоб у кожного депутата в одній із ним палаті було не більше одного ворога.

Розв’язування.

Розіб’ємо парламент на дві палати довільним чином. Якщо є депутат, який має у своїй палаті не менше ніж два вороги, переведемо його в іншу палату. Якщо ще є такий депутат, і його переведемо, і так далі. Доведемо, що цей процес скінченний.

Позначимо умовно депутатів точками на площині і з’єднаємо відрізками всі пари ворогів, які належать одній палаті. За такого переведення не менше, ніж два відрізки витираються і не більше ніж один з’являється. А тому кількість їх зменшується. А із самого початку кількість відрізків була скінченною.

Тема № 10. Графи. Відображення

Мета: формувати уміння та навички учнів використовувати графи та відображення при розв'язуванні задач

Хід заняття

Теоретичні відомості

Зображаючи елемент деякої множини точками і з'єднавши деякі пари точок відрізками, одержуємо наочне уявлення дуже популярного об'єкта дискретної математики, що називається графом; точки (елементи множини) називаються вершинами, відрізки (або дуги) – ребрами графа. Граф, з будь-якої вершини якого можна пройти в будь-яку іншу шляхом, який складається з ребер, називається зв'язним. Зв'язний граф без циклів – дерево – має вершин на одну більше ніж ребер. Якщо всі цикли графа мають парну кількість ребер, то його вершини можна пофарбувати у два кольори так, що вершини одного кольору не з'єднані жодним ребром; такий граф називають дводольним. Якщо на ребрах графа поставити стрілки (задати напрям), то одержимо орієнтований граф (орграф). Будь-яке відображення f скінченної множини A в себе задає орграф, із кожної вершини $a \in A$ якого виходить одна стрілка – у вершину $f(a)$. (При цьому можливі петлі – стрілки, які будуть йти із a в a; вони відповідають нерухомим точкам відображення f.) Якщо f взаємно однозначне відображення, то орграф розпадається на цикли (і петлі).

Два графи називають ізоморфними, якщо у них однакова кількість вершин і вершини кожного графа можна занумерувати числами від 1 до n так, щоб вершини першого графу були сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні вершини другого графа також сполучені ребром.

Граф називається повним, якщо його кожні дві вершини сполучені одним і тільки одним ребром. Степенем вершини називається кількість ребер графа, яким належить ця вершина. Вершина називається парною, якщо її степінь парне число. Граф називається парним, якщо всі його вершини парні.

Теорема: Кількість непарних вершин будь-якого графа – парне число.

Розв'язування задач

1. У трьох вершинах правильного п'ятикутника розмістили по фішці. Дозволяється пересувати їх по діагоналі в будь-яку вільну вершину. Чи можна таким способом досягти того, щоб одна з фішок повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями?

Розв'язування.

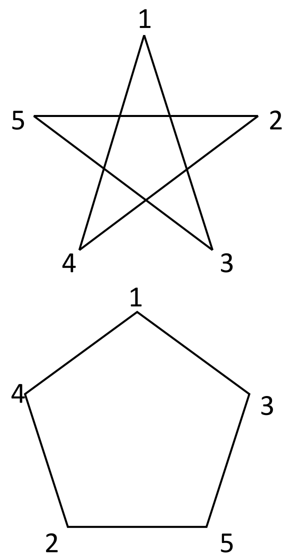

Рис. 3

Послідовно занумеруємо вершини п'ятикутної зірки (отриманої в результаті можливих переміщень) числами 1, 2, 3, 4, 5. Бачимо, що з вершини 1 можна за один хід попасти або у вершину 3, або у вершину 4; з вершини 2 – або у вершину 4, або у вершину 5; з вершини 3 – або у вершину 5, або у вершину 1; з вершини 4 – або у вершину 1, або у вершину 2; з вершини 5 – або у вершину 2, або у вершину 3.

Ці переміщення "стають більш закономірними", якщо вершини такої п'ятикутної зірки "розвернути" на п'ятикутнику у такому порядку: 1, 3, 5, 2, 4. Тоді переміщенням по сторонах зірки відповідають переміщення фішок по п'ятикутнику в сусідню вершину (якщо вона не зайнята). Очевидно, що за допомогою таких переміщень по п'ятикутнику не можна змінити порядок розміщення фішок, а, отже, не можна добитись, щоб одна з фішок на зірці повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями.

2. Чи можливо намалювати на площині 25 відрізків так, щоб кожен з них перетинав рівно 5 інших відрізків?

Розв'язування.

Поставимо у взаємно однозначну відповідність кожному відрізку деяку точку на площині. Довільну пару таких точок з'єднаємо ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні їм відрізки перетинаються. В отриманого графа кількість непарних вершин – парне число, а тому відповідь: неможливо.

3. Довести, що для плоского зв’язного графа справедлива нерівність $\frac{3}{2}\Gamma \leq \text{Р} \leq 3\text{В} - 6$.

Розв’язування.

Кожна “грань” обмежена хоча б трьома ребрами, тому очевидна нерівність $3\Gamma \leq 2\text{Р}$. Звідси отримуємо

$$2 = \text{В} - \text{Р} + \Gamma \leq \text{В} - \text{Р} + \frac{2}{3}\text{Р} = \text{В} - \frac{\text{Р}}{3},$$

Звідки $\text{Р} \leq 3\text{В} - 6$.

4. Розбита на клітинки площина пофарбована десятьма фарбами так, що сусідні (тобто ті, які мають спільну сторону) клітинки мають різний колір, причому використано всі 10 фарб. Назвемо сусідніми дві фарби, якими пофарбовані дві сусідні клітинки. Яка мінімальна можлива кількість пар сусідніх фарб?

Розв’язування.

Кожному розфарбуванню площини поставимо у відповідність граф таким способом. Зобразимо фарби точками з номерами 1, 2, 3,…, 10. Якщо фарби сусідні, то з’єднуємо відповідні точки ребром. Тоді кожній парі сусідніх фарб відповідатиме ребро графа. Очевидно, що з кожної вершини графа виходить хоча б одне ребро. Отриманий граф має бути зв’язним, бо інакше площина розіб’ється на кілька відокремлених одна від одної частин, що неможливо. Найменша кількість ребер у зв’язних графах з однаковою кількістю вершин – у дерева. Отже, кількість пар сусідніх фарб не може бути меншою за 9. Залишається вказати таке розфарбування площини, при якому кількість пар сусідніх фарб рівна точно 9. Це можна зробити, наприклад, так – розфарбувати кожну діагональ однією фарбою, причому фарби чергувати в такому порядку: …, 2, 1, 2, 3, …, 9, 10, 9, 8, …, 2, 1, 2, 3, ….

5. В тридев'ятому королівстві є $(5n + 2)$ міст. З кожного міста виходять точно $2n$ доріг з одностороннім рухом та в кожне місто входять точно $2n$ таких доріг (при цьому, якщо з міста A є дорога в місто B, то з міста B немає дороги в місто A). Довести, що з довільного міста в будь-яке інше місто можна проїхати не більше як трьома дорогами.

Розв'язування.

Позначимо через A та B два таких міста, що з A немає прямої дороги в B. Нехай $C_1, C_{2,} \dots, C_{2n}$ – міста, в які ведуть дороги з міста A. Якщо з якогось з цих міст C_k є пряма дорога в B, то маємо маршрут $A \to C_k \to B$, який складається з двох доріг.

У протилежному випадку розглянемо міста $D_1, D_2, \dots, D_{2n}$, з яких дороги ведуть у місто B, та всі інші міста – їх залишилось n, позначимо їх $E_1, E_2, \dots, E_n$. Оскільки з жодного із міст $C_1, C_{2,} \dots, C_{2n}$ немає прямої дороги у місто B, то дороги з цих міст ведуть у міста $C_1, C_{2,} \dots, C_{2n}$ чи $E_1, E_2, \dots, E_n$. Кількість доріг між містами $C_1, C_{2,} \dots, C_{2n}$ не перевищує $n(2n - 1)$, тому від цих міст до міст $E_1, E_2, \dots, E_n$ та $D_1, D_2, \dots, D_{2n}$ виходять не менше ніж $(2n)^2 - n(2n - 1) = 2n^2 + n$ доріг. Оскільки до міст $E_1, E_2, \dots, E_n$ входять $2n^2$ доріг, то з деякого міста C_k виходить дорога до деякого міста D_m. Отже, маємо маршрут $A \to C_k \to D_m \to B$, який складається з трьох доріг.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У деякій країні є 9 міст з назвами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому й тільки тому випадку, коли двозначне число, складене із цифр - назв цих міст, ділиться на 3. Чи можна з міста 1 дістатися до міста 9?

Розв'язування.

Накреслимо схему: кожне місто позначимо точкою, а авіалінії - лініями, що з'єднують відповідні точки.

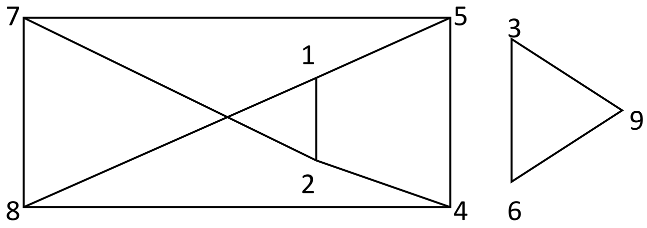

Рис. 4

Тепер стає очевидним, що з міста 1 до міста 9 дістатися не можна.

2. Певний архіпелаг складається з 2003 островів. Із кожного острова виходить 1, 3 або 5 пароплавних ліній. Чи справді є пароплавна лінія, що з'єднує один із островів із зовнішнім світом?

Розв'язування.

Якщо це не так, то можна накреслити граф із 2003 вершинами, кожна з яких має непарний степінь, що неможливо.

3. Чи можна в державі, в якій з кожного міста виходить 3 дороги, нарахувати рівно 100 доріг?

Розв'язування.

Розглянемо граф із k вершинами, в якому з кожної вершини виходить 3 ребра. Тоді загальна кількістьсть ребер дорівнює $\frac{3k}{2}$. Але для кожного $k \in N$ $\frac{3k}{2} \neq 100$. Отже, відповідь на питання задачі негативна.

Тема № 11. Теорема Піфагора та її доведення. Використання теореми Піфагора в прикладних задачах

Мета: ознайомити учнів з доведенням оберненої теореми Піфагора, узагальненням теореми Піфагора, формувати вміння учнів розв'язувати задачі, в яких використовується теорема Піфагора.

Хід заняття

Теоретичні відомості

Теорема Піфагора: У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Обернена теорема: Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то цей трикутник прямокутний

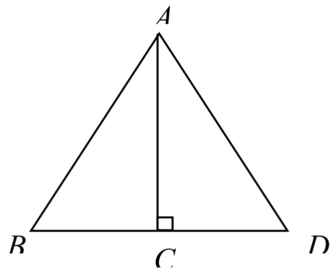

Рис. 5

Дано: трикутник ABC, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Довести: $\angle ACB = 90°$.

Доведення. Побудуємо $CD \perp AC$ у точці C і на ньому відкладемо відрізок $CD = BC$. Сполучивши A і D, дістанемо прямокутний трикутник ACD. У трикутнику ACD $AD^2 = AC^2 + CD^2$ за теоремою Піфагора. За умовою $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Порівнюючи AD^2 і AB^2 і враховуючи, що $CD = BC$, маємо $AD = AB$. Отже, трикутники ABC і ADC рівні, а тому $\angle ACB = \angle ACD = 90°$. Теорему доведено.

Узагальнення теореми Піфагора. Теорема Піфагора має місце, якщо замість квадратів на сторонах прямокутного трикутника побудувати довільні подібні між собою фігури. Позначимо площі подібних фігур, побудованих на катетах, S_a і S_b, а на гіпотенузі – S_c. Доведемо, що $S_a + S_b = S_c$.

Доведення.

З того, що площі подібних фігур відносяться, як квадрати відповідних сторін, маємо: $\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2}$, $S_a \cdot c^2 = a^2 \cdot S_c$; $\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2}$, $S_b \cdot c^2 = b^2 \cdot S_c$.

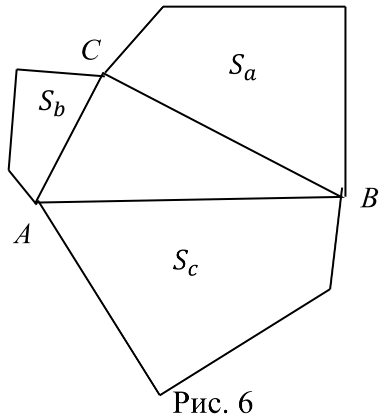

Рис. 6

Якщо додати виведені рівності, знайдемо: $c^2(S_a + S_b) = (a^2 + b^2) \cdot S_c$.

Отже, площа фігури, побудованої на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ подібних їй фігур, побудованих на катетах цього трикутника.

У справедливості цього твердження можна переконатися, виходячи з таких міркувань. Якщо в прямокутному трикутнику *ABC* провести висоту *CD* з вершини прямого кута *C* на гіпотенузу *AB*, то матимемо прямокутні, подібні між собою, трикутники: *ABC, BCD, ADC*, побудовані на гіпотенузі *AB* і катетах *BC* і *AC* відповідно. Площа трикутника *ABC* дорівнює сумі площ трикутників *BCD* і *ADC.*

Теорема Піфагора поширюється і на просторові фігури.

Розв'язування задач

1. Доведіть, що в будь-якому трикутнику квадрат сторони, яка лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку однієї з цих сторін на проекцію другої сторони на першу.

Доведення.

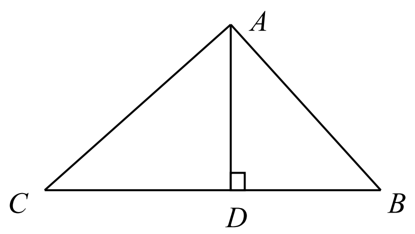

Рис. 7

Проведемо висоту *AD* з вершини *A*. застосувавши теорему Піфагора до прямокутних трикутників *ADC* і *ADB*, дістанемо: $AB^2 = BD^2 + AD^2$,

$AC^2 = CD^2 + AD^2$.

Віднявши ці дві рівності почленно і врахувавши, що $BD = BC - CD$, матимемо: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$.

2. Доведіть, що в будь-якому паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів сторін.

Доведення.

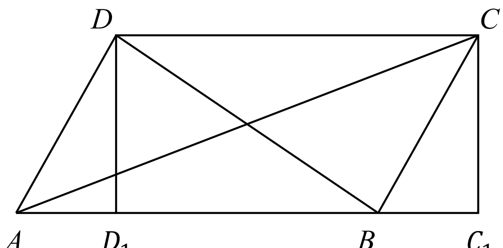

Рис. 8

Відомо, що в паралелограмі протилежні кут рівні, кожна діагональ розбиває його на два рівні трикутники, сума внутрішніх кутів, які прилягають до однієї сторони, дорівнюють 180°.

Тому, якщо сторона *AC* трикутника *ABC* лежить проти тупого кута, то сторона *BD* трикутника *ABD* лежить проти гострого кута. З трикутників *ABC* і *ABD* маємо:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC_1$,

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD_1$.

Додавши ці дві рівності почленно і врахувавши, що $BC_1 = AD_1$, $AB = DC$, дістанемо: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

3. Яку найбільшу висоту повинна мати телевізійна вишка, щоб передачу можна було приймати в радіусі 200 км (радіус Землі рівний 6380 км)?

Розв'язування.

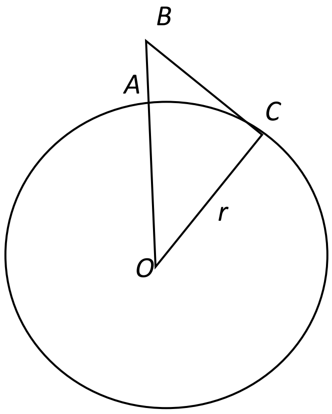

Рис. 9

Нехай *AB*= *x*, *BC*=*R*=500 *км*, *OC*= *r* =6380 км.

OB=*OA*+*AB*

OB=*r* + *x*.

Використовуючи теорему Піфагора, отримаємо

$x = -r + \sqrt{r^2 + R^2} = 2{,}3$ км.

Відповідь: 2,3 км

4. Від п’ятнадцятиметрового стовпа потрібно протягнути кабель до приміщення будинку на висоті 5 метрів. Стовп знаходиться на відстані 6 м від будинку. Чи вистачить кабелю довжиною 10 м?

Розв’язування.

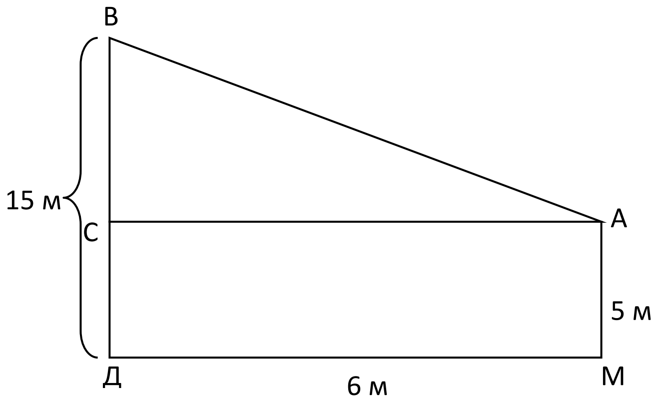

Рис. 10

$BC = 15 - 5,\ BC = 10$ (м).

За теоремою Піфагора із трикутника ABC знайдемо AB.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 6^2 + 10^2$

$AB^2 = 36 + 100$

$AB^2 = 136$

$AB = 11{,}7$

Відповідь: ні.

5. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, радіус вписаного кола дорівнює 5 см. Знайти гіпотенузу і другий катет.

Розв’язування.

Нехай ABC – даний прямокутний трикутник ($\angle ACB = 90°$), у який вписано коло радіусом OK = 5 см; BC = 12 см.

Знайдемо довжини гіпотенузи AB і катета CA. Оскільки $OK = ON = OD =$ $= r =$ 5 см, а за умовою, то $OKCN$ – квадрат зі стороною 5 см. За властивістю дотичної $BN = BD$, $AD = AK$, $CK = CN$ (як відрізки дотичних, проведених з точок B, A, C до одного кола). Оскільки $NC = 5$ см, то $BN = BC – NC = \quad =$ $12 – 5 = 7$ (см).

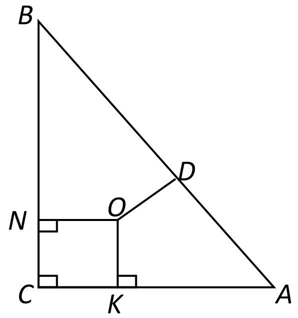

Рис. 11

Нехай $AK = x$ см, тоді

$AC = AK + KC = 5 + x$ (см),

$AB = AD + DB = x + 7$ (см).

За теоремою Піфагора для трикутника ABC маємо:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$(5 + x)^2 + 12^2 = (x + 7)^2$,

$25 + 10x + x^2 + 144 = x^2 + 14x + 49$,

$4x = 120, \quad x = 30$.

Відповідь. 37 см, 35 см.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Доведіть, що в довільному трикутнику квадрат сторони, яка лежить проти тупого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, доданій до подвоєного добутку однієї з цих сторін на проекцію другої сторони на першу.

Доведення.

Проведемо висоту AD з вершини A. За теоремою Піфагора з трикутника ADB: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, з трикутника ADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

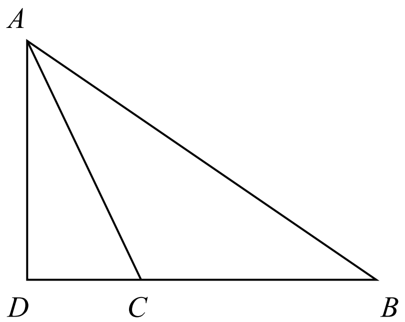

Рис. 12

Проведемо висоту AD з вершини A. За теоремою Піфагора з трикутника ADB: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, з трикутника ADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

Віднімаючи ці рівності почленно, дістанемо:

$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$.

Врахувавши, що $BD = BC + DC$, матимемо $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC$.

2. Визначте діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами *a, b, c*.

Розв’язування.

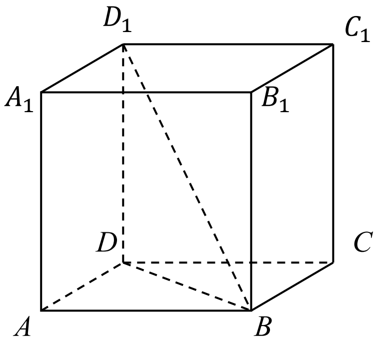

Рис. 13

Нехай $BD_1 = d$. З прямокутного трикутника ABD знаходимо $BD^2 = AB^2 + +AD^2 = a^2 + b^2$, а з трикутника BDD_1 визначаємо $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2$.

Отже, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

3. У прямокутному трикутнику ABC, де AC та BC – катети, $CD \perp AB,\ DE \parallel AC$ CE = 3,6 дм, BD = 8 дм. Знайти катет AC та гіпотенузу AB.

Розв’язування.

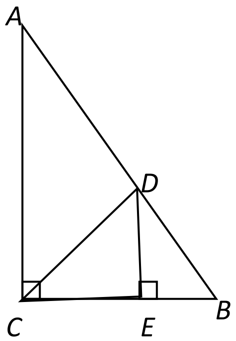

Рис. 14

Нехай у трикутнику BED ($\angle E = 90°$) $BE = x$ дм. За теоремою Піфагора $DB^2 = DE^2 + BE^2$,

$DE^2 = 8^2 - x^2$.

$DE^2 = BE \cdot EC,\ \ DE^2 = 3{,}6x$.

$8^2 - x^2 = 3{,}6\,x, x^2 + 3{,}6x - 64 = 0,$

$x_1 = 6{,}4;\quad x_2 = -10$.

Корінь $x_2 = -10$ не задовольняє умову задачі. Тому BE = 6,4 дм. Оскільки $BC = BE + EC$, то BC = 3,6 + 6,4 = 10 (дм).

З трикутника CDB ($\angle CDB = 90°$):

$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$ дм.

Нехай $AD = y$ дм. Тоді в трикутнику ABC:

$CD^2 = AD \cdot BD, \quad 36 = y \cdot 8, \qquad y = 4{,}5.$

$AB = AD + DB = 8 + 4{,}5 = 12{,}5$ (дм);

$AC^2 = AB^2 - BC^2,$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5$ (дм).

Відповідь. AC = 7,5 дм; AB = 12,5 дм.

ВИСНОВКИ

Дослідження теми «Методика підготовки учнів до розв'язування олімпіадних задач у 8 класі» дало змогу переконатися, що традиційні методи навчання учнів на уроках не є оптимальними для сильних учнів, їх можливості у розв'язуванні задач підвищеного рівня складності є набагато вищими.

Талант і творча обдарованість особистості стають сьогодні запорукою інтенсивного економічного розвитку країни і сприятливим фактором національного престижу. Як з'ясувалось, інтелектуала з високим рівнем розвитку творчих здібностей не можна замінити ні кібернетичною машиною, ні колективом індивідуумів із середніми інтелектуально-творчими здібностями. Тому проблема творчості в наші дні стала настільки актуальною, що вона по праву вважається проблемою століття.

У ході проведення дослідження було отримано такі результати:

1. Проаналізувавши наявну науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрито поняття «задача» та її місце у навчанні математики;

2. На основі аналізу наявної літератури та завдань олімпіад різних рівнів систематизовано олімпіадні математичні задачі в 8 класах відповідно до їх видів;

3. Відповідно до цієї систематизації було розроблено зміст та методику позакласної роботи, методичні рекомендації для підготовки учнів 8 класу до розв'язування олімпіадних задач.

Серед методів навчання обдарованих учнів мають превалювати самостійна робота, пошуковий і дослідницький підходи до засвоєних знань, умінь і навичок. Контроль за їх навчанням повинен стимулювати поглиблене вивчення, систематизацію, класифікацію навчального матеріалу, перенесення знань у нові ситуації, розвиток творчих елементів у їх навчанні. Домашні завдання повинні мати творчий, диференційований характер. Розв'язування олімпіадних завдань є основою підготовки до майбутньої наукової діяльності, хоч це зазвичай не потребує знань, що виходять за межі шкільного курсу математики. Рівень складності нестандартних задач краще вибирати залежно до математичної підготовки класу.

Перший розділ роботи – це науково-теоретичні основи дослідження підготовки учнів до розв’язування олімпіадних математичних задач 8 класах. У ньому висвітлюється поняття «задача», «нестандартна задача», роль та місце задач у навчанні математики, розвиток евристичної діяльності учнів при розв’язуванні задач. Йдеться мова про те як допомогти учням навчитися розв’язувати нестандартні задачі.

У другому розділі вивчається методика підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач у 8 класі, тут також розроблена система гурткових занять:

Тема № 1. Цілі числа із вказаними властивостями

Тема № 2. Ігрові задачі

Тема № 3. Подільність цілих чисел

Тема № 4. Лишки (остачі) в задачах

Тема № 5. Комбінаторика

Тема № 6. Діофантові рівняння

Тема № 7. Правило крайнього

Тема № 8. Принцип Діріхле

Тема № 9. Інваріанти та напівінваріанти

Тема № 10. Графи. Відображення

Тема № 11. Теорема Піфагора та її доведення

Деякі елементи розробленої в роботі системи гурткових занять успішно використовувалися у процесі дистанційного навчання учнів 8 класів Борівської ЗОШ І – ІІІ ступеня (с. Борове, Зарічненського району, рівненської обл.). Тому можна стверджувати, що використання викладеного в роботі матеріалу може ефективно застосовуватися вчителями математики загальноосвітніх шкіл для організації підготовки учнів до розв’язування олімпіадних задач у 8 класах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад / И.Л. Бабинская – М.: Наука, 1975. – 120с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Підручник для студ. / Г.П. Бевз – К.: Вища школа, 1977. – 367с.
3. Белоусов В.Д. Республиканские математические олимпиады / В.Д. Белоусов, М.С. Измай, В.П. Солтан, Б.И. Чиник – Кишинев: Штиинца, 1986. – 145с.
4. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М.І. Бурда – Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – С. 40-45.
5. Волкова Н. П. Педагогіка / Н.П. Волкова – К.: Академія, 2001. –321с.
6. Вишенський В.А. Гра – не тільки розвага. / В.А. Вишенський – У світі математики.– Вип. 1.,1995 р. – С.73-76.
7. Власенко К.В. Актуалізація евристичних ситуацій на уроках (основна школа) / К.В. Власенко, О.І. Скафа. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – 192с.
8. Власенко К.В. Навчання планіметрії засобами актуалізації евристичних ситуацій / К.В. Власенко, О.І. Скафа. – Донецьк: Вид-во НОРД-ПРЕСС, 2004.-178с.
9. Галай Г.І. Учням про видатних математиків / Г.І. Галай, Г.Д. Гриневич – К.: Рад. школа, 1976. – 160 с.
10. Генкин С.А. Ленинградские математические кружки: пособие для внекласной работы / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин – Киров: АСА, 1994. – 272с.
11. Губа Л. А. Нестандартні уроки математики / Л.А. Губа – Х.: Основа, 2005. – 96 с.
12. Громов М.В. Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях / М.В. Громов – Математика.-2001.- №7 (лют.) – С. 1-8.
13. Сафонова В.Ю. Задачи для внеклассной работы по математике. Пособие для учителей / В.Ю. Сафонова – Москва: МИРОС, 1993. – 72 с.

14. Коба. В.І. Позакласна робота з математики в школі / В.І. Коба, О.О. Хмура – К.: Рад школа, 1987. – 375 с.

15. Козира В.М. Подільність цілих чисел в задачах / В.М. Козира – Тернопіль, 1996. – 32с.

16. Козира В. М. Технологія уроку з математики. Посібник для вчителя / В.М. Козира – Тернопіль "Астон", 2002. – 53с.

17. Колесник Б.М. Алгебраїчні задачі на дослідження. – К.: Рад. школа, 1971. – 104с.

18. Конет І.М. Обласні математичні олімпіади / І.М. Конет, В.Г. Паньков – Камянець-Подільський: Абетка, 2000. – 304с.

19. Кушнір І.А. Методи розв'язування задач з геометрії. Книга для вчителя/ І.А. Кушнір – К.: Абрис, 1994. – 464с.

20. Лейфура В.М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язання / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко – Львів: Євросвіт, 1999. – 78с.

21. Лейфура В.М. Математичні олімпіади школярів України / В.М.Лейфура, В.А. Ясінський, І.М. Мітельман – К.: Техніка, 2003. – 143с.

22. Лимаренко О. М. Подільність чисел / О.М. Лимаренко, Р.П. Ушаков – Зб. "У світі математики". – Вип.16. – К.: Рад. школа, 1985. – С. 57-59.

23. Лоповок Л.М. Збірник математичних задач логічного характеру / Л.М. Лоповок – К.: Рад школа, 1977. – 104с.

24. Маланюк М.П. Олімпіади юних математиків / М.П. Маланюк, В.І. Лукавецький – К.: Рад. школа, 1981. – 106с.

25. Маланюк М.П. Шукаймо закономірності. Проблемно – пошукові задачі з математики для учнів 5-6 класів / П.М. Маланюк – Тернопіль, 1997. – 88 с.

26. Моляко В.А. Психология решения школьниками творческих задач / В.А. Моляко – К.:Рад школа, 1983. – 94с.

27. Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский – М.: Просвещение, 1980. – 235с.

28. Орлов А.И. Принцип Дирихле / А.И. Орлов – Квант, 1971. – С.17-19.

29. Перенчук В.К. Нестандартні підходи до навчання учнів математики / Перенчук В. К. – Математика в школах України. – № 1. – 2006. – С. 2-3.

30. Підручна М. Позакласна робота / М. Підручна, Г. Янченко – Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003. – 188с.

31. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа М.: Учпедгиз, 1961. – 207с.

32. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа – М.: Наука, 1975. – 463с.

33. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Навч. посібник / О.А. Сарана – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400с.

34. Скафа О.І. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О.І.Скафа – Рідна школа. – 2003. – №6.–С.43-47.

35. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е.И. Скафа – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439с.

36. Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у евристичному навчанні математики / О.І.Скафа – Математика в школі, 2004. – №1. – С. 35-38.

37. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань – К.: «Вища школа», 2006. – 386с.

38. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике/ З.И. Слепкань – К.: Рад. школа, 1983. – 256с.

39. Степанов В.Д. Активізація внеурочной работы по математике в средней школе / В.Д. Степанов – М: Просвещение, 1991. – 112 с.

40. Тадеєв В.О. Неформальна математика 5-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається в школі / В.О. Тадеєв – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2003. – 288с.

41. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий – М: Просвещение, 1989. – 243с.

42. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе / Л.М. Фридман – Учетелю математики о пед. психологии. – М.: Просвещение, 1983. – 105с.

43. Черкасов Р.С. Методика викладання математики в середній школі / Р.С. Черкасов, А.А. Столяр – Харків: Основа, 1992. – 161с.

44. Ядренко М.Й. До шістдесятиріччя математичних олімпіад в Україні / М.Й. Ядренко – У світі математики. – 1995.– Вип.2. – С.95-97.

45. Ядренко М.Й. Принцип Діріхле і діофантові наближення / М.Й. Ядренко – Зб. “У світі математики”. – Вип.1. – К.: Рад. Школа, 1968. - С. 12 - 18.

46. Янченко Г.М. Сучасний урок з математики / Г.М. Янченко – Тернопіль, 1991. – 126 с.

47. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В.А. Ясінський – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2008. – 208с.

48. http://www2.kspu.kr.ua/intelect/arh/izumchenko.pdf

49. http://bibliofond.ru/view.aspx?id=466027

50. http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pfto/2009_5/files/ped905_77.pdf

51. http://otherreferats.allbest.ru/pedagogics/00033807_0.html

52. http://www.eduwiki.uran.net.ua/wiki/index.php/%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%B2’%D1%8F%D0%B7%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BC%D0%BF%D1%96%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D1%85_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87

53. http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/znpbdpu/Ped/2009_3/Skafa%20O.,%20Tutova%20O..pdf

54. http://refs.co.ua/55438Realizaciya_evristicheskogo_obucheniya_uchashihsya_na_urokah_matematiki.html

55. http://distance.edu.vn.ua/graph/teoria/butteor/teor1/teor1.html

56. http://sxz.mylivepage.com/wiki/1049/669_%D0%9B%D0%86%D0%9D%D0%86%D0%99%D0%9D%D0%86_%D0%94%D0%86%D0%9E%D0%A4%D0%90

%D0%9D%D0%A2%D0%9E%D0%92%D0%86_%D0%A0%D0%86%D0%92%D0%9D%D0%AF%D0%9D%D0%9D%D0%AF_%D0%97_%D0%94%D0%92%D0%9E%D0%9C%D0%90_%D0%9D%D0%95%D0%92%D0%86%D0%94%D0%9E%D0%9C%D0%98%D0%9C%D0%98