Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Методика навчання учнів розв'язуванню показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІФ-41
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Шарко Віта Костянтинівна
Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, проф. Крайчук О.В.
Рецензент ___________________

Рівне-2020 року

Зміст

Вступ

Рівняння та нерівності в останні роки стали предметом особливого зацікавлення вчених. З’явились багато наукових і популярних публікацій на цю тему, завдання пов’язані з розв’язуванням рівнянь та нерівностей, часто трапляються на шкільних олімпіадах різних рівнів, на різноманітних конкурсах. Рівняння та нерівності відіграють істотну роль у всіх розділах сучасної математики. Багато рівнянь та нерівностей використовується в різних дослідженнях.

Актуальність тими полягає в тому, що тема « Методика вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем » є однією із основних тим, що у шкільній програмі із математики в 10-11 класах, вивченню її приділяється велика кількість навчальних годин. У процесі вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем учні 10-11 класів систематизують, узагальнюють й поглиблюють знання про тригонометрію, корені, степені та їхні властивості, засвоюють навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, розв’язувати рівняння і нерівності та їх системи різних видів.

Розв’язуванню завдань, що містять рівняння та нерівності, приділяється багато уваги при складанні випускниками шкіл зовнішнього незалежного оцінювання знань з математики.

Кажуть, що математичні ідеї не старіють, а щоразу з’являються нам в новому світлі, але з часом деякі математичні теорії завершуються отриманням глибоких результатів, розв’язком давніх проблем. Проте деякі математичні задачі живуть дуже довго, хвилюючи уми найталановитіших математиків, стають для них поштовхом до створення нових теорій. Видатні математики минулого (Ейлер, Гаус, Коші, Абель, Лобачевский, Дарбу) часто, обґрунтовуючи свої математичні ідеї, звертались до розв’язування рівнянь та нерівностей.

Мета дослідження - систематизація відомостей про рівняння та нерівності в шкільному курсі «Алгебра та початки аналізу» старшої школи, розкриття ролі і місця вивчення рівнянь і нерівностей у школі та розробка розв'язування даного типу рівнянь та нерівностей, вона полягає в тому, щоб розкрити основні методологічні вимоги.

В основу дослідження покладена **гіпотеза** про те, що у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей на основі аналізу типових помилок і шляхів їх запобігання в учнів буде формуватися більша зацікавленість до вивчення алгебри, зростатиме рівень знань, зростатимуть такі якості як відповідальність, уважність, наполегливість, зосередженість.

Об'єкт дослідження: процес викладання алгебри і початків аналізу в середній школі.

Предмет дослідження: методика розв'язування рівнянь і нерівностей в 10-11 класах.

Завдання дослідження:

- з'ясувати стан вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем у науково-методичній літературі та в шкільних підручниках;
- з'ясувати місце рівнянь, нерівностей та їх систем в програмах з математики: рівня стандарту, академічного рівня та рівня профільної підготовки;
- подати приклади розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем різної складності;
- апропонувати використання різних методів розв'язування різнорівневих рівнянь, нерівностей і їх систем з алгебри і початків аналізу для учнів 10-11 класів.
- зробити висновки.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання математики на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів 10-11 класів, активації їх пізнавальної діяльності.

Апробація. Результати роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету.

Розділ I. Теоретичні основи дослідження.

1.1. Аналіз програм з математики для учнів 10-11 класів.

Шкільний курс математики у 2019–2020 навчальному році в 10-11 класах загальноосвітніх навчальних закладів вивчатиметься за програмами, надрукованими у посібнику «Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах)», видавництва «Ранок», Харків, 2012 р. та розміщених на сайті Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України www.mon.gov.ua.

У старшій школі вивчення математики здійснюється за чотирма програмами: рівень стандарту, академічний, профільний рівень та поглиблене вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма [26].

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов’язуватимуть з нею свою професійну діяльність [12].

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов’язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. Крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напряму спеціалізації [13].

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов’язану з математикою або її застосуваннями [14].

Таблиця розподілу годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти.

Навчальні предмети	*Кількість годин на тиждень у класах*							
	Рівень стандарту		**Академічний рівень**		**Профільний рівень**		**Поглиблене вивчення**	
	10	11	10	11	10	11	10	11
Математика	3	3	-	-	-	-	-	-
Алгебра та початки аналізу	-	-	2	3	5	5	5	5
Геометрія	-	-	2	2	4	4	4	4

У класах суспільно-гуманітарного напряму (крім економічного профілю): філологічного, художньо-естетичного, спортивного напрямів та технологічного профілю вивчається предмет «Математика» за програмою рівня стандарту.

У класах природничо-математичного напряму (крім фізико-математичного і математичного профілів): універсального, економічного та інформаційно-технологічного профілів вивчають предмет «Алгебра і початки аналізу» за програмою академічного рівня.

У класах фізико-математичного та математичного профілів вивчається предмет «Алгебра і початки аналізу» за програмою профільного рівня.

Учні класів з поглибленим вивченням математики продовжують вивчення предмет «Алгебра і початки аналізу» за програмою для поглибленого вивчення предмета.

У 10-11 класах, де 16 і більше учнів, є можливість обрати одразу два профілі, тобто поділити клас на профільні групи (у кожній групі не менше 8 чоловік), що дає змогу учням сільської школи вивчати на профільному рівні предмети, пов'язані з їх майбутньою професійною діяльністю.

Однак організувати оптимально ефективний навчальний процес у таких класах надто складно. На більшість предметів учні такого класу-груп ходять всім класом, а на профільні – групами. Кожен вчитель, що викладає в профільних групах, зіткається з проблемами планування та організації роботи на спільних уроках, де присутні обидві групи, оскільки різниця у кількості годин, відведених на вивчення математики, становить 6 годин.

Творча група вчителів математики, яка працювала у 2011/2012 році в таких класах (керівник творчої групи Вербицька Світлана Василівна, вчитель Новоселівської ЗОШ І-ІІІ ступенів Котовського району) склала розгорнутий календарний план для спільного вивчення математики для груп, які навчаються за рівнями стандарту та профільним. Вказаний календарний план для учнів 10 і 11 класів буде надано методистам РМК, які відповідають за викладання математики, в електронному вигляді на семінарі 16.08.12 р.

Реалізація профільного навчання математики в 10-11 класах забезпечується системою курсів за вибором (за рахунок варіативного компонента), які певним чином враховують інтереси і можливості учнів даного профілю [24].

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України пропонує перелік навчальних програм факультативних курсів та курсів за вибором для профільного навчання.

Розподіл курсів за вибором є умовним. Вчитель може запропонувати учням будь-який курс за вибором із зазначеного міністерством переліку або курси за вибором, що надруковані у попередні роки та мають відповідні грифи Міністерства освіти і науки, молоді та спорту.

Програми спецкурсів надруковані у посібнику «Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання», видавництво «Ранок», Харків, 2011 р. та розміщені на сайті Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України www.mon.gov.ua.

Особливості навчальної програми для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний підхід до організації навчання у старшій школі значно розширює можливості учня у виборі власної освітньої траєкторії та створює сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів, для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності. Профільне навчання спрямоване на формування ключових компетентностей старшокласників, набуття ними навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти.

Засвоєння змісту освіти у загальноосвітніх закладах з профільним навчанням має забезпечувати загальноосвітню підготовку учнів і підготовку їх до майбутньої професійної діяльності, а тому кожний профіль навчання охоплює три види предметів: базові, профільні та курси за вибором.

Базові загальноосвітні предмети становлять інваріантну складову змісту середньої освіти і є обов'язковими для всіх профілів. Ці предмети реалізують цілі й завдання загальної середньої освіти.

Профільні загальноосвітні предмети - це предмети, що реалізують цілі, завдання і зміст кожного конкретного профілю. Профільні предмети вивчаються поглиблено і передбачають більш повне опанування понять, законів, теорій; використання інноваційних технологій навчання; організації дослідницької, проектної діяльності; профільної навчальної практики учнів тощо.

Курси за вибором - це навчальні курси, які доповнюють навчальні предмети і входять до складу допрофільної підготовки та профільного навчання. Курси за вибором створюються за рахунок варіативного компонента змісту освіти [24].

Математика є базовим предметом, а тому вивчається учнями в класах усіх профілів, але на різних рівнях.

Зміст навчання визначається державним програмами з математики для кожного з рівнів і реалізовано у відповідних підручниках, створених у 2010 р. Розглянемо коротко особливості вивчення математики на кожному з рівнів.

Рівень стандарту. Мета навчання математики на рівні стандарту це, насамперед, оволодіння загальною математичною культурою, вироблення так званого математичного стилю мислення, тобто вміння класифікувати об’єкти, вміння встановлювати закономірності, виявляти зв’язки між різними явищами, вміння приймати рішення тощо. Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Дієвим засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати [12].

Програма передбачає як сумісне, так і роздільне вивчення алгебри і початків аналізу з геометрією. Перший підхід в умовах вивчення предмета на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом курсу "Математика" на два курси — "Алгебра і початки аналізу" і "Геометрія". Він дозволяє забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з урахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутрішні й міжпредметні зв'язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики.

Орієнтовно тематичний план вивчення алгебри і початків аналізу: всього 108 годин з них:

на вивчення теми «Тригонометричні функції» відводиться 26 годин. З тригонометричних рівнянь чи нерівностей в даній темі вивчаються тільки найпростіші.

на вивчення теми « Показникова та логарифмічна функції» дається 12 годин. В цій темі учні вчаться розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння і нерівності [12].

Це і є вивчення всіх рівнянь та нерівностей з алгебри і початків аналізу 10-11 класів рівня стандарту.

Академічний рівень. Мета навчання математики на академічному рівні полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для вивчення профільних предметів, для успішної майбутньої професійної діяльності в тих сферах, де математика відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення й аналізу закономірностей, реальних явищ і процесів. Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення (відношення), яка дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах [13].

Програмою передбачено резерв навчального часу, а також години для повторення, узагальнення й систематизації вивченого матеріалу. Спосіб використання резервного часу вчитель може обрати самостійно: для повторення на початку навчального року матеріалу, який вивчався у попередніх класах, як додаткові години на вивчення окремих тем, якщо вони важко засвоюються учнями, для проведення інтегрованих з профільними предметами уроків тощо.

При навчанні математики на академічному рівні основна увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями, що забезпечить успішне вивчення профільних предметів – хімії, фізики, біології, технологій. При цьому зв'язки математики з профільними предметами посилюються за рахунок розв'язання задач прикладного змісту, ілюстрацій застосування математичних понять, методів і моделей у шкільних курсах хімії, біології, фізики, технологій.

Орієнтовно тематичний план вивчення алгебри і початків аналізу: всього 175 годин з них:

на вивчення теми «Функції, рівняння і нерівності» в якій вивчаються крім функцій рівносильні перетворення рівнянь; рівняння-наслідки. застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь; рівносильні перетворення нерівностей, метод інтервалів відводиться 12 годин.

на вивчення теми «Степенева функція» - 14 годин – він містить в собі вивчення ірраціональних рівнянь. [Ірраціональні нерівності. Системи ірраціональних рівнянь] [13].

на вивчення теми тригонометричні рівняння і нерівності відведено окремий розділ, який так і називається «Тригонометричні рівняння і нерівності» - 16 годин

на вивчення теми « Показникова та логарифмічна функції» дається 22 години, в цій темі вивчаються також показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Рівень профільної підготовки. Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу, природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів [14].

У класах з поглибленим вивченням математики рівня підготовки учнів з математики має забезпечувати у майбутньому, крім сказаного вище, успішне опанування професією, яка потребує високого рівня математичних знань, тобто за спеціальностями теоретичної і прикладної математики або спеціальностями тих галузей, які потребують розвиненого математичного апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів; у підготовці до навчання у вищому навчальному закладі з відповідним фаховим спрямуванням.

Програми для профільного рівня і класів з поглибленим вивченням математики відрізняються змістовим наповненням і структурно.

Орієнтовно тематичний план вивчення алгебри і початків аналізу: всього 350 годин з них:

на вивчення теми «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» відводиться 60 годин в якій вивчаються крім функцій ще й рівносильні перетворення рівнянь; рівняння-наслідки; застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь; рівносильні перетворення нерівностей; метод інтервалів; рівняння і нерівності, що містять знак модуля; рівняння і нерівності з параметрами; графік рівняння з двома змінними; нерівність з двома змінними; графік нерівності з двома змінними; системи рівнянь і нерівностей.

на вивчення теми «Степенева функція» - 30 годин – вона містить в собі вивчення ірраціональних рівнянь; ірраціональних нерівностей, [Системи ірраціональних рівнянь.]; ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами, [Системи рівнянь та нерівностей з параметрами.]

на вивчення теми тригонометричні рівняння і нерівності відведено окремий розділ, який так і називається «Тригонометричні рівняння і нерівності»- 35 годин: Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.

на вивчення теми « Показникова та логарифмічна функції» дається 25 години, в цій темі вивчаються також показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами [14].

Окремо відведено 20 годин на вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем. Узагальнення та систематизація: Методи розв'язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо). Методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо). Системи рівнянь та методи їх розв'язування (рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо).

1.2. Аналіз шкільних підручників із алгебри та початків аналізу

Під час вивчення будь-якої нової теми переважно в школі постає проблема викладу цієї теми в шкільних підручниках. Отож спочатку проаналізуємо діючі підручники з алгебри та початків математичного аналізу для 10-11 класів, аби з'ясувати, як у них представлені методи вирішення рівнянь, нерівностей та їх систем.

М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова „Математика 10 клас” рівень стандарту.

Вивчення курсу математики, складається з двох частин — алгебри і початків аналізу та стереометрії — розділу геометрії.

У першій частині курсу математики ви систематизуєте і поглибите знання про степінь числа, властивості вже відомих функцій, ознайомитеся з новими функціями — степеневими і тригонометричними. Виробите вміння будувати графіки функціональних залежностей, застосовувати вивчені поняття і властивості до розв’язування задач та дослідження найпростіших математичних моделей.

Друга частина курсу математики присвячена стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі.

Як успішно вивчати математику за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. Кожний параграф містить теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений кольором і обведений рамкою. Це найважливіші означення і властивості. Їх потрібно зрозуміти, запам’ятати і вміти застосовувати під час розв’язування задач. Інші важливі відомості надруковано жирним шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У тексті параграфів ви знайдете також зразки розв’язань деяких задач і вправ.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне» після кожного параграфа. Наприкінці кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі та вправи середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати математику далі. Номери задач і вправ достатнього рівня складності не мають позначки біля номера. Навчившись розв'язувати їх, учні зможуть впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі та вправи високого рівня складності [3].

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», можна поглибити свої знання.

У кінці підручника ви знайдете необхідний додатковий матеріал та вправи для повторення курсу, вивченого в 10 класі, а також курсу алгебри і геометрії 7 — 9 класів.

У підручнику застосовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Перейдемо до змісту підручника, в ньому вивчення рівнянь, нерівностей і їх систем починається в першій його частині: у розділі «Функції, їхні властивості та графіки» § 7. Ірраціональні рівняння. У розділі «Тригонометричні функції» в параграфах

§ 25. Рівняння $\sin x = a$

§ 26. Рівняння $\cos x = a$

§ 27. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$

§ 28. Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь

§ 29. Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей [3].

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз „ Математика 10 клас" рівень стандарту.

У цьому підручнику пропонується інтегрований курс математики. До нього входять найважливіші теми з арифметики, алгебри, початків аналізу та з геометрії.

Окремі теми вивчаються в попередніх класах, а більшість - зовсім нові. *Курсивом* виділено терміни, назви понять. Жирним шрифтом надруковано важливі твердження, теореми.

Знати математику - це насамперед уміти користуватися нею. Учитися користуватися математичними знаннями найкраще під час розв’язування задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа - різних рівнів складності. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором.

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв’язаннями.

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриках «Історичні відомості».

А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір „ Алгебра і початки аналізу” 11 клас академічний рівень, профільний рівень.

Підручник розділено на п’ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв’язання.

Ця книга є дворівневим підручником, текст якого передбачає можливість організації навчального процесу в класах як академічного, так і профільного рівнів вивчення математики.

Державна програма з алгебри і початків аналізу профільного рівня порівняно з відповідною програмою академічного рівня передбачає вивчення більш широкого переліку навчальних тем, а також суттєво вищі вимоги до навчальних досягнень учнів.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

У підручнику частини тексту теоретичного матеріалу і вправ, які відповідають вимогам лише програми профільного рівня, позначено піктограмою - зображення підручників і пунктирною лінією у вигляді крапок.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв’язувати усно [7].

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

А зараз конкретніше про пааграфи:

§2. Показникова і логарифмічна функції.

17. Показникові рівняння.
18. Показникові нерівності.
21. Логарифмічні рівняння.
22. Логарифмічні нерівності.

§5. Рівняння і нерівності. Узагальнення та систематизація

33. Основні методи розв’язування рівнянь.
34. Основні методи розв’язування нерівностей [7].

Є. П. Нелін „ Алгебра і початки аналізу” 10 клас академічний рівень

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до чинної програми з алгебри і початків аналізу академічного рівня з урахуванням програми профільного рівня та програми і змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника від інших підручників з алгебри і початків аналізу. Це *дворівневий підручник,* у кожному розділі якого поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою [8].

Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі *довідкових таблиць* на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів для розв'язування завдань. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях.* Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником, використовуючи відповідні таблиці та рисунки. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибирати свій рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з алгебри і початків аналізу повинен забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними алгебраїчними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з алгебри і початків аналізу), а й формування способів дій із цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів уміння з алгебри і початків аналізу). Систему умов, на яку реально спирається учень при виконанні дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонують достатньо загальні орієнтовні основи для розв'язування відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонують орієнтовні основи другого і третього типів. Як правило, у підручниках алгебри і початків аналізу для 10 класів учням пропонуються тільки зразки розв'язувань завдань. Учні самостійно розв'язують ці завдання, орієнтуючись на зразки (тобто учням пропонуються орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на запропоновані зразки, і виділить для себе орієнтовну основу розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у цьому випадку орієнтовна основа, що створюється в учня, неповна. Крім того, вона часто не усвідомлена ним, бо учень не може пояснити, чому він виконував саме такі перетворення під час розв'язування завдання, а не інші [9].

Із цієї причини одним з принципів побудови пропонованого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності з розв'язування алгебраїчних завдань безпосередньо в підручнику.

У кожному розділі розв'язанню вправ передує виділення загальних орієнтирів для розв'язування таких завдань. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведеться за схемою:

Розв'язання	*Коментар*

За умови такої подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє учневі, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

За рахунок чіткого виділення загальних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, рівняння, для розв'язування яких доводиться використовувати властивості функцій). Це дозволяє, зокрема, ознайомити учнів з методами розв'язування навіть складних завдань з алгебри і початків аналізу, які пропонуються в зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, та з оформленням їх розв'язання [8].

У даному підручнику в розділі 1 «Функції, рівняння і нерівності» вивчення рівнянь, нерівностей і їх систем розміщено у параграфах:

§3. Рівняння.

3.1. Рівняння - наслідки та рівносильні перетворення рівнянь.

3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь.

§4. Нерівності: рівносильні перетворення та загальний метод інтервалів.

§8. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля.

§9. Рівняння і нерівності з параметрами.

9.1. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами.

9.2. Дослідницькі задачі з параметрами.

У розділі 2 «Степенева функція»:

§11. Ірраціональні рівняння.

§13. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь.

§14. Ірраціональні нерівності.

§15. Розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметром.

У розділі 4 «Тригонометричні рівняння і нерівності:

§24. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

§25. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь, які відрізняються від тригонометричних.

§26. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

§27. Найпростіші тригонометричні нерівності.

§28. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем.

§29. Тригонометричні рівняння з параметрами.

§30. Розв'язування тригонометричних нерівностей.

Є. П. Нелін, О. Є. Долгова „ Алгебра” 11 клас кадемічний рівень і профільний рівень.

Структура підручника даного автора така ж як і підручника для 10 класу. Навчальний матеріал цього підручника можна також використовувати для систематичного вивчення поглибленого курсу алгебри і початків аналізу в класах, школах, ліцеях та гімназіях фізико-математичного профілю або в класах з поглибленим вивченням математики. В 2 розділі підручника « Показникова й логарифмічна функції» вивчаються параграфи:

§14. Розв’язування показникових рівнянь та нерівностей

14.1. Найпростіші показникові рівняння.

14.2. Розв’язування більш складних показникових рівнянь та їх систем.

14.3. Розв’язування показникових нерівностей.

§17. Розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей

17.1. Розв’язування логарифмічних рівнянь.

17.2. Розв’язування логарифмічних нерівностей.

А також у розділі 5 «Систематизація й узагальнення відомостей про рівняння, нерівності та їх системи:

§27. Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення й систематизація.

27.1. Рівняння і нерівності.

27.2. Системи рівнянь і нерівностей [9].

М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубінчук „ Алгебра і початки аналізу” 10-11 класи

Алгебра і початки аналізу - навчальний предмет, в якому об'єднаний навчальний матеріал кількох галузей математичної науки: алгебри (обчислення, тотожні перетворення, рівняння, нерівності та їх системи), математичного аналізу (вчення про різні види функцій та їх властивості, границю і неперервність функцій, початки диференціального й інтегрального числення), теорії множин (поняття множин, операції над множинами і їх застосування в інших галузях науки), комбінаторики (сполуки без повторень, комбінаторні задачі, біном Ньютона), теорії імовірностей і статистики (початки теорії імовірностей та вступ до статистики).

Автори пропонованого підручника ставили за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу. В ньому представлений навчальний матеріал для трьох рівнів навчання - обов'язковий рівень (рівень освітнього стандарту з математики), підвищений, і поглиблений рівень для тих учнів, які мають можливість і бажання засвоїти алгебру і початки аналізу в ширшому і глибшому обсязі. Перші два рівні разом становлять базовий рівень навчання.

Відповідно до поставленої мети в підручнику диференціюється як теоретичний матеріал, так і система вправ. Крім теоретичного матеріалу, передбаченого чинною програмою, до підручника включено деякі питання теорії, що виходять за межі програми і розраховані на учнів, які бажають вивчати предмет на поглибленому рівні. Відповідний, не обов'язковий, для вивчення всіма учнями, навчальний матеріал, позначений символом.

Система вправ підручника теж представлена на трьох рівнях. Буквою «А» позначено вправи обов'язкового рівня, буквою «Б» - підвищеного рівня, буквою «В» - поглибленого рівня. Для переважної більшості вправ у підручнику подано відповіді [23].

Автори сподіваються, що пропонований підручник сприятиме засвоєнню алгебри і початків аналізу і бажають учням успіхів у цій важливій справі.

У вказаному вище підручнику окремо виділений розділ «Тригонометричні рівняння», у розділі ІІІ «Степенева функція» в §2 вивчаються ірраціональні рівняння та їх системи. Розділ IV «Показникова функція»: § 2. Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей; § 3. Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей [23].

1.3. Загальна теорія рівнянь, нерівностей та їх систем.

Рівняння основні означення, твердження

1) В алгебрі розглядають два види рівностей - тотожності і рівняння. Розглянемо функції $y=f(x)$, визначену на множині M, і $y=g(x)$, визначену на множині N.

Якщо на деякій множині R, яка є підмножиною як M, так і N, має місто рівність $f(x)=g(x)$, то говорять, що ці функції тотожно рівні на множині R, а рівність $f(x)=g(x)$при цьому називається тотожністю на множині R.

Часто приходиться розглядати функції, про які невідомо, якою є множина значень аргументу, на якій вони тотожно рівні. В такому випадку рівність $f(x)=g(x)$ називають *рівнянням*. Воно виражає задачу пошуку тих значень x, при яких $f(x)$ і $g(x)$ рівні. Шукані значення x при цьому називають коренями (розв'язками) рівняння. Значення невідомих, які належать множині допустимих значень рівняння і задовольняють його (тобто перетворюють рівняння в правильну рівність (тотожність), називають *коренями рівняння*. Областю визначення рівняння (1) будемо називати перетин областей визначення функцій f і g.

Букви, які входять в рівняння, за умовою задачі можуть бути нерівноправними: одні можуть приймати всі свої допустимі значення і називаються коефіцієнтами (інколи параметрами) рівняння; інші, значення яких потрібно знайти, називаються невідомими (їх майже завжди позначають останніми буквами латинського алфавіту: x,y,z, або тими ж буквами, але з індексами: $x_1,x_2,...,x_n$ або $y_1,y_2,...,y_k$) [18].

В загальному вигляді рівняння з n невідомими $x_1,x_2,...,x_n$ може бути записано у вигляді

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (1)$$

де $f(x_1,x_2,...,x_n)$, $g(x_1,x_2,...,x_n)$ - функції вказаних змінних. В залежності від кількості невідомих рівняння називають рівнянням з одним, двома і більше невідомими.

Рівняння вважається розв'язаним, якщо знайдено всі його корені або показано, що рівняння коренів немає.

Методи розв'язування рівнянь базуються на понятті рівносильності (еквівалентності).

Якщо всі розв'язки рівняння $f(x)=g(x)$ є розв'язками рівняння $\varphi(x)=\psi(x)$, то говорять, що рівняння $\varphi(x)=\psi(x)$ є *наслідком* рівняння $f(x)=g(x)$, і записують

$f(x)=g(x) \Rightarrow \varphi(x)=\psi(x)$.

Два рівняння $f(x)=g(x)$ та $\varphi(x)=\psi(x)$ називають *еквівалентними*, якщо кожне з них являється наслідком другого, і записують

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \varphi(x)=\psi(x)$.

Таким чином два рівняння вважаються еквівалентними, якщо множини розв'язків цих рівнянь співпадають.

Можна сказати, що рівняння рівносильні, якщо кожне з них є наслідком другого.

Деякі еквівалентні рівняння:

1.Рівняння $F+G=G$ еквівалентне рівнянню $F=0$, яке розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

2.Рівняння $\frac{F}{G}=0$ еквівалентне рівнянню $F=0$, яке розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

3.Рівняння $F \times G=0$ еквівалентне двом рівнянням $F=0$ і $G=0$, кожне з яких розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

4.Рівняння $F^n=0$ еквівалентне рівнянню $F=0$.

5.Рівняння $F^n=G^n$ при непарному n еквівалентне рівнянню F=G, а при парному n еквівалентне двом рівнянням: F=G і F=-G.

Заміна рівняння рівносильним йому рівнянням або заміна рівняння рівносильною йому сукупністю рівнянь називається *рівносильним переходом*.

Наведемо основні теореми про рівносильність рівнянь [20].

Теорема І. Рівняння $f(x)=g(x)$ і $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ рівносильні, якщо $\varphi(x)$ існує в області визначення вихідного рівняння (1).

З цієї теореми випливає, що доданки можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи знак цього доданку на протилежний.

Теорема ІІ. Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ (1) помножити на вираз $\varphi(x)$, який існує в області визначення рівняння (1), то отримаємо рівняння $f(x)\times\varphi(x)=g(x)\times\varphi(x)$ (2), яке є наслідком рівняння (1).

Якщо при цьому $\varphi(x)\neq 0$, то рівняння (1) і (2) рівносильні.

Теорема ІІІ. Рівняння $f^n(x)=g^n(x)$, (*), де n≥2 (натуральне), є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$.

Це значить, що будь-який корінь рівняння (1) є коренем і рівняння $f^n(x)=g^n(x)$, але рівняння $f^n(x)=g^n(x)$, може мати ще й інші корені, які не задовольняють рівняння (1). Іншими словами, при піднесенні до натурального степеня обох частин рівняння (1) можуть з’явитись зайві корені.

Розрізняють рівняння алгебраїчні і трансцендентні. В алгебраїчних рівняннях над невідомими можуть здійснюватись, причому в скінченій кількості, тільки операції додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до раціонального степеня.

Якщо над невідомими здійснюються й інші операції, то рівняння називають трансцендентним.

Прикладами трансцендентних рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, а також рівняння, що містять обернені тригонометричні функції.

У загальному випадку трансцендентні рівняння не можуть бути розв'язанні алгебраїчно, тобто за допомогою послідовного виконання ряду аріфметичних та алгебраїчних дій над данними, які належать до їх складу. Елементарна математика розглядає окремі види трансцендентних рівнянь, допускаючих аналітичне рішення. Зокрема, до них відносяться показникові та логафмичні рівняння.

В процесі розв'язування рівняння за допомогою різних перетворень замінюють простішим, рівносильним йому рівнянням. Якщо це не вдається, то можливі два такі випадки.

1. Під час переходу до нового рівняння може трапитись втрата коренів.
2. Нове рівняння може містити корені, що не є коренями вихідного рівняння (зайві корені). Зайві корені можна виявити за допомогою перевірки (підстановкою всіх коренів нового рівняння у вихідне).

Нерівності.

Нехай f(x) - числова функція однієї чи декількох змінних (аргументів). Вираз, в якому є знаки ">" (<) або "≥" (≤), називають нерівністю.

Розв'язати нерівність

$f(x)<0 \quad (f(x)>0)$ (4)

- це значить знайти всі значення аргументу (аргументів) функції f , при яких нерівність (4) справедлива. Множина всіх значень аргументу функції f, при яких нерівність (4) справедлива, називається *множиною розв'язків нерівності* або просто *розв'язком нерівності* [20].

Множина розв'язків нестрогої нерівності $f(x)\le 0 \quad (f(x)\ge 0)$ (5)

представляє собою сукупність множини розв'язків нерівності (4) і множини розв'язків рівняння $f(x)=0$.

Дві нерівності $f_1(x)<0$ $(0<g_1(x))$ і $f_2(x)<0$ $(0<g_2(x))$ називаються *еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

При цьому пишуть

$f_1(x)<0\ (g_1(x)) \Leftrightarrow f_2(x)<0\ (g_2(x))$.

Якщо дві нерівності не мають розв'язків, то за означенням вони також вважаються рівносильними.

Під множиною допустимих значень невідомих, які входять в нерівність, розуміють область визначення функції $f(x)$.

Рівносильні нерівності можуть мати різні області допустимих значень (наприклад, нерівність $x>1$ рівносильна нерівності $\sqrt{x}>1$, при цьому ми бачимо, що ОДЗ нерівності $x>1$ є множина всіх дійсних чисел, а ОДЗ нерівності $\sqrt{x}>1$ - множина невід'ємних чисел).

З означень рівносильних нерівностей випливає, що замість даної нерівності можна розв'язувати нерівність, рівносильну даній.

Дві нерівності називаються *рівносильними на множині A*, якщо співпадають множини їх розв'язків на цій множині A.

Дві нерівності можуть бути нерівносильними, але можуть бути рівносильними на деякій множині. Прикладом можуть бути нерівності $x^2>1$ і $x>1$, які рівносильні на множині додатних чисел, але не є рівносильними на множині всіх дійсних чисел.

Якщо будь-який розв'язок однієї нерівності є розв'язком другої нерівності, то говорять, що друга нерівність є *наслідком* першої нерівності, при цьому записують

$f_1(x)<0 \Rightarrow f_2(x)<0$.

Якщо замінити нерівність її наслідком, то множина розв'язків другої нерівності буде складатись з множини розв'язків вихідної нерівності і ще може мати деякі числа, які називають *зайвими розв'язками* вихідної нерівності. Тому якщо під час розв'язування нерівності переходять до її наслідків, то в кінці необхідно провести перевірку.

Твердження про рівносильність нерівностей:

1. Нерівності $f(x)<g(x)$ і g(x)>f(x) рівносильні.
2. Нерівності $f(x)<g(x)$ і f(x)-g(x)<0 рівносильні.
3. Нерівності f(x)<g(x) і f(x)+φ(x)<g(x)+φ(x) рівносильні, якщо функція φ(x) визначена на ОДЗ нерівності f(x)<g(x).

Можна записати, що нерівності

f(x)<g(x) і f(x)+α<g(x)+α рівносильні для будь-якого числа α.

4. Якщо функція φ(x) додатна при всіх значення x з ОДЗ нерівності f(x)<g(x), то нерівність φ(x)×f(x)<φ(x)×g(x) рівносильні. Якщо функція φ(x) від'ємна при всіх значеннях x з ОДЗ нерівності f(x)<g(x), то нерівність f(x)<g(x) рівносильна нерівності φ(x)×f(x)>φ(x)×g(x).
5. Нерівності $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ і $f(x) \times g(x) > 0$ рівносильні.

Нерівності виду (4) або (5), складені для будь-яких функцій $f_i(x)$, можуть бути зведені в систему нерівностей.

Розв'язати систему нерівностей - це значить знайти множину всіх значень аргументів функцій $f_i(x)$, при яких справедливі всі нерівності системи одночасно [20].

Говорять, що системи нерівностей *еквівалентні*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Розділ ІІ. Методика розв'язування показникових і логарнифмічних рівнянь, нерівностей.

2.1. Методика розв'язування показникових рівнянь.

Показниковими звичайно називають рівняння, у яких змінна входить у показник степеня (а основа цього степеня не містить змінної).

Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x = b, \qquad (1)$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$. Оскільки при цих значеннях a функція $y = a^x$ строго монотонна (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Це означає, що **рівняння** $a^x = b$ **при** $b > 0$ **має єдиний корінь.** Щоб його знайти, досить подати b у вигляді $b = a^c$.

Очевидно, що $x = c$ — корінь рівняння $a^x = a^c$.

Графічно це проілюстровано на рис. 1.

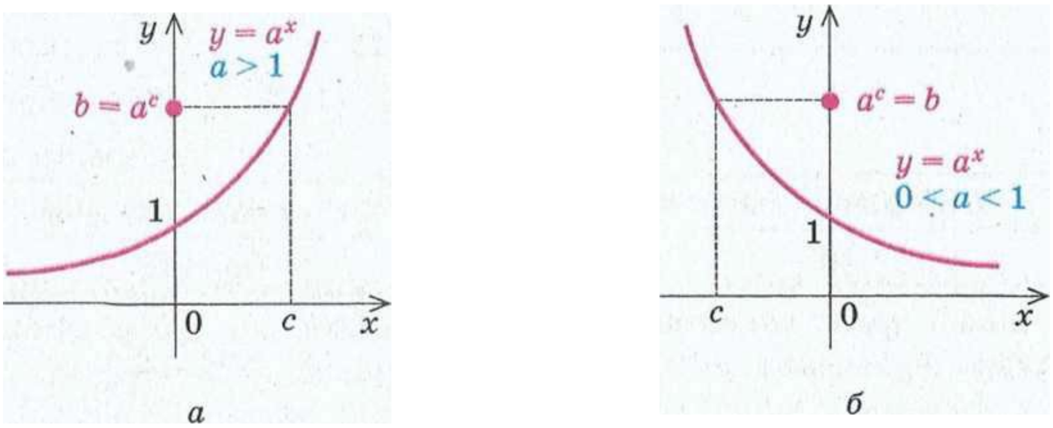


Рис.1

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $7^x = 49$, досить подати це рівняння у вигляді $7^x = 7^2$ і записати його єдиний корінь $x = 2$.

Якщо $b < 0$**, то рівняння** $a^x = b$ **(при** $a > 0$**) коренів не має,** оскільки a^x завжди більше нуля. (На графіках, наведених на рис. 2, пряма $y = b$ не перетинає графік функції $y = a^x$ при $b < 0$.) [16].

Наприклад, рівняння $7^x = -7$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових рівнянь, відзначимо, що **при** $a > 0$ **і** $a \neq 1$ рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (2)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

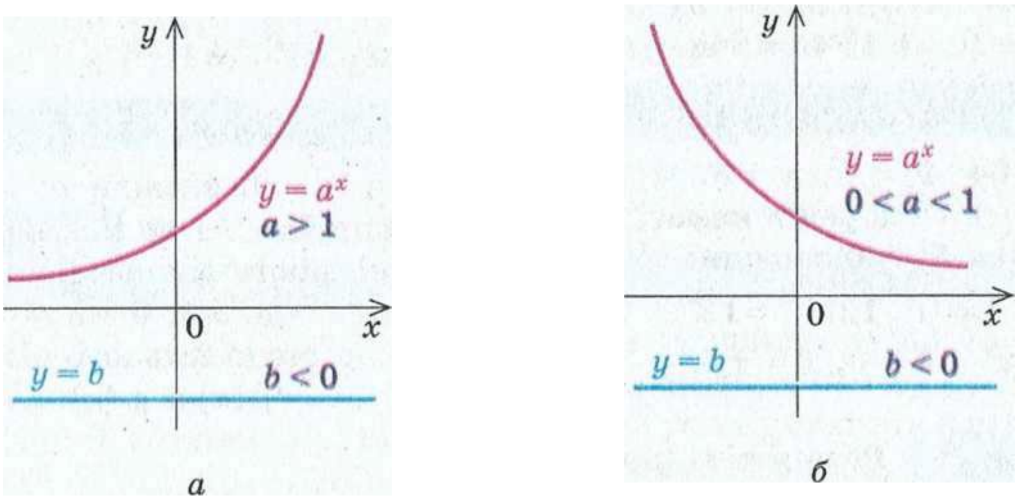


Рис. 2

Коротко це твердження можна записати так: **при** $a > 0$ **і** $a \neq 1$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} <=> f(x) = g(x)$.

Щоб обґрунтувати цю рівносильність, досить помітити, що рівності (1) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ є строго монотонною й кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу t (тобто з рівності степенів (2) обов’язково випливає рівність показників (3)). Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2). А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні .

У найпростіших випадках при розв’язуванні показникових рівнянь треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв’язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій. Як відомо, усі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цього рівняння. Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання рівняння (див. приклади 1-3) [16].

Якщо ж у процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ (приклад 4).

Приклади розв'язання завдань.

Всі рівняння стараємось звести до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (де $a > 0$ *і* $a \neq 1$) і перейдемо до рівносильного рівняння $f(x) = g(x)$.

а) $4^x = 64, \quad 4^x = 4^3, \quad x = 3.$

б) $5^x = -1$ - коренів немає. Тому, що при $a > 0$, завжди $a^x > 0$.

в) $12^{x^2-4} = 1, \quad 12^{x^2-4} = 12^0, \quad x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm 2.$

Приклад . Розв'яжіть рівняння $3^{2x+2} + 5 \cdot 3^{2x-2} = 86,$

Розв'язування. У лівій частині рівняння всі члени містять вирази виду 3^{2x} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами). У цьому випадку зручно винести за дужки в лівій частині рівняння найменший степінь числа 3, тобто 3^{2x-2}.

Задане рівняння рівносильне рівнянням $3^{2x-2}(3^4 + 5) = 86,$

$3^{2x-2} \cdot 86 = 86, \quad 3^{2x-2} = 1, \quad 3^{2x-2} = 3^0, \quad 2x - 2 = 0, \quad x = 1$

Відповідь: 1.

Приклад . Розв'яжіть рівняння $\left(1 + b^2\right)^{\sqrt{x}} = \left(1 + b^2\right)^{4-\sqrt{x}}$

Розв'язування. Це рівняння відносно змінної *x,* яке містить параметр b.

Проаналізувавши основу степенів у цьому рівнянні, робимо висновок, що при будь-яких значеннях b основа $1 + b^2 > 1$. Функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $a = 1$ — постійною (див. графіки функції $y = a^x$ у табл. 18).

Основа $1 + b^2 = 1$ при $b = 0$, а при всіх інших значеннях b основа $1 + b^2 > 1$.

Розглянемо кожен із цих випадків окремо, тобто $b = 0$ і $b \neq 0$.

ОДЗ: $x \geq 0, \quad b \in \mathrm{R}$.

Розглянемо два випадки .

1) при $b = 0$ одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}} = 1^{4-\sqrt{x}}$, корені якого – усі дійсні числа з ОДЗ, тобто $x \geq 0$.

2) при $b \neq 0$ значення $1 + b^2 > 1$, і тоді задане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{x}$. Звідси $\sqrt{x} = 2$, тоді $x=4$.

Відповідь: 1) при $b = 0 \quad x \in [0;+\infty)$;

2) при $b \neq 0 \quad x=4$.

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування *позбутися числових доданків у показниках степенів,* використовуючи формули $a^{u+v} = a^u a^v$; $a^{u-v} = \dfrac{a^u}{a^v}$. Наприклад, у рівнянні

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \qquad (1)$$

замість 4^{x+1} записуємо добуток $4^x \cdot 4^1$ і одержуємо рівняння

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0, \qquad (2)$$

рівносильне заданому.

Потім пробуємо *всі степені* (із змінною в показнику) *звести до однієї основи і виконати заміну змінної.* Наприклад, у рівнянні (2) степінь з основою 4 можна записати як степінь з основою 2: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ й одержати рівняння

$$2^{2x} \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \qquad (3)$$

Нагадаємо загальний орієнтир: **якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).**

Звертаємо увагу на те, що $2^{2x} = (2^x)^2$. Отже, у рівняння (3) змінна фактично входить в одному вигляді — 2^x, тому в ньому зручно ввести заміну $2^x = t$ й одержати квадратне рівняння

$$4t^2 - 3t - 10 = 0 \qquad (4)$$

Знаходимо корені для цього рівняння, а потім виконуємо обернену заміну

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного даному на його ОДЗ (у рівнянні (1) — на множині всіх дійсних чисел), через те що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожен корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, аналогічно тому, як було обґрунтовано рівносильний перехід для найпростіших показникових рівнянь.)

У тих випадках, коли всі степені (із змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно *спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння* [20].

Наприклад, розглянемо рівняння

$$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0. \qquad (5)$$

Усі степені в цьому рівнянні можна записати через основи 2 і 3, оскільки $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}, \quad 9^x = (3^2)^x = 3^{2x}, \quad 6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x.$

Одержуємо рівняння $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0.$ (6)

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степінь *2x* (степінь одночлена *2^x -3^x* теж дорівнює *$x + x = 2x$).*

Загальний орієнтир: якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається **однорідним**. *Розв'язується однорідне рівняння діленням обох його частин на найвищий степінь однієї із змінних.*

Отже, рівняння (6) є однорідним, і його можна розв'язати діленням обох частин або на *2^{2x}*, або на 3^{2x}. Відзначимо, що при всіх значеннях *x* вирази *2^{2x}* і 3^{2x} не дорівнюють нулю. Отже, при діленні на ці вирази не може відбутися втрата коренів (як це могло бути, наприклад, для однорідних тригонометричних рівнянь) і в результаті ділення обох частин рівняння на будь-який із цих виразів завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $3^x \neq 0$, одержуємо

$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-\frac{4\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0,$ або після скорочення $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^x}{3^x}-4=0.$

В останньому рівнянні всі члени можна подати як степені з однією основою $\frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-4=0,$ і виконати заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$. Подальше розв'язання одержаного рівняння повністю аналогічне розв'язанню рівняння (2). Шукаючи план розв'язування показникового рівняння, потрібно враховувати, що при розв'язуванні деяких з них доцільно *перенести всі члени рівняння в один бік і спробувати розкласти* одержаний вираз *на множники,* наприклад з використанням групування членів

$6^x-9\cdot 2^x-2\cdot 3^x+18=0$

Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержуємо

$2^x(3^x-9)-2(3^x-9)=0$

Тепер можна винести за дужки спільний множник 3^x-9:

$(2^x-2)\cdot(3^x-9)=0$ Тоді $3^x-9=0$ або $2^x-2=0$. Одержуємо два рівняння:

1) $3^x=9$, тоді x =2;

2) $2^x=2$, тоді x =1.

Відповідь: 2; 1.

Приклади розв'язування завдань.

Приклад . Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{3^x}-\frac{4}{3^x+1}=1.$

Розв'язування. У задане рівняння змінна входить тільки в одному вигляді 3^x, тому зручно ввести заміну $3^x=t$ й одержати дробове рівняння. Знаходимо його корені, а потім виконуємо обернену заміну.

Заміна $3^x=t$. Одержуємо $\frac{6}{t}-\frac{4}{t+1}=1$. Тоді $6(t+1)-4t=t(t+1)$, $t^2-t-6=0$. Звідси $t_1=-2, t_2=3$. Обернена заміна дає $3^x=-2$ - коренів немає, або $3^x=3$, тоді x = 1. Але треба не забувати про те, що можна отримати сторонні розв'язки , для цього досить урахувати те, що $t = 3^x > 0$, і тоді ОДЗ одержаного рівняння: $t \neq -1, t \neq 0$ буде врахована автоматично.

Відповідь: 1.

Приклад . Розв’яжіть рівняння $25^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$

Розв’язування. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів.

$$25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot \frac{5^x}{5} - 3 = 0$$

Зводимо всі степені до однієї основи 5.

$$5^{2x} \cdot 5 - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$$

Виконуємо заміну $5^x = t$, розв’язуємо одержане рівняння.

$5t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 1, t_2 = -\frac{3}{5}$. Обернена заміна дає $5^x = 1$, тоді $x = 0$, або $5^x = -\frac{3}{5}$ - коренів немає.

Відповідь: 0.

Приклад . Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4^x + 4^y = 5 \end{cases}$

Розв’язування. Якщо з першого рівняння виразити y через x і підставити в друге, то одержимо показникові рівняння.

y = 1-x. Тоді з другого одержимо $4^x + 4^{1-x} = 5$, тобто $4^x + \frac{4^1}{4^x} = 5$. Заміна $4^x = t$ дає рівняння $t + \frac{4}{t} = 5$, з якого одержуємо рівняння $t^2 - 5t + 4 = 0$. Що має корені $t_1 = 1, t_2 = 4$. Обернена заміна дає $4^x = 1$, тоді $x = 0$, або $4^x = 4$, тоді $x = 1$. знаходимо відповідні значення $y = 1 - x$: якщо $x = 0$, то $y = 1$;

якщо $x = 1$, то $y = 0$.

Відповідь: (0;1),(1;0).

Приклад . Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5^x - 3^y = 16, \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$

Розв'язування. Якщо позначити $5^{\frac{x}{2}} = u$ і $3^{\frac{y}{2}} = v$. То матимемо систему $\begin{cases} u^2 - v^2 = 16, \\ u - v = 2. \end{cases}$ З другого рівняння цієї системи маємо $u = 2 + v.$ Тоді з першого рівняння одержуємо $(2+v)^2 - v^2 = 16.$ Звідси $v = 3.$, $u = 5$. Обернена заміна дає

$3^{\frac{y}{2}} = 3$, тоді $\frac{y}{2} = 1$, отже, $y = 2$;

$5^{\frac{x}{2}} = 5$, тоді $\frac{x}{2} = 1$, отже, $x = 2$.

Відповідь: (2;2).

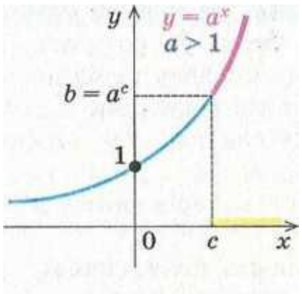
2.2. Розв'язування показникових нерівностей.

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x > b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$) ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти розв'язки нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, досить подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність $a^x > a^c$. (1)

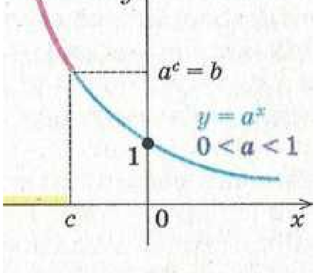
При $a > 1$ функція a^x зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тому з нерівності $a^x > a^c$ одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається зі знаком нерівності $a^x > a^c$).

При $0 < a < 1$ функція a^x спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тому з нерівності $a^x > a^c$ одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний знаку нерівності $a^x > a^c$).

Графічно це проілюстровано на рисунку:



а



б

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $5^x > 25$, досить подати цю нерівність у вигляді $5^x > 5^2$, урахувати, що 5 > 1 (функція 5^x — зростаюча, отже, при переході до аргументів знак нерівності не змінюється), і записати розв'язки: $x > 2$.

Зауважимо, що розв'язки заданої нерівності можна записувати у вигляді $x > 2$ або у вигляді проміжка $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, досить подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, урахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ - спадна, отже, при переході до аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати розв'язки: $x < 2$.

Ураховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що *при* $b \leq 0$ *нерівність* $a^x < b$ *розв'язків не має, а нерівність* $a^x > b$ *виконується при всіх дійсних значеннях* x.

Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а розв'язками не* рівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язуванні! найпростіших показникових нерівностей, відзначимо, що

при $a > 1$ *нерівність* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ *рівносильна нерівності* $f(x) > g(x)$, *а при* $0 < a < 1$ — *нерівності* $f(x) < g(x)$.

Коротко це твердження можна записати так:

при $a > 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (знак нерівності зберігається);

при $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$. (знак змінюється на протилежний).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, досить відзначити, що при $a > 1$ нерівності

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$

$f(x) > g(x)$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою й більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу (і навпаки: більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності $f(x) > g(x)$, та навпаки: усі розв'язки нерівності $f(x) > g(x)$ будуть розв'язками нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ А це означає, що нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) > g(x)$ — рівносильні [21].

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) > g(x)$ *при* $0 < a < 1$.

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових нерівностей, як і при розв'язуванні показникових рівнянь, треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} > a^{g(x)}$) .

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій.

Аналогічно до розв'язування показникових рівнянь усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності. Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання нерівності [21].

Приклад. Розв'язати нерівність $(0{,}6)^{x^2-7x+6} \ge 1$.

Розв'язування. Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6: $1 = (0{,}6)^{\circ}$.

Оскільки $0{,}6 < 1$, то при переході від степенів до показників знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

$(0{,}6)^{x^2-7x+6} \ge (0{,}6)^0$.

Оскільки функція $y = (0{,}6)^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \le 0$. Звідси $1 \le x \le 6$

Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Відповідь: $[1;6]$

Якщо ж у процесі розв’язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ.

Приклад. Розв’язати нерівність $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \le (0{,}1)^{2x-3}$

Розв’язування. Данна нерівність рівносильна нерівності

$4x^2-2x-2 \ge 2x-3 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \ge 0.$

Таким чином, початковій нервності задовільняють всі дійсні числа.

Відповідь: $x \in R$.

Розв’язання будь-якої нестрогої показникової нерівності відмінно від розв’язання відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв’язків коренів відповідного рівняння.

Нерівність виду $a^{f(x)} \ge b$, де $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$, може бути розв’язана за допомогою логарифмування обох частин (це можливо, тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \le 0$ нерівність справедлива для будь-якого x з ОДЗ нерівності. А нерівність $a^{f(x)} \le b$ при $b \le 0, a > 0$, $a \ne 1$ розв’язків не має.

Приклад. Розв’язати нерівність $3^{2x-1} < 11^{3-x}$

Розв’язування. Обидві частини нерівності додатні при будь-якому значенні x. Прологарифмувавши обидві частини нерівності за основою 3, отримаємо нерівність $2x-1 < (\log_3 11)(3-x)$ рівносильну початковій.

Таким чином $(2+\log_3 11)x < 1+3\log_3 11$. Звідси з врахуванням того, що $2+\log_3 11 > 0$, знаходимо всі розв’язки початкової нерівності - проміжок

Відповідь: $-\infty < x < \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}$.

2.3. Методика розв’язування логарифмічних рівнянь.

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, це рівняння не має розв’язків, якщо $b \leq 0$, і має єдиний корінь у випадку $b > 0$. Цей корінь називають логарифмом *b* за основою *a* і позначають $\log_a b$, тобто $a^{\log_a b} = b$.

Логарифмом числа *b* за основою а називається показник степеня, до якого треба піднести основу *a*, щоб дістати число *b.*

Формулу $a^{\log_a b} = b$ (де $b > 0$ і $a \neq 1$) називають основною логарифмічною тотожністю.

Фунцкію, задану формулою $y = \log_a x$, називають логарифмічною функцією за основою *a*.

Якщо деякий вираз А, який складається з додатніх чисел за допомогою операцій множення, ділення та піднесення до степеня, то використовуючи властивості логарифмів, можна виразити $\log_a A$ через логарифми що входять у вираз *A* чисел. Таке перетворення називається логарифмуванням. Розв’язок оберненої задачі, тобто знаходження виразу за його логарифмом, називається потенціюванням [16].

Під час роботи з логарифмами застосовуються такі їх властивості, що випливають з властивостей показникової функції:

Для будь-якого $a > 0$ $(a \neq 1)$ і будь-яких додатних *x* і *y* виконуються рівності

1. Логарифм одиниці рівен нулю

$\log_a 1 = 0$

2. Логарифм основи дорівнює одиниці

$\log_a a = 1$

3. Основна логарифмічна тотожність.

Якщо $x > 0$ то $x = a^{\log_a x}$.

4. Формула для логарифма добутку.

Якщо $x > 0$ і $y > 0$, то $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.

Якщо $x<0$ і $y<0$, то $\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$

5. Формула для логарифму частки

Якщо $x>0$ і $y>0$, то $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.

Якщо $x<0$ і $y<0$, то $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$

6. Формула логарифма степеня.

Якщо $x>0$, то $\log_a x^p = p\log_a x$

Логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.

7. Формула переходу від одної основи логарифму до другой.

Якщо $x>0$, то $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ для будь-якого дійсного числа $b > 0$ та $b \neq 1$

Таким чином ми бачимо, що при зміні основи значення логарифмів змінюються пропорційно. Коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{\log_b a}$ називають модулем переходу.

Частинні випадки:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ або $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p\log_{a^p} b \quad (p \in R, p \neq 0)$

$\log_{a^k} b = \frac{\log_a b}{k}$, $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$.

Властивості степенів і логарифмів тісно пов’язані між собою. Вони фактично виражають одне і теж тільки один раз ми звертаємо увагу на поведінку самих степенів, а другий - на поведінку показників степеня:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, $\log_a x^p = p\log_a x$

Основні властивості логарифмічної функції:

1. Область визначення логарифмічної функції - множина всіх додатних чисел R_+, тобто D ($\log_a$) = R_+. (0; $+\infty$). Справді, кожне додатне число x має логарифм за основою a.

2. Область значень логарифмічної функції - множина всіх дійсних чисел (0 $+\infty$). Для будь-якого дійсного y виконується рівність $\log_a\left(a^y\right)=y$, тобто функція $y=\log_a x$ набуває значення y_0 в точці $x_0=a^{y_0}$.

3. Логарифмічна функція монотонна на всій області визначення. Якщо $a>1$ функція зростає , тобто якщо $x_2>x_1>0$, то $\log_a x_2>\log_a x_1$. Якщо $0<a<1$ функція спадає, тобто якщо $x_2>x_1>0$, то $\log_a x_2<\log_a x_1$.

4. Логарифмічна функція $y=\log_a x$, де $a>0$ та $a\neq 1$ - це функція обернена до показникової функції $y=a^x$. Графіки показникової і логарифмічної функції, що мають однакову основу, симетричні відносно прямої $y=x$ [15].

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, що містять невідому величину під знаком логарифма або в основі логарифма (або те і друге одночасно). Найпростійшими логарифмічними рівняннями назвемо рівняння виду:

$\log_a x=b$ та $\log_x m=n$

Для рівняння $\log_a x=b$, де $a>0$, $a\neq 1$, $x=a^b$

Це основано на наступній важливій властивості логарифма :

Логирифм двох додатніх чисел по одій і тій же додатній і не рівній нулю основі рівні тоді і тільки тоді коли рівні ці числа.

При розв'язуванні логарифмічних рівннянь використовуються означення логарифма та його властивості, дії логарифмування та потенціювання, різні логарифмічні тотожності.

Логарифмічне рівняння , в якому під знаком логарифма стоїть деяка функція *f(x)*, $\log_a f(x)=b$, $a>0$, $a\neq 1$, має множину допустимих значень x, заданих нерівністю $f(x)>0$ еквівалентно рівнянню $f(x)=a^b$.

Приклад . Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)=2$

Розв'язування. Початкове рівняння рівносильно рівнянню $\left(-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, звідки $x=-9$. Число (-9) - єдиний корінь данного рівняння.

Відповідь: -9

Приклад. Розв'язати рівняння $0{,}2\log_x\frac{1}{32}=-0{,}5$

Розв'язування. Оскільки $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$, то $\log_x\frac{1}{32}=5\log_x\frac{1}{2}$, тобто початкове рівняння рівносильно рівнянню $\log_x\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, звідки $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$. Число 4 –

єдиний корінь данного рівняння.

Відповідь: 4.

Розв'язування логарифмічних рівнянь зведенням до найпростійших логарифмічних рівнянь.

Рівняння, що розв'язуються за допомогою означення логарифма.

Приклад . Розв'язати рівняння $\log_8\log_2\log_2\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

Розв'язування. За означенням логарифма отримуємо

$$\log_2\log_2\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=8^0=1$$

$$\log_2\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=2$$

$$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=2^2=4$$

$$\begin{cases}-\frac{1}{x}=16\\ -\frac{1}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{16}\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{16}$$

$$\log_8\log_2\log_2\log_2 16=0$$

$$\log_2\log_2\log_2 16=1$$

$$\log_2\log_2 16=2$$

$\log_2 16 = 4$

$16 = 2^4$

Перевірка: $16 = 16$

Використання рівнянь-наслідків при розв’язуванні логарифмічних рівнянь

При розв’язуванні рівняння головне — не загубити його корені, тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного — у цьому випадку одержуємо рівняння-наслідки. Нагадаємо, що кожен корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи це означення, можна обґрунтувати такий орієнтир: *якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння-наслідки* (оскільки кожен корінь першого рівняння буде коренем наступного рівняння). Нагадаємо, що хоча при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому *перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків* [16].

Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь

Теорема: Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$ при обмеженнях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Доведення: Нехай x - розв’язок рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Тоді визначені логарифми чисел $f(x)$ та $g(x)$, тобто ці числа повинні бути більше нуля. Потенцируя рівність $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, отримуємо рівність $f(x) = g(x)$. Навпаки, нехай x - розв’язок рівняння $f(x) = g(x)$, причому $g(x) > 0$ та $f(x) > 0$. Тоді рівність $f(x) = g(x)$ можно прологарифмувати, і ми отримаємо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$), рівносильне кожній з наступних систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Для розв'язку рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходять тільки до одної з цих систем (та, яка легше) або розв'язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корні лишні для початкового рівняння , і перевіряють кожне з них підстановкою в початкове рівняння.

Для розв'язування рівнянь використовують властивості логарифма [25].

Приклад. Розв'язати рівняння $\log_2 (x-5)^2 - 2 = 2\log_2 (2x)$

Розв'язування.

ОДЗ: $\begin{cases} (x-5)^2 > 0, \\ 2x > 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \neq 5, \\ x > 0. \end{cases}$

На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$$\log_2 (x-5)^2 - \log_2 2^2 = 2\log_2 (2x),$$

$$\log_2 \left(\frac{(x-5)^2}{2^2} \right) = \log_2 (2x)^2,$$

$$\frac{(x-5)^2}{2^2} = (2x)^2,$$

$$(x-5)^2 = 4 \cdot 4x^2,$$

$$15x^2 + 10x - 25 = 0,$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що $x_1 = 1,$ входить до ОДЗ, отже, є коренем; $x_2 = -\frac{5}{3}.$ - не входить до ОДЗ, отже, не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 1.

Приклад. Розв'язати рівняння $\log_4 x + 6\log_x 4 = 5$

Розв'язування ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_4 x + 6\frac{1}{\log_4 x} = 5$$

Заміна: $\log_4 x = t$. Одержуємо: $t^2 - 5t + 6 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 3.$

$\log_4 x = 2$ або $\log_4 x = 3$

$x = 4^2 = 16$ або $x = 4^3 = 64$

Відповідь: 16, 64.

Приклад. Розв'язати рівняння $2(\lg x - \lg 6) = \lg x - 2\lg\left(\sqrt{x} - 1\right)$

Розв'язування Враховуючи область визначення логарифмічної функції, квадратного кореня, отримуємо систему , рівносильну заданому рівнянню:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x} - 1 > 0, \\ \lg\frac{x^2}{36} = \lg\frac{x}{(\sqrt{x} - 1)^2} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ \frac{x^2}{36} = \frac{x}{(\sqrt{x} - 1)^2} \end{cases}$$

Обидві частини рівняння розділимо на x (при цьому не буде втрати коренів, так як $x > 0$) та помножимо на $36(\sqrt{x} - 1)^2$ (при чому не з'являться зайві корені, так як $x \neq 1$). Тоді отримаємо систему $\begin{cases} x > 1, \\ x(\sqrt{x} - 1)^2 = 36. \end{cases}$ З рівняння $\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)\right)^2 = 36$ знаходимо $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \neq 6$, оскільки $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0$. Далі маємо $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 6$ або $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 = 0$. Значить, $\sqrt{x} = 3$, звідки x = 9>1; $\sqrt{x} = -2$, що неможливо.

Відповідь $x = 9$.

Аналогічно рівняння виду $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$, $A > 0$ можна замінити рівносильною системою

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Для розв’язку рівняння $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$ переходять тільки до одної з цих систем (та, яка легше) або розв’язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корні зайві для початкового рівняння , і перевіряють кожне з них підстановкою в початкове рівняння.

Приклад. Розв’язати рівняння $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\left(-\frac{1}{x+1}\right)} 3$.

Розв’язування.

Рівняння $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\left(-\frac{1}{x+1}\right)} 3$ рівносильне змішаній системі

$$\begin{cases} \dfrac{5+x}{3} > 0, \\ \dfrac{5+x}{3} \neq 1, \\ \dfrac{5+x}{3} = \dfrac{-1}{x+1} \end{cases}$$

Рівняння системи має два корені: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. Число $x_1 = -4$, задовольняє всім співвідношенням системи, а для числа $x_2 = -2$ не виконується умова $\frac{5+x}{3} \neq 1$. Таким чином рівняння $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\left(-\frac{1}{x+1}\right)} 3$ має один корінь - число $x_1 = -4$.

Зведення логарифмічних рівнянь до простійших рівнянь, нерівностей, систем.

Рівняння виду $\log_{g(x)} f(x) = b$ рівносильно мішаній системі

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x)^b \end{cases}$$

Приклад. Розв’язати рівняння $\log_x \left(2x^2 - 3x - 4\right) = 2$

Розв’язування. Данне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2x^2 - 3x - 4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (x+1)(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Тобто, єдиним корнем рівняння є число 4.

Відповідь: 4.

Рівняння виду $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ можна замінити системами

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases}$$

Рівняння виду $\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$ можна замінити системами

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x) \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\log_{x^2+6x+8}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x)\right) = 0$

Розв'язування. Данне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0, \\ x^2 + 6x + 8 \neq 1, \\ \log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0, \\ x^2 + 6x + 8 \neq 1, \\ 2x^2 + 2x + 3 > 0, \\ 2x^2 + 2x + 3 \neq 1, \\ 2x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння цієї системи :

$$2x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Число -3 не задовольняє умові $x^2 + 6x + 8 > 0$. Число (-1) задовольняє всім умовам системи. Тобто, данне рівняння має єдиний корінь $x = -1$. Відповідь: -1.

Розв'язування логарифмічних рівнянь за допомогою властивостей логарифмічної функції.

Деякі логарифмічні рівняння вдається розв'язати за допомогою дослідження поведінки функції, які належать до правої та лівої частини рівняння.

Монотонність функції часто дозволяє визначити число коренів рівняння, а іноді і знайти значення.

Приклад.Розв’язати рівняння $\log_7(x+2) = 6 - x$

Розв’язування. Підстановкою (підбором) перевіряємо, що x=5 є розв’язком рівняння. Інших розв’язків рівняння не має, так як функція, яка знаходиться в лівій частині, зростає , а в правій - спадає, з цього випливає , що графіки цих функції не можуть мати більше одного перетину, тобто має один єдиний корінь.

Як і логарифмічні рівняння, системи логарифмічних рівнянь можна розв’язувати за допомогою як систем наслідків (кожен розв’язок першої системи є розв’язком другої), так і рівносильних перетворень систем (усі розв’язки кожної з них є розв’язками іншої).

Крім того при розв’язуванні логарифмічних систем можна використовувати ті самі методи, що й при розв’язувнні інших видів систем (метод алгебраїчного додавання, підстановка деякого виразу з одного рівняння в інші, заміна змінних) [15].

Приклад. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_3(y - x) = 1. \end{cases}$

Розв’язування. Розв’яжемо задану систему за допомогою систем-наслідків. Але при використанні цього методу (систем-наслідків обов’язково необхідно виконати перевірку одержаних розв’язків підстановкою в початкову систему.

$$\begin{cases} \log_2(xy) = 2, \\ \log_3(y - x) = 1. \end{cases}$$

За означенням логарифма маємо $\begin{cases} xy = 2^2, \\ y - x = 3. \end{cases}$

Із другого рівняння останньої системи одержуємо $y = x + 3$ і підставляємо в перше рівняння:

$x(x+3) = 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -4.$

Тоді $y_1 = 4, \quad y_2 = -1.$

Перевірка: $\begin{cases} x=1, \\ y=4. \end{cases}$ - розв’язок заданої системи. $\begin{cases} \log_2 1+\log_2 4=2, \\ \log_3(4-1)=1. \end{cases} \begin{cases} 2=2 \\ 1=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-4, \\ y=1. \end{cases}$ - сторонній розвязок.

Відповідь: (1;4)

Приклад. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Розв’язування. Розв’яжемо задану систему за допомогою рівносильних перетворень. Для цього досить урахувати її ОДЗ.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$

Тоді з першого рівняння маємо $\dfrac{1}{\log_x y}+\log_x y=2$. Виконаємо заміну $t=\log_x y$.

$\dfrac{1}{t}+t=2$, $t^2-2t+1=0,$ $t=1.$

Обернена заміна дає $\log_x y=1$ тобто $y=x$

Тоді з другого рівняння системи маємо $x^2-x-20=0$, $x_1=-4,$- не входить в ОДЗ $x_2=5.$ - входить в ОДЗ.

$\begin{cases} x=5, \\ y=5. \end{cases}$

Відповідь: (5;5)

2.4. Розв’язування логарифмічних нерівностей.

Розв’язування найпростіших логарифмічних нерівностей.

Означення: Нерівності, де хоча б одна з функцій логарифмічна, називаються логарифмічними нерівностями.

Найпростішими логарифмічними нерівностями звичайно вважають нерівності виду $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ (де $a>0$ і $a\neq 1$).

I. При $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ зростає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ від значень функції до значень аргументу (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити той самий знак нерівності, тобто

$f(x)>g(x)$.

Враховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна нерівності $f(x)>g(x)$. Коротко це можна записати так:

при $a > 0$ $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

II. При $0 < a < 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ спадає на всій своїй області визначення (тобто при t > 0), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ від значень функції до значень аргументу, ми повинні знак нерівності змінити на протилежний, тобто

$f(x) < g(x)$.

Враховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ на її ОДЗ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$. Коротко це записуємо так:

при $0 < a < 1$ $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Підсумовуючи одержані результати, відзначимо, що *для розв'язування нерівності* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *за допомогою рівносильних перетворень необхідно врахувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень* *аргументу (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) ураховувати значення а: при а* > 1 *знак нерівності не змінюється, при* $0 < a < 1$ *знак нерівності змінюється на протилежний* [16].

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_2 x > 3$.

Розв'язування. Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати: $\log_2 x > \log_2 2^3$. Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x = 8$

Відповідь: $(8;+\infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\lg(-x) < -1$.

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді (1):

$\lg(-x) < \lg 10^{-1}$,

звідки знайдемо розв'язок $0 < -x < 0{,}1$, або $-0{,}1 < x < 0$.

Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей виконується за допомогою або рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

- *ураховуємо ОДЗ заданої нерівності;*

- *стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.*

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Розв'язання логарифмічних нерівностей потребує міцних знань з багатьох розділів алгебри. Потрібно вміти свідомо користуватися означенням логарифма, логарифмуванням та потенціюванням і, що дуже важливо, пам'ятати про те, що властивості логарифмічної функції різні при основах, менших або більших одиниці. Суттєвим при розв'язуванні таких нерівностей є обмеженість області визначення логарифмічної функції.

Розв'язання будь-якої нестрогої логарифмічної нерівності відрізняється від розв'язання відповідної строгої логарифмічної нерівності тільки включенням у множину всіх її розв'язків множину коренів відповідного логарифмічного рівняння [25].

Існують різні способи оформлення розв'язання логарифмічної нерівності. Найбільш поширені з них - метод переходу до розв'язання рівносильних совокупностей нерівностей і метод розбиття ОДЗ даної нерівності на проміжки, на яких розв'язуються відповідні рівносильні (на проміжку, що розглядається) нерівності. По суті, ці методи розв'язування однакові і розрізняються тільки способом оформлення.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)<\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

Розв'язування. Дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases}3x-4>x-2,\\ x-2>0.\end{cases}$. Звідси

$$\begin{cases}x>1,\\ x>2.\end{cases}\Rightarrow x>2$$

Відповідь: (2;+ ∞)

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_2^2(x-1)^2-\log_{2^{-1}}(x-1)-5>0.$

Розв'язування. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок (1;+ ∞), то виконується рівність $\log_2(x-1)^2=2\log_2(x-1).$ Тоді дану нерівність можна переписати так: $4\log_2^2(x-1)+\log_2(x-1)-5>0.$ Нехай $\log_2(x-1)=t.$

Отримуємо: $4t^2+t-5>0,$ $\left[\begin{array}{l}t<-\dfrac{5}{4},\\ t>1.\end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)<-\dfrac{5}{4},\\ \log_2(x-1)>1.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)<\log_2 2^{-\frac{5}{4}},\\ \log_2(x-1)>\log_2 2.\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}0<x-1<2^{-\frac{5}{4}},\\ x-1>2.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}1<x<1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{32}},\\ x>3.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(1;1+\frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right)\cup(3;+\infty)$.

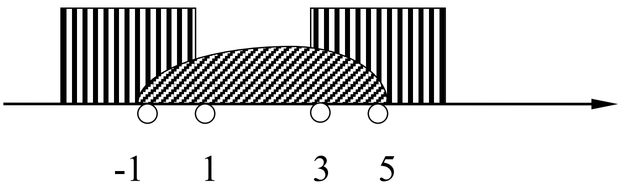
Приклад. Розв'язати нерівність $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$

Розв'язування. Користуючись властивістю логарифмічної функції, дістаємо, що дана нерівність рівносильна нерівності

$0<x^2-4x+3<8$ або $\begin{cases} x^2-4x+3<8 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x^2-4x+3<8 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$$

Розв'яжемо ці нерівності:



Відповідь: $3<x<5,\ -1<x<1$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(3-2x)<1$.

Розв'язування. Скориставшись співвідношенням $1=\log_{x^2}x^2$, розв'яжемо дві системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2>1 \\ 0<3x-2<x^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0<x^2<1 \\ 0<x^2<3x-2 \end{cases}$.

Шуканий розв'язок: $x\in(2;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(2;+\infty)$.

Приклад. Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_x\left(x^2-x-2\right)<2$.

Розв'язування. Запишемо дану нерівність у вигляді :

$\log_x\left(x^2-x-2\right)<\log_x x^2$.

Звідси дістаємо дві системи:

1) $\begin{cases} x > 1 \\ 0 < |x^2 - x - 2| < x^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ |x^2 - x - 2| > x^2 > 0 \end{cases}$.

Побудуємо графік функції $y = |x^2 - x - 2|$.

При $1 < x < 2$ маємо:

$2 + x - x^2 < x^2$, $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{a};\ 2 \right)$.

При $x > 2$ маємо:

$-2 - x + x^2 < x^2$, $x > -2$, $x \in (2; +\infty)$.

При $0 < x < 1$ маємо:

$2 + x - x^2 > x^2$, $x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)$; $x \in (0; 1)$.

Відповідь: $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\ 2 \right) \cup (2;\ \infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(2 + x) < 0.$

Розв'язування:

<u>Перший спосіб</u>: Данна нерівність рівносильна нерівності $\log_{x^2}(2 + x) < \log_{x^2} x^2$, яке рівносильно сукупності двох систем

а) $\begin{cases} x^2 > 1, \\ 2 + x < x^2, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 < 2 + x. \end{cases}$

Розв'язками системи а) є проміжки $-2 < x < -1$ і $2 < x < +\infty$.

Розв'язками системи б) є проміжки $-1 < x < 0$ і $0 < x < 1$.

Об'єднавши отримані множини розв'язків систем сукупності, знаходимо множину всіх розв'язків початкової нерівності - всі x з чотирьох проміжків: $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$.

<u>Другий спосіб:</u> Область допустимих значень данної нерівності визначється системою $\begin{cases} x^2 > 1, \\ x^2 \neq 1, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$, звідки знаходимо ОДЗ нерівності: $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$.

а) Розглянемо спочатку данну нерівність на множині $(-2;-1)\cup(1;+\infty)$. На цій множині вона рівносильна нерівності $2+x<x^2$ (так як $x^2>1$), розв'язком якої на цій множині є проміжки $-2<x<-1$, $2<x<+\infty$.

б) На множині $(-1;0)\cup(0;1)$ дана нерівність равносильна нерівності $2+x>x^2$ (так як $x^2<1$), розв'язками якого на цій множині є проміжки $-1<x<0$ і $0<x<1$.

Об'єднавши отримані розв'язки, отримуємо множину розв'язків початкової нерівності - всі x з чотирьох проміжків:

Відповідь: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>2$.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей слід уникати перетворень, які можуть привести до втрати або появи сторонніх розв'язків, так як в протилежному випадку обгрунтування правильності відповіді, як правило, є більш складною задачею, чим розв'язання початкової нерівності. Тим самим, по суті, єдиним методом розв'язування логарифмічних нерівностей є метод переходу до рівносильних нерівностей (системам або сукупностям)

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_3(x+2)(x+4)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.

Розв'язування: Області допустимих значень нерівності належать всі значення x, які задовільняють умові $x>-2$. При цих значеннях невідомого

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=-\log_3(x+2),\ \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7=\log_3 7$$

та $\log_3(x+2)(x+4)=\log_3(x+2)+\log_3(x+4)$;

тому початкову нерівність можна записати у вигляді

$$\log_3(x+2)+\log_3(x+4)-\log_3(x+2)<\log_3 7,$$

або $\log_3(x+4)>\log_3 7$.

Таким чином, початкова нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \log_3(x+4) < \log_3 7 \\ x > -2 \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності цієї системи є проміжок $-4 < x < 3$. З цих значень x другій нерівності задовольняють тільки ті x, які належать інтурвалу $-2 < x < 3$. Тобто, множиною всіх розв'язків початкової нерівності є інтервал $-2 < x < 3$.

Відповідь: $-2 < x < 3$

Висновки

У минулому столітті алгебру вважали наукою про розв’язування рівнянь. Насправді ж зміст сучасної алгебри значно ширший. Тепер навіть у шкільному курсі алгебри, крім рівнянь, розглядають тотожні перетворення, функції та нерівності. Рівняння та нерівності в математиці відіграють важливу роль. Їх використовують у математичному аналізі, теорії функцій, програмуванні та у всіх інших розділах математики. У шкільному курсі математики вивчення рівнянь і нерівностей являє собою ефективний засіб формування в учнів необхідним математичних компетентностей закріплення, поглиблення і розширення теоретичних їх знань.

Головне завдання школи сьогодні — формування гармонійно розвиненої, активної, творчої особистості, яка буде здатна навчатися протягом усього життя, вміти застосовувати знання в певних ситуаціях. Потрібно, щоб учитель не допускав розумового ледарства на уроці, а навпаки щоб навчання було цікавим та ефективним для всіх дітей, а спілкування радісним і корисним. Учитель має постійно стимулювати в учнів прагнення піднятися вище того, що вже ними досягнуто, почуття власної гідності, добрий настрій, за якого працюватиметься швидше й результативніше.

Навчальний процес повинен не просто пристосовуватись, підбудовуватись під власний рівень знань і умінь учнів, змінюючи зміст і методи, а орієнтуватись на досягнення максимально важливих результатів кожним учнем і, що не менш важливе, на розвиток мислення, пізнавальних можливостей, інтересів, зацікавленість у вивченні алгебри.

Розв’язування рівнянь та нерівностей формує в учнів уміння досліджувати різного роду функції, сприяє засвоєнню їх властивостей, забезпечує узагальнення і систематизацію отриманих знань. Ось чому дуже важливо сформувати в учнів техніку розв’язування такого роду задач, ознайомити їх з основними методами, підходами, які при цьому використовувалися.

У даній бакалаврській роботі викладені методичні матеріали при вивченні показникових і логарифмічних рівняннь та нерівностей в 10-11 класах, проаналізовані різні підходи до вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем. Робота складається зі вступу, двох основних розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

Аналізуючи методичну літературу й аналіз практики викладання показали, що не дивлячись на прогрес і розвиток методики, у роботі все ж таки є недоліки. Учні не отримують потрібних їм знань, а це тому, що мало приділяється уваги розв'язуванню рівнянь та нерівностей, в навчальній програмі виділено малу кількість годин. Основною проблемою є недостатність теоретичного матеріалу в підручнику, тому учні, можна сказати, лише знайомляться, а не вчаться розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи. Учні не знають основних методів розв'язування рівнянь, не говорячи вже про їх суть і застосування.

У вступі показано важливість та актуальність даної тематики, изначено об'єкт, предмет і гіпотезу дослідження, поставлено завдання. В інших розділах проаналізували проблеми вивчення рівнянь та нерівностей в теорії і на практиці; визначили ефективні методи, прийоми, внаслідок яких створюються оптимальні умови для роботи всіх учнів, підвищується творчий потенціал особистості.

У розділі „Теоретичні основи дослідження " показано місце рівнянь та нерівностей в курсі шкільної алгебри, розглянуто ряд статей методистів, науковців, вчителів математиків, які діляться власним досвідом і дають методичні поради, подається ряд теоретичних положень по даній темі, теоретично обґрунтовується використання інтерактивних технологій на уроках.

Практика викладання математики в школі переконує, що кожен учень повинен пройти через повноцінний навчальний процес засвоєння знань, який є індивідуальним, залежним від здібностей та рівня розумового розвитку школяра.

Список використаних джерел

1. Аджиєва А. Тригонометричні рівняння / Математика. Додаток до газети «Перше вересня в школі» № 33, 2001р

2. Афанасьєва О. М. Математика. 10 клас: Підручник для рівня стандарту / – О.М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. – 480 с.

3. Бурда М. І. Математика: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: рівень стандарту / М.І. Бурда, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2010. – 392 с.: іл.

4. Деніщева Л. О. Готуємося до єдиного державного іспиту. Математика. [Текст] / Л. О. Деніщева – М.: Дрофа, 2004. – 120 с.

5. Єгоров Г. Ірраціональні нерівності / А Єгоров / Математика. Перше вересня. – 2002. – № 15. – С. 13–14.

6. Звавіч В.І., Пігарєв Б.П. Тригонометричні рівняння// Математика в школі, 2010. – № 2. С.23–33

7. Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.

8. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 352 с.: іл.

9. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.

10. Мордкович А. Г. Алгебра і початки аналізу. 10-11 клас [Текст]: У двох частинах. Ч.1: підручник для загальноосвітніх установ / А. Г. Мордкович - М.: Мнемозина, 2004. – 315 с.

11. Мордкович А. Г. Алгебра і початки аналізу. 10-11 клас [Текст]: У двох частинах. Ч.2: задачник для загальноосвітніх установ / А. Г. Мордкович - М.: Мнемозина, 2004. – 315 с.

12. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту/ Міністерство освіти України – 2018.

13. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / Міністерство освіти України – 2018.

14. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів: рівень профільної підготовки/ Міністерство освіти України – 2018.

15. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл.

16. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – 2-ге вид., виправл. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2006. – 416 с.

17. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.

18. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.

19. Потапов М. Як розв'язувати рівняння без ОДЗ [Текст] / М. Потапов / Математика. Перше вересня – 2003. – № 21. – С. 42–43.

20.Пишевська Н.П. Нестандартний підхід до розв’язування рівнянь. / Математика в школах України. – 2006. – №5. – С. 14–15.

21. Приходченко Н.М. Дослідження мотивів навчання математики. / Математика в школах України. – 2006 – №7. – С. 15–19.

22. Роганін О. М. Математика: Кишеньковий довідник / О. М. Роганін. – 5-те вид. – Х: Веста, 2011. – 416 с.

23. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : підручник для студ. спец. вищих навч. закладів. / З.І. Слєпкань.– К.: Вища школа, 2006.–582с.

24. Токарєва А. Тригонометричні нерівності. / Математика/ Додаток до газети «Перше вересня в школі» № 44, 2002 р.

25. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10-11 кл. сер. шк. / М. І. Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 384 с.
26. www.mon.gov.ua.

Додаток

1. *Диференційована система вправ*:

Система задач має три рівні складності:

I. *Обов'язковий рівень* - містить задачі та вправи, в основному репродуктивного характеру на 2-3 логічних кроки, представлені у формі тестів. Для їх розв'язування учням достатньо знати правила, означення, формули, теореми та ознаки, передбачені навчальними програмами, а також вміти виконувати найпростіші тотожні перетворення, спрощення та обчислення.

II. *Підвищений рівень* - містить завдання на 4-6 логічних кроки, розв'язання яких вимагає від учня творчого застосування одержаних знань з достатньо повним і строгим обґрунтуванням ходу розв'язку.

III. *Поглиблений рівень* - це, як правило задачі та вправи, розв'язання яких вимагає вміння орієнтуватися в нестандартних ситуаціях, застосовувати оригінальні та штучні прийоми, глибини та строгості суджень, характерних для тих, хто вивчає шкільний курс математики на поглибленому рівні.

Логарифмічні рівняння і нерівності;

Обов'язковий рівень.

Знайти корені рівняння.

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=-2$

   1) 5,

   2) 3,

   3) 4,

   4) інша відповідь.

2. $5^{2x}=4$

   1) $\log_2 5$,

   2) $\log_5 2$,

   3) інша відповідь.

3. $\lg\left(x^2+2x+3\right)=\lg 3$

1) -2; 0,

2) інша відповідь,

3) 0; -2.

4. $\log_5(3x+1)=2$

1) 3,

2) 8,

3) інша відповідь.

5. $\lg 2=\lg\left(\frac{x}{2}+4\right)$

1) -4,

2) 4,

3) 2

4) інша відповідь.

При яких значеннях x справедлива рівність.

1. $\log_4\left(x^2-1\right)=\log_4 3$

1) $-1;1$,

2) $-2;2$,

3) $-3;3$,

4) інша відповідь.

2. $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$

1) $\frac{1}{9}$,

2) 9,

3) -9

4) інша відповідь.

3. $\log_x 4=-2$

1) 2,

2) $\frac{1}{2}$,

3) -2

4) інша відповідь.

Розв'язати нерівності

1. $\log_{\frac{1}{5}}(4x-1) < -2$

1) $x > 6{,}5$,

2) $x < 6{,}5$,

3) інша відповідь.

2. $\log_{2,5}(2x) > 2$

1) $x < 3{,}125$,

2) $x > 3{,}125$,

3) інша відповідь.

3. $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$

1) $(-2;1]$,

2) $(-2;1)$,

3) $[-2;1)$,

4) інша відповідь.

4. $\log_{0,7} x > 1$

1) $x > 0{,}7$,

2) $x < 0{,}7$,

3) інша відповідь.

Підвищений рівень

Розв'язати рівняння

1. $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$

2. $\log_{0,5} x = \log_{0,5}\left(2x^2 - x\right)$

3. $2\ln(-x) = \ln(x+2)$

4. $\lg\left(12x - x^2 - 19\right) = 2\lg\left(x - 1\right)$

5. $x^{\lg x - 2} = 1000$

6. $\log_2 x + \log_x 16 = 5$

Розв'язати нерівності

1. $2^{9x - x3} \geq 1$

2. $\log_{0,3} \dfrac{1 + 2x}{1 + x} > 1$

3. $\log_2\left(x^2 + 3x\right) \leq 2$

4. $\log_5^2 x - \log_5 x > 2$

5. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$

6. $\log_3 x + \log_x 9 > 2$

7. $\left(3x - 6\right) \cdot \log_{0,5} x > 0$

Поглиблений рівень

Розв'язати рівняння

1. $\log_2 x^2 - \log_2^2\left(-x\right) = 3$

2. $\log_{-2x}\left(2x^2 - x - 1\right) = 1$

3. $\dfrac{\log_3\left(2x^2 - x\right)}{\log_2\left(2x + 2\right)} = 0$

4. $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$

5. $\log_2 \cos x + \log_{\frac{1}{2}}\left(-\sin x\right) = 0$

6. $x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}$

Розв'язати нерівність

1. $\lg^2 x + \lg x^3 + 2 \geq 0$

2. $\log_{x-3}\left(x - 1\right) < 2$

3. $\log_x \log_2\left(4^x - 12\right) \leq 1$

4. $\dfrac{\left|x - 2\right| - x}{\lg\left(x - 2\right)} > 0$

5. $\log_{5-x}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 < 3$

6. $\log_{4+2x}\left(x^2 + x - 2\right) \geq 1$