Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методика вивчення теми «Логарифмічні та показникові рівняння і нерівності»

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
Групи М-М-21 Спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Гудзалова Марина Василівна

Керівник кандидат фізико-математичних наук, проф. Крайчук Олександр Васильович

Рецензент:

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Організація навчання математики передбачає реалізацію особистісно-орієнтованої моделі навчання, першочергове завдання якої полягає в тому, щоб розпізнати та розвинути конкретні здібності, схильності, особливості мислення, потенціал кожного учня.

Навчання передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів. При цьому, основна функція вчителя полягатиме у педагогічному супроводі кожного учня в його пізнавальній діяльності, корекції його навчальних досягнень, допомозі школярам в актуалізації необхідних знань, отриманих ними раніше. Іншими словами, вчитель покликаний не стільки вчити школярів математиці, скільки створювати такі навчальні ситуації, в яких самі учні самостійно чи у співробітництві один з одним (або з учителем) опановують системою математичних знань, умінь та навичок.

Актуальність теми полягає в тому, що тема «Показникова і логарифмічна функції» є однією з основних тем в шкільній програмі з математики, їй приділяється велика кількість навчального часу. У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені і логарифми та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функцій, їх властивості та графік, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової та логарифмічної функціями, розв’язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності та їх системи. Сприйняття цієї теми вимагає від учнів неабиякого характеру та прикладної спрямованості.

Практика роботи в школі та зовнішнє оцінювання показали, що учні дуже багато помилок допускають при розв’язуванні показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. Тому ця тема є актуальною.

Особливу роль в дослідженні різних аспектів проблеми навчання здібних дітей мають роботи психологів, зокрема, Ю.З.Гільбуха, П.Я.Гальперіна, В.В.Давидова, З.І.Калмикової, А.О.Кірсанова, Г.С.Костюка, В.А.Крутецького, Н.С.Лейтеса, О.М.Матюшкіна, В.Д.Шадрікова та інших.

Обгрунтуванню змісту, методів, засобів навчання та активізації пізнавальної діяльності присвячені роботи М.І.Бурди, М.І. Жалдака, М.Я.Ігнатенка, З.І.Слєпканя, Т.М.Хмари, М.І.Шкіля та інших.

Не відкидаючи великого вкладу дослідників проблеми, потрібно відмітити, що не всі аспекти були повністю розкриті.

Практична необхідність, недостатня наукова обгрунтованість та значимість цієї проблеми зумовили вибір теми дослідження: «Методика розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей».

Об'єкт - процес вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Предмет дослідження – зміст і методика навчання учнів розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Мета дослідження – розробити і теоретично обґрунтувати методику розв’язувати показникові і логарифмічні рівняння та нерівності.

*Гіпотеза дослідження*_ полягає в тому, що організація навчально-виховного процесу на основі розробленої методики розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей дозволить покращити знання, вміння і навички учнів в порівнянні з традиційною методикою навчання.

Мета та висунута гіпотеза визначили такі основні *завдання:*

- аналіз літератури по темі дослідження;
- систематизувати відомості про розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь й нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри ;

• розробити методичні рекомендації по розв’язуванню показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Методологічною основою дослідження є підручники для студентів математичної спеціальності про викладання теми «Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності». В цих підручниках розглядаються також прийоми для кращого засвоєння матеріалу даної теми. Були використані підручники про теоретичні особливості вивчення теми, про допущення помилок на певному етапі розв’язання рівнянь і нерівностей дітей на уроці, посібники в таблицях і схемах для методичного оформлення матеріалу, програми для загальноосвітніх навчальних закладів про тематичне планування, посібники з цікавими матеріалом, який можна використати на уроках.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані методичні рекомендації можна використовувати для вдосконалення знань, вмінь і навичок учнів.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження доповідалися і були схвалені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів РДГУ у 2019 та 2020 роках .

Робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновки та список використаних джерел.

У першому розділі розглядаються теоретичні основи вивчення теми «Логарифмічні рівняння та нерівності». Наведено історичні відомості, означення та властивості логарифма та показника степеня.

У другому розділі розглядаються науково-теоретичні особливості навчання розв'язування логарифмічних і показникових рівнянь та нерівностей. Розглядаються різні методи розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

У третьому розділі описується організація та результати педагогічного експерименту, в ході якого була перевірена доцільність використання даної методики на уроках алгебри.

РОЗДІЛ І. Теоретичні основи дослідження

1.1. З історії показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей

Винайдення логарифмів значною мірою прискорилось потребами удосконалення обчислень. Винайшли логарифми і майже одночасно почали їх застосовувати шотландський математик Джон Непер (1550-1617) і швейцарський математик, астроном і механік Йост Бюргі (1552-1632). Проте перший крок до спрощення обчислень зробив німецький математик Михаель Штіфель (1487-1567), у якого поняття логарифма з'явилося в результаті зіставлення геометричної і арифметичної прогресій. Ця ідея бере свій початок у працях Архімеда (бл. 287-212 до н.е.).

Таблиці логарифмів дуже спрощували обчислення, дії другого ступеня (множення, ділення) звелися до дій першого ступення (додавання, віднімання) над відповідними логарифмами. При цьому довелося виконувати дії із значно меншими числами. Але у зв'язку з впровадженням сучасних ЕОМ обчислення за допомогою логарифмів втратило своє значення.

Показникова функція: до початку XVII ст. у математиці уникали вживання дробових та від'ємних показників степенів. Лише в кінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних задач виникла необхідність поширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n - будь-яке дійсне число, дало змогу розглянути показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел (для цілих n степенева функція визначена і для x<0). Питання, пов'язане з показниковою функцією, розробляв Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові і логарифмічні кількості». В ній, зокрема зазначено, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, «чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще і кількість, яку підносять до степеня». До перших належать a^x, до других y^z.

Далі ці вчені досліджували логарифмічні і показникові рівняння і нерівності.

1.2. Труднощі в усвідомленні учнями поняття логарифма числа і степеня

Як свідчить практика, труднощі, з якими зустрічаються учні та абітурієнти під час розв'язування рівнянь, виникають в першу чергу через невміння інтенсивно і зосереджено працювати. Не маючи достатнього досвіду в розв'язуванні рівнянь, вони не вкладаються у відведений час, не встигають проаналізувати всі запропоновані і реалізовані методи розв'язування.

Відомо, що багато рівнянь допускають декілька різних прийомів розв'язання. Можна дати будь-яке правильне розв'язання. Хоч бажання знайти найбільш короткий і красивий шлях розв'язання цілком природне, відшукання такого шляху в умовах уроку чи під час зовнішнього оцінювання не можливо, тому що це може зайняти багато часу. Тому краще до кінця довести нехай довге, але надійне розв'язування. Крім того поспішність часто приводить до арифметичних помилок, плутаниці знаків, описок і т.д., що приводить до помилкової відповіді, хоч нерідко хід розв'язання був правильним. Хоча, якщо ви знаєте як розв’язати рівняння коротшим шляхом, і впевнені в його правильності, то чому б не зекономити час. Відсутність чіткого уявлення про рівносильність рівнянь часто приводить до загублених коренів в процесі розв'язання рівнянь, або до одержання сторонніх коренів. Часто ліва і права частина рівняння множиться на спільний множник, що містить змінну, але якщо не врахувавши при цьому , що коли цей множник в області допустимих значень (ОДЗ) змінної перетворюється в нуль, то таке множення приводить до загублених коренів.

Під час розв'язання показникових рівнянь допускаються помилки, які свідчать про недостатні знання правил дій над степенями, властивості показникової функції.

Значне число помилок при розв'язуванні логарифмічних рівнянь та нерівностей пояснюється нетвердими знаннями властивостей логарифмічної функції, правил логарифмування і потенціювання. Потрібно враховувати, що логарифмування, ділення, множення рівнянь на вирази, що містять невідому величину, може привести до звуження ОДЗ, а це призводить до загублення коренів. Виключити сторонні корені можна перевіркою, знайти загублені корені складніше.

В багатьох немає чіткого уявлення про те, в яких випадках потрібна перевірка при розв'язуванні рівнянь, а в яких ні.

Щоб уникнути помилок, необхідно систематично виявляти прогалини в знаннях учнів, визначати причини допущення їх, вести облік поширених індивідуальних помилок.

1.3. Особливості вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей

Починати вивчення теми «Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності» потрібно з повторення означення степеня і логарифма, їх основних властивостей.

При введенні поняття логарифма і властивостей логарифмічної функції необхідно значну увагу приділити вмінню застосовувати основну логарифмічну тотожність, а також формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Приступаючи до розв’язування логарифмічних рівнянь, треба враховувати, що всі властивості логарифмічної функції були доведені за умови, що вирази, які стоять під знаком логарифма, додатні.

Бажано по можливості не використовувати формули логарифмування добутку, частки, і парного степеня, якщо це призводить до звуження області визначення рівняння, а користуватися цими формулами тільки справа наліво, що приводить до розширення області визначення (в цьому випадку можлива хіба що поява сторонніх коренів, але їх можна відсіяти перевіркою).

Слід звернути увагу учнів на те, що при розв'язуванні логарифмічних рівнянь можна користуватися не тільки рівносильними перетвореннями, але й діставати рівняння-наслідки (коли ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені). Учні повинні розуміти, що при використанні рівнянь-наслідків можлива поява стороніх коренівь і тому в цьому випадку перевірка є складовою частиною розв'язування рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що певної акуратності потребує використання формули переходу від однієї основи до іншої:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

де $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Якщо a і b -числа, що не дорівнюють одиниці, то цю формулу можна застосовувати і зліва направо і справа наліво (при $N > 0$), тобто використання цієї формули при розв'язуванні рівнянь або нерівностей приводить до рівняння (нерівності), рівносильного даному. Якщо ж новою основою логарифма є вираз із змінною, то може виявитися, що цей вираз на області визначення початкового рівняння дорівнюватиме одиниці, а після застосування формули переходу від однієї основи до іншої вираз, що стоїть в основі логарифма, вже не дорівнюватиме одиниці. В цьому випадку застосування формули переходу від однієї основи до іншої може привести до втрати тих коренів початкового рівняння, для яких нова основа логарифма дорівнює одиниці.

Підсумовуючи ці міркування, робимо висновки: якщо при переході від однієї основи логарифмів до іншої нова основа - число (звичайно більше від нуля і не дорівнює одиниці), то дістанемо рівняння, рівносильне даному на його області визначення.

Якщо доводиться використовувати вираз із змінною як нову основу логарифма, то щоб не втратити корені рівняння, необхідно розглядати два випадки:

1)вираз, який береться як нова основа, дорівнює одиниці (якщо це можливо на області визначення розглядуваного рівняння), і перевіряємо, чи будуть ці значення змінної, при яких вираз дорівнює одиниці, коренями даного рівняння;

2)нова основа не дорівнює одиниці - в цьому випадку користаємося формулою переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Розв'язуючи логарифмічні нерівності, доцільно використати загальну схему рівносильних перетворень нерівностей. Ця схема іноді дає надмірну систему обмежень, яку можна суттєво спростити. Для рівносильності рівнянь надмірність системи обмежень майже не впливає на об'єм роботи щодо розв'язування цих рівнянь - можна не знаходити відповідні значення змінної з цих обмежень, а тільки перевіряти для кожного знайденого кореня. Розв'язком нерівності, як правило, є інтервал (або кілька інтервалів), які містять нескінчену множину чисел, а всі їх перевірити неможливо. Отже для розв'язування нерівності доведеться знаходити відповідні значення змінної з усіх записаних обмежень, і тому чим менше залишиться цих обмежень, тим краще. Бажано запропонувати учням не знаходити окремо область визначення нерівності, а спочатку записувати повну систему обмежень і рівносильну нерівність, а потім намагатися спростити утворену систему.

Приступаючи до розв'язування найпростійших показникових рівнянь, доцільно вписати на довідковій таблиці або на дошці основні формули дій із степенями.

Після відпрацювання розв'язання найпростійших рівнянь бажано запропонувати учням загальну схему пошуку розв'язку складніших показникових рівнянь.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей слід уникати перетворень, які можуть привести до втрати або появи сторонніх розв'язків, так як в протилежному випадку обґрунтування правильності відповіді, як правило, є більш складною задачею, чим розв'язання початкової нерівності.

Тим самим, по суті, єдиним методом розв'язування логарифмічних нерівностей є метод переходу до рівносильних нерівностей (системам або сукупностям).

1.4. Поняття логарифма числа, степеня

Розглянемо рівність $4^3 = 64$. У цій рівності число 3 є показником степеня, до якого слід піднести число 4, щоб отримати 64. У загальному випадку в рівності $a^x = N$ число x є показником степеня до якого треба піднести основу a, щоб дістати число N.

Розглянемо рівняння $a^x = N$, де a і N – деякі числа, причому a>0 і a≠1. Якщо $N \leq 0$, то це рівняння не має коренів, бо значення показникової функції $y = a^x$ додатні при будь-якому x.

Для N >0 рівняння має корінь, і до того ж тільки один. Справді, областю значення показникової функції $y = a^x$ при a≠1 є множина додатних чисел. Крім того, кожне своє значення показникова функція набуває лише при одному значенні аргументу (отже, цей корінь єдиний).

Корінь рівняння $a^x = N$, де a>0, a≠1, називають логарифмом числа N за основою a.

Логарифмом числа N за основою a (a>0 , a≠1) називається показник степеня x, до якого треба піднести число a, щоб отримати число N.

Слово "логарифм" заміняють символом log.

Так, замість того щоб писати "логарифм числа 81 за основою 3" скорочено пишуть $\log_3 81$.

Те, що число x є логарифмом числа N за основою a, записують так:

$$\log_a N = x.$$

Цю рівність читають так: логарифм числа N за основою а дорівнює х. Наприклад з рівності $5^3 = 125$, випливає, що $\log_5 125 = 3$.

Вираз $\log_a N$, де а>0 і а≠1, має смисл лише при $N > 0$.

Логарифмічна рівність $\log_a N = b$ і показникова рівність $a^b = N$ виражають одне й те саме співвідношення між числами а, b і N.

За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, що входять до них, якщо задано два інших.

Відповідно до цього можна розв'язати три задачі.

1)Знайти число N за даним логарифмом b і за основою а.

2)Знайти основу а за даним числом N і його логарифмом b.

3)Знайти логарифм b даного числа N за даною основою а.

Широко використовують так звані десяткові логарифми, тобто логарифми за основою 10. Для них застосовують замість символу log_{10} символ lg (без означення основи), наприклад lg10=1, lg100=2 і т.д.

<u>Приклади.</u>

1.Записати у вигляді логарифмічних рівностей:

а)$2^7 = 128$; б)$5^{-3} = \frac{1}{125}$; в)$216^{\frac{1}{3}} = 6$.

Розв'язання . Застосовуючи означення логарифма даного числа за даною основою,маємо:

а)$\log_2 128 = 7$;

б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$;

в) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$.

2.За означенням логарифма,перевірити справедливість таких рівностей:

а)$\log_5 625 = 4$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$.

Розв'язання. Дані рівності правильні, оскільки:

а)$5^4 = 625$; б)$(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$.

3.За якою основою логарифм числа 10000 дорівнює 4?

Розв'язання . Маємо:$\log_x 10000 = 4, x^4 = 10000, x = \sqrt[4]{10000}$,x=10.

4.Знайти основу x, якщо $\log_x \frac{1}{49} = -2$.

Розв'язання .Маємо:$x^{-2} = \frac{1}{49}, \frac{1}{x^2} = \frac{1}{49}, x^2 = 49, x = 7$.

5.Обчислити вираз: $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$.

Розв'язання. $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$.

Основна логарифмічна тотожність.

Розглянемо показникову рівність

$$a^x = N. \tag{1.4.1}$$

За означенням логарифма,

$$x = \log_a N. \tag{1.4.2}$$

Замінюючи в рівності (1.4.1) x його значенням з рівності (1.4.2), дістанемо:

$$a^{\log_a N} = N. \tag{1.4.3}$$

Рівність (1.4.3) називається основною логарифмічною тотожністю. Вона є коротким записом означення логарифма: $\log_a N$є показником степеня, до якого треба піднести основу степеня а, щоб дістати N.

Приклади.

1.За допомогою основної логарифмічної тотожності перетворити рівність $2^5 = 32$.

Розв'язання. Маємо: $2^{\log_2 32} = 32$.

2.Обчислити: а)$4^{-\log_4 20}$; б)$5^{\log_5 9-\log_5 10}$; в)$49^{\log_7 8}$.

Розв'язання.

а)За означенням степеня з від'ємним показником,

$4^{-\log_4 20}=\frac{1}{4^{\log_4 20}}=\frac{1}{20}$.

б)У показнику маємо різницю ,а показники степенів віднімаються при діленні. Отже, $5^{\log_5 9-\log_5 10}=\frac{5^{\log_5 9}}{5^{\log_5 10}}=\frac{9}{10}$.

в)Враховуючи,що $49=7^2$,дістанемо: $49^{\log_7 8}=(7^{\log_7 8})^2=8^2=64$.

Основні властивості логарифмів.

Основні властивості логарифмів виражаються через ряд теорем.

Теорема 1. Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів, тобто

$\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$,де $N_1>0, N_2>0$.

Доведення. Позначимо $\log_a N_1=x_1, \log_a N_2=x_2$. За означенням логарифма, $N_1=a^{x_1}, N_2=a^{x_2}$. Перемножимо почленно ці рівності, дістанемо: $N_1N_2=a^{x_1+x_2}$. Тут x_1+x_2 є показником степеня, до якого треба піднести основу а, щоб дістати число, яке дорівнює добутку. Отже, можна записати: $\log_a N_1N_2=x_1+x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 їх виразами через логарифми, остаточно дістанемо: $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$.Теорему доведено для окремого випадку – для двох множників. Але її можна довести для будь-якого скінченного числа множників, бо при знаходженні добутку скінченного числа степенів однієї і тієї самої основи показники степенів додаються. Отже, взагалі,

$\log_a(N_1N_2N_3\dots N_n)=\log_a N_1+\log_a N_2+\log_a N_3+\dots+\log_a N_n$.

Теорема 2. Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2, \text{де } N_1 > 0, N_2 > 0.$$

Доведення. Нехай $\log_a N_1 = x_1$ і $\log_a N_2 = x_2$. Тоді $N_1 = a^{x_1}, N_2 = a^{x_2}$.

Поділимо почленно першу рівність на другу : $\frac{N_1}{N_2} = a^{x_1 - x_2}$.

Тут $x_1 - x_2$ є показником степеня, до якого слід піднести основу а, щоб дістати число, що дорівнює частці $\frac{N_1}{N_2}$. Отже, маємо: $\log_a \frac{N_1}{N_2} = x_1 - x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 їх виразами через логарифми, остаточно дістанемо:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Наслідок. Логарифм дробу, чисельник якого дорівнює одиниці, дорівнює логарифму знаменника, взятому з протилежним знаком.

Теорема 3. Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто

$$\log_a (N^m) = m \log_a N, \text{де } m - \text{будь} - \text{яке число}, N > 0.$$

Доведення. Нехай $\log_a N = x$,тоді $N = a^x$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня m: $N^m = a^{mx}$. Тут mx - показник степеня, до якого треба піднести основу а, щоб дістати число, яке дорівнює N^m. Отже, переходячи до логарифмів, дістанемо: $\log_a (N^m) = mx$. Замінимо x його виразом через логарифм і остаточно матимемо $\log_a (N^m) = m \log_a N$.

Теорема 4. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня, тобто

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{\log_a N}{k}.$$

Доведення. Нехай треба знайти $\log_a \sqrt[k]{N}$. Замінюючи радикал степенем з дробовим показником і застосовуючи теорему 3 , дістанемо:

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \log_a N^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\log_a N = \frac{\log_a N}{k}.$$

Теорема 5. Якщо логарифм двох додатних чисел за тією самою основою рівні, то і самі числа рівні. І навпаки, якщо два додатних числа рівні, то і їх логарифми за тією самою основою рівні.

Доведення. Нехай $\log_a b = \log_a c, a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$. Позначимо $\log_a b = x, \log_a c = y$.Тоді $a^x = b, a^y = c$. За властивістю показникової функції, якщо x=y,то $b = c$.

До основних властивостей логарифмів належать ще такі:

1)Логарифм одиниці дорівнює нулю. Це випливає з означення степеня з нульовим показником. Якщо $a \neq 0, a^0 = 1,$ але тоді $\log_a 1 = 0$.

2)Логарифм основи дорівнює одиниці, тобто $\log_a a = 1$. Це випливає з того, що $a^1 = a$.

Основні властивості логарифмів широко використовують під час перетворення виразів, що містять логарифми. Окремим видом таких перетворень є логарифмування виразів.

Прологарифмувати одночлен, означає виразити його через логарифми додатних чисел (позначених цифрами і буквами), що входять до його складу.

Користуючись теоремами про логарифм добутку, частки, степеня і кореня, можна прологарифмувати будь-який одночленний вираз.

Подані вище рівності справедливі для будь-якої основи a, що задовольняє умови $a > 0, a \neq 1$. Умовимося під час логарифмування основою вважати число 10.

Приклад 1. Прологарифмувати вирази:

Розв'язання.

1)$x = 5ac(a > 0, c > 0)$.

Даний вираз є добутком, тому за теоремою 1:

lg x=lg 5+lg a+lg c

2)$x = 11a^2b^3(a > 0, b > 0)$.

За теоремою 1 і 3:

lg x=lg11+2lg a+3lg b.

Деякі важливі тотожності, що містять логарифми.

1)Доведемо тотожність $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, або $\log_b a \log_a b = 1$.

Нехай $\log_a b = x$. Тоді за означенням логарифма, $b^x = a$. Логарифмуючи цю рівність за основою a, дістанемо: $x \log_a b = 1$. Звідси $x = \frac{1}{\log_a b}$, тобто $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

2)Доведемо тотожність $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, що має такий зміст: якщо число, що стоїть під знаком логарифма, і основу логарифма піднести до будь-якого степеня, то значення логарифма не зміниться

Нехай $\log_a N = x. \text{Тоді } a^x = N \text{ і } a^{kx} = N^k$. Тут x – показник степеня, до якого треба піднести число a^k, щоб дістати N^k. Отже, $x = \log_{a^k} N^k$.

Підставимо замість x його значення,остаточно дістанемо :

$$\log_a N = \log_{a^k} N^k.$$

3)Доведемо тотожність $\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N$.

Нехай $\log_{a^n} N = x$, тоді $a^{nx} = N$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня $\frac{1}{n}$,дістанемо $a^x = N^{\frac{1}{n}}$. Тепер прологарифмуємо останню рівність за основою а. Маємо: x=$\frac{1}{n}\log_a N$, тобто $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$.

Потенціювання. Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа визначають саме число, називають потенціюванням. Це перетворення є оберненим до логарифмування.

Застосовуючи теореми логарифмування, іноді можна вирази, що містять логарифми чисел або виразів, перетворити в логарифм одного числа або виразу.

Приклад 2. Знайти x за даним його логарифмом:

lg x=5lga-3lg c

Розв'язання. За теоремою про логарифм степеня,lgx=lg $a^5 - lgc^3$. За теоремою про логарифм частки, lg x=$lg\,\frac{a^5}{c^3}$.

Якщо логарифми виразів x і $\frac{a^5}{c^3}$ за однією і тією самою основою рівні, то і вирази будуть рівні, тобто x=$\frac{a^5}{c^3}$.

Перехід від однієї основи логарифмів до іншої.

Часто необхідно здійснити перехід від однієї основи логарифма до іншої. Нехай відомо $\log_a N$ і треба знайти $\log_b N$=x (x – невідоме число), де

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. За означенням логарифма, $b^x = N$. Прологарифмуємо останню рівність за основою а. Маємо: x$\log_a b = \log_a N$, звідси x=$\frac{\log_a N}{\log_a b}$,тобто

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Таким чином, логарифм будь-якого додатного числа N за основою b дорівнює логарифму того самого числа за іншою основою a, поділеному на логарифм числа b за основою a. Цю залежність застосовують ще в такому вигляді:

$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b.$

Отже, будь-який логарифм можна подати у вигляді відношення двох логарифмів, узятих за тією самою основою.

Приклад 3. Логарифм $\log_5 10$ подати за основами 2 і 3.

$\log_5 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 5}; \log_5 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 5}.$

Степінь з натуральним і цілим показником.

$a^n = aa \dots a, n$ разів, якщо n - натуральне число, $n > 1, a^n = a,$ якщо $n = 1; a^n = 1,$ якщо $n = 0, a \neq 0; a^n = \frac{1}{a^{-n}},$ якщо n - ціле число, $n < 0, a \neq 0.$

Властивості степеня з цілим показником.

Перемножуючи степені з однаковою основою a ($a \neq 0$), їх показники додають:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Ділячи степені з однаковою основою a ($a \neq 0$), від показника діленого віднімають показник дільника:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Щоб піднести до степеня добуток, достатньо до цього степеня піднести кожний множник і результати перемножити :

$(abc)^n = a^n b^n c^n.$

Іноді цю рівність потрібно прочитати справа наліво: щоб перемножити степені з однаковими показниками, достатньо перемножити основи і результат піднести до степеня з тим самим показником:

$a^n b^n c^n = (abc)^n$.

Щоб піднести до степеня дріб, слід піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат поділити на другий :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести до степеня степінь, треба показники степенів перемножити, а основу степеня залишити без змін: $(a^n)^m = a^{mn}$.

Зазначимо, що в формулюванні цих правил ніде не вказувалось, яким має бути показник степеня: натуральним числом чи цілим. Це тому, що множина цілих чисел включає множину цілих чисел як свою частину. Отже, наведені правила стосуються степенів з натуральним, нульовим і від'ємним показниками. Зрозуміло, що для випадку степеня з нульовим і цілим показниками ставиться додаткова умова, щоб основа степеня не дорівнювала нулю.

Степінь з раціональним показником. Введення степеня з нульовим і від'ємним показниками було першим розширенням поняття про степінь. При цьому нові означення степеня з нульовим і від'ємним показниками було введено так, що властивості степеня з натуральним показником залишилися правильними і для степенів з цілим показником.

Введемо поняття про степінь, показником якого може бути будь-яке дробове (раціональне) число.

Введення степеня з дробовим показником буде дальшим розширенням поняття про степінь. Означення степеня з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}}$ має бути таким, щоб властивості степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степенів з будь-яким дробовим показником.

Означення дробового показника виникло в зв'язку з бажанням узагальнити правило добування кореня на випадок, коли показник підкореневого числа не ділиться на показник кореня.

Правило $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ було виведене з припущення,що m і n - натуральні і m ділиться на n.

Тепер це правило будемо застосовувати і тоді, коли n - будь – яке натуральне число, а m - будь-яке ціле число.

Означення 1. Якщо а – додатне, n - натуральне число, m - будь-яке ціле число, то степінь числа а з дробовим показником $\frac{m}{n}$ є радикалом $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Показником кореня служить знаменник, а показник степеня підкореневого числа – чисельник дробового показника.

Якщо а=0, а $\frac{m}{n}$ - дробове додатне число, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$.

Згідно цим означенням маємо:

$6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2};\ \ 0{,}3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{0{,}3^5}$.

Обмеження, що накладаються на основу а ($a > 0$), необхідне при означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$. Справді, якщо $a < 0$,то коли n - парне і m - непарне, вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не має смислу. Наприклад,$(-5)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-5)^3} = \sqrt{-125}$ не існує.

Отже, введення степеня з дробовим показником дає змогу зберегти правило добування кореня з степеня $\sqrt[n]{a^m}$ для випадку, коли m не ділиться на n.

Проте можна дати означення степеня з дробовим показником, не користуючись поняттям кореня.

Означення 2. Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ невід'ємного числа а називають невід'ємне число, n –ий степінь якого дорівнює a^m. За означенням степеня з дробовим показником справедлива така тотожність:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m.$$

Приклад 4. Обчислити :

а)$5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75}$;   б)$4^3 \cdot 2^2$.

Розв'язання.

а) $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75} = 5^{\frac{1}{5}-0,25+\frac{4}{5}-0,75} = 5^0 = 1;$

б) $4^3 \cdot 2^2 = (2^2)^3 \cdot 2^2 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8 = 256.$

Відповідь:а)1;б)256.

1.5. Показникові і логарифмічні рівняння

Розглянемо наступні теореми.

Теорема 1. Якщо *n* - натуральне число, то в області дійсних чисел рівняння

$$[f(x)]^{2n} = [\varphi(x)]^{2n} \qquad (1.5.1)$$

рівносильне сукупності рівнянь

$$f(x) = \varphi(x) \text{ і } f(x) = -\varphi(x) \qquad (1.5.2)$$

Доведення. Очевидно, кожний корінь будь-якого з рівнянь сукупності (1.5.2) є коренем рівняння (1.5.1). Доведемо тепер: що кожний корінь рівняння (1.5.1) є коренем принаймні одного з рівнянь сукупності (1.5.2).

Нехай $x = a$ є довільний корінь рівняння (1.5.1). Тоді маємо тотожність

$$[f(a)]^{2n} = [\varphi(a)]^{2n}. \qquad (1.5.3)$$

Якщо $f(a)=0$ і $\varphi(a)=0,$ то $f(a)=\pm\varphi(a)$ і $x = a$ є коренем сукупності рівнянь (1.5.2). Тому розглянемо випадок, коли $f(a)\neq 0$ і $\varphi(a)\neq 0$.

Позначаючи числа $f(a)$ і $\varphi(a)$ коротко буквами f і φ, з тотожності (1.5.3) дістанемо:

$f^{2n}-\varphi^{2n}=0$, або $(f^2)^n-(\varphi^2)^n=0,$

звідки

$$\left(f^2-\varphi^2\right)\left(f^{2n-2}+f^{2n-4}\varphi^2+f^{2n-6}\varphi^4+\ldots+\varphi^{2n-2}\right)=0. \qquad (1.5.4)$$

Оскільки при $f\neq 0$ і $\varphi\neq 0$

$f^{2n-2}+f^{2n-4}\varphi^2+f^{2n-6}\varphi^4+\ldots+\varphi^{2n-2}>0$ то з тотожності (1.5.4) дістанемо: $f^2-\varphi^2=0$ і, отже, $f(a)=\varphi(a)$ або $f(a)=-\varphi(a),$ звідки виходить, що $x = a$ є коренем одного з рівнянь сукупності (1.5.2). Теорема доведена.

З теореми 1 випливає, що в області дійсних чисел рівняння (1.5.1) є наслідком рівняння

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (1.5.5)$$

Зазначимо, що рівняння (1) і (5) можуть бути рівносильними. Це буде тоді, коли рівняння $f(x)=-\varphi(x)$ або не має коренів, або коли усі корені цього рівняння є коренем рівняння (1.5.5).

Тому, якщо при розв'язуванні ірраціонального рівняння обидві його частини підносилися до парного степеня, то від цього могли з'явитися сторонні корені, втрати коренів бути не могло. Сторонні корені виключаються перевіркою.

Теорема 2. *Якщо* n - натуральне число, то в області дійсних чисел рівняння

$$[f(x)]^{2n-1}=[\varphi(x)]^{2n-1} \qquad (1.5.6)$$

рівносильне рівнянню:

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (1.5.7)$$

Доведення. Очевидно, кожний корінь рівняння (1.5.7) є коренем рівняння (1.5.6). Доведемо, що, навпаки, кожний корінь рівняння (1.5.6) є коренем рівняння (1.5.7). Нехай - $x = a$ довільний корінь рівняння (1.5.6). Тоді маємо тотожність

$$[f(a)]^m = [\varphi(a)]^m, \qquad (1.5.8)$$

де m = 2n-1.

Перетворимо тотожність (1.5.8), позначаючи коротко числа $f(a)$ і $\varphi(a)$ буквами f і φ,. Маємо:

$$f^m - \varphi^m = 0, \text{ або } (f-\varphi)(f^{m-1} + f^{m-2}\varphi + f^{m-3}\varphi^2 + \ldots + \varphi^{m-1}) = 0. \qquad (1.5.9)$$

Оскільки m - непарне натуральне число, то з тотожності (1.5.8) виходить, що f і φ дорівнюють нулеві або мають однакові знаки.

Якщо $f = 0$ і $\varphi = 0$, то $f(a) = \varphi(a)$ і, отже $x = a$ є коренем рівняння (1.5.7).

Якщо f і φ- числа однакових знаків, то при непарному m $f^{m-1} + f^{m-2}\varphi + f^{m-3}\varphi^2 + \ldots + \varphi^{m-1} > 0$ і з тотожності (1.5.9) виходить, що $f(a) - \varphi(a) = 0$, тобто $f(a) = \varphi(a)$

Отже, $x = a$ є коренем рівняння (1.5.7).

Теорема доведена.

З теореми 2 дістаємо, що коли при розв'язуванні ірраціонального рівняння обидві частини підносилися до непарного степеня, то від цього не могли з'явитися сторонні корені.

Логарифмічні і показникові рівняння.

Рівняння, які мають невідому тільки в показнику степеня, називається показниковим.

Наприклад, $2^x = 8, 3^{x-1} + 3^x = 12$ - показникові рівняння. Розв'язання показникових рівнянь ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо два степені додатного числа, відмінного від одиниці, рівні, то і рівні їх показники,тобто якщо $a^m = a^n, де\ a > 0, a \neq 1, то\ m = n$.

Доведення. Припустимо,що $m \neq n$. Тоді або $m > n, або\ m < n$. Якщо

$m > n$,то за властивістю показникової функції $a^m > a^n$ при $a > 1$ або $a^m < a^n$ при a<1, тоді $a^m \neq a^n$, що суперечить припущенню. Отже, $m = n$.

Простіше показникові рівняння має вигляд
$a^x = b$.

На основі означення показникової функції $a^x > 0$, тому рівняння $a^x = b$ має корінь при $b > 0$.

Рівняння, в якому невідома входить тільки під знак логарифма, називається логарифмічним

Розв'язання логарифмічних рівнянь ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо $\log_a N_1 = \log_a N_2$ то N_1=N_2.

Види показникових і логарифмічних рівнянь і методика їх розв’язання .

1)Рівняння вигляду $\log_{\varphi(x)} h(x) = \log_{\phi(x)} g(x)$, $\log_{f(x)} \phi(x) = \log_{g(x)} \phi(x)$.

Рівняння

$$\log_{\varphi(x)} h(x) = \log_{\phi(x)} g(x) \qquad (1.5.10)$$

$$\log_{f(x)} \phi(x) = \log_{g(x)} \phi(x) \qquad (1.5.11)$$

можна розв'язувати і в такий спосіб:

1. Перейти від цих рівнянь до їх наслідків, тобто від рівняння (1.5.10) до рівняння

$$h(x) = g(x), \qquad (1.5.12)$$

а від рівняння (1.5.11) до сукупності рівнянь (1.5.13)

$$f(x) = g(x) \quad i \quad \varphi(x) = 1. \qquad (1.5.13)$$

2. Розв'язати рівняння (1.5.12) або сукупність рівнянь (1.5.13).

3. Перевірити, які з знайдених коренів будуть коренями вихідного рівняння.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати рівняння

$$\log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2). \qquad (1.5.14)$$

Розв'язання. Рівняння

$$x^2 + x - 1 = 3x + 2\,. \qquad (1.5.15)$$

є наслідком рівняння (1.5.14). Переписавши рівняння (1.5.15) у вигляді x^2-$2x$-$3=0$, знаходимо його корені $x_1 = 3$ *і* $x_2 = -1$. При $x_2 = -1$ функція, що знаходиться в основі логарифмів, приймає негативне значення $1 - x_2 + \sin x_2 = -\sin 1 < 0$, тобто x_2 не задовольняє умові рівняння (1.5.14). При $x_1 = 3$ функція, що знаходиться в основі логарифмів, приймає значення, більше за нуль і не рівне 1,так як $1 + x_1 + \sin x_1 = 4 + \sin 3 > 4,$тобто x_1 задовольняє рівняння (1.5.15).

Відповідь: $x= 3$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\log_{\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x}}(1 - \sqrt{x^2 - x}) = \log_{\sin x + 1 + \sqrt{\cos x}}(1 - \sqrt{x^2 - x}. \qquad (1.5.16)$$

Розв'язання. Сукупність рівнянь

$$\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x} = \sin x + 1 + \sqrt{\cos x}\,,$$

$$1 - \sqrt{x^2 - x} = 1, \qquad (1.5.17)$$

є наслідком рівняння (1.5.16). Ясно, що всі розв'язки першого рівняння сукупності (8) є розв'язками рівняння *cos x*= *l*, тобто $x_k = 2\pi k, \quad k \in Z$. При будь-якому $x_k = 2\pi k, \quad k \in Z$, функція $\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x}$ дорівнює 2, тобто при цих x_k основи логарифмів в рівнянні (1.5.16) дорівнюють 2. Тому розв'язками рівняння (7) будуть ті $x_k = 2\pi k, \quad k \in Z$, для яких $1 - \sqrt{x_k^2 - x_k} > 0$. Легко бачити, що тільки $x_0=0$ задовольняє цій умові, а отже, є розв'язком рівняння (1.5.17).

Розв'язками рівняння: $1 - \sqrt{x^2 - x} = 1$ є $\tilde{o}' = 0$ ³ $\tilde{o}'' = 1$. Так як $\sin 1 > \sin \pi/4 = \sqrt{2/2}$ $\cos 1 > \cos \pi/3 = 1/2,$ то $\sin 1 + 1 + \sqrt{\cos 1} > 1,$ $\sin 1 + \cos^2 1 + \sqrt{\cos 1} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1.$ Значить, $\tilde{o}'' = 1.$задовольняє рівняння (1.5.16). Отже, є розв'язками рівняння (1.5.16).

Відповідь: *x = 0, x-1.*

2)Рівняння виду $\log_{f(x)} g(x) = a$.

Якщо в рівнянні

$$\log_{f(x)} g(x) = a \tag{1.5.18}$$

$a = n$, де *n* - натуральне числи, то наслідком рівняння (1.5.18) є рівняння

$$g(x) = \left[f(x)\right]^n \tag{1.5.19}$$

Якщо ж a = 0, то наслідком рівняння (1.5.18) є рівняння

$$g(x) = 1. \tag{1.5.20}$$

Рівняння виду (1.5.18) можна розв'язувати так:

1. Перейти від цього рівняння при натуральному *n* до рівняння (1.5.19), а при *n =0* до рівняння (1.5.20).

2. Розв'язати рівняння (1.5.19) або рівняння (1.5.20).

3. Перевірити, які з знайдених коренів будуть коренями вихідного рівняння.

Зауваження. Звичайно, можна вважати, що при будь-якому дійсному числі a наслідком рівняння (1.5.18) є рівняння

$$g(x) = \left[f(x)\right]^a,$$

але тоді треба уточняти, що розуміється під функцією $\left[f(x)\right]^a$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_{2x-1}(2x^2 + 4x + 1) = 2. \tag{1.5.21}$$

Розв'язання. Рівняння

$$2x^2 + 4x + 1 = (2x - 1)^2 \tag{1.5.22}$$

є наслідком рівняння (1.5.21). Переписавши рівняння (1.5.22) у вигляді $2x^2$-$8x=0$, знаходимо його корені $x_1=4$ *і* $x_2=0$. Легко помітити, що $x_1=4$ є коренем рівняння (1.5.21), а $x_2=0$ не являється його коренем.

Відповідь: *x = 4.*

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\log_x \cos x = 0. \tag{1.5.23}$$

Розв'язання. Наслідком рівняння (1.5.23) є рівняння $\cos x = 1$, розв'язком якого є $x = 2\pi k, \quad k \in Z$. Зрозуміло, що з цих x рівнянню (1.5.23) будуть задовольняти лише $x = 2\pi k, \quad k \in N.$.

Відповідь: $x = 2\pi k, \quad k \in N.$.

3) Рівняння виду $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}.$

Відповідно до загального методу розв'язання після логарифмування рівняння

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}. \tag{1.5.24}$$

отримуємо рівняння

$$g(x)\log_a f(x) = h(x)\log_a f(x), \tag{1.5.25}$$

рівносильне вихідному на його ОДЗ.

Рівняння (1.5.25) рівносильне на ОДЗ сукупності рівнянь

$$\log_a f(x) = 0 \quad \text{та} \quad g(x) = h(x)$$

.

Ця сукупність у свою чергу рівносильна на ОДЗ сукупності рівнянь

$$f(x) = 1 \quad \text{та} \quad g(x) = h(x) \tag{1.5.26}$$

Тому рівняння (1.5.24) можна розв'язувати і в такий спосіб:

1. Замінити рівняння рівносильною йому на його ОДЗ сукупністю рівнянь (1.5.26).

2. Розв'язати на ОДЗ рівняння (1.5.24) ,сукупність рівнянь (1.5.26).

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати рівняння $(1-x^4)^{(1+x)^2} = (1-x^4)^{(x+3)(3x-2)}$..

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх таких *x*, для яких $1 - x^4 > 0$. На цій множині вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$(1+x)^2 = (x+3)(3x-2) \quad i \quad 1 - x^4 = 1$$

.

Розв'язком цієї сукупності є: $x_1 = 1, \ x_2 = -7/2, \ x_3 = 0$. З цих x умові $1 - x^4 > 0$ задовольняє тільки $x=0$.

Відповідь: *x=0.*

4)Рівняння виду $f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Відповідно до загального способу розв'язання таких рівнянь після логарифмування рівняння

$$f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}. \qquad (1.5.27)$$

отримуємо рівняння

$$g(x)\log_a f(x) = g(x)\log_a h(x), \qquad (1.5.28)$$

рівносильне вихідному на його ОДЗ. Рівняння (1.5.28) рівносильне на ОДЗ сукупності рівнянь

$$g(x) = 0 \quad i \quad \log_a f(x) = \log_a h(x).$$

Ця сукупність у свою чергу на ОДЗ вихідного рівняння рівносильна сукупності рівнянь

$$g(x) = 0 \quad i \quad f(x) = h(x). \qquad (1.5.29)$$

Тому рівняння (1.5.27) можна розв'язувати і в такий спосіб:

1. Замінити рівняння (1.5.27) рівносильній йому на його ОДЗ сукупністю рівнянь (1.5.29).

2. Розв'язати на ОДЗ рівняння (18) сукупність рівнянь (1.5.29).

<u>Приклад 6</u>. Розв'язати рівняння $(1+x^4+\cos^2 x)^{\sqrt{6-x^2}} = (1+x^4+\sin^2 x)^{\sqrt{6-x^2}}$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх x

$6-x^2 \ge 0,\ 1+x^4+\cos^2 x > 0,\ 1+x^4+\sin^2 x > 0,$ тобто ОДЗ є проміжок $-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}$. Для x з ОДЗ вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\sqrt{6-x^2} = 0 \quad i \quad 1+x^4+\cos^2 x = 1+x^4+\sin^2 x.$$

Розв'язками цієї сукупності є $x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = -\sqrt{6},\ i\ \ x = \pi/4 + \pi k/2,\ k \in z.$ З цих x в ОДЗ вихідного рівняння входять $x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = -\sqrt{6},\ i\ \ x_3 = \pi/4,\ x_4 = -\pi/4,\ x_5 = 3\pi/4,\ x_6 = -3\pi/4$.

Вони і є розв'язками вихідного рівняння.

Відповідь: $x_1 = -\sqrt{6},\ \ x_2 = -3\pi/4,\ \ i\ \ x_3 = -\pi/4,\ \ x_4 = \sqrt{6},\ \ x_5 = \pi/4,\ \ x_6 = 3\pi/4$.

1.6.Логарифмічні і показникові нерівності

Нерівності, де хоча б одна з функцій показникова, називаються показниковими нерівностями.

Розв’язування найпростіших показникових нерівностей базується на використанні властивостей монотонності показникової функції.

Розглянемо розв’язання найпростіших показникових нерівностей.

Нерівність $a^x > c$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність виконується при будь-якому значенні x (оскільки для будь-якого значення x $a^x > 0$);

б) якщо $c > 0$, то записавши нерівність у вигляді $a^x > a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x > \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x < \log_a c$,

Нерівність $a^x < c$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність не має розв’язку;

б) якщо $c > 0$, то записавши нерівність у вигляді $a^x < a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x < \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x > \log_a c$,

<u>Приклад1:</u> Розв’язати нерівність $1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25$

Розв’язання: Оскільки $5^0 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 5^2$, то $0 < 1 - \dfrac{1}{2}x < 2$,

$-2 < \dfrac{1}{2}x - 1 < 0$, $-1 < \dfrac{1}{2}x < 1$, і, нарешті, $-2 < x < 2$

Відповідь: $-2 < x < 2$.

Нерівності виду $a^{g(x)} > a^{\varphi(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $a > 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) < \varphi(x)$

б) якщо $0 < a < 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) > \varphi(x)$

Нерівності виду $a^{g(x)} < a^{\varphi(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $0 < a < 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) < \varphi(x)$

б) якщо $a > 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) > \varphi(x)$

Розв’язання будь-якої нестрогої показникової нерівності відмінно від розв’язання відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв’язків коренів відповідного рівняння.

Нерівності, де хоча б одна з функцій логарифмічна, називаються логарифмічними нерівностями.

Розв’язання логарифмічних нерівностей потребує міцних знань з багатьох розділів алгебри. Потрібно вміти свідомо користуватися означенням логарифма, логарифмуванням та потенціюванням і, що дуже важливо, пам’ятати про те, що властивості логарифмічної функції різні при основах, менших або більших одиниці. Суттєвим при розв’язуванні таких нерівностей є обмеженість області визначення логарифмічної функції.

РОЗДІЛ ІІ. Методика вивчення теми «Логарифмічні та показникові рівняння і нерівності».

2.1.Методи розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь.

2.1.1. Область допустимих значень рівняння (ОДЗ) і знаходження коренів.

Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння складається із скінченого числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення. У тому випадку, коли ОДЗ – порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо зразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів. Тому перед безпосереднім розв'язанням рівняння, потрібно його проаналізувати, прослідкувати за поведінкою окремих членів рівняння для допустимих значень невідомої змінної.

При вирішенні таких рівнянь треба враховувати, що їх ОДЗ визначається з умов;

1) на ОДЗ всі функції f(x), g(x), φ(x), і ψ(x) мають сенс;

2) на ОДЗ основи логарифмів, тобто функції φ(x), і ψ(x), повинні відповідати умовам $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$, $\varphi(x)\neq 1$, $\psi(x)\neq 1$

3) на ОДЗ функції, що знаходяться під знаком логарифма, повинні бути додатні тобто на ОДЗ повинні виконуватися нерівності $f(x)>0$, $g(x)>0$.

Вданому випадку спрацьовує така схема розв'язування: підбираємо один чи кілька коренів рівняння, доводимо, що інших коренів немає, при цьому використовуючи теореми про корені рівнянь , а саме :

Теорема 1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Теорема 2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Справді, якщо функція $f(x)$ монотонна, то таке рівняння має лише один корінь, бо для монотонної функції нерівним значенням аргументу відповідають нерівні значення функції. Графічно це означає, що пряма лінія, паралельна осі абсцис(графік функції - константи), не може перетинати графік монотонної функції більше, ніж в одній точці.

Якщо $f(x)$ - кусково – монотонна функція, то рівняння $f(x)=a$ може мати не тільки більш як один корінь, але навіть нескінченне їх число, коли $f(x)$ має нескінченне число проміжків монотонності. Проте їх не може бути більше, ніж число проміжків монотонності кусково – монотонної функції.

Тим часом поняття монотонності функції можна використати, розглядаючи питання про рівносильність широкого класу рівнянь. Так, на практиці, щоб дістати розв'язки рівнянь, нерідко доводиться брати одну й ту саму функцію від обох частин; порівняння значень складних функції , в яких зовнішня функція одна й та сама, - замінювати порівнянням значень .

2.1.2Метод зведення степеня до однієї основи

Під час розв'язування показникових рівнянь ми стикаємося з рівняннями, які мають однаковий степінь, але різні основи, тому використовуючи властивості степеня потрібно звести такі рівняння до однієї основи, а потім розв'язати отримане рівняння, як найпростіше.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати рівняння $16^{\frac{1}{x}} = 2^x$.

Розв'язання. Це рівняння можна записати у вигляді $2^{\frac{4}{x}} = 2^x$,так як 16=2^4. Воно рівносильне рівнянню $\frac{4}{x} = x$,або $x^2 = 4$. Звідки $x_1 = 2, x_2 = -2$.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати рівняння $7^x = 2^x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 2^x, отримаємо

$\frac{7^x}{2^x} = 1$ або $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \left(\frac{7}{2}\right)^0$,звідки x=0.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

Розв'язання. Розклавши на множники,отримаємо

$6^x(1+6) = 2^x(1+2+2^2)$,або $6^x = 2^x$.

Поділимо обидві частини рівняння на 2^x,маємо:

$$\frac{6^x}{2^x} = 1; \left(\frac{6}{2}\right)^x = \left(\frac{6}{2}\right)^0; 3^x = 3^0,$$

звідки x=0.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16}{45}$.

Розв'язання. Використавши властивості степеня,отримаємо

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16}{45}; \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16\cdot 5}{45\cdot 6};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}; \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

звідки x=3.

2.1.3. Метод зведення логарифмів до однієї основи

У багатьох логарифмічних рівнянь основи логарифмів можуть бути різними, тому використовуючи властивості логарифмів потрібно звести такі логарифми до однієї основи.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння $\log_{3x} 3 = \log_{x^2} 3$.

Розв'язання. ОДЗ невідомого визначається умовами

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \neq \frac{1}{3}; \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Використовуючи відношення $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$,отримаємо

$\log_3 3x = \log_3 x^2$, або $3x = x^2$.

Звідки $x_1 = 0$(не належить ОДЗ)$, x_2 = 3$ - корінь даного рівняння.

2.1.4. Метод введення допоміжної змінної

При розв'язуванні рівнянь, використовуючи властивості степеня і логарифмів, утвориться громісткий вигляд, тому можна помітити, що шляхом введення нової змінної рівняння можна звести до більш простішого. Але потрібно не забувати про накладання необхідних умов, щоб відсіювати сторонні корені.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$0{,}2 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 250.$

Розв'язання. ОДЗ:x> 0. Нехай $5^{\sqrt{x}} = y$, де $y > 0$; тоді

$5^{2\sqrt{x}} = \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 = y^2.$

Далі,

$0{,}2y^2+5y=250$; $y^2+25y-1250=0$,

звідки $y_1 = 25$ і $y_2 = -50$. Так як y_2 не належить ОДЗ,то потрібно розв’язати лише одне рівняння відносно x:

$5^{\sqrt{x}} = 25$, або $\sqrt{x} = 2$,звідки x=4.

Знайдене значення x належить ОДЗ,тому x=4 – корінь рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2^{x+2} - 2^{2-x} - 15 = 0$.

Розв'язання. Маємо

$2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15.$

Позначимо $2^x = y$, де $y > 0$, отримаємо

$$4y - \frac{4}{y} = 15; \quad 4y^2 - 15y - 4 = 0,$$

звідки $y_1 = 4$ і $y_2 = -\frac{1}{4}$(не належить ОДЗ). Тепер маємо,

$2^x = 4$, або $2^x = 2^2$, звідки $x = 2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + lgx} = 1.$$

Розв'язання. Після спрощення рівняння приймає вигляд

$$lg^2 x - 5lgx + 6 = 0.$$

Введемо заміну $lgx = y$,отримаємо $y^2 - 5y + 6 = 0$,звідки $y_1 = 2$ і $y_2 = 3$;

1) $lgx = 2, x_1 = 100$;
2) $lgx = 3, x = 1000$.

Підстановкою можна переконатися, що обидва корені є коренями даного рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$lg^2 x^3 - 10lgx + 1 = 0.$$

Розв'язання. ОДЗ $x > 0$. Використовуючи властивості логарифмів,маємо:

$$lg^2 x^3 = (lgx^3)^2 = (3lgx)^2 = 9lg^2 x,$$

отримуємо

$$9lg^2 x - 10lgx + 1 = 0.$$

Вводимо заміну $lgx = y$, маємо

$9y^2$-10y+1=0,

звідки $y_1 = 1$ і $y_2 = \frac{1}{9}$.

1) $lgx = 1, x = 10;$

2) $lgx = \frac{1}{9}, x = 10^{\frac{1}{9}}.$

2.1.5.Використання властивостей функцій

Теорема 1: (теорема про корінь) Якщо функція f зростає або спадає на деякому проміжку то рівняння $f(x) = a$, не може мати більше одного кореня на цьому проміжку.

Доведення: Розглянемо зростаючу функцію f(у випадку спадної функції міркування аналогічні).

Припустимо, що на заданому проміжку рівняння $f(x) = a$ має більше одного кореня, наприклад, два - x_1 і $x_2 (x_1 \neq x_2)$. Тоді $f(x_1) = a$ і $f(x_2) = a,$ тобто

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad (2.1.5.1)$$

Оскільки $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 < x_2$, або $x_1 > x_2$. Але функція f

зростає на заданому проміжку, тому відповідно або $f(x_1) < f(x_2)$, або $f(x_1) > f(x_2)$. Це суперечить рівності (2.1.5.1). Отже, зроблене припущення невірне і в заданому проміжку рівняння $f(x) = a$ не може мати більше одного кореня тобто на розглянутому проміжку рівняння $f(x) = a$ або зовсім не має коренів, або має тільки єдиний корінь.

Теорема 2. Якщо на деякому проміжку функція $f(x)$ зростає, а функція $\varphi(x)$спадає, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$не може мати більше одного кореня на цьому проміжку.

Доведення: Припустимо, що рівняння $f(x) = \varphi(x)$ має корінь x_0 на заданому проміжку. Покажемо, що інших коренів на цьому проміжку немає.

(Цей факт гарно видно з графічної ілюстрації розв'язку цього рівняння на (рис.1).

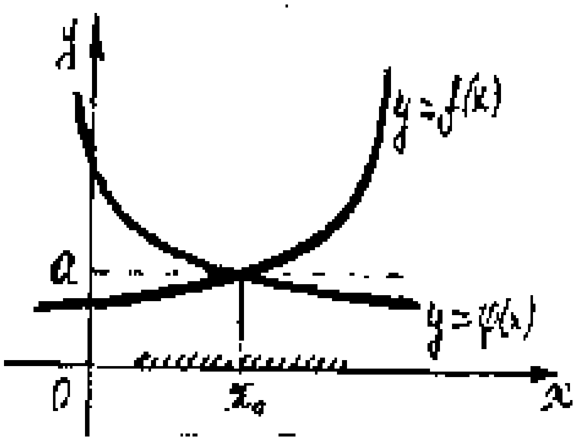


Рис. 1

Позначимо спільне значення функції f і φ в точці x_0 через а: $f(x_0) = \varphi(x_0) = a$.

Тоді для всіх $x < x_0$ будуть виконуватися нерівності $f(x) < f(x_0) = a$, f - зростаюча функція і $\varphi(x) > \varphi(x_0) = a$, φ - спадна функція. Отже рівність $f(x) = \varphi(x)$ неможлива при $x < x_0$ тобто при $X < X_0$ рівняння $f(x) = \varphi(x)$ коренів немає. Аналогічно, при $x > x_0$ одержуємо $f(x) > f(x_0) = a$, тобто і при $X > X_0$ рівність неможлива. Отже, рівняння $f(x) = \varphi(x)$ не може мати більше одного кореня x_0 на заданому проміжку. (тобто, на заданому проміжку рівняння $f(x) = \varphi(x)$ або зовсім не має коренів, або має тільки єдиний корінь).

Теорему доведено.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати рівняння

$\log_2 x + \log_3 x = 1 - x$.

Розв'язання. Функція

$f(x) = \log_2 x + \log_3 x$ зростає на області визначення $(x > 0)$ як сума двох зростаючих функцій,а функція $g(x)$=1-х спадає. Тому дане рівняння має єдиний корінь х=1.

2.1.6. Метод логарифмування

Основні властивості логарифмів широко використовують під час розв'язування рівнянь, що містять логарифми. Окремим видом таких перетворень є логарифмування виразів.

Прологарифмувати одночлен, означає виразити його через логарифми додатних чисел(позначених цифрами і буквами), що входять до його складу.

Користуючись теоремами про логарифм добутку, частки, степеня і кореня, можна про логарифмувати будь-який одночленний вираз.

Приклад 1. . Розв'язати рівняння

$2^{x-2} = 3^x$.

Розв'язання. Користуючись правилом логарифмування степені, отримаємо

(х-2)lg2=х lg3; х lg2-2 lg2=х lg3;

x(lg2- lg3)=2 lg2,звідки x=$^{2\lg 2}/_{\lg 2 - \lg 3}$.

Приклад 2. . Розв'язати рівняння

$7^{x-1} + 7^{x-2} + 7^{x-3} = 5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3}$.

Розв'язання. Маємо

$7^{x-3}(7^2 + 7 + 1) = 5^{x-3}(5^2 + 5 + 1)$;

$57 \cdot 7^{x-3} = 31 \cdot 5^{x-3}$; $\left(\frac{7}{5}\right)^{x-3} = \frac{31}{57}$.

Прологарифмувавши,отримаємо

(х-3) $\lg 1{,}4 = \lg 31 - \lg 57$;

$x=3+\frac{\lg 31-\lg 57}{\lg 1,4}$.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати рівняння

$x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\cdot\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

Розв'язання. Прологарифмувавши обидві частини рівняння, отримаємо

$\left(3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x\right)\lg x=\lg 100+\frac{1}{3}\lg 10;$

$9\lg^4 x-2\lg^2 x-7=0.$

Далі це рівняння розв'язуємо заміною змінних.

<u>Приклад 4.</u> . Розв'язати рівняння

$x^{\log_{\sqrt{x}}(1-x)}=9$.

Розв'язання. ОДЗ задається умовами

$$\begin{cases} x>0; \\ x\neq 1; \\ 1-x>0, \end{cases}$$

тому $0<x<1$.

Так як

$\log_{\sqrt{x}}(1-x)=\log_x(1-x)^2$,то $x^{\log_x(1-x)^2}=9$.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, можна записати :

$(1-x)^2=9,$звідки $x_1=-2$ і $x_2=4$.

Отримані розв'язки не належать ОДЗ, тому рівняння розв’язків немає.

2.1.7.Метод потенціювання

Часто при розв’язуванні показникових і логарифмічних рівнянь застосовують метод потенціювання.

Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа визначають саме число, називають потенціюванням. Це перетворення є оберненим до логарифмування.

Застосовуючи теореми логарифмування, іноді можна вирази, що містять логарифми чисел або виразів, перетворити в логарифм одного числа або виразу.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{\lg(x^3-5x^2+19)}{\lg(x-2)}=3.$$

Розв'язання. ОДЗ задається умовами

$$\begin{cases} x^3-5x^2+19>0; \\ x>2; \\ x\neq 3. \end{cases}$$

Тепер маємо

$$\lg(x^3-5x^2+19)=3\lg(x-2);$$

$$\lg(x^3-5x^2+19)=\lg(x-2)^3;$$

$$x^3-5x^2+19=x^3-6x^2+12x-8;$$

$$x^2-12x+27=0;$$

$x_1=3$ не належить ОДЗ, $x_2=9$ – корінь даного рівняння.

2.1.8.Розв'язування логарифмічних рівнянь на основі означення логарифма

Деякі рівняння можна розв’язати застосувавши означення логарифма.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_{1-x}(2x^2+x+1)=2.$$

Розв'язання. За означенням логарифма

$(1-x)^2=2x^2+x+1$, або $x^2+3x=0$,

звідки $x_1 = 0, x_2 = -3$. Значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, так як при цьому основа логарифма буде рівною одиниці, що неможливо. Тому $x_2 = -3$ - корінь даного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$\log_3 \log_2 \log_4 x = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння в вигляді

$\log_3[\log_2(\log_4 x)] = 0$.

За означенням логарифма маємо

$\log_2(\log_4 x) = 3^0$, або $\log_2(\log_4 x) = 1$; $\log_4 x = 2$, звідки $x=4^2$, або $x=16$.

2.1.9. Показникові і логарифмічні рівняння з параметрами

Рівняння з параметром є рівняння, в яке підставивши замість параметра конкретне числове значення, отримаємо правильну рівність. При розв'язуванні рівнянь з параметрами не завжди можна застосувати відомі методи розв'язання. Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що для рівнянь з параметрами дуже важко здійснювати перевірку їх коренів і тому перетворення, які проводяться в процесі їх розв'язування, повинні бути рівносильними.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$(1 + a^2) = (1 + a^2)^{3\sqrt{x}-2}$.

Розв'язання. ОДЗ :$x \geq 0, a \in R$.

Розглянемо два випадки: $1 + a^2 = 1 (a = 0)$ і $1 + a^2 \neq 1 (a \neq 0) (1 + a^2 > 1$ для всіх a).

1)При a=0 одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}} = 1^{3\sqrt{x}-2}$, корені якого всі дійсні числа з ОДЗ, тобто $x \geq 0, ([x \in 0; +\infty))$.

2)При

$a \neq 0, 1 + a^2 \neq 1$, і тоді вихідне рівняння рівеосильне рівнянню

$\sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 2.$

Звідси $\sqrt{x} = 1, x = 1.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$3\log_{a^2 x} x + 0{,}5\log_{x/\sqrt{a}} x = 2.$

Розв'язання. ОДЗ параметра а і змінної х визначається нерівностями

$$a > 0; x > 0; a^2 x \neq 1; x/\sqrt{a} \neq 1.$$

Використавши відношення $\log_b a = 1/\log_a b$, отримаємо

$$\frac{3}{\log_x a^2 x} + \frac{1}{2\log_x x/\sqrt{a}} = 2;$$

$$\frac{3}{2\log_x a + 1} + \frac{1}{2(1 - \frac{1}{2}\log_x a)} = 2;$$

$$\frac{3}{1 + 2\log_x a} + \frac{1}{2 - \log_x a} = 2.$$

Позначимо $\log_x a = y$, маємо

$\frac{3}{1+2y} + \frac{1}{2-y} = 2$, звідки $y_1 = 1$ і $y_2 = \frac{3}{4}$.

Тепер маємо :1) $\log_x a = 1, x_{1=a}$; 2)) $\log_x a = \frac{3}{4}$; $x_2 = a^{4/3}$.

Отримані значення х можуть бути коренями рівняння при $a > 0$, якщо

$a^2 x \neq 1$ і $x/\sqrt{a} \neq 1.$

Це означає, що потрібно виключити ті значення параметра а, при яких : а) $a^2 x = 1$ і б) $x/\sqrt{a} = 1.$

а)Якщо $a^2x = 1$, то

1)при х=а маємо $a^2 \cdot a = 1$, звідси а=1;

2)при х=$a^{4/3}$ маємо $a^2 \cdot a^{4/3} = 1$, звідки а=1.

б)Якщо $x/\sqrt{a} = 1$,то

1)при х=а маємо $a/\sqrt{a} = 1$, звідки а=1;

2)при х=$a^{4/3}$ маємо $a^{4/3}/\sqrt{a} = 1$, звідки а=1.

Отже,знайдені значення х – корені даного рівняння.

2.1.10.Графічний метод

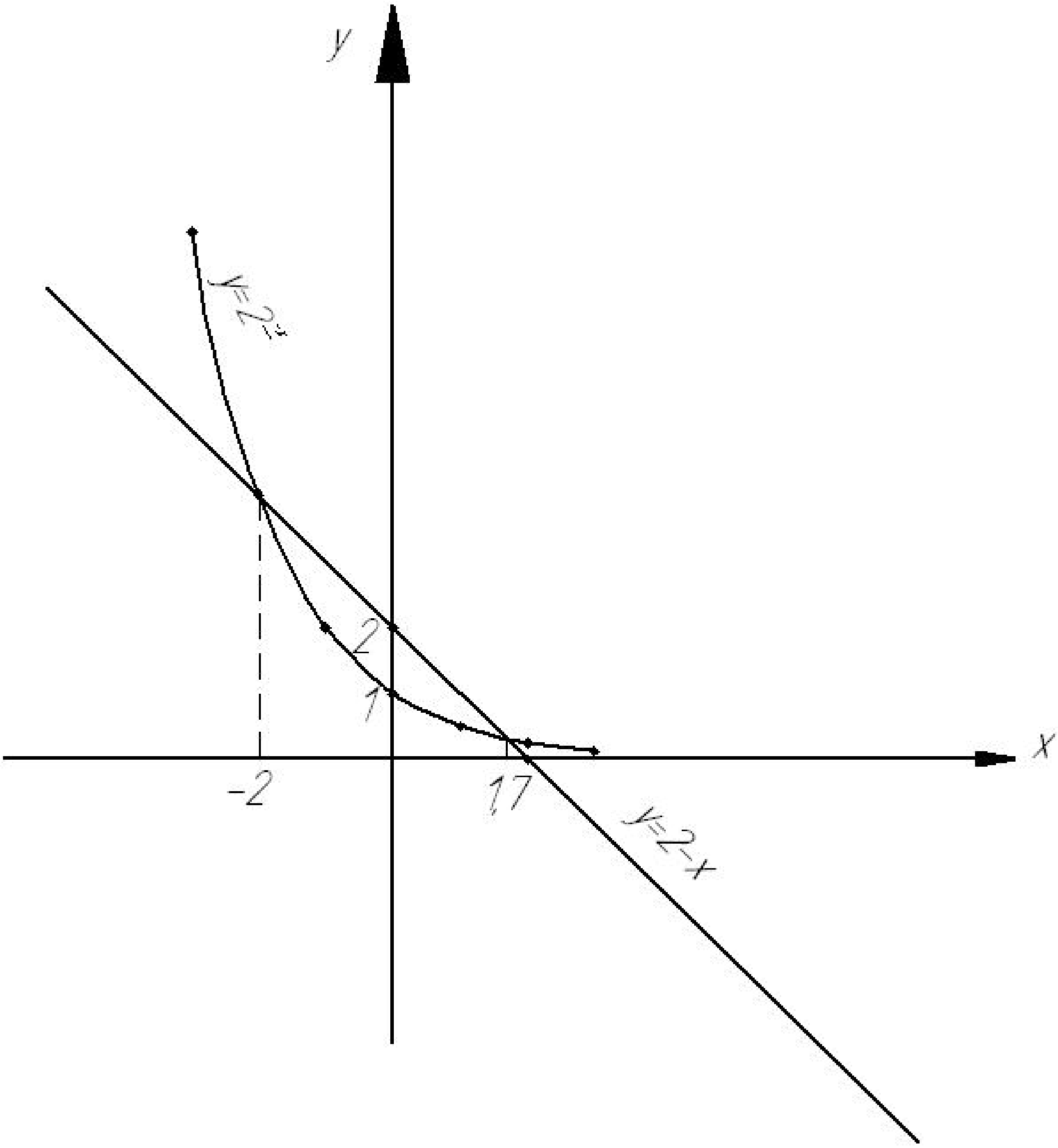
Розглянемо приклади графічного розв’язування рівнянь, в яких невідома входить під знак логарифма і в показник степеня.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2^{x+1} - x2^x - 1 = 0$.

Розв'язання. Побудувати графік функції у= $2^{x+1} - x2^x - 1$ важко, тому запишемо дане рівняння в вигляді f(x)=g(x).

Запишемо його спочатку так: $2^{x+1} - x2^x = 1$, а тепер поділимо обидві частин на $2^x \neq 0$; отримаємо $2 - x = 2^{-x}$.

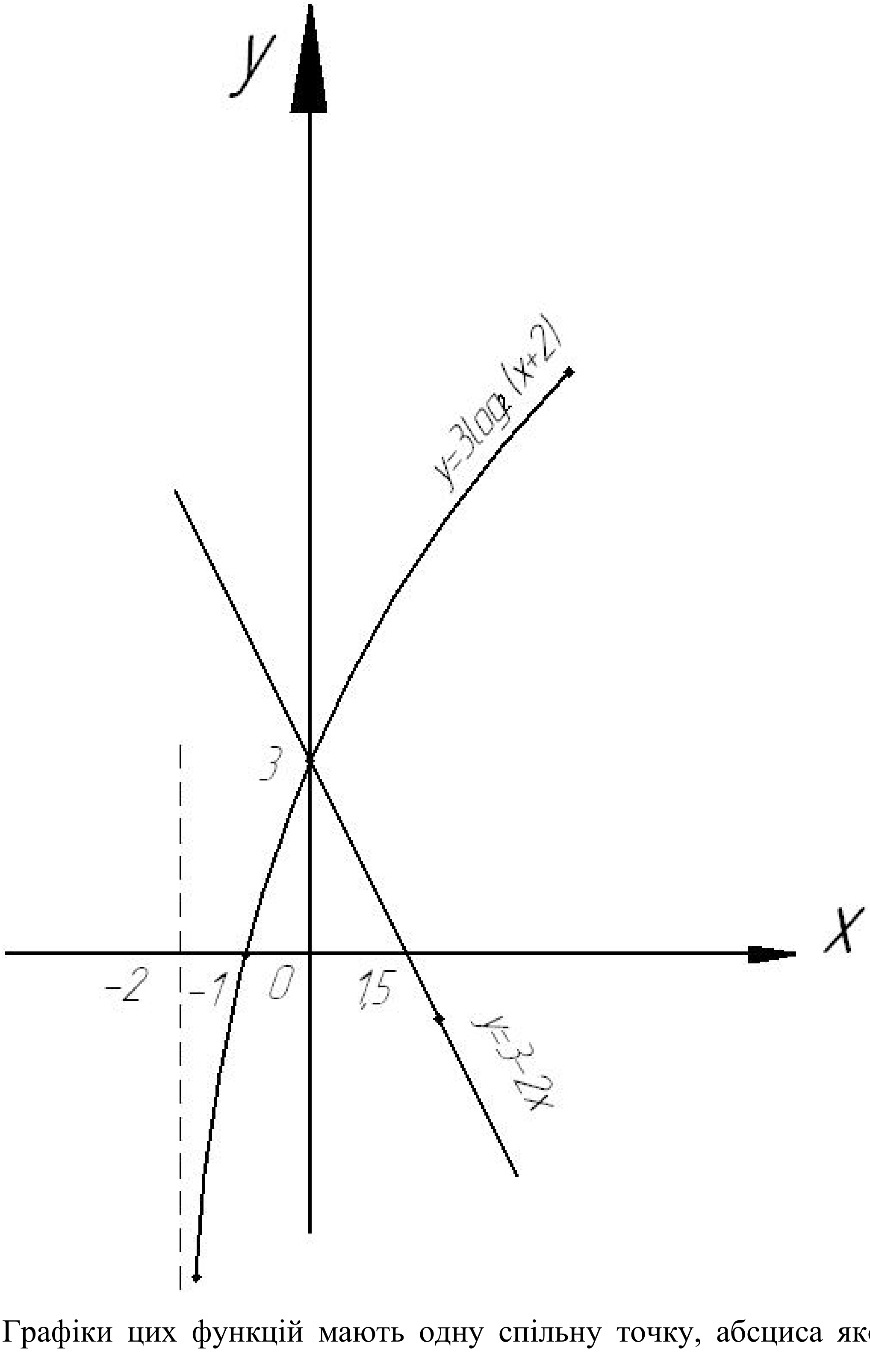
А тепер будуємо графіки функцій у=$2 - x$ і у=2^x.



Знаходимо абциси точок перетину $x_1 \approx -2, x_2 \approx 1{,}7$. Підставивши отримані корені в рівняння переконуємося,що перший корінь точний,а другий наближений. Отже, $x_1 \approx -2, x_2 \approx 1{,}7$ - корені рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3\log_2(x+2) + 2x - 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння в вигляді $3\log_2 x = 3 - 2x$. Будуємо графіки функцій y=$3\log_2 x$ і y=$3 - 2x$.



Графіки цих функцій мають одну спільну точку, абсциса якої $x \approx 0$. Перевірка показує,що це точний корінь рівняння.

2.1.11. Перехід до числової основи

Одним з основних способів розв'язання рівнянь і нерівностей є:

1. Знайти ОДЗ рівняння або нерівності.

2. Перейти в логарифмах до деякої основи a, де: a - фіксоване число, $a > 0$ і $a \neq 0$, тобто замінити рівняння рівносильним йому на ОДЗ рівнянням

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} = \frac{\log_a g(x)}{\log \psi(x)},$$

а нерівність - рівносильною йому на ОДЗ нерівністю

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} > \frac{\log_a g(x)}{\log \psi(x)}.$$

3. Розв'язати отримане стандартне за зовнішнім виглядом рівняння (або нерівність на ОДЗ вихідного рівняння (або нерівності). Його розв'язки і будуть розв'язками вихідного рівняння (або нерівності).

Приклад 1.Розв'язати рівняння

$$\log_x (2x+1) = \log_{2x^3+x^2} (4x^3 + 4x^2 + x) . \qquad (2.1.11.1)$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння (2.1.11.1) складається з усіх x, одночасно задовольняють умовам $x>0$, $x\neq 0$, $2x+1>0$, $2x^3+x^2>0$, $2x^3+x^2\neq 0$, $4x^3+4x^2+x>0$. Переходячи в (2.1.11.1) до логарифмів по основі, наприклад, 2, отримаємо рівняння

$$\frac{\log_2 (2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 (4x^3 + 4x^2 + x)}{\log_2 (2x^3 + x^2)}, \qquad (2.1.11.2)$$

рівносильне рівнянню (2.1.11.1) на ОДЗ. Оскільки для цих x маємо $\log_2 x(4x^3 + 4x^2 + x) = \log_2 x + 2\log_2 (2x+1)$ і $\log_2 x(2x^3 + x^2) = 2\log_2 x + \log_2 (2x+1)$, то рівняння (2.1.11.2) можна записати у вигляді

$$\frac{\log_2 (2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x + 2\log_2 (2x+1)}{2\log_2 x + \log_2 (2x+1)},$$

або, так як на ОДЗ $\log_2 x \neq 0$, у вигляді

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=\frac{1+\dfrac{2\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}{2+\dfrac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}. \qquad (2.1.11.3)$$

Позначимо $\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}$ через t, тоді рівняння (2.1.11.3) можна переписати у вигляді $t=\frac{1+2t}{2+t}$. Розв'язками останнього рівняння є $t_1=1$ і $t_2=-1$. Отже, рівняння (2.1.11.3) рівносильне на ОДЗ вихідному рівнянню сукупності рівнянь

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=1 \quad \text{з} \quad \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=-1.$$

Перше з рівнянь цієї сукупності не має розв'язків, а розв'язком другого рівняння є $x=1/2$. Це число належить ОДЗ вихідного рівняння і, отже, є єдиним його розв'язком.

Відповідь: $x = 1/2$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\log_x(2+x)>\log_{x^2}(x^2+2x). \qquad (2.1.11.4)$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності (2.1.11.4) складається з усіх x, одночасно задовольняють умови $2+x>0$, $x^2+2x>0$, $x>0$, $x\neq1$, $x^2>0$, $x^2\neq1$, тобто ОДЗ складається з двох проміжків: $0<x<1$ і $1<x<+\infty$.

Перейдемо в логарифмах нерівності (2.1.11.4) до логарифмів по основі, наприклад, 2. У результаті отримаємо нерівність

$$\frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x}>\frac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2 x^2}, \qquad (2.1.11.5)$$

рівносильне вихідному на його ОДЗ. Оскільки ОДЗ початкової нерівності маємо $\log_2 x(x^2+2x)=\log_2 x+\log_2(2+\delta)$ і $\log_2 x^2=2\log_2 x$; то нерівність (2.1.11.5) для цих х можна переписати у вигляді

$$\frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x}>\frac{\log_2 x+\log_2(2+x)}{2\log_2 x},$$

або у вигляді

$$\frac{\log_2(2+x)-\log_2 x}{\log_2 x}>0,$$

або, нарешті, у вигляді

$$\frac{\log_2\dfrac{2+x}{x}}{\log_2 x}>0. \qquad (2.1.11.6)$$

Нерівність (10) рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{2+x}{x}>0,\\ \log_2 x>0,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}\log_2\dfrac{2+x}{x}<0,\\ \log_2 x<0,\end{cases}$$

яка в свою чергу рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{2+x}{x}>1,\\ x>1,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}0<\dfrac{2+x}{x}<1,\\ 0<x<1,\end{cases}$$

Розв'язком першої з цих систем є $x>1$, а друга система розв'язку не має. Оскільки всі $x>1$ входять в ОДЗ початкової нерівності, то всі вони є його розв'язком.

Відповідь: $1<x<+\infty$.

Зауважимо, що іноді при вирішенні рівнянь і нерівностей недоцільно переходити до деякої постійної основи, так як це може зробити більш громісткий запис рівняння (або нерівності) і не полегшить процес його розв'язання.

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати рівняння

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2\,. \qquad (2.1.11.7)$$

Розв'язання. Оскільки $4x^2-4x+1=(2x-1)^2=(1-2x)^2$, $6x^2-5x+1=(1-3x)(1-2x)$, то ОДЗ вихідного рівняння складається з усіх x,що одночасно задовольняють умови

1-2x>0, 1-2x≠1, 1-3x>0. 1-3x≠1,

тобто ОДЗ складається з двох проміжків $-\infty<x<0$ *і* $0<x<1/3$. Легко побачити, що перехід в логарифмах до деякої основи а призведе до громіздким виразам. Тому поступимо інакше: перетворимо рівняння на його ОДЗ.

Вихідне рівняння на своїй ОДЗ рівносильне рівнянню

$$\log_{1-2x}(1-3x)+\log_{1-2x}(1-2x)-2\log_{1-3x}(1-2x)=2,$$

тобто рівняння

$$\log_{1-2x}(1-3x)-2\log_{1-3x}(1-2x)=1. \qquad (2.1.11.8)$$

Позначимо $\log_{1-2x}(1-3x)$ через z .Тоді оскільки на ОДЗ

$$\log_{1-3x}(1-2x)=\frac{1}{\log_{1-3x}(1-3x)},$$

то рівняння (2.1.11.8) можна переписати у вигляді

$$z-\frac{2}{z}=1$$

Це рівняння має корені $z_1=-1$ *і* $z_2=2$. Отже, вихідне рівняння на своїй ОДЗ рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\log_{1-2x}(1-3x)=-1 \quad \text{і} \quad \log_{1-2x}(1-3x)=2. \qquad (2.1.11.9)$$

Перше з цих рівнянь рівносильне на розглянутій області $x<1/3,\ x\neq 0$, рівнянню

$$\log_{1-2x}(1-3x)=\log_{1-2x}\frac{1}{1-2x},$$

тобто рівнянню

1-3x=1/1-2x

Це рівняння має два корені: $x_1=0$ *і* $x_2=5/6$ з яких жоден не входить в дану область, і тому не являється розв'язком вихідного рівняння. Друге рівняння в сукупності (13) рівносильне на областях $x<1/3,\ x\neq 0$, рівнянню $1-3x=(1-2x)^2$, розв'язком якого є $x_3=0,\ x_4=1/4$. З цих значень тільки $x_4=1/4$ входить в дану область і тому є єдиним коренем вихідного рівняння.

Відповідь:$x=1/4$.

2.1.12.Перехід до основи, яка містить невідому

Іноді при розв'язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей переходять до логарифмів по іншій основі, яка містить *x*. При цьому треба пам'ятати, що може відбутися звуження ОДЗ, а отже, і втрата кореня. Тому при переході в рівняння (або нерівності) до логарифмів за деякою основою $h(x)$, який містить x, спочатку потрібно перевірити, що $h(x)>0$ для розглянутих x, а також перевірити, чи не є значення x, при яких $h(x)=1$, розв'язком вихідного рівняння, після чого вже переходять до основи $h(x)$, але вже для тих x, для яких $h(x)>0$, і $h(x)\neq 1$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_{\frac{x}{4}} x^2 - \log_{8x} x^3 = 0.. \qquad (2.1.12.1)$$

Розв'язання. ОДЗ цього рівняння складається з всіх x, задовольняючих умови $x>0,\ x\neq 4,\ x\neq 1/8$.

Будемо розв'язувати це рівняння, переходячи в логарифмах до логарифмів за основою x. Перш ніж зробити перехід, перевіримо, чи $x=1$ є коренем вихідного рівняння. Підставляючи 1 замість x в рівняння (2.1.12.1), отримаємо, що $x=1$ є його корінь. Перейшовши тепер у рівнянні (2.1.12.1) до логарифмів за основою x (враховуючи, що $x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 4,\ x\neq 1/8$), отримаємо рівняння

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x}{4}} - \frac{\log_x x^3}{\log_x 8x} = 0, \qquad (2.1.12.2)$$

рівносильне вихідному рівнянню на множині $x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 4,\ x\neq 1/8$. Рівняння (2.1.12.2) для цих x можна переписати так:

$$\frac{2}{1-\log_x 4} - \frac{3}{\log_x 8+1} = 0. \qquad (2.1.12.3)$$

Оскільки $1-\log_x 4\neq 0$ і $1+\log_x 8\neq 0$ для розглянутих x, то рівняння (2.1.12.3) рівносильне рівнянню

$$2\,(1 + \log_x 8) - 3\,(1 - \log_x 4) = 0$$

або рівнянню

12 $\log_x 2=1$,

має єдиний корінь $x = 2^{12}$. Так як цей корінь входить в розглядувану множину *x>0, x≠1, x≠4, x≠1/8*, то він і є розв'язком вихідного рівняння на цій множині.

Відповідь: $x=2^{12}$, $x=1$.

2.1.13. Розкриття знаків модулів

Основний метод розв'язання рівнянь, що містять модулі, полягає в наступному: треба розбити ОДЗ рівняння або нерівності на безліч, на кожному з яких кожен з виразів, що стоять під знаком модуля, зберігає знак. На кожному такому проміжку рівняння записується без знака модуля і потім розв’язується на цій множині. Об'єднання розв’язків, знайдених на всіх цих множинах - частинах ОДЗ рівняння, складає безліч всіх його розв’язків .

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$..

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх дійсних *x*. Розіб'ємо ОДЗ на два проміжки:

а) $x-3 \geq 0$,

б) $x-3 < 0$.

а) Нехай $x \geq 3$, тоді $|x-3| = x-3$ і рівняння запишеться на цій множині так:

$$x^2 2^{x+1} + 2^{x+1} = x^2 2^{x+1} + 2^{x-1},$$

Це рівняння перетворюється на правильну числову рівність для будь-якого дійсного *x*, тобто його розв'язками є всі дійсні *x*. З них умові $x \geq 3$ задовольняють усі *x* з проміжку[3, +∞). Вони і є розв'язками рівняння у випадку а).

б) Нехай $x < 3$, тоді $|x-3| = -x+3$, рівняння запишеться на цій множині так:

$x^2 2^{x+1} + 2^{-x+5} = x^2 2^{-x+7} + 2^{x-1}$

або

$(2^x - 2^{-x} * 64)(4x^2 - 1) = 0$

Розв'язками цього рівняння є $x_1 = 1/2,\ x_2 = -1/2,\ x_3 = 3$. З цих значень умові $x < 3$ задовольняють тільки $x_1 = 1/2,\ i\ x_2 = -1/2$. Отже, розв'язком вихідного рівняння є $x_1 = 1/2,\ x_2 = -1/2,$, із всіх проміжків [3, +∞).

Відповідь: $x_1 = -1/2,\ x_2 = 1/2,\ 3 \le x < \infty.$

2.1.14.Показниково – логарифмічні рівняння

Якщо невідома входить в показник степеня і під знак логарифма, то таке рівняння називають показниково-логарифмічним.

Методи розв’язування показниково-логарифмічних рівнянь:

1)застосування основної логарифмічної тотожності;

2)логарифмуємо обидві частини рівняння за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією і тією числовою основою.

Приклад 1.Розв'язати рівняння $x^{\log_2 x^3 - \log^2{}_2 x - 3} = \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Допустимі значення рівняння $x > 0$. Прологарифмувавши обидві частини рівняння отримаємо

$(\log_2 x^3 - \log^2{}_2 x - 3) \log_2 x = -\log_2 x$

або $3\log^2{}_2 x - \log^3{}_2 x - 3\log_2 x + \log_2 x = 0,$

$\log^3{}_2 x - 3\log^2{}_2 x + 2\log_2 x = 0;$

звідки знайдемо $\log_2 x = 0, \log_2 x = 1, \log_2 x = 2; x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4.$

Після перевірки можна переконатись, що всі ці корені є коренями даного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3^{\log^2{}_3 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

Розв'язання. Запишемо рівняння в вигляді

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$$

або застосовуючи означення логарифма

$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162,$ звідси $x^{\log_3 x} = 81.$

Прологарифмувавши, отримаємо $\log^2{}_3 x = 4$, звідки знайдем

$\log_3 x = -2$ і $\log_3 x = 2; x_1 = \frac{1}{9}$ і $x_2 = 9$.

Отримані корені є коренями даного рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $14^{\log_7 2} x^{\log_7 4x+1} = 1.$

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 7:

$\log_7 2\,(1 + \log_7 2) + (2\log_7 2 + \log_7 x + 1)\log_7 x = 0,$

або $\log_7{}^2 x + (2\log_7 2 + 1)\log_7 x + \log_7 2 + \log_7{}^2 2 = 0.$

Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно $\log_7 x$,знаходимо

$\log_7 x = -\log_7 2 - 1$ і $\log_7 x = -\log_7 2;$

$x_1 = \frac{1}{14}$ і $x_2 = \frac{1}{2}$.

Дані корені і є коренями даного рівняння.

2.2.Методи розв язування показникових і логарифмічних нерівностей та їх систем

2.2.1. Нерівності виду $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Відповідно до загального методу розв'язання нерівностей, що містять невідому в основі логарифмів, нерівність

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$$

рівносильна при $a > 1$ нерівності $\dfrac{\log f(x)}{\log \varphi(x)} > \dfrac{\log g(x)}{\log \varphi(x)},$

яку можна переписати у вигляді

$$\frac{\log f(x) - \log g(x)}{\log \varphi(x)} > 0.$$

Остання нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x) > 0, \\ \log_a \varphi(x) > 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x) < 0, \\ \log_a \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

або сукупності систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < g(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases}$$

Тому нерівність такого виду можна розв'язувати таким чином:

1. Перейти від нерівності до рівносильній сукупності нерівностей .

2.Розв'язати сукупність нерівностей, її розв'язки і будуть розв'язками вихідної нерівності .

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(x^2 - 4x + 3) > \log_{x^2} x^2.$

Розв'язання. Нерівність рівносильна:

$$\begin{cases} x^2 > 1, \\ x^2 - 4x + 3 > x^2 > 0, \end{cases}$$

Ця система рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ 0 < x^2 - 4x + 3 < x^2. \end{cases}$$

з яких перша не має розв'язків, а розв'язок другої складає проміжок $-\infty < x < -1$.

Остання система рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \\ -4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \\ -4x + 3 < 0. \end{cases}$$

Розв'язків першої системи цієї сукупності є безлічі $\frac{3}{4} < x < 1$, а друга система розв'язків не має.

Отже, розв'язками вихідної нерівності є всі x з об'єднання двох проміжків $-\infty < x < -1$ i $\frac{3}{4} < x < 1.$

Відповідь: $-\infty < x < -1, \ \frac{3}{4} < x < 1.$

Процес розв'язання нерівності такого виду іноді оформляють таким чином:

1. Знаходять ОДЗ нерівності .

2. Розбивають ОДЗ нерівності на дві множини M_1 та M_2: M_1 - та частина ОДЗ, де: $\varphi(x) > 1$, M_2 – та частина ОДЗ, де: $0 < \varphi(x) < 1$.

3. На M_1 розв'язують нерівність $f(x) > g(x)$, рівносильну на M_1 вихідній нерівності.

4. На M_2 розв'язують нерівність $f(x) > g(x)$, рівносильну на M_2 вихідній нерівності.

Об'єднуючи розв'язки, знайдені на M_1 і M_2, отримують всі розв'язки вихідної нерівності.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати нерівність $\log_x \frac{3x+2}{x+2} > 1.$

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається з умов $x > 0, \ \frac{3x+2}{x+2} > 0, \ x \neq 1,$ тобто ОДЗ складається з двох проміжків: $x > 1, \ i \ \ 0 < x < L1.$

а) Нехай $x>1$. Для цих х вихідна нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{3x+2}{x+2} > x.$$

Так як $x+2>0$ для розглянутих х, то нерівність рівносильна нерівності $3x+2 > x(x+2)$, яку можна за писати у вигляді: $x^2 - x - 2 < 0.$

Розв'язками цієї нерівності є всі x з проміжку $-1<x<2$. З цих x умові $x>1$ задовольняють x із проміжками $1<x<2$.

Отже, у випадку

а) розв'язок вихідної нерівності складає проміжок $1<x<2$.

б) Нехай *0<x<1*. Для цих *x* вихідна нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{3x+2}{x+2} < x.$$

Так як $x+2<0$ для розглянутих х, то нерівність рівносильна нерівності $3x+2<x(x+2),$, яку можна переписати у вигляді

$$x^2 - x - 2 > 0.$$

Розв'язками цієї нерівності є всі x з двох проміжків $-\infty < x < -1$ i $2 < x < +\infty$. Жодне з цих x не задовольняє умові

$-\infty < x < -1$ i $2 < x < +\infty$. Отже, у разі

б) вивихідна нерівність не має розв'язків.

Відповідь: $1 < x < 2$.

2.2.2. Нерівності виду $f(x)^{\varphi(x)} > f(x)^{h(x)}$

Відповідно до загального методу розв'язання таких нерівностей після логарифмування нерівності

$$f(x)^{\varphi(x)} > f(x)^{h(x)}$$

отримуємо нерівність

$$\varphi(x)\log_a f(x) > h(x)\log_a f(x), \quad a > 1$$

рівносильну вихідній на його ОДЗ. Остання нерівність рівносильна вихідній на її ОДЗ сукупності двох систем нерівності

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > h(x), \end{cases} \quad \grave{a}\acute{a}\hat{i} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < h(x). \end{cases}$$

Легко бачити, що сукупність систем нерівностей і вихідна нерівність рівносильні на ОДЗ останній сукупності, тобто просто рівносильні. Тому нерівність можна розв'язувати таким способом:

1.Замінити нерівність рівносильній їй сукупністю систем нерівностей .

2. Розв'язати сукупність систем нерівностей. Її розв'язки і будуть розв'язками нерівності .

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^{2x+3} > x^{\frac{1}{x}+x}$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 2x + 3 > \dfrac{1}{x} + x, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2x + 3 < x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Оскільки

$$x + \frac{1}{x} - 2x - 3 = \frac{1 - 3x - x^2}{x} = -\frac{(x - \frac{-3+\sqrt{13}}{2})(x - \frac{-3-\sqrt{13}}{2})}{x},$$

то, застосовуючи метод інтервалів, отримуємо, що розв'язками нерівності $2x + 3 < x + \frac{1}{x}$ є об'єднання багатьох проміжків $-\infty < x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ *і* $0 < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}2,$ а розв'язками нерівності $2x + 3 > x + \frac{1}{x}$ є об’єднання багатьох проміжків $\frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < 0$ *і* $\frac{-3+\sqrt{13}}{2} < x < +\infty.$

Отже, розв'язків системи нерівності становить безліч *x>1*, а розв'язки системи нерівностей останньої становить безліч $0 < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Розв'язки вихідної нерівності є об'єднання проміжків $1 < x < +\infty,$ *і* $0 < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$

Відповідь: $0 < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ 0 < x < +\infty$.

2.2.3.Нерівності виду $f(x)^{\varphi(x)} > g(x)^{\varphi(x)}$.

Відповідно до загального методу розв'язання таких нерівностей після логарифмування

$$f(x)^{\varphi(x)} > g(x)^{\varphi(x)}$$

отримуємо нерівність

$$\varphi(x)\log_a f(x) > \varphi(x)\log_a g(x), \quad a>1$$

рівносильну вихідній на її ОДЗ. Нерівність рівносильна на цьому ОДЗ сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}\varphi(x)>0,\\ f(x)>g(x)>0,\end{cases} \quad \text{àáî} \quad \begin{cases}\varphi(x)<0,\\ g(x)>f(x)>0.\end{cases}$$

Легко побачити, що сукупність систем нерівностей і нерівність рівносильні на ОДЗ останній сукупності, тобто просто рівносильні. Тому нерівність можна розв'язувати і в такий спосіб:

1.Замінити нерівність рівносильною їй сукупністю систем нерівностей .

2. Розв'язати сукупність систем нерівностей, її розв'язки і будуть розв'язками нерівності .

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати нерівність $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2} > \left(\frac{x}{x+2}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2}$

Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}x^2-\sqrt{x}+2>0,\\ \dfrac{x+2}{x+1}>\dfrac{x}{x+2}>0,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x^2-\sqrt{x}+2<0,\\ \dfrac{x}{x+2}>\dfrac{x+2}{x+1}>0.\end{cases}$$

ОДЗ систем нерівностей є всі $x\ge 0$. Доведемо, що для будь-якого $x\ge 0$ виконується нерівність $x^2-\sqrt{x}+2>0$. Справді, при будь-якому x, $0\le x\le 1$, маємо $0\le\sqrt{x}\le 1$ i $0\le x^2\le 1$, тому $x^2-\sqrt{[}+2=x^2+1+(1-\sqrt{x})>0$ При будь-якому $x>1$ маємо $x^2>\sqrt{x},$ тому $x^2-\sqrt{x}+2>0$. Отже, на множині $x\ge 0$ система розв'язків не має, а система друга рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{x+2}{x+1}>\dfrac{x}{x+2},\end{cases}$$

Оскільки при $x>0$ маємо $x+1>0$ *і* $x+2>0$, то друга нерівність системи для $x>0$ рівносильна нерівності $(x+2)^2>x(x+1)$, яку можна переписати у вигляді $3x+4>0$. Остання нерівність справедлива для будь-якого $x>0$. Отже, система нерівностей справедлива для будь-якого $x>0$. Тому безліч розв'язків вихідної нерівності є всі $x>0$.

Відповідь: $0<x<+\infty.$

2.2.4. Нерівності виду $|f(x)|<g(x)$

Нерівність $|f(x)|<g(x)$

можна розв'язувати основним методом. Однак іноді буває корисно замінити нерівність рівносильній їй системою нерівностей

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ -f(x)<g(x). \end{cases}.$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\left|x^7+4x^5+x^2+2x-3\right|<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x^7+4x^5+x^2+2x-3<x^7+4x^5-x^2-2x+3, \\ -(x^7+4x^5+x^2+2x-3)<x^7+4x^5-x^2-2x+3, \end{cases},$$

яку можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x^5(x^2+4)>0. \end{cases}$$

Розв'язок першої нерівності системи становить проміжок $-3<x<1,$, розв'язок другої складає проміжок $0<x<+\infty$. Отже, розв'язок системи нерівностей , а тому, і початкової нерівності складає проміжок $0<x<1$.

Відповідь: $0<x<1$.

РОЗДІЛ ІІІ . Організація та результати педагогічного експерименту

Оскільки оцінка змісту методичних рекомендацій вимагає певного часу, тому педагогічний експеримент проводили методом оцінок, в ході якого була перевірена доцільність використання даної методики на уроках математики.

Для експерименту було вибрано два 10 класи в Невірківському НВК «ЗНЗ І-ІІІ ст.– ДНЗ» (с. Невірків, Корецького району, Рівненської області) у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий. В 10-А класі я подала тему використовуючи викладену методику, а 10-Б навчався по традиційній методиці.

При вивченні розділу „Логарифмічні і показникові рівняння і нерівності" у 10-А класі на уроках було застосовано різні форми роботи: колективна, робота в групах та робота в парах, а особливо велике значення мали нетрадиційні уроки, чи фрагменти таких уроків. Такі форми навчання дають змогу диференціювати та індивідуалізувати процес навчання: формують внутрішню мотивацію до активного сприйняття, засвоювання та передачі інформації; сприяють формуванню комунікативних рис учнів, активізують розумову діяльність.

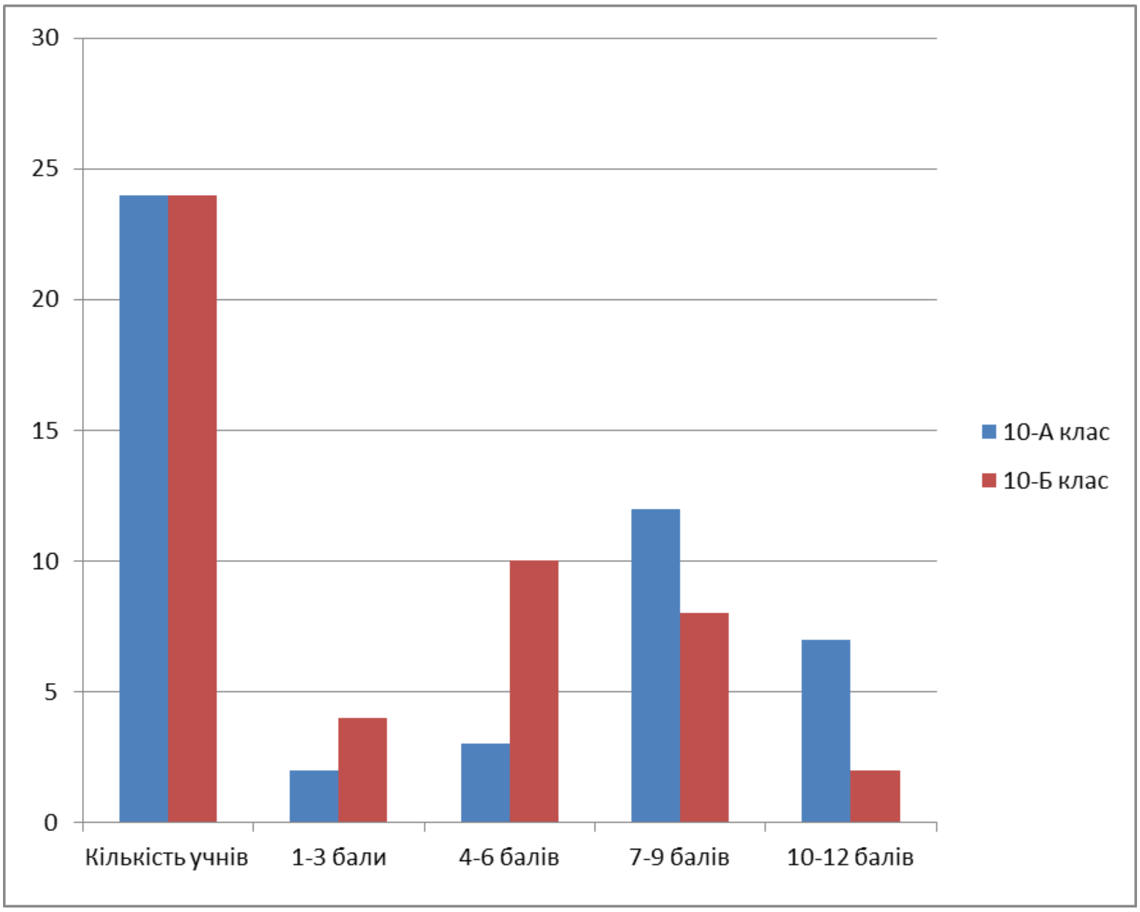
Оскільки робота велась в одному класі, то даний матеріал учні засвоїли добре. Результати з'явились одразу після перших уроків. В учнів почали вироблятись необхідні для творчої роботи вміння, а саме:

- здатність висловлювати ідеї і думки навіть тоді, коли вони здаються незрозумілими та недостатньо обґрунтованими;
- здатність бачити відмінні властивості та функції об'єктів, а також їх взаємозв'язки;
- уміння швидко та адекватно пристосовуватись до нових ситуацій;

- уміння засвоювати за аналогією, знаходити однакове, подібне у далеких, на перший погляд, явищах, подіях і процесах, які начебто не мають нічого спільного;
- розуміння та вміле використання цих подібностей під час розв'язування завдань і т.д.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у двох класах. На основі результатів підсумкової контрольної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів.

Клас	Кількість учнів	1-3 бали	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів
10-А клас	24	2	3	12	7
10-Б клас	24	4	10	8	2



Таким чином, на основі аналізу наведеної таблиці, можна стверджувати, що описані в роботі рекомендації щодо створення змісту та методики вивчення логарифмічних і показникових рівнянь і нерівностей можуть з успіхом використовуватись як вчителями так і самими учнями для покращення умов навчання.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджується методика вивчення теми «Логарифмічні рівняння і нерівності». Дане дослідження направлене на розробку методичної системи вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

У магістерській роботі виконано поставлені наступні завдання:

- проаналізовано особливості розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей;
- розроблено дидактичне забезпечення по темі "Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності", що сприятиме поглибленню знань і вмінь учнів та їх перевірки;
- підтверджена гіпотеза дослідження;

Розділ показникові і логарифмічні рівняння та нерівності вивчається в 11 класі. У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функції, їх властивості та графіки, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової і логарифмічної функції, розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності та їх системи, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами і степенями.

У процесі розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей, а також їх систем корисно систематизувати знання учнів про рівносильність рівнянь і систем, виділити операції, які можуть порушувати рівносильність. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв'язуванні рівнянь і в зв'язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв'язків, а також на причини втрати коренів.

Учні повинні навчитися схематично зображати графіки показникових і логарифмічних функцій при різних основах, пам’ятати основні властивості цих функцій та вміти використовувати їх при розв’язанні показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем.

Отже, матеріал даної роботи сприяє систематизації, поглибленню і розширенню знань,навичок та умінь учнів по темі «розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей» та їх цілеспрямованому використанні під час виконання різних типів завдань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 кл. серед, шк. А.М.Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін.; За ред. А.М. Колмогорова. - К.: Освіта, 1992. - 350 с.
2. Александров Б. И. Пособие по математике для поступающих в вузы./ Б. И. Александров.— М.: Изд-во МГУ,1972. – 608 с.
3. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз – К.:Освіта, 2006. – 255с.:іл.
4. Башмаков М.И. Алгебра и начало анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - 2-е изд./ М.И. Башмаков. —М.: Просвещение, 1992. — 350 с.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посіб. /Г.П.Бевз .— К., "Вища школа", 1989.—367 с.
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики./ Г.П.Бевз.—К.: Рад.школа, 1974.—432 с.
7. Бродський Я. Про нові програми з математики / Я. Бродський, О. Павлов // Математика,2009. – № 25 – 26. – 40 с.
8. Бурда М..І. Математика: Підруч для 10-11 кл. закл. освіти гуманіт. профілю./ Бурда М..І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. —К.: Освіта, 2001.— 224 с.
9. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. /В.В. Вавилов.— М.: Наука, 1988.—367 с.
10. Гайштут О.Г. Розв'язування алгебраїчних задач./ О.Г Гайштут, Г.М. Литвиненко. -—К.: Рад. шк., 1991.—128 с.
11. Груденов Я.І. Психолого-дидактичні основи методики викладання математики./ Я.І. Груденов .—М:Педагогіка, 1987.—340 с.
12. Эршова А.П., Голобородько В.В. Алгебра та початки аналіза./А.П. Эршова, В.В. Голобородько. – Харків:"гімназія",2008.—176 с.
13. Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2009/2010 навчальному році //Математика в школі,2009. – № 6. – С. 2 – 7.

14. Концепція розвитку загальної середньої освіти // Освіта в Україні. – 2000. – № 3. – С. 8 – 11.

15. Календарно-тематичне планування з математики. 5-11 класи. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 96с.

16. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу./ Є. П. Нелін. – Харків „Світ дитинства ” ,2006. – 448 с.

17. Нелін Є.П. Алгебра у таблицях. / Є. П. Нелін. – Харків : "Гімназія",2010 – 124с.

18. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі . Навчально-методичний посібник . — К.: Освіта, 1992. – 245 с.

19. Поглиблене вивчення математики // Математична газета,2009. – № 9, С.4 – 6.

20. Родигіна І. Формування основних груп компетентностей учнів: можливості продуктивного навчання / І. Родигіна // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2004. – № 2. – С. 19 – 21.

21. Сиваківський Б. Систематизація та узагальнення знань на завершальному етапі вивчення алгебри. / Б. Сиваківський, Н. Шубович – К.: Шкільний світ, 2005. – 96 с.

22. Слєпкань З.І. Методика навчання математики./ З.І. Слєпкань. —Київ : „Вища школа ” , 2006 – 381с.

23. Скороход А. В. Вибрані питання елементарної математики. /А.В. Скороход. – Київ : „ Вища школа ” ,1982 – 445 с.

24. Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебре./ С.Б. Суворова, М.Р. Леонтьева. — М.: Просвещение, 1986. — 128 с.

25. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики. /О.М.Титаренко. – Харків „ Торсінг ” ,2003.— 367с.

26. Ципкін О.Г. Довідник по методам розв’язання задач з математики./ О.Г. Ципкін, О.І. Пінський. — М.:"Наука", 1989 р.—356 с.

27. Ципкін О. Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів . / О. Г. Ципкін. – Київ :„ Вища школа ” ,1988 – 415 с.

28. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Шкіль М.І., Слєпкань ЗІ., Дубинчук О.С. — К.: Зодіак - Еко, 2002. — 384 с.