Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методичні підходи до вивчення систем алгебраїчних рівнянь у класах з поглибленим вивченням математики

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М – М – 21
Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Лістунова (Мусій) Лілія Едуардівна

Керівник к. ф .- м. н., доцент, професор кафедри математики з методикою викладання
Крайчук Олександр Васильович

Рецензент

Рівне-2020 року

Зміст

ВСТУП

Актуальним завданням процесу навчання математики є перетворення учня з пасивного об'єкта, що лише накопичує знання, у суб'єкт пізнавальної діяльності, який своєю активністю значною мірою визначає результати навчальної діяльності. Модернізація національної української школи потребує підвищення активності та самостійності учнів, формування в них вмінь опрацьовувати та плідно використовувати освітню інформацію.

Основним завданням вивчення математики в освітньому закладі загальноосвітньої середньої школи є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і умінь, формування рівня математичної культури, вміти розв'язувати самостійні роботи, що є необхідним у продовженні освіти та майбутній трудовій діяльності.

Як відомо, 75% всіх розрахункових математичних задач розв’язуються за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Оскільки математичні моделі тих або інших явищ чи процесів або відразу побудовані на основі лінійних алгебраїчних рівнянь, або зводяться в процесі роботи до них. Таким чином, велике значення має правильний вибір ефективного методу обчислення СЛАР. Вимоги сучасного суспільства до загальноосвітньої школи з однієї сторони, і інтереси особистості, що розвивається з іншої сторони, викликали необхідність нових підходів до організації навчально-виховного процесу школи, необхідність диференціації навчання відповідно до здібностей учнів, потреб, інтересів і нахилів.

Об’єкт дослідження: процес навчання алгебри в класах з поглибленим вивченням математики.

Предмет дослідження: методичні особливості застосування різних методів під час вивчення систем рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики.

Мета дослідження: розробити методику вивчення основних типів систем рівнянь у курсі алгебри та розробити самостійні роботи з даної теми і експериментально перевірити її ефективність.

Об’єкт, предмет і мета дослідження дозволили сформулювати такі **завдання:**

1. Систематизувати теоретичні відомості та методи про розв’язування систем рівнянь в шкільному курсі алгебри основної школи.

2. З’ясувати місце систем рівнянь в діючій та проекті нової програми з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.

3. Розробити методику розв’язування систем рівнянь.

4. Апробувати розроблену методику під час проходження педагогічної практики.

5. Розробити дидактичне забезпечення по курсу алгебри сьомого та дев’ятого класу у формі самостійних робіт.

Для розв’язання поставлених завдань були використані такі **методи дослідження:**

- теоретичний аналіз наукової, методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження;
- бесіди з педагогами - предметниками, учнями;
- спостереження, аналіз дидактичних програмних засобів;
- комплексний аналіз, отриманих в ході дослідження, даних;
- цілеспрямований експеримент із статистичним опрацюванням результатів.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація навчально-виховного процесу на основі розробки системи самостійних робіт забезпечить покращення вмінь та навичок в порівнянні з традиційною методикою навчання, сприятиме розвитку особистості, формуванню стійкого інтересу до предмету.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що матеріал роботи можна використовувати на уроках математики в класах з поглибленим вивченням.

Теоретичне значення дослідження полягає у розробці методики використання різних методів при розв’язуванні систем рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики.

Апробація. Результати роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету у 2019 та 2020 роках.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Розвиток самостійності в учнів у навчально-пізнавальній діяльності

Серед методів, які спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів, важлива роль належить самостійній роботі.

Термін самостійна робота вживають у різних значеннях. Часто так називають окремі уроки, присвячені самостійному розв'язуванню задач, які дуже схожі на контрольні роботи. Але це тільки один з видів самостійної роботи, причому не основний [5, 43].

У термін «самостійна робота» ми вкладаємо значно ширший зміст, відноситимемо сюди і самостійне вивчення теорії за підручником, і самостійне доведення теорем, і самостійне розв'язування задач, виконання різних завдань: тестів, математичних диктантів, лабораторних робіт, практикумів, семінарів, розгадування вікторин, математичних олімпіадах, конкурсах, турнірах, круглих столах, дискусіях, проектах, зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) і державній підсумковій атестації (ДПА). Самостійну роботу учнів ми розглядаємо як метод навчання, як освітню технологію.

Навчатись можна не тільки з слів учителя, не тільки під час колективного розв'язування задач і вправ, а й самостійно. В умовах звичайної загальноосвітньої школи корисно час від часу пропонувати учням різні види самостійної роботи.

Працюючи самостійно, учні, як правило, глибше вдумуються в зміст опрацьованого матеріалу, краще зосереджують свою увагу, ніж це звичайно буває при поясненнях учителя або розповідях учнів. Тому знання, уміння і навички, набуті учнями в результаті добре організованої самостійної роботи, бувають міцнішими і ґрунтовнішими. Крім того, у процесі самостійної роботи в учнів виховується наполегливість, увага, витримка та інші корисні якості.

Одним з видів самостійної роботи учнів з математики в класі є самостійне вивчення теорії за підручником.

Пропонувати учням самостійно опрацьовувати за підручником теоретичний матеріал треба хоча б три - чотири рази за семестр (залежно від того, як вони вміють працювати з книгою). Основна мета таких завдань - навчити учнів читати математичний текст, інакше кажучи, навчити їх учитися.

Які особливості математичного тексту? Чим відрізняється він, наприклад, від тексту художніх, історичних книг?

По-перше, наявністю багатьох математичних понять, термінів, формул, символів. Коли учень не знає хоч якого-небудь терміна чи символу, що є в тексті, він не зможе його зрозуміти.

По-друге, наявністю різних схематичних рисунків, тісно пов'язаних з текстом. На них треба дивитися паралельно з читанням тексту; читати доводиться не абзацами і навіть не реченнями, а частинами речень [24, 54].

По-третє, наявністю багатьох шрифтів: курсив, розрядка, петит, якими виділяють означення, теореми, правила, примітки.

По-четверте, стилем викладу, чіткістю, лаконічністю, строгістю. Читання математичної книги потребує максимальної уваги, міцного знання всього попереднього матеріалу. У математичному тексті на кожному кроці доводиться зустрічатися з різними посиланнями на наведені раніше теореми, означення, задачі, аксіоми. Читати математичну книгу треба з олівцем у руках. Уміння читати математичний текст виробляється поступово.

Самостійну роботу обов'язково треба перевіряти. Бажано зауважити учням, що відповідати можна не завжди у такій самій послідовності, як у підручнику. Коли учень змінює послідовність, змінює приклади - це навіть краще, ніж він розповідатиме точно за підручником.

У процесі самостійної роботи учнів з підручником часто відбувається процес злиття навчання з вивченням.

Завдання вчителя полягає в такій організації самостійної роботи учнів, при якій на основі засвоєної з підручників інформації учні могли б на практиці застосовувати набуті знання, тобто дати свої формулювання означень, теорем, запропонувати інші способи доведення теорем і розв’язування задач. З цією метою доцільно майже на кожному уроці практикувати виконання самостійних завдань тренувального характеру, враховуючи рівень знань кожного учня.

Самостійне розв'язування задач у школі можна організовувати по-різному. Самостійні роботи навчального характеру, проводяться на кожному уроці. У деяких випадках на це корисно відводити цілі уроки, особливо в старших класах при розв'язуванні громіздких задач і перед контрольними роботами, щоб з'ясувати, чи можуть учні впоратися з наміченими для контрольної роботи завданнями. Їх можна оцінювати (всі або деякі). Під час такої самостійної роботи бажано бути серед учнів, допомагати деяким, робити зауваження для всіх. Проте для самостійних робіт зручніше відводити тільки частини уроків 15 - 20 хв. Учитель на уроці може пояснити матеріал, дати завдання, розв'язати кілька прикладів колективно, а потім запропонувати кілька вправ до кінця уроку розв'язати самостійно.

Якщо самостійна робота носить контролюючий характер, то до журналу виставляються всі оцінки. На таку роботу відводиться 35 – 40 хвилин. Така система оцінювання є досить гуманною, добре мобілізує учнів, допомагає їм краще осмислювати свої труднощі й долати їх, сприяє підвищення якості знань. Учні виявляються краще підготовленими до контрольної роботи, у них зникає страх перед такою роботою, боязнь отримати двійку. Кількість незадовільних оцінок, як правило, різко скорочується. В учнів виробляється позитивне ставлення до ділової, ритмічної роботи, раціонального використання часу уроку.

Домашня робота - це теж самостійна робота учня. У домашній (самостійній) роботі учень має навчитись виконувати всі операції, які він спочатку виконував під керівництвом учителя, а тепер має повторити їх стосовно себе (ставити мету, планувати, контролювати, оцінювати).

Виконання домашніх завдань сприяє закріпленню і поглибленню поданого на уроці нового матеріалу, допомагає виробити навички, дисциплінує учнів, привчає їх працювати систематично і самостійно, функція домашньої роботи – навчити дітей вчитися.

Окремим учням можна давати індивідуальні домашні завдання; сильнішим доцільно запропонувати кілька важчих задач, а слабкішим – легші вправи. Іноді домашні роботи можуть бути і достроковими і виконуватися на заліковий урок. Учитель повинен стежити і за тим, чи справді самостійно виконують учні домашні завдання.

Під системою самостійних робіт розуміють сукупність взаємопов’язаних і взаємообумовлених видів робіт, які логічно випливають одна з одної та підкоряються загальним завданням освітнього процесу.

Кожна система повинна відповідати визначеним вимогам або принципам. Під час побудови системи самостійних робіт необхідно також дотримуватись певних дидактичних вимог.

1. Система самостійних робіт має сприяти розв’язанню основних дидактичних задач - набуттю учнями глибоких і міцних знань, розвитку в них пізнавальних здібностей, формуванню вмінь самостійно набувати знання, використанню їх на практиці.

2. Система має відповідати основним принципам дидактики, і перш за все принципам доступності та систематичності, зв’язку теорії з практикою, свідомості й творчої активності, принципу навчання на високому науковому рівні.

3. Роботи, які належать до системи, мають бути різноманітними за метою навчання та змістом, щоб забезпечувати формування в учнів запланованого переліку навчальних умінь і навичок.

4. Послідовність виконання домашніх і класних самостійних робіт повинна бути такою, щоби виконання одних видів робіт було логічно

пов’язане з іншими, а також готувало учнів до виконання наступних. Успіх розв’язання цієї задачі залежить не тільки від педагогічної майстерності вчителя, а й від того, як він розуміє значення й місце кожної окремої роботи в системі робіт, у розвитку пізнавальних здібностей учнів, їх мислення [18, 78].

Розробка системи самостійних робіт є необхідною умовою для систематичної, цілеспрямованої організації самостійної діяльності на уроках. Але наявність лише одного системного підходу не визначає успіху роботи вчителя з формування в учнів знань, умінь і навичок. Для цього ще треба знати основні принципи, керуючись якими, можна забезпечити ефективність самостійних робіт, а також методику керівництва їх різними видами.

Принципи до керівництва самостійною роботою має певні особливості.

1. Самостійна робота повинна мати цілеспрямований характер. Це досягається чітким формулюванням мети роботи. Завдання вчителя полягає в тому, щоб знайти таку форму завдання, яка викликала б у школярів інтерес до роботи та бажання виконувати її якомога краще. Учні повинні усвідомлювати, у чому полягає їх завдання та яким чином буде перевірятись його виконання. Недооцінка вимог веде до того, що учні, не розуміючи мети роботи, роблять не те, що потрібно, і змушені в ході її виконання багато разів звертатись до вчителя

2. Самостійна робота повинна бути справді самостійною та змушувати учня при її виконанні працювати з напруженням. Але не треба перебільшувати зміст і обсяг самостійної роботи, що пропонується учню на кожному етапі навчання. Вона має бути посильною, а самі учні – підготовленими до виконання самостійної роботи теоретично та практично.

3. Спочатку треба сформувати найпростіші навички самостійної роботи. У цьому випадку вчитель має демонструвати на прикладах прийоми виконання самостійної роботи, супроводжувати їх чіткими поясненнями та записами на дошці [18, 97].

4. Самостійна робота, яка виконується учнями після демонстрації прийомів учителем, носить характер наслідування. Вона не розвиває

самостійності в цілому, але має важливе значення для формування найбільш важливих навичок і вмінь, більш високої форми самостійності, при якій учні здатні розробляти та застосовувати свої методи розв'язування задач навчального чи виробничого характеру.

5. Для самостійної роботи треба пропонувати такі завдання, виконання яких не буде шаблонним, вимагатиме застосування знань у новій ситуації. Тільки в цьому випадку самостійна робота сприятиме формуванню ініціативи та пізнавальних здібностей учнів.

6. При організації самостійної роботи необхідно враховувати й те, що для набуття навчальних компетентностей різним учням потрібен різний проміжок часу. Зробити це можна шляхом диференційованого підходу. Спостерігаючи за роботою класу в цілому та окремих учнів, учитель повинен залучати тих, які добре та швидко впоралися з завданням, до виконання більш важких.

7. Завдання, які пропонують учням для самостійної роботи, повинні зацікавлювати їх. Це досягається завдяки новизні матеріалу, незвичній формі, змісту через розкриття практичного значення запропонованої задачі або методу, яким треба оволодіти.

8. Самостійні роботи учнів необхідно планувати та систематично проводити.

9. При організації самостійної роботи необхідно поєднувати викладання матеріалу вчителем із самостійною роботою учнів. Але треба бути дуже обережним, бо захоплення самостійною роботою може загальмувати швидкість вивчення програмного матеріалу.

10. При виконанні самостійних робіт різного виду управління діяльністю учнів має належати вчителю [18, 97].

Учні закінчують роботу не одночасно. Для цього потрібно дати додаткові завдання, для тих учнів, що працюють швидше. Тяжко підібрати завдання, однаково посильні всім учням. Ще важче підібрати геометричні завдання, однаково посильні для всіх. Трудно організувати перевірку самостійної роботи. Інколи вчитель збирає зошити всіх учнів. Це добра форма перевірки, але її не завжди можна зробити. Тому слід використовувати інші методи перевірки самостійної роботи. Наприклад, спочатку виконують самостійну роботу, а в кінці її виконання один з учнів записує розв’язок задачі на дошці для перевірки. Це приводить до лишньої трати часу. Значно краще, коли один-два учні виконують самостійну роботу на відкидних дошках.

В залежності від тієї педагогічної мети, яка переслідується при проведенні самостійних робіт, вони можуть бути розділені на дві основні групи: роботи навчальні й перевірочні роботи.

Навчальні роботи поділяються на:

- роботи, спрямовані на підготовкн дітей до сприйняття нового навчального матеріалу;
- роботи, спрямовані на отримання нових знань;
- роботи, спрямовані на розширення й поглиблення набутих знань;
- роботи тренувального характеру, метою яких є закріплення набутих раніше знань, умінь і навичок.

Перевірочні роботи поділяються на: класні (математичний диктант, тести, контрольні роботи) і домашні.

Система класних і позакласних самостійних робіт повинна:

- бути єдиною для самостійних робіт як у класі, так і вдома;

- забезпечувати активну пізнавальну діяльність на всіх етапах навчання та сприяти розв’язанню тих конкретних задач, які ставляться на даному етапі;

- задовольняти основним принципам дидактики;

- навчальні завдання, які входять у самостійну роботу, повинні забезпечувати формування в учнів не тільки основ науки яка вивчається, але й навичок самоосвіти;

- характер навчальної діяльності повинен визначитися системою навчальних завдань, які входять до системи самостійних робіт та відповідати відповідному методу навчання: репродуктивному, частковопошуковому, дослідницькому;

- система навчальних завдань повинна задовольняти вимозі послідовного наростання труднощів.

Система самостійних робіт повинна бути розроблена на основі:

- змісту навчального курсу, розділу або теми предмету, який вивчається;

- загальних засобів та методів активізації навчального процесу (методів навчання, прийомів навчальної роботи, видів навчально-пізнавальної діяльності, засобів навчання);

- характеристик, залежних від завдань, які складають самостійну роботу (склад їх компонентів, ступінь складності, послідовність розміщення).

Отже, самостійна робота - це такий дидактичний засіб навчання, який у кожній конкретній ситуації засвоєння відповідає конкретній дидактичній цілі і задачі; формує у учня на кожному етапі його руху від незнання до знання необхідний об'єм і рівень знань, навичок і вмінь для розв'язування нового класу пізнавальних задач і відповідного просування від нижчих до вищих рівнів мислительної діяльності; виробляє психологічну установку на самостійне систематичне поповнення своїх знань і вироблення вмінь орієнтуватись у потоці наукової інформації при розв'язуванні нових пізнавальних задач; є найважливішою умовою самоорганізації і самодисципліни того, хто навчається, в оволодінні моделями пізнавальної діяльності; є засобом педагогічного керівництва і управління самостійною пізнавальною діяльністю того, хто навчається [22].

1.2. Самостійна робота як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання математики

Однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики є активізація пізнавальної діяльності учнів. Саме від її вирішення залежить ефективність навчальної діяльності, яка проявляється в міцному засвоєнні знань, стимулюванні та розвитку інтересу до навчання, формуванні самостійної думки та підготовці до самостійного життя.

У педагогічних дослідженнях найчастіше активізацію пізнавальної діяльності розглядають як організацію сприйняття навчального матеріалу учнями, коли засвоєння знань відбувається шляхом розкриття взаємозв'язку між явищами, порівняння нової інформації із вже відомою, а також конкретизації, узагальнення та оцінки навчального матеріалу з різних точок зору.

Зазначимо, що в педагогічному словнику активізацію навчального процесу визначено як процес удосконалення змісту, форм і методів навчальної роботи, що сприяє активній і самостійній діяльності учнів у засвоєнні знань, вмінь та навичок на всіх етапах навчально-виховного процесу у всіх ланках освіти. В цьому сенсі акцентується важливість педагогічних методів, прийомів та засобів в процесі активізації.

Використання та удосконалення різних форм та методів навчання спонукає до активізації, в першу чергу, самого навчального процесу, а вже потім до активізації пізнавальної діяльності учнів. Варто зазначити, що в наведених вище означеннях відбувається ототожнення понять "активізація навчання" та "активізація пізнавальної діяльності". В основі будь-якої навчальної діяльності учнів лежить, в першу чергу, їх активність. Процес їх активізації є процесом перетворення суб’єкта (в нашому випадку - учня) в стан активності. Поняття активності досліджувалось в психолого-педагогічній науці в різних аспектах. Термін "активність" походить з латинської "actives", що означає діяльний, енергійний, ініціативний. В педагогічному словнику за редакцією М.Д. Ярмаченка наводиться таке визначення: "активність – 1) властивість організму і психіки, що залежить від зовнішніх та внутрішніх потреб; 2) властивість особистості, яка виявляється в діяльному ініціативному ставленні до навколишнього світу та самої себе"[34].

Активність учнів виражається через запитання, прагнення думати, пізнавальну самостійність у процесах сприйняття, відтворення, розуміння та творчого застосування. Критеріями сформованості активності особистості виступають: ініціативність, дієвість, енергійність, інтенсивність, добросовісність, інтерес, самостійність, усвідомлення дій, воля, наполегливість в досягненні мети та творчість. Завдяки цим якостям є можливість простежити підвищення активності учнів в процесі навчання. Покладаючись на Т.І. Шамову виділили такі рівні активності учня в навчальній діяльності:

1. Низький – вчитель повідомляє знання, ставить запитання, дає відповіді, показує способи розв'язання завдання, а учень слухає, записує та пригадує повідомлене.

2. Середній – завдання розв'язуються сумісними зусиллями вчителя та учнів; учні залучаються у частковий пошук, виявляючи при цьому епізодичний інтерес до роботи, елементи творчості, самостійності тощо.

3. Високий – учні самі здійснюють активний пошук відповіді, пропонують власні способи розв'язування завдань, виявляють стійкий інтерес, прагнення, добросовісне ставлення до роботи тощо [30].

Прояв активності в процесі навчання пов'язаний з пізнанням світу. Тому в багатьох педагогічних джерелах акцентується важливість саме пізнавальної активності, яка виникає завдяки продуктивній активності. Пізнавальна активність це складне інтегральне утворення особистості, що має мотиваційні, операційні та результативні компоненти. Серед них прояв інтелектуальної ініціативи, надситуативності - вихід особистості за межі даної діяльності за власним бажанням, прагнення до нового цілеутворення. Відмінність пізнавальної активності від загальної активності полягає в тому, що "активність" як поняття включає не лише процес пізнання, а й інші сфери діяльності учня, зокрема вольову та емоційну.

Ознаками пізнавальної активності в будь-якій діяльності виступають такі показники, як готовність до роботи, прагнення до самостійної діяльності, якість роботи, шляхи вибору оптимальних способів розв’язання завдань.

Пізнавальна активність у навчальному процесі є складовою об’єктивного закономірного навчання як активного процесу пізнання. Це виступає важливим фактором необхідності активної діяльності учнів у пізнанні. Однак характер та ступінь активності учнів у навчанні можуть бути різними. Які ж фактори впливають на це? Передусім, це пізнавальний інтерес. Саме його втрата, як правило, є причиною зниження пізнавальної активності дітей.

Стимулами пізнавальної активності в навчально-виховному процесі, крім внутрішнього стимулу - пізнавального інтересу, також можуть виступати такі педагогічні прийоми, як заохочення, розкриття необхідності та значення навчального завдання (мотивація), підкреслення розвитку позитивних рис особистості в процесі навчання, своєчасне визнання успіхів учнів, активна позиція вчителя, довіра учням та інших, які вже стають зовнішніми стимулами пізнавальної активності учнів. Пізнавальна активність учнів є показником якості їх навчально-пізнавальної діяльності, спрямованості учня на ефективне опанування знань та способів діяльності.

У залежності від наведених вище критеріїв науковцями виділялись різні рівні пізнавальної активності учнів. У своїх дослідженнях О.С. Дубинчук встановила такі рівні пізнавальної активності [11]:

1. Репродуктивно-повторювальна активність, за допомогою якої досвід діяльності однієї людини накопичується завдяки досвіду іншої.

2. Пошуково-виконавча активність, яка передбачає такий ступінь самостійності учнів, яка дозволяє зрозуміти задачу та відшукати засоби її розв'язання без сторонньої допомоги.

3. Творча активність, яка дозволяє учню самостійно ставити певну задачу та вибирати нешаблонні, оригінальні шляхи її розв'язання.

Автор підкреслює, що ці рівні не ізольовані, а взаємопов'язані. Вони можуть співіснувати, відповідаючи шкільному віку. Ці ж рівні пізнавальної активності простежувались нами у процесі експериментальних досліджень при розв’язуванні математичних задач фінансового змісту на уроках математики в основній школі.

У відміченій системі рівнів пізнавальної активності звертається увага на те, що одним із головних завдань у педагогічній діяльності вчителя є збільшення активності учнів до рівня самостійності. Самостійність – це здатність з власної точки зору підійти до розв‘язання складних учбових питань, вміння виконувати цю роботу без сторонньої допомоги. Вона проявляється в їх критичній думці, в умінні висловити свої думки незалежно від чужого погляду. Активність не завжди поєднується із самостійністю, але є її необхідною умовою. Основою для самостійності виступає система знань, вмінь та навичок, якою володіє учень, а також використання вже засвоєного матеріалу приводить до опанування новими знаннями, вміннями та навичками. Так як самостійність завжди передбачає активність, то саме вона відображає ставлення учнів до учбово-пізнавальної діяльності.

В навчальному процесі повна самостійність учнів не є можливою. Тому головною ознакою самостійності учнів є досягнення поставленої мети без сторонньої допомоги, але з участю вчителя в цьому процесі. Саме вчитель найчастіше виконує такі функції діяльності як постановка її мети, формулювання завдання та перевірка отриманих результатів.

Є.Я. Голант виділяє три види самостійності учнів [7]:

- організаційно-технічна самостійність;
- самостійність в практичній діяльності;
- самостійність у пізнавальній діяльності.

Під пізнавальною самостійністю розуміють таку якість особистості, яка характеризується її прагненнями та вміннями без сторонньої допомоги отримувати знання, опанувати засобами діяльності та розв‘язувати пізнавальні задачі. М.І. Махмутов виділяє такі ознаки пізнавальної самостійності учнів:

- вміння учнів отримувати нові знання та навички, використовуючи різні джерела;
- вміння в своїй подальшій освіті використовувати отримані раніш знання;
- вміння практично застосовувати знання, вміння та навички при вирішенні будь-якого життєво важливого питання [19].

Розвиток пізнавальної самостійності учнів у навчально-виховному процесі відбувається завдяки системі прийомів, методів, форм навчання, які адекватні досягнутому рівню навченості учнів. Їх вдалий підбір в методиці навчання приводять до активізації навчального процесу.

Наведені вище міркування дають можливість виділити такі критерії активізації пізнавальної діяльності учнів:

- формування пізнавального інтересу до об’єкта навчання;
- збільшення активності в процесі навчання;
- наявність ознак пізнавальної активності;
- прояв самостійності в навчально-виховній діяльності;
- розвиток пізнавальної самостійності [19].

Активізація пізнавальної діяльності учнів – це перехід до більш високого рівня активності та самостійності учнів у процесі навчання, який стимулюється розвитком пізнавального інтересу, та відбувається завдяки удосконаленню методів та прийомів навчального процесу.

Активізація пізнавальної діяльності учнів під час вивчення математики є однією з проблем сучасної шкільної освіти. Це пов'язане, в першу чергу, із зниженням інтересу молоді до навчання в цілому, а також з підвищенням ролі математики в різних галузях суспільства. Введення математичних задач фінансового змісту в курс математики основної школи виступає вагомим чинником активізації пізнавальної діяльності учнів, оскільки він впливає, в першу чергу, на формування пізнавального інтересу учнів до значення математики в сьогоднішніх умовах ринкових відносин у нашій країні.

Для активізації пізнавальної діяльності учнів також важливим є вдалий вибір методів, прийомів та засобів навчання, при якому враховуються певні психологічні особливості учнів. Головне призначення методів та прийомів навчання полягає в організації пізнавальної діяльності учнів.

Кожний метод навчання має зовнішню та внутрішню сторони. До зовнішньої сторони відносять різні способи його прояву у діяльності вчителя та учнів. Внутрішня сторона методу не підлягає зовнішньому спостереженню. Вона визначається змістом навчання, рівнем та характером діяльності.

Методи та прийоми навчання виконують такі функції:

- спонукальну (активізуючу), бо саме завдяки вдалому вибору методів розвивається інтерес учнів до навчання;
- освітню, бо в процесі їх використання учні набувають знання, вміння та навички;
- розвиваючу, бо система методів навчання націлена на формування та розвиток інтелекту, логічного мислення, пізнавальної активності та самостійності учнів.

Сьогодні, коли кожний учень розглядається як особистість, велика увага звертається на розвиваючу та активізуючу функції методів навчання.

1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.3.1. Лінійні системи рівнянь

Кілька рівнянь, які розв'язують сумісно, називаються системою алгебраїчних рівнянь. Лінійним рівнянням з n невідомими називається рівняння виду:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b – дійсні числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі. Система рівнянь є лінійною, якщо всі рівняння системи лінійні [32].

Розглянемо задачу.

У 7-А і 7-Б класах навчаються разом 56 учнів, до того ж, у 7- А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б. Скільки учнів у кожному класі?

Для розв'язання задачі позначимо кількість учнів 7-А класу через x, а кількість учнів 7-Б класу – через y. За умовою задачі, у 7-А і 7-Б класах разом навчаються 56 учнів, тобто $x+y=56$. У 7-А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б, тому різниця $x-y$ дорівнює 4: $x-y=4$.

Маємо два лінійні рівняння із двома змінними:

$x+y=56;$

$x-y=4.$

І в першому, і в другому рівняннях змінні позначають одні й ті ж велечини – кількості учнів 7-А і 7-Б класів. Тому потрібно знайти такі значення змінних, які перетворюють у правильну числову рівність і перше, і друге рівняння, тобто потрібно знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівняннь, то кажуть, що ці рівняння утворюють систему рівнянь.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Систему лінійних рівнянь із двома змінними, складену за умовою нашої задачі, записують так:

$$\begin{cases} x+y=56; \\ x-y=4. \end{cases}$$

Спільним розв'язком обох рівнянь цієї системи є пара значень змінних $x=30$, $y=26$, бо рівності $30+26=56$ і $30-26=4$ є правильними. Цю пару називають розв'язком системи рівнянь.

Означення. Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару чисел ($x_0;y_0$), які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність[32].

Означення. Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що вона розв'язків не має (несумісна).

Якщо система має розв'язки, то вона називається сумісною.

Для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3. \end{cases}$$

розв'язком є трійка значень змінних ($x_0;y_0;z_0$), при підстановці яких в кожне рівняння системи дістанемо тотожність.

Рівносильні системи – це системи, множини розв'язків яких збігаються.

Якщо поставлено задачу знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см^2, а периметр 14 см, то зрозуміло, що треба знайти спільний розв'язок рівнянь $xy = 12$ і $2x + 2y = 14$, де х см і у см – довжини сусідніх сторін.

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

Так, запис $\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см^2, а периметр 14 см.

Розв'яжемо систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

Очевидно, що перше рівняння цієї системи розв'язків не має, а отже, не існує й спільних розв'язків рівнянь, що входять до системи. Висновок: система розв'язків не має.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовуємо метод виключення невідомих. Суть цього методу розглянемо на прикладі [32].

1. $\begin{cases} x + 3y + z = 5, \\ 3x - 4y - z = 8, \\ 5x + 2y + z = 20. \end{cases}$

Щоб позбутися невідомого z, додамо почленно перші два рівняння, а потім друге та третє рівняння і дістанемо систему: $\begin{cases} 4x - y = 13, \\ 8x - 2y = 28, \end{cases}$ або $\begin{cases} 4x - y = 13, \\ 4x - y = 14. \end{cases}$

Система не має розв'язків.

1.3.2. Нелінійні системи

Системи рівнянь дрогого степеня з одним лінійним рівнянням

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + kx + my = c_2 \end{cases}$$

розв'язують способом підстановки: з першого рівняння, якщо $a_1 \neq 0$, знаходять $x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1y)$ і підставляють у друге рівняння системи [31].

Розглянемо систему виду $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = m. \end{cases}$ (1)

За теоремою Вієта маємо, що x та y – корені квадратного рівняння: $z^2 - az + +m = 0$. Якщо дискримінант цього рівняння $a^2 - 4m > 0$, то квадратне рівняння має два корені: z_1 та z_2, а система (1) має відповідно два розв'язки: $x_1 = z_1, y_1 = z_2$ та $x_2 = z_2, y_2 = z_1$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 39, \\ x - y = 7. \end{cases}$

Розв'язання:

З другого рівняння визначаємо $x = y + 7$. Замінивши у першому рівнянні змінну x виразом $y + 7$, маємо $(y+7)^2 - y(y+7) + y^2 = 39$. Корені цього рівняння $y_1 = -5,\ y_2 = -2$, тобто $x_1 = 2,\ x_2 = 5$.

Відповідь: $(2; -5); (5; -2)$.

Розглянемо систему рівнянь другого степеня виду

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m. \end{cases} \quad (2)$$

Перше рівняння системи однорідне. Якщо $c_1 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, то поділимо обидві частини цього рівняння на y^2:

$a_1(\frac{x}{y})^2 + b_1\frac{x}{y} + c_1 = 0$. Заміна змінних $\frac{x}{y} = z$ зводить це рівняння до квадратного рівняння

$$a_1 z^2 + b_1 z + c_1 = 0. \qquad (3)$$

Якщо існують корені цього рівняння z_1 та z_2, то система (2) розпадається на дві:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = z_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = z_2, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m. \end{cases}$

Ці системи розв'язуємо способом підстановки. Якщо рівняння (3) не має дійсних коренів, то система (2) несумісна [31].

Розглянемо випадок, коли один з коефіцієнтів (a_1 чи c_1) дорівнюють нулю. Нехай $a_1 = 0$. Перше рівняння системи (2) матиме вигляд $b_1xy + + c_1y^2 = 0$ або $y(b_1x + c_1y) = 0$ і система (2) розпадеться на дві:

а) $\begin{cases} y = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m, \end{cases}$ б) $\begin{cases} b_1x + c_1y = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m, \end{cases}$

які розв'язуємо способом підстановки.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = m_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m_2. \end{cases} \qquad (4)$$

де $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$. Цю систему легко звести до виду (2), якщо помножити обидві частини першого рівняння на m_2, обидві частини другого рівняння на m_1, а потім почленно відняти рівняння.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6. \end{cases}$

Поділивши обидві частини першого (однорідного) рівняння на y^2, маємо рівняння $2(\frac{x}{y})^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0$. Далі виконуємо заміну

$\frac{x}{y} = z$ і дістаємо рівняння $2z^2 - 5z + 2 = 0$, корені якого $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Потім розв'язуємо дві системи:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x = 2y, \\ 3(2y)^2 - 2y^2 - 4y^2 = 6, \end{cases}$

тобто $\begin{cases} x = 2y, \\ y = \pm 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 6, \end{cases}$ або $\begin{cases} y = 2x, \\ 3x^2 - 2x^2 - 4(2x)^2 = 6 \end{cases}$ (ця система несумісна).

Відповідь: $(2; -1); (-2; 1)$.

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1)

Означення. Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій області визначення, якщо їх розв'язки на ній збігаються (тобто кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої системи і навпаки – кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої) [21].

Дві системи, що не мають розв'язків на даній області визначення, також вважаються рівносильними на цій області.

Очевидно, що при заміні одного рівняння система рівносильним рівнянням, система переходить у рівносильну їй систему рівнянь. Тому описаний нами загальний підхід до виконання рівносильних перетворень рівнянь може бути використано і при рівносильних перетвореннях систем рівнянь. Отже, щоб гарантувати рівносильність перетворень систем рівнянь, досить:

1) знайти область визначення системи (і ні в якому разі не звужувати її без дослідження тих значень, які не входять до області визначення нової системи);

2) гарантувати оборотність на області визначення кожного перетворення.

Твердження про рівносильність систем рівнянь:

1. Якщо змінити порядок рівнянь системи (1), то отримана система буде рівносильна системі (1).

2. Якщо одне із рівнянь системи (1) замінити на рівносильне йому рівняння, то отримана система рівнянь буде рівносильна системі (1).

3. Якщо перше рівняння системи (1) замінити рівнянням, рівним сумі першого рівняння, помножене на деяке відмінне від нуля число α, і друге рівняння, помножене на деяке відмінне від нуля число β, то отримана система рівнянь буде рівносильна системі (1).

4. Нехай в системі рівнянь (1) одне із рівнянь записано у вигляді, де в лівій частині стоїть одне із невідомих, наприклад, x в першому степені, а в правій частині – функція відносно у. Тоді говорять, що невідома x виражено через невідоме у. Якщо невідоме x виражено із першого рівняння системи (1), то підставивши в друге рівняння системи (1) замість x цю функцію від у, отримаємо систему , рівносильну системі (1).

Слід обговорити з учнями, що поряд з рівносильними перетвореннями при розв'язуванні систем рівнянь можуть використовуватися системи-наслідки (коли кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої системи). В цьому випадку ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені. Необхідно звернути увагу учнів на те, що у випадку, коли ми користуємося системою-наслідком, можливе виникнення сторонніх розв'язків, і тому в цьому випадку перевірка розв'язків є складовою частиною розв'язування системи.

Розглядаючи методи розв'язування систем рівнянь, необхідно звернути увагу учнів на метод алгебраїчного додавання рівнянь і метод заміни змінних.

Одним із видів стандартних замін є заміни, пов'язані з системами симетричних рівнянь [21].

Рівняння називається симетричним відносно змінних, якщо воно не зміниться за будь-яких перестановок змінної.

Симетричні системи – це такі системи, які не змінюються при взаємній заміні невідомих.

Розв'язання симетричних систем рівнянь зручно виконувати за схемою:

*1.*Виконувати заміну $x + y = u, xy = v$.

*2.*Задана система розв'язується відносно змінних u, v.

3. Знаючи u і v, змінні x і y знаходять як розв'язок системи $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ при цьому зручно користуватись оберненою теоремою Вієта, на підставі якої x і y є коренями квадратного рівняння $z^2 - uz + v = 0$. Якщо z_1 і z_2 – корені цього рівняння, то відповідні розв'язки системи будуть $\{(z_1, z_2), (z_1, z_2)\}$. *Корисно знати такі співвідношення:*

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$,

2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$,

3) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$.

Ці співвідношення не обов'язково пам'ятати, але потрібно вміти їх виводити самостійно.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

Розв'язання.

Легко побачити, що при заміні x на y, а y на x система не змінює свій вигляд. Отже, дана система симетрична відносно змінних.

1. Введемо заміну $x + y = u, xy = v$ і виразимо через них ліві частини рівнянь.

2. Відносно u і v система набуває вигляду

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = u^2 - v \\ x + xy + y = u + v. \end{cases}$$

Дана система зведена до наступної $\begin{cases} u^2 - v = 21, \\ u + v = 9. \end{cases}$

Додавши почленно ці рівняння, отримуємо квадратне рівняння $u^2 + u - 30 == 0.$

Використаємо теорему Вієта, отримаємо що $u_1 = 5$ і $u_2 =- 6$. Так як $v = 9 - u$, то $v_1 = 4$ і $v_2 = 15$.Таким чином, отримали дві пари $(5;4)$ і $(-6;15)$, які задовольняють систему рівнянь.

Дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + y =- 6, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу із отриманих систем (наприклад, методом підстановки), знаходимо $x_1 = 1,\ y_1 = 4,\ x_2 = 4,\ y_2 = 1$.

Друга система розв'язків не має, а тому розв'язком сукупності є тільки розв'язки першої системи.

Відповідь: $\{(1;4)(4;1)\}$.

1.4.1. Системи двох рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1)

Щоб позбутися y, помножимо обидві частини першого рівняння на b_2, а другого – на b_1, віднімемо почленно ці рівняння [31]:

$x(b_2a_1 - b_1a_2) = c_1b_2 - c_2b_1,$

звідки $x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}$ при $b_2 a_1 - b_1 a_2 \neq 0$. (2)

Аналогічно знаходимо y:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}. \quad (3)$$

Аналогічно можна дістати:

$$\begin{cases} x(b_2 a_1 - b_1 a_2) = c_1 b_2 - c_2 b_1, \\ y(b_2 a_1 - b_1 a_2) = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{cases} \quad (4)$$

Вираз $b_2 a_1 - b_1 a_2$ називається визначником системи (1) і позначається так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (5)$$

За допомогою визначника можна знайти, скільки розв'язків має система (1):

а) якщо $\Delta \neq 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система (1) має один розв'язок, який знаходиться за формулами (2) та (3);

б) якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система (1) несумісна;

в) якщо $\Delta = \Delta_x = 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, то система (1) має безліч розв'язків. У цьому випадку $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$. І систему (1) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} ka_2 x + kb_2 y = kc_2, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a_2 x + b_2 y = c_2, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Маємо систему двох однакових рівнянь, тому вона має безліч розв'язків: $x \in R, y = \frac{1}{b_2}(c_2 - a_2 x)$.

Теорема 1. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_1 f_1(x;y) + a_2 f_2(x;y) = 0, \\ b_1 f_1(x;y) + b_2 f_2(x;y) = 0 \end{cases}$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} f_1(x;y) = 0, \\ f_1(x;y) \pm f_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

За допомогою системи рівнянь (4) розглянемо такі детермінанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Тепер систему (4) коротко можна записати так:

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta_x, \\ \Delta y = \Delta_y. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 2. Система рівнянь (6) є наслідком системи рівнянь (1).

Доведення. Нехай $x = \alpha$ і $y = \beta$ є довільний розв'язок системи (1). Тоді маємо такі дві тотожності $a_1\alpha + b_1\beta = c_1$ і $a_2\alpha + b_2\beta = c_2$.

Першу з цих тотожностей множимо на b_2, а другу – на b_1 і від обох частин першої тотожності віднімемо відповідні частини другої тотожності. Маємо:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\alpha = c_1b_2 - c_2b_1. \quad (7)$$

Аналогічно дістаємо, що

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\beta = a_1c_2 - a_2c_1. \quad (8)$$

Із тотожностей (7) і (8) виходить, що $x = \alpha$ і $y = \beta$ є розв'язком системи (6). Зазначимо, що у загальному випадку системи (1) і (6) нееквівалентні [31].

1.4.2. Системи однорідних рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = A, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \cdots + b_ny^n = B. \end{cases} \quad (1)$$

ліві частини яких є однорідні многочлени однакового степеня n відносно невідомих x і y, а праві – відмінні від нуля константи. Таку систему називають системою однорідних рівнянь з двома невідомими.

Нехай в жодному з розв'язків системи (1) не може бути y=0. Робимо заміну $\frac{x}{y} = t$. Тоді $x = yt$.

В обидва рівняння системи (1) підставляємо $x = yt$ (тобто у системі (1) переходимо від невідомих x і y до невідомих t і y). Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0 y^n t^n + a_1 y^n t^{n-1} + a_2 y^n t^{n-2} + \dots + a_n y^n = A, & (2) \\ b_0 y^n t^n + b_1 y^n t^{n-1} + b_2 y^n t^{n-2} + \dots + b_n y^n = B. & (3) \end{cases}$$

Обидві частини одного з рівнянь системи (2), (3) ділимо на відповідні частини іншого рівняння. Дістанемо рівняння з одним невідомим t:

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}. \qquad (4)$$

Нехай рівняння 4 має такі корені:

$$t_1 = a_1, t_2 = a_2, \dots, t_k = a_k, \qquad (5)$$

де, очевидно, $k \leq n$. Тоді, оскільки $[illegible] = t$,

$$[illegible] = a_1, [illegible] = a_2, \dots, [illegible] = a_k, \qquad (6)$$

Оскільки за умовою $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то система рівнянь (2) і (3) еквівалентна системі, утвореній з рівняння (4) і будь-якого з рівнянь системи (2) і (3). Але рівняння (4) еквівалентне сукупності рівнянь (5). Тому система рівнянь (2), (3) еквівалентна сукупності k систем, утворених приєднанням до кожного з рівнянь (5) будь-якого з рівнянь (2) і (3).

Тепер, переходячи до невідомих x і y, дістаємо, що дана система (1) еквівалентна сукупності k систем, утворених приєднанням до кожного з рівнянь (6) будь-якого з рівнянь системи (1) [31].

Приклад. Розв'язати циклічну систему рівнянь $\begin{cases} xy + z^2 = 2, \\ yz + x^2 = 2, \\ zx + y^2 = 2. \end{cases}$

Розв'язання:

Замінимо перше рівняння системи різницею першого і другого рівняння, друге – різницею другого і третього, а третє оставимо без змін. Тоді отримаємо систему:

$$\begin{cases} xy - yz + z^2 - x^2 = 0, \\ yz - xz + x^2 - y^2 = 0, \\ xz + y^2 = 2, \end{cases}$$

тобто систему

$$\begin{cases} (z-x)(z+x)-y(z-x)=0, \\ (x-y)(x+y)-z(x-y)=0, \\ xz+y^2=2, \end{cases}$$

яка за теоремою 1 рівносильна даній. Маємо далі:

$$\begin{cases} (z-x)(z+x-y)=0, \\ (x-y)(x+y-z)=0, \\ xz+y^2=2. \end{cases}$$

Цій системі рівнянь рівносильна наступна сукупність систем:

$$\begin{cases} z-x=0, \\ x-y=0, \\ xz+y^2=2; \end{cases} \quad \begin{cases} z-x=0, \\ x+y-z=0, \\ xz+y^2=2; \end{cases} \quad \begin{cases} z+x-y=0, \\ x-y=0, \\ xz+y^2=2; \end{cases} \quad \begin{cases} z+x-y=0, \\ x+y-z=0, \\ xz+y^2=2. \end{cases}$$

Розв'яжемо системи цієї сукупності методом підстановки. Із першої системи знаходимо: $(1;1;1), (-1;-1;-1)$;

із другої: ($\sqrt{2};0;\sqrt{2}$), ($-\sqrt{2};0;-\sqrt{2}$);

із третьої: ($\sqrt{2};\sqrt{2};0$), ($-\sqrt{2};-\sqrt{2};0$);

із четвертої: ($0;\sqrt{2};\sqrt{2}$), ($0;-\sqrt{2};-\sqrt{2}$).

Перевірка. В процесі розв'язування всі перетворення були рівносильними, тому знайдені вісім розв'язків є розв'язками заданої системи рівнянь.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом

Як нам вже відомо, розв'язування систем рівнянь виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

геометрично пояснюється як визначення координат точок перетину ліній, заданих рівняннями системи.

Його суть полягає в наступному:

✓ побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;

✓ знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;

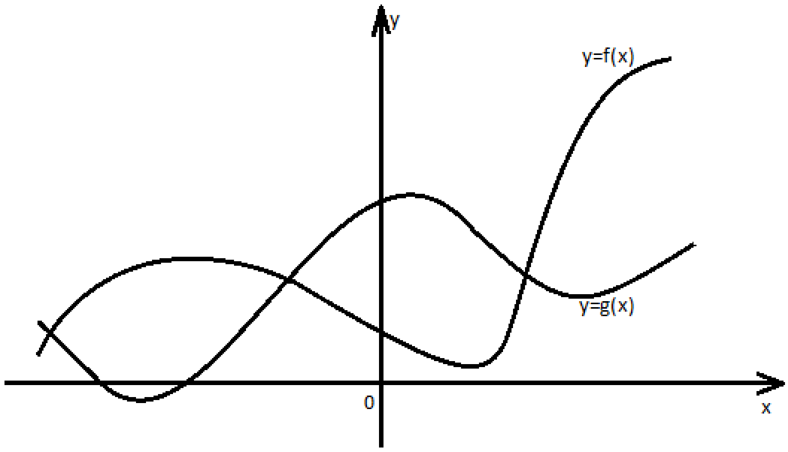
✓ отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Не будь-яку систему рівнянь доцільно розв'язувати графічно. Наприклад, якщо пара $(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85})$ є розв'язком якоїсь системи, то зрозуміло, що графічновстановити цей факт вкрай складно. А тому графічний метод зазвичай застосовують тоді, коли розв'язок достатньо знайти наближено. Те, що пара (1;3) є розв'язком системи

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13, \end{cases}$$

підтверджує безпосередня підстановка цієї пари в кожне з рівнянь системи, тобто перевірка [32].

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи. Наприклад, на малюнку 2 зображено графіки деяких функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Ці графіки мають три спільні точки. Це дає змогу стверджувати, що система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ має три розв'язки.



Мал. 2

Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- ✓ якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- ✓ якщо прямі збігаються, то система має нескінченно багато розв'язків;
- ✓ якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має [32].

Випадок, коли така система має єдиний розв'язок, було вже розглянуто. Тепер розглянемо приклади, які ілюструють дві інші можливості.

Так, якщо в системі

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обидві частини першого рівняння помножити на 2, то розв'язки цього рівняння, а отже, і всієї системи не зміняться.

Маємо:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи збігаються з розв'язками рівняння $x - 2y = 2$. Проте таке рівняння має безліч розв'язків, а значить, і розглядувана система також має безліч розв'язків.

Ось приклад системи, яка не має розв'язків:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Справді, помножимо обидві частини першого рівняння системи на 3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Зрозуміло, що не існує такої пари значень x і y, при яких вираз $2x + 3y$ одночасно набуває значення і 6, і 7.

Зазначимо, що саме графічний метод підказав, що не існує системи лінійних рівнянь, яка мала б, наприклад, рівно 2, або рівно 3, або рівно 100 і т. п. розв'язків.

Приклади.

Розв'яжіть графічно системи лінійних рівнянь.

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3 - x, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Визначимо точки для побудови графіків кожного з рівнянь системи:

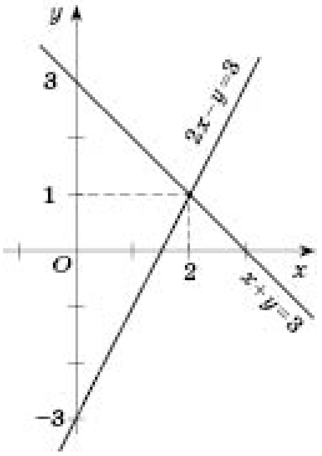
Для рівняння $y = 3 - x$:

x	0	3
y	3	0

Для рівняння $y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

Побудуємо графіки й знайдемо точку їх перетину.



Відповідь: (2;1).

2) $\begin{cases}2x - y = 1,\\ 2x - y = 3;\end{cases}$

$\begin{cases}y = 2x - 1,\\ y = 2x - 3.\end{cases}$

Визначимо точки для побудови графіків кожного з рівнянь системи:

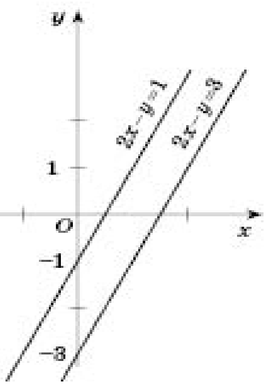
Для рівняння $y = 2x - 1$:

x	0	1
y	-1	1

Для рівняння $y = 2x - 3$:

x	0	1
y	-3	-1

Побудуємо графіки й знайдемо точку їх перетину.



Відповідь: розв'язків немає.

2.2. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Якщо математикам зустрічається нова задача, то зазвичай вони намагаються її розв'язування звести до вже знайомої задачі.

Покажемо, як розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними звести до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а остання задача добре знайома [32].

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо змінну у через змінну х. Маємо:

$y = 2x - 8$.

Підставимо в друге рівняння системи замість змінної у вираз $2x - 8$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ця і вихідна системи мають одні і ті самі розв'язки. Прийнято цей факт без обґрунтувань.

Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$3x + 2(2x - 8) = 5;$

$3x + 4x - 16 = 5;$

$7x = 21;$

$x = 3.$

Підставимо знайдене значення змінної х у рівняння $y = 2x - 8$. Матимемо:

$y = 2 \cdot 3 - 8;$

$y = -2.$

Пара (3;-2) – шуканий розв'язок.

Описаний тут спосіб розв'язування системи рівнянь називають **методом підстановки.**

Отже, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь [32].

Цю послідовність дій, яка складається з шести кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними методом підстановки.

Приклади.

1) $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 5x - 2y = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 5x - 2(4 - 3x) = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x, \\ 5x - 8 + 6x = 14; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - 3x, \\ 11x = 22; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4 - 3 \cdot 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$

Відповідь: (2;-2).

2) $\begin{cases} 4x - 5y = 7, \\ 3x + 4y = -18; \end{cases}$

$\begin{cases} 5y = 4x - 7, \\ 3x + 4y = -18; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x-7}{5}, \\ 3x + 4\,\dfrac{4x-7}{5} = -18; \ /\cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x-7}{5}, \\ 15x + 4(4x-7) = -90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x-7}{5}, \\ 15x + 16x - 28 = -90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x-7}{5}, \\ 31x = -62; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3, \\ x = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $(-2; -3)$.

2.3. Методика розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Розглянемо ще один спосіб, який дає змогу звести розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною [32].

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Оскільки в цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, то рівняння з однією змінною можна отримати, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Запишемо:

$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$

$6x = 12;$

$x = 2.$

Підставимо знайдене значення змінної x у будь-яке з рівнянь системи, наприклад, у перше. Отримаємо:

$2 \cdot 2 - 5y = 7;$

$-5y = 3;$

$y = -0,6.$

Отже, розв'язком системи є пара $(2; -0,6)$.

Описаний спосіб розв'язування системи називають **методом додавання.**

Цей метод, як і будь-який інший математичний метод, потребує обґрунтування його законності. Приймемо без доведення, що метод додавання дає правильні результати.

Розв'яжемо ще одну систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Якщо додати почленно ліві і праві частини рівнянь системи, то знову отримаємо рівняння з двома змінними. Дана система ще не готова до застосування методу додавання.

Помножимо обидві частини першого рівняння на -3. Отримаємо систему, розв'язки якої збігаються з розв'язками вихідної системи:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ \ \ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Уже для такої системи метод додавання є ефективним:

$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$

$14y = -14;$

$y = -1.$

Підставимо знайдене значення у в перше рівняння вихідної системи. Маємо:

$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$

$2x = 8;$

$x = 4.$

Пара (4;-1) – шуканий розв'язок.

Розглянемо систему, в якій обидва рівняння треба підготувати до застосування методу додавання:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Щоб виключити змінну y, помножимо обидві частини першого рівняння на число 5, а другого – на число -8 і застосуємо метод додавання:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$

$$11x = -11;$$

$$x = -1.$$

Підставивши знайдене значення x у перше рівняння даної системи, отримаємо:

$$-7 + 8y = 9;$$

$$y = 2.$$

Отже, пара $(-1;2)$ - розв'язок даної системи.

Алгоритм розв'язування системи рівнянь методом додавання можна записати так:

1) дібравши вигідні множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь [32].

Приклади.

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 10x + 6y = 8; \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x-6y=7, \\ 15x=15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ 6y=5-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $(1; -\frac{1}{3})$.

2) $\begin{cases} 4x+3y=3, \\ 2x-2y=5; /\cdot 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x+3y=3, \\ 4x-4y=10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y=-7, \\ 4x+3y=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1, \\ 4x+3\cdot(-1)=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1, \\ 4x-3=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1, \\ x=1{,}5. \end{cases}$$

Відповідь: $(1{,}5; -1)$.

3) $\begin{cases} 3x-5y=14, /\cdot 2 \\ 2x-7y=2; /\cdot 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x-10y=28, \\ 6x-21y=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11y=22, \\ 2x-7y=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2, \\ 2x=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2, \\ x=8. \end{cases}$$

Відповідь: $(8; 2)$.

2.4. Методика розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Розглянемо задачі, у яких системи двох лінійних рівнянь з двома змінними використовують як математичні моделі реальних ситуацій [32].

Приклад 1. На пошиття одного плаття і 4 спідниць пішло 9 м тканини, а на 3 таких самих плаття і 8 таких самих спідниць – 21 м тканини. Скільки тканини треба для пошиття одного плаття і однієї спідниці окремо?

Розв'язання:

Нехай на одне плаття йде x м тканини, а на одну спідницю – y м. Тоді на одне плаття і 4 спідниці йде $(x+4y)$ м тканини, що за умовою становить 9 м. Отже, $x+4y=9$.

На 3 плаття і 8 спідниць треба $(3x+8y)$ м тканини, або 21 м. Значить, $3x+8y=21$.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+4y=9, \\ 3x+8y=21. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо: $x=3,\ y=1{,}5$. Отже, на пошиття одного плаття піде 3 м тканини, а однієї спідниці – 1,5 м.

Відповідь: 3 м, 1,5 м.

Приклад 2. З міста A до міста B, відстань між якими 264 км, виїхав мотоцикліст. Через 2 год після цього назустріч йому з міста B виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 2 год мотоцикліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедист за 5 год.

Розв'язання:

Нехай швидкість мотоцикліста дорівнює x км/год, а велосипедиста – y км/год. До зустрічі мотоцикліст рухався 3 год і проїхав 3x км, а велосипедист відповідно – 1 год і y км. Разом вони проїхали 264 км. Тоді $3x+y=264$.

Велосипедист за 5 год проїжджає 5у км, а мотоцикліст за 2 год – 2х км, що на 40 км більше за 5у км. Тоді $2x - 5y = 40$.

Отримано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 80,\ y = 24$.

Отже, швидкість мотоцикліста дорівнює 80 км/год, а велосипедиста – 24 км/год.

Відповідь: 80 км/год, 24 км/год.

Приклад 3. Стіл і стілець коштували разом 680 грн. Після того як стіл подешевшав на 20 %, а стілець подорожчав на 10 %, вони стали коштувати разом 580 грн. Знайдіть початкову ціну стола і початкову ціну стільця.

Розв'язання:

Нехай початкова ціна стола становила х грн., а стільця – у грн. Тоді за умовою $x + y = 680$.

Нова ціна стола становить 80 % початкової і дорівнює $0{,}8x$ грн. Нова ціна стільця становить 110 % початкової і дорівнює $1{,}1y$ грн. Тоді $0{,}8x ++ 1{,}1y = 580$.

Отримано систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $x = 560,\ y = 120$.

Отже, початкова ціна стола була 560 грн., а стільця – 120 грн.

Відповідь: 560 грн., 120 грн.

Приклад 4. Скільки грамів 3-відсоткового і скільки грамів 8–відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 500 г 4-відсоткового розчину?

Розв'язання:

Нехай першого розчину треба взяти x г, а другого – y г. Тоді за умовою

$x + y = 500$.

У 3-відсотковому розчині міститься 0,03x г солі, а у 8-відсотковову – 0,08y г солі. У 500 г 4-відсоткового розчину міститься $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (г) солі. Отже, $0{,}03x + 0{,}08y = 20$.

Складено систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\begin{cases} x = 400, \\ y = 100 \end{cases}$$

Отже, треба взяти 400 г 3-відсоткового розчину і 100 г 8-відсоткового розчину.

Відповідь: 400 г, 100г.

Приклад 5. У Петра були купюри по 5 грн. і по 20 грн. Він каже, що купив велосипед за 255 грн., віддавши за нього 20 купюр, а Василь каже, що такого бути не може. Хто правий?

Розв'язання:

Нехай було x купюр по 5 грн. і y купюр по 20 грн. Тоді:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $(x;y)$, у якій $y = 10\frac{1}{3}$, що не відповідає змісту задачі, оскільки кількість купюр може бути тільки натуральним числом.

Відповідь: правий Василь.

2.5. Методика розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь другого степеня використовуються як математичні моделі реальних ситуацій [20].

Приклад 1.

З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч один одному двоє туристів і зустрілися через 2 год. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо для проходження всієї відстані між пунктами одному з них потрібно на 54 хв більше, ніж другому?

Розв 'язання:

Нехай швидкість першого туриста дорівнює x км/год, а другого – y км/год, x < y. До зустрічі перший турист пройшов 2x км, а другий – 2y км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Усю відстань між пунктами перший турист проходить за $\frac{18}{x}$ год, а другий – за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першому туристу для проходження цієї відстані потрібно на 54 хв $= \frac{54}{60}$ год $= \frac{9}{10}$ год більше, ніж другому, то

$$\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9 - y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Розв'язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5,$ $y_2 = -36.$ Корінь –36 не підходить за змістом задачі. Отже, y = 5, x = 4.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год.

Приклад 2.

Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи один із них був переведений на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що зроблено 3 всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання:

Нехай перший робітник може виконати всю роботу за х днів, а другий– за у днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів – $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів – $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують всю роботу, то $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1.$

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}.$

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1, \\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15, y = 30$. Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий – за 30 днів.

Відповідь: 15 днів, 30 днів.

Приклад 3.

При діленні двоцифрового числа на добуток його цифр одержимо неповну частку 5 і остачу 2. Різниця цього числа і числа, отриманого перестановкою його цифр, дорівнює 36. Знайдіть це число.

Розв'язання:

Нехай шукане число містить x десятків і y одиниць. Тоді воно дорівнює $10x + y$. Оскільки при діленні цього числа на число xy отримуємо неповну частку 5 і остачу 2, то $10x + y = 5xy + 2$.

Число, отримане перестановкою цифр даного, дорівнює $10y + x$. За умовою $(10x - y) - (10y - x) = 36$. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10x + y = 5xy + 2, \\ (10x + y) - (10y + x) = 36, \end{cases}$$

розв'язками якої є дві пари чисел: $x = 6; y = 2$ або $x = 0{,}2; y = 3{,}8$. Проте друга пара не підходить за змістом задачі.

Отже, шукане число дорівнює 62.

Відповідь: 62.

2.6. Методика вивчення систем алгебраїчних рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики

2.6.1. Методика вивчення систем, що містять лінійні рівняння

Розглянемо систему

$$(L,F)\begin{cases} \left.\begin{matrix} L_1(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0,\ L_2(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0, \\ \dots,L_k(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0 \end{matrix}\right\} (L) \\ \left.\begin{matrix} F_1(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0 \\ F_2(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0 \\ \dots,F_m(x,y,\dots,u,v,\dots,w) = 0 \end{matrix}\right\} (F) \end{cases}$$

рівнянь з невідомими $x,y,\dots,u,v,\dots,w$, в якій рівняння (L) є лінійні, інші ж рівняння (F) – алгебраїчні степеня більшого ніж 1.

Розглянемо окремо лінійну систему (L).

Коли система (L) суперечлива, то й система (L, F) суперечлива.

Коли система (L) має єдиний розв'язок, то досить знайдені з (L) числові значення невідомих підставити в рівняння (F). Коли всі рівняння (F) задовольняються, то розв'язок (L) є єдиним розв'язком системи (L, F), якщо ж хоч би одне з рівнянь (F) не задовольняється, то система (L, F) розв'язків не має [12].

Коли система (L) мас нескінченну множину разв'язків, то формули загального розв'язку виражають деякі невідомі у вигляді лінійних функцій від інших невідомих; останнім можна надавати довільних значень. Нехай, наприклад, із системи (L) невідомі $u,v,\ldots,w$ виражені через невідомі $x, y, \ldots;$ підставивши вирази $u, v, \ldots, w$ в рівняння (F), дістанемо систему m рівнянь (за числом рівнянь (F) а невідомими $x; y, \ldots$ В даному випадку розв'язання системи (L, F) зводиться до розв'язання системи меншого числа рівнянь з меншим числом невідомих. Оскільки невідомі $u,v,\ldots,w$ є нелінійними функціями від невідомих $x, y, \ldots$, то при підставлянні в рівняння (F) степінь кожного з цих рівнянь не підвищується, отже, матимемо систему рівнянь, степені яких не перевищують степенів відповідних рівнянь початкової системи.

Геометрична інтерпретація. Розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1 \\ \varphi(x,y) = 0 & (\varphi) \end{cases}$$

геометрично інтерпретується як знаходження точки перетину лінії (φ) з прямою (1). Число точок перетину не перевищує степеня многочлена $\varphi(x,y)$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y - 8z = -13, \\ 5x + 3y - z = 0, \\ 2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6yz - 8xz + 15xy + 51x + 18y + 8 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

Знаходимо спільний розв'язок системи рівнянь (1) і (2). Помноживши (1) на 5, віднімаємо його з (2) і дістаємо (після скорочення):

$$y + 3z = 5.$$

З рівнянь (1) і (1,2) дістаємо шуканий спільний розв'язок у такому вигляді:

$x = -3 + 2z, \quad y = 5 - 3z.$

Підставивши в рівняння (3), після спрощення матимемо:

звідки

Система має два розв'язки:

$$x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 1 \text{ і } x_2 = 1, y_2 = -1, z_2 = 2.$$

2.6.2. Методика вивчення систем двох рівнянь другого степеня з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \ (F) \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0 \ (F') \end{cases} \qquad (F, F')$$

або в скороченому запису:

$F = 0, \quad F' = 0.$

Припустимо, що обидва рівняння містять члени з квадратами обох невідомих, тобто ні один з коефіцієнтів $a_{11}, a'_{11}, a_{22}, a'_{22}$ не дорівнює нулеві. З рівнянь (1) і (2) можна виключити квадрат одного з невідомих. Так, наприклад, рівняння

$a'_{22}F - a_{22}F' = 0$

не має y^2 і разом з одним з рівнянь (F) або (F') становить систему, рівносильну системі (F, F'). На підставі викладеного досить розглянути систему (F, F'), в якій одне з рівнянь, наприклад (F) не має y^2, тобто a'_{22}= 0:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0 \qquad (F')$$

Права частина (F') є многочлен першого степеня відносно у:

$$2(a'_{12}x + a'_2)y + (a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0) = 0. \qquad (F)$$

Коли $x \neq -\frac{a'_2}{a'_{12}}$, то з (F') маємо:

$$y = -\frac{a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0}{a'_{12}x + a'_2}.$$

Ця формула дає загальний розв'язок (F') за додатковою умовою: $a'_{12}x + +a'_2 \neq 0$. Підставивши це значення в рівняння (F), дістанемо дробове рівняння:

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}x\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2} + a_{22}(\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2})^2 + 2a_1x -$$
$$-2a_2\left(\frac{a'_{11}x^2+2a'_1x+a'_0}{a'_{12}x+a'_2}\right) + a_0 = 0$$

,

яке в загальному випадку зводиться до алгебраїчного рівняння четвертого степеня. Отже, в загальному випадку система (F, F') має чотири розв'язки [29].

Викладеним прийомом не можна знайти розв'язки (якщо вони існують), для яких невідоме x має значення $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$. Коли це значення x не задовольняє рівняння

$$a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0 = 0, \tag{1}$$

то (F'), а, отже, і система (F, F') не має розв'язків вигляду $(-\frac{a'_2}{a'_{12}}, y)$. Коли значення $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$ задовольняє рівняння (1), то (F') при $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$ задовольняється тотожно відносно y. Підставивши $x = -\frac{a'_2}{a'_{12}}$в рівняння (F), дістанемо квадратне (в загальному випадку) рівняння для визначення відповідного значення y.

Рівняння для визначення одного з невідомих можна дістати так: розглянемо ліві частини рівнянь (F) і (F') як квадратні тричлени відносно одного з невідомих, наприклад y (припустивши, що хоч би одне з чисел a_{22} або a'_{22} відмінне від нуля):

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_2)y + (a_{11}x^2 + 2a_1x + a_0) = 0, \tag{F}$$
$$a'_{22}y^2 + 2(a'_{12}x + a'_2)y + (a'_{11}x^2 + 2a'_1x + a'_0) = 0, \tag{F'}$$

Коли пара чисел $x = x_1, y = y_1$ є розв'язок системи (F, F'), то при $x = x_1$ квадратні рівняння (F) і (F') мають спільний корінь y_1, і тому їх результант $R(F, F')$ перетворюється в нуль і, отже, x є корінь рівняння

$$(ac_1 - ca_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0, \qquad (R)$$

де $a = a_{22}, a_1 = a'_{22}, b = 2(a_{12}x + a_2)$ і т. д.

Навпаки, коли x_1є корінь рівняння (R), то рівняння (F) і (F') при $x = x_1$ мають спільний корінь $y = y_1$. Рівняння (R) у цьому загальному випадку має четвертий степінь відносно x, воно є результат виключення y з рівнянь (F) і (F').

Геометрична інтерпретація. Кожне з рівнянь (F) і (F') зокрема зображає лінію другого порядку; розв'язання системи (F, F') є відшукання точок перетину цих ліній. Дві лінії другого порядку можуть мати не більше чотирьох точок перетину (рис. 2.6.2); деякі точки можуть бути кратними (дотик).

Коли кожна з ліній розпадається на пару прямих, причому обидві пари мають спільну пряму, то система (F, F') має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. . Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, & (1) \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. & (2) \end{cases}$$

Розв'язування:

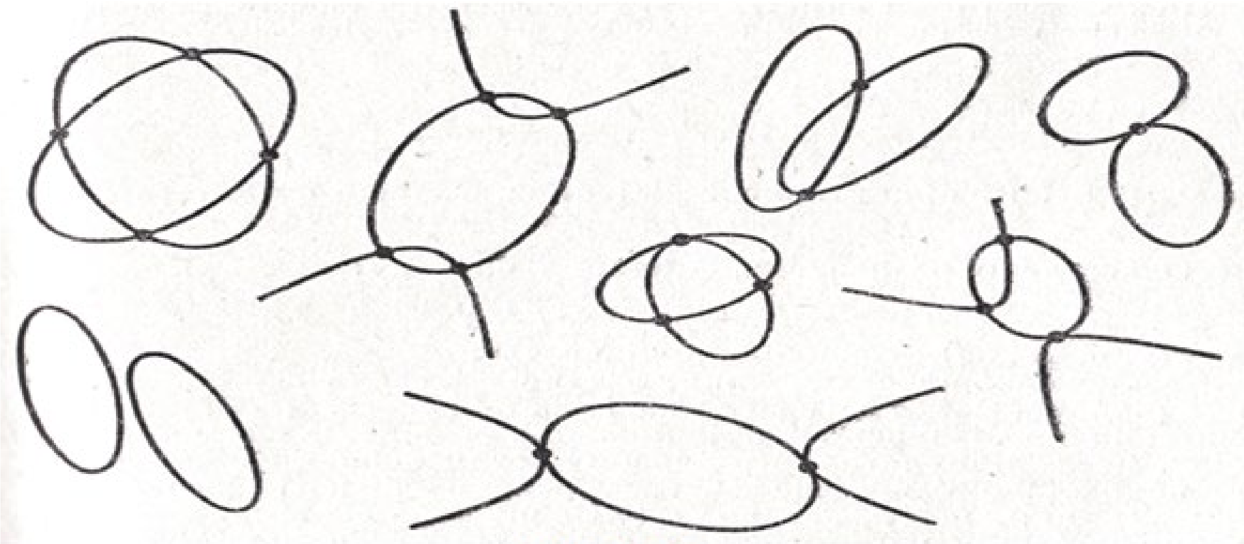


Рис. 2.6.2

Помножимо (1) на 2 і віднімемо від нього (2):

$$3xy - 2y^2 - 3x + 9y - 7 = 0. \qquad (1,2)$$

Звідки $3(y-1)x = 2y^2 - 9y + 7$ і $x = \frac{2y^2-9y+7}{3(y-1)}$ при $y \neq 1$.

Підставивши знайдений вираз для x в (1), матимемо:

$$\frac{y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 2}{y-1} = 0.$$

Чисельник має корені:

$y_1 = -1, \quad y_2 = 2, \quad y_{3,4} = 1.$

Для коренів $y_1 = -1$ і $y_2 = 2$ знаходимо відповідні розв'язки системи:

$$x_1 = -3, y_1 = -1 \text{ і } x_2 = -1, y_2 = 2.$$

При значенні $y = 1$ рівняння (1,2) задовольняється тотожно. Припустивши в рівняння (1) або (2), що $y = 1$, дістанемо квадратне рівняння:

$x^2 - 4x + 3 = 0;$

Знайдемо ще два розв'язки системи:

$$x_3 = 3, y_3 = 1 \text{ і } x_4 = 1, y_4 = 1.$$

2.7. Розробка самостійних робіт

Розробка системи самостійних робіт є необхідною умовою для систематичної, цілеспрямованої організації самостійної діяльності на уроках алгебри у сьомих та дев’ятих класах .

Самостійні роботи розроблені по основним методам курсу алгебри у сьомих та дев’ятих класах по темі "Системи лінійних алгебраїчних рівнянь" і розраховані на 15-20 хвилин, у двох варіантах.

Зміна порядку завдань в структурі самостійних робіт на конкретну тему дає можливість збільшити кількість варіантів, що націлюватиме учня на самостійне розв’язування завдань [28].

Оформлення самостійних робіт полягає в наступному: окремі листки містять завдання і табличку, які роздаються кожному учневі; учень заповнює табличку,тобто вписує свої дані – ім’я, прізвище та клас, а також напроти номера завдання вказує варіант вірної відповіді; саме розв’язання проводиться в робочих зошитах; після завершення відведеного часу учень розриває листок по відмітці на дві частини; частину лиска, яка містить табличку учні здають вчителеві, а іншу – залишають собі.

Проведення самостійної роботи таким шляхом значно полегшує роботу вчителя, а учні мають можливість вдома ще раз розв’язати свої завдання, тим самим зробити самоперевірку. Прикладом оформлення самостійної роботи є самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом».

2.7.1. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним методом»

В-І

1. Розв'яжіть графічно системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=2; \\ 2x-3y=2. \end{cases}$

а) (4;2); б) (2;− 3); в) (3;1

2) $\begin{cases} 3x-y=-4; \\ x+2y=8. \end{cases}$

а) (2;1); б) (0;4); в) (− 1;1

3) $\begin{cases} |x|-y=0; \\ x-y=-2. \end{cases}$

а) (2;− 2); б) (3;4); в) (0;− 2);.

2. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x-2y=-3; \\ 2x-4y=-6. \end{cases}$

а) Безліч; б) Немає; в) Один.

2) $\begin{cases} x+3y=-2; \\ 2x+6y=-4. \end{cases}$

а) Безліч; б) Не

С-1	***Прізвище та ім'я***				***7-… . клас***
Завдання Варіант	*1.1)*	*1.2)*	*1.3)*	*2.1)*	*2.2)*
І	***а***	***б***	***г***	***а***	***а***

В-ІІ

1. Розв'яжіть графічно системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

а) (4;2);   б) (2;1);   в) (3;.

2) $\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

а) (2;1);   б) (0;4);   в) (− 1;1.

3) $\begin{cases} |x| - y = 0; \\ x - 3y = -4. \end{cases}$

а) (2;2),(− 1;1);   б) (3;4),(5;2);   в) (0;− 2), (1;2);   г)(− 1;1),(.

2. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3. \end{cases}$

а)Безліч;   б) Немає;   в) Один.

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1; \\ 9x - 6y = -2. \end{cases}$

а)Безліч;   б) Н

С-1	***Прізвище та ім'я***				***7-… . клас***
Завдання / Варіант	*1.1)*	*1.2)*	*1.3)*	*2.1)*	*2.2)*
І	***б***	***в***	***а***	***б***	***б***

2.7.2. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки»

В-I

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} x + y = 4; \\ 4x - y = 1. \end{cases}$

а) (1;3); б) (2;1); в.

2) $\begin{cases} 5x - 6y = 1; \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$

а) (4;2); б) (2;1,5); в) (3;1.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$\begin{cases} 5(x - 4) + 2x = x - 2; \\ 4(y + 3) - 5 = x - 4. \end{cases}$

а) $(3; -2)$; б) (2;1); в) (2;1.

3. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

.

а) (0;2); б) $(2; -2)$; в) $(-3;1)$; г) (2;4)

4. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-2;6)$, $B(3;1)$. Задайте цю функцію формулою.

а) $y = -x + 4$; б) $y = x + 3{,}6$; в) $y = 0{,}3x + 2$; г) $y = -2x + 1$

В-II

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 2x - 5y = 8. \end{cases}$

а) (4;0); б) (3;1); в) $(2; -1$.

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 2; \\ 4x - 6y = 1. \end{cases}$

а) (0;2); б) (1;0,5); в) $(-3;1{,}1)$; .

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} -2(6x+3)+1=2y-3; \\ 11-4(x-2)-5=y-2. \end{cases}$$

а) $(-13;4)$; б) $(-2;-1)$; в) $(1,2;1)$; г) (

3. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

$5x-$

а) $(-3;-2)$; б) $(4;5)$; в) $(-2;1)$; г) $(-3;7)$

4. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-3;2), B(3;-1)$. Задайте цю функцію формулою.

а) $y=x+0,3$; б) $y=-0,5x+0,5$; в) $y=0,8x+3$; г) $y=-9x+4$

2.7.3. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання»

В-І

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом додавання:

1) $$\begin{cases} 3x-8y=18; \\ -3x+4y=-6. \end{cases}$$

а) $(-2;-5)$; б) $(-2;-3)$; в) $(8;4)$;

2) $$\begin{cases} (x-4)^2-(x+4)^2=4y; \\ (y+2)^2-(y+1)^2=2x. \end{cases}$$

а) $(2;2)$; б) $(0,3;-1;2)$; в) $(0,4;-1)$; г) $(-1,1$

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,1x+3y=5; \\ 0,3x-7y=-1. \end{cases}$$

а) $(-4;2)$; б) $(0;1)$; в) $(20;1$

3. Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $$\begin{cases} 11x+17y=25; \\ 11x+17y=27. \end{cases}$$

а) Так; б) Ні.

2) $\begin{cases} 2x+5y=13; \\ 4x-2y=-10; \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

а) Так; б) Ні.

В-ІІ

1. Розв'яжіть системи рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 4x+5y=6; \\ 4x+3y=2. \end{cases}$

а) (8; 2); б) (2; −1); в) (5;2.

2) $\begin{cases} 4(x+3)-5(x^2-y-3)=9; \\ 6(x+3)+5(x^2-y-3)=1. \end{cases}$

а) (5;2); б) (− 2;1); в) (− 2;2); .

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$\begin{cases} 1{,}2x+0{,}7y=28; \\ -0{,}6x+0{,}5y=3. \end{cases}$

а) $\left(11\frac{2}{3};20\right)$; б) (2; −1); в) $\left(7\frac{4}{9};20\right)$; .

3. Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-7y=6; \\ -4x+14y=-12. \end{cases}$

а) Так; б) Ні.

2) $\begin{cases} 8x+3y=2; \\ 6x+2y=1; \\ 4x+4y=1. \end{cases}$

а) Так; б) Ні.

2.7.4. Самостійна робота на тему «Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь»

В-І

1. Мама за 2 кг помідорів і 1 кг огірків заплатила 8 грн. Якби вона купувала 1 кг помідорів і 2 кг огірків, то її потрібно було б заплатити 7 грн. Скільки коштує 1 кг помідорів і 1 кг огірків?

а) 3 грн; 2 грн;   б) 3 грн;3 грн;   в) 4 грн;3 грн.

2. До магазину завезли 5 ящиків слив і 7 ящиків винограду, загальна маса яких дорівнює 89 кг. Знайдіть масу одного ящика слив і масу одного ящика винограду, якщо 1 ящик слив легший від 2 ящиків винограду на 6 кг.

а) 6 кг; 5 кг;   б) 8 кг;7 кг;   в) 9 кг;8 кг.

3. На двох полицях стоїть 60 книжок. Коли четверту частину книжок першої полиці переставили на другу, то на другій полиці книжок стало утричі більше, ніж на першій. Скільки книжок стояло на кожній полиці спочатку?

а) 30 і 10 книжок; б) 15 і 30 книжок; в) 20 і 40 книжок.

4. На двох гілках сиділо 25 горобців. Коли з першої гілки на другу перелетіло 5 горобців, а з другої полетіло 7 горобців, то на першій гілці їх стало удвічі більше, ніж на другій. Скільки горобців було на кожній гілці спочатку?

а) 17 і 8 горобців; б) 15 і 4 горобців; в) 19 і 10 горобців.

В - ІІ

1. За 2 альбоми і 5 зошитів Марійка заплатила 9 грн. Скільки коштує 1 альбом і скільки 1 зошит, якщо три зошити дорожчі від 1 альбому на 1 грн.?

а) 2 грн;1 грн;   б) 3 грн;2 грн;   в) 1грн;4 грн.

2. Два автомобілі різної вантажності вивезли за перший день 50 т зерна, до того ж, перший автомобіль зробив 5 рейсів, а другий – 6. За другий день автомобілі вивезли 75 т зерна, до того ж, перший зробив 10 рейсів, а другий – 7. Яка вантажність кожного автомобіля?

а) 6 т , 5 т;   б) 4 т, 5 т;   в) 3 т, 4 т.

3. За 3 год за течією річки і 5 год проти течії теплохід проходить 338 км, а за 1 год проти течії і 30 хв за течією – 63 км. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.

а) $43\frac{\text{км}}{\text{год}};3\frac{\text{км}}{\text{год}}$;   б) $35\frac{\text{км}}{\text{год}};4\frac{\text{км}}{\text{год}}$;   в) $39\frac{\text{км}}{\text{год}};6\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

4. Мале підприємство має на двох рахунках у банку 24 тис. грн. Скільки грошей є на кожному рахунку, якщо 35% грошей на одному з них дорівнює 85% на іншому?

а) 21 тис.грн, 6 тис.грн;   б) 15 тис.грн, 7 тис.грн;   в) 17 тис.грн, 7 тис.грн.

2.7.5. Самостійна робота на тему «Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь другого степеня»

В-І

1. За 2 кг полуниць і 3 кг черешень заплатили 33 грн., а за 4 кг полуниць і 2 кг черешень – 38 грн. Скільки коштує 1 кг полуниць і скільки 1 кг черешень?

а) 6 грн; 7 грн;   б) 1 грн; 2 грн;   в) 5 грн; 4 грн.

2. Сума двох чисел дорівнює 11, а їх добуток – 28. Знайдіть ці числа.

а) $2;3$;   б) $5;6$;   в) $4;7$.

3. За пачку друкарського паперу і 3 альбоми заплатили 25 грн. Після того як папір подешевшав на 10%, а альбоми подорожчали на 20%, за 3 пачки паперу і 2 альбоми заплатили 39 грн. Якою була початкова ціна пачки паперу й одного альбому?

а) 20 грн; 15 грн;   б) 10 грн; 5 грн;   в) 10 грн; 8 грн.

4. Відстань між пристанями А і В, що розташовані на річці, дорівнює 33 км. Моторний човен шлях від А до В і назад проходить за 3 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо відомо, що 20 км, з яких 11 км – за течією річки і 9 км проти течії, човен проходить за 1 год.

а) 25 км/год;   б) 7 км/год;   в) 2 км/год.

В – ІІ

1. За 8 зошитів і 5 альбомів заплатили 9 грн. Скільки коштує один зошит і скільки один альбом, якщо 4 зошити дешевші від 6 альбомів на 4 грн.?

а) 50 к.; 1 грн;   б) 2 грн; 60 к.;   в) 80 к.; 3 грн.

2. Різниця двох чисел дорівнює 10, а сума їх квадратів – 82. Знайдіть ці числа.

а) $-8; 1$;   б) $-1; 4$;   в) $9; -1$.

3. Відомо, що 3 банки фарби і 2 банки лаку коштували 90 грн. Після того як фарба подешевшала на 10%, а лак – на 20%, за 4 банки фарби і 1 банку лаку заплатили 60 грн. Якою була початкова ціна банки фарби і банки лаку?

а) 20 грн; 40 грн;   б) 10 грн; 30 грн;   в) 15 грн; 35 грн.

4. Із двох пунктів А і В, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно виїхали два автомобілі назустріч один одному. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з пункту А, прибув у пункт В через 16 хв., а другий автомобіль – у пункт А через 4 хв. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

а) 2км/год; 7 км/год; б) 70км/год; 150 км/год; в) 60км/год; 120 км/год.

2.7.6. Самостійна робота на тему «Розв'язування систем двох рівнянь другого степеня з двома невідомими»

В-І

1. Розв'яжіть системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7; \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5). \end{cases}$

а) $(-2;-5), (2;5)$; б) $(1;-\frac{5}{4}),(-\frac{1}{4};-\frac{5}{2})$; в) $(8;4), (-8;$.

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 23 - 2y; \\ 2x^2 + 2y^2 + 5y = 27 + 3x. \end{cases}$

а) $(2;2)$; б) $(2;-5),(3;2)$; в) $(0{,}4;-1),(-1;2)$; г) $(-1{,}1;-1,$.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 12; \\ 4x + 3xy - x^2 = 16. \end{cases}$

а) $(-2;3)$; б) $(0;1)$; в) $(2;2$.

В-ІІ

1. Розв'яжіть системи рівнянь:

1) $\begin{cases} (x+4)(y-1) = x^2 + 5x + 4; \\ x^2 - y^2 - 3x + 8 = 0. \end{cases}$

а) $(-2;-5), (2;5)$; б) $(-4;6),(-4;-6), (\frac{4}{7};2\frac{4}{7})$; в) $(8;4), (-8;-4$.

2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 2y = 2; \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22. \end{cases}$

а) $(2;2)$; б) $(2;-5),(3;2)$; в) $(-1;1),(-2;0)$; г) $(-1;$.

2. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0; \\ y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0. \end{cases}$$

а) $(-2;5)$; б) $(0;-1)$; в) $(\frac{2}{3};$.

2.8. Педагогічний експеримент

У сучасних умовах вчитель перетворюється на організатора особистісно-орієнтованого навчання, яке передбачає в першу чергу саморозвиток дитини. Перед вчителем стоїть ряд завдань, виконання яких сприятиме розвитку творчих здібностей учнів та залученню їх до самостійної пізнавальної діяльності. Виконання поставлених завдань у великій мірі залежить від дидактичного забезпечення навчального курсу, а саме від його змістовного наповнення і різноманіття.

У восьмих класах виникає проблема, суть якої полягає у недостатньому дидактичному забезпеченні, а саме, у відсутності готового комплексу самостійних робіт. Тому з метою перевірки ефективності даної методики був проведений у школі педагогічний експеримент.

Для експерименту було вибрано два 8 класи Опорного закладу освіти «Овруцький заклад загальної середньої освіти І – ІІІ ступенів № 4» (м. Овруч, Овруцького району, Житомирської області) , у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий. В 8 – Б класі систематично проводились самостійні роботи по запропонованих розробках. Організація ж навчального процесу у 8 – В класі залишалась без змін.

Результати з'явились одразу після перших уроків. Систематичний контроль у формі самостійних робіт дав можливість вчителеві одразу бачити рівень засвоєння матеріалу і одразу доопрацьовувати над тими питаннями, які викликають труднощі у навчанні. Завдяки незвичній формі розроблених робіт учні мали можливість вдома виконати ті самі завдання, зробивши самоперевірку. Така організація навчального процесу сприяла формуванню навичок самоосвіти та розвитку пізнавальних інтересів.

В учнів почали вироблятись необхідні вміння, а саме:

- уміння швидко та адекватно пристосовуватись до нових ситуацій;
- уміння зміцнювати навички у заданих ситуаціях;
- здатність бачити відмінні властивості та функції об'єктів, а також їх взаємозв'язки.

Перед тим, як приступити до проведення самостійної роботи, була проведена перевірка успішності учнів шляхом визначення рівня їх знань. Результати перевірки успішності подані в таблиці (Табл.1.).

Таблиця 1.

Класи	***Рівні засвоєння знань***			
	Високий	Достатній	Середній	Низький
8-Б	**24%**	**35%**	**28%**	**13%**
8-В	**21%**	**34%**	**27%**	**18%**

На основі даних таблиці побудуємо гістограму Рис. 2.8.1.

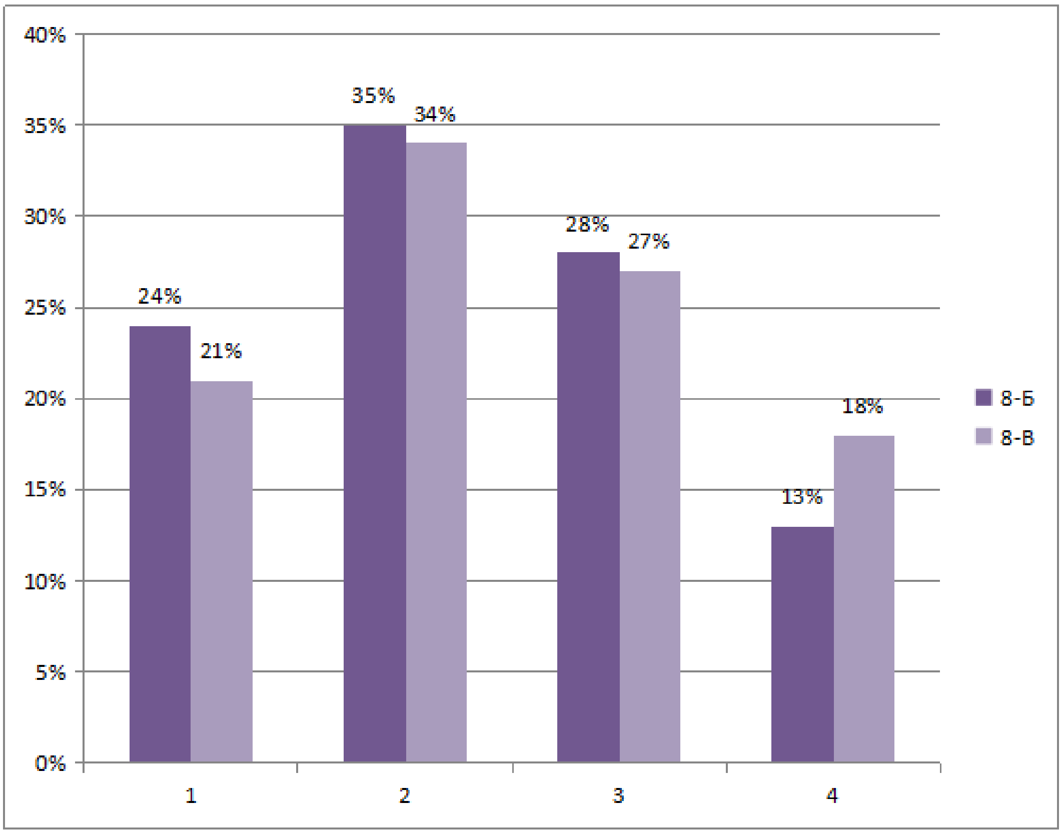


Рис. 2.8.1

На діаграмі цифрами 1; 2; 3; 4 позначено рівні засвоєння знань:

- 1 – високий;
- 2 – достатній;
- 3 – середній;
- 4 – низький.

Під час повторення вивченого у сьомому класі матеріалу на уроках учні виявляли інтерес до розв'язування систем рівнянь. Деякі учні зробили для себе відкриття, що вони можуть самостійно досягнути успіхів у навчанні при наполегливій праці над собою і творчому підході до опрацювання інформації.

Рівні знань учнів, які приймали участь в експерименті, по закінченні повторення теми "Розв'язування систем лінійних рівнянь", були перевірені за допомогою самостійної роботи і висвітлені в наступній таблиці (Табл.2.).

Таблиця 2.

Класи	***Рівні засвоєння знань***			
	Високий	Достатній	Середній	Низький
8-Б	**29%**	**39%**	**28%**	**4%**
8-В	**16%**	**33%**	**36%**	**15%**

Побудуємо циліндричну діаграму «Успішність після проведення експерименту» (Рис. 2.8.2).

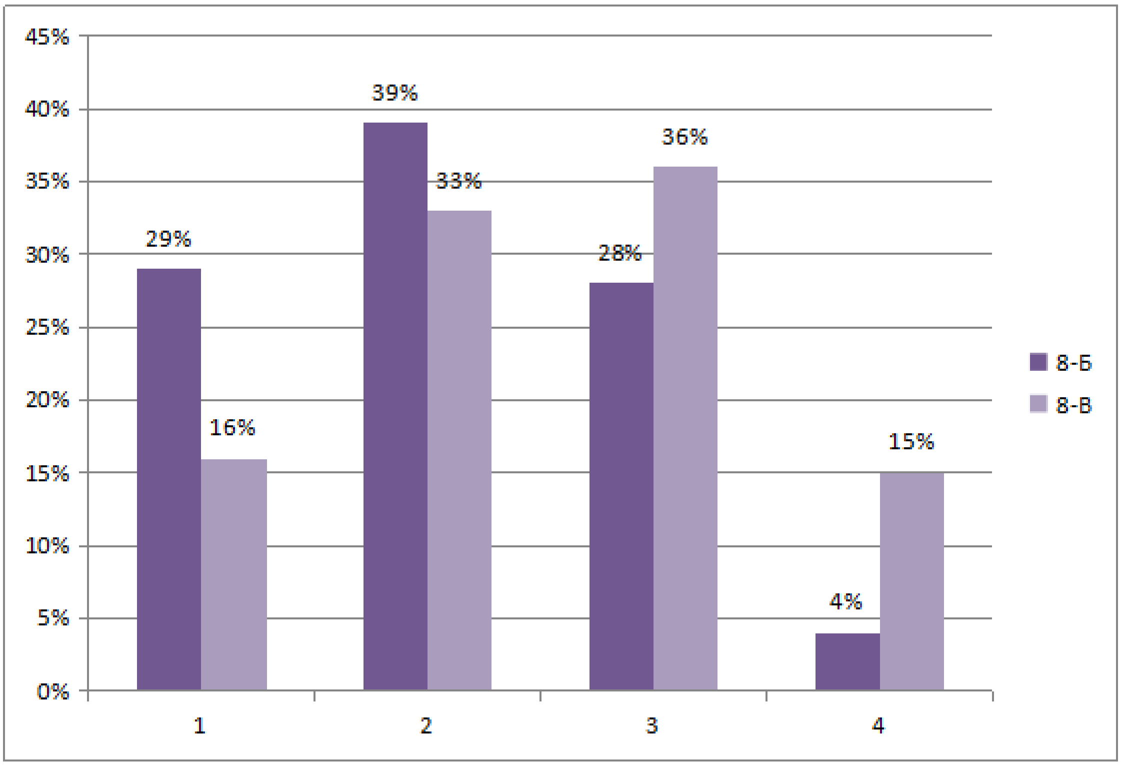


Рис. 2.8.2

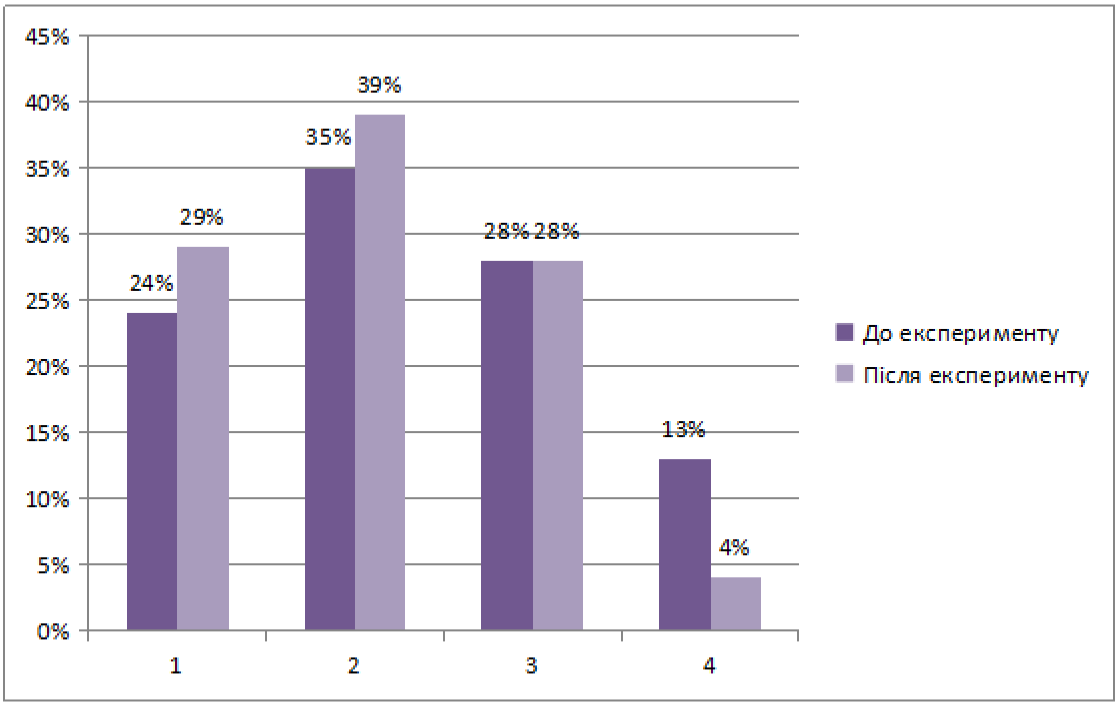
- Експериментальний 8 – Б
- Контрольний 8 – В

Якщо порівняти між собою попередні результати до і після проведення експерименту, то з впевненістю можна сказати, що дані уроки у експериментальному класі не пройшли дарма. Якість знань у класі, де повторювалась тема, виявилась вищою, ніж у контрольному класі. Порівняємо успішність у експериментальному класі до і після проведення експерименту (Табл.3.).

Таблиця 3.

Класи	***Рівні засвоєння знань***			
	Високий	Достатній	Середній	Низький
8-Б до експерименту	**24%**	**35%**	**28%**	**13%**
8-Б після експерименту	**29%**	**39%**	**28%**	**4%**

Для більшої наочності побудуємо гістограму:



Проаналізувавши рівень знань, умінь та навичок учнів, можна зробити висновок про доцільність використання на уроках алгебри у восьмих класах розроблений дидактичний матеріал у формі самостійних робіт. Покращення успішності у 8 - Б класі показує, що дуже важливо у своїй практиці вчителю проводити нетрадиційні самостійні роботи, адже це сприяє вихованню в учнів самостійності, активності, наполегливості, розвиває логічне мислення в учнів.

Складність проведення експерименту полягала в тому, що необхідно було дотриматися багатьох однакових умов як в експериментальних, так і в контрольних класах, бо тільки за цих обставин різниця в кінцевих результатах навчання може бути зумовлена дією чинника, вплив якого досліджується.

Результати експерименту засвідчили ефективність розробленої методики порівняно з традиційною. Спостереження за діяльністю учнів, бесіди з вчителями та учнями, статистичні дані дозволили зробити висновок про правильність обрання форм і методів, використаних під час проведення експериментального навчання.

Отже, застосування поданого в роботі дидактичного матеріалу є ефективним і сприяє досягненню поставленої вчителем триєдиної мети (навчальної, виховної і розвиваючої).

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі виконано поставлені завдання, зокрема: проаналізовано матеріал, що міститься в програмі для середньої загальноосвітньої школи, додаткові методи для розв'язування задач на базі теоретичного матеріалу, поданого в основному курсі, систематизовано відповідний теоретичний матеріал, розроблено дидактичне забезпечення по курсу алгебри сьомого та дев'ятого класу у формі самостійних робіт.

Учень, який навчається, має постійно оцінювати ступінь свого інтересу до предмета і можливості оволодіння ним з тим, щоб по закінченні дев'ятого класу він міг зробити свідомий вибір на користь подальшого вивчення математики або вивчення в рамках загальноосвітнього курсу. Орієнтиром у цьому може служити система самостійних робіт для 7-х та 9-х класів. Слід також враховувати, що організація вивчення алгебри характеризується перш за все їх інтенсивною підготовкою. Індивідуальна самостійна робота найчастіше дає позитивні результати, коли учні, знаючи загальні положення, закономірності, можуть зробити окремі висновки про властивості речовин, розв'язати доступні, але досить складні завдання.

Розроблені самостійні роботи мають перевіряючий характер, при цьому виконується в двох формах – класній і домашній. Завдання, які пропонують учням для самостійної роботи, мають зацікавлювати їх. Це досягається завдяки незвичній формі розроблених самостійних робіт. Їх достатня кількість дасть учителеві можливість систематично проводити контроль за якістю навчання.

Використання самостійної роботи на уроці алгебри у сьомому та дев'ятому класі робить урок ефективним, бо вона: формує світогляд, практичні вміння; узагальнює; систематизує і застосовує знання, уміння й навички; формує навички самоосвіти; розвиває мислення, пізнавальний інтерес, активність, пам'ять, волю, емоції; спонукає до продуктивного мислення; застосування набутих знань, умінь; вияву ініціативи; змагання, колективної співпраці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрова Л. А. Алгебра. 9 кл. Самостоятельные работы: учеб. Пособие. [для общеоброзоват. учрежденний.] /Л. А. Александрова, А.Г. Мордковича. – 3-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2006. – 80 с.
2. Аленков Ю. А. 650 головоломок и задач на сообразительность. / Ю. А. Аленков. – Д.: Стакер, 2002. – 286 с.
3. Алтынов П. И. Алгебра. Тесты. 7 – 9 классы: учебно- метод. пособие. / П. И. Алтынов. – 2-е узд. – М.: Дрофа, 1998. – 128 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб.[для фіз. – мат. фак.. пед. ін-тів.] / Г. П Бевз. – 3-є вид., перероб. і доп. – К.: Вища школа, 1989 – 366с.
5. Богданович М., Фурманчук М. Підвищення ефективності уроку математики. / М. Богданович, М. Фурманчук. – 2000. – №10 – с. 42 – 48.
6. Власенко О. І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посіб. [для фіз. – мат. фак. пед. ін-тів.] / О. І. Власенко. – К.: Вища школа, 1974. – 365 с.
7. Голант Е.Я. О развитии самостоятельности и творческой активности учащихся в процесе обучения // Воспитание познавательной деятельности и самостоятельности учащихся. / Е.Я. Голант. – Казань: 1969. – с. 78 - 89.
8. Глейзер Г. И. История математики в школе 7 - 9 кл. Пособие для учителей. / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
9. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. / Я. И. Груденов. – М.: Педагогика,1997. – 222 с.
10. Демидова С. И. Самостоятельная деятельность учащихся при обучении. / С. И. Демидова, Л. О. Денщива. – М.: Просвищение,1995. – 191 с.
11. Дубинчук О.С. Активизация познавательной деятельности учащихся средних профтехучилищ в процессе обучения математики. / О.С. Дубинчук. – К.: Высшая школа, 1987. – 104 с.

12. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: посібник для вчителя / О.С. Дубинчук, Ю.І. Мальований, Н.П. Дичек. - К. : Радянська школа, 1991. - 254 с.
13. Захарійченко Ю. О. Якісна тематична підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з математики: поради зацікавленим. / Ю.О. Захарійченко, О. В. Школьний // Математика в школі. – 2011. – № 3. – С. 3 – 12.
14. Захарійченко Ю. О. Якісна тематична підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з математики: поради зацікавленим. / Ю.О. Захарійченко, О. В. Школьний // Математика в школі. – 2011. – № 4. – С. 3 – 13.
15. Истер А. С. Решебник основних конкурсних задач по математике: учеб. пособие. / А. С. Истер.– К.: А.С.К., 2004. – 569 с.
16. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. / Т. В. Коваль. – Тернопіль: Мандрівець, 2008. – 80с.
17. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников./ В. А. Крутецкий. – М.: Просвищение,1968. – 432 с.
18. Лында А.С. Дидактические основы формирования самоконтроля в процессе самостоятельной учебной работы учащихся. / А.С. Лында. – М.: Высшая школа, 1979. – 159с.
19. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе. / М. И. Махмутов – М.: Просвещение, 1977. – 240с.
20. Мерзляк А.Г., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. сер. шк. / А.Г. Мерзляк, М.С. Якір – Харків: Гімназія, 2009. – 317 с.
21. Моргун О. О. Алгебра: підруч. для 9 кл. серед. шк. / О. О. Моргун, М. С. Фурман. – Х.: Основа, 2006. – 222с.
22. Новоселецька О.А. Розвиток пізнавальної діяльності учнів засобами самостійних робіт: методичні рекомендації [Текст]. / М-во освіти і науки України, РДГУ [уклад: О. А. Новоселецька.]– Рівне: РДГУ , 2007. – 54 с.

23. Олійник Л. С. Алгебраїчний тренажер. Запитання, відповіді, зразки розв'язання вправ. 9 клас. /Л. С. Олійник.– Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 176 с.
24. Підласий І. Як підготувати ефективний урок? / І. Підласий. – К., 2004 – 214 с.
25. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи – К., 2008. – 64 с.
26. Слепкань З. И. Психолого- педагогические основи обучение математике: метод. пособие. / З. И. Слепкань.– К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
27. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підруч. [для студ. мат. спец. пед. навч. закладів.] /З. І. Слепкань.– К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.
28. Хабіб Р. А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики: метод. посібник. / Р. А. Хабіб. – К.: Рад. школа,1985. – 154 с.
29. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – М.:Наука, 1989. – 574 с.
30. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. – М.: Педагогика, 1982. – 208с.
31. Яков Л.К. Рівняння. / Л.К.Яков. – К.: Рад. школа, 1968. – 346 с.
32. Янченко Г.М., Кравчук В.Р. Алгебра 7 клас. / Г.М.Янченко, В.Р.Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 223 с.
33. Янченко Г.М., Кравчук В.Р. Алгебра 9 клас. / Г.М.Янченко, В.Р.Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 223 с.
34. Ярмаченко М. Д. Педагогічний словник. / М. Д. Ярмаченко – К.: Педагогічна думка, 2001. – 516 с.
35. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. / В.А. Ясінський.– Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

ДОДАТОК

Відповідь

№ самостійних робіт	Варіант I					Варіант II				
	1.1)	**1.2)**	**1.3)**	**2.1)**	**2.2)**	**1.1)**	**1.2)**	**1.3)**	**2.1)**	**2.2)**
с-1	а	б	г	а	а	а	в	а	б	б
	1.1)	**1.2)**	**2**	**3**	**4**	**1.1)**	**1.2)**	**2**	**3**	**4**
с-2	а	б	а	б	а	а	б	г	б	б
	1.1)	**1.2)**	**2**	**3.1)**	**3.2)**	**1.1)**	**1.2)**	**2**	**3.1)**	**3.2)**
с-3	б	б	в	б	а	г	в	а	а	б
	1	**2**	**3**	**4**	-	**1**	**2**	**3**	**4**	-
с-4	а	б	в	а	-	а	б	а	в	-
	1	**2**	**3**	**4**	-	**1**	**2**	**3**	**4**	-
с-5	а	в	б	в	-	а	в	б	в	-
	1.1)	**1.2)**	**2**	-	-	**1.1)**	**1.2)**	**2**	-	-
с-6	б	б	в	-	-	б	в	г	-	-