Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Формування ключових компетентностей при вивченні трикутників в курсі математики 5–9 класів

Виконала: студентка 2 курсу магістратури
групи М-М-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кузьміна Марія Миколаївна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька–Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент:

Рівне – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Науковий світогляд сучасної людини неможливий без ознайомлення із своєрідністю математичних методів пізнання, розуміння зв’язку геометрії з дійсністю, формування поняття математичного моделювання, використання у процесі навчання фактів історії науки.

Геометрія для сучасних школярів є обов’язковою дисципліною, яка надає всі можливості для формування наукового стилю мислення та розвитку творчих здібностей учнів, що повною мірою використовуються в навчально-виховному процесі. Вивчення геометрії сприяє розвитку аналітичного стилю мислення в учнів, що має характерні риси обґрунтованості, алгоритмічності, критичності та раціональності. Разом з тим, при вивченні геометрії значне місце має розвиток уяви, уявлення, інтуїції, які в свою чергу є фундаментом творчої діяльності особистості.

Головні завдання сучасної загальноосвітньої школи полягають у тому, щоб дати учням глибокі знання основних наук, удосконалювати їх діалектико–матеріалістичний світогляд, розвивати творчі здібності і трудові навички, прищеплювати бажання і вміння самостійно здобувати і поглиблювати свої знання. Вирішення цих завдань потребує всілякої активності їх навчальної діяльності, осмисленого вивчення матеріалу.

Поняття учнів про зв’язаність математики з навколишнім світом досягається поєднанням теоретичних та прикладних аспектів шкільного курсу математики. Цьому сприяє свідчення того, що в програмі та навчальних посібниках відтворені міжпредметні та внутрішньо–предметні зв'язки. Зазвичай, на уроках математики вчитель готує весь апарат досліджень, який необхідний для вивчення суміжних предметів на найвищому рівні. Великий інтерес представляють ті поняття, що застосовуються у декількох шкільних предметах.

Трикутник – найважливіша фігура планіметрії, і тому в першу чергу школярі вивчають саме властивості даної фігури. З трикутником пов'язано безліч методів, що можна використовувати при розв’язуванні задач з геометрії. Будь–який багатокутник можна розділити на трикутники, де вивчення властивостей багатокутника зводиться до вивчення властивостей декількох трикутників на які його розділено. По суті в шкільному курсі геометрії, все що вивчається – це геометрія трикутника. Тому найважливішими знаннями є знання про методику викладання даної теми в різних навчальних підручниках, що сприяє правильній побудові курсу та уникнення методичних помилок.

В сучасному шкільному житті учнів, важливе місце має формування ключових компетентностей на уроках математики. Адже школярі не зовсім розуміють доцільність використання на практиці здобутих знань. Вимірювання периметру ділянки, обчислення площі деякої поверхні, знаходження відстані між предметами все ж таки не можливе без використання математичних знань. Щоб учні сприйняли і засвоїли інформацію, від вчителя напряму залежить те, якими навчальними методами й прийомами він буде користуватися. Сучасний педагог має усіма можливостями уникати домінуючого вербального типу навчання, орієнтуючись на інтерактивні та активні методи і технології навчання, що базуються на компетентнісному підході.

Саме важливість та актуальність проблеми обумовило вибір теми дослідження «***Формування ключових компетентностей при вивченні трикутників в курсі математики 5–9 класів***».

Поняття «компетенція» та «компетентність» були предметами наукових досліджень відомих українських та російських учених-педагогів В. І. Байденка, Н. М. Бібік, І. О. Зимньої, Н. В. Кузьміної, А. К. Маркової, О. В. Овчарук, О. І. Пометун, Г. К. Селевко, А. В. Хуторського; різні аспекти математичної компетентності досліджували фахівців різного профілю: О. Ю. Бєляніна, Л. К. Іляшенко, Я. Г. Стельмах, а учнів загальноосвітніх шкіл С. А. Раков, І. М. Зіненко та інші науковці.

Об'єкт дослідження – процес навчання геометрії в загальноосвітній школі.

Предметом дослідження є компетентнісний підхід при вивченні трикутників в курсі математики 5–9 класів.

Мета дослідження – дослідження теоретичних та методичних основ вивчення трикутників в 5-9 класах та формування ключових компетентностей при розв'язуванні задач.

Відповідно до мети дослідження нами були поставлені такі **завдання**:

1) проаналізувати науково–методичну, психолого–педагогічну літературу з проблеми дослідження;
2) визначити місце задач з теми «Трикутники» у навчальному процесі;
3) узагальнити та систематизувати теоретико-методичні матеріали;
4) розкриття зміст понять «компетентність» та «ключова компетентність»;
5) проаналізувати компетентності при вивченні геометрії;
6) розробити систему задач з теми «Трикутники» та впровадити методику застосування пакету програм GRAN–2D до їх розв'язування в навчальний процес;
7) підібрати задачі на формування ключових компетентностей при вивченні трикутників та подати методику їх розв'язування.

Для реалізації вище поставлених задач були використані такі **методи дослідження**:

– пошуково-бібліографічний;
– загальнонауковий;
– метод термінологічного аналізу;
– історіографічний.

Джерельна база дослідження охоплює *п'ять* основних груп:

– нормативно-правові джерела;
– навчальні програми і плани, методична література для вчителів та шкільні підручники;

– періодичні видання, де розкривається досліджувана проблема;
– інтерпретаційні джерела (брошури, монографії, статті);
– діючі підручники й посібники для середньої школи та довідкова література.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) запропоновано теоретичні та методичні основи вивчення трикутників в шкільному курсі математики;
2) досліджено компетентнісний підхід при вивченні геометрії;
3) запропоновані задачі та методика їх розв’язання на формування ключових компетентностей.

Практичне значення роботи полягає в тому, що представлений зміст та методика можуть бути використані вчителями на уроках математики та факультативних заняттях для активізації пізнавальної діяльності учнів та підвищення якості засвоєння нового матеріалу.

Апробація дослідження здійснювалась на лекційних та практичних заняттях з «Елементарної математики». Результати дослідження були представлені на XIII Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти і молодих науковців «Наука, освіта, суспільство очима молодих» у статті «Компетентнісний підхід при вивченні трикутників у 9 класі».

Структура і обсяг. Магістерська робота складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (78 джерел) та додатків і розкривається на 99 сторінках.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ТА ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5–9 КЛАСІВ

1.1 Аналіз програми з математики 5–9 класів з теми дослідження

Вивчення математики у п’ятому та шостому класах відбувається з домінуванням індуктивних міркувань здебільшого на наочно–індуктивному рівні, де залучені приклади із довкілля та практичного досвіду учнів. Здійснюється збільшення теоретичного матеріалу, який допомагає обґрунтуванню тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до глибокого використання дедуктивних методів з подальшим вивченням математики.

Змістом навчального матеріалу для 5–6 класів передбачено уявлення про різні геометричні фігури на площині та в просторі, зокрема уявлення про трикутник, його периметр та класифікацію [60].

Вивчення геометричних фігур передбачає використання прикладів із навколишнього середовища, наочних ілюстрацій, життєвого досвіду учнів, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виокремлювати форму і розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (трикутників, кутів, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур обґрунтовуються надослідно–індуктивному рівні, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів умінь доказово міркувати [59].

В курсі геометрії 7 класу вивчається тема ***«Трикутники. Ознаки рівності трикутників»***. На дану тему відводиться 22 години.

Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Трикутник та його елементи. Висота, бісектриса і медіана трикутника.
- Рівність геометричних фігур. Ознаки рівності трикутників.

- Види трикутників.
- Рівнобедрений трикутник, його властивості та ознаки.
- Нерівність трикутника.
- Сума кутів трикутника.
- Зовнішній кут трикутника та його властивості.
- Властивості прямокутних трикутників [44].

У 7 класі учні ознайомлюються з основами геометричної науки – теоремами, основними методами доведення теорем, означеннями, основними задачами на побудову. Поглиблюються та систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута [45].

В курсі геометрії 8 класу вивчаються такі теми: ***«Подібність трикутників»***, на яку відводиться 10 годин та ***«Розв'язування прямокутних трикутників»*** – 14 годин.

Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Узагальнена теорема Фалеса.
- Подібні трикутники.
- Ознаки подібності трикутників.
- Властивість медіани та бісектриси трикутника.
- Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника.
- Теорема Піфагора.
- Перпендикуляр і похила, їх властивості.
- Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.
- Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів [44].

Однією з основних задач, що вивчається в курсі геометрії, є розв'язування трикутників. У 8 класі розглядається задача розв'язування прямокутного трикутника. Для цього вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Дана тема продовжується в 9 класі — розв'язуються довільні трикутники. Це потребує введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теорем косинусів і синусів [45].

В курсі геометрії 9 класу вивчається тема ***«Розв'язування трикутників»***. На дану тему відводиться 10 годин. Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Теореми косинусів і синусів.
- Формули для знаходження площі трикутника[66].

1.2 Методика вивчення трикутників в основній школі

В шкільному курсі планіметрії особливим чином слід відзначити роль трикутника. Трикутник – це фігура просторово локальна, замкнута і конструктивно проста. Загалом, це найекономніший вид многокутників. Для його задання досить вказати його вершини – або три попарно пересічні прямі.

Тому він зручний у використанні для вивчення властивостей реального простору [42].

Завдання вчителя полягає в представленні усієї системи знань про трикутники для того, щоб домогтися повного і осмисленого засвоєння їх. Програма з математики передбачає вивчення трикутників у всіх класах основної школи. Курс 7 класу – це, по суті, геометрія трикутника.

У 7 класі дається означення трикутника. У попередніх класах трикутник розглядається як частина площини. Це було зручно для практичних занять з вирізанням фігур з паперу. Але в системному курсі геометрії протягом тривалого часу (до 9 класу) не потрібна внутрішність трикутника, вона знадобиться в 9 класі при визначенні поняття площ [66].

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. В означенні слід звернути увагу учнів на те, що три точки, які є вершинами трикутника, не лежать на одній прямій, продемонструвавши їм 2 рисунки і каркасні моделі трикутників.

При введенні поняття рівності трикутників можна дати коротше формулювання: трикутники рівні, якщо у них відповідні елементи рівні. Взагалі таке визначення відрізняється від традиційного, де рівними називаються трикутники, що суміщаються при накладанні. Але поняття руху визначається пізніше, оскільки воно складне. Відповідність елементів встановлюється автоматично самим записом. Матеріал про ознаки займає центральне місце в обох навчальних посібниках. По–перше, він знайомить учнів з дедуктивними обґрунтуваннями, по–друге, використання ознак стає основним методом доведення теорем і розв’язання задач в подальшому курсі [4].

У діючих навчальних посібниках ознаки строго доводяться спираючись на аксіоми і теореми рівності трикутників. При доведенні необхідно використовувати серію малюнків, які відображають динаміку доведення, окремі його етапи [24].

Починаючи вивчення ознак рівності трикутників, вчитель відзначає, що не обов'язково знати про наявність у них шести пар відповідних рівних елементів, достатньо три пари. Які це пари, ми дізнаємося після розгляду трьох теорем, які називають ознаками рівності трикутників.

Слід врахувати що ці теореми, які вивчаються на самому початку систематичного курсу для семикласників представляють значну трудність. Тому відтворення повних доведень можна вимагати тільки від сильних учнів, останні повинні усвідомлювати хід доведення і зміст використовуваних в них міркувань. Засвоєння теорем повинне відбуватися в процесі розв’язання задач [66].

В курсі геометрії 8 класу ширше вивчаються подібні трикутники, їх властивості й ознаки; що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити; які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику; як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв’язування задач. У наступних розділах ми дізнаємося про: визначну теорему геометрії — теорему Піфагора та наслідки з неї; що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами; про алгоритми знаходження за однією зі сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника — гострих кутів; як застосовувати вивчені алгоритми до розв’язування геометричних задач і задач практичного змісту [42].

В курсі геометрії 9 класу ми дізнаємося про теорему косинусів і теорему синусів; про існування різних формул для знаходження площ трикутника і паралелограма; навчаємося розв’язувати трикутники і прикладні задачі; знаходити площі трикутника, паралелограма, ромба, використовуючи різні формули [4].

Вивчення ознак рівності трикутників. Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. Означення рівності геометричних фігур у шкільному курсі вводять у зв’язку з вивченням у 8 класі рухів. Означення рівних трикутників і ознаки їх рівності вивчають у 7 класі на початку курсу, оскільки вони традиційно є основним аргументом під час доведення теорем, розв’язування задач і вивчення інших тем.

Основною метою вивчення теми «Рівність трикутників» є ознайомлення учнів з ознаками рівності трикутників і навчити застосовувати їх до розв’язання задач. Вміння застосовувати ознаки рівності трикутників потрібно звести до рівня, що забезпечує учням можливість самостійно розв’язувати задачі, які потребують застосування цього апарату. Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії [10].

Доведення ознак рівності трикутників потребує обґрунтування кожного із тверджень, які містять доведення, посиланням на відповідні аксіоми, означення, вміння застосовувати метод від супротивного. Ці доведення непрості для сприймання всіма учнями, тому було б неправомірним на рівні обов’язкових результатів навчання вимагати від усіх школярів уміння відтворювати доведення. Тут вперше виникає можливість пояснити учням відмінність між твердженням, яке є значенням певних фігур, і твердженнями, які є ознаками рівності цих фігур (означення і ознаки рівності трикутників, означення рівнобедреного трикутника і ознака такого трикутника) [14].

Використання відомих і формування нових понять теми. У зв'язку з вивченням ознак рівності трикутників і пов'язаного з ними навчального матеріалу використовується багато вже відомих понять та їх означень: відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, трикутник, рівні трикутники, перпендикуляр, проведений до прямої, та ін. [66].

Отже, слід подбати про своєчасну актуалізацію потрібних знань, повторення необхідних означень понять. Особливо уважно слід повторити означення рівних трикутників і відповідну символіку. Специфіка підручників потребує від учнів уважного ставлення до позначення буквами відповідних сторін і кутів у двох рівних трикутниках.

У цій темі вводять шість нових понять: рівнобедрений трикутник, рівносторонній трикутник, теорема, обернена до даної, висота трикутника, опущена з даної вершини, бісектриса трикутника, проведена з даної вершини, медіана трикутника, проведена з даної вершини [42].

Всі значення доцільніше запровадити абстрактно-дедуктивним методом і проілюструвати конкретними прикладами. Важливо спеціально підкреслити істотні властивості цих понять і протиставити їм неістотні. Наприклад, означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, містить дві істотні властивості: 1) це – відрізок бісектриси кута трикутника; 2) він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні. Неістотними у цьому означенні є вид трикутника, розміщення вершин на площині.

В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна істотна ознака – рівність двох сторін. Неістотними є розміщення цього трикутника на площині. Зокрема, основа рівнобедреного трикутника необов'язково має бути горизонтальною, як це здебільшого зображено в підручниках [10].

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні мають виконати практичні вправи на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників.

Під час введення поняття оберненої теореми доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5 – 6 класів, і з'ясувати, чи правильні вони [4].

Доведення теорем. Усі теореми, які вивчають у цій темі, належить до основних теорем курсу геометрії, оскільки їх широко використовують під час доведення теорем і розв'язування задач. Найскладнішими з них для сприймання учнів є доведення ознак рівності трикутників. Перш ніж приступати до вивчення першої ознаки, потрібно звернути увагу учнів на відмінності між термінами «означення» рівності трикутників. Означення відповідає на запитання «Що це таке?», тобто розкриває зміст поняття. Ознака – це теорема, в якій наведено умови, за яких об'єкт належатиме до поняття, про яке йдеться в означенні. Доведення двох перших ознак рівності трикутників доцільно організувати на трьох рівнях строгості, або скорочено – «в три проходи» [12].

Перший прохід вчитель виконує сам. Його мета – ознайомити учнів зі структурою доведення в цілому. За рисунком вчитель пояснює основну ідею доведення, називає основні твердження, які воно містить, без потрібних обґрунтувань.

Під час виконання другого проходу доведення відтворюють з усіма потрібними обґрунтуваннями. В цьому разі доцільно заздалегідь заготувати таблицю з двох стовпчиків. У лівому стовпчику слід записати всі твердження, які містить доведення, в правому – обґрунтування кожного з них. Правий стовпчик під час другого проходу спочатку закривають і відкривають після відповідей учнів на запитання «Чому?».

Під час третього проходу вводять домовленість пропускати обґрунтування деяких, інтуїтивно і наочно найзрозуміліших тверджень для скорочення доведення. З метою закріплення доведення вчитель ще раз повторює його в скороченому варіанті. Фактично – це доведення, наведене в підручниках [12].

1.3 Трикутник і його елементи. Види трикутників

З усіх многокутників ***трикутники*** мають найменшу кількість сторін.

Позначимо три точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (рис. 1.3.1) [27].

Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки [38]**.**

Точки називають ***вершинами*** трикутника, а відрізки – його ***сторонами***. На рис. 1.3.1 зображено трикутник *ABC*. Вершинами трикутника є точки *A*, *B* і *C*, а сторонами — відрізки *AB*, *BC* і *CA*. Слово «трикутник» в математиці можна замінити на символ Δ, тоді запис Δ *ABC* читається так: «трикутник *ABC*». Назва трикутника складається з великих літер, якими позначено його вершини, і записувати та читати їх можна в будь-якому порядку: Δ *ACB*; Δ *BCA*; Δ *CAB* тощо.

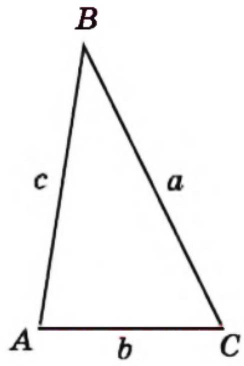


Рис. 1.3.1

Кутами трикутника *ABC* називають кути *BAC*, *ABC* і *BCA*. Якщо з вершини трикутника не проведено жодних додаткових ліній, окрім його сторін, то кути даного трикутника можна називати лише їх вершиною: однією буквою ∠ *A*, ∠ *B* і ∠ *C*. Також сторони трикутника можна позначати малими буквами латинського алфавіту *a*, *b* і *c* відповідно до позначення протилежних їм вершин [38].


Рис. 1.3.2

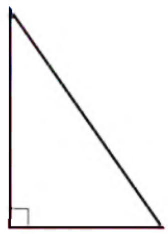


Рис. 1.3.3

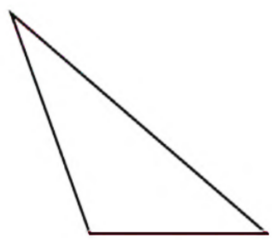


Рис. 1.3.4

Кожний трикутник має три вершини, три кути і три сторони, які ще називають ***елементами трикутника***.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою *P*, наприклад, периметр трикутника *ABC* можна позначити так: $P_{\Delta ABC}$. Маємо:

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA \ [25].$$

З а д а ч а. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша за другу і вдвічі менша за третю. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см [55].

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай, довжина найменшої сторони трикутника дорівнює *x* см, тоді довжина другої сторони — (*x* + 7) см, а третьої сторони — 2*x* см. Оскільки $P_{\Delta} = 47$ см, маємо рівняння:

$$x + (x + 7) + 2x = 47.$$

Розв’яжемо це рівняння. Отримали, що *x* = 10 (см).

Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої — 17 см, третьої — 20 см.

В і д п о в і д ь. 10 см, 17 см, 20 см.

Залежно від величини кутів розрізняють такі види трикутників: ***гострокутні, прямокутні, тупокутні.*** Гострокутні трикутники — це ті, у яких усі кути гострі (рис. 1.3.2), прямокутні — це ті, що мають прямий кут (рис. 1.3.3), тупокутні — це ті, що мають тупий кут (рис. 1.3.4).

Трикутники можна класифікувати не тільки за величиною кутів, а й за кількістю рівних сторін.

Якщо дві сторони трикутника рівні, то його називають рівнобедреним трикутником (рис. 1.3.5) [25].

Якщо три сторони трикутника рівні, то його називають рівностороннім трикутником (рис. 1.3.6) [25].

Якщо три сторони трикутника мають різні довжини, то його називають різностороннім трикутником (рис. 1.3.7) [25].

Як правило, на рисунках, рівні сторони трикутника позначають однаковою кількістю штрихів [25].

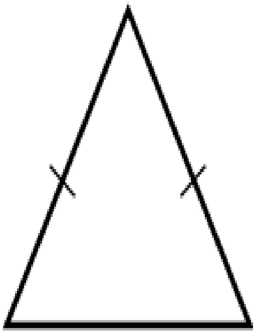


Рис. 1.3.5

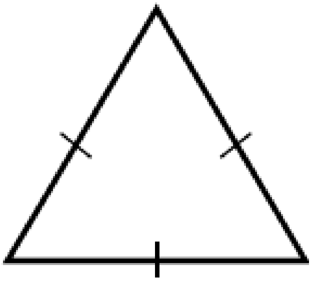


Рис. 1.3.6

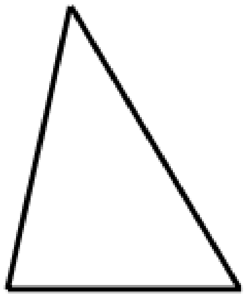


Рис. 1.3.7

1.4 Медіана, бісектриса, висота та серединні перпендикуляри трикутника

У кожному трикутнику можна провести декілька відрізків, які мають спеціальні назви.

Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони [25]**.**

На рисунку 1.4.1 відрізок AM_1— медіана трикутника *ABC*. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На рисунку 1.4.2 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 — медіани трикутника *ABC*. Медіани трикутника мають цікаву властивість.

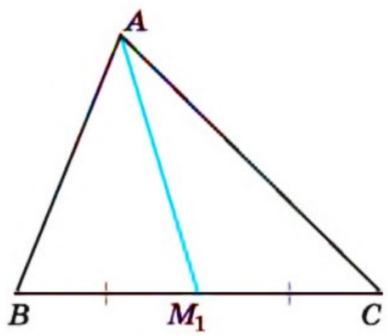


Рис. 1.4.1

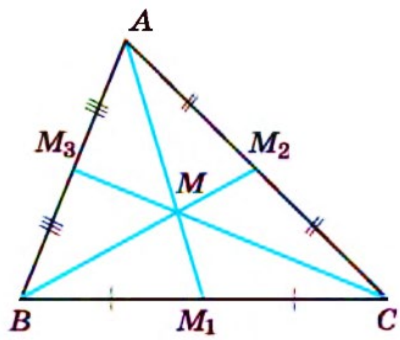


Рис. 1.4.2

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають центроїдом трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2:1, починаючи від вершини [25].

На рисунку 1.4.2 точка *M* — центроїд трикутника *ABC*.

Цю властивість буде доведено у старших класах [25].

Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрених трикутника, оскільки медіана дорівнює половині гіпотенузи [38].

Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони [38].

На рисунку 1.4.3 відрізок AL_1 — бісектриса трикутника *ABC*. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси. На рисунку 1.4.4 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 — бісектриси трикутника *ABC*.

*В будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці (її називають **інцентпром**)*. На рисунку 1.4.4 точка *I* — інцентр трикутника *ABC*.

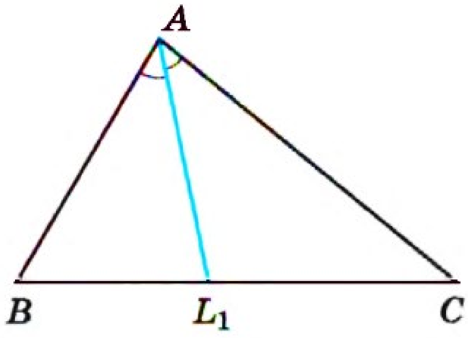


Рис. 1.4.3

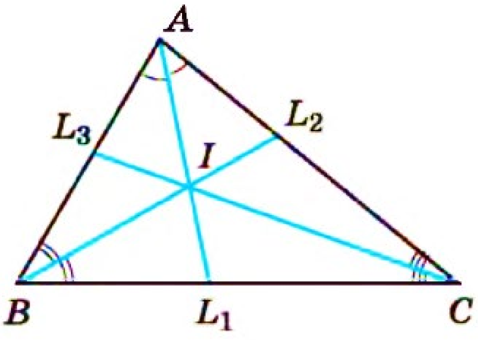


Рис. 1.4.4

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону [38].

На рисунку 1.4.5 відрізок AH_1 — висота трикутника *ABC*. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На рисунку 1.4.6 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного трикутника *ABC*, на рисунку 1.4.7 ці відрізки — висоти прямокутного трикутника *ABC* з прямим кутом *C*, а на рисунку 1.4.8 ці відрізки — висоти тупокутного трикутника *ABC* з тупим кутом *A* [38].

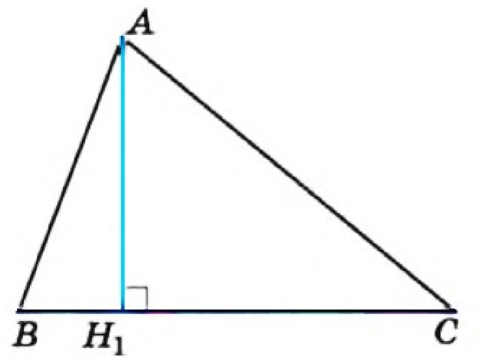


Рис. 1.4.5

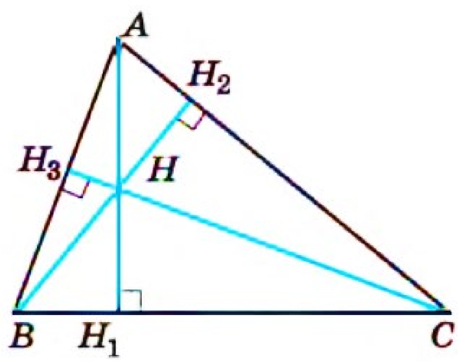


Рис. 1.4.6

В будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці (її називають ***ортоцентром*** *трикутника).*

На рисунках 1.4.6 і 1.4.8 точка *H* — ортоцентр трикутника *ABC*, на рисунку 1.4.7 ортоцентр трикутника збігається з точкою *C* — вершиною прямого кута трикутника *ABC* [35].

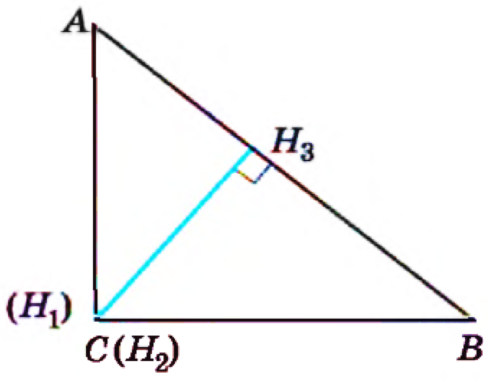


Рис. 1.4.7

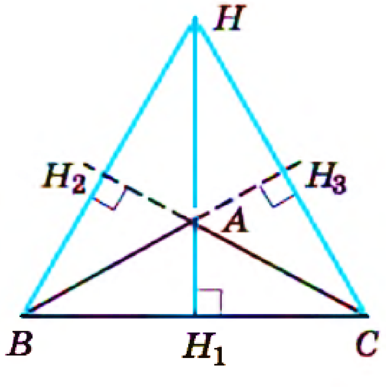


Рис. 1.4.8

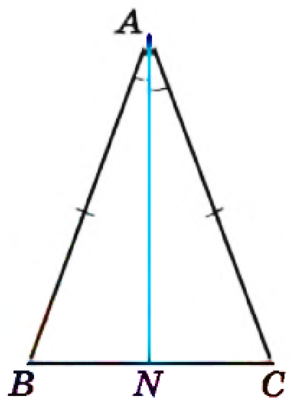


Рис. 1.4.9

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а 1 *(властивість бісектриси рівнобедреного трикутника)*. ***У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою*** [38].

Д о в е д е н н я. Нехай трикутник *ABC* — рівнобедрений з основою *BC*, *AN* — його бісектриса (рис. 1.4.9). Доведемо, що *AN* є висотою та медіаною.

1) Оскільки *AB* = *AC*, і тому ∠ *BAN* = ∠ *CAN*, а відрізок *AN* є спільною стороною трикутників *BAN* і *CAN*, то Δ *BAN* = Δ *CAN* (за першою ознакою).

2) Тому *BN* = *NC*. Отже, *AN* — медіана трикутника.

3) Також маємо ∠ *BNA* = ∠*CNA*. Оскільки ці кути рівні та суміжні, то ∠*BNA* = ∠ *CNA* = *90°*. Отже, *AN* є також висотою. Теорему доведено [19].

Т е о р е м а про бісектрису. Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам, тобто $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ [38].

Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справедливими є такі наслідки з теореми.

Н а с л і д о к 1. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою [28].

Н а с л і д о к 2. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою [28].

Т е о р е м а 2. Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін [28].

Д о в е д е н н я. Очевидно, що вершина кута має властивість, яку треба довести.

Кожна точка X бісектриси розгорнутого кута рівновіддалена від його сторін. Справді, відстані від точки X до сторін BA і BC розгорнутого кута ABC дорівнюють відстані від точки X до прямої AB (рис. 1.4.10).

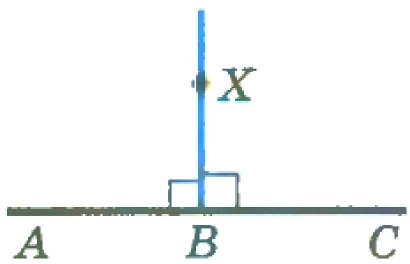
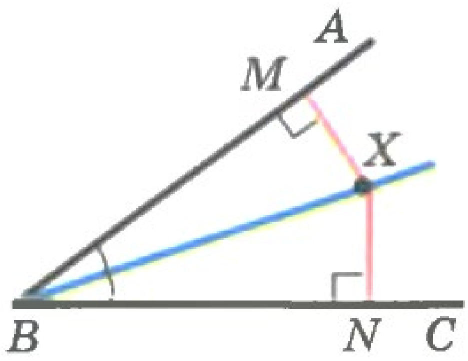


Рис. 1.4.10

Розглянемо кут ABC, відмінний від розгорнутого, і довільну точку X, яка не збігається з вершиною цього кута й належить його бісектрисі. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC (рис. 1.4.11). Треба довести, що $XM = XN$.



У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX – спільна, $\angle MBX = \angle NBX$ оскільки BX – бісектриса кута ABC . Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $XM = XN$ [28].

Рис. 1.4.11

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка [28]**.**

Т е о р е м а 2. Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка [28].

Д о в е д е н н я. Нехай маємо довільну точку *X* серединного перпендикуляра *a* відрізка *AB*. Треба довести, що *XA* = *XB*.

Нехай точка *M* – середина відрізка *AB*. Якщо точка *X* збігається з точкою *M* (а це можливо, оскільки *X* – довільна точка прямої *a*), то *XA* = *XB*.

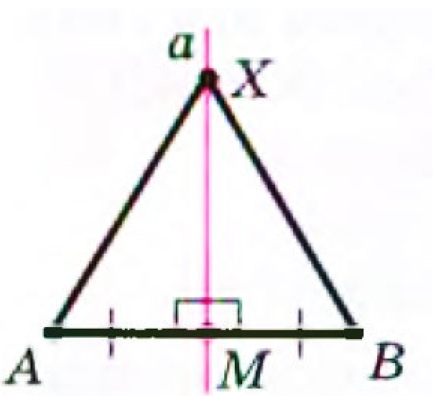


Рис. 1.4.12

Якщо точки *X* і *M* не збігаються, то розглянемо трикутники *AXM* і *BXM* (рис. 1.4.12). У цих трикутниках *AM* = *MB*, оскільки точка *M* – середина відрізка *AB*, то сторона *XM* – спільна і $\angle AMX = \angle BXM = 90^\circ$. Отже, трикутники *AXM* і *BXM* рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки *XA* і *XB* рівні як відповідні сторони рівних трикутників [35].

1.5 Сума кутів трикутника

Трикутник – ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний. Проте всім їм притаманна властивість, яку розкриває така теорема.

Т е о р е м а 1. Сума кутів трикутника дорівнює 180° [25]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний трикутник. Треба довести, що

Через вершину *B* проведемо пряму *a*, що паралельна прямій *AC* (рис. 1.5.1). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих *a* і *AC* та січній *AB*. Аналогічно доведемо, що $\angle C = \angle 3$. Але кути 1, 2, 3 складають розгорнутий кут з вершиною *B*.

Отже, [25].

Н а с л і д о к. Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника [25]**.**

На рисунку 1.5.2 кути 1, 2, 3 є зовнішніми кутами трикутника *ABC*.

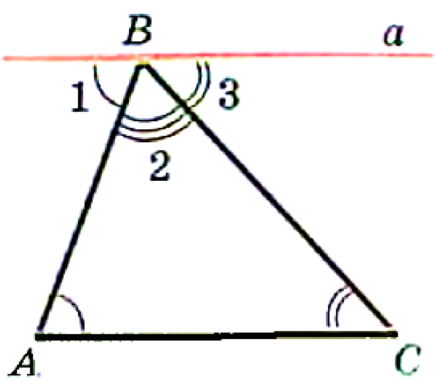


Рис. 1.5.1

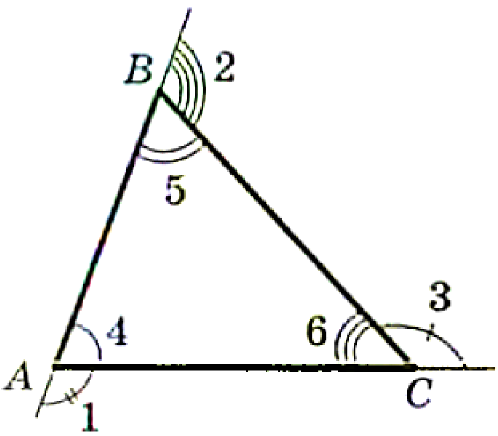


Рис. 1.5.2

Т е о р е м а 2. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним [38]**.**

Д о в е д е н н я. На рисунку 1.5.2 кути 1, 2 і 3 – зовнішні кути трикутника *ABC*. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо одну із цих трьох рівностей (решту рівностей доводяться аналогічно).

За властивість суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$ [38].

Н а с л і д о к. Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

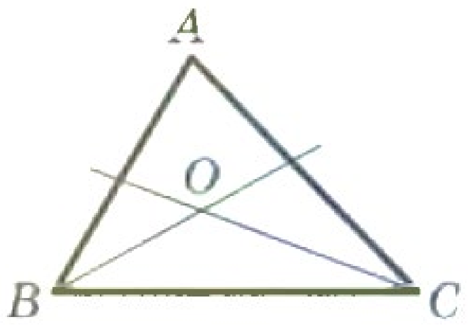


Рис. 1.5.3

З а д а ч а 1. У трикутнику *ABC* відомо, що $\angle A = \alpha$. Бісектриси кутів *B* і *C* перетинаються в точці *O*. Доведіть, що $\angle BOC = 90^\circ + \alpha/2$.

Р о з в ’ я з а н н я. Для Δ *ABC* маємо: . Тоді . Оскільки промені *BO* і *CO* – бісектриси відповідно кутів *ABC* і *ACB* (рис. 1.5.3), то .

Для Δ *BOC* маємо: . Тоді: .

З а д а ч а 2. Відрізок *BM* – медіана Δ *ABC*. Відомо, що $\angle ABM = 40^\circ$. і $AB = 2BM$. Знайдіть кут *ABC* [19].

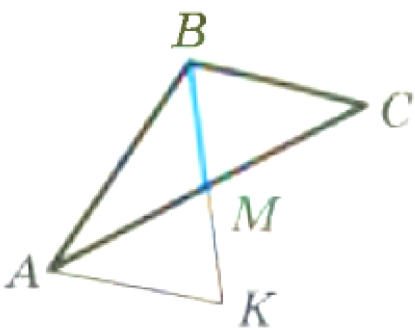


Рис. 1.5.4

Р о з в ’ я з а н н я. На продовженні відрізка *BM* за точку *M* позначимо точку *K* так, що *BM*=*MK*. З’єднаємо точки *A* і *K* (рис. 1.5.4).

Оскільки *BK*=*2BM*, то *AB*=*BK*. Отже, Δ *ABK* рівнобедрений і ∠*BAK*=∠*BKA*. Маємо: $\angle BAK + \angle BKA = 180^\circ - \angle ABK = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Тоді $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$.

Легко показати, що Δ *AMK* і Δ *CMB* рівні за першою ознакою рівності трикутників. Отже, ∠*AKM*=∠*CBM* як відповідні кути рівних трикутників. Отримуємо: $\angle CBM = 70^\circ$. Тоді $\angle ABC = 110^\circ$.

В і д п о в і д ь: $110°$.

1.6 Ознаки рівності трикутників

Перша та друга ознаки рівності трикутників. Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їх елементи. Це важливо для практики, наприклад для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну [25].

Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

Т е о р е м а 1 *(перша ознака рівності трикутників)*. ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні*** [25]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ ABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$

і $\angle A = \angle A_1$ (рис. 1.6.1).

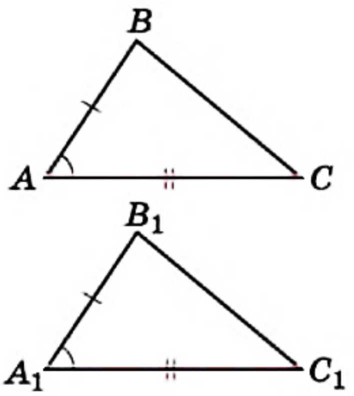


Рис. 1.6.1

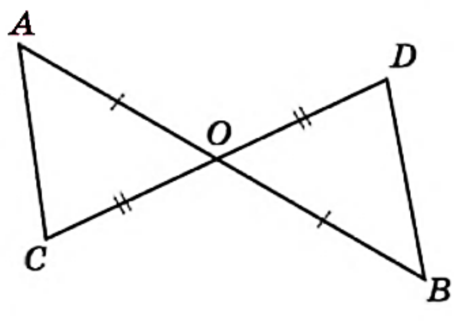


Рис. 1.6.2

Оскільки ∠ A = ∠ A_1, то Δ *ABC* можна накласти на Δ $A_1B_1C_1$ так, що вершина *A* суміститься з вершиною A_1 сторона *AB* співпаде з A_1B_1, а сторона

$$AC = A_1C_1$$

AC — із A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і то сумістяться точки *B* і B_1, *C* і C_1. У результаті три вершини Δ *ABC* сумістяться з відповідними вершинами Δ $A_1B_1C_1$.

Отже, після накладання трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому Δ*ABC* = Δ$A_1B_1C_1$. Теорему доведено [38].

З а д а ч а 1. Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O* так, що точка *O* є серединою кожного з них. Довести, що Δ *AOC* = Δ*BOD* [17].

Д о в е д е н н я. Розглянемо рис. 1.6.2. За умовою маємо, що *AO* = *OB* і *CO* = *OD*. Окрім того, ∠ AOC = ∠ BOD (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників Δ *AOC* = Δ *BOD*.

Т е о р е м а 2 *(друга ознака рівності трикутників)*. ***Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні*** [38].

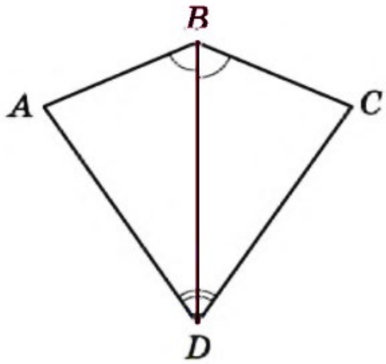
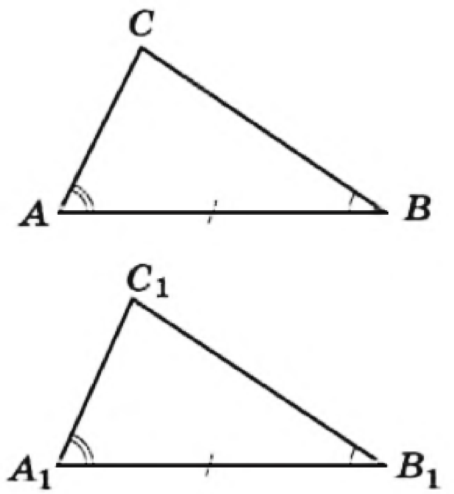


Рис. 1.6.3

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ *ABC* і Δ $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, ∠ A = ∠ A_1 і ∠ B = ∠ B_1 (рис. 1.6.3). Оскільки $AB = A_1B_1$, то Δ *ABC* можна накласти на Δ $A_1B_1C_1$ так, що вершина *A* збігатиметься з вершиною A_1, вершина *B* — з вершиною B_1, а вершини *C* і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але ∠ A = ∠ A_1 і ∠ B = ∠ B_1, тому при накладанні промінь *AC* співпаде з A_1C_1, а промінь *BC* співпаде із B_1C_1. Тоді точка *C* — спільна точка променів *AC* і *BC* — збігатиметься з точкою C_1 — спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини Δ *ABC* сумістяться з відповідними вершинами Δ $A_1B_1C_1$: трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися.

Тому Δ *ABC* = Δ $A_1B_1C_1$. Теорему доведено [38].

З а д а ч а 2. Довести рівність кутів *A* і *C* (рис. 1.6.4), якщо ∠ ADB = ∠ CBD і ∠ ABD = ∠ CBD [20].

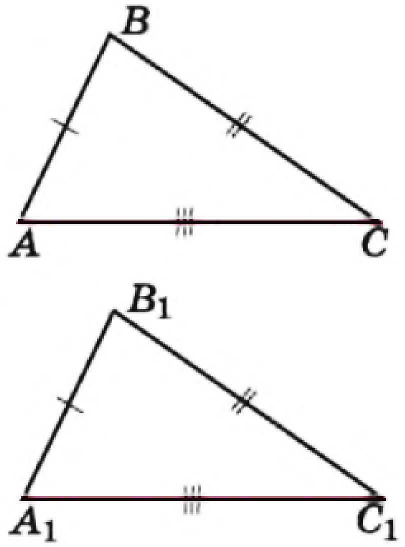


Д о в е д е н н я. Сторона *BD* спільна для Δ *ABD* і Δ *CBD*. За умовою ∠ ADB = ∠ CBD і ∠ ABD = ∠CBD. Тому за другою ознакою рівності трикутників маємо, що Δ *ABD* = Δ *CBD*. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників.

Рис. 1.6.4

Отже, ∠A = ∠C .

Третя ознака рівності трикутників. Ми вже знаємо дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників — за трьома сторонами.



Т е о р е м а 3** (третя ознака рівності трикутників). **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні [38].

Рис. 1.6.5

Д о в е д е н н я. Нехай *ABC* і $A_1B_1C_1$ — два

$$AC = A_1C_1$$

трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, (рис. 1.6.5). Доведемо, що Δ *ABC* = Δ $A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника *ABC* так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною *A*, вершина C_1 — з вершиною *C*, а вершини B_1 і *B* були по різні боки від прямої *AC*. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить всередині кута *ABC* (рис. 1.6.6), промінь BB_1 збігається з однією із сторін цього кута (рис. 1.6.7), промінь BB_1 проходить поза кутом *ABC* (рис. 1.6.8).

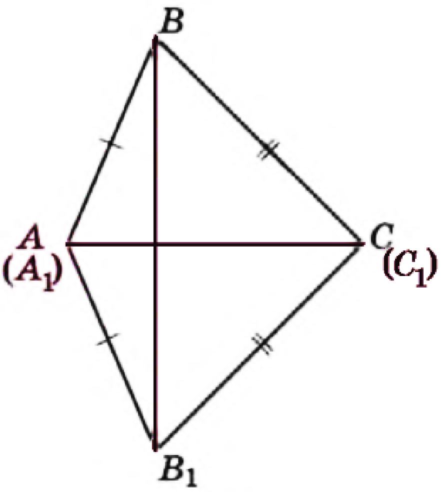


Рис. 1.6.6

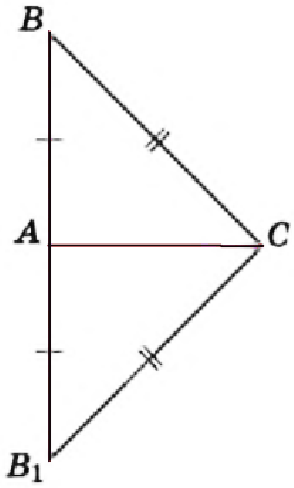


Рис. 1.6.7

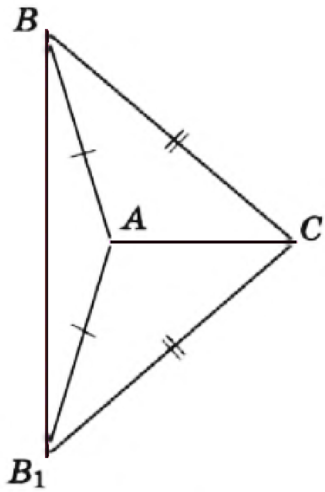


Рис. 1.6.8

Розглянемо перший випадок. Оскільки за умовою *AB* = A_1B_1 1 і *BC* = = B_1C_1, то трикутники ABB_1 і CBB_1 — рівнобедрені з основою BB_1. Тоді і . Тому . Отже, $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, . Тому Δ *ABC* = Δ $A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників). Теорему доведено [25].

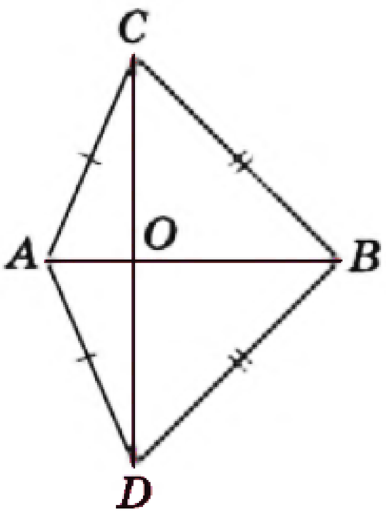


Рис. 1.6.9

З а д а ч а 3. Дано: *AC* =*AD*, *BC* = *BD* (рис. 1.6.9) [29].

Довести: *CO* = *OD*.

Д о в е д е н н я.

1) Розглянемо Δ *ABC* і Δ *ABD*. *AC* = *AD*, *BC* = = *BD* (за умовою), *AB* — спільна сторона. Тоді Δ *ABC* = Δ *ABD* (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому *AB* — бісектриса кута *CAD*.

3) Тоді *AO* — бісектриса рівнобедреного трикутника *ACD*, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника *AO* є також і медіаною. Оскільки *AO* — медіана трикутника *ACD*, то *CO* = *OD*, що й треба було довести [13].

Ознаки прямокутного трикутника. На рисунку 1.6.10 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90°$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають ***гіпотенузою***, а сторони, прилеглі до прямого кута, – ***катетами*** (рис. 1.6.10).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їхні рівні елементи. У будь-яких двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди – це прямі кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

Т е о р е м а 4. (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом). Якщо гіпотенуза та катет прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого то такі трикутники рівні [25].

Д о в е д е н н я. Розглянемо ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких (рис. 1.6.11). Треба довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина C – з вершиною C_1, а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 1.6.12).

Маємо: . Отже, кут BC_1B_1 розгорнутий, і тому точки B, C_1, B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 1.6.12). Тоді A_1C_1 – медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$.

Отже трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників [38].

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні*** [38].

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. ***Якщо катет і прилеглий до нього кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні*** [38].

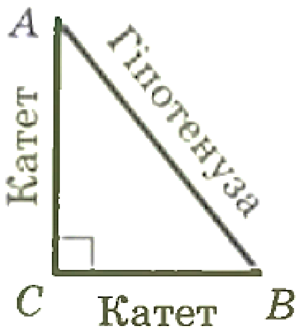


Рис. 1.6.10

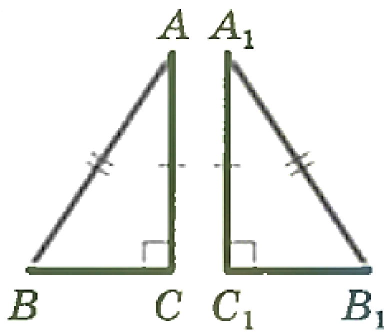


Рис. 1.6.11

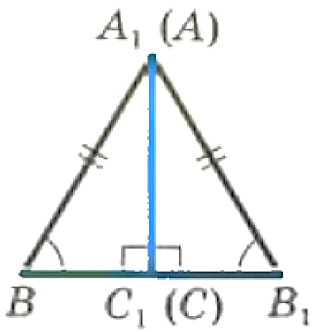
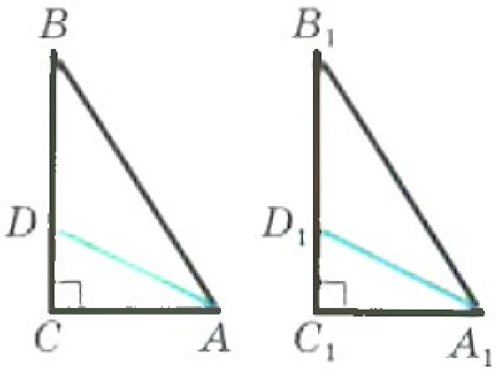


Рис. 1.6.12

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, перелік ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. ***Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні*** [38].



Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. ***Якщо гіпотенуза та гострий кут***

одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні [38]**.**

З а д а ч а 4. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута [33].

Р о з в ’ я з а н н я. У $\Delta\ ABC$ і $\Delta\ A_1B_1C_1$ (рис. 1.6.13) , відрізки AD і A_1D_1 – бісектриси, $AD = A_1D_1$.

Рис. 1.6.13

Маємо: . Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки , то прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом.

1.7 Узагальнена теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

У теоремі Фалеса стверджується, що паралельні прямі відтинають на сторонах кута відповідно рівні відрізки. Загальнішим є випадок, коли паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки (рис. 1.7.1).

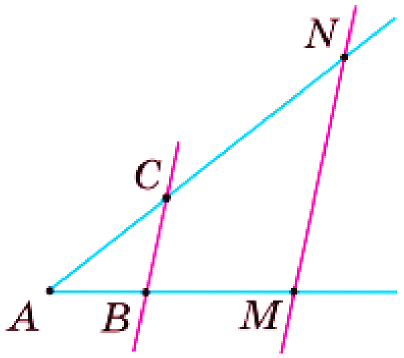
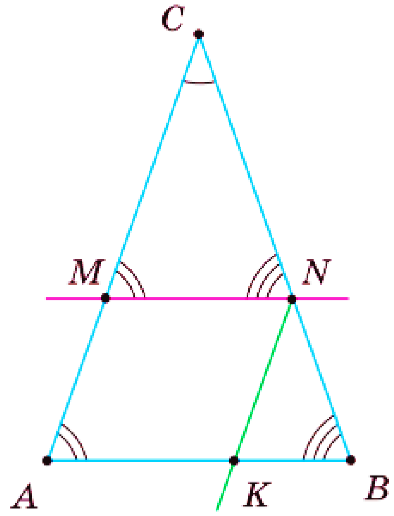


Рис. 1.7.1

Т е о р е м а 1 *(узагальнена теорема Фалеса)****. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки*** [26]**.**

Узагальнену теорему Фалеса інакше називають ***теоремою про пропорційні відрізки***.

Н а с л і д о к. Пряма, що перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник [26]**.**



Справді, у трикутниках *ABC* і *MNC* (рис. 1.7.2) є спільний кут *C*. Його перетинають паралельні прямі *AB* і *MN*. Із січною *AC* вони утворюють рівні відповідні кути *CAB* і *CMN*. Треті кути трикутників також рівні. Доведемо пропорційність сторін трикутників. За узагальненою теоремою Фалеса,

Рис. 1.7.2

$\frac{AM}{MC}=\frac{BN}{NC}$, тому $\frac{AM+MC}{MC}=\frac{BN+NC}{NC}$, звідси $\frac{AC}{MC}=\frac{BC}{NC}$. Провівши пряму $NK \parallel AC$, аналогічно одержимо: $\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{KA}$. Але $KA=MN$, тому $\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{MN}$.

Отже, у трикутниках *ABC* і MNC відповідні кути – рівні, а відповідні сторони – пропорційні: $\frac{AM}{MC}=\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{MN}$.

Дані трикутники подібні за означенням [26].

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін [26].

На рисунку 1.7.3 відрізки *MN, NE, EM* – середні лінії трикутника *ABC.*

Т е о р е м а 2. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині [26].

Д о в е д е н н я. Нехай *MN* – середня лінія Δ *ABC* (рис.. 1.7.4). Доведемо, що $MN \parallel AC, MN=\frac{1}{2}AC.$

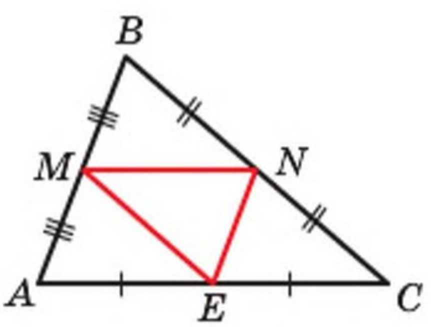


Рис. 1.7.3

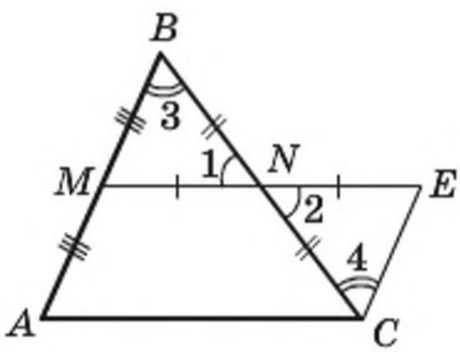


Рис. 1.7.4

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN=NE$ (рис. 1.7.4). Сполучимо точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN=NC$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, трикутники MBN і ECN рівні за першою ознакою трикутників. Звідси $MB=EC$ і кути 3 та 4 рівні. Ураховуючи, що $AM=BM$, отримаємо: $EC=AM$. Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні та рівні. Отже, чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$.

Також $ME=AC$. Оскільки, $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$ [37].

1.8 Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. На рисунку 1.8.1 відрізок CD – висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).

Відрізки AD і DB називають проекціями катетів AC і CB відповідно на гіпотенузу.

Л е м а. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику [37]**.**

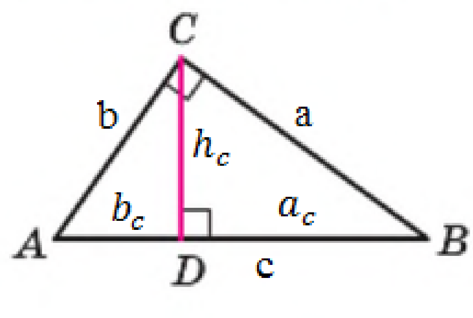


Рис. 1.8.1

Т е о р е м а 1. Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу [37]**.**

Д о в е д е н н я. На рисунку 1.8.1 відрізок CD – висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB, AC^2 = AB \cdot AD, BC^2 = AB \cdot DB.$$

Оскільки $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Звідси $AC^2 = AB \cdot AD$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Звідси $BC^2 = AB \cdot DB$.

В іншому випадку записують так:

$a^2 = c \cdot a_c,\ \ b^2 = c \cdot b_c,\ \ h_c^2 = a_c \cdot b_c$ [37]

Теорема Піфагора. Доведемо теорему, відкриття якої пов'язане з ім'ям давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.).

Т е о р е м а   П і ф а г о р а. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів [26]**.**

Дано: $\Delta\ ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (рис. 1.8.2).

Довести: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

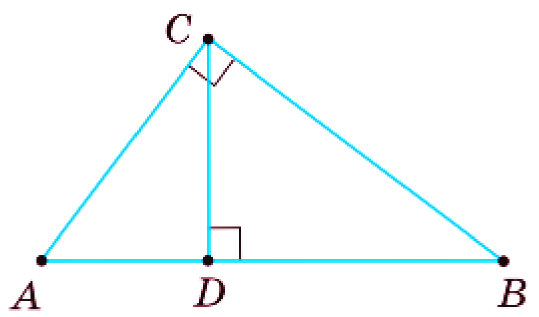


Рис. 1.8.2

Д о в е д е н н я. З вершини прямого кута *C* проведемо висоту *CD*. Кожний катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу. Тому

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ і } BC^2 = AB \cdot BD.$$

Додавши рівності почленно та врахувавши, що $AD + DB = AB$, одержимо:

$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB^2$.

Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Теорему доведено.

Якщо *a*, *b* – катети прямокутного трикутника, *c* – його гіпотенуза, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ одержимо такі формули: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = b^2 - c^2$, або $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, або $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

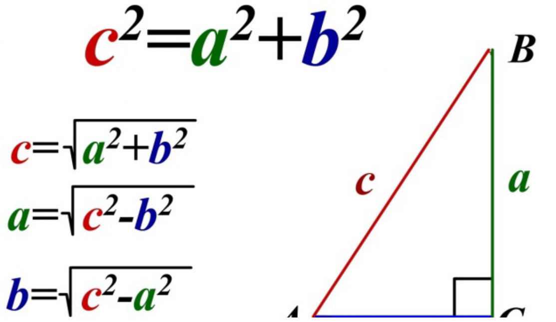


Рис. 1.8.3

Скориставшись цими формулами, за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника можна знайти його третю сторону (рис. 1.8.3) [26].

З а д а ч а. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з його діагоналей — 16 см. Знайдіть другу діагональ ромба [33].

Р о з в ' я з а н н я. Нехай *ABCD* — ромб (рис. 1.8.4), *AC* = 16 см, *AD* = = 10 см. Знайдемо діагональ *BD*. Ми знаємо, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл. Тому Δ *AOD* — прямокутний (∠*O* = 90°). У ньому: катет $AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см), гіпотенуза *AD* = 10 см.

За теоремою Піфагора, $AD^2 = AO^2 +$, звідси:

$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} =$ (см).

Тоді *BD* = 2 · *OD* = 2 · 6 = 12 (см).

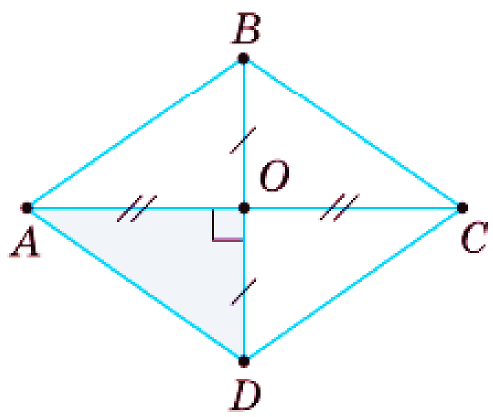


Рис. 1.8.4

1.9 Ознаки подібності трикутників

Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника [37].

Перша ознака подібності трикутників. Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови

, то за означенням ці трикутники подібні [26].

Т е о р е м а 1(перша ознака подібності трикутників). Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні [37].

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ ABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких . Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то Δ ABC і $\Delta A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

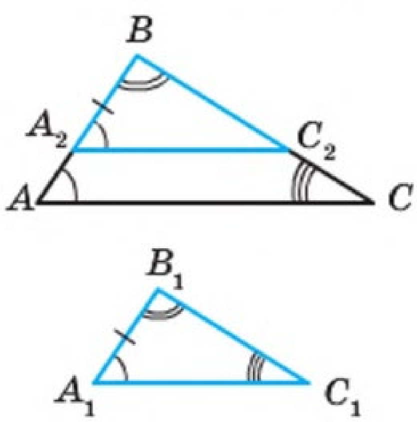


Рис. 1.9.1

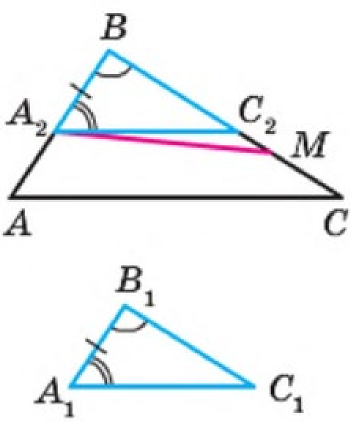
Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (рис. 1.9.1).

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і та січній AA_2. Звідси . Але . Отримуємо, що . Таким чином, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [37].

Друга та третя ознаки подібності трикутників.

Т е о р е м а 2 (друга ознака подібності трикутників). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні [37].

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ ABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ і . Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідні точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 1.9.2). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Рис. 1.9.2 Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Припустимо, що це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$.

Але $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

За лемою про подібні трикутники отримуємо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$. Трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [37].

Т е о р е м а 3 (третя ознака подібності трикутників). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні [37]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ ABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 такі, що $BA_2 = A_1B_1, BC_2 = B_1C_1$ (рис. 1.9.3). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. У Δ ABC і Δ A_2BC_2 кут B спільний, прилеглі до нього сторони пропорційні. Отже, за другою ознакою подібності трикутників ці трикутники подібні, причому коефіцієнт

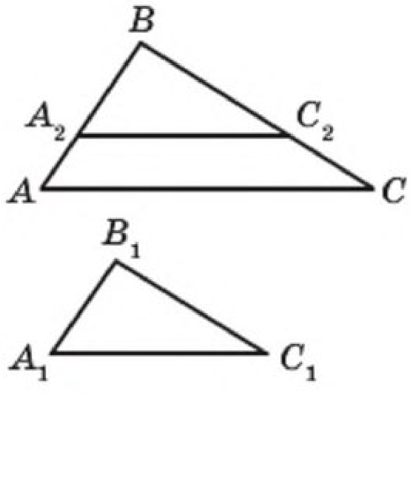


Рис. 1.9.3

подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Ураховуючи, що за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, отримуємо: $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$, отримуємо: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [26].

1.10 Коло, вписане в трикутник

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Т е о р е м а 1 *(властивість бісектриси кута)****. Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута*** [25]**.**

Д о в е д е н н я. Виберемо на бісектрисі кута *A* довільну точку *K* і проведемо з точки *K* перпендикуляри *K B* і *KC* до сторін кута (рис. 1.10.1). Тоді *KB* і *KC* — відстані від точки *K* до сторін кута *A*. Доведемо, що *KB* = *KC*.

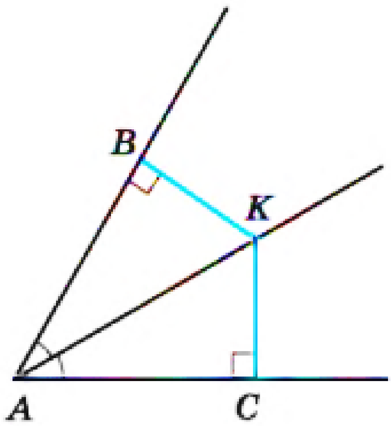


Рис. 1.10.1

Розглянемо Δ *AKB* і Δ *AKC* (∠ *B* = ∠ C = = 90°). *AK* — їх спільна гіпотенуза, ∠ *BAK* = = ∠ *CAK* (бо *AK* — бісектриса).

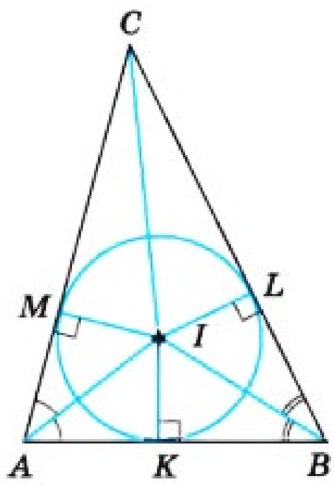
Отже, Δ *AKB* = Δ *AKC* (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому *KB* = *KC*. Теорему доведено [25].

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника [25]**.**

При цьому трикутник називають ***описаним навколо кола****.*

Т е о р е м а 2 (про коло, вписане в трикутник). У будь-який трикутник можна вписати коло [25]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний Δ *ABC*. Нехай бісектриси кутів *A* і *B* цього трикутника перетинаються в точці *I* (рис. 1.10.2). Доведемо, що ця точка є центром вписаного у трикутник кола.



1) Оскільки точка *I* лежить на бісектрисі кута *A*, то вона рівновіддалена від сторін *AB* і *AC* трикутника. Таким чином *IM* = *IK*, де *M* і *K* — основи

перпендикулярів, проведених із точки *I* до сторін *AC* і *AB* відповідно.

2) Аналогічно *IК* = *IL*, де *L* — основа перпендикуляра, проведеного з точки *I* до сторони *BC*.

Рис. 1.10.2

3) Отже, *IM* = *IК* = *IL*. Тому коло із центром у точці *I*, радіус якого *IM*, проходить через точки *M*, *К* і *L* . Сторони трикутника *ABC* дотикаються до цього кола в точках *M*, *К* і *L*, оскільки перпендикулярні до радіусів *IM*, *IК* і *IL*.

4) Тому коло із центром у точці *I*, радіус якого *IM*, є вписаним у Δ *ABC*. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці [25]**.**

Д о в е д е н н я. За доведенням попередньої теореми точка *I* — точка перетину бісектрис кутів *A* і *B* Δ *ABC*. Доведемо, що бісектриса кута *C* також проходить через точку *I*.

Розглянемо прямокутні трикутники *CMI* і *CLI* (рис. 1.10.2).

Оскільки *IM* = *IL*, а *CI* — спільна гіпотенуза цих трикутників, то Δ *CMI* = =Δ *CLI* (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle$ *MCI* = $\angle$ *LCI* (як відповідні кути рівних трикутників), а *CI* — бісектриса кута *C* трикутника *ABC*.

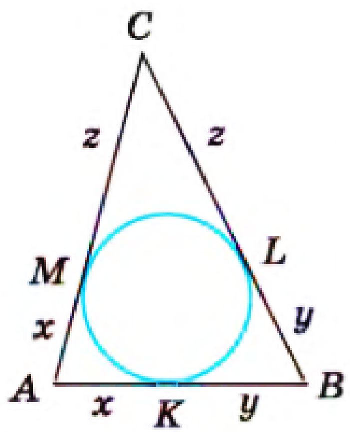
Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника *ABC* проходять через точку *I*, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Наслідок доведено.

Н а с л і д о к 2. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника [25]**.**

З а д а ч а. Коло, вписане у Δ *ABC*, дотикається до сторони *AB* у точці *К*, до сторони *BC* — у точці *L*, а до сторони *CA* — у точці *M*. Доведіть, що:

AК = *AM* = *p* – *BC*; *BК* = *p* – *AC*; *CM* = *CL* = *p* – *AB*,

де $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ – півпериметр трикутника *ABC* [17].



Д о в е д е н н я. За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (рис. 1.10.3).

Рис. 1.10.3

Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$.

Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$.

Тому $p = x + y + z$, звідки; тобто $x = p - BC$. Маємо: $AM = AK =$ $p - BC$.

Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$.

1.11 Коло, описане навколо трикутника

Серединним перпендикуляром до відрізка називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього [38]**.**

На рисунку 1.11.1 пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Т е о р е м а 1 *(властивість серединного перпендикуляра до відрізка)***.** ***Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка*** [38]**.**

Д о в е д е н н я. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, де K — середина цього відрізка (рис. 1.11.1). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.

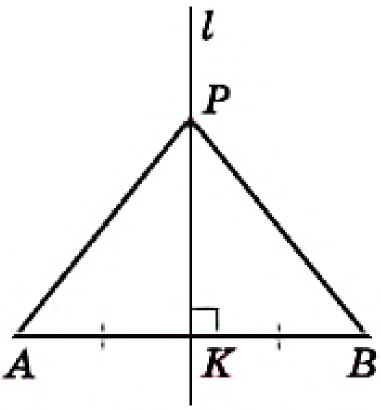


Рис. 1.11.1

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено [38].

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.

При цьому трикутник називають ***вписаним у коло***.

Т е о р е м а 2 *(про коло, описане навколо трикутника)***. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло*** [38]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\Delta\, ABC$. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються у точці O (рис. 1.11.2). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.

1) Точка O лежить на серединному перпендикулярі до AB, тому вона рівновіддалена від вершин A і B, тобто $OA = OB$.

2) Аналогічно $OA = OC$, оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до AC.

3) Маємо: $OA = OB = OC$. Тому коло із центром у точці O проходить через вершини A, B і C трикутника ABC, а відрізки OA, OB і OC є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці [27]**.**

Д о в е д е н н я. Проведемо з точки O перпендикуляр OK до сторони BC (рис. 1.11.2). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, проведеною до основи BC. Тому він також є і медіаною. Відрізок OK лежить на серединному перпендикулярі до сторони BC. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника ABC проходять через точку O, тобто перетинаються в одній точці. Наслідок доведено.

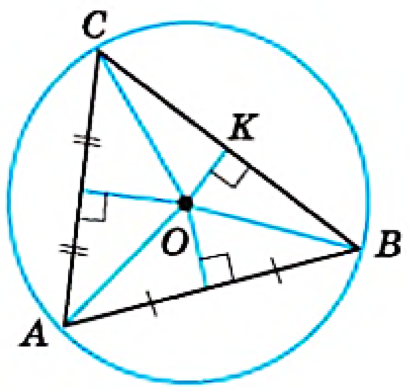


Рис. 1.11.2

Н а с л і д о к 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін **[27].**

З а д а ч а. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи [18].

Д о в е д е н н я. Нехай $\Delta\, ABC$ — прямокутний ($AC = 90°$), а CO — його медіана (рис. 1.11.3).

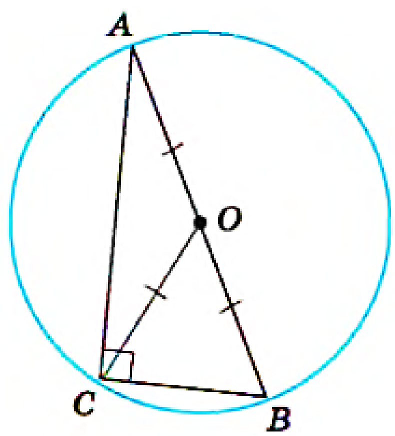


Рис. 1.11.3

Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, то $CO = \frac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = = BO = CO$.

Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центром якого є точка O, а радіусом — OA, проходить через усі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC.

1.12 Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника – це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буковою O.

Точка перетину бісектрис трикутника – це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою J.

Точку перетину прямих, які містять висоти трикутника, називають ***ортоцентром*** трикутника. Позначимо її буквою H.

Точку перетину медіан трикутника називають ***центроїдом*** трикутника. позначимо цю її M.

Точки O, J, H, M називають ***чудовими точками*** трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманна ціла низка красивих властивостей.

Розглянемо дві теореми про чудові точки трикутника [26].

Т е о р е м а 1. У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій [39]**.**

Цю пряму називають **прямою Ейлера.**

Д о в е д е н н я. Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Якщо даний Δ *ABC* прямокутний, то його ортоцентр – це точка *C*, центр описаного кола – середина гіпотенузи *AB*. Тоді зрозуміло, що всі три точки належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Л е м а. Якщо H – ортоцентр трикутника ABC, OM_1 ***– перпендикуляр, опущений із центра O описаного кола на сторону BC, то*** $AH = 2OM_1$ (рис. 1.12.1) [39].

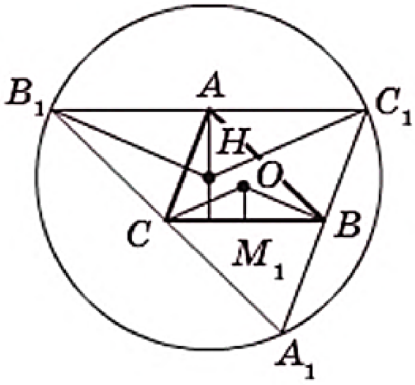


Рис. 1.12.1

Д о в е д е н н я. Через кожну вершину Δ *ABC* проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо Δ $A_1B_1C_1$ (рис. 1.12.1). У зазначеній теоремі було показано, що ортоцентр *H* Δ *ABC* є центром описаного кола Δ $A_1B_1C_1$. Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ – вписаним. Оскільки обидва кути спираються на одну й ту саму дугу, то . Кути BAC і $B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому . Оскільки $B_1C_1 = 2BC$, то рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності 2. Оскільки відрізки AH і OM_1 – відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки точка M_1 – середина сторони BC, то відрізок AM_1 – медіана Δ ABC (рис. 1.12.2). Нехай M – точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то . Кути AMH і M_1MO рівні як вертикальні. Отже, Δ HAM і Δ OM_1M подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M ділить медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. Звідси точка M – центроїд трикутника ABC.

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність $HM = 2MO$, яка є ще однією властивість чудових точок трикутника [37].

Т е о р е м а 2. Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, які сполучають вершини трикутника з його ортоцентром, лежать на одному колі, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}R$, де R – радіус описаного кола даного трикутника [39].

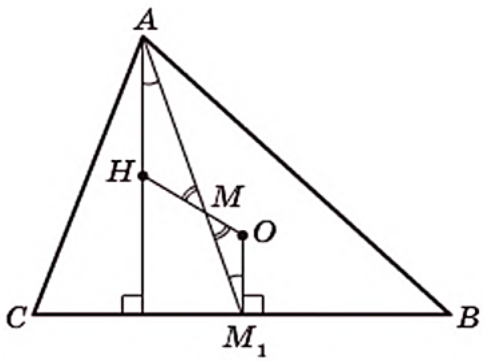


Рис. 1.12.2

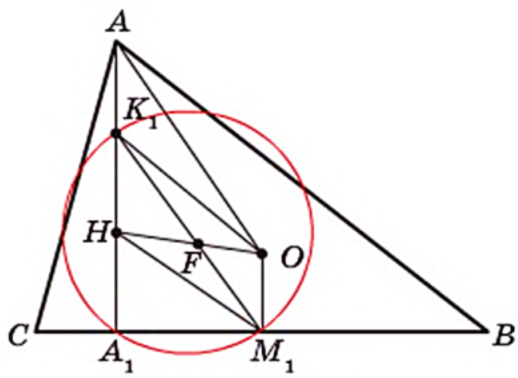


Рис. 1.12.3

Це коло називають **колом дев'яти точок**.

Д о в е д е н н я. У $\Delta\, ABC$ точка H – ортоцентр, точка O – центр описаного кола, точка A_1 – основа висоти, проведеної з вершини A, точка M_1 – середина сторони CB, точка K_1 – середина відрізка AH (рис. 1.12.3).

За лемою $OM_1 = \frac{1}{2}AH = K_1H$. Оскільки $HK_1 \parallel OM_1$, то чотирикутник HK_1OM_1 – паралелограм. Нехай діагоналі цього паралелограма перетинаються в точці F.

Зауважимо, що точка F – середина гіпотенузи K_1M_1 прямокутного трикутника $A_1K_1M_1$. Отже точки A_1, K_1 і M_1 лежать на колі радіуса FK_1 із центром у точці F.

Очевидно, що чотирикутник K_1AOM_1 – паралелограм. Звідси $K_1M_1 = OA$. Тоді $FK_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Отже, ми довели, що трійка точок – середина M_1 сторони CB , основа A_1 висоти AA_1 і середина K_1 відрізка HA – лежить на колі із центром у середині F відрізка HO та радіусом, який дорівнює [39].

1.13 Теореми Менелая та Чеви

Теорема Менелая. Нагадаємо, що точки, які належать одній прямій, називають ***колінеарними***.

У цьому пункті ми дізнаємося про одну знамениту терему, яка слугує критерієм колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім’я давньогрецького математика й астронома Менелая Александрійського (I–II ст. н. е.).

Т е о р е м а (теорема Менелая). На сторонах AB і BC трикутника ABC означено відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC – точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (*)$$ [39].

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

Із вершини Δ *ABC* опустимо перпендикуляри *AM, BN і CP* на пряму C_1B_1 (рис. 1.13.1). Оскільки , то Δ AMC_1 і ΔBNC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$. Із подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$. Із подібності трикутників B_1CP і B_1AM випливає рівність $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Перемноживши почленно ліві та праві частини пропорцій $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}, \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$ отримуємо рівність $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1.$

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC Δ ABC у деякій точці A_2 (рис. 1.13.2). Оскільки точки C_1, A_2, B_1 лежать на одній прямій, то з доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 ділять відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1.

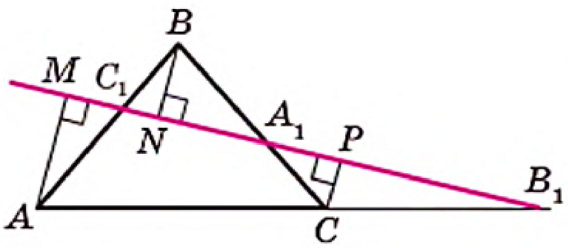


Рис. 1.13.1

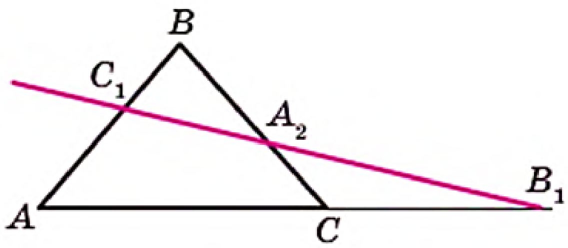


Рис. 1.13.2

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки A_1, B_1, C_1 лежать не на сторонах Δ ABC , а на їхніх продовженнях (рис. 1.13.3) [39].

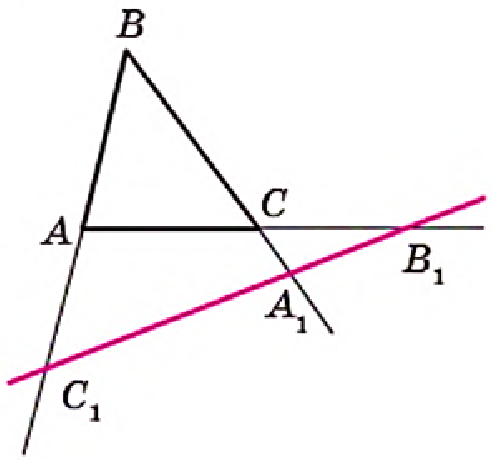


Рис. 1.13.3

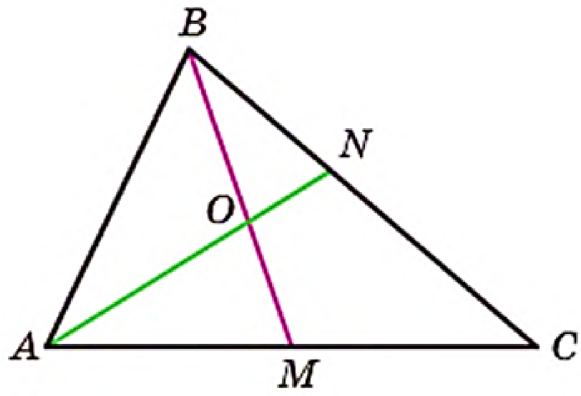


Рис. 1.13.4

З а д а ч а 1. На стороні BC Δ ABC обрано точку N так, що $BN : NC = 2 : 3$. У якому відношенні медіана BM ділить відрізок AN [33]?

Р о з в ' я з а н н я. Нехай відрізки AN і BM перетинаються в точці O (рис. 1.13.4). Пряма BM перетинає дві сторони трикутника ANC. За теоремою Менелая можна записати $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{ON} \cdot \frac{NB}{BC} = 1$. Враховуючи, що $\frac{CM}{MA} = 1$ і $\frac{NB}{BC} = \frac{2}{5}$ маємо $\frac{AO}{ON} \cdot \frac{2}{5} = 1$. Звідси $\frac{AO}{ON} = \frac{5}{2}$.

З а д а ч а 2. Спільні зовнішні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (рис. 1.13.5). Доведіть, що ці точки колінеарні [17].

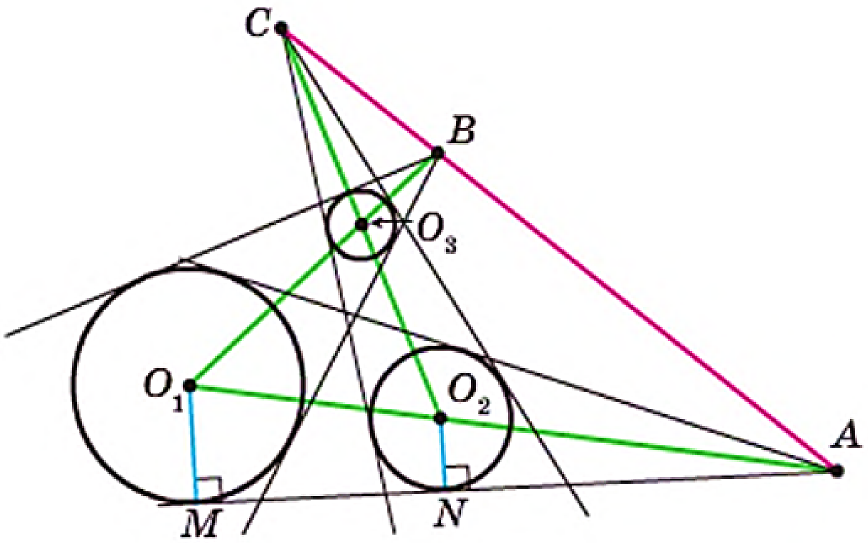


Рис. 1.13.5

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо радіуси кіл із центрами O_1, O_2 і O_3 відповідно r_1, r_2 і r_3. Відрізки O_1M і O_2N – радіуси, проведені в точки дотику (рис. 1.13.5).

Покажемо, що точки O_1, O_2 і A лежать на одній прямій.

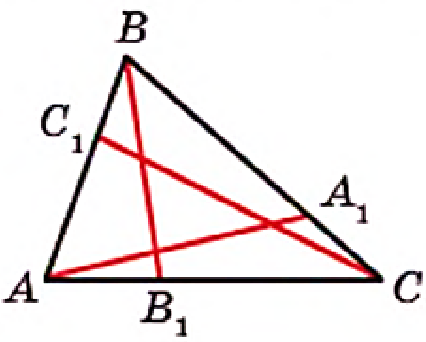


Рис. 1.13.6

Звідси $\Delta AO_1M \sim \Delta AO_2N$. Отримуємо: $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$. Аналогічно доводимо, що $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}, \frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$.

Для точок A, B і C, які лежать на продовженнях сторін $\Delta\ O_1O_2O_3$, розглянемо добуток трьох відношень $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$. Цей добуток дорівнює $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$. Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

Теорема Чеви. На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC візьмемо довільні точки A_1, B_1, C_1 (рис. 1.13.6). Кожен із відрізків AA_1, BB_1, CC_1 називають ***чевіаною*** трикутника ABC. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера й математика Джованні Чеви (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

Якщо очки A_1, B_1 і C_1 узято так, що чевіани є бісектрисами, або медіанами, або висотами, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають конкурентними.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох довільних чевіан.

Т е о р е м а (теорема Чеви). Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \quad [39]. \qquad (**)$$

Д о в е д е н н я. Доведемо необхідну умову конкурентності: якщо чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці (рис. 1.13.7), то виконується рівність (**).

Застосуємо теорему Менелая до трикутників ABB_1, CBB_1 і прямих CC_1 і AA_1 відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{B_1C}{CA}=1 \quad [39]. \qquad (1)$$

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{B_1A}{AC}=1 \quad [39]. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{B_1C}{CA}=\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{B_1A}{AC}$.

Звідси $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{1}=\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{1}$ або $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=1$.

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (**), то чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці D, а чевіана, що проходить через вершину C і точку D, перетинає сторону AB у деякій точці C_2 (рис. 1.13.3). З доведеного вище можна записати: $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

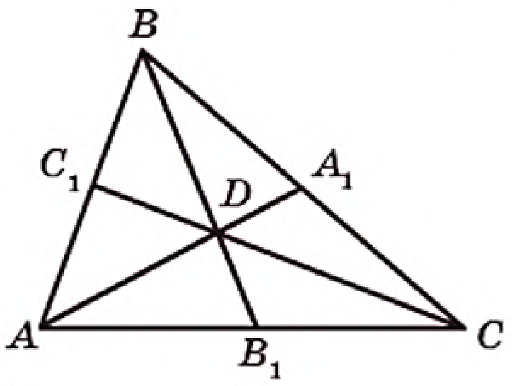


Рис. 1.13.7

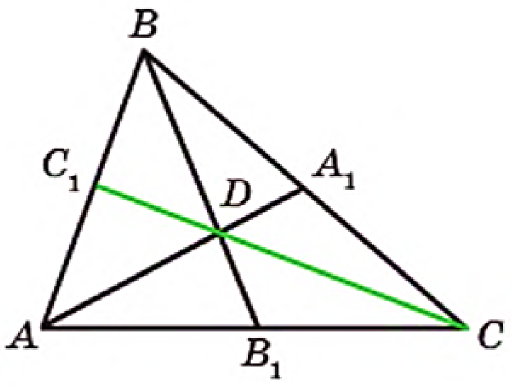


Рис. 1.13.8

Зіставляючи цю рівність з рівність (**), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки C_1 і C_2 ділять відрізок AB в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Таким чином, пряма CD перетинає сторону AB у точці C_1 [39].

З а д а ч а 3. Вписане коло дотикається до сторін BC, AC, AB трикутника ABC у точках A_1, B_1, C_1 відповідно (рис. 1.13.9). Доведіть, що чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні [32].

Р о з в ' я з а н н я. За властивістю дотичних маємо:

$AC_1 = AB_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1$.

Для точок C_1, A_1 і B_1 розглянемо добуток трьох відношень $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$. З урахуванням записаних вище рівностей цей добуток дорівнює 1. Отже, чевіани AA_1, BB_1 і

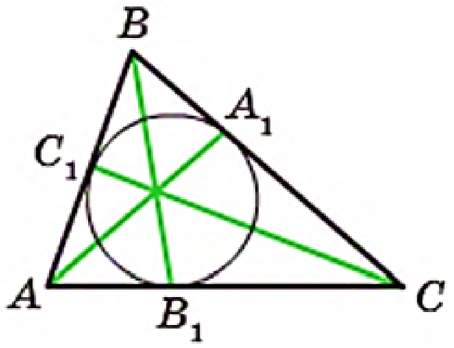


Рис. 1.13.9

CC_1 конкурентні.

1.14 Теореми косинусів та синусів

Теорема косинусів. Доведемо одну з найважливіших теорем про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Т е о р е м а   к о с и н у с і в. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Д о в е д е н н я. Нехай у Δ *ABC AB = c, AC = b, BC = a* (рис. 1.14.1). Доведемо,що

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos C.$$

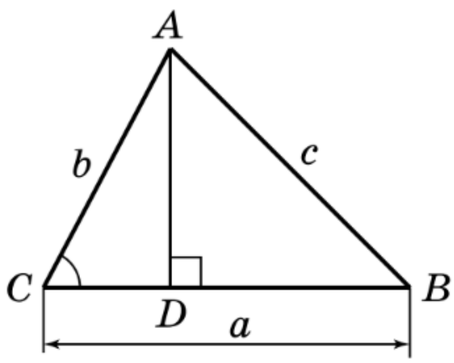


Рис. 1.14.1

Очевидно, що ∠ *C* може бути прямим, гострим або тупим. Розглянемо всі три випадки.

1) Нехай ∠ *C* – прямий. Тоді і формула, яку треба довести, набуває вигляду:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

тобто маємо теорему Піфагора для Δ *ABC*.

2) Нехай ∠ *C* – гострий. Тоді у Δ *ABC* є ще хоча б один гострий кут, нехай це буде ∠ *B*. Проведемо у трикутнику висоту *AD*. Оскільки кути *B* і *C* – гострі, то точка *D* належить стороні *BC*. Тоді у прямокутному Δ *ADC*: *AD = b sin C*, *CD = b cos C*, *BD = BC – CD = a – b cos C*.

У прямокутному Δ *ADB* (за теоремою Піфагора):

$$c^2 = AB^2 = AD^2 + DB^2 = (b\sin[C])^2 + (a - b\cos C)^2 =$$

$$-2ab\cos C + b^2\cos^2 C = a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C$$

.

Але $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

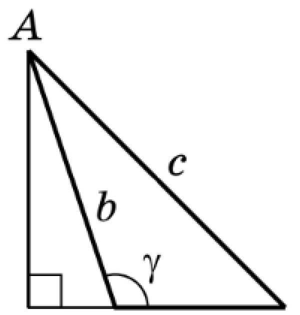


Рис. 1.14.2

3) Нехай кут $\angle C$ – тупий (рис. 1.14.2). Позначимо $\angle ACB = \gamma$. Проведемо у Δ *ABC* висоту *AD*. У цьому випадку точка *D* лежатиме на продовженні променя *BC*, тому $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$.

У прямокутному трикутнику *ADC*:

$AD = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma;$

$DC = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - \gamma) = -b \cos \gamma.$

Маємо: $BD = BC + CD = a - b \cos \gamma$. Далі доводимо так, як у випадку, коли $\angle C$ – гострий.

Зауважимо, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів для прямокутного трикутника, тому її інколи називають *узагальненою теоремою Піфагора*.

Отже, у довільному трикутнику виконуються рівності:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

За допомогою теореми косинусів можна знайти невідому сторону трикутника, якщо відомо дві його інші сторони й один з кутів [24].

З а д а ч а 1. Дано: Δ *ABC*, *AC* = 5 см, ВС = 8 см, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: *AB* [43].

Р о з в' я з а н н я. Нехай *AC* = *b*, *BC* = *a*, *AB* = *c* (рис. 1.14.1).

За теоремою косинусів маємо: . Тоді:

(см).

В і д п о в і д ь. 7 см.

З а д а ч а 2. Дано: Δ *ABC*, *AB* = 7, *BC* = 5, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: *AB* [29].

Р о з в' я з а н н я. Нехай *AC* = *b*, *BC* = *a*, *AB* = *c* (рис. 1.14.2).

За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, тобто

.

Спростивши останню рівність, отримаємо квадратне рівняння $b^2 + 5b - -24 = 0$, розв'язавши яке, матимемо: $b_1 = 3;\ b_2 = -8$.

Число –8 не задовольняє змісту задачі, оскільки $b > 0$.

Отже, $AC = 3$ см.

Відповідь. 3 см.

Якщо відомо три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого з його кутів, а отже, і сам кут.

Наприклад, косинус кута *C* можна знайти за формулою, виразивши *cos C* з формули теореми косинусів:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Задача 3. Знайти міру найбільшого з кутів трикутника, довжини сторін якого дорівнюють $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ і 4 см [33].

Розв'язання. Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то найбільшим кутом трикутника буде кут, що лежить проти сторони завдовжки 4 см.

Нехай $a = \sqrt{2}$ см, $b = \sqrt{8}$ см, $c = 4$ см.

Тоді за формулою косинуса кута маємо:

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{3}{4}.$$

Використовуючи калькулятор (або таблиці), знайдемо, що $\angle C \approx 138°35'$.

Відповідь. $138°35'$.

Отже, теорема косинусів є зручною і для визначення виду трикутника. Щоб установити, гострокутним, прямокутним або тупокутним є трикутник, досить знайти знак косинуса його найбільшого кута. З формули косинуса кута зрозуміло, що знак косинуса кута залежить від знака чисельника дробу, оскільки знаменник завжди додатний. Тому знак виразу $a^2+b^2-c^2$ дозволяє визначити знак косинуса кута трикутника, а отже, і вид цього кута (гострий, прямий чи тупий).

Якщо *c* – найбільша сторона трикутника, то для з'ясування виду трикутника достатньо порівняти з нулем значення виразу $a^2+b^2-c^2$. Таким чином,

якщо с – найбільша сторона трикутника і

$a^2+b^2-c^2>0$ ***, то*** $\angle C$ ***– гострий, а трикутник – гострокутний;***

$a^2+b^2-c^2=0$ ***, то*** $\angle C$ ***– прямий, а трикутник – прямокутний;***

$a^2+b^2-c^2<0$ ***, то*** $\angle C$ ***– тупий, а трикутник – тупокутний*** [26].

З а д а ч а 4. Визначити вид трикутника зі сторонами *a* = 4 см, *b* =6 см, *c* = 7 см [17].

Р о з в' я з а н н я. $a^2+b^2-c^2=4^2+6^2-7^2=3>0$, отже, трикутник гострокутний.

В і д п о в і д ь. Гострокутний.

Теорема синусів.

Л е м а. Якщо АВ – хорда кола, радіус, якого дорівнює R, а М – будь-яка точка кола, то

$$\frac{AB}{\sin(AMB)}=2R.$$

Д о в е д е н н я. 1) Якщо *AB* = *2R* – діаметр кола (рис. 1.14.3), то $\angle AMB$ = = 90˚ при будь-якому розташуванні точки *М* на колі. Тоді, ураховуючи співвідношення у прямокутному трикутнику,

$$\frac{AB}{\sin(AMB)}=\frac{2R}{\sin 90^\circ}=2R.$$

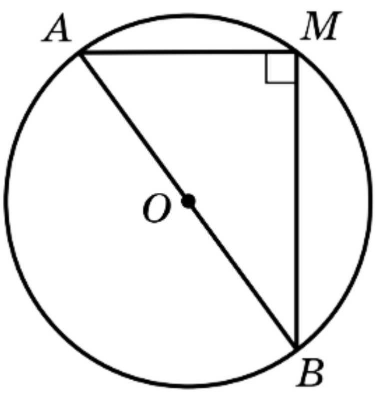


Рис. 1.14.3

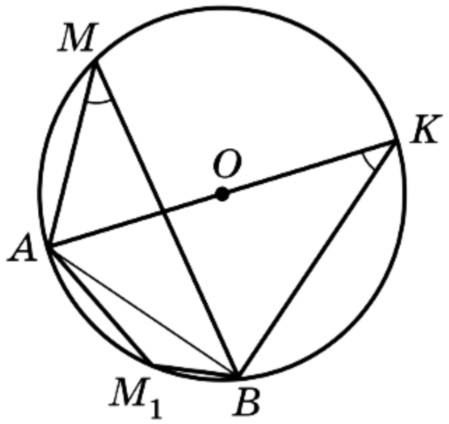


Рис. 1.14.4

2) Нехай *AB* – не є діаметром кола, а *M* – точка, яка належить більшій дузі кола (рис. 1.14.4). Проведемо діаметр *AK*. Тоді $\angle AMB = \angle AKB$ (як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). $\angle ABK = 90^\circ$ (як кут, що спирається на діаметр).

У Δ *ABK* ($\angle B = 90^\circ$) $\sin(AKB = AB/(AK)$, тому $\sin(AMB = AB/2R$, звідки $\dfrac{AB}{\sin(AMB} = 2R.$

3) Нехай – *AB* не є діаметром, а точка M_1 належить меншій дузі кола, тоді $\angle M + \angle M_1 = 180^\circ$. Маємо: $\angle AM_1B = 180^\circ - \angle AMB$, тому

$\sin \angle AM_1B = \sin(180^\circ - \angle AMB) = \sin \angle AMB.$

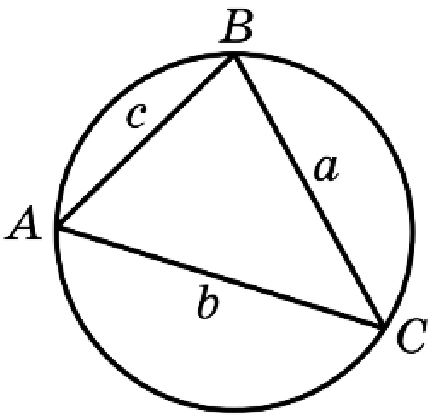
Отже, у цьому випадку також справджується рівність

$$\frac{AB}{\sin(AMB} = 2R.$$

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника [36].

Т е о р е м а   с и н у с і в. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів [36]**.**

Д о в е д е н н я. Нехай Δ *ABC* – довільний, *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a* (рис. 1.14.5). Доведемо, що



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Опишемо коло радіуса R навколо даного трикутника. За доведеною лемою:

$$\frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R; \qquad = 2R; \frac{c}{\sin C}$$

$$= 2R.$$

Отже, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Рис. 1.14.5

Н а с л і д о к. *(узагальнена теорема синусів)****. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:***

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

Скориставшись теоремою синусів, можна довести відоме з курсу геометрії 7 класу твердження:

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

За допомогою теореми синусів можна розв'язувати трикутники. Наприклад, за двома даними кутами трикутника і стороною, що лежить проти одного з них, можна знайти сторону, що лежить проти другого кута [24].

З а д а ч а 5. Дано: $\Delta\, ABC\; BC =$ см; $\angle A = 45^\circ$; $\angle B = 60^\circ$.

Знайти: AC [33].

Р о з в' я з а н н я. За теоремою синусів маємо (рис. 1.14.3):

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, тобто ;

Звідки $AC =$ (см).

В і д п о в і д ь. см.

1.15 Формули для знаходження площі трикутника

Площу S трикутника зі сторонами a, b і c та висотами h_a, h_b, h_c можна обчислити за формулами

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \qquad S = \frac{1}{2}bh_b, \qquad S = \frac{1}{2}ch_c.$$

Т е о р е м а 1. Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними [24].

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\Delta\, ABC$, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$ і $\angle C = \gamma$. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Можливі три випадки:

1) кут γ гострий (рис. 1.15.1);

2) кут γ тупий (рис. 1.15.2);

3) кут γ прямий.

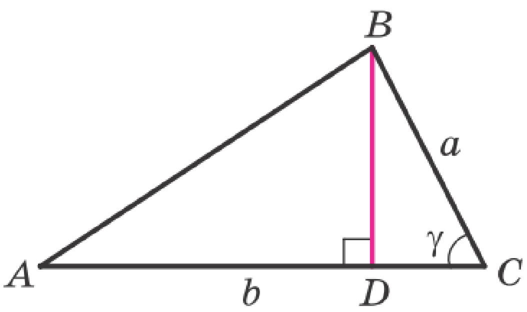


Рис. 1.15.1

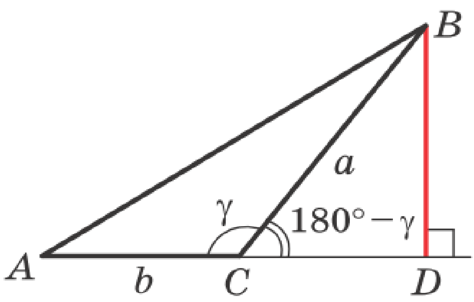


Рис. 1.15.2

На рисунках 2.13.1 і 2.13.2 проведемо висоту *BD* трикутника *ABC*.

Тоді $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b.$

Із прямокутного $\Delta\, BDC$ у першому випадку (рис. 1.15.1) отримуємо: $BD = a\, sin\gamma$, а в другому (рис. 1.15.2): $BD = a\, sin(180^\circ - \gamma) = a \sin\gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma .$$

Якщо кут *C* прямий, то $\sin\gamma = 1$. Для прямокутного трикутника *ABC* із катетами *a* і *b* маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \quad [24]$$

***Т е о р е м а 2.* (формула Герона). Площу *S* трикутника зі сторонами *a*, *b* і *c* можна обчислити за формулою**

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де *p* — його півпериметр [24].

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\Delta\, ABC$, площа якого дорівнює *S*, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Нехай $\angle C = \gamma$. Запишемо формулу площі трикутника:

$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma .$ Звідси $S^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2\gamma .$

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$.

Тоді $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma),$ то

$$S^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$

.

.

$2p - 2a$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ [24].

Т е о р е м а 3. Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}},$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника [24]**.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо Δ *ABC*, площа якого дорівнює *S*, такий, що *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*. Доведемо, що $S = \frac{abc}{4R}$, де *R* — радіус описаного кола трикутника.

Нехай ∠*A* = *α*. Запишемо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Із леми п. 1.14 випливає, що $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Тоді $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}}.$$

Т е о р е м а 4. Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола [24].

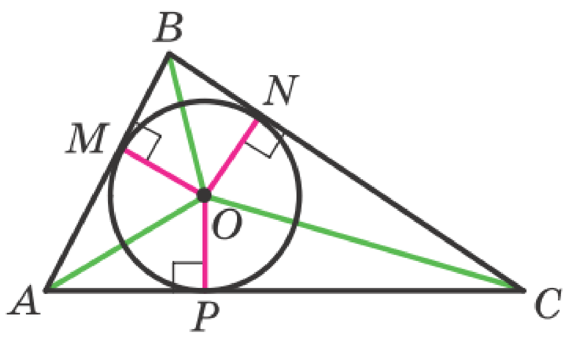


Рис. 1.15.3

Д о в е д е н н я. На рисунку 1.15.3 зображено Δ *ABC*, у який вписано коло радіуса *r*. Доведемо, що:

$$\boldsymbol{S = pr.}$$

де *S* — площа даного трикутника, *p* — його півпериметр.

Нехай точка *O* — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін Δ *ABC* у точках *M*, *N* і *P*. Площа Δ *ABC* дорівнює сумі площ трикутників *AOB, BOC, COA:*

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB, ON \perp BC, \quad OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr$ [36]

1.16 Розв’язування задач підвищеної складності

Розв’язати трикутник означає знайти невідомі його сторони та кути за відомими сторонами та кутами.

У 8 класі учні навчилися розв’язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дають змогу розв’язати будь–який трикутник.

У наступних задачах значення тригонометричних функцій будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до сотих. Величини кутів будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до одиниць. Обчислюючи довжини сторін, результат будемо округлювати до десятих [17].

З а д а ч а 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 1.16.1) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°, \gamma = 119°$ [40]

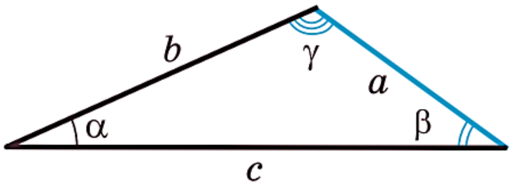


Рис. 1.16.1

Р о з в ' я з а н н я. Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

За теоремою синусів:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Звідси $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Маємо: $b = \dfrac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \dfrac{12 \cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx 16{,}9$ (см).

Знову застосовуючи теорему синусів, запишемо: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Звідси $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Маємо: $c = \dfrac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \dfrac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \dfrac{12 \cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx 24{,}9$ (см).

В і д п о в і д ь: $b \approx 16{,}9$ см, $c \approx 24{,}9$ см, $\alpha = 25°$.

З а д а ч а 2. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38°$ між ними [33].

Р о з в ' я з а н н я. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Звідси

$c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04; c \approx 9{,}1$ см.

Далі маємо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos\alpha \approx \dfrac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$

Звідси $\alpha \approx 110^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$; $\beta \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

В і д п о в і д ь: $c \approx 9,1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$.

З а д а ч а 3. Розв’яжіть трикутник за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см [40].

Р о з в ’ я з а н н я. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Звідси

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos\alpha = \dfrac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59$.

Отримуємо: $\alpha \approx 54^\circ$.

За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Звідси $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$; $\sin\beta \approx \dfrac{2\sin 54^\circ}{7} \approx \dfrac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23$.

Оскільки b — довжина найменшої сторони даного трикутника, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 13^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

В і д п о в і д ь: $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 13^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$.

З а д а ч а 4. У ΔABC $AC = 1$ см, $AB = 2$ см, O — точка перетину бісектрис. Відрізок, який проходить через точку O і є паралельним до сторони BC , перетинає сторони AC і AB у точках K та M відповідно. Знайдіть периметр трикутника AKM [46].

Дано: $\Delta ABC, AC = 1$ см, $AB = 2$ см, O — точка перетину бісектрис, $K \in AC, M \in AB, O \in KM, KM \parallel BC$.

Знайти: периметр ΔAKM .

Р о з в ’ я з а н н я.

I спосіб

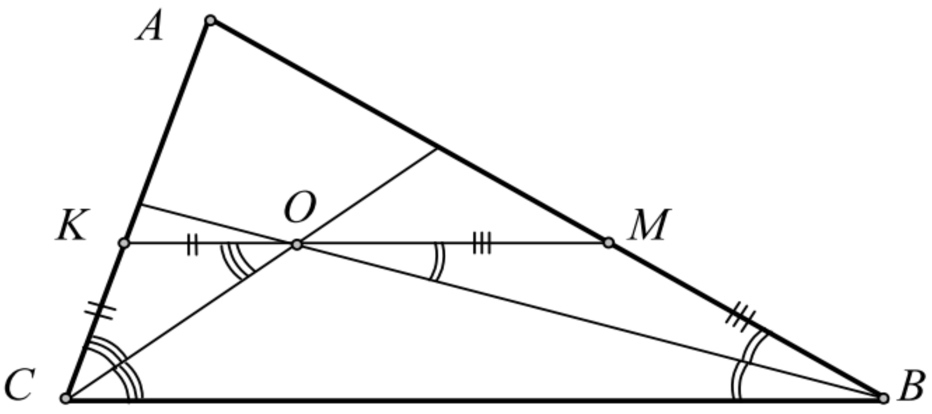


Рис. 1.16.2: до першого способу розв’язання задачі 1

1) За умовою $KM || BC$. Тому за властивістю паралельних KM, BC та січної CO кути KOC і OCB є рівними, як «внутрішні різносторонні». Оскільки CO — бісектриса кута ACB, то за визначенням $\angle KCO = \angle BCO$. І тому $\angle KCO = \angle KOC$. Отже, (за ознакою рівнобедреного трикутника) $\triangle CKO$ є рівнобедреним з основою CO. Звідки $KO = KC$.

2) Аналогічно $\angle CBO = \angle MOB$ як «внутрішні різносторонні» при паралельних KM, BC та січній CO. Оскільки BO — бісектриса кута ABC, то $\angle MBO = \angle CBO$. І тому $\angle MBO = \angle MOB$. Отже, $\triangle BMO$ є рівнобедреним з основою BO. Звідки $MO = MB$.

3) Таким чином $P_{\triangle AKM} = AK + KM + AM = AK + (KO + OM) + AM =$
$= AK + (KC + MB) + AM = (AK + KC) + (MB + AM) = AC + AB = 1 + 2 = 3.$

Отже, $P_{\triangle AKM} = 3$ см.

II спосіб

Нехай AA' — бісектриса кута A $\triangle ABC$. Оскільки бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці, то $O \in AA'$.

За умовою $KM||BC$. Тому трикутники *AKM* і *ACB* є подібними за третьою ознакою подібності трикутників. Оскільки AO і AA' — відповідні лінійні елементи (бісектриси відповідних кутів трикутників) подібних трикутників AKM і ACB, то в якості коефіцієнта подібності цих трикутників можна обрати величину $k = \frac{AO}{OA'}$ $\left(\text{або ж } k' = \frac{1}{k} = \frac{AA'}{Ao}\right)$.

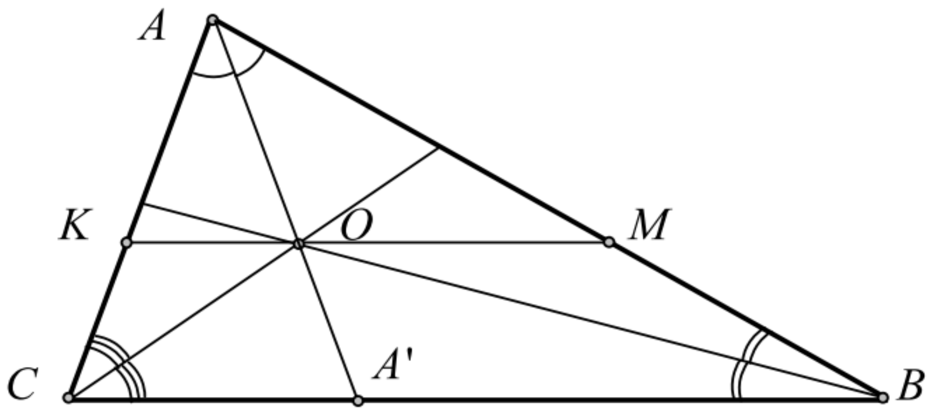


Рис. 1.16.3: до другого способу розв'язання задачі 1

За **властивістю точки перетину бісектрис трикутника** має місце рівність

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC + AB}{Bc}.$$

звідки

$$\frac{OA'}{AO} = \frac{BC}{AC + AB}, \frac{OA'}{AO} + 1 = \frac{BC}{AC + AB} + 1, \frac{AA'}{AO} = \frac{AC + AB + BC}{AC + AB} = \frac{P_{\Delta ABC}}{AC + AB}.$$

І тому коефіцієнт подібності $k = \frac{AO}{AA'} = \frac{AC + AB}{P_{\Delta ABc}}$.

Але ж тоді

$$P_{\Delta AKM} = k \cdot P_{\Delta ABC} = \frac{AC + AB}{P_{\Delta ABC}} \cdot P_{\Delta ABC} = AC + AB.$$

Отже, периметр $\Delta\ AKM$ дорівнює $AC + AB = 1 + 2 = 3$ см.

Відповідь: 3 см.

З а д а ч а 5. У ΔABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A [48].

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай у ΔABC бісектриса AL кута A, висота BH та серединний перпендикуляр до сторони AB в точці M перетинаються в точці O (рис. 1.16.4).

Тоді за властивістю бісектриси кута (трикутника) маємо, що $OH = OM$.

Звідки випливає, що прямокутні трикутники AMO і AHO рівні за катетом і гіпотенузою.

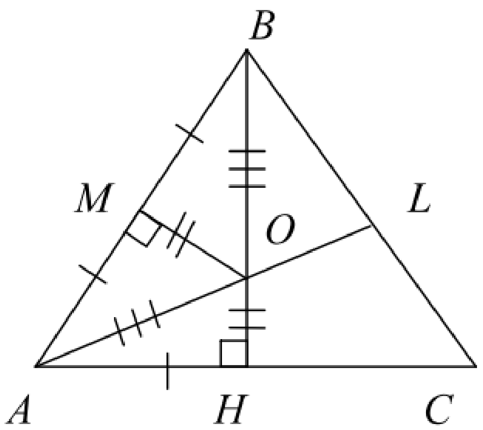


Рис. 1.16.4

Оскільки OM є одночасно і висотою, і медіаною трикутника AOB, то трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB. Тому $\angle BAO = \angle ABO.$

Таким чином, з урахуванням рівності вказаних трикутників, маємо рівність відповідних кутів, а саме: $\angle HAO = \angle BAO = \angle ABO$.

Оскільки $\angle HAO = \angle BAO = \angle ABO = 90^\circ$, то кожен з кутів $\angle HAO, \angle BAO$, $\angle ABO$ дорівнює 30˚. Тому ∠A=60˚.

Відповідь: 60˚.

З а д а ч а 6. На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM трикутника в точці P, причому $AK = AP$. Знайти відношення $BK : PM$ [47].

Р о з в ’ я з а н н я. На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM трикутника в точці P, причому $AK = AP$. Знайдемо відношення $BK : PM$.

І спосіб – «за допомогою теореми Фалеса та теореми про пропорційні відрізки»

1) Через точку *M* проведемо пряму паралельно до прямої CK і нехай вона перетинає пряму AB у точці N. Оскільки $CM = MB$, а паралельні прямі CK і MN перетинають сторони кута CBA, то за теоремою Фалеса $KN = NB$. Звідки $KB = 2KN$.

2) Оскільки паралельні прямі PK і MN перетинають сторони кута MAB та відтинають на його сторонах відрізки AP і PM та AK і KN відповідно, то за «теоремою про пропорційні відрізки» має місце пропорція $AP : PM = AK : KN$, звідки (за властивістю пропорції) має місце пропорція

$$\frac{AP}{AK} = \frac{PM}{KN}$$

виду . За умовою $AP = AK$. І тому справджується рівність

$$1 = \frac{PM}{KN}$$

, звідки $PM = KN$.

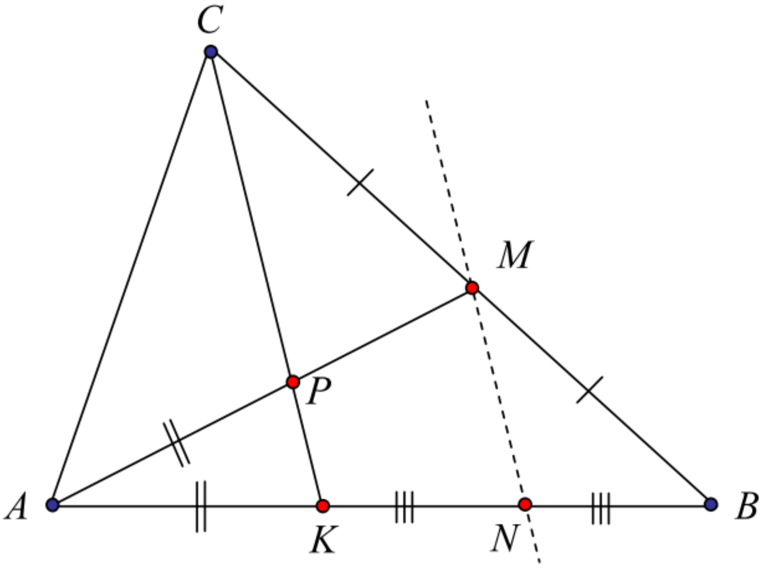


Рис. 1.16.5: до першого способу розв'язання задачі 3

3) З урахуванням пунктів 1 і 2, шукане відношення $BK : PM$ становить $BK : PM = 2KN : KN = 2 : 1$.

II спосіб – «за допомогою теореми Фалеса без застосування теореми про пропорційні відрізки»

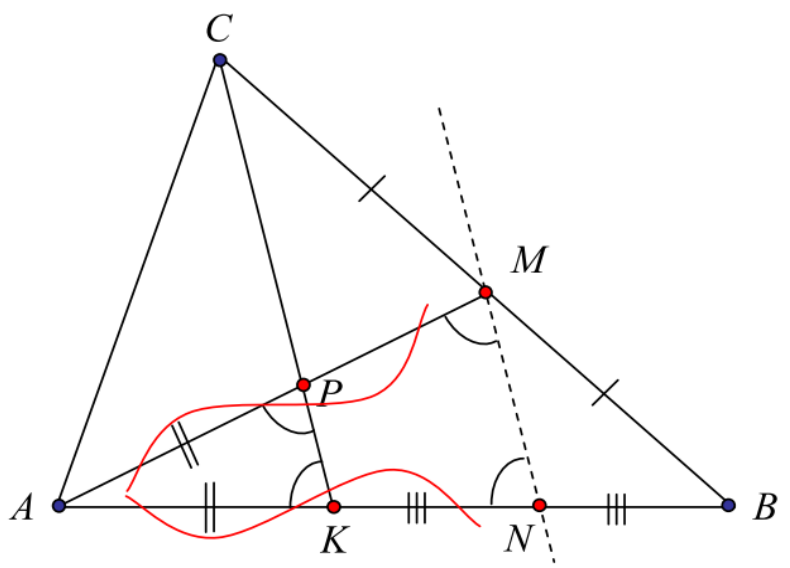


Рис. 1.16.6: до другого способу розв'язання задачі 3

1) Через точку M проведемо пряму паралельно до прямої CK і нехай вона перетинає пряму AB у точці N. Оскільки $CM = MB$, а паралельні прямі CK і MN перетинають сторони кута CBA, то за теоремою Фалеса $KN = NB$. Звідки $KB = 2KN$ (*).

2) За умовою $AP = AK$. І тому $\triangle PAK$ є рівнобедреним з основою PK. Звідки $\angle APK = \angle AKP = \varphi$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника).

3) $\angle AMN = \angle APK = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AM.

4) $\angle ANM = \angle AKP = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AB.

5) Оскільки $\angle AMN = \angle ANM = \varphi$, то за ознакою (рівнобедреного трикутника) AMN є рівнобедреним з основою MN. Звідки $AM = AN$.

6) Оскільки $AM = AN, AP = AK$, то $PM = AM - AP = AN - AK = KN$ (**).

7) З урахуванням (*) та (**), остаточно маємо, що $BK : PM = 2 : 1$.

ІІІ спосіб – «за допомогою теореми Фалеса без застосування теореми про пропорційні відрізки»

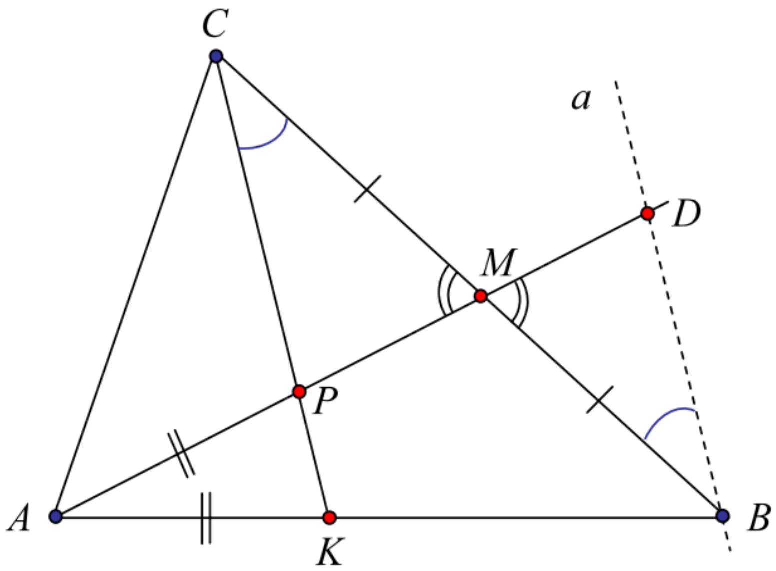


Рис. 1.16.7: до третього способу розв'язання задачі 3

1) Через точку *B* проведемо пряму а паралельно до прямої *CK* і нехай *a* перетинає пряму *AM* у точці *D*.

2) За умовою $AP = AK$. І тому $\triangle PAK$ є рівнобедреним з основою *PK*. Звідки $\angle APK = \angle AKP = \varphi$.

3) $\angle ADB = \angle APK = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих *a* і *PK* та січній *AD*; $\angle ABD = \angle AKP = \varphi$ — як відповідні кути при паралельних прямих *a* і *PK* та січній *AB*.

4) Оскільки $PK \parallel DB,\quad DP \cap BK = A,\quad \angle PDB = \angle KBD = \varphi$, то чотирикутник *KPDB* є рівнобічною трапецією. Звідки $KB = PD$ (***) Розглянемо $\triangle CMP$ і $\triangle BMD$. В них: $CM = MB$ (за умовою);

$\angle CMP = \angle BMD$ (як вертикальні); $\angle MCP = \angle MBD$ (як внутрішні різнозсторонні при паралельних прямих *CK* і *BD* та січній *CB*). І тому (за стороною і прилеглими кутами) $\Delta\ CMP = \Delta\ BMD$. Звідки .

Отже, з урахуванням (***), остаточно маємо, що *BK* : PM = 2 : 1.

Відповідь: 2 : 1 [48].

Висновки до першого розділу

В даному розділі було проаналізовано навчальну програму з математики, розглянуто трикутник та його елементи, доведено основні ознаки та теореми, розглянуто різні підходи до вивчення трикутника. Крім того, були розглянуті задачі та їх розв’язання, які можна використовувати на уроці при вивченні трикутників.

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. Дана фігура вивчається учнями як в початкових класах, так і в середніх. У 5 та 6 класах зміст геометричного матеріалу передбачає розгляд основних планіметричних та стереометричних фігур. Учні вчаться вимірювати градусну міру кута, знаходять площу та об’єм деяких фігур, будують геометричні фігури за допомогою лінійки, косинця, циркуля та транспортира.

Вже в 7 класі, на початку курсу геометрії, детально вивчається трикутник як одна з основних фігур курсу планіметрії, властивості якої часто використовуються при вивченні многокутників та інших плоских фігур. Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності відрізків прямих є основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії. У 8 класі вивчається та доводиться теорема Піфагора і розв’язування прямокутних трикутників, для цього вводяться поняття синуса, косинуса та тангенса гострого кута прямокутного трикутника, а в 9 класі вивчаються ознаки подібності трикутників, розв’язування трикутників, формула площі трикутника.

Таким чином, в даному розділі були розглянуті основні, загальні моменти вивчення трикутників у шкільному курсі геометрії.

РОЗДІЛ 2. КОМПЕТЕНТНІСТНО-ОРІЄНТОВАНА МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

2.1 Означення поняття «ключова компетентність». Вимоги оновленої програми з математики для 5-9 класів щодо формування ключових компетентностей

Основою побудови змісту та організації процесу навчання математики є компетентнісний підхід, під час якого кінцевим результатом навчального процесу є формування певних компетентності, які спонукають учнів застосовувати свої знання в навчанні та реальних життєвих ситуаціях, брати активну участь в житті суспільства та відповідати за свої дії.

Компетентнісний підхід — це націленість навчально-виховного процесу на досягнення результатів, якими є ієрархічно підпорядковані ключова, загальнопредметна та предметна (галузева) компетентності. Компетентнісний підхід сприяє формуванню ключових і предметних компетентностей.

Ключова компетентність — спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистості, що сприяє до ефективних дій у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів [44].

До ключових компетентностей належать:

1. Спілкування державною (і рідною – у разі відмінності) мовами.

Компонентами даної компетентності є уміння: розпізнавати проблему та ставити запитання; міркувати та робити висновки на основі інформації, що подається у різних формах (на графіках, у діаграмах та таблицях); грамотно та чітко висловлюватися рідною мовою; пояснювати, розуміти та перетворювати тексти задач з математики (письмово і усно); поповнювати свій словниковий запас; коректно та доречно вживати математичну термінологію в мовленні;

зрозуміло, чітко та лаконічно формулювати думку, аргументувати її та доводити правильність тверджень [45].

2. Спілкування іноземними мовами.

Компонентами даної компетентності є уміння: спілкуватися іноземною мовою, використовуючи математичні поняття та числівники; формулювати проблему та ставити запитання; користуватися математичними термінами у повсякденному житті [45].

3. Математична компетентність.

Компонентами даної компетентності є уміння: встановлювати відповідність між реальними об’єктами навколишньої дійсності (культурними, природними, технічними); оперувати числовою інформацією, геометричними об’єктами в просторі та на площині; будувати та досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, явищ і процесів, оцінювати та інтерпретувати результати; розв’язувати задачі практичного змісту; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях [45].

4. Основні компетентності у природничих науках і технологіях.

Компонентами даної компетентності є уміння: досліджувати та будувати математичні моделі природних процесів та явищ; розпізнавати проблеми, які виникають у довкіллі та які можна розв’язати засобами математики [45].

5. Інформаційно-цифрова компетентність.

Компонентами даної компетентності є уміння: діяти за алгоритмом та складати алгоритми; структурувати дані; використовувати різні знакові системи; визначати достатність даних для розв’язання задачі; знаходити інформацію та оцінювати її достовірність; доводити істинність тверджень [45].

6. Уміння вчитися впродовж життя.

Компонентами даної компетентності є уміння: організовувати та планувати свою навчальну діяльність; визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; моделювати власну освітню траєкторію, контролювати, аналізувати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість [45].

7. Ініціативність і підприємливість.

Компонентами даної компетентності є уміння: генерувати нові ідеї, вирішувати життєві проблеми, аналізувати, прогрозувати, ухвалювати оптимальні рішення; аргументувати та захищати свою позицію, дискутувати; використовувати критерії раціональності, практичності, ефективності та точності, з метою вибору найкращого рішення; використовувати різні стратегії, шукаючи оптимальних способів розв’язання життєвого завдання [45].

8. Соціальна і громадянська компетентності.

Компонентами даної компетентності є уміння: висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі; аргументувати та відстоювати свою позицію; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, користуючись математичними методами; ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях; орієнтуватися в широкому колі послуг і товарів на основі чітких критеріїв, робити споживчий вибір, спираючись, зокрема, і на математичні дані [45].

9. Обізнаність і самовираження у сфері культури.

Компонентами даної компетентності є уміння: здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспективи, створення об’ємно-просторових композицій; унаочнювати математичні моделі, зображати фігури, графіки, рисунки, схеми, діаграми [45].

10. Екологічна грамотність і здорове життя.

Компонентами даної компетентності є уміння: аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; враховувати правові, етичні, екологічні і соціальні наслідки рішень; розпізнавати, як інтерпретації результатів вирішення проблем можуть бути використані для маніпулювання [45].

2.2 Засоби формування ключових компетентностей

Компетентнісний підхід сприяє формуванню як ключових так і предметних компетентностей. Найефективнішими засобами, які сприяють формуванню ключових компетентностей є сучасні педагогічні інноваційні технології. Найбільш сприятливим середовищем для реалізації цього завдання є навчально-виховний процес, насамперед уроки математики [60].

Для формування математичних компетентностей необхідно: послідовно міркувати та презентувати свої ідеї, творчо мислити; вміти працювати в команді (встановлювати пріоритети, планувати результати і нести відповідальність за їх реалізацію); доцільно застосовувати знання в реальному житті [63].

Сучасні педагогічні інноваційні технології дають змогу максимально підвищити ефективність навчально-виховного процесу, створюють такі умови, коли всі учні залучаються до активної та творчої навчальної діяльності, процесу самонавчання та самореалізації, вчаться спілкуватися, співпрацювати, критично мислити, відстоювати свою позицію. Результатом навчання на основі сучасних інноваційних технологій є формування висококомпетентнісної особистості, яка: володіє всіма життєвими компетентностями; встановлює тісні зв'язки із суспільством, тобто особистість яка зможе успішно само реалізуватися в суспільстві як свідомий громадянин, що здатний успішно функціонувати в сучасному євро інтегрованому суспільстві [75].

2.3 Формування ключових компетентностей при вивченні трикутників

На уроках математики при вивченні трикутників, вчитель має змогу керуватися всіма видами ключових компетентностей, що зазначені в державному стандарті з математики. Адже вивчення геометрії основної школи базується на вивченні трикутників, його видів, елементів, основних ознак та властивостей. Однією з головних виховних завдань навчання математиці є виховання творчої діяльності учнів. Завдання вчителя полягає у всебічному зміцненні зв'язку навчання з життям, з практикою. Цей зв'язок здійснюється через зміст завдань, представлених в підручниках, і тих, які складає вчитель і учні. Через вирішення завдань учні знайомляться з новими професіями, з важливими в пізнавальному і виховному відношенні фактами [74].

При вивченні таких тем, завдання вчителя полягає в тому, щоб поглибити та розширити знання про трикутник; формувати уміння застосовувати знання на практиці при розв’язанні задач; розвивати вміння презентувати результати своєї роботи; вчитися працювати в групах. Результатами таких завдань є поглиблення та розширення знань учнів про практичне застосування теоретичного матеріалу; формування компетентностей, які дозволяють успішно адаптуватися в соціумі, знайти свою справу [63].

При формуванні соціальної компетентності, вчитель:

- обирає такі завдання, які передбачають в учнів самостійний пошук розв’язку;
- надає учням можливість обирати варіант завдання та шляхи розв’язання задач;
- передбачає розв’язування задач різними способами та визначення раціонального шляху розв'язування;
- залучає дітей до роботи в групах,враховуючи індивідуальні можливості школярів;
- надає учням можливість проявляти ініціативу [65].

При формуванні комунікативної компетентності, вчитель:

- стимулює вміння учнів висловлювати власну точку зору;
- сприяє удосконаленню вмінь вести навчальний діалог;
- удосконалює вміння дітей формулювати цілі власної діяльності та робити висновки за її результатами;
- застосовує взаємоопитування та взаємоперевірку з можливим подальшим коментуванням;

- сприяє спілкуванню учнів з ровесниками та дорослими з метою підвищення рівня навчальних досягнень та ерудиції учнів [61].

При формуванні інформаційної компетентності, вчитель:

- стимулює учнів до використання додаткової інформації;
- забезпечує активну співпрацю з кабінетом інформатики щодо використання навчальних програм з математики;
- використовує малюнки, таблиці, схеми, як джерела інформації;
- створює інформаційні сторінки у класних куточках [53].

При формуванні компетентності самоосвіти і саморозвитку, вчитель:

- залучає учнів до творчих виставок;
- консультує учнів з питань самоосвіти;
- організовує інтелектуальні конкурси, ігри, предметні тижні, які передбачають самостійне опанування учнями певних питань та їх самоосвітню діяльність;
- використовує навчальні програм з метою самоосвіти учнів [35].

Проаналізувавши ключові компетентності ми отримали наступні програмні результати. Результатом пізнавально-навчальної діяльності учнів сьомого класу є вміння учнів:

- наводити приклади геометричних фігур;
- пояснити що таке точка, пряма, промінь, відрізок, кут, довжина відрізка, градусна міра кута, бісектриса кута, довжина відрізка;
- вимірювати довжину відрізка, градусну міру кута;
- зображати та знаходити на малюнках геометричні фігури;
- формулювати означення зовнішнього кута трикутника, різних видів трикутників, бісектриси, медіани та висоти трикутника;
- формулювати властивості рівнобедреного і прямокутного трикутника;
- формулювати ознаки рівності трикутників, рівнобедреного трикутника;
- класифікувати трикутники за сторонами і закутами;

- зображати та знаходити на малюнках рівносторонні, рівнобедрені, прямокутні трикутники та їх елементи;
- доводити властивості й ознаки рівнобедреного трикутника, властивість кутів трикутника, властивість зовнішнього кута трикутника;
- застосовувати вивченні означення і властивості до розв’язування задач практичного змісту [44].

Результатом пізнавально-навчальної діяльності учнів восьмого класу є вміння учнів:

- наводити приклади подібних трикутників;
- пояснювати зв’язок між рівністю і подібністю геометричних фігур;
- формулювати теорему про медіани трикутника та про властивість бісектриси трикутника;
- формулювати означення подібних трикутників, ознаки подібності трикутників та узагальнену теорему Фалеса;
- застосовувати вивченні означення та властивості до розв’язування задач, насамперед при знаходженні відстаней на місцевості;
- пояснити що таке похила та її проекція, що означає «розв’язати прямокутний трикутник»;
- формулювати властивості перпендикуляра та похилої, теорему Піфагора, співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника;
- формулювати означення синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника та обчислювати їх значення;
- розв’язувати прямокутні трикутники та застосовувати вивченні означення та властивості до розв’язування задач, насамперед практичного змісту [44].

Результатом пізнавально-навчальної діяльності учнів дев’ятого класу є вміння учнів:

- пояснити, що означає «розв’язати трикутник»;

- формулювати теорему синусів, косинусів;
- записувати та пояснювати формули площі трикутника, а саме формулу Герона;
- зображати та знаходити на малюнках елементи трикутника, необхідні для обчислення довжини невідомих елементів;
- обчислювати довжини невідомих сторін та градусні міри невідомих кутів трикутника, площі трикутників;
- застосовувати вивченні формули й властивості до розв’язування задач [44].

2.4 Формування ключових компетентностей при розв’язуванні прикладних задач

Системність прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в орієнтації цілей, змісту та засобів навчання математики у напрямку:

- здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків математики з практикою;
- набуття учнями у процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними у повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності [16].

Прикладні задачі – один із дієвих і ефективних засобів для формування в учнів вмінь і навичок застосовувати набуті в шкільному курсі математики знання і вміння в нестандартних ситуаціях. Прикладна задача повинна відповідати таким вимогам:

- питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється у житті;
- розв’язок задачі демонструє практичне застосування математичних ідей у різних галузях;
- зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес;

• дані та шукані величини задачі мають бути реальними, узятими з життя [11].

Радикальним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є метод математичного моделювання. Як же математики, оперуючи абстрактними поняттями, можуть так ефективно вивчати глибинні закономірності навколишньої дійсності? Математики справді не вивчають живі організми, тверді тіла, рідини, гази, елементарні частинки, планети або галактики. Вони створюють математичні моделі досліджуваних об'єктів і відношень між ними (геометрія Евкліда, яку вивчають в школі, є математичною моделлю навколишнього тривимірного простору) [50].

Реальним об'єктам простору зіставляються математичні абстракції, які відображають певні властивості реальних фізичних об'єктів, — точки, відрізки, прямі й інші плоскі та просторові геометричні фігури. Математична модель — це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, формул, рівнянь тощо, що є записами законів природи, які керують досліджуваним об'єктом чи явищем. Процесу розв'язування будь-якої прикладної задачі властиві всі етапи математичного моделювання:

• переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла на мову математики (побудова математичної моделі);

• розв'язування отриманої математичної задачі (дослідження математичної моделі);

• записування математичного розв'язку з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла (інтерпретація розв’язків).

Розглянемо детальніше приклади розв’язування задач.

Для формування математичної компетентності, соціальної і громадянської компетентності та ініціативності і підприємливості можна розглянути наступні задачі [74].

З а д а ч а 1. В деякий момент з пароплава *P* відмітили азимут пунктів *A* і *B* на суші. Азимут пункту *A* виявився 31°, пункту *B* – 85°. Напрям *AB* по карті –

130°, відстань *AB*=650 м. Знайти відстань від пароплава *P* до пункту *A* в момент вимірювання кутів [78].

Зауваження. Азимут точки *A* відносно точки *P* – це кут, вершина якого знаходиться в точці *P*, одна сторона якого *PN* напрямлена на північ, друга проходить через точку *A* (за годинниковою стрілкою) (рис. 2.4.1).

Р о з в' я з н н я. З умови маємо, $AB = 650$ м, $\angle NPA = 31^\circ$, $\angle NPB = \angle OPB = 85^\circ$, $\angle APB = \angle OPB - \angle OPA = 54^\circ$, $\angle NOB = 130^\circ$. Знайдемо PA.

Для $\triangle OPB$: $\angle NOB = 130^\circ$ - зовнішній, тому $\angle POB = 50^\circ$.

Звідси, $\angle PBO = 180^\circ - (\angle POB + \angle OPB)$. Отже $\angle PBO = 45^\circ$.

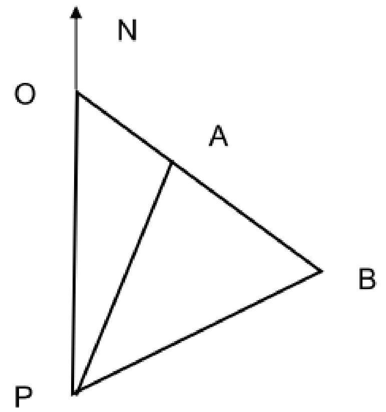


Рис. 2.4.1

Із $\triangle APB$:

($AB = 650$ м, $\angle APB = 54^\circ, \angle PBA = 45^\circ$) за теоремою синусів

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AP}{\sin \angle ABP}.$$

Звідси $AP = \dfrac{AB \cdot \sin \angle ABP}{\sin \angle APB}$, $AP = \dfrac{650 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 54^\circ} \approx 570$ м.

В і д п о в і д ь: $AP = 570$ м.

З а д а ч а 2. З пароплава в деякий момент видно маяк під кутом в 28° за курсом корабля, а коли пароплав пройшов по курсу 7,8 км, маяк стало видно під кутом в 130° вліво від курсу. Знайти відстань пароплава від маяка в момент, коли був виміряний другий кут (рис. 2.4.2) [69].

Р о з в' я з н н я. За умовою $AB = 7{,}8$ км, $\angle A = 28^\circ, \angle B = 130^\circ$.

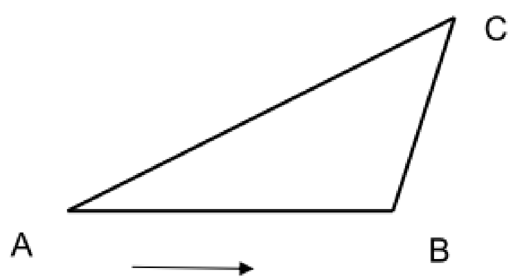


Рис. 2.4.2

Тоді маємо, що $\angle C = 22°$. Знайдемо BC .

За теоремою синусів

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A}.$$

Звідси $BC = \dfrac{AB \cdot \sin \angle A}{\sin \angle C}$, $BC = \dfrac{7{,}8 \cdot \sin 28°}{\sin 22°} \approx 9{,}8$ км.

В і д п о в і д ь: $BC = 9{,}8$ км.

Для формування математичної компетентності, соціальної і громадянської компетентності та основної компетентності у природничих науках можна розглянути наступні задачі.

З а д а ч а 3. На рисунку дана схема підйомного крану, у якого частина стійки $BC = 3{,}5$ м, плече $BD = 7{,}5$ м, кут між плечем і стійкою дорівнює 138°. Знайдіть довжину тросу CD і кут BCD (рис. 2.4.3) [46].

Р о з в’ я з н я. Кут між плечем і стійкою AC дорівнює $\angle ABD = 138°$, звідси $\angle CBD = 42°$.

За теоремою косинусів

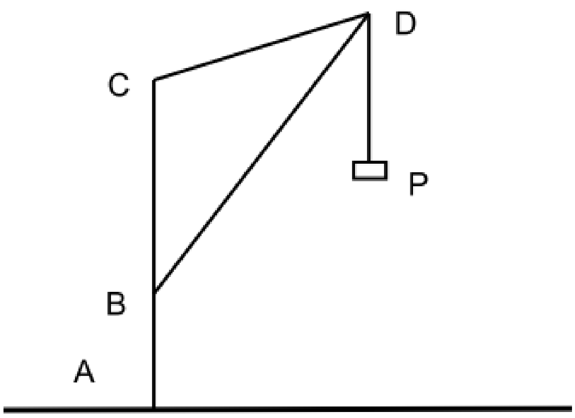


Рис. 2.4.3

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos \angle CBD.$$

Звідси, $CD^2 = 3{,}5^2 + 7{,}5^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 42° = 33{,}3775.$

$CD \approx 5{,}8$ м.

З наслідку теореми косинусів маємо $\cos \angle BCD = \dfrac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD}$,

$$\cos \angle BCD = \frac{3{,}5^2 + 5{,}8^2 - 7{,}5^2}{2 \cdot 3{,}5 \cdot 5{,}8} \approx -0{,}261.$$

Тому $\angle BcD$ тупий, $\angle BcD = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

В і д п о в і д ь: $CD \approx 5{,}8$ м, $\angle BcD = 105^\circ$.

З а д а ч а 4. Літак летить горизонтально на висоті 8,5 км над рівнем моря зі швидкістю 720 км/год. Пілот помітив, що кут зниження на вершину гори дорівнює 18°. Через 60 с він відмітив, що кут зниження став 81°. Яка висота гори над рівнем моря (рис. 2.4.4) [48]?

Р о з в’ я з н я. Нехай літак летить із точки *A* зі швидкістю 720 км/год і за 60 с пролітає відстань $AB = 720\left(\frac{км}{год}\right)\cdot\frac{1}{60}\,(год) = 12$ км.

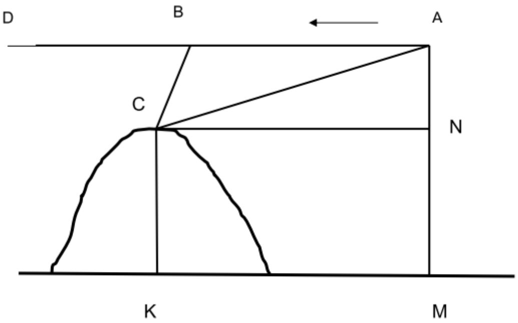


Рис. 2.4.4

Маємо $AB \parallel KM$, проведемо $CN \parallel KM$.

$\angle BAC = 18^\circ, \angle DBC = 81^\circ, AM = 8{,}5$ км.

В $\triangle ABc$ $\angle ABC = 99^\circ$,

$\angle BCA = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC)$,

$\angle BCA = 63^\circ$.

За теоремою синусів $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$.

Звідси

$$AC = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C}, AC = \frac{12 \cdot \sin 81^\circ}{\sin 61^\circ} \approx 13{,}3 \text{ (км)}.$$

Із $\angle CAN = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

$AN = AC \cdot \cos \angle CAN, AN = 13{,}3 \cdot \cos 72^\circ = 13{,}3 \cdot 0{,}309 \approx 4{,}1$ (км).

Тоді $NM = AM - AN, NM = 8{,}5 - 4{,}1 = 4{,}4$ (км).

В і д п о в і д ь: висота гори дорівнює 4,4 км.

З а д а ч а 5. Футбольний м’яч знаходиться в точці А футбольного поля на відстані 23 м і 24 м від штанг відповідно. Футболіст направив м’яч у ворота. Знайдіть кут влучення м’яча у ворота, якщо ширина воріт 7 м [47].

Складемо математичну модель за умовою задачі.

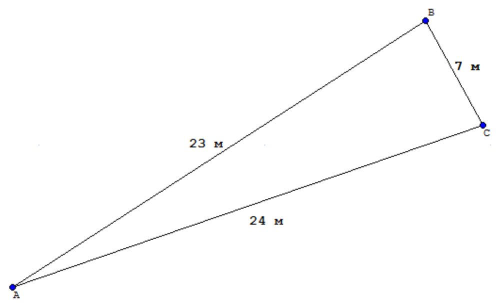


Рис. 2.4.5

Дано: $\Delta ABC, AB = 23$ м, $AC = 24$ м, $BC = 7$ м (див. рис. 2.4.5).

Знайти: $\angle A$.

Р о з в ’ я з а н н я:

Застосуємо теорему косинусів та знайдемо косинус кута A :

За теоремою косинусів маємо, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Звідси:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23} \approx 0{,}956.$$

Маємо: $\angle A = 17^\circ$.

В і д п о в і д ь: $\angle A = 17^\circ$.

З а д а ч а 6. Для знаходження відстані від точки *A* до дзвіниці *B*, яка розташована на другому березі річки (рис. 2.4.6), за допомогою віх, рулетки та приладу для вимірювання кутів (теодоліту) позначили на місцевості точку *C* таку, що $\angle BAC = 42^\circ, \angle ACB = 64^\circ$, $AC = 20$ м. Як знайти відстань від точки *A* до дзвіниці B? Знайдіть цю відстань [47].

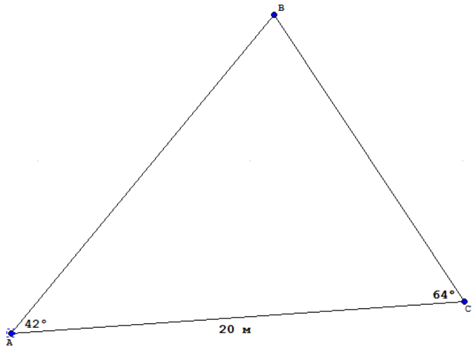


Рис. 2.4.6

Дано: $\Delta ABC, AC = 20$ м, $\angle BAC = 42^\circ, \angle ACB = 64^\circ$ (див. рис. 2.4.6).

Знайти: AB .

Р о з в ’ я з а н н я:

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \to \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

Знайдемо $\angle ABC$:

$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 74^\circ$;

Маємо:

$$\frac{20}{\sin 74^\circ} = \frac{AB}{\sin 64^\circ};$$

$$AB = \frac{20 \cdot \sin 64^\circ}{\sin 74^\circ} = \frac{20 \cdot 0{,}899}{0{,}961} = 18{,}7 \text{ (м)}.$$

В і д п о в і д ь:

З а д а ч а 7. Стіна заввишки 3,5 м відкидає тінь завдовжки 5 м. Олександр Семенович, зріст якого 1 м 75 см, стоїть на відстані 10 м від краю тіні. Яку найменшу кількість кроків він має зробити, щоб повністю потрапити в тінь, якщо довжина його кроку 0,5 м [48]?

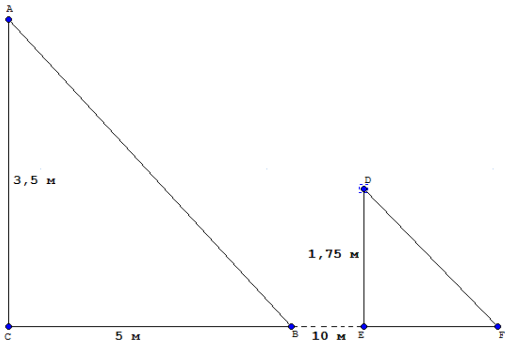


Рис. 2.4.7

Щоб розв'язати дану задачу, побудуємо рисунок (рис. 2.4.7).

Запишемо що нам дано: $AC = 3{,}5$ м, $CB = 5$ м, $DE = 1{,}75$ м, $BE = 10$ м.

Р о з в ' я з а н н я:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DE}{EF} \rightarrow \frac{3{,}5}{5} = \frac{1{,}75}{EF}.$$

Маємо:

$$EF = \frac{5 \cdot 1{,}75}{3{,}5} = 2{,}5 \text{ м}.$$

Щоб повністю потрапити в тінь, Олександр Семенович повинен переміститися в бік стіни на BF:

$$BF = BE + EF = 10 + 2{,}5 = 12{,}5 \text{ (м)}.$$

Кількість кроків:

$$BF : 0{,}5 = 12{,}5 : 0{,}5 = 25.$$

В і д п о в і д ь: 25 кроків.

2.5 Формування інформаційної компетентності при розв'язуванні задач із використанням ППЗ GRAN–2D

Програма GRAN–2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить її назва (GRaphic Analysis 2–Dimension). Вона дає змогу учням оперувати моделями просторових об'єктів, що вивчаються в курсі стереометрії, а також забезпечує засобами аналізу та ефективного отримання відповідних числових характеристик різних об’єктів у тривимірному просторі. GRAN–2D може бути віднесений як до програм–розв’язувачів, так і до моделюючих програм, але перш за все дана програма призначена для розв’язування широкого класу задач шляхом моделювання об’єктів, що фігурують в умові задачі [23].

Програма досить проста у користуванні та не чітких вмінь роботи з комп’ютером, основ обчислювальної техніки чи програмування, а лише певних знань в сфері роботи з персональним комп'ютером, що дозволяє з успіхом використовувати GRAN–2D в школі [59].

Використання програми GRAN–2D дає змогу розв’язувати задачі на знаходження елементів трикутника і площ, побудову трикутників та дозволяє учням працювати з динамічними геометричними моделями.

Наприклад, вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні повинні виконувати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Як показує педагогічна практика навіть старшокласники припускаються помилок, проводячи висоту тупокутного трикутника. Саме тому при формуванні поняття висоти трикутника доцільно використовувати динамічні геометричні моделі, реалізацію яких забезпечує педагогічний програмний засіб GRAN–2D [16].

За допомогою відповідних послуг програмного засобу учні будують довільний трикутник ABC і його висоти AK, BH, CM (рис. 2.5.1). Оскільки дана модель динамічна, то, видозмінюючи трикутник (гострокутний, тупокутний, прямокутний), учні можуть спостерігати, як змінюються положення висот і відповідно сформулювати правильні висновки щодо розміщення основ висот.

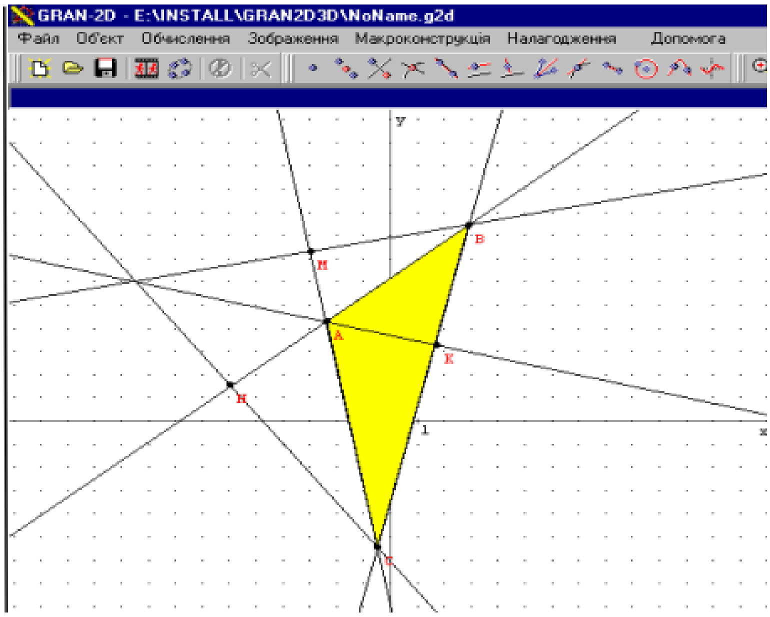


Рис. 2.5.1

В процесі формування поняття висота трикутника учням необхідно також підкреслити суттєві ознаки і протиставити їм не суттєві. Суттєві: 1) це є перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника; 2) вид трикутника; Несуттєві: 1) розташування вершин трикутника; 2) розміщення трикутника на площині.

Робота з динамічними моделями дозволяє попередити формування хибного враження, що основа висоти може лежати лише на стороні трикутника, а не на її продовженні. Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії дає змогу вчителеві інтенсифікувати спілкування з учнями та учнів між собою; шляхом моделювання ефективніше підвести учнів до розуміння змісту понять; більше уваги приділити виявленню закономірностей досліджуваних процесів і явищ; підвищити рівень самостійності учнів у здобуванні нових знань [59].

Розглянемо більш детально процес розв'язування задач на прикладах.

З а д а ч а 1. Перевірити за допомогою графічних побудов в програмі GRAN–2D, чи дійсно у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні [17].

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку побудуємо рівнобедрений трикутник, використовуючи декартові координати (для зручності). Для цього потрібно позначити точки, та провести через них прямі (рис. 2.5.2).

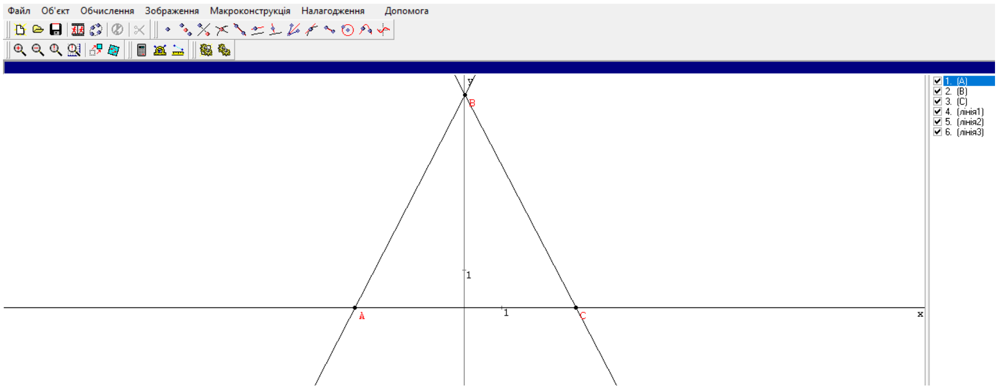


Рис. 2.5.2

Далі проводимо бісектриси кутів при основі (рис. 2.5.3).

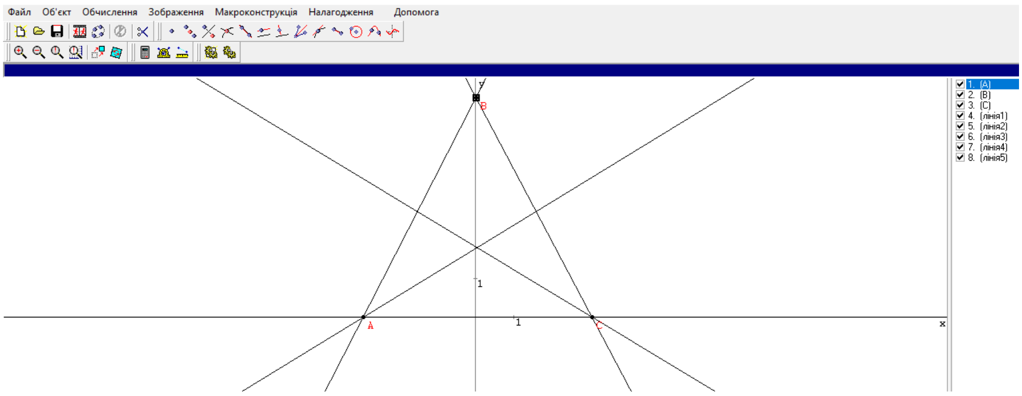


Рис. 2.5.3

На бічних сторонах трикутника в перетині з бісектрисами ставимо точки та вимірюємо довжини бісектрис (рис. 2.5.4).

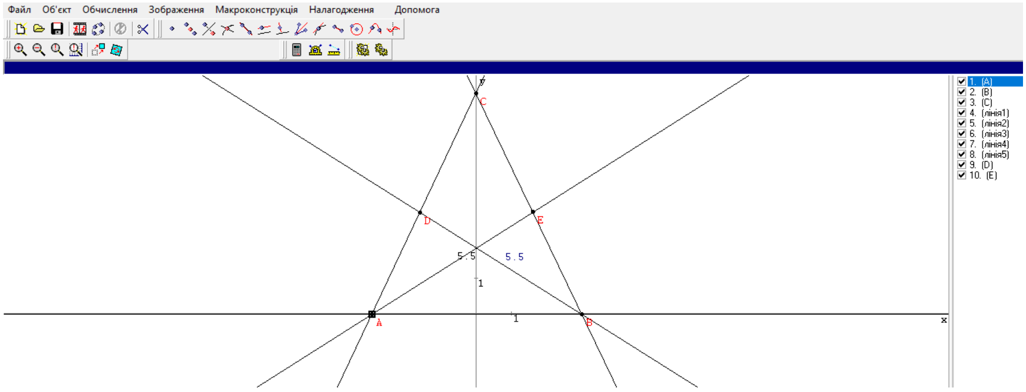


Рис. 2.5.4

Як бачимо, бісектриси трикутника рівні, а отже, ми дійсно переконалися, що у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні.

З а д а ч а 2. За допомогою програми GRAN–2D знайти радіуси описаного та вписаного кіл довільного трикутника, при цьому маючи лише зображення самого трикутника [20].

Р о з в ’ я з а н н я. Щоб розв’язати дану задачу будуємо трикутник та вимірюємо його сторони (рис. 2.5.5).

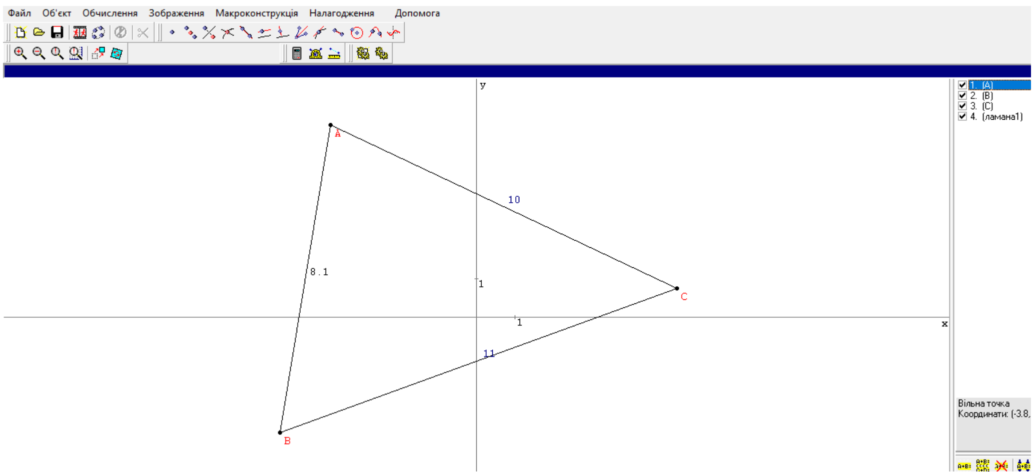


Рис. 2.5.5

Для того, щоб знайти площу даного трикутника необхідно провести висоту та виміряти її довжину (рис. 2.5.6).

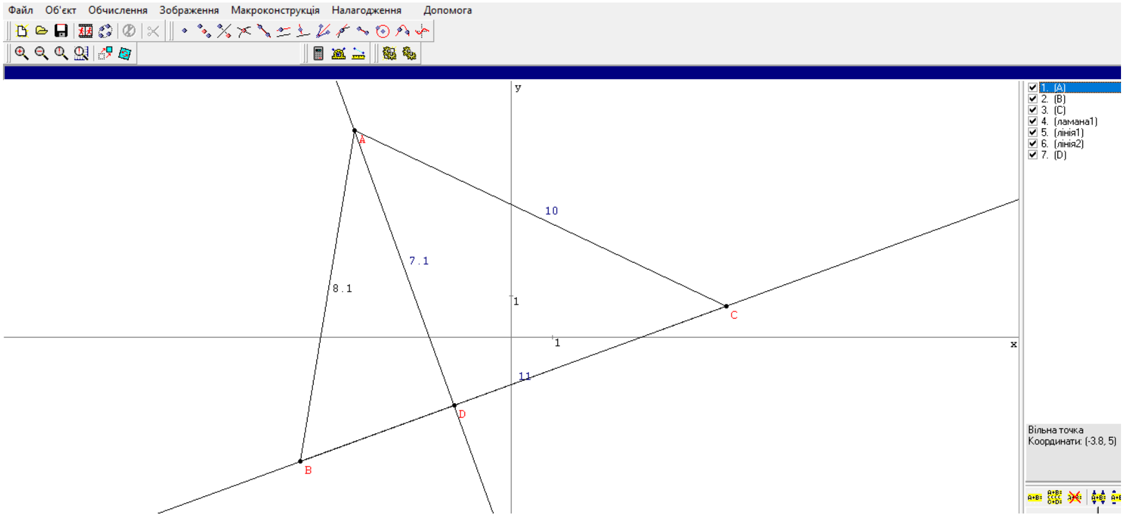


Рис. 2.5.6

Знаходимо площу трикутника. В нашому випадку:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 7{,}1 = 39{,}05.$$

Далі знаходимо радіуси вписаного та описаних кіл:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{8{,}1 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 39{,}05} = \frac{891}{156{,}2} \approx 5{,}7.$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{AB+BC+AC} = \frac{2 \cdot 39{,}05}{8{,}1+11+10} = \frac{78{,}1}{29{,}1} \approx 2{,}7.$$

З а д а ч а 2. Побудувати трикутник і описати навколо нього коло. Виміряти радіус і експериментально перевірити чи справедлива формула $R = \frac{abc}{4S}$ [17].

Р о з в ' я з а н н я. Будуємо довільний трикутник. Ми вже знаємо, що центр описаного кола знаходиться на перетині серединних перпендикулярів. Нам достатньо побудувати лише два серединних перпендикуляри (рис. 2.5.7).

Будуємо коло, та проводимо радіус. Знаходимо довжини сторін трикутника, а також радіус даного кола (рис. 2.5.8).

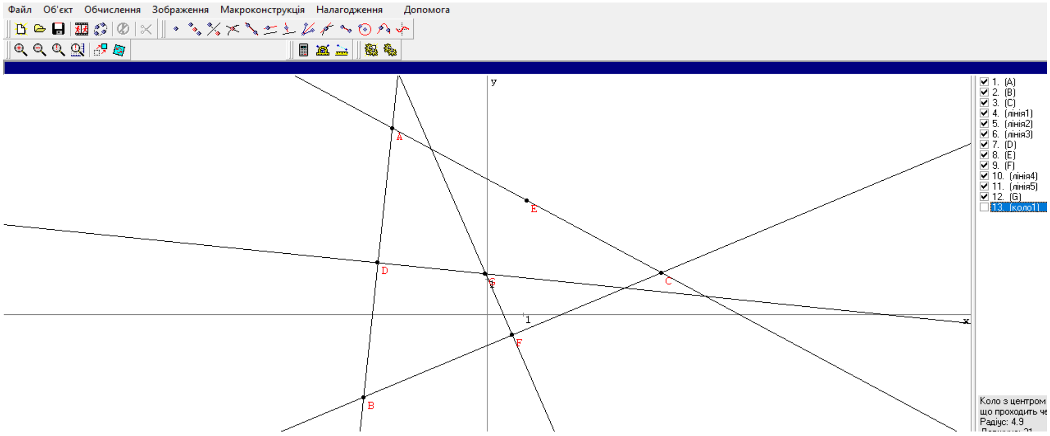


Рис. 2.5.7

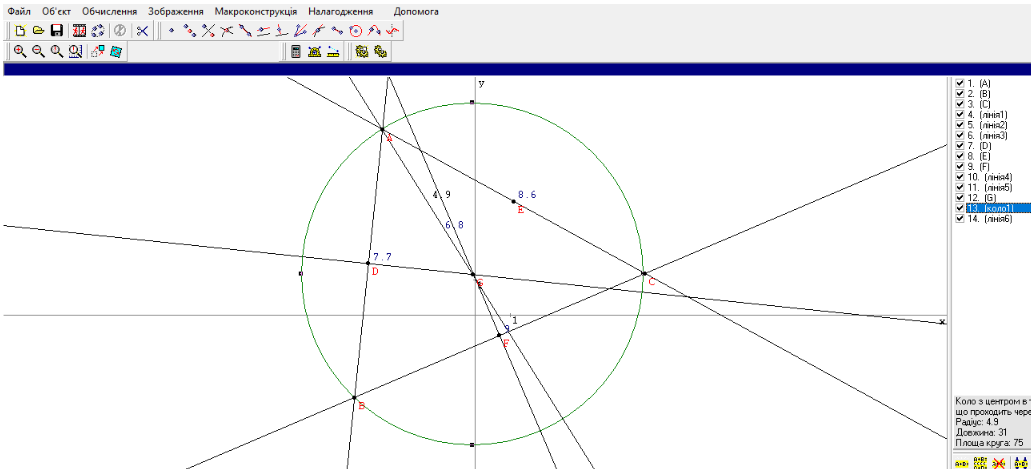


Рис. 2.5.8

Для того, щоб знайти довжину радіуса за формулою $R = \frac{abc}{4S}$, знайдемо площу трикутника:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6{,}8 = 30{,}6.$$

Тоді:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{7{,}7 \cdot 9 \cdot 8{,}6}{4 \cdot 30{,}6} = \frac{595{,}98}{122{,}4} \approx 4{,}9.$$

Як бачимо, експериментально радіуси рівні.

Інші задачі з покроковим розв’язанням див. додаток А.

Висновки до другого розділу

Отже, ключова компетентність – спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистості, що сприяє до ефективних дій у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів.

Формуються наступні ключові компетентності:

1) Спілкування державною (і рідною – у разі відмінності) мовами;
2) спілкування іноземними мовами;
3) математична компетентність;
4) основні компетентності у природничих науках і технологіях;
5) інформаційно-цифрова компетентність;
6) уміння вчитися впродовж життя;
7) ініціативність і підприємливість;
8) соціальна і громадянська компетентності;
9) обізнаність і самовираження у сфері культури;
10) екологічна грамотність і здорове життя.

В даному розділі розглянуто засоби, якими формуються ключові компетентності при розв’язуванні задач на трикутники. Також запропоновано задачі на формування математичної компетентності, основної компетентності у природничих науках і технологіях, інформаційно-цифрової компетентності, соціальної і громадянської компетентності.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В результаті аналізу нормативно-правових джерел, навчальних програм і планів, методичної літератури для вчителів та діючих шкільних підручників з теми дослідження ми систематизували практичні та теоретичні відомості, що пов'язані з формуванням ключових компетентностей на уроках математики, а саме при вивченні трикутників; сформували основні ключові компетентності та розкрили їх зміст.

Також ми детально розглянули трикутник, як найпростішу геометричну фігуру. Дана фігура займає важливе місце в шкільному курсі математики, оскільки на характерних для трикутника властивостях ґрунтується подальше вивчення геометрії. Саме вивчення геометричних фігур базується на застосуванні різних властивостей трикутників подібно до того, як весь попередній матеріал широко використовується при вивченні трикутників. Таким чином, тема, присвячена вивченню трикутників, займає важливе місце в шкільному курсі геометрії і в загальному розвитку учнів.

Навчальна діяльність повинна не просто дати учням безліч знань, умінь та навичок, а сформувати компетентність як загальну здатність, що базується на досвіді, знаннях, цінностях, здібностях, набутих завдяки навчанню. Компетентнісний підхід до освіти передбачає вміння на основі знань вирішувати проблеми, які виникають у різних життєвих ситуаціях.

Мета роботи вчителя математики полягає в розвитку особистості кожного учня, їх творчого потенціалу та пізнавальної активності через формування в них ключових компетентностей, тобто використання набутих в процесі навчання знань в повсякденному житті.

Учитель математики повинен знайти шлях до особистості учнів через звернення до їх життєвого досвіду, через задачі прикладного змісту, використання історичного матеріалу, що викликає інтерес учнів до предмета, формує в них певні компетентності.

Все це зумовило вибір теми дослідження «Формування ключових компетентностей при вивченні трикутників в курсі математики 5–9 класів».

Метою даної роботи було дослідження теоретичних та методичних основ вивчення трикутників в 5–9 класах та формування ключових компетентностей при розв’язуванні задач. У зв'язку з чим були виконані наступні завдання: було проаналізовано науково-методичну та психолого–педагогічну літературу, розкрито зміст понять «компетентність» та «ключова компетентність», проаналізовано компетентності при вивченні геометрії. Крім того, було визначено місце задач з теми «Трикутники», підібрано задачі на формування ключових компетентностей при вивченні трикутників та подано методику їх розв’язання.

В першому розділі даної роботи було досліджені теоретичні та методичні основи вивчення трикутників. Проаналізувавши діючі шкільні підручники, ми дізналися, що в курсі геометрії в 7 класі ґрунтовно вивчається трикутник як одна з основних фігур курсу планіметрії, властивості якого часто використовуються при вивченні многокутників та інших плоских фігур. Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності відрізків прямих є основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії (у 8 класі вивчається теорема Піфагора і розв’язування прямокутних трикутників, в 9 класі вивчаються ознаки подібності трикутників, розв’язування трикутників, формула площі трикутника).

В другому розділі ми проаналізували компетентісно-орієнтовану методику вивчення трикутників в середній школі, ознайомилися із поняттям «компетентність» та «ключова компетентність», з’ясували якими засобами формується ключова компетентність та розглянули формування ключової компетентності засобами прикладного програмного забезпечення.

Саме використання ІТ на уроці здатне перетворити навчальний процес, зробивши його більш ефективним і привабливим для учнів. Навчання з використанням інформаційних технологій стає для дитини творчим пошуком, від якого можна отримати задоволення і завдяки якому можна самоствердитися.

Комп'ютерне навчання дає змогу активізувати пізнавальну діяльність учнів, диференціювати завдання на рівні індивідуальних можливостей, оволодіти оптимальним темпом навчання, підвищувати оперативність, об'єктивність контролю та оцінки результатів навчання, розвивати навички самоосвіти, формувати інформаційно–комунікаційну компетентність.

Результатами впровадження інформаційних технологій у навчальний процес є:

- Розширення можливостей вчителя підготувати та провести урок на професійному рівні.
- Активізація пізнавальної діяльності учнів.
- Підвищення мотивації учнів до навчання і компетентного вибору професійної діяльності.
- Розвиток навичок оціночної діяльності.
- Оволодіння учнями ключовими компетентностями.
- Сформованість науково–дослідницьких навичок.
- Активна участь учнів та учителів в проектній діяльності та творчих конкурсах.

Використання сучасних освітніх технологій відкриває нові можливості для втілення потреб особистості в розвитку творчого потенціалу та сприяє формуванню ключових компетентностей.

Таким чином, з усього вище написаного можна зробити висновок: в сучасний навчальний процес інтенсивно впроваджуються нові методи навчання, які побудовані на принципі саморозвитку та активності особистості, що і є формуванням ключових компетентностей в учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андреев А. Л. Компетентностная парадигма в образовании : опыт философскометодологического анализа / А. Л. Андреев // Педагогика. – № 4. – 2005. – С. 19–27.

2. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Елементарная геометрия / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк – М.: Просвещение, 1966. – 366 с.

3. Бевз В. Г. Історія математики. – Х.: Видавнича група «Основа», 2006. – 172 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – Київ: Вища школа, 1989. – 367 с.

5. Белешко Д. Т. Практикум по решению геометрических задач. Ч.1. Общие положения. Методы решения геометрических задач: Методические рекомендации для учителей и студентов физико-математических факультетов. Ровно, 1986. – 64 с.

6. Белешко Д. Т. Практикум по решению геометрических задач. Ч.2. Геометрические фигуры. Характеристические и метрические соотношения в них: Методические рекомендации для учителей и студентов физико-математических факультетов. Ровно, 1986. – 54 с.

7. Боровик Г. В. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики./ Методичний посібник для вчителя

8. Бурда М. І. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – Київ: Видавничий дім "Освіта", 2015. – 208 с.

9. Бурда М. І. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – Київ: Оріон, 2016. – 224 с.

10. Боровик В. Н. Гармонія і естетика трикутника. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В. Н. Боровик, І. В. Зайченко, Л. М. Кобко. – Київ: Освіта України, 2007. – 180 с.

11. Вдовиченко Р.П., Тарасова І.В. Шляхи формування життєвої компетентності особистості школяра. – Вип. І. – Миколаїв, 2003. – 56 с.

12. Власенко О. Математична теорема і методика її викладання / О. Власенко. – К. : Рад. шк., 1969.

13. Гончарова-Горянська М. Соціальна компетентність: поняття, зміст, шляхи формування в дослідженнях зарубіжних авторів // Рідна школа. – 2004. - № 7-8 .– С. 71-74.

14. Ерднієв П. М. Розвиток навичок самоконтролю при навчанні математиці / П. М. Ерднієв. - М.: Учпедгиз, 1957. – 72 с.

15. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ "ДІНІТ". – 2004. – 255 с.

16. Заблоцька О. С. Компетентнісний підхід як освітня інновація : порівняльний аналіз / О. С. Заблоцька // Вісник Житомирського державного університету. Випуск 40. – Серія : Педагогічні науки. – 2008. – С. 63–68.

17. Збірник задач для атестації з математики з рішеннями / Ю. Л. Геворкян та ін. – К. : Либідь, 1990. – 328 с.

18. Збірник задач з математики для вступників до вищих навчальних закладів / за ред. М. І. Сканаві. – К. : Арій, 2011. – 608 с.

19. Збірник задач з математики з рішеннями / Ю. Л. Геворкян та ін. – Харків : Прапор, 1999. – 448 с.

20. Збірник конкурсних задач з математики // Посібник для вступників до вузів / Горгеладзе Ш. и др. – К. : Вища школа, 1973. – 324 с.

21. Зимняя, И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования / И. А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2003. – № 5. – С. 34–42.

22. Зимова, І. А. Ключові компетенції - нова парадигма результату сучасної освіти [Електронний ресурс] / І. О. Зимня / / Інтернет-журнал «Ейдос». - [Режим доступу: http://www.eidos.ru/journal/]

23. Іванова, Т. В. Компетентнісний підхід до розробки стандартів для 11-річної школи: аналіз, проблеми, висновки [Текст] / Т. В. Іванова / / Стандарти і моніторинг в освіті. -2004. - № 1.

24. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 240 с.

25. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2015. – 184 с.

26. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 216 с.

27. Істер О. С. Математика 5 кл.: підручник для закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 288 с.

28. Казначей І. В. Діяльнисний підхід та формування ключових компетентностей учнів на уроках математики / Методичний посібник для вчителів / 2013 р.

29. Каверін Н. В. Методи рішення арифметичних задач у середній школі. 5-6 класи / Н. В. Каверін. - М.: Учпедгиз, 1952. - 64 с.

30. Кокора М. М. Генсіцька-Антонюк Н. О. Компетентісний підхід при вивченні трикутників у 9 класі. Наука, освіта, суспільство очима молодих : Матеріали XIII Міжнар. наук.–практ. конф. здобувачів вищої освіти і молодих науковців. – Рівне : РДГУ, 2020. С. 106-107.

31. Компетентністна освіта: від теорії до практики: Збірка статей. – К.: Плеяди, 2005. – 120 с. – (Відкритий урок. Основна школа. Вип. 3-4).

32. Куланин Е. Федин С. 5000 конкурсних задач по математике / Е. Куланин, С. Федин. – М. : АСТ, 1999. – 720 с.

33. Кущнір І. Методи розв’язання задач з геометрії // Книга для вчителя / І. Кушнір. – К. : Абрис, 1994. – 352 с.

34. Кушнир И. Шедевры школьной математики в двух книгах / И. Кушнир. – К. : Астарта, 1995.

35. Маслікова І.В. Моніторингова система освітнього менеджменту. – Х.: Видавнича група «Основа», 2005. – 140 с.

36. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2017. – 240 с.

37. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 208 с.

38. Мерзляк А. Г. Геометрія: навчальний посібник для 7 класу з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2015. – 192 с.

39. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 224 с.

40. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2017. – 304 с.

41. Мерзляк А. Г. Математика 5 кл.: підруч. для закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 272 с.

42. Методика навчання математики [Електронний ресурс] / Режим доступу до ресурсу: http://ukped.com/matematyka/124-.html (дата звернення 05.10.2020) – Назва з екрана.

43. Мій конспект. Алгебра 9 клас. Старова О.О. – Х.: вид. група «Основа», 2017. – 144 с.

44. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів України + опис ключових змін. // Видавничий дім "Освіта". – 2017. – С. 56.

45. Навчальні програми 5-9 класів [Електронний ресурс] / Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (дата звернення 03.10.2020) – Назва з екрана.

46. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики - 2014 / [О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін та ін.]. // навчальний посібник: ДДПУ. Слов’янськ, 2015. – С. 64.

47. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики - 2010 / [О. А. Кадубовський, В. М. Кадубовська, В. С. Сьомкін та ін.]. // навчальний посібник. Слов’янськ, 2015. – С. 80.

48. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2016 / [О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, О. В. Чуйко та ін.]. // навчальний посібник: ДДПУ. Слов’янськ, 2017. – С. 100.

49. Поглиблене вивчення математики // Випускний екзамен / Тадеєв В. та ін. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1997. – 128 с.

50. Пометун О. І. Дискусія українських педагогів навколо питань запровадження компетентнісного підходу в українській освіті // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи. – К.: „К.І.С.”, 2004. – С. 66-72

51. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Науково-методичний посібник. – К.: А. С. К., 2003.

52. Пометун О. І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти // Рідна школа. – 2005. - № 1. – С. 29-31.

53. Пометун О. І. Компетентнісний підхід до оцінювання рівнів досягнень учнів. – К., 2004.

54. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Науково-методичний посібник. – К.: А. С. К., 2003.

55. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. – К. : Вища школа, 1978. – 478 с.

56. Практикум по решению математических задач. Геометрия / В. А. Гусев и др. – М. : Просвещение, 1985. – 223 с.

57. Прасолов В. Задачи по планиметрии / В. Прасолов. – М. : Наука, 1991. – Ч. I. – 240 с.

58. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5–12 класи // Інформаційний збірник Міністерства освіти України. 2005. № 13–14. – 64 с.

59. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. — Х.: Факт, 2005. — 360 с.

60. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти // Математика в школі. — 2005. — № 5.

61. Родигіна І.В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання. Харків: Основа, 2005 – 134 с.

62. Роганін О. М. Математика за програмою основної і старшої школи + профільний рівень / О. М. Роганін, О. І. Каплун. – Харків: Видавничий дім "Весна", 2014. – 432 с. – ("Практичний довідник").

63. Рудь М. Компетентнісний підхід в освіті / М. Рудь // Вісник Львів. ун-ту. – Серія : Педагогіка – 2006. – Вип. 21, ч. 1. – С. 73–82.

64. Сборник задач киевских олимпиад / Вишенський В. та ін. – К. : Висшая школа – 240 с.

65. Селевко Г. Компетентности и их классификация / Г. Селевко // Народное образование. – 2004. – № 4. – С. 138–143.

66. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2006. – 582 с.

67. Тарасенкова Н.А. Математика 5 клас. К. : Видав.дім «Освіта», 2013. 352 с.

68. Тарасенкова Н.А. Математика 6 клас. К. : Видав.дім «Освіта», 2014. 304 с.

69. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики старшокласнику та абітурієнту / О. М. Титаренко. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2008. – 368 с.

70. Титаренко А. М. Форсированный курс школьной математики [Учебное пособие] / А. М. Титаренко. – Харьков : Каравелла. – 1996. – 384 с.

71. Ткаченко О. Кожевнікова М. Формування компетентностей на уроках математики//Математика в школах України. – Х., 2014. – №6. – С.2-3.

72. Толок В. О. Математика для вступників до вузів // Навчальний посібник / В. О. Толок. – Запоріжжя : Просвіта, 2000. – 656 с.

73. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 1999. – 504 с.

74. Фішман, І.С. Ключові компетентності як результат освіти [Електронний ресурс] / І. С. Фішман. - [Режим доступу: http://www.conf.univers.krasu.ru/conf_9/docl_s.html].

75. Хуторской А. В. Ключевые компетенции : технология конструирования / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – № 5. – С. 55–61.

76. Ципкін А. Т. Справочник по методам решения задач по математике / А. Т. Ципкін. – М. : Наука, 1989. – 576 с.

77. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометри // Стереометрия / И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1984. – 160 с.

78. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. – Вінниця : ВДПУ, 1998. – 266 с.

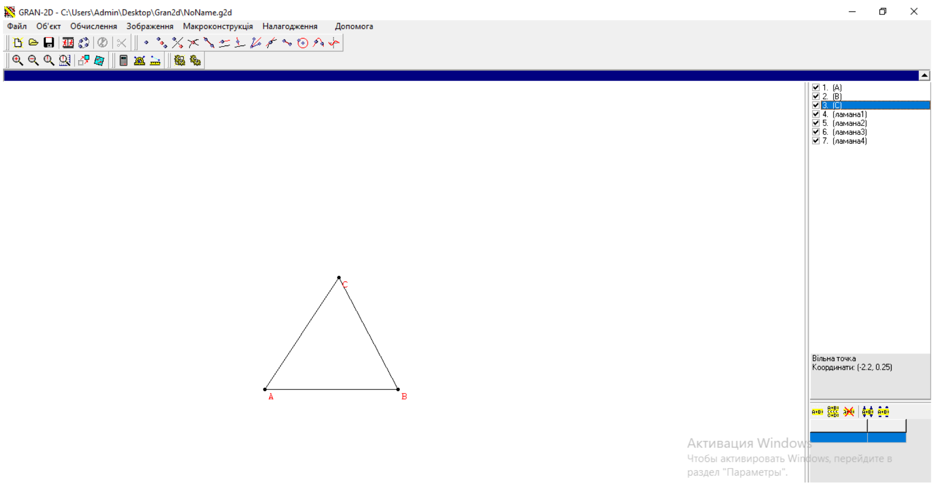
ДОДАТКИ

Додаток А

З а д а ч а 1. Пересвідчитися за допомогою геометричних побудов, що сума кутів трикутника дорівнює 180° [17].

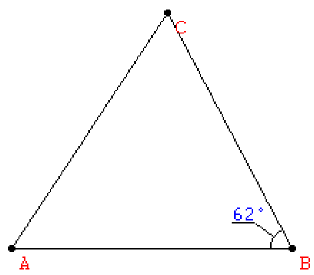
Р о з в ‘ я з а н н я.

1. Змоделюємо довільний трикутник. (Створити три точки, що будуть вершинами трикутника; сполучити вершини ламаною (послуга Об'єкт/ Створити з екрану / Ламана)).



2. Обчислимо кути трикутника. (Звернувшись до послуги Обчислення / Кут за запитом програми необхідно послідовно вказати на зображення точок, наприклад кут 1, кут 2, кут 3, після чого на екрані виводитиметься обчислене значення кутів).

3. Підрахувавши усно або письмово суму кутів, переконуємося, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

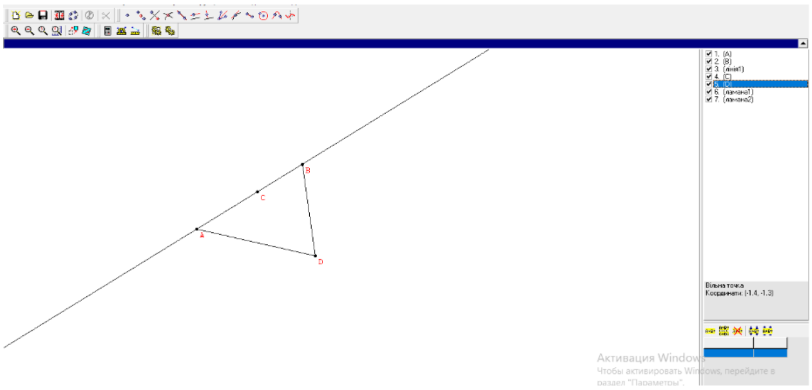


Не важко переконатися, що при зміні положення об'єктів точка 1, точка 2, точка 3 значення кутів може змінитися, але їх сума залишиться сталою (180°).

З а д а ч а 2. Пересвідчитися за допомогою геометричних побудов, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним [33].

Р о з в ‘ я з а н н я.

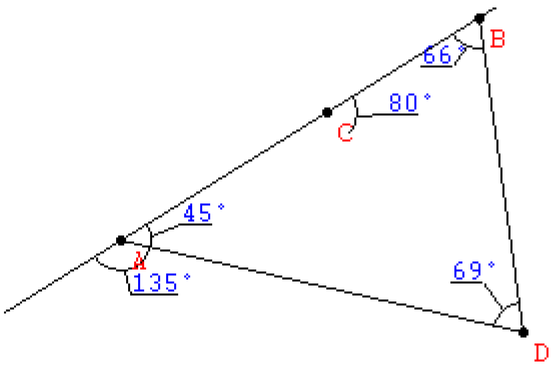
Змоделюємо необхідну модель. (Створити три точки, що лежать на одній прямій. Для цього створюємо промінь (на панелі інструментів вибираємо створення променя і задаємо дві точки *A* і *B*), потім створюємо на цьому промені третю точку *C* (на панелі інструментів вибираємо кнопку створити точку) і прикріплюємо її до об'єкту «промінь 1»; поза променем створюємо четверту точку *D* і сполучаємо її з точкам *A* і *B* (за допомогою послуги Об'єкт / Створити / Пряма)). В результаті отримаємо трикутник *ABD* з продовженою стороною *AB*.



З а д а ч а 3. Обчислити внутрішні кути трикутника і зовнішній кут.

Р о з в ‘ я з а н н я. (обчислення проводимо аналогічно до попереднього завдання) [48].

Додавши кут *BAD* і кут *ADB*, переконаємося, що сума цих кутів дорівнює зовнішньому куту *DAC*.



Також за даним рисунком можна переконатися, що зовнішній кут трикутника більший від будь-якого кута не суміжного з ним.