Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
з теми:

Формування математичних компетентностей при вивченні теми «Геометричні перетворення» засобами інформаційних технологій

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи М-М-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Солтис Андрій Сергійович
Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри вищої математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. У сучасних умовах перед школою стоїть непросте завдання, що полягає в «…створенні умов для розвитку особистості і творчої самореалізації кожного громадянина України, вихованні покоління людей, здатних ефективно працювати і навчатися протягом життя, оберігати й примножувати цінності національної культури та громадянського суспільства, розвивати і зміцнювати суверенну, незалежну, демократичну, соціальну та правову державу як невід'ємну складову європейської та світової спільноти» [21]. Таке завдання є надзвичайно складним для вчителя, так як вимоги до сучасного життя трансформуються швидше, ніж учень встигає завершити шкільне навчання. Тому недостатньо дати учневі базовий рівень освіти, потрібно сформувати, потрібні суспільству, компетентності.

Математична компетентність носить подвійний характер: коля для інших предметів вона є ключовою, то для математики – предметною.

Важливим розділом із курсу геометрії середньої школи є геометричні перетворення. А сам метод геометричних перетворень при розв'язування задач з геометрії – досить продуктивний. Симетрія в інженерії, живій та неживій природі, архітектурі, мистецтві та математична теорія симетрії мають спільне підґрунтя – геометричні перетворення.

Такі важливі поняття, як подібність та рівність фігур визначають за допомогою геометричних перетворень. У даній роботі будуть розглядатися наступні геометричні перетворення: паралельне перенесення, поворот, центральна та осьова симетрії, гомотетія та інверсія та будуть розв'язані деякі задачі.

В умовах сучасного розвитку, місце, яке займає країна у світі та її конкурентоспроможність залежить від рівня інформатизації усіх її сфер. Нормально, що «розвиток інформаційного суспільства в Україна та впровадження новітніх ІКТ в усі сфери суспільного життя і в діяльність органів державної влади та органів місцевого самоврядування визначається одним з пріоритетних напрямів державної політики» [22]. Особливо це стосується математики як навчальної дисципліни. Необхідною умовою подальшого розвитку якості освіти є запровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальний процес та їхнє ефективне використання. Щодо інтегрування ІКТ у процес викладання математики були надто оптимістичні настрої у час зростання доступності комп'ютерних технологій [23]. Але чимало досліджень показали незначне використання інформаційних технологій [24].

Запровадженню в Україні у процес вивчення математики приділялась значна увага, результатом якої стала розробка програмних засобів: GRAN-1W, Gran-2D, GRAN-3D та їх науково-методичного забезпечення [25, 26, 27, 28]. Але системного характеру використання цих програм у закладах освіти не набуло. Таке ж можна сказати і про системи динамічної математики розроблених в інших країнах.

Аналіз актуальних досліджень та публікацій. Поняття математичної компетентності було предметом наукових досліджень відомих українських та російських вчених-педагогів: С. Ракова, М. Зуєвої, Л. Іляшенко, Г. Селевка, Н. Тарасенкової. Різноманітні сторони математичної компетентності учнів закладів освіти досліджували: І. Зіненко, С. Раков. Над впровадженням та вдосконаленням компетентнісного підходу у школі працювали: О. Пометун, В. Авдєєва, І. Фруміна, А. Хуторський, І. Родигіна та інші. Формування ключових компетентностей висвітлені у працях: О. Локшина, С. Ракова, С. Трубачова, О. Савченко.

Реалізацією інформаційних технологій у закладах освіти цікавилися чимало вчених, зокрема: Н. Морзе, О. Гриб'юк, О. Барна, О. Данилова, В. Юнчик, О. Ткаченко, І. Василашко та ін.

Дослідники, у своїх наукових працях говорять, що майбутнє за технологіями, а методи навчання, які формують креативні особливості та креативні педагоги – це майбутнє технологій.

Враховуючи актуальність та важливість проблеми, її недостатньої дидактичної розробленості та сучасних потреб шкільної практики зумовило вибір теми дослідження **«Формування математичних компетентностей при**

вивченні теми «Геометричні перетворення» засобами інформаційних технологій».

Об’єкт дослідження. Процес навчання геометрії учнів загальноосвітніх шкіл.

Предмет дослідження. Геометричні перетворення та методика їх вивчення в курсі геометрії середньої школи.

Гіпотеза дослідження. Використання ІКТ-засобів у процесі вивчення теми «Геометричні перетворення» сприятимуть формуванню математичних компетентностей, що зазначені у навчальних програмах з математики.

Мета дослідження. Дослідити методичні та теоретичні основи вивчення геометричних перетворень та сформувати математичні компетентності засобами інформаційних технологій.

Згідно з метою визначені наступні **завдання дослідження:**

1) проаналізувати науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження;
2) дослідити і проаналізувати теоретичні та методичні основи вивчення геометричних перетворень;
3) дослідити зміст понять «компетентність» та «компетентнісний підхід» та розкрити методи та засоби формування математичних компетентностей;
4) розглянути способи застосування інформаційних технологій при вивченні нового матеріалу з теми «Геометричні перетворення»;
5) сформувати математичні компетентності з використанням презентацій та програм динамічної геометрії.

Для виконання поставлених завдань було використано наступні **методи**:

- системний аналіз наукової, педагогічної та психологічної літератури, навчальних програм та державних стандартів;
- порівняння компетентнісного та традиційного підходів у навчанні;
- класифікація задач за темами;
- вивчення педагогічного досвіду;

- узагальнення середовищ динамічної геометрії.

Теоретична значущість дослідження полягає в тому, що:

1) узагальнені та систематизовані теоретичні та методичні відомості з проблеми дослідження;
2) запропонована методика застосування програм динамічної геометрії та презентацій при вивченні геометричних перетворень.

Практична значущість дослідження полягає у тому, що його матеріали можуть використовуватися вчителями математики на уроках геометрії при вивченні теми «Геометричні перетворення» та учнями під час самостійного опрацювання цієї теми.

Результати дослідження упроваджено в навчально-виховний процес Рівненської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №22 Рівненської міської ради.

Апробація дослідження здійснювалася під час педагогічної практики. Опубліковано тези «Формування математичних компетентностей засобом GeoGebra при вивченні теми «геометричні перетворення», що є матеріалом XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (м. Рівне, 2020 р.) [28]. Основні положення заслуховувалися на засіданні кафедри математики з методикою викладання та були представленні на звітній науково-практичній конференції РДГУ (м. Рівне, 2020 р.).

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що включає 40 найменувань. Загальний обсяг роботи 84 сторінки комп’ютерного тексту.

РОЗДІЛ І
КОМПЕТЕНТНІСНИЙ ПІДХІД ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Зміст понять «компетентність» та «компетентнісний підхід»

Дослідження педагогічної та психологічної літератури з теми компетентнісного підходу вказує на відсутність єдиного його тлумачення, як і загальноприйнятого визначення компетентності. Зазначимо, поняття «професійна компетентність», «педагогічна компетентність» та «професійно-педагогічна компетентність» у дослідженнях з педагогіки часто виступають як синоніми [1].

Віднедавна у науковій літературі разом із демократизмом, комунікативністю, духовною культурою, гуманізмом та організаторським талантом визначне місце займає компетентність, що виступає у ролі однієї з головних атрибутів особистості вчителя. Звернувшись до словникових джерел віднайдемо, що «Словник іноземних мов» трактує «компетентність» володіти необхідними знаннями, що дають змогу оцінювати будь-що, висловлювати змістовну, авторитетну думку [2]. Новий тлумачний словник української мови визначає компетентну людину, як ту, що володіє достатніми знаннями у всіх галузях та добре обізнану у будь-чому [3]. Відповідно «Словник професійної освіти» дає визначення компетентності як сукупності необхідних знань та вмінь для забезпечення продуктивної професійної діяльності, здатність проводити аналіз та передбачати наслідки своє діяльності, застосовуючи набуту інформацію [4].

Авторами тлумачних словників компетентність визначається як освіченість, авторитетність, грамотність, інформованість, ерудованість. Багатогранний та системний характер природи компетентності зауважують усі дослідники, що її вивчали.

Англійський психолог Джон Равен дає визначення компетентності як своєрідній здатності, яка необхідна для дієвого виконання конкретних дії у певній предметній галузі та включає у собі вузькоспеціальні знання, способи мислення, особливі предметні навички та розуміння відповідальності за власні дії. За вченим А. Бермусом, компетентність – це система, що поєднує у собі особистісні, інструментальні та предметні компоненти та особливості. Науковець Ю. Татур відзначує, що компетентність виступає як характеристика, якість особистості, що дає змогу їй виносити судження у професійній галузі. Базою цієї якості є знання, досвід професійної та соціальної діяльності та інформованість людини, чим і підкреслюється інтегрований характер поняття «компетентність» [5]. Дослідник М. Чошанов відмічає, що компетентність – це не тільки знання, а й стале прагнення до оновлення та застосування у конкретних обставинах, тобто наявність мобільних та оперативних знань; це критичність та гнучкість мислння, яка здатна відкидати хибні і приймати найефективніші та найоптимальніші рішення [6].

Поняття «компетентність» ширше за поняття «кваліфікація». Воно охоплює на лише професійні знання та досвід у даній сфері, але й прагнення, інтереси, відношення до справи, здатність ефективно використовувати особисті якості, визначені схильності для досягнення потрібного результату у конкретній робочій обстановці.

Компетентність – це наявність у людини відповідної компетенції у конкретній галузі діяльності, що включає особисте її ставлення до предмета діяльності чи даної галузі [7].

Природа компетентності, хоч і є результатом навчання, але не випливає прямо з нього, а виступає як наслідок розвитку індивіда, не стільки «технологічного», скільки поєднанням діяльнісного та особистісного досвіду, цілісної самоорганізації, особистісного зростання.

Отже, компетентність – це така форма співіснування знань, умінь, ерудованості в цілому, яка зумовлює особистісну реалізацію, знаходження, під час навчання, свого місця у світі, що формує максимально мотивовану особистість та забезпечує високу затребуваність особистісного потенціалу. Компетенція – це сукупність якостей особистості (знань, умінь, способів діяльності), що взаємопов’язані між собою та належать до певного кола предметів, процесів та є необхідними для якісної результативної дії по відношенню до них; здатність людини виконувати завдання як професійної, так і непрофесійної діяльності за допомогою використання внутрішніх та зовнішніх ресурсів. Компетентнісний підхід – це чітке конкретне формулювання мети та цілей діяльності як компетенцій, необхідних у певній діяльності фахівця, забезпечуючи конкурентоздатну до ринку праці підготовку та ефективність професійної діяльності та адаптації робітників.-

1.2. Впровадження положень компетентнісно-орієнтованого навчання у системі загальної середньої освіти

В Україні розробку ідеї компетентнісної освіти на нормативному рівні започаткував документ про введення у 2000 р. нових «Критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти» після введення дванадцятибальної системи оцінювання.

Великий внесок у розвиток, відшліфування та кристалізацію цієї ідеї забезпечили базові освітянські документи: Концепція профільного навчання в старшій школі, Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти, накази Міністерства освіти і науки України та інші. На сьогодні діючими є затвердженні наказом МОН України №371 від 05. 05. 2008 р. «Про загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти», де положення компетентністно орієнтованої освіти репрезентовано досить ґрунтовно та широко. А саме: «Компетентність – це загальна здатність, що базується на знаннях, досвіді та цінностях особистості» [8].

Виокремлюють три основні напрями компетентностей:

- соціальні, пов’язані з життям суспільства та соціальною діяльністю індивідуума;
- мотиваційні, є власним вибором особистості, охоплюють її інтереси;
- функціональні, пов’язані із сферою умінь оперувати фактичним матеріалом та науковими знаннями.

За Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти виділяють наступні ключові компетентності [9]:

1) Уміння вчитися – розуміє під собою формування власного досвіду залученості школяра до навчального процесу, бажання та вміння організувати свою роботу для досягнення відмінного результату; здобуття вмінь та навичок саморозвитку, самоконтролю, самоаналізу та самооцінювання;

2) Спілкуватися рідною, державною та іноземними мовами;

3) Математична – досвід, набутий учнями у процесі навчання під час специфічної для дисципліни «математика» діяльності, пов'язаної із розумінням, засвоєнням та застосуванням нових знань;

4) Інформаційно-комунікаційна – здатність школяра застосовувати інформаційно-комунікаційні технології та засоби для виконання власних і суспільно значущих завдань;

5) Соціальна – здатність особистості результативно співпрацювати з партнерами у команді та групі, виконувати різні функції та ролі у колективі;

6) Громадянська – здатність школяра ефективно, відповідально та активно реалізовувати права та обов'язки із ціллю розвитку демократичного суспільства;

7) Загальнокультурна – здатність школяра аналізувати та оцінювати національні досягнення та досягнення світової культури, вміло орієнтуватися в духовному та культурному контексті сучасного суспільства, втілювати у житті методи самовиховання, орієнтовані на загальнолюдські цінності;

8) Підприємницька компетентність – здатність організувати особисту та колективну діяльність, вірно оцінювати власні професійні здібності та можливості, співвідносити їх з реальними потребами, розробляти власні проекти;

9) Здоров'язбережувальна – здатність школяра в умовах конкретної ситуації втілювати сукупність здоров'язбережувальних компетенцій, турботливо ставитися до власного та здоров'я інших людей.

Визначають наступні основні групи компетентностей [12]:

- здоров'язбережувальна;
- громадянська;
- загальнокультурна;

- комунікативна;
- предметна;
- міжпредметна;
- предметна мистецька;
- міжпредметна естетична;
- інформаційну-комунікаційну;
- соціальна;
- проектно-технологічна.

Компетентнісний підхід слугує формуванню предметних і ключових компетентностей.

У Державному стандарті враховано здатності навчального середовища, сприятливого для забезпечення фізичних, пізнавальних та соціокультурних потреб школярів.

У компетентнісного підходу є спільні ознаки із знаннєвим, але не прирівнюється до останнього, бо є набагато складнішим та більш ширшим поняттям. Компетентності не заперечують знання, уміння та навички, а передбачають здатність усвідомлено їх застосовувати. Вдосконалення процесу навчання з урахуванням даного підходу полягає у тому, щоб навчити школярів використовувати набуті знання й уміння в конкретних життєвих та навчальних ситуаціях [8].

1.3. Формування на уроках ключових математичних компетентностей

Нинішній етап розвитку суспільства, що супроводжується інтеграцією України до ЄС, переходом до ринкової економіки, різким зростанням кількості наукової інформації та прогресивними технологіями виробництва, демократичному народу необхідні значні зміни у школі [11].

Суспільству потрібні люди, що здатні до творчого володіння знаннями, з гнучким критичним мисленням та вміннями застосовувати набуті знання на практиці. Кожен учень повинен вміти мобілізувати знання у життєвій ситуації, щоб швидко пристосовуватися до нестандартних ситуацій. Окрім цього, щоб бути успішним, засвоїти власні життєві та соціальні ролі, знайти своє місце у житті, випускник повинен володіти умінням працювати у команді, бути комунікабельним та наділеним мотивацією на успіх [11].

Очевидним є факт, що сучасна освіта повинна давати людині не тільки сукупність базових знань, набір необхідних та корисних навичок, а ще й вміння здобувати потрібну інформацію самостійно, застосовувати нові знання на практиці та приймати розсудливі рішення. Що, у свою чергу, вимагає багато змін у цілій системі освіти та в оновленні її сучасної мети та змісту, що дало б змогу закладам середньої загальної освіти випускати компетентну творчу особистість, яка здатна свідомо та самостійно досягати життєвого успіху. У зв'язку з цим, саме формування необхідних компетентностей в учнях повинно подолати прірву між освітою та вимогами сучасного життя [11].

Нова українська школа повинна ефективно допомогти учневі розвинути особистий потенціал, сформувавши стійкі компетентності, які є необхідною умовою для досягнення життєвого успіху. Така школа повинна забезпечити підготовку до повноцінного життя. Особистість, яка сформує всі життєві компетентності у сучасній школі, матиме змогу успішно самореалізуватися як висококомпетентний професіонал, відповідальний сім'янин, свідомий громадянин та буде здатним захищати власні життєві цінності [11].

Серед галузевих компетентностей важливе місце посіла математична компетентність, маючи у поняттях, теоремах, аксіомах і теоріях прямий зв'язок з реальністю, які одночасно призначені для дослідження тієї ж самої реальності за допомогою математичних моделей. Засвоєння математичного методу пізнання дійсності закладає основи формування математичних компетентностей.

Педагоги-практики запропонували формулу компетентності, яка скерована на досягнення певного результату під час навчання компетентнісно-орієнтованим підходом:

КОМПЕТЕНТНІСТЬ = МОБІЛЬНІСТЬ ЗНАНЬ + ГНУЧКІСТЬ МЕТОДУ + КРИТИЧНІСТЬ МИСЛЕННЯ [12].

Формула вказує, що компетентності формуються на трьох китах:

1) Забезпечення учнів знаннями, вмінням їх відшукати, відсіяти непотрібну інформацію та перевести їх у досвід своєї діяльності;

2) Розуміння, як отримати ці знання (у якому випадку, який метод використати);

3) Розвинення критичного мислення для змоги оцінювання себе, світу та особистого місця у світі.

Отже, по-перше компетентність – це мобільні знання, що завжди оновлюються; по-друге – дієві гнучкі методи, що забезпечують можливість використовувати набуті знання у конкретних ситуаціях; по-третє – критичне мислення, що забезпечує можливістю оцінювати окремі ідеї.

На думку відомого дослідника та науковця С. А. Ракова, математична компетентність – це здатність бачити та застосовувати математику в буденному житті, розуміти мету та методи математичного моделювання, здатність будувати математичні моделі, досліджувати їх математичними методами, тлумачити отримані результати та вміння оцінювати похибку в обчисленнях [11].

За аналогією з тестами PISA виділяють три основних рівня математичної компетентності:

1) Рівень відтворення – це звичайне застосування у знайомій ситуації стандартних прийомів, відомих фактів, розпізнавання математичних властивостей, закономірностей, об’єктів, застосування технічних навичок і відомих алгоритмів, безпосереднє виконання обчислень.

2) Рівень встановлення зв’язків – основується на репродуктивній діяльності розв’язування типових задач та тих, що близькі до них. Які відомі методи застосовувати та матеріал якого розділу використовувати підказує зміст самого завдання. Як правило, цей рівень передбачає встановлення зв’язків між даними в умові завдань або ж встановлення взаємозв’язків між різними уявленнями, описаної в задачі, ситуації.

3) Рівень міркувань – вимагає інтуїції, роздумів та творчості при виборі математичних інструментів, поєднання знань різних розділів шкільного курсу математики, власної розробки алгоритму дій. Часто завдання скеровані на

відшукання закономірності, проведення узагальнення та пояснення чи обґрунтування отриманих результатів.

Головною метою освітньої галузі «Математика» виступає формування математичної компетентності в учнів на рівні, що забезпечує достатній рівень для життєдіяльності в сучасному світі, інтелектуальний розвиток учнів, успішне засвоєння знань з інших освітніх галузей, розвитку пам’яті, логіки, уваги, мислення, культури та інтуїції.

Напрями формування математичних компетентностей [15]:

- формувати вміння працювати з формулами, проводити обчислення;
- формувати вміння здійснювати побудову та аналіз графіків функцій та їх залежностей, досліджувати їх властивості;
- застосовувати знання з теорії ймовірності та статистики для опису простих реальних процесів та явищ;
- за необхідності використовувати найпростіші обчислювальні пристрої та довідкові матеріали;
- формувати вміння класифікувати та будувати геометричні фігури на площині та в просторі;
- формувати вміння будувати і досліджувати прості математичні моделі реальних явищ, процесів, об’єктів тощо.

По відношенню до школяра компетентності виконують наступні функції:

- характеризують рівень практичної підготовки учня, його готовність діяти;
- розвивають та відображають в учневі власні мотиви до процесу чи об’єкту;
- розвивають готовність та здатність розв’язувати повсякденні проблеми у житті (соціальні, побутові, виробництві);
- формують дієву грамотність школяра, якість підготовки;
- розвивають основні групи особистих якостей школяра.

Згідно з критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти України, освітня діяльність має не тільки забезпечити суму знань, умінь та навичок, а також зпродукувати компетентність як загальну здатність, яка основується на знаннях, здібностях, цінностях, досвіді, набутих завдяки навчанню.

Для оцінювання навчальних досягнень школярів потрібно враховувати [14]:

- Рівень володіння розумовими операціями (порівнювати, аналізувати, синтезувати, узагальнювати);
- Характеристики відповіді (повнота, логічність, правильність, цілісність, обґрунтованість);
- Якість знань (глибина, гнучкість, дієвість, системність, осмислення, міцність, узагальненість);
- Самостійність суджень;
- Ступінь сформованості вмінь та навичок;
- Досвід творчої діяльності (вміння бачити проблеми та їх розв’язувати, формувати гіпотези).

Математичні компетентності Раков С. А. поділяє на такі типи [13]:

1) Процедурна – уміння розв’язувати типові математичні задачі;
2) Технологічна – вміння користуватися сучасними математичними пакетами;
3) Логічна – володіння методом спростування тверджень та дедуктивним методом доведення;
4) Методологічна – вміння оцінити доречність використання тих чи інших математичних методів для розв’язання прикладних та практичних задач;
5) Дослідницька – володіння передбаченими програмою вимогами та Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти математичними методами дослідження прикладних та практичних задач.

Як і будь-яка інша, математична компетентність складається з наступних компонентів:

- дійовий компонент – навики освітньої праці (самооцінка, самостійність, самоконтроль);
- змістовний – комплекс математичних знань, умінь та навичок;
- мотиваційний – внутрішні інтерес та мотивація.

Предметне навчання, у якому навчальними програмами регламентуються вимоги та мета засвоєння предметних знань, може стати фундаментом для формування компетентностей учня. Для отримання результату навчальної діяльності необхідно оптимально поєднувати сучасні із традиційними методи, засоби і форми навчання, за допомогою яких розвиваються та формуються у кожного учня компетентності.

1.4. Методи навчання математики, спрямовані на формування математичних компетентностей

На формування у школяра власної думки в межах заданої проблематики більшою мірою спрямовані активні методи навчання. На вироблення вміння працювати в рамках малої групи скеровані інтерактивні методи.

До активних методів навчання відносять [14]:

- Метод мозкового штурму (навчає учнів давати різні варіанти відповідей на поставлені запитання);
- Метод конкретної ситуації (формує в учнів вміння думати, аналізувати, складати свої задачі, узагальнювати, розглядати різні способи розв'язування);
- Дослідницький метод (проблему формує вчитель разом з учнями, обравши потрібні засоби, учні вирішують цю проблему самостійно);
- Метод занурення (учні повністю занурюються у створені ситуації, ефективно розв'язують поставлені завдання);
- Метод інциденту (залучення школярів до участі в конкурсах та олімпіадах; учні навчаються переборювати стресові ситуації і долати інертність, що так необхідно в житті);
- Метод евристичних питань (схиляє учнів думати та аналізувати).

Інтерактивність у навчанні полягає у знаходженні в активній та постійній взаємодії, у формі діалогів та спільної дії всіх учасників навчання. Термін «інтерактивність» походить від англійських слів *Inter* та *act* і означає взаємодію. Сенс інтерактивного навчання полягає у взаємонавчанні, співнавчанні (груповому, колективному, у співпраці).

До інтерактивних методів та форм навчання відносять [15]:

- Кооперативний метод (реалізується у роботі в групах);
- Метод рольової гри (формують не тільки вміння висловлювати свої думки, а й поважливе ставлення до пропозицій та думок інших);
- Частково-пошуковий метод (спонукає учнів, під керівництвом вчителя, самостійно мислити, розв'язувати завдання, що виникають, аналізувати, порівнювати, створювати і розв'язувати проблемні ситуації, узагальнювати та робити висновки);
- Кейс-метод (аналіз конкретних практичних ситуацій);
- Метод проблемного викладу знань (перехідний етап від практичної до творчої діяльності. Разом із вчителем учні відкривають нові знання, усвідомлюють теоретичні особливості даної теми);

До інтерактивних методів також належать: дискусії, метод ділової гри, практичні групові вправи, метод круглого столу, моделювання практичних ситуацій, конкурси практичних робіт із обговоренням та ін.

Для розвитку компетентностей цікаву класифікацію методів продуктивного навчання запропонував дидактик А. В. Хуторський [5]:

- Креативні методи навчання (орієнтовані на створення учнями своїх навчальних продуктів): методи образної картини придумування, гіперболізації, «Якби…», «мозковий штурм», аглютинації, інверсії, морфологічного ящика, сінектики.
- Когнітивні методи навчання (навчального пізнання): методи образного бачення, смислового бачення, символічного бачення, порівняння, евристичних запитань, евристичного спостереження, дослідження, фактів, конструювання правил, конструювання понять, порогнозування, помилок, гіпотез, конструювання теорій.

Враховуючи рівень підготовки класу та зміст навчального матеріалу, під час проходження педагогічної практики було застосовано різноманітні методи навчання. При вивченні нової теми використано проблемно-пошукові методи для формування теоретичних знань, репродуктивні методи – для формування фактичних знань. Останні методи на етапі формування умінь та навичок, з ціллю навчити школярів застосовувати набуті знання у зміненій чи нестандартній ситуації, поступово замінювалися творчими та частково-пошуковими. На цьому етапі, а також на етапі узагальнення і систематизації знань та вмінь використано дослідницькі та проблемні методи.

Поступовість та безперервність – це основні принципи при формуванні компетентностей в учнів.

На уроках математики інтелектуальному, духовному та соціальному розвитку, формуванню предметних і ключових компетентностей сприяють сучасні інноваційні в об’єднанні з іншими педагогічними технологіями.

На практиці використано такі технології: інформаційні комп’ютерні технології, технологія колективно-групового навчання, проблемного навчання, розвитку критичного мислення, проектів, диференційованого навчання, кооперативного навчання.

Так як в багатьох учнів внутрішня мотивація ще нестійка та ситуативна, тому на практиці використовувалися:

- наочний матеріал,
- цікаві факти із життя відомих людей,
- ігрові ситуації,
- різноманітні історичні матеріали тощо.

Крім цього, було запропоновано різні види вправ:

- творчі завдання,
- завдання прикладного і практичного характеру,
- задачі проблемного характеру,
- незакінчене речення,
- цікаві логіко-розвиваючі завдання,
- завдання, скеровані на виправлення та спростування помилок,
- індивідуально-диференційовані завдання тощо.

Серед засобі навчання застосовано: мультимедійні засоби навчання, комп’ютерну техніку, додаткову літературу та дидактичні матеріали.

Також був проведений нестандартний урок, що мав нетрадиційну структуру, призначенням якого виступало підняття інтересу учнів до навчання математики, а саме урок-квест.

Висновки до першого розділу

У першому розділі за допомогою методу системного аналізу літератури описано зміст понять «компетентність» та «компетентнісний підхід», положення компетентнісно-орієнтованого навчання та методика формування математичних компетентностей.

Компетентність поєднує у собі мобільні знання, дієві гнучкі методи застосування знань на практиці та критичне мислення.

Усвідомлюючи визначення компетентності, можна дійти таких висновків:

Висновок 1. Результатом навчання є компетентність.

- Компетентнісна освіта орієнтована на практичні результати, формування ставлень, досвід власної діяльності, що призводить до принципових змін в організації навчання. Останнє стає скерованим на розвиток життєво необхідних знань, вмінь та конкретних цінностей. Запровадження даного підходу передбачає обов’язкове очікування результативної складової мети, що потребує адекватних перемін у всій системі оцінювання навчальних досягнень [8].
- На усіх етапах шкільної освіти результати навчальної діяльності не обмежуються знаннями, вміннями та навичками, її метою мають бути сформовані компетентності [8].

Висновок 2. Компетентність містить складну структуру.

Компетентність є інтегрованим результатом персональної навчальної діяльності учнів та формується за допомогою оволодіння мотиваційними, процесуальними та змістовними компонентами [8].

РОЗДІЛ ІІ
ТЕОРЕТИЧНІ І МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

2.1. Геометричні перетворення та їх властивості

Означення. Перетворенням фігури F у фігуру F′ називається така відповідність, при якій:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F′;

2) кожній точці фігури F′ відповідає деяка точка фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F′.

Фігура F′ називається образом фігури F для даного перетворення.

Означення. Переміщенням (або рухом) називається перетворення фігури, внаслідок якого збігаються відстані між точками даної фігури.

Означення. Дві фігури називаються рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом іншої (або іншими словами, якщо вони суміщаються переміщенням).

До основних властивостей переміщень належать:

Теорема 2.1. Під час переміщення точки, що лежать прямій переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Доведення. З трьох точок, що лежать на одній прямій, одна лежить між двома іншими. Нехай точка B лежить між точками A і C. Тоді $AC = AB + BC$.

Нехай деяке переміщення точки A, B, C переводить у точки A′, B′, C′. Так як при переміщенні відстані між точками зберігаються, то $AB = A'B', AC = A'c'$ і $BC = B'c'$. Із цих виразів стає зрозумілим, що $A'C' = A'B' + B'c'$.

Остання рівність дає зрозуміти, що між точками A' та C' лежить точка B', а це означає, що точки A', B', C' належать одній прямій. Теорему доведено.

Теорема 2.2. Під час переміщення кут переходить у кут, що йому дорівнює.

Доведення. Нехай із точки A виходять два промені AB та AC, що не лежать на одній прямій (рис. 2.1). При деякому переміщенні ці вони перейдуть у деякі промені . Так як при переміщенні відстані між точками зберігаються, то $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$ і за трьома сторонами $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$. А з рівності трикутників випливає, що $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Теорему доведено.

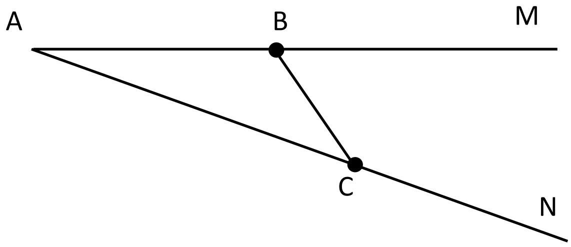


Рис. 2.1

До основних властивостей перетворення подібності належать:

1) Переміщення (рух) можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$, тобто переміщення є окремим випадком перетворення подібності.

2) Будь-яке перетворення подібності з коефіцієнтом k має обернене

перетворення, яке є також перетворенням подібності з коефіцієнтом .

Доведення. Нехай маємо довільні точки A і B, що належать фігурі F. Перетворення подібності із коефіцієнтом k переводить їх у точки A' і B' фігури F' відповідно. Тоді $A'B' = k \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{1}{k}A'B'$. Отже, перетворення подібності із

коефіцієнтом переводить точки A' і B' фігури F' у точки A і B фігури F. Властивість доведено.

3) Композицією двох перетворень подібності з коефіцієнтами k_1 і k_2 є також перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

Доведення. Перше перетворення подібності переведе точки A і B, що належать фігурі F у точки A' і B' фігури F' відповідно. Тобто $A'B' = k_1 \cdot AB$. Друге перетворення подібності переведе точки A' і B' фігури F' у точки A'' і B'' фігури F'' відповідно. Тобто $A''B'' = k_2 \cdot A'B' = k_1 k_2 \cdot AB$. Що й потрібно було довести.

4) При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Доведення. З трьох точок, що лежать на одній прямій, одна лежить між двома іншими. Нехай точка В лежить між точками А і С. Тоді $AC = AB + BC$. Із означення перетворення подібності точки А, В, С перейдуть у точки A', B', C' за правилом: $A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'$. Із рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ стає очевидним, що образи A', B', C' належать одній прямій, а точка B' лежить між A' і C'. Властивість доведено.

Наслідок. Перетворення подібності переводить прямі у прямі, півпрямі – у півпрямі, відрізки – у відрізки.

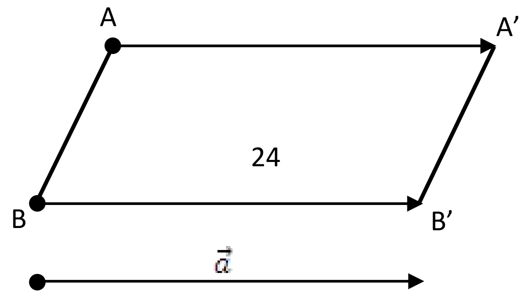
2.1.1. Паралельне перенесення

Означення. Паралельним перенесенням фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається перетворення фігури F у фігуру F′, унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X′ фігури F′ так, що промені XX′ і OA співнапрямлені і XX′= a.

Основні властивості паралельного перенесення:

Теорема 2.3. Паралельне перенесення є переміщенням.

Доведення. Нехай маємо довільні точки A і B, що належать фігурі F. Паралельне перенесення переводить їх у точки A' і B' фігури F' відповідно (рис. 2.2). Доведемо, що $AB = A'B'$. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ за означенням паралельного перенесення. З чого слідує, що рівними та паралельними є відрізки AA' і BB',



тому чотирикутник $AA'B'B$ є паралелограмом. Як відомо, у паралелограма протилежні сторони рівні, тобто $AB = A'B'$. Теорему доведено.

Рис. 2.2

Наслідок 1. При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.

Наслідок 2. При паралельному перенесенні промінь переходить у співнапрямлений промінь.

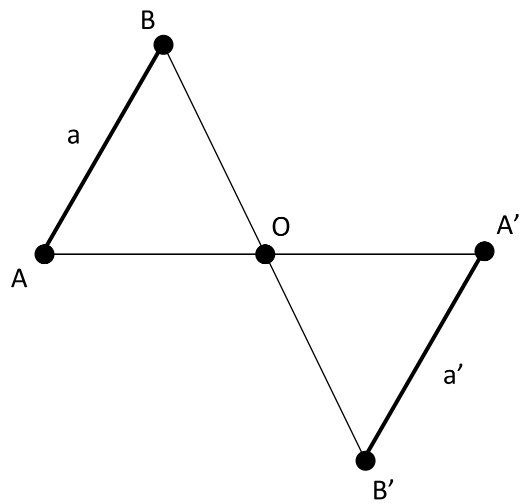
2.1.2. Симетрія відносно точки

Означення. Точки K і K′ називаються симетричними відносно точки O, якщо точка O – середина відрізка KK′.

Симетрія відносно точки має наступні основні властивості:

Теорема 2.4. Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

Доведення. Нехай маємо довільні точки A і B, що належать фігурі F. Симетрія відносно точки O переводить їх у точки A' і B' фігури F' відповідно (рис. 2.3). Тоді за двома сторонами і кутом між ними $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (за означенням симетрії $OA = OA', OB = OB'$, а $\angle AOB = \angle A'OB'$ як вертикальні). Так як трикутники рівні, то і $AB = A'B'$. Отже, симетрія відносно точки O є



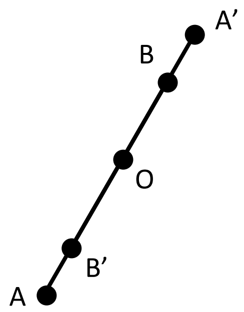
переміщенням. Теорему доведено.

Рис. 2.3

Теорема 2.5. Симетрія відносно точки пряму переводить у паралельну їй пряму або у себе.

Доведення. Перед доведенням, зауважимо, що пряму визначають дві точки. Нехай маємо довільні точки A і B , що належать на прямій a та точку O , що не належить цій прямій. Симетрія відносно точки O переводить їх у точки A' і B' прямої a' відповідно. Тоді за двома сторонами і кутом між ними $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (за означенням симетрії $OA = OA', OB = OB'$, а $\angle AOB = \angle A'OB'$ як вертикальні). Так як трикутники рівні, то і $\angle ABO = \angle A'B'O$, одночасно ці кути є і внутрішніми різносторонніми для прямих a і a' . Отже прямі a і a' .

У випадку, коли точки A, B і O лежать на одні прямій, при симетрії відносно точки O , точки A і B перейдуть у точки A' і B' відповідно. Причому всі п’ять точок лежатимуть на одній прямій (рис. 2.4). Тобто, така симетрія пряму



переводить саму у себе. Теорему доведено.

Рис. 2.4

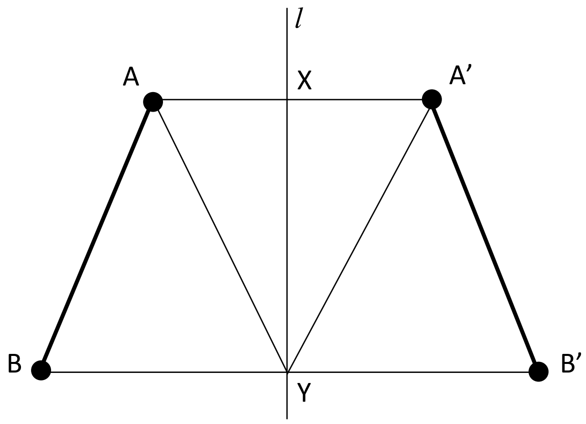
2.1.3. Симетрія відносно прямої

Означення. Точки X і X′ називаються симетричними відносно прямої l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX′ і проходить через його середину.

Основна властивість симетрії відносно прямої:

Теорема 2.6. Перетворення осьової симетрії є переміщенням.

Доведення. Нехай маємо довільні точки A і B, що належать фігурі F. Симетрія відносно прямої l переводить їх у точки A' і B' фігури F' відповідно (рис. 2.5). Будемо розглядати загальний випадок, коли точки A, B не лежать на



перпендикулярній до l прямій та не лежать на осі l.

Рис. 2.5

Доведемо, що $AB = A'B'$. за двома сторонами і кутом між ними $\Delta XYA = \Delta XYA'$ (за означенням симетрії $XA = XA'$, $\angle AXY = \angle A'XY$, а сторона XY – спільна).З чого випливає, що $AY = A'Y$ і $\angle AXY = \angle A'XY$. Тому за двома сторонами і кутом між ними $\Delta ABY = \Delta A'B'Y$. У них за доведеним $AY = A'Y$, за означенням осьової симетрії $BY = B'Y$, $\angle AYB = \angle A'YB'$ ($\angle AYB = \angle XYB - \angle XYA$, $\angle A'YB' = \angle XYB' - \angle XYA'$). Тоді із рівності трикутників слідує, що $AB = A'B'$. Теорему доведено.

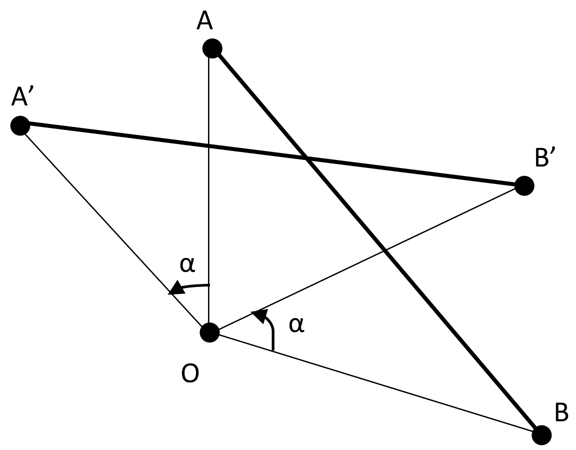
2.1.4. Поворот

Означення. Поворотом фігури F навколо точки O на кут α називається перетворення фігури F у фігуру F′, унаслідок якого кожна точка X фігуру F переходить у точку X′ фігури F′ так, що OX′=OX і кут ∠XOX′= α.

Поворот має таку основну властивість:

Теорема 2.7. Перетворення повороту є переміщенням.

Доведення. Нехай маємо довільні точки A і B, що належать фігурі F. Поворот на кут α проти годинникової стрілки переводить їх у точки A' і B' фігури F' відповідно (рис. 2.6). Доведемо, що $AB = A'B'$. Будемо розглядати загальний випадок, тобто точки A, B, O не належать одній прямій. За двома сторонами і кутом між ними $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (за означенням симетрії $OA = OA', OB = OB'$, а $\angle AOB = \angle A'OB'$ – кожен з цих кутів рівний сумі $\angle AOB'$ і кута α). З рівності трикутників випливає, що $AB = A'B'$. У випадку, коли точки A, B, O лежатимуть на одній прямій, то відрізки AB і $A'B'$ будуть або різницею,



або сумою OA, OA' і OB, OB' відповідно. Тому, і в такому випадку $AB = A'B'$. Теорему доведено.

Рис. 2.6

2.1.5. Подібність фігур. Гомотетія

Означення. Перетворенням подібності (подібністю) називається таке перетворення фігури F у фігуру F′, унаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні (k > 0) [19].

Означення. Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії і руху [18].

До основних властивостей подібності фігур належать:

1) Рефлексивність. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом подібності, що дорівнює одиниці.

2) Симетричність. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k, то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $k_1 = \frac{1}{k}$.

3) Транзитивність. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

Означення. Гомотетією з центром O називається таке перетворення фігури F у фігуру F′, унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X′ фігури F′, так що точка X лежить на промені OX і OX′ = kOX (k – фіксоване додатне число).

До основних властивостей гомотетії відносять:

Теорема 2.8. Гомотетія є перетворенням подібності.

Доведення. Нехай довільні точки A і B, що належать фігурі F. Внаслідок гомотетії H_O^k точки A і B, переходять у відповідні точки A' і B' так, що $OA' = k \cdot OA, OB' = k \cdot OB$ (рис. 2.7). Звідки отримуємо векторні рівності $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$. Почленно віднявши ці рівності, матимемо: $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Так як $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Звідси, $|\overrightarrow{A'B'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, тобто $A'B' = |k| \cdot AB$.

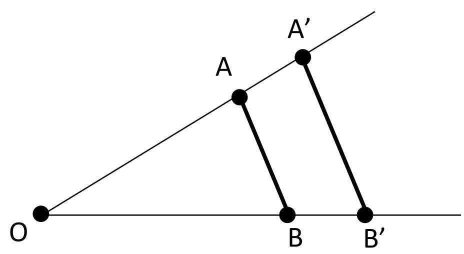


Рис. 2.7

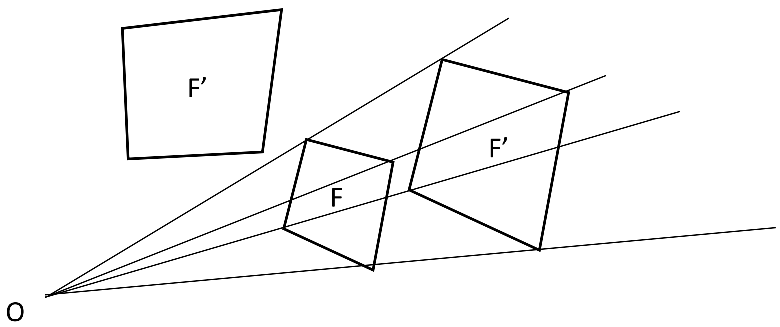
Можна зробити висновок, що гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$, тобто, при гомотетії кожна фігура переходить у подібну їй фігуру. Теорему доведено.

Наслідок 1. Гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму.

Наслідок 2. Гомотетія переводить кут у кут, що йому дорівнює.

Теорема 2.9. Якщо дві фігури подібні, то існує третя фігура, яка гомотетична першій і дорівнює другій.

Доведення. Нехай маємо дві подібні фігури $F \overset{k}{\sim} F'$. Отже, відстані між точками фігури F, при її перетворенні у фігуру F', зміняться у k раз. Розглянемо гомотетію з коефіцієнтом, що рівний коефіцієнту подібності k та довільним центром O. Така гомотетія переведе фігуру F у фігуру F'' так, що відстані між її точками також зміняться у k раз. Отже, відстані між відповідними точками фігур F' та F'' є рівними, тобто $F' = F''$ (рис. 2.8). Тому побудована фігура F'' є



гомотетичною фігурі F і рівна фігурі F'. Теорему доведено.

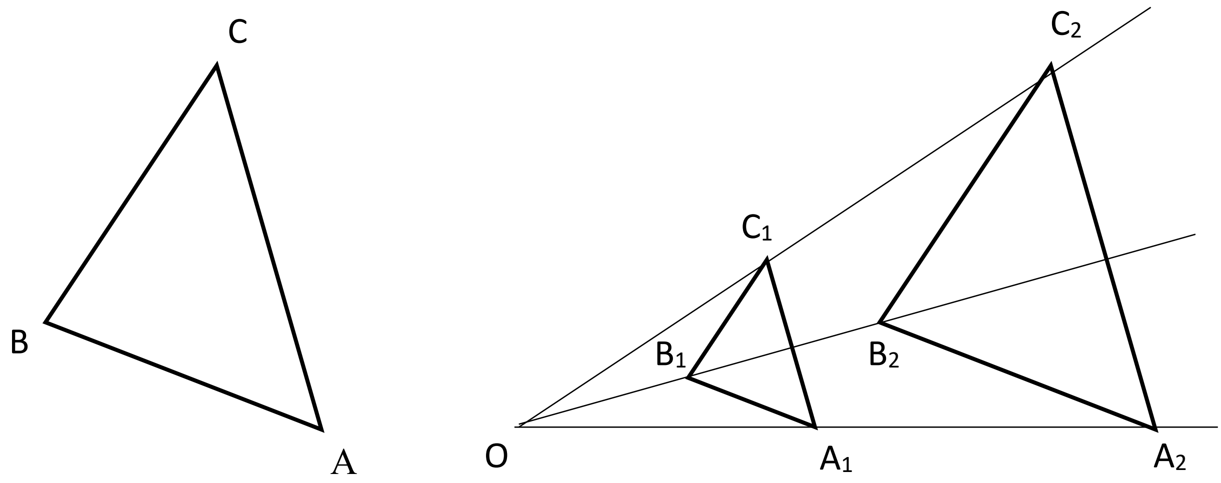
Рис. 2.8

Наслідок. Перетворення подібності переводить кут у кут, що йому дорівнює.

Ознаки подібності трикутників:

Теорема 2.10 (ознака подібності трикутників за двома кутами). Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення. Нехай дано два трикутники: ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Для цього до $\Delta A_1B_1C_1$ застосуємо гомотетію із довільним центром в точці O та коефіцієнтом $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$ (рис. 2.9). Така гомотетія переведе $\Delta A_1B_1C_1$ у певний $\Delta A_2B_2C_2$. Тобто $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$



причому $A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$ і $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$.

Рис. 2.9

А за умовою $AB = k \cdot A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$.

Із двох останніх рівностей випливає: $AB = A_2B_2$, $\angle A = \angle A_2$ і $\angle B = \angle B_2$. Тому за стороною і прилеглими до неї кутами $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$. Так як ці фігури рівні, то вони одночасно і подібні. З чого слідує, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Наслідки:

1. Рівносторонні трикутники подібні.
2. Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту при вершині або при основі.
3. Прямокутні трикутники подібні, якщо вони мають по рівному гострому куту.
4. Рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

Теорема 2.11 (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні.

Доведення. Нехай дано два трикутники: ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Для доведення застосуємо гомотетію до трикутника $\Delta A_1B_1C_1$ із довільним центром в точці O та коефіцієнтом $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ (рис. 2.9). Така гомотетія переведе $\Delta A_1B_1C_1$ у $\Delta A_2B_2C_2$. Тобто $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, причому $A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$ і $B_2C_2 = k \cdot B_1C_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$.

А за умовою $AB = k \cdot A_1B_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$.

Із двох останніх рівностей слідує, що $AB = A_2B_2$, $BC = B_2C_2$ і $\angle B = \angle B_2$. Тому $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$ за двома сторонами і кутом між ними.

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$. З чого слідує, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Наслідок. Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.

Теорема 2.12 (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого, то такі трикутники подібні.

Доведення. Нехай дано два трикутники: ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Для доведення застосуємо гомотетію до трикутника $\Delta A_1B_1C_1$ із довільним центром в точці O та коефіцієнтом $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ (рис. 2.9). Така гомотетія переведе $\Delta A_1B_1C_1$ у подібний йому $\Delta A_2B_2C_2$, причому $A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$, $B_2C_2 = k \cdot B_1C_1$, $A_2C_2 = k \cdot A_1C_1$.

А за умовою $AB = k \cdot A_1B_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$ і $AC = k \cdot A_1C_1$.

Із двох останніх рівностей слідує, що $AB = A_2B_2$, $BC = B_2C_2$ і $AC = A_2C_2$. Тому $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$ за трьома сторонами.

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$, але і $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, а тому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

2.1.6. Інверсія

Означення. Перетворення, при якому кожній точці A певної фігури ставиться у відповідність інверсна з нею точка A_1, називається інверсією (від латинського слова inversion – перетворення). Дане коло ($O; r$) називають базисним колом інверсії, його центр – центром інверсії, радіус кола r – радіусом інверсії, а квадрат радіуса кола інверсії (r^2) – степенем інверсії [20].

Виділяють такі основні властивості інверсії:

1) Центр інверсії на має образу.

2) Якщо фігура F' інверсна з фігурою F, то і, навпаки, фігура F інверсна з фігурою F' при тій самій інверсії.

3) Інверсія переводить коло, яке не проходить через центр інверсії – в коло.

4) Внаслідок інверсії пряма, що проходить через центр інверсії, переходить у себе (при цьому центр інверсії опущено).

5) Якщо одна з двох інверсних точок необмежено виділяється (по прямій OA, рис. 2. 10) від центра інверсії, то друга необмежено наближається до нього і навпаки.

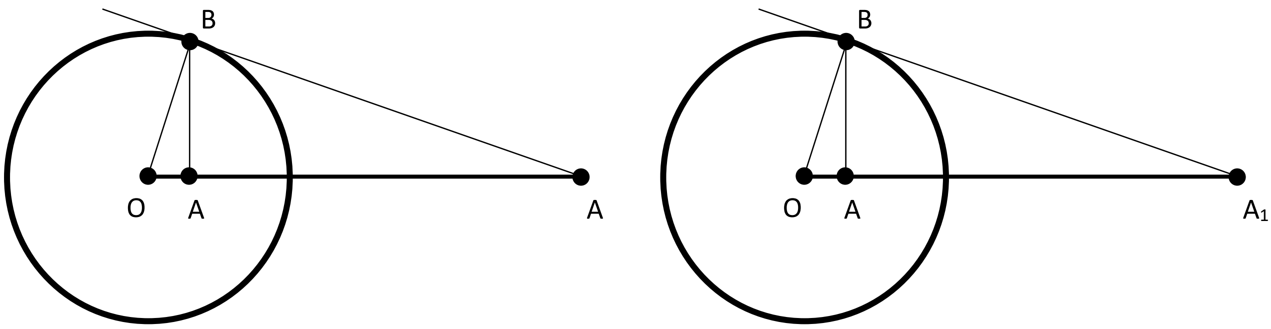


Рис. 2.10

6) Теорема 2.13. Коло K_1, яке проходить через центр інверсії, переходить при інверсії у пряму. Ця пряма перпендикулярна до лінії центрів кола інверсії K і кола K_1.

Доведення. Побудуємо лінію центрів даного кола та кола інверсії та точку A, що інверсна з точкою A_1, яка є перетином прямої, що ми побудували з даним колом K_1. До лінії центрів через точку A проведемо перпендикуляр p, який і буде образом даного кола K_1. Перевіримо, взявши будь-яку точку, назвемо її B, на колі K_1, побудуємо пряму OB та позначимо точку B_1, яка буде перетином прямої OB з перпендикуляром p. Так як $\angle OAB_1 = \angle OBA_1$, то ΔOAB_1 і ΔOA_1B прямокутні та при вершині мають спільний кут O. Таким чином, $\Delta OAB_1 \sim \Delta OA_1B$ та $OB : OA_1 = OA : OB_1$, звідки $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = r^2$, тому точка B_1 інверсна з точкою B. Отже, при інверсії образ кожної точки B кола K_1 лежить на p, іншими словами коло K_1 переходить у пряму p. Теорему доведено.

2.2. Методичні особливості вивчення геометричних перетворень

2.2.1. Загальна характеристика програмного матеріалу з теми «Геометричні перетворення»

Вивчаючи геометрію учні переконуються, що на поставлене запитання відповідь не завжди можна отримати шляхом безпосереднього аналізу заданої конфігурації або фігури. Тому досить часто виникає необхідність виконувати певні перетворення фігури. Це дає змогу наблизити окремі елементи, отримати кути або відрізки, що відповідають заданим умовам. Ці перетворення фігур невипадкові, а є окремими випадками геометричних перетворень. Програма передбачає ознайомлення школярів не лише із поняттям геометричних перетворень, а й з застосуванням та властивостями окремо взятих видів таких перетворень. Окремо, вивчаються властивості центральної та осьової симетрії, паралельного перенесення, гомотетії, обертання навколо точки та подібність фігур [10].

Застосування перетворень (зокрема, рухів) до конктретних геометричних фактів зв'язують з іменем Фалеса Мілетського. Він за допомогою поворотів і перегинів рисунка показав справедливість наступних фактів: рівність вписаних кутів, що спираються на діаметр кола, рівність вертикальних кутів, прямого кута тощо.

Розвитку ідеї геометричних перетворень, потужного поштовху надав німецький математик Фелікс Клейн у Єрлангенской програмі. Він визначив, що предмет «геометрія» складається з теорії інваріантів певної групи геометричних перетворень, кожній з яких відповідає власна гілка геометрії. Із погляду такої позиції геометрія, яка визначається групою перетворень подібності, і є предметом вивчення в середній школі.

Вперше чималу увагу даній темі приділив відомий вітчизняний методист і математик А. Н. Колмогоров. Перетворення займали центральне місце у курсі геометрії (1968 – 1980) та лежали в основі доведення багатьох теорем. Рух та перетворення подібності у підручниках Атанасяна Л. С. і Погорєлова А. В. розглядаються не скільки як універсальний апарат для розв’язування задач, скільки як об’єкт вивчення. Фундаментальною метою вивчення геометричних перетворень є ознайомлення учнів з подібністю, гомотетією та різними видами рухів (паралельне перенесення, поворот, симетрія відносно точки і прямої), їх властивостями, введенні загального поняття про рівність та подібність фігур, демонструванні застосування до розв’язування задач різних видів перетворень і властивостей площ подібних фігур [17].

Розглянемо зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня підготовки учнів з теми «Геометричні перетворення» для звичайних класів згідно з Навчальною програмою для поглибленого вивчення математики у 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів (табл. 2.1) [35]:

Табл. 2.1

Зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня підготовки учнів з теми «Геометричні перетворення» для звичайних класів

Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів

Переміщення (рух) та його властивості. Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення. Рівність фігур	Учень/учениця: наводить приклади:· фігур та їх образів при геометричних переміщеннях, указаних у змісті; фігур, які мають центр симетрії, вісь симетрії; рівних фігур; пояснює, що таке: переміщення (рух); образ фігури при геометричному переміщенні; фігура, симетрична даній відносно точки (прямої); симетрія відносно точки (прямої); паралельне перенесення; поворот; рівність фігур; формулює: · *означення*: рівних фігур; · *властивості*: переміщення; симетрії відносно точки (прямої); паралельного перенесення; повороту; зображує і знаходить на малюнках фігури, в які переходять дані фігури при різних видах переміщень; обґрунтовує: симетричність двох фігур відносно точки (прямої); наявність у фігури центра (осі) симетрії; рівність фігур із застосуванням переміщень; застосовує вивчені означення й властивості до розв'язування задач Розв'язує задачі на: знаходження невідомих елементів реальних об'єктів; знаходження площ реальних об'єктів, покриття площини правильними многокутниками тощо

Розглянемо зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня підготовки учнів для класу з поглибленим вивченням математики згідно з Навчальною програмою для поглибленого вивчення математики у 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів (табл. 2.2) [29]:

Табл. 2.2

Зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня підготовки учнів для класу з поглибленим вивченням математики

Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Поняття геометричного перетворення. Переміщення (рух) та його властивості. Рівність фігур. Паралельне перенесення. Симетрії відносно точки та прямої. Поворот. [Композиція переміщень]. Застосування переміщень до розв’язування задач. Гомотетія та її властивості. Перетворення подібності та його властивості. Подібність фігур. Площі подібних фігур. Застосування перетворень подібності та гомотетії до розв’язування задач. [Інверсія. Застосування інверсії до розв’язування задач].	Учень/учениця: пояснює, що таке: геометричне перетворення, образ і прообраз у геометричному перетворенні; формулює: означення: переміщення (руху), паралельного перенесення, симетрії відносно точки (прямої), повороту, гомотетії, перетворення подібності, рівних фігур, подібних фігур, фігури, симетричної даній відносно точки (прямої), центральносиметричної фігури, осесиметричної фігури; властивості: переміщення (руху), паралельного перенесення, симетрії відносно точки (прямої), гомотетії, перетворення подібності, площ подібних фігур; теорему про відношення площ подібних фігур; класифікує геометричні перетворення; зображує фігури, в які переходять дані фігури при різних видах переміщень, гомотетії, перетворенні подібності; обчислює: довжини відрізків у подібних фігурах, площі подібних фігур; обґрунтовує: симетричність двох фігур відносно точки (прямої), наявність у фігури центра (осі) симетрії, рівність фігур із застосуванням переміщень, подібність фігур; доводить: властивості: переміщення (руху), паралельного перенесення, симетрії відносно точки (прямої), гомотетії, перетворення подібності, площ

	подібних фігур; теорему про відношення площ подібних фігур; розв'язує задачі, що передбачають застосування вивчених означень, властивостей і теорем, у т. ч. задачі, що розв'язувалися раніше іншими способами

Роль матеріалу:

1) Введення геометричних перетворень у шкільний курс геометрії дозволило забезпечити «робоче» та «апаратне» тлумачення подібності та рівності фігур. Якщо у діючих підручниках через накладання (суміщення) або рівні елементи вводяться рівні трикутники, то таке ж означення подібності (рівності) для довільних фігур ввести важко, для цього необхідні геометричні перетворення.

2) Подолати деяку статичність у традиційному підході та ввести динаміку у шкільний курс геометрії дозволяють геометричні перетворення. Також з'являється можливість приділити чимало уваги розвитку просторової уяви в учнів.

3) Геометричні перетворення озброюють новим ефективним методом розв'язування задач, який іноді лає змогу полегшити розв'язування задач та доведення теорем.

4) Геометричні перетворення слугують здійсненню внутрішньо-предметних зв'язків із алгеброю (перетворення графіків функцій, функціональна залежність) та міжпредметних – з фізикою (наприклад, механічний поступальний рух), зауважимо, що в фізиці зазвичай досліджується сам процес руху, а у геометрії зафіксоване положення фігури, над якою був здійснений рух (початкове, кінцеве та інколи проміжне положення).

5) Геометричні перетворення вносять у шкільну математику витонченість та естетику. Ідея симетрії (сніжинки, орнаменти, архітектурні споруди), яка є одним з найважливіших засобів гуманітаризації у навчанні математики.

У школі теорія геометричних перетворень може бути побудована традиційним (синтетичним) або аналітичним методом. Найрозповсюдженішим став змішаний: аналітико-синтетичний підхід, який і використовується у діючих підручниках. Цей метод дозволяє спростити навчання та водночас формувати представлення учнів про можливість застосування різних способів геометричних перетворень при розв'язуванні задач.

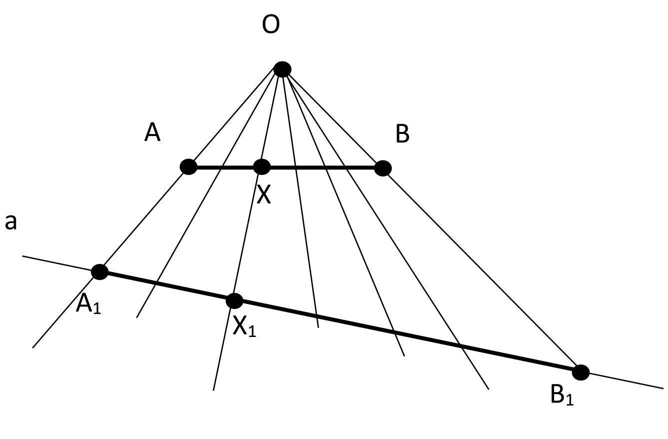
У діючих підручниках цей матеріал представлений у вигляді двох окремих тем: «Подібність трикутників» (8 клас) і «Геометричні перетворення» (9клас) [17].

2.2.2. Методика вивчення геометричних перетворень

Поняття «геометричне перетворення», у діючих підручниках, вводиться по різному. Дехто з авторів дають повне означення, тобто безпосередньо вводиться саме поняття, коли інші це поняття вводять за допомогою розгляду нескладних прикладів та наочний опис.

Наприклад, у підручнику [18] означення геометричного перетворення фігур немає, лише його наочний опис на прикладах.

Приклад 1. На рисунку 2.11 зображено пряму а, відрізок АВ і точку О, яка не належить ні прямій АВ, ні прямій а. Поставимо у відповідність кожній точці Х відрізка АВ точку X_1 прямої а так, щоб точки О, Х і X_1 лежали на одній прямій. Точці А відповідатиме точка A_1, точці В – точка B_1. Зрозуміло, що всі такі точки



X_1 утворюють відрізок A_1B_1.

Рис. 2.11

Ми отримали правило, за допомогою якого кожній точці Х із відрізка АВ поставлена у відповідність єдина точка X_1 із відрізка A_1B_1. У такому разі кажуть, що у результаті перетворення відрізка АВ отримано відрізок A_1B_1.

Приклад 2. На рисунку 2.12 зображено півколо AB та пряму a, яка паралельна діаметру AB. Поставимо у відповідність кожній точці X півкола AB точку X_1 прямої a за таким правилом, щоб пряма XX_1 була перпендикулярною прямій a. Очевидно, що сукупність усіх таких точок X_1 утворять відрізок A_1B_1. Скажемо, що в результаті перетворення півкола AB отримано відрізок A_1B_1.

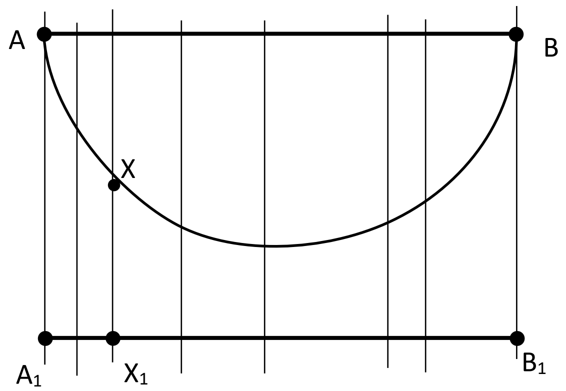


Рис. 2.12

Введення поняття геометричне перетворення у підручнику [19] здійснюється за допомогою прикладу, але, окрім цього, дано чітке означення.

Автор підручника [18] також вводить поняття «фігура F називається прообразом фігури F′».

Розглядаються у шкільному курсі геометрії ті геометричні перетворення, які не змінюють форми і розміри фігури. Вони виливаються в окремий вид перетворень, які називають рухом (переміщенням).

Варто зауважити, що у фізиці також зустрічається поняття переміщення (руху), але має інший зміст. Фізичний рух характеризується траєкторією, швидкістю тощо. У геометрії ж значення мають лише початкове й кінцеве (іноді, проміжне) положення фігури.

Без доведення вводяться наступні властивості руху:

- образом відрізка є відрізок, що рівний даному;
- образом прямої є пряма;
- образом кута є кут, рівний даному;
- образом трикутника є трикутник, рівний даному;
- образом многокутника є многокутник, рівновеликий даному.

Розглядається, кожна із властивостей, при вивченні окремого виду переміщення.

До поняття «рівність фігур» переходять після розгляду загального поняття руху. У певній мірі учні знайомі з цим поняттям: питання про рівність фігур до 7-го класу розв’язувалися накладанням, а у 7-му класі було дано означення рівних відрізків, кутів та трикутників.

На наступному етапі вводиться загальне означення для довільних фігур абстрактно-дедуктивним способом.

Вчителю потрібно пояснити учням, що це означення не суперечить означенням, що вивчалися в попередні роки: рівних відрізків, кутів і трикутників. Заміною методу, що пропонується у підручнику [16], де після вивчення всіх видів рухів розглядається поняття рівності фігур, стала сучасна програма, коли без обґрунтування вводиться твердження «будь-яке накладання є переміщенням, і навпаки: будь-яке переміщення є накладанням», але після вивчення рухів, вчитель, на власний розсуд, може повернутися до цього питання.

В шкільному курсі геометрії розглядаються наступні геометричні перетворення:

1) паралельне перенесення;
2) поворот;
3) центральна симетрія;
4) осьова симетрія;
5) перетворення подібності
6) гомотетія
7) Інверсія (у класах із поглибленим вивченням математики).

Класифікацією поняття «геометричне перетворення» можна представити за допомогою рис. 2.13:

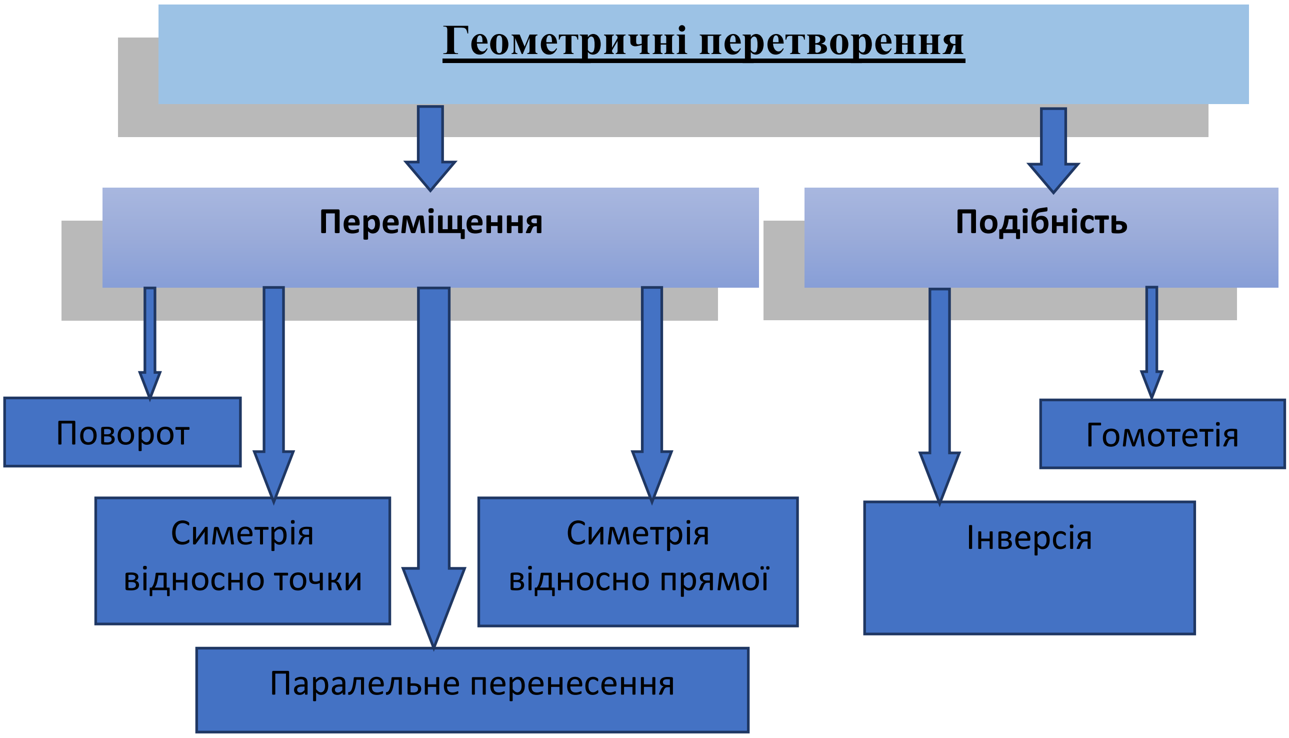


Рис. 2.13

Окремі види геометричних перетворень приблизно розглядають за наступним планом:

1) Проговорюється означення виду перетворення (конструктивне означення) та одночасно виконується побудова;

2) Розв'язується завдання на побудову фігур, що отримуються дією руху (перетворенням подібності) на дані фігури: вводиться геометричне перетворення для точки, відрізка, трикутника та довільної фігури;

3) Тотожне перетворення вводиться неявно, як перетворення, що переводить фігуру саму у себе (означення сформулювало в підручнику [18]);

4) Пропонується завдання на розпізнавання;

5) Зазвичай, задачею на побудову, із обчислення відстаней або послідовним вимірювання, передбачується доведення, що таке перетворення є переміщенням;

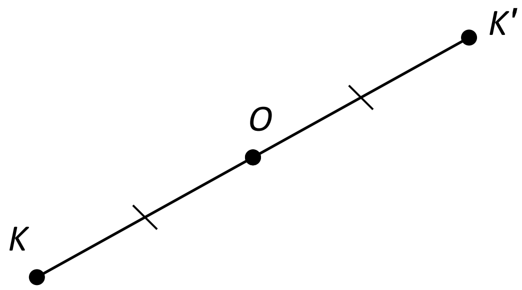
6) Доводяться специфічні властивості даного виду перетворень.

2.2.1. Методика вивчення подібності довільних фігур

Використавши підручник [16], розглянемо, як вводяться наступні види переміщень:

- Центральна симетрія (або симетрія відносно точки)

1) Зафіксуємо точку О, тоді нехай К – довільна точка площини (рис. 2.14). Відкладемо на промені КО відрізок ОК′, який рівний відрізку КО. Отримаємо



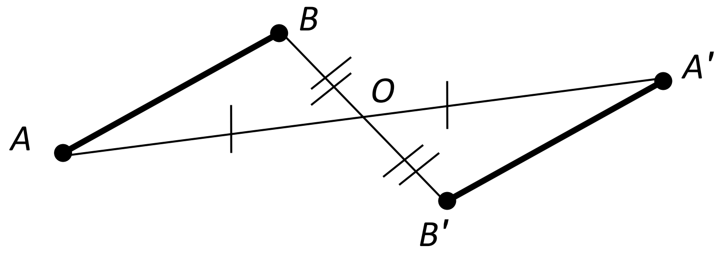
точку К′, що симетрична точці К відносно точки О.

Рис. 2.14

Очевидною є справедливість твердження: точка К є симетричною точці К′ відносно точки О.

2) Розглянемо довільний відрізок АВ та центром симетрії визначимо точку О (рис. 2.15).

3) Далі розглядаємо довільний трикутник АВС (рис. 2.16).



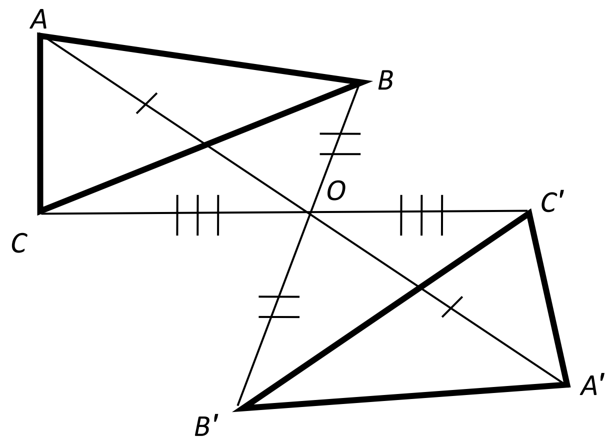


Рис. 2.15

Рис. 2.16

4) Після трикутника розглядаємо довільну фігуру F (рис. 2.17).

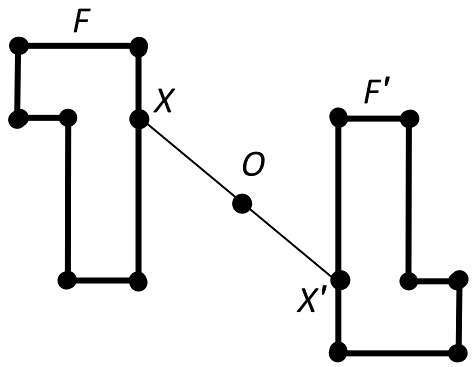
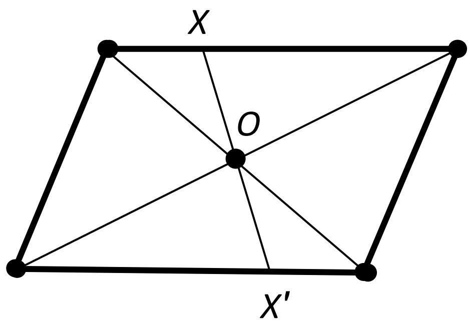


Рис. 2.17

Зазначимо, що симетрією (перетворення симетрії) відносно точки O є таке перетворення фігури F у фігуру F′, в результаті якого кожна точка X із фігури F переходить у точку X′ фігури F′, що є симетричною точці X відносно точки O. Фігури F і F′ називають симетричними відносно точки O. Симетрія відносно точки також має назву центральна симетрія.

5) На цьому етапі розглянемо довільний паралелограм, проведемо його діагоналі, визначимо точку О центром симетрії (рис. 2.18). Будуємо образ



паралелограма з центром симетрії у точці О.

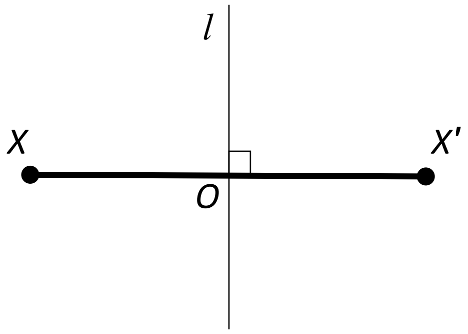
Рис. 2.18

Тоді дамо загальне означення центрально-симетричної фігури: «Якщо перетворення симетрії відносно точки О перетворить фігуру F у себе, то така фігура називається центрально-симетричною, а точка О – центром симетрії фігури F» [16, ст. 141].

Навівши необхідну кількість прикладів, потрібно відокремити поняття: центральносиметрична фігура та фігура, що симетрична іншій відносно даного центру.

- Осьова симетрія (або симетрія відносно прямої)

Зафіксуємо на площі пряму l та позначимо довільну точку X (рис.2.19). Із точки X проведемо перпендикуляр XO до прямої l та на промені XO відкладемо відрізок OX′, який рівний відрізку XO. Отримаємо точку X′, яка симетрична точці



X відносно прямої l.

Рис. 2.19

Очевидно, що точка X є симетричною точці X′ відносно прямої l. Серединним перпендикуляром до відрізка XX′ є пряма l і вона називається віссю симетрії. Говорять, що точки прямої l симетричні самі собі.

На цьому етапі показуємо симетрію відносно прямої: відрізка, трикутника та довільної фігури.

Симетрією (або перетворенням симетрії) відносно прямої l називають таке перетворення фігури F у фігуру F′, наслідком якого кожна точка X фігури F переходить у відповідну точку X′ фігури F′, яка симетрична точці X відносно прямої l (рис.2.20). Тоді фігури F і F′ називають симетричними відносно прямої l.

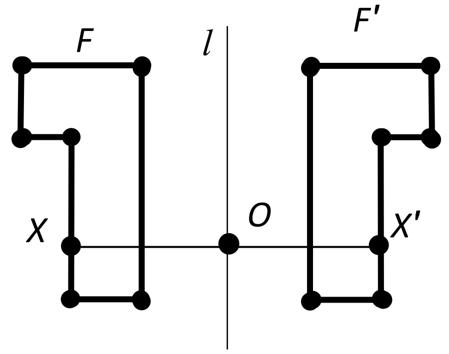


Рис. 2.20

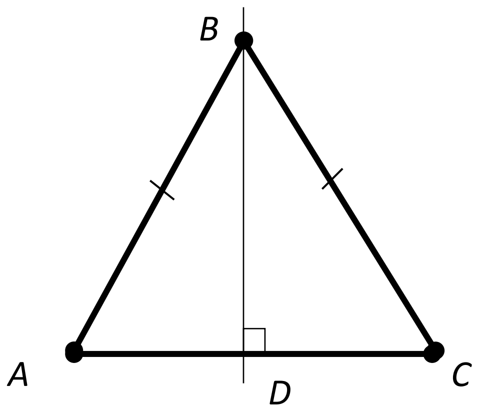
Симетрію відносно прямої ще називають осьовою симетрією.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої l, а сама пряма l – віссю симетрії фігури F.

Наприклад, пряма, що проходить перпендикулярно до основи AC через вершину B рівнобедреного трикутника ABC є віссю симетрії (рис.2.21), так як симетрія, відносно цієї прямої, переводить трикутник у самого себе.

- Поворот

Нехай точка O – зафіксована на площині, а X – довільна точка (рис.2.22). Тоді від променя OX відкладемо у заданому напрямі кут α (із заданою градусною мірою) та на другій стороні кута позначимо точку X′ так, що відрізок OX′ дорівнює відрізку OX. Тоді перехід точки X у точку X′ називають поворотом навколо точки O на кут α.



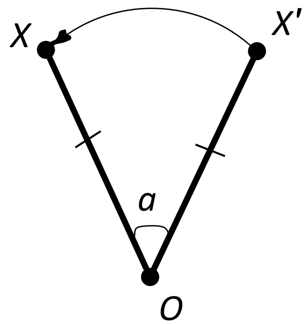
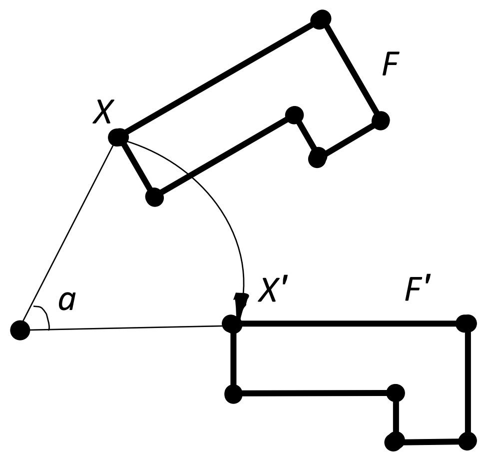


Рис. 2.21

Рис. 2.22

Центром повороту називають точку О, а кутом повороту – кут α (У шкільному курсі геометрії розглядаються тільки кути повороту від 0? до 360?). Також, крім центру і кута, задається поворот напрямом – проти годинникової стрілки або за нею.

Наслідком повороту фігури F навколо точки О на кут α є зміщення кожної точки X даної фігури по дузі кола з центром О і радіусом ОХ (рис.2.23). Очевидно, що після будь-якого повороту залишиться незмінним положення



центра повороту.

Рис. 2.23

- Паралельне перенесення

Перед тим як вводити означення паралельного перенесення, спочатку вводяться означення таких понять: «протилежно напрямлені промені» та «однаково напрямлені (або співнапрямлені) промені».

Нехай промінь ОА задано на площині, причому довжину відрізка ОА прирівняємо до а (рис. 2.24). Тоді, обравши довільну точку X, побудуємо точку X′ так, щоб промені ОА та XX′ були однаково напрямлені та відрізок XX′ також був рівний а. Тоді перетворення точки X у точку X′ є паралельним перенесенням у напрямі променя ОА на відстань а.

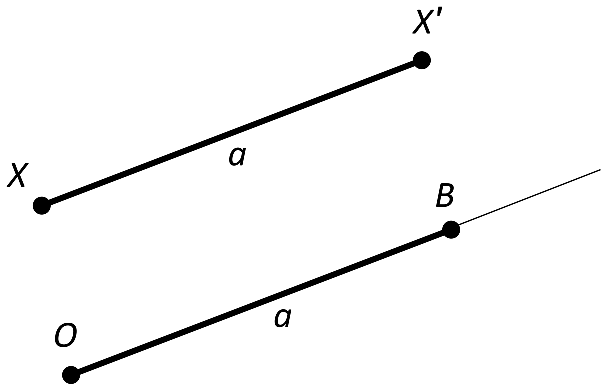


Рис. 2.24

На рисунку 2.25 з фігури F′, внаслідок паралельного перенесення у напрямі променя ОА на відстань а, отримано фігуру F.

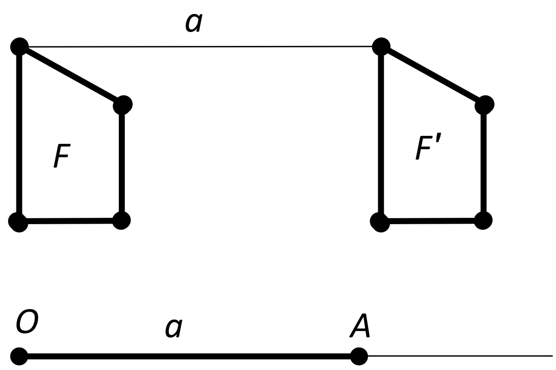


Рис. 2.25

У прямокутній системі координат вдало ілюструються приклади такого геометричного перетворення (рис. 2.26), де паралельне перенесенням є рух, який переводить точку (x; y) у точку (x′; y′) та задається формулами:

$$x' = \mathbf{x} + a$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + b$$

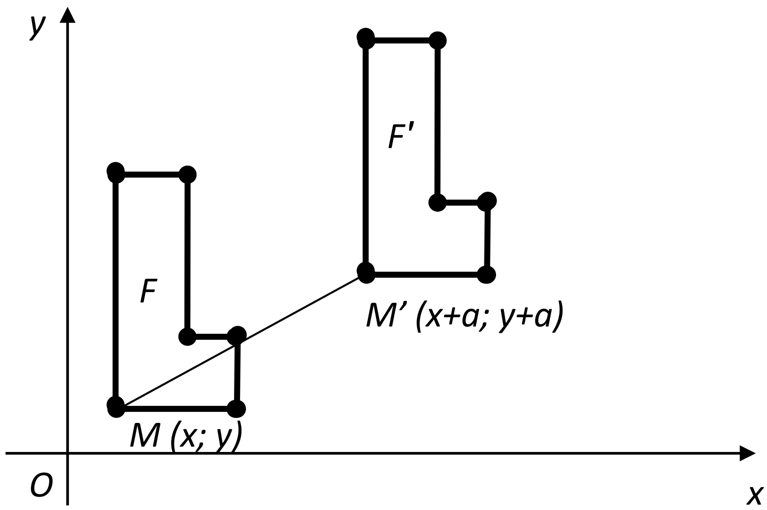


Рис. 2.26

Коли розглянуто усі види руху потрібно з учнями розв’язувати завдання, які направлені не лише на виконання геометричних перетворень, а й на вміння їх розпізнавання.

Наприклад, на яких із рисунків дані фігури симетричні відносно прямої, а які – відносно центра симетрії?

Розглядуючи кожен із видів переміщень потрібно підкреслювати, що відстані між точками даної фігури та відповідними точками фігури, що отримали у результаті руху, зберігаються.

Усі властивості геометричних перетворень можна подати у вигляді таблиці, яка заповнюється поступово у такому порядку: властивості руху → властивості подібності.

При вивченні властивостей руху не так важливо, щоб учні вміли доводили ці властивості, як те, щоб вміли їх виконувати.

2.2.3. Методика вивчення подібності довільних фігур

Розглянуті вище чотири види перетворень належать до переміщень, тобто тими, що зберігали відстань між точками. Після цього розглядається перетворення подібності – це геометричне перетворення, у якому відстань між точками може змінюватися. Для трикутників поняття подібності вже відоме з курсу геометрії 8 класу.

Для вивчення теми «Подібність фігур» можна застосовувати різні методичні підходи:

1 підхід. У підручнику [19] вводиться поняття подібності довільних фігур та як окремий вид перетворення подібності розглядається гомотетія.

2 підхід. Автори підручника [18] як вид геометричного перетворення розглядають гомотетію і узагальнюють поняття подібності як наслідок композиції гомотетії та руху.

Абстрактно-дедуктивним методом вводиться означення подібності двох довільних фігур:

Означення подібності фігур ілюструє рис. 2.27 :

Подібність = Гомотетія + Поворот

Рис. 2.27.

Запис F ~ F′ означає, що фігури F і F′ подібні. Також образом фігури F при перетворенні подібності називають фігуру F′. Число k > 0 – коефіцієнтом подібності (при k = 1 маємо X′Y′ = XY, тобто всі відстані між точками зберігаються, а це означає, що такий окремий випадок подібності буде переміщенням).

Про перетворення подібності учні мають наочне уявлення: рисунок, що з дошки переноситься учнями до зошита, виконується перетворення подібності; фотографії є перетворенням негативу в подібного зображення на фотопапір; виконане в масштабі зображення ділянки місцевості на плані. У випадку останньої наочності масштаб є коефіцієнтом подібності, він вказує у скільки разів відрізняються відстані між позначеннями об’єктів на плані від реальних відстаней. Необхідно узагальнити та систематизувати наявні знання в учнів. У школі, з перетворення подібності, розглядається тільки гомотетія [20].

Означення гомотетії є конструктивним. Нехай точка O зафіксована на площині, точка X є довільною точкою фігури F (рис.2.28). На промені OX відкладемо відрізок OX′, що рівний kOX (k – стале додатне число). Для кожної точки фігури F порівняємо такі побудови та дістанемо фігуру F′ – образ фігури F, яка отримана внаслідок перетворення, що називають гомотетією.

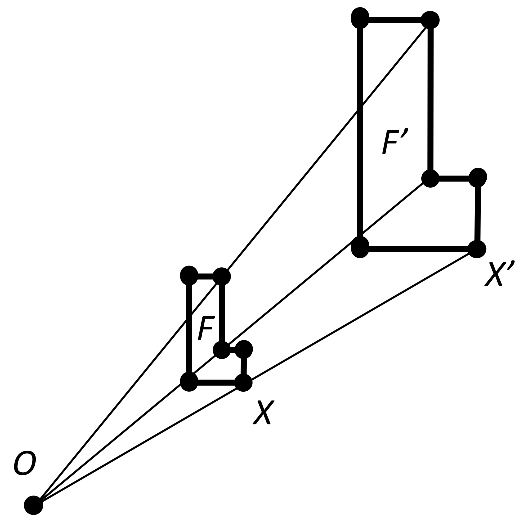
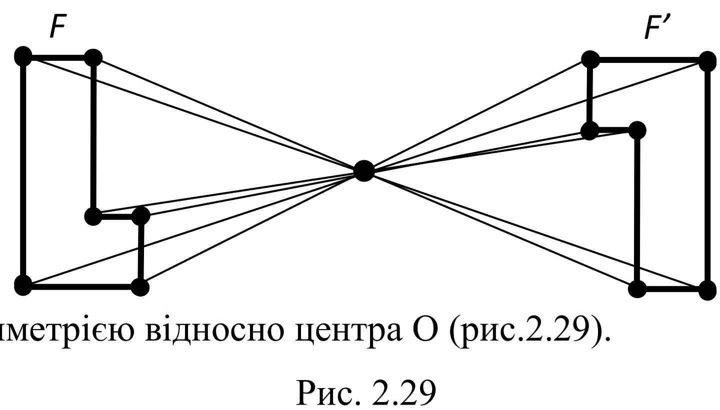


Рис. 2.28

Підручник [18] строгого означення гомотетії не дає, натомість вводиться за допомогою розглядання конкретних прикладів у контексті.

Зазначимо, при k = 1 гомотетія є тотожним перетворенням, якщо ж k = –1,



то центральною симетрією відносно центра O (рис.2.29).

Рис. 2.29

Після цього розглядаються властивості подібності. При гомотетії:

- образом відрізка є відрізок;
- образом прямої є пряма;

- образом кута є кут, який дорівнює даному;
- образом кола є коло;
- образом трикутника є трикутник, подібний даному.

Із означення та властивостей подібності випливає, що фігура, яка подібна многокутнику – це многокутник з такими самими кутами та з однаковою кількістю сторін, що пропорційні даному.

Інверсію розглядають у класах з поглибленим вивченням математики. Перед формуванням означення інверсії, розглядають наочні приклади. Наприклад, обирають на площині коло K із радіусом r та центром у точці O. Кожній відмінній від центра кола точці A, у відповідність ставиться точка A_1, яка належить прямій OA так, що справедливою є рівність $OA \cdot OA_1 = r^2$. У такому випадку точка A_1 називається інверсною (або зворотною) із точкою A відносно даного кола (O; r). Будуються образи точки A неважко. Якщо точка A всередині кола, то до півпрямої OA будується перпендикуляр AB та у точці B – дотична до кола K. Перетином цієї дотичної та півпрямої OA буде точка A_1, яка інверсна з точкою A.

Якщо точка A знаходиться поза колом K, то спершу проводиться дотична до кола, а тоді – з точки дотику B – перпендикуляр до півпрмої OA. Точкою A_1 (яка інверсна з точкою A) буде основа цього перпендикуляра.

Такі побудови точки A_1 неможливо виконати, якщо точка A співпадає з центром кола K.

Висновки до другого розділу

У другому розділі досліджено теоретичні відомості з теми «Геометричні перетворення» у шкільному курсі геометрії, як у звичайних так і у класах з поглибленим вивченням математики: наведені означення та всі основні властивості геометричних перетворень із доведенням.

Також проаналізована методика вивчення цієї теми, її поділ на рухи та перетворення подібності. У шкільному курсі геометрії вивчають наступні рухи:

- паралельне перенесення;
- поворот;
- центральну симетрію;
- осьову симетрію.

Та вивчають такі перетворення подібності:

- гомотетію;
- інверсію (у поглиблених класах).

Зокрема, при перетвореннях подібності, вивчають ознаки подібності трикутників.

Зазначимо, що у результаті вивчення теми «Геометричні перетворення» у школі учні повинні вміти:

- описувати рухи та перетворення подібності;
- будувати образи фігур, що утворюються при геометричних перетвореннях;
- обґрунтовувати вид перетворення;
- застосовувати набуті знання до розв’язування задач.

РОЗДІЛ ІІІ
ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАСОБІВ ІКТ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ»

У сучасному світі комп’ютер захопив майже усі галузі, не підпадає під виключення й освітня галузь. Для розвитку у дітей цікавості до навчання на уроці недостатньо особистісних якостей вчителя. Потрібно створювати новітні технічні умови навчання. Цікавість учнів до предмету сильно залежить від того, як проходять уроки. Використання комп'ютерної техніки дозволяє зробити урок, яскравим, насиченим, нетрадиційним, за допомогою наочностей наповнює його зміст знаннями з інших сфер, що перетворює математику із об'єкту вивчення у засіб для отримання нових знань. Зауважимо, що комп'ютер не замінює вчителя, а лише доповнює його. Сучасний етап розвитку освіти характеризується широким впровадженням у закладах освіти інформаційних технологій, які мають чималі можливості застосування у процесі навчання. Причому, нові інформаційні технології навчання дозволяють виводити учнів за межі школи, відкривають для них двері до світових знань. Можна довго дискутувати щодо ефективності інформаційних технологій, але не застосовувати їх на уроках не маємо права [36].

3.1. Короткі теоретичні відомості про ІКТ середовища, що сприяють формуванню математичних компетентностей

Для формування теоретичних компетентностей з теми «Геометричні перетворення» будемо використовувати наступні інформаційні технології:

3.1.1. MS PowerPoint

Презентація – достатньо ефективне застосування інформаційних технологій. Презентація подає інформацію у формі, яка добре запам’ятовується, завдяки візуалізації та звуковими переходами, впливаючи на органи чуттів, у результаті, добре запам’ятовується. Така мультимедійна форма дозволяє подати матеріал як систему опорних образів, які наповнені, в алгоритмічному порядку, повною структурованою інформацією. Метою такого подання інформації є формування системи образного мислення в учнів [33].

Застосування презентацій дозволяє зробити урок яскравим, нетрадиційним, сучасним, наповнюючи урок з математики наочними знаннями та зв'язуючи її з іншими наочними областями.

Ефективність застосування презентацій на уроках геометрії при вивченні теми «Геометричні перетворення» зумовлюється:

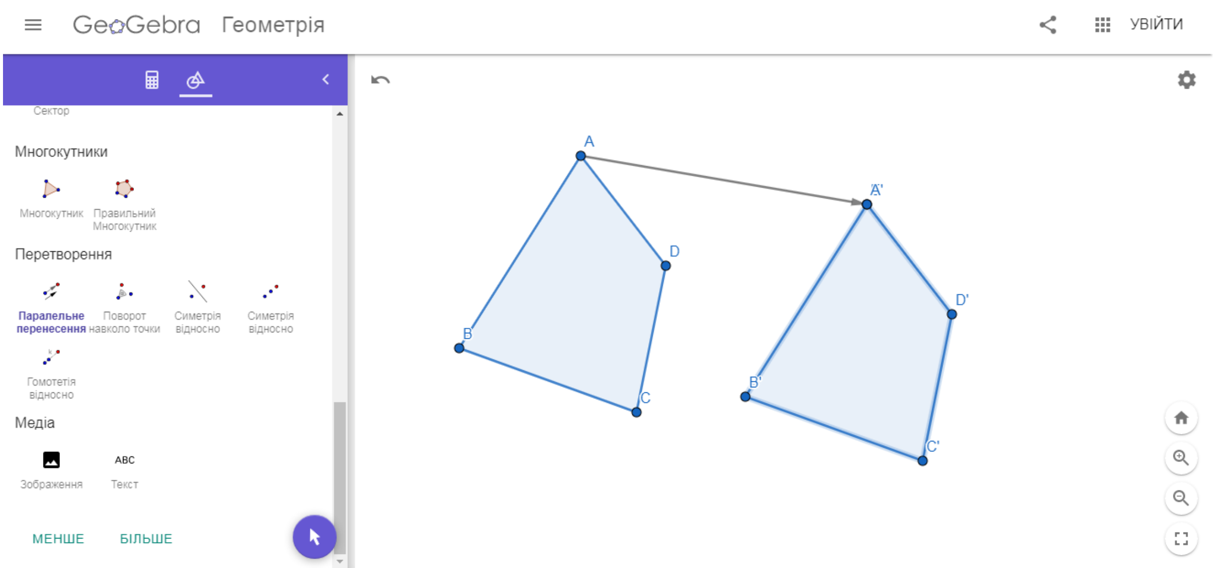
- високим ступенем наочності;
- різноманітністю форм, якими здійснюється представлення інформації;
- економія навчального часу;
- з'являється можливість відтворення самих процесів рухів та перетворень подібності;
- підвищується продуктивність уроку;
- в учнів збільшується пізнавальна мотивація;
- полегшується процес оволодіння учнями складним матеріалом.

Отже, використовуючи такі мультимедійні засоби, як презентації, учитель робить процес навчення більш наочним та динамічним. Доречне використання комп'ютера на уроці у поєднанні з педагогічною майстерністю дає можливість вчителю підвищити якість знань учнів [34].

3.1.2. GeoGebra

Середовище «GeoGebra – це вільний педагогічний програмний продукт, призначений для вивчення і викладання математики в середніх та вищих навчальних закладах, який поєднує динамічну геометрію, алгебру, математичний аналіз і статистику» [1, с. 102]. Це дозволяє вчителю наочно демонструвати різні за складністю геометричні перетворення та, змінюючи прообраз фігури, демонструвати у реальному часі зміну образу (результату руху чи гомотетії). Цей програмний продукт має змогу працювати як онлайн, так і офлайн, підтримує українську мову та працює на великій кількості операційних систем.

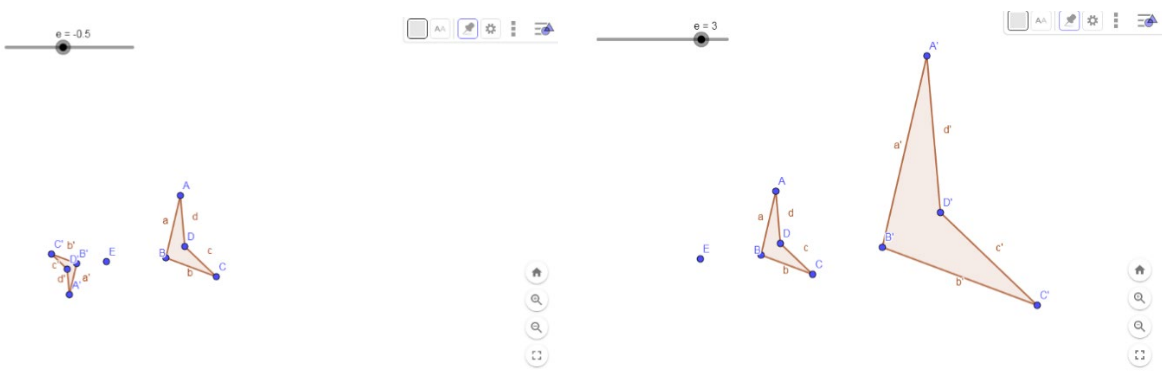
Це середовище дозволяє здійснювати побудови переміщення майже на інтуїтивному рівні, у підменю «Переміщення» (рис. 3.1) знаходяться: паралельне перенесення, поворот відносно точки, осьова симетрія, симетрія відносно точки та гомотетія відносно точки. Наприклад, для паралельного перенесення достатнього натиснути на відповідну кнопку у меню, обрати фігуру, яку хочемо перемістити на заданий вектор та побудувати цей вектор (на рисунку точка A є початком



цього вектора, а точка A' його кінцем [28].

Рис. 3.1. Геометричне середовище GeoGebra Геометрія: паралельне перенесення на заданий вектор

Побудова гомотетії (рис. 3.2) вимагає задати коефіцієнт гомотетії. Якщо коефіцієнт від’ємний, то результат переміщення буде по іншу сторону центру гомотетії (рис. 3.2а). Якщо коефіцієнт додатній, то результатом переміщення буде фігура, що лежить по ту саму сторону, що і початкова фігура відносно центру гомотетії (рис. 3.2б) [28].



а)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　б)

Рис. 3.2. Геометричне середовище GeoGebra Classic: гомотетія

Щоб учні краще розуміли побудову гомотетії середовище дає змогу створити повзунок для плаваючого значення коефіцієнту гомотетії, що створює можливість наочної демонстрації руху та зміни розмірів образу фігури [28].

3.1.3. GRAN-2D

Призначенням програми GRAN-2D є графічний аналіз геометричних об’єктів, що знаходяться на площині, звідки і походження назви програми (GRaphic Analysis 2-Dimension) [32].

Це прикладне програмне забезпечення дає змогу здійснювати такі геометричні перетворення: поворот (відносно деякої точки), паралельне перенесення та деформацію таких типів об’єктів, як точка, лінія, коло, ламана. Для цього у головному меню потрібно натиснути Об’єкт та обрати Перетворення. Самі ж параметри перетворення можна задавати двома способами: графічно, користуючись мишкою, «з екрану» та введенням у відповідні поля значення кута повороту чи вектора перенесення. Для цього потрібно обрати опцію З екрану або Параметри відповідно [32].

3.1.4. CaRMetal

Інтерактивна програма для планіметрії, створена на платформі C. a. R. Це середовище повністю безкоштовне. CaRMetal використовує графічний інтерфейс, що забезпечує прямий доступ до багатьох функцій. Побудови виконуються за допомогою основного меню, яке містить набір стандартних інструментів. Актуальне це середовище до даної теми тим, що містить у собі вбудований макрос для побудови інверсії.

CaRMetal має мову сценаріїв JavaScript, що дозволяє користувачу створювати складні фігури, наприклад, фрактали.

До переваг даного середовища можна віднести:

- побудову макросів;
- багатомовний інтерфейс;
- працює на різних платформах;

- безкоштовна.

До недоліків віднесемо:

- незручна робота із геометричним місцем точок;
- незручна система вимірів.

3.2. Формування математичних компетентностей при вивченні нового матеріалу за допомогою засобів ІКТ

На етапі вивчення нового матеріалу з теми «Геометричні перетворення» доцільного застосовувати наочності для того, що розмежувати поняття перетворення та руху. На рис. 3.3 зображений слайд, що ілюструє процес перетворення, коли об’єкт змінює не тільки розміщення, але й свої розміри. Порівнюючи його із кожним рухом для учнів сформується розуміння, що при русі, фігури не змінюють своїх розмірів.

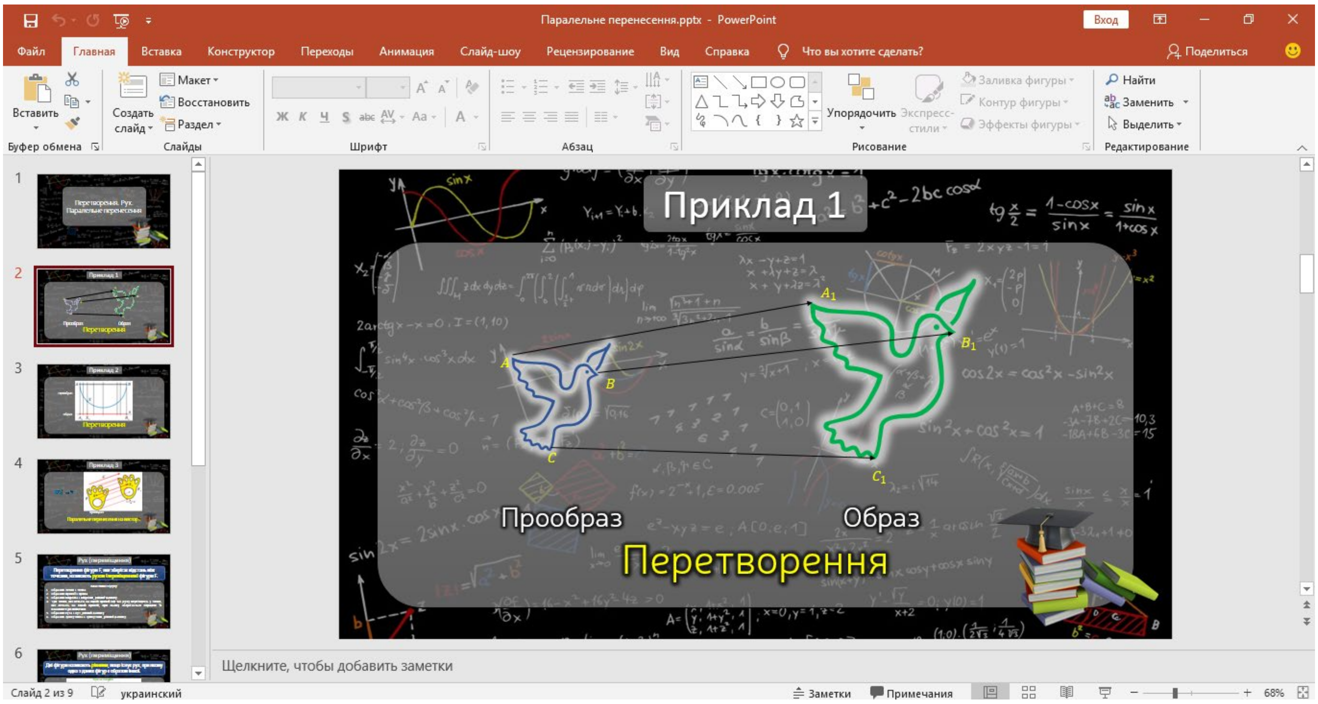


Рис. 3.3

- Паралельне перенесення

При розгляданні паралельного перенесення доречно використати середовище GeoGebra Геометрія, за допомогою якого можна у реальному часі продемонструвати процес паралельного перенесення змінюючи розмір вектора $\vec{a}$ (рис.3.4).

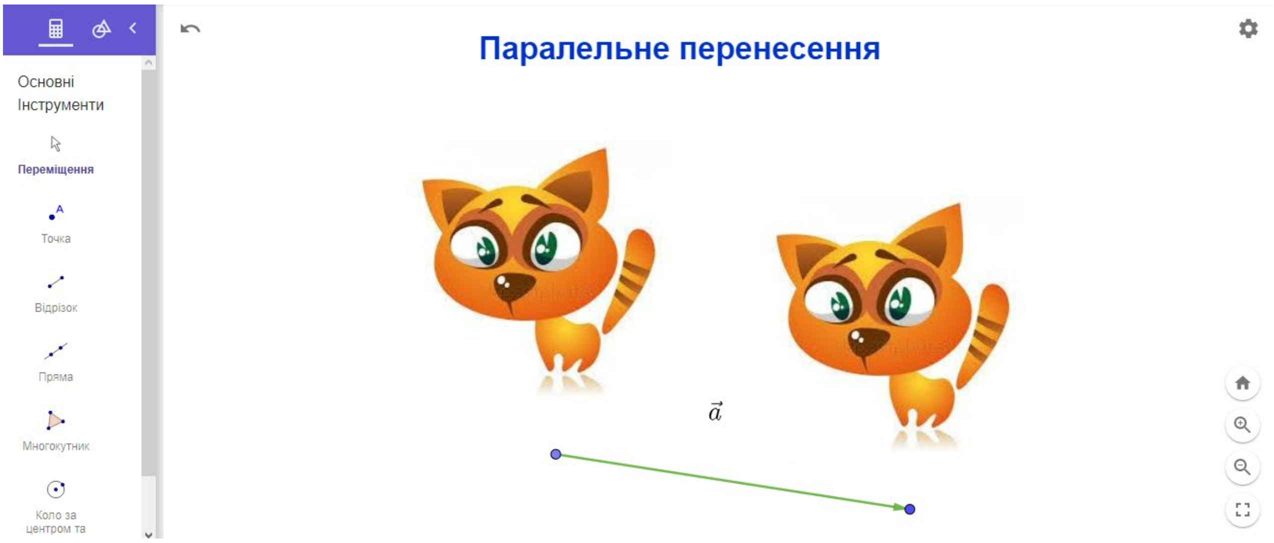


Рис. 3.4

- Центральна симетрія

Враховуючи специфіку вивчення геометричних перетворень, при розглядання центральної симетрії пропонуємо застосовувати презентацію (рис.3.5), яка дозволяє збільшити продуктивність уроку, зекономивши час вчителя на побудову перетворень, сфокусуватись на пояснення матеріалу.

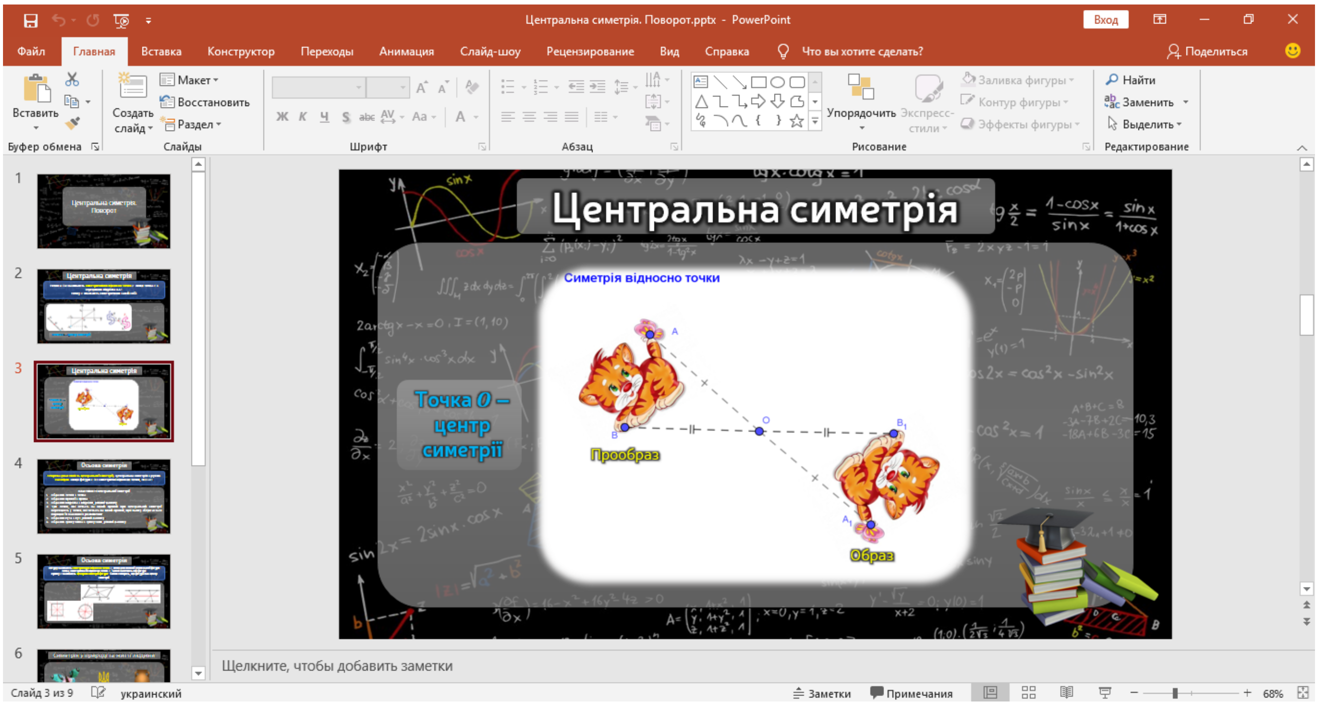


Рис. 3.5

Відповідно до паралельного перенесення, побудову симетрії відносно точки в реальному часі можна продемонструвати за допомогою програми GeoGebra Геометрія (рис. 3.6).

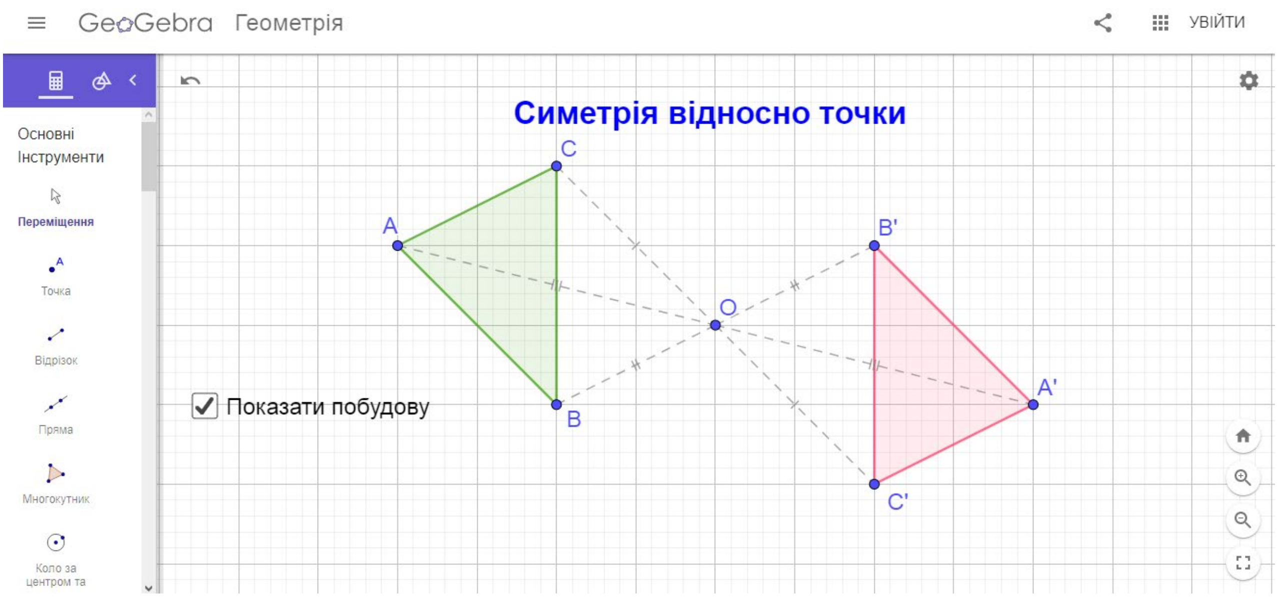


Рис. 3.6

- Осьова симетрія

Також нами створено відповідну презентацію для осьової симетрії (рис. 3.7)

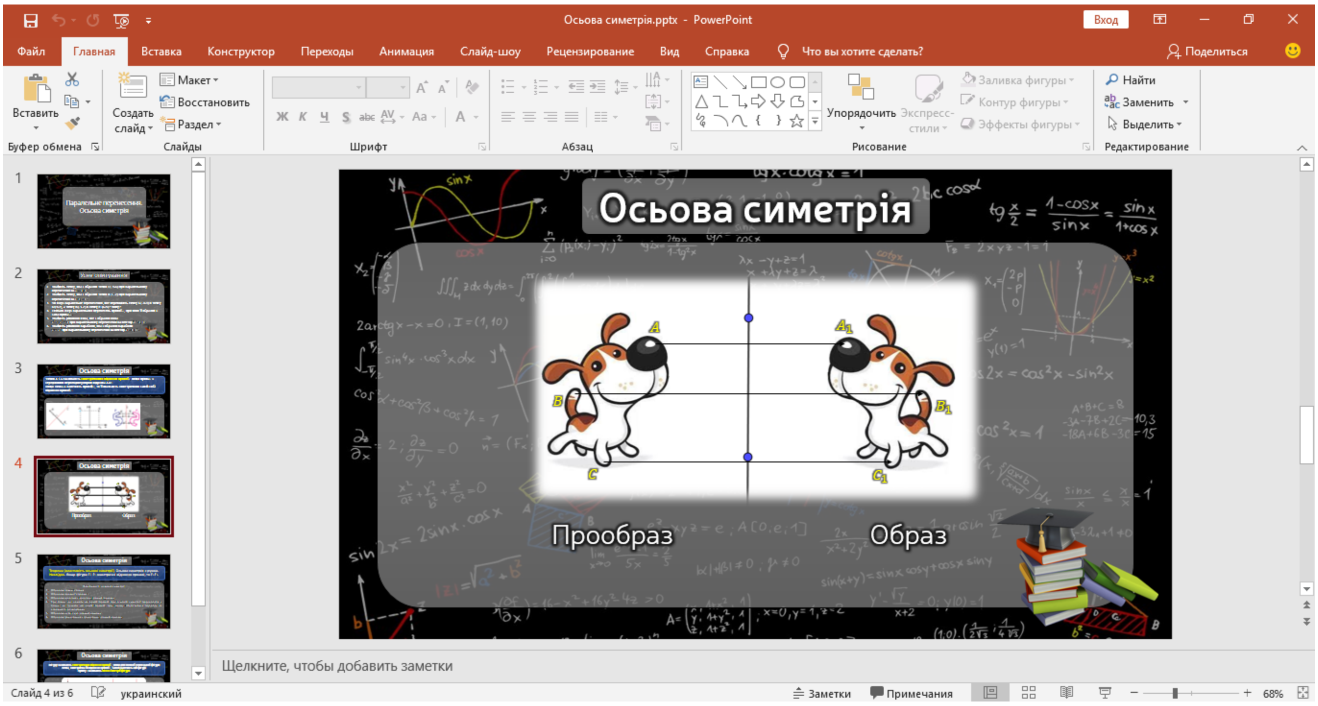


Рис. 3.7

Також створено відповідний файл програми GeoGebra Геометрія (рис. 3.8)

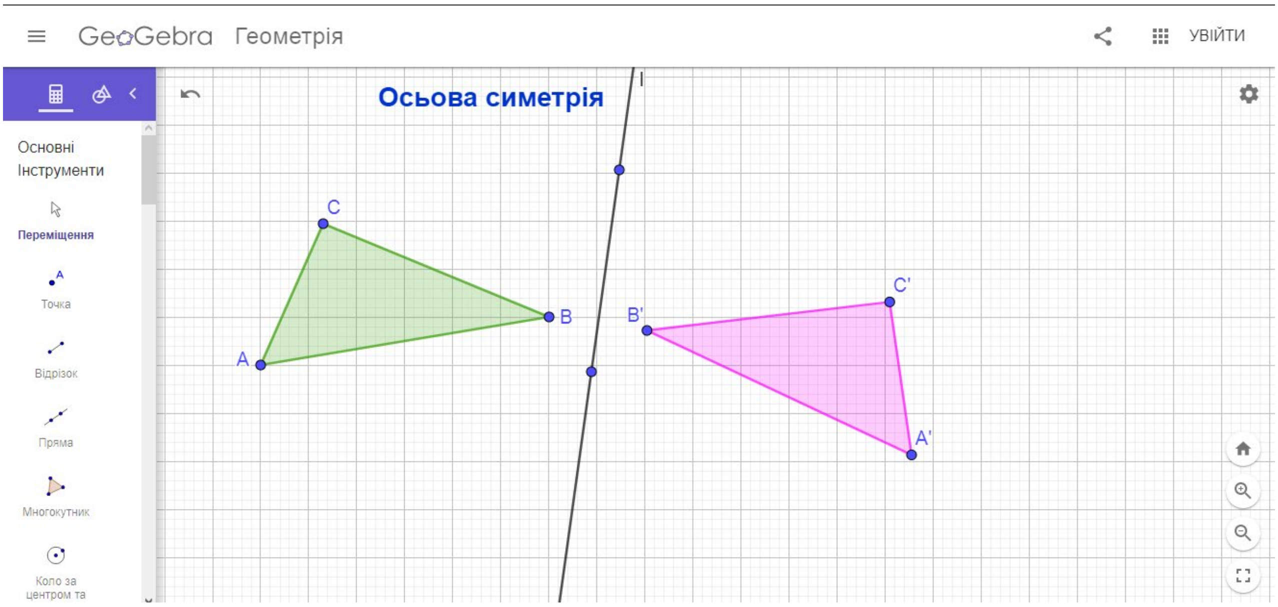


Рис. 3.8

- Поворот

Створена аналогічна презентація для повороту із врахуванням його особливості, окрім центру перетворення, він задається ще кутом повороту (рис. 3.9).

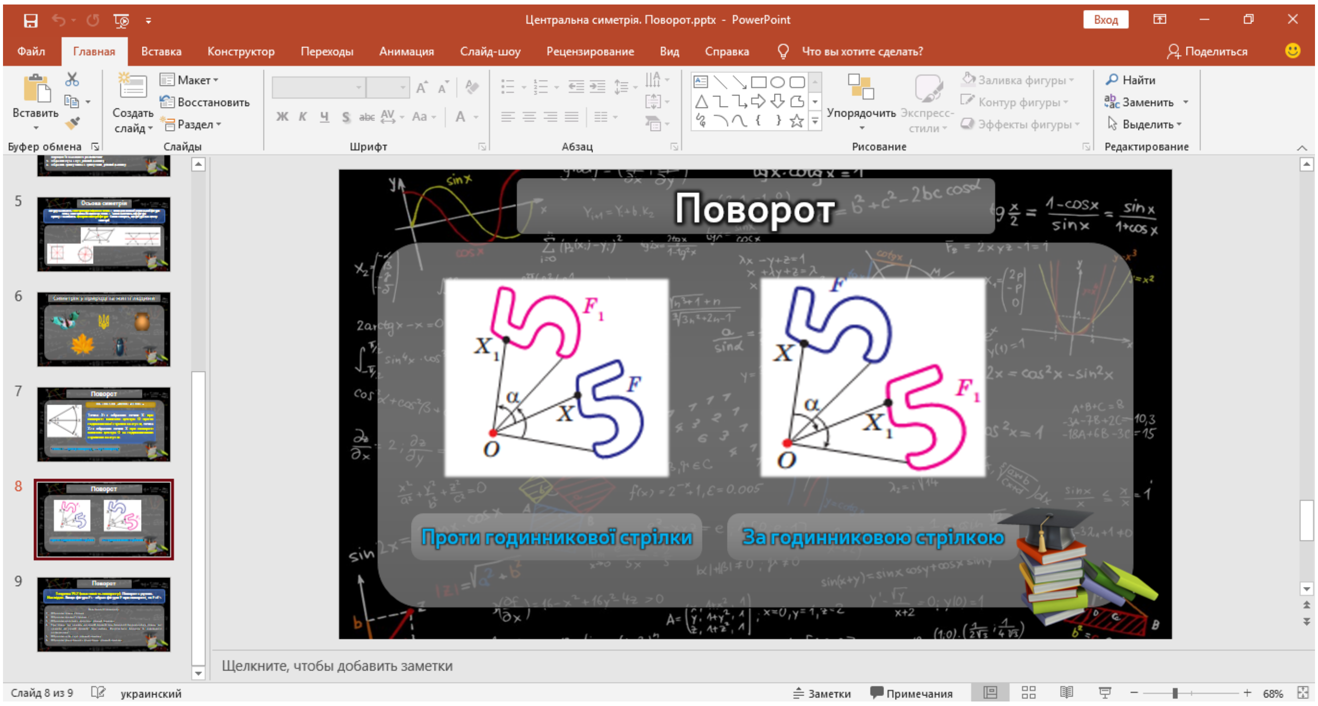


Рис. 3.9

Для відтворення повороту на уроці у реальному часі розроблено, в середовищі GeoGebra Геометрія, поворот трикутника на -120° (рис. 3.10), за необхідності, кут повороту можна змінити.

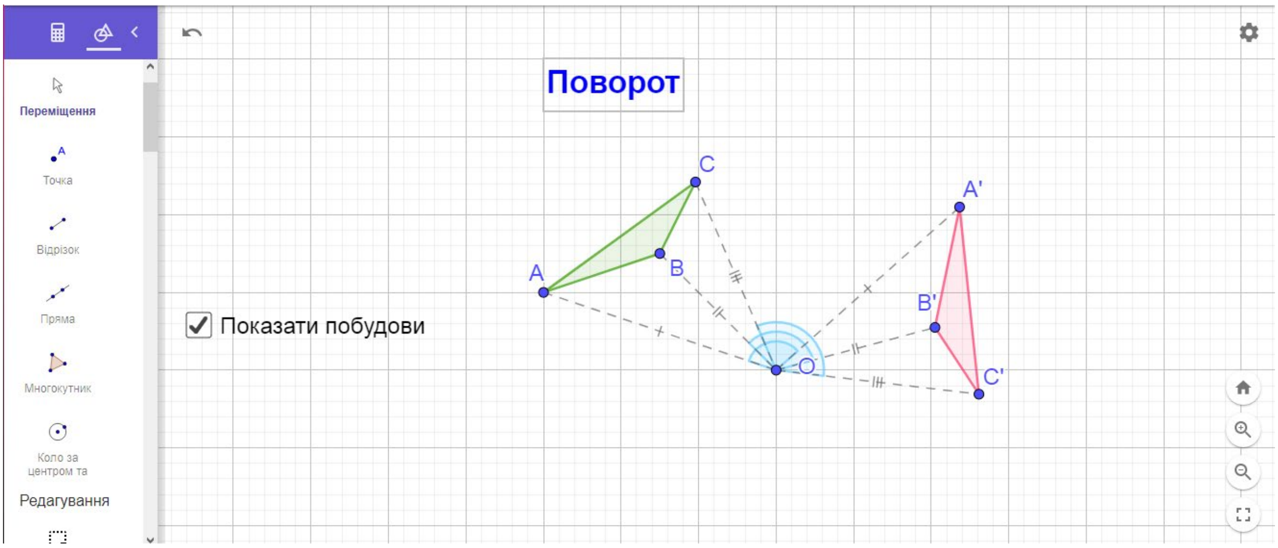


Рис. 3.10

- Гомотетія

На відміну від рухів, при гомотетії змінюються розміри фігури, що ускладнює вчителю процес вивчення нового матеріалу та формування відповідних вмінь. У цьому випадку презентація (рис 3.11), яка здатна зекономити час, за рахунок попередньої її підготовки, набуває ще більшої цінності.

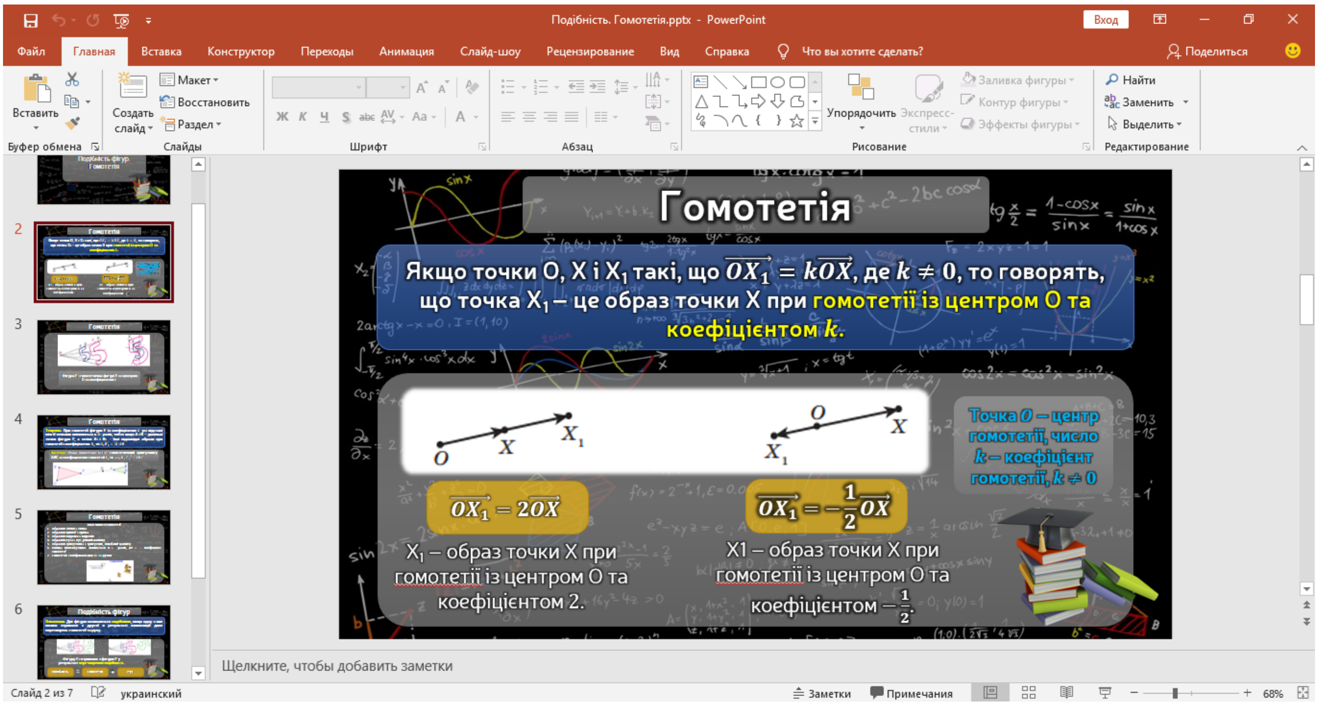


Рис. 3.11

GeoGebra Геометрія, що є складнішою у використанні, так як вимагає або підключення до мережі Інтернет, або встановленого відповідного програмного забезпечення, також дозволяє продемонструвати логіку такого перетворення як гомотетія, особливо як вона залежить від значення коефіцієнту (рис. 3.12).

Рис. 3.12

- Подібність фігур

Це перетворення є композицією двох інших, тому застосування такого мультимедійного засобу, як презентація, економить час уроку, за рахунок готових зображень, та надає вчителю можливість більш детально розібрати дане перетворення (рис. 3.13).

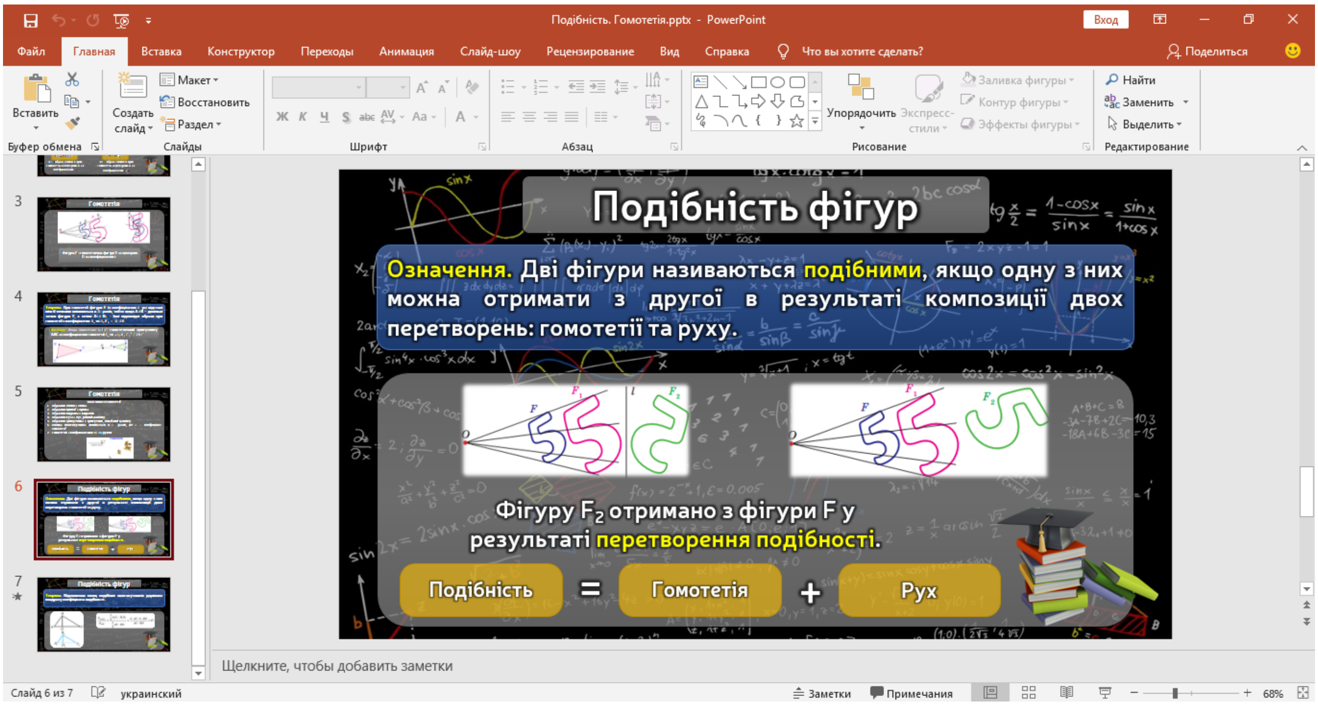


Рис. 3.13

- Інверсія

Задачі на побудову, які розв’язуються за допомогою інверсії, зазвичай потребують особливого підходу до них та формального сприйняття їх учнями. Такі задачі зручні для закріплення теоретичних знань з теми «Геометричні перетворення». Для формування теоретичних знань з інверсії доцільно використовувати програми динамічної геометрії, як CaRMetal (рис. 3.14), GeoGebra Геометрія, GRAN-2D тощо.

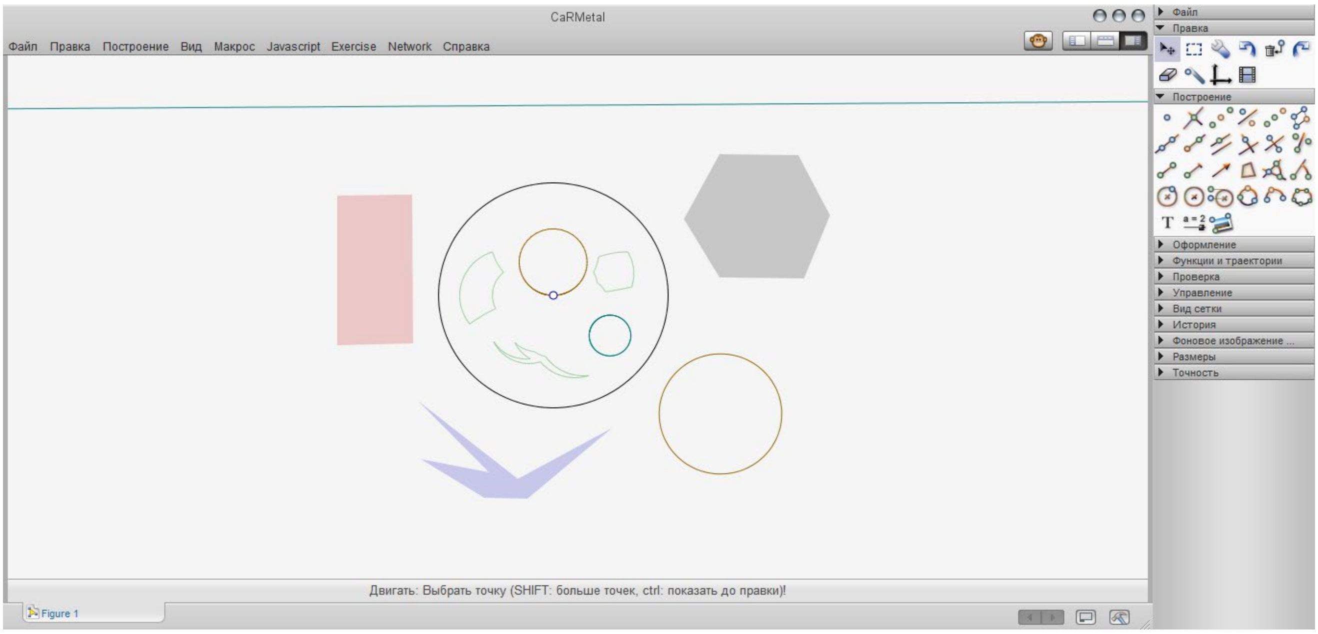


Рис. 3.14

3.3. Розв’язування задач з даної теми з використанням засобів ІКТ

- Паралельне перенесення

Розв’яжемо задачі з використанням середовища GeoGebra Геометрія:

Задача 3.1. Чи існує таке паралельне перенесення, при якому точка $K(-1; -1)$ переходить у точку $L(1; -4)$, а точка $M(0; 1)$ – в точку $N(2; -1)$.

Розв’язання. Побудуємо два вектора перенесення та порівняємо їх, якщо вектори рівними, то таке паралельне перенесення існує, в іншому випадку – не існує. У середовищі GeoGebra Геометрія побудуємо дані точки. Та вектори їх паралельного перенесення (рис 3.15).

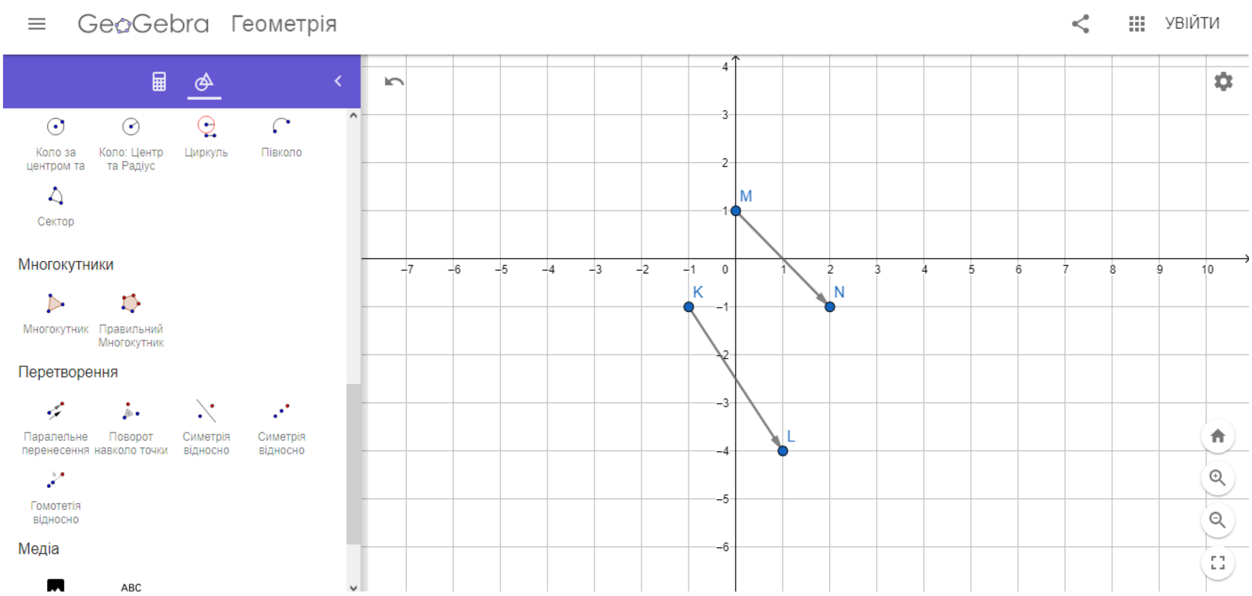


Рис. 3.15

Очевидно, що ці вектори різні (для наочності, можна перемістити один вектор та спробувати накласти на інший).

Відповідь: Такого паралельного перенесення не існує.

Задача 3.2. Річка розділяє села A і D. У якому місці варто побудувати міст BC, щоб шлях $ABCD$ із села A до села B був найкоротшим (міст перпендикулярний до берегів, а береги річки вважаємо паралельними прямими).

Розв’язання. Побудуємо дві прямі – береги річки та, розглянемо загальний випадок, позначимо точки A і D – села – так, щоб вони не лежали на перпендикулярній прямій до берегів річки.

Нехай $\overrightarrow{MN}$ – вектор, довжиною рівний ширині річки. Перенесемо точку A на вектор $\overrightarrow{MN}$, отримаємо точку A':

$$T_{\overrightarrow{MN}}(A) = A'$$

Тоді відрізок DA' перетне берег села B у точці C. Тоді у точці C перпендикулярно до берегів будуємо міст BC (рис. 3.16).

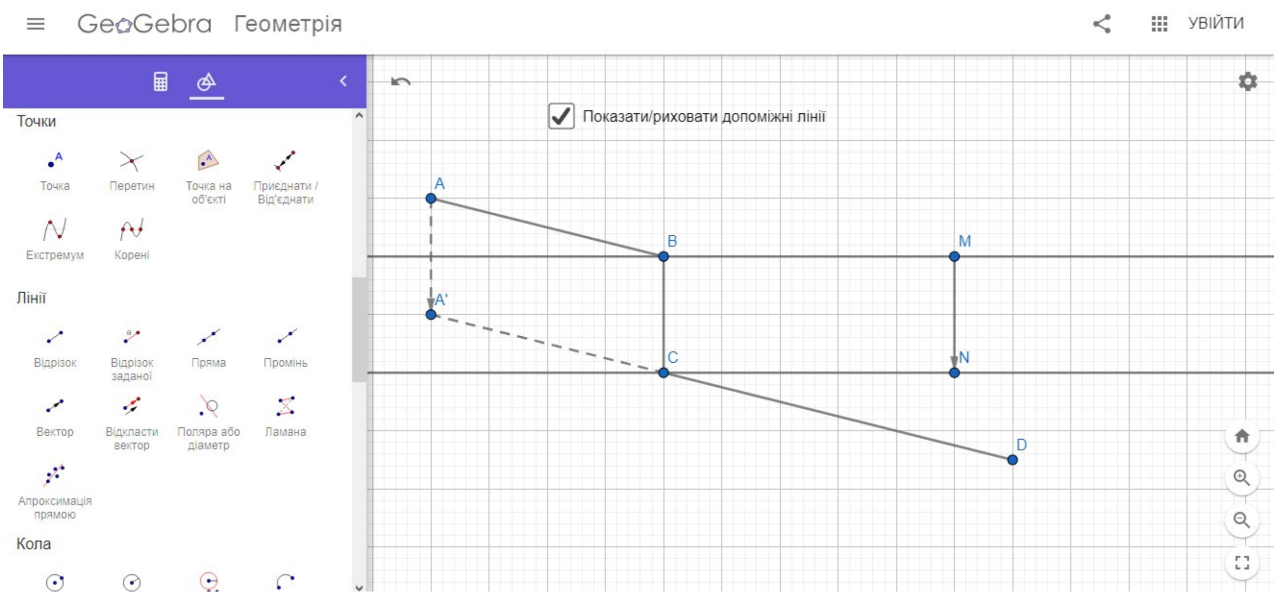


Рис. 3.16

Доведемо, що утворений шлях $ABCD$ найкоротший:

$A'D = AB + CD;$

$AB + BC + CD = A'B + BC + CD;$

Отримали BC – стала величина, а $A'B + CD$ – найменша із можливих відстаней. Отже, такий шлях $ABCD$ буде найкоротшим.

Задача 3.3. Дано пряму p і кут ABC, сторони якого не паралельні цій прямій. Побудуйте пряму p_1, паралельну прямій p, так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини a (рис. 3.17).

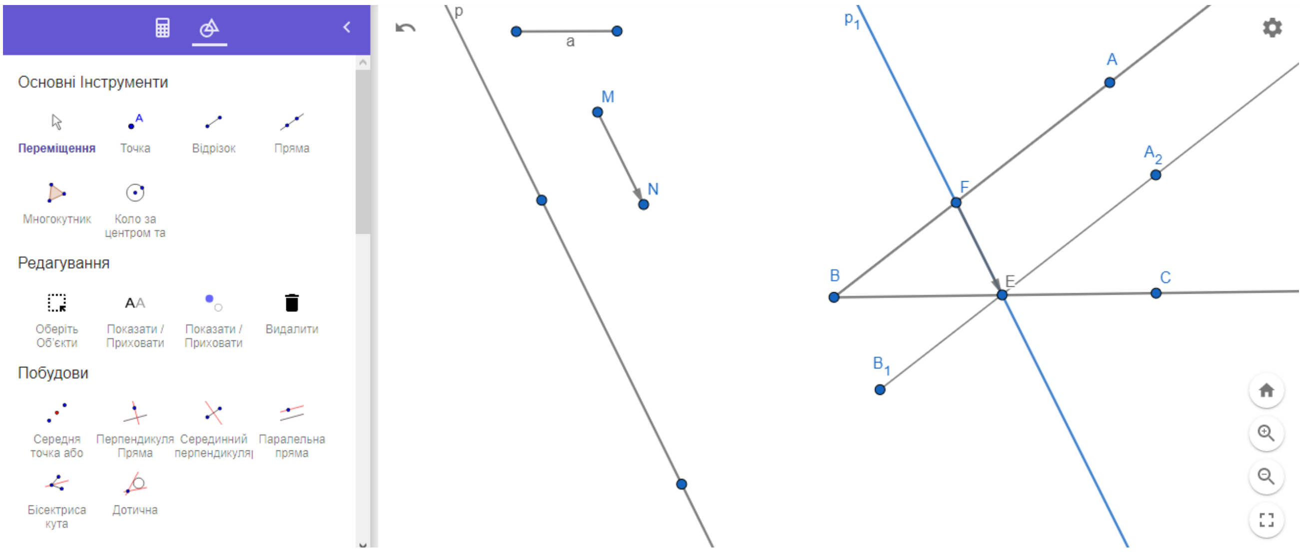


Рис. 3.17

Розв'язання. Розглянемо такий вектор $\overrightarrow{MN}$, що $MN \parallel p$ і $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 3.17). Побудуємо образ променя BA, який утворюються при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$, отримаємо промінь B_1A_1. Точка E є перетином променів BC і B_1A_1. Тоді нехай точка F — прообраз точки E при паралельному перенесенні, що розглядається. З чого слідує, що $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, тобто $|\overrightarrow{FE}| = a$ і $FE \parallel p$.

Такі міркування підказують наступний алгоритм побудови:

1) знаходимо образ променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$;
2) позначаємо точку перетину променя BC із образом променя BA ;
3) через знайдену точку проводимо пряму p_1, паралельну прямій p .

Тоді шуканою прямою буде пряма p_1.

- Центральна симетрія

Розв'яжемо задачі з використанням ППЗ GRAN-2D:

Задача 3.4. Точки $A(-3;-4)$ і $B(2;-3)$ є кінцями відрізка. Побудуйте симетричний до даного відрізок $A'B'$, який симетричний початку координат та знайдіть координати його кінців.

Розв'язання. Побудуємо точку $O(0;0)$, дані точки та відрізок у середовищі GRAN-2D. Використавши засіб програми «Об'єкт\Створити\Точка, симетрична даній точці», відносно початку координат, побудуємо, симетричні до даних, точки A' і B' та сполучимо їх відрізком. Отримані точки мають координати, описані у контекстному вікні праворуч (рис. 3.18): $A'(3;4)$; $B'(-2;3)$.

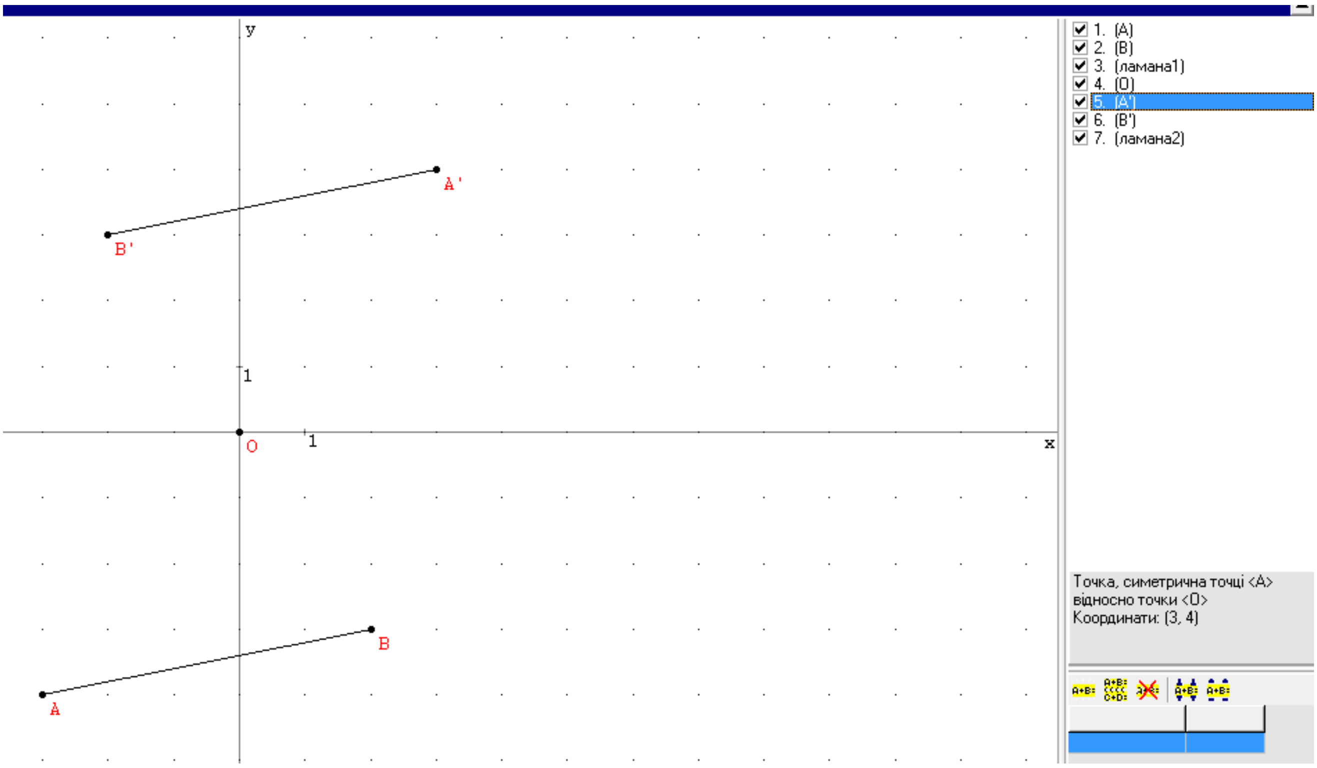
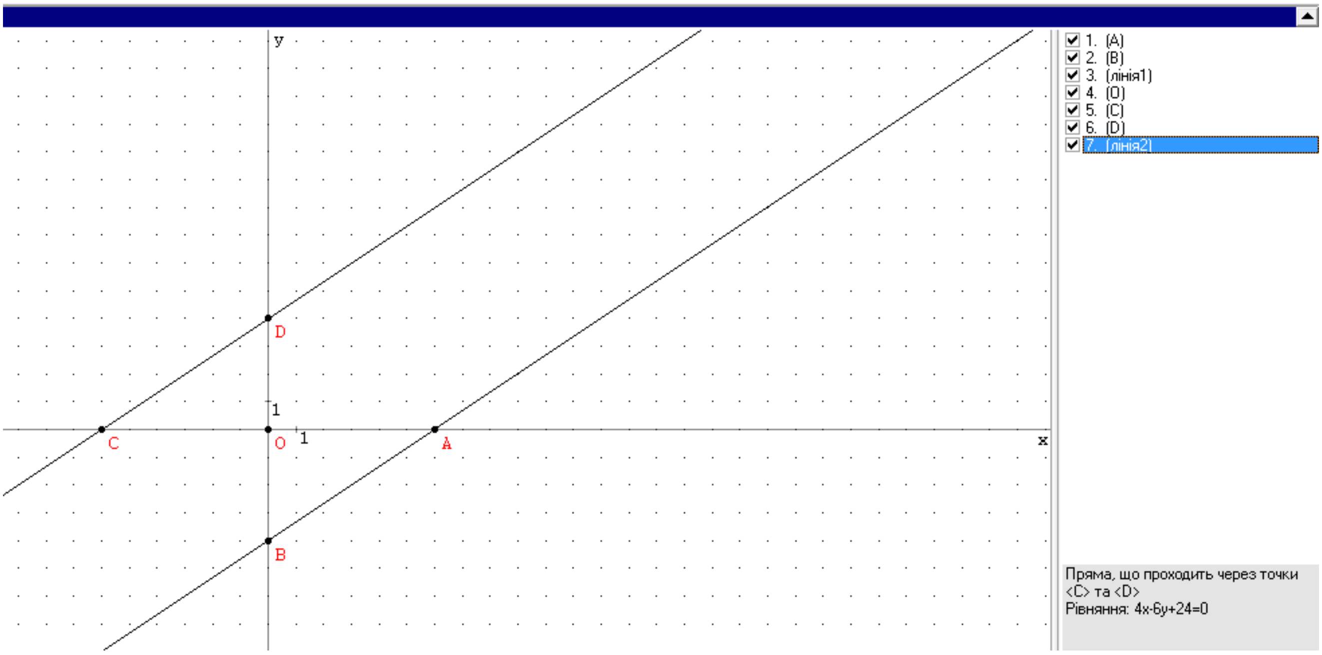


Рис. 3.18

Відповідь: $A'(3;4)$; $B'(-2;3)$.

Задача 3.5. Дано рівняння прямої . Запишіть рівняння прямої, яка симетрична даній відносно початку координат.

Розв’язання. Дану пряму можна побудувати через такі точки, які назвемо



$A(6;0)$ і $B(0;-4)$, так як їхні координати задовольняють рівняння даної прямої. Тоді відносно точки $O(0;0)$, побудуємо точки, симетричні точкам $A(6;0)$, $B(0;-4)$, за допомогою програмних засобів програми. Отримаємо точки $C(-6;0)$ і $D(0;4)$. Через ці точки проведемо пряму. Виділивши назву цієї прямої у контекстному меню отримаємо рівняння образу даної прямої: (рис. 3.19). Для зручності можна перевести його у явний вигляд.

Рис. 3.19

Відповідь: .

- Осьова симетрія

Задача 3.6. Дано кут ABC та точку O, що йому належить (рис. 3.20). Знайдіть такі точки E і F на сторонах BA і BC, щоб периметр трикутника OEF був найменшим.

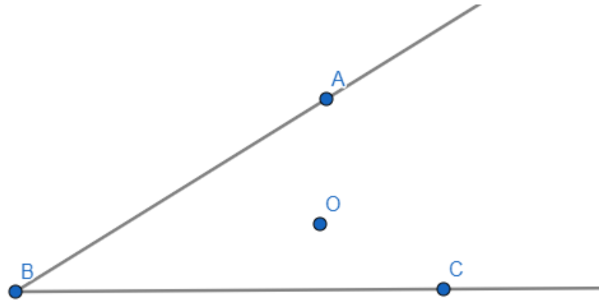


Рис. 3.20

Розв'язання. Знайдемо образи точки O, які симетричні відносно BA і BC: $S_{BA}(O)=O_1$, $S_{BC}(O)=O_2$ (рис. 3.21). Тоді нехай пряма O_1O_2 перетинає сторони BA і BC в точках E і F відповідно. Доведемо, що точки E і F є шуканими. Зауважимо, відрізки EO_1 і EO є симетричними відносно прямої BA, тобто $EO_1 = EO$. Аналогічно $FO = FO_2$. Отже, периметр трикутника OEF рівний довжині відрізка O_1O_2. Покажемо, що трикутник OEF має найменший периметр із усіх можливих. Розглянемо такий трикутник KOM, у якому K і M є довільними точками променів BA і BC відповідно та точка K не збігається з точкою E або ж точка M – з точкою F. Аналогічно $KO=KO_1$ і $MO=MO_2$.

$O_1K+KM+MO_2$

Отже, периметр трикутника KOM дорівнює сумі .

Але $O_1K+KM+MO_2 \geq O_1O_2$.

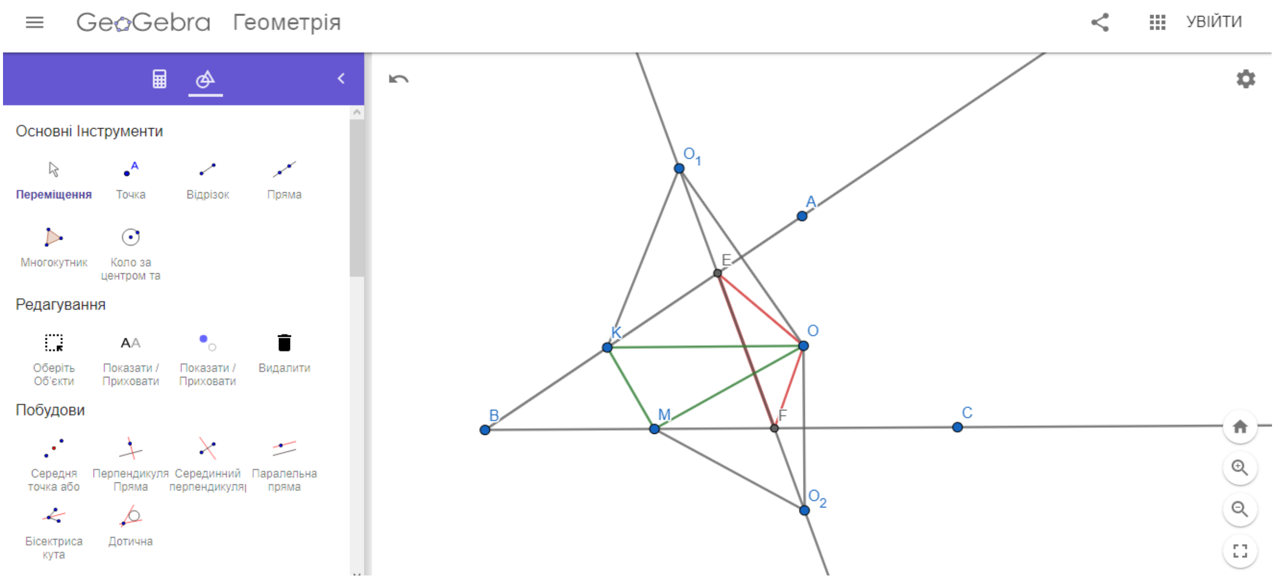


Рис. 3.21

Задача 3.7. Знайти такі точки M, N і P, що лежать на сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC відповідно, щоб периметр трикутника MNP був найменшим.

Розв’язання. Нехай точка P є довільною точкою сторони AC трикутника ABC, тоді $S_{AB}(P) = P_1$, $S_{BC}(P) = P_2$ (рис. 3.22). Пряма P_1P_2 перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Із розв’язування задачі 3.6 випливає, що периметр трикутника MNP є найменшим із периметрів усіх трикутників, для яких точка P є фіксованою, а точки M і N лежать на сторонах AB і BC відповідно. Цей периметр рівний довжині відрізка P_1P_2.

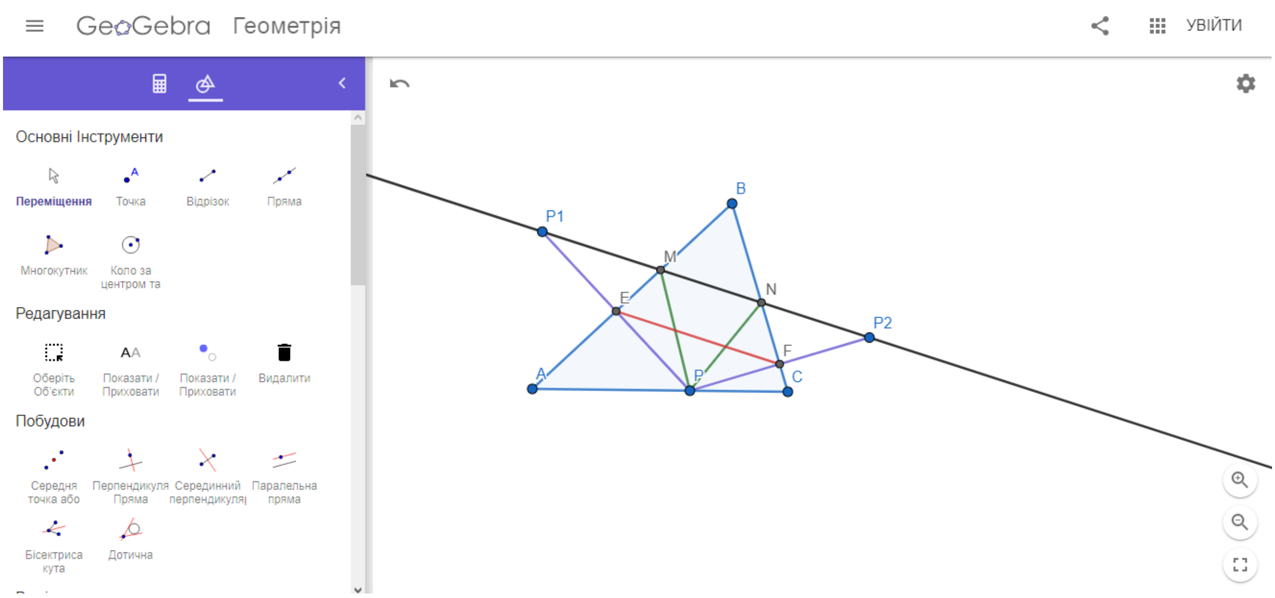


Рис. 3.22

Зауважимо, відрізок EF є середньою лінією трикутника PP_1P_2. Тоді $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Так як $\angle BEP + \angle BFP = 180^\circ$, то всі точки P, E, B і F належать колу із діаметром BP, а це означає, що $EF = BP \sin \angle B$.

Отже, довжина відрізка EF буде найменшою при найменшій довжині відрізка BP, а це буде тоді, коли BP — висота трикутника ABC.

На рисунку 3.23 відрізок BP — висота трикутника ABC. Алгоритм побудови трикутника MNP зрозумілий з рисунка.

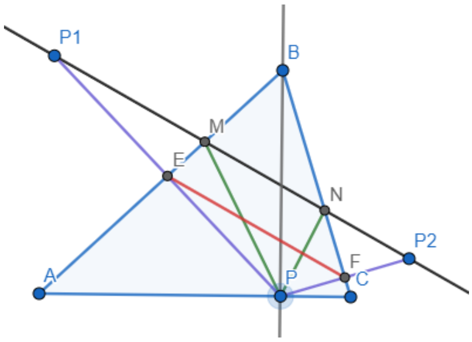


Рис. 3.23

Із побудови випливає, що периметр будь-якого іншого трикутника, вершини якого лежать на сторонах трикутника ABC, більший за периметр трикутника MNP. Отже, шуканий трикутник є єдиним — це побудований трикутник MNP.

Можна показати (зробіть це самостійно), що точки M і N є основами висот, проведених відповідно з вершин C і A трикутника ABc.
Отже, вершини шуканого трикутника — це основи висот даного трикутника ABC. Такий трикутник називають ортоцентричним.

- Поворот

Розв’яжемо задачі з використанням ППЗ GRAN-2D:

Задача 3.8 Дано фігуру із вершинами $A(-4,-4), B(-2;2), C(1;2), D(3;-1)$. Знайти координати вершин фігури, яка отримується поворотом фігури $ABCD$ навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки.

Розв’язання. Да допомогою ППЗ GRAN-2D побудуємо фігуру $ABCD$. За допомогою засобу «Поворот об’єктів» обираємо дану фігуру та здійснюємо її поворот відносно початку координат на $90°$ проти годинникової стрілки. У результаті отримали нову фігуру $HFGE$ (рис. 3.24) із координатами вершин $H(4,-4), F(-2,-2), G(-2,1), E(1,3)$.

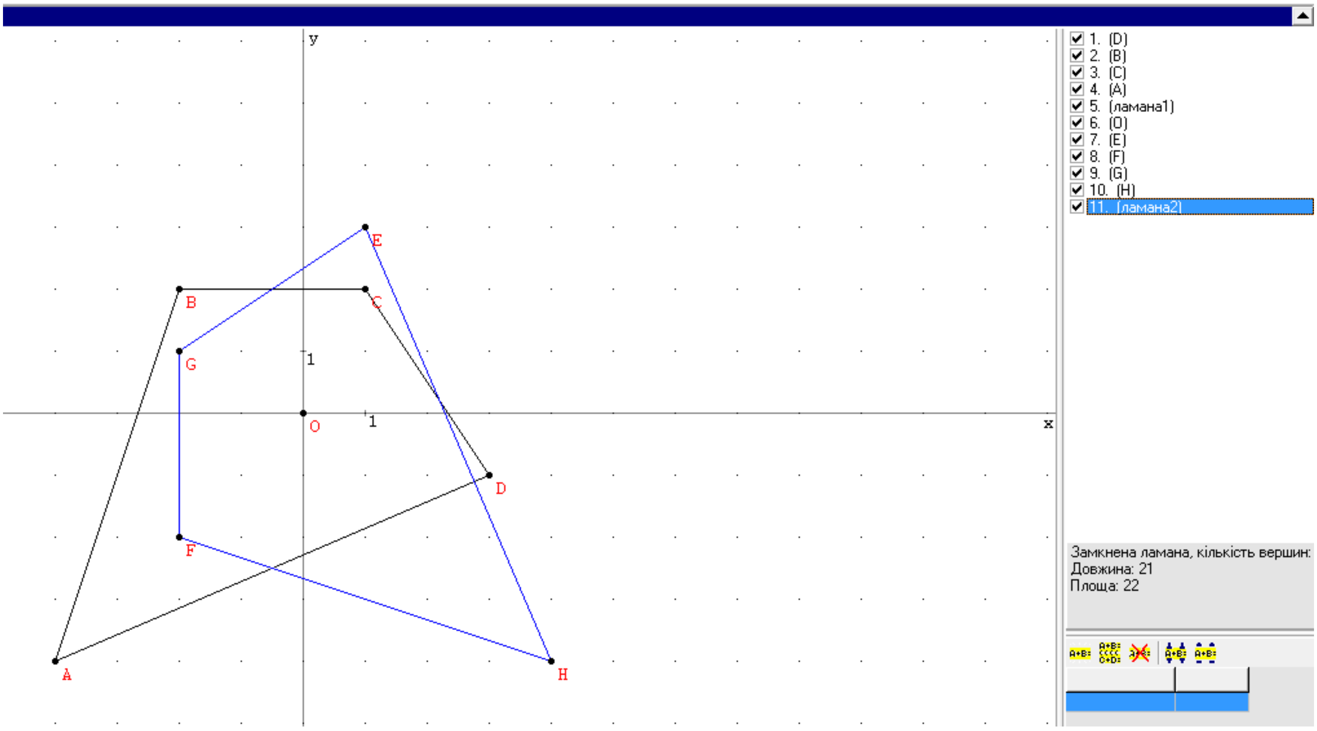


Рис. 3.24

Відповідь: $H(4,-4), F(-2,-2), G(-2,1), E(1,3)$.

Задача 3.9. На який найменший кут треба здійснити поворот квадрату відносно його центру симетрії так, щоб він перейшов сам у себе.

Розв’язання. У середовищі програми побудуємо квадрат так, щоб центром його симетрії була точка $O(0,0)$. Нехай координати вершин квадрата матимуть значення: $A(-2,-2), B(-2,2), C(2,2), D(2,-2)$, побудуємо дану фігуру. За допомогою функції «Поворот об’єктів» виконуємо поворот квадрата (можемо зробити декілька поворотів, поки не знайдемо потрібний, наприклад, на $30°, 45°$ і $90°$). Віднайдемо вірний мінімальний кут повороту, яким буде кут $90°$ (рис. 3.25).

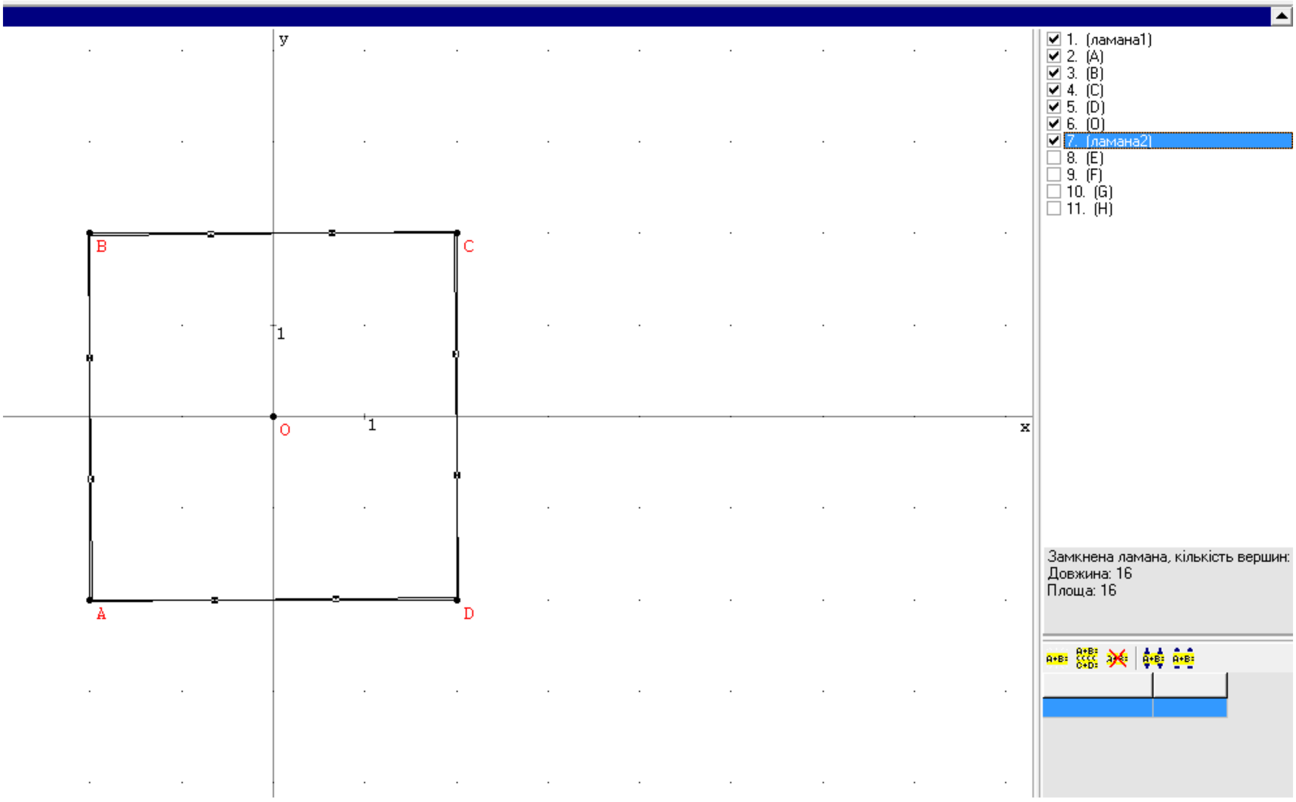


Рис. 3.25

Задача 3.10. Точка P належить куту ABC, але не лежить на його сторонах. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна з вершин якого – точка P, а дві інші лежать на сторонах BA та BC кута ABC.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 є образом прямої AB при повороті з центром P на кут $60°$ проти годинникової стрілки (рис. 3.26). Нехай F – точка перетину прямих A_1B_1 та BC, а точка E — прообраз точки F при повороті з центром P на кут $60°$ за годинниковою стрілкою. Точка E лежить на стороні BA кута ABC. Такі міркування підказують, як будувати шуканий трикутник: будуємо пряму A_1B_1 як образ прямої AB при повороті навколо центра P на кут $60°$ проти годинникової стрілки. Тоді нехай F є точкою перетину прямих A_1B_1 і BC.

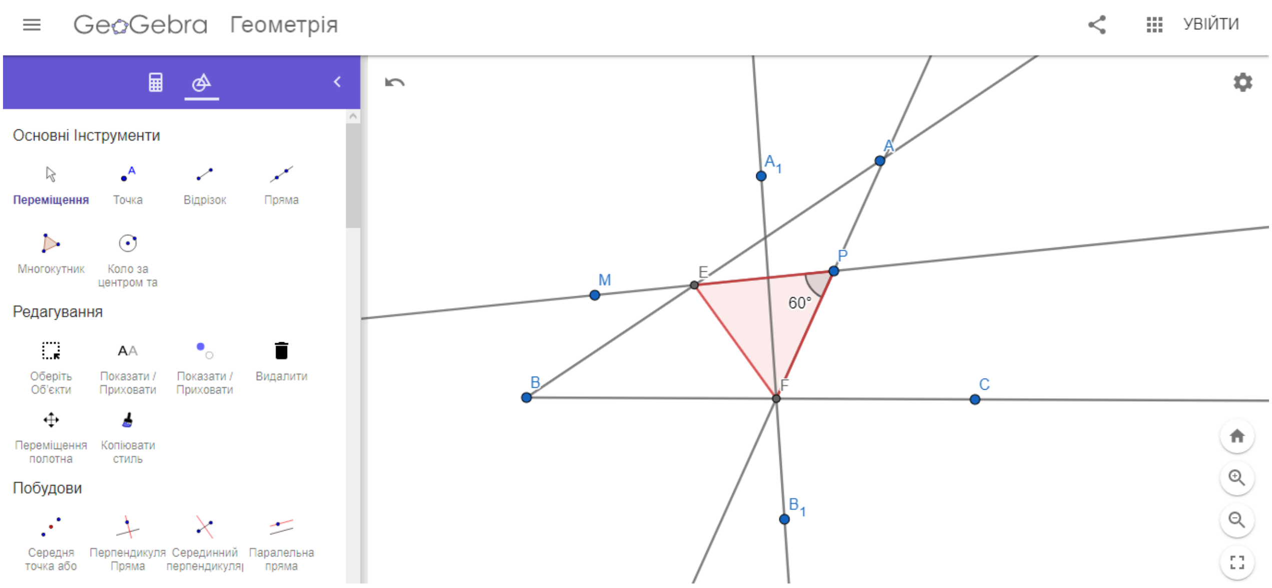


Рис. 3.26

Побудуємо кут MPF, що рівний $60°$. А точка E – є перетином прямих MP і AB. Ця точка і буде прообразом точки F. Маємо: $PF = PE$ та $\angle FPE = 60°$. Отже, трикутник EPF є рівностороннім.

Задача 3.11. У трикутнику ABC, у якого кожний з кутів менший за $120°$, знайти таку точку T, щоб найменшою була сума $TA + TB + TC$.

Розв'язання. Нехай T є довільною точкою даного трикутника ABC (рис. 3.27). Розглянемо поворот із центром A за годинниковою стрілкою на кут $60°$. Нехай точки T_1 і C_1 відповідно є образами точок T і C. Так як поворот є рухом, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, що трикутник ATT_1 – рівносторонній. Тоді $AT = TT_1$.

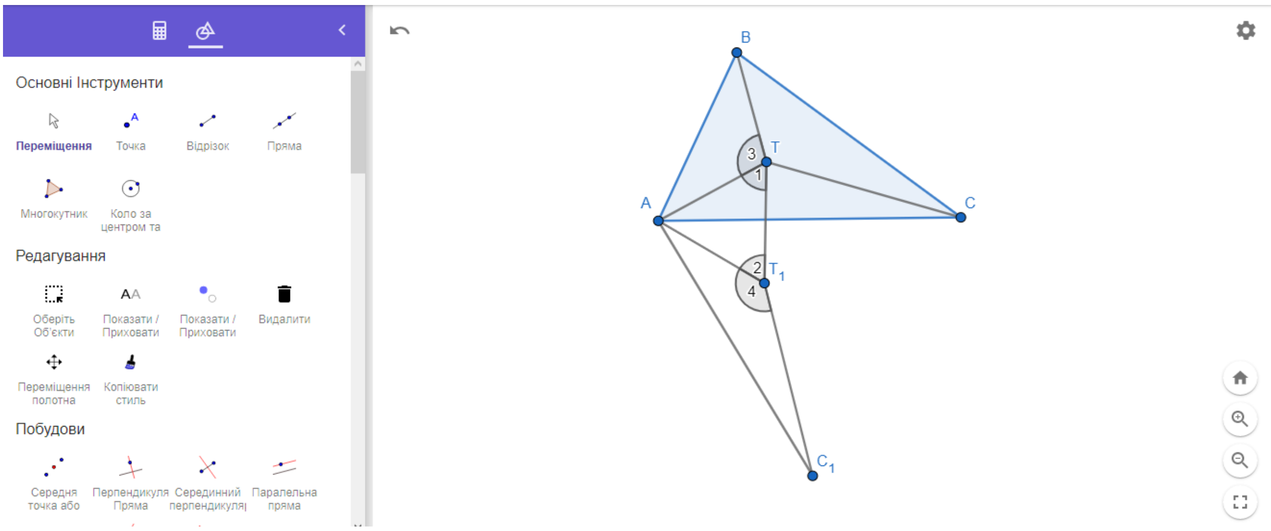


Рис. 3.27

Маємо: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Очевидно, що сума $TT_1 + TB + T_1C_1$ буде найменшою, якщо точки B, T, T_1 і C_1 лежать на одній прямій.

Так як $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то ця умова виконуватиметься тоді, коли $\angle 3 = \angle 4 = 120°$. Так як кут AT_1C_1 є образом кута ATC при вищесказаному повороті повороті, то має виконуватися така рівність $\angle ATC = 120°$.

Отже, точки B, T, T_1 і C_1 лежатимуть на одній прямій тоді й тільки тоді, коли $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Звідки $\angle BTC = 120°$. Отже, сума $TA + TB + TC$ буде найменшою, якщо $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

- Гомотетія

Задача 3.12. Доведіть, що при гомотетії із центром O, що не належить прямій l, образом цієї прямої є пряма, яка паралельна даній.

Розв'язання. Із властивостей гомотетії зрозуміло, що образом прямої l буде пряма. Щоб побудувати будь-яку пряму достатньо знайти будь-які дві її точки. На прямій l виберемо довільні точки A і B (рис. 3.28). Тоді нехай ці точки при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k переходять у точки A_1 і B_1 (рисунок 3.28 відповідає випадку, коли $k > 1$). Маємо пряму A_1B_1 — образ прямої AB.

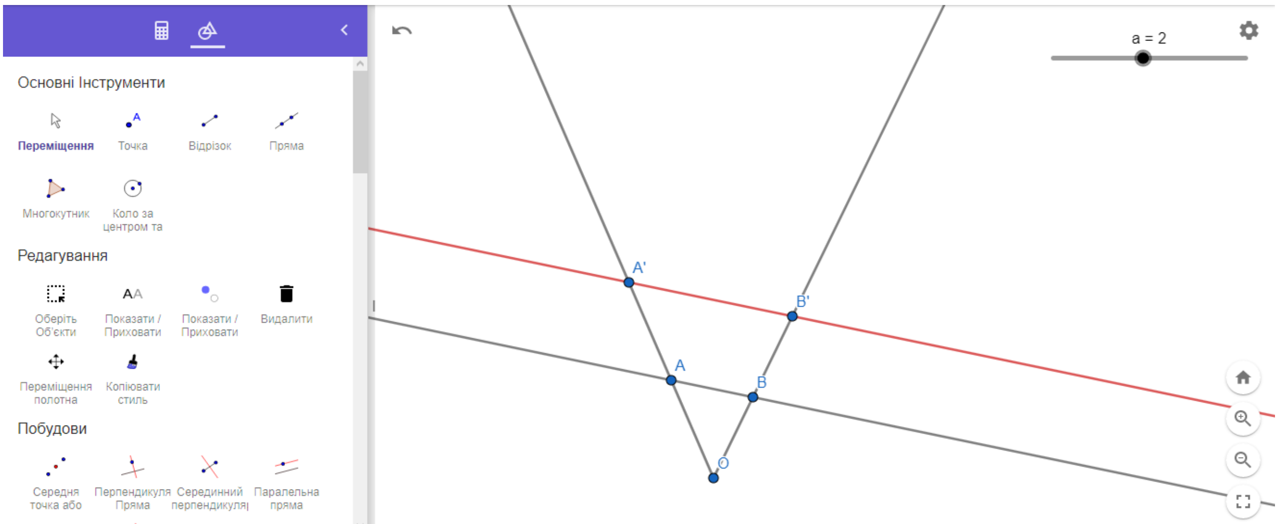


Рис. 3.28

Згідно однієї з властивостей гомотетії $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Отже, $AB \parallel A_1B_1$.

Задача 3.13. Впишіть квадрат у гострокутний трикутник ABC так, щоб дві його вершини лежали на сторонах AB і BC відповідно, а дві інші — на AC .

Розв’язання. Із довільної точки M , що належить стороні AB опустимо перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 3.29). Побудуємо квадрат $MQPN$ так, щоб точка P належала променю QC . Тоді нехай промінь AN перетинає сторону BC в точці N_1.

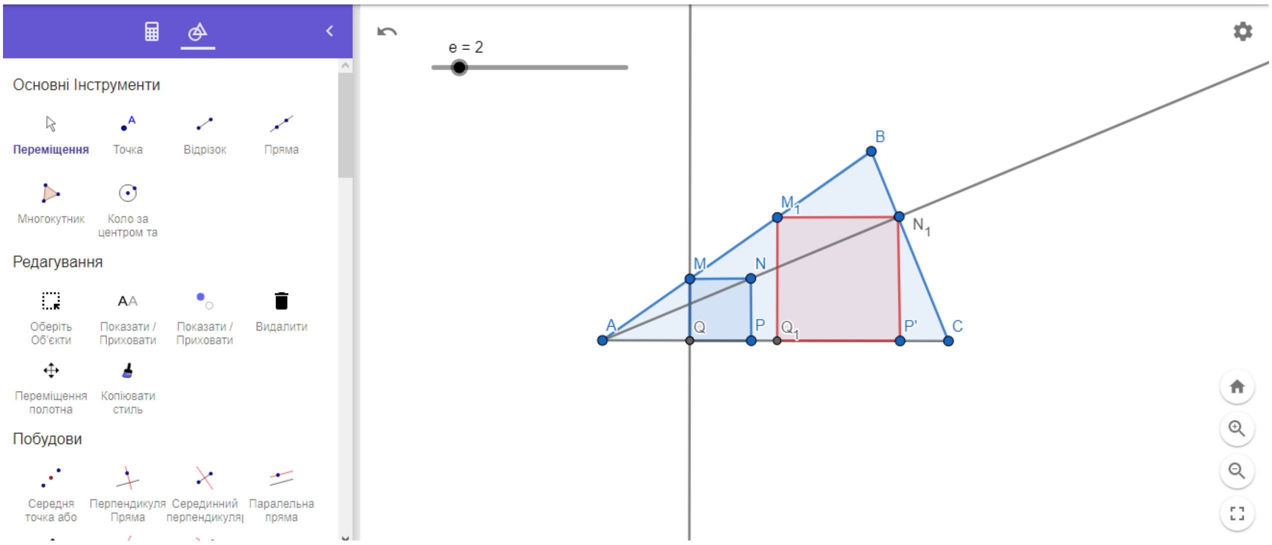


Рис. 3.29

Розглянемо гомотетію із центром A та коефіцієнтом $k = \dfrac{AN_1}{AN}$: точка N_1 є образом точки N . Відрізок M_1N_1 є образом відрізка MN (де точка M_1 належить променю AB , причому $M_1N_1 \parallel MN$). Також відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 лежить на промені AC та $N_1P_1 \parallel NP$, та є образом відрізка NP . Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося на сторону AC опустити перпендикуляр M_1Q_1.

Задача 3.14. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 є висотами гострокутного трикутника ABC . Довести, що радіус описаного кола навколо трикутника ABC у два рази більший за радіус описаного кола навколо трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинають описане коло навколо трикутника ABC у точках M, N і P відповідно (рис. 3.30). Буквою H позначимо ортоцентр трикутника ABC. Знаємо, що $HA_1 = A_1M,\quad HB_1 = B_1N,\quad HC_1 = C_1P$.

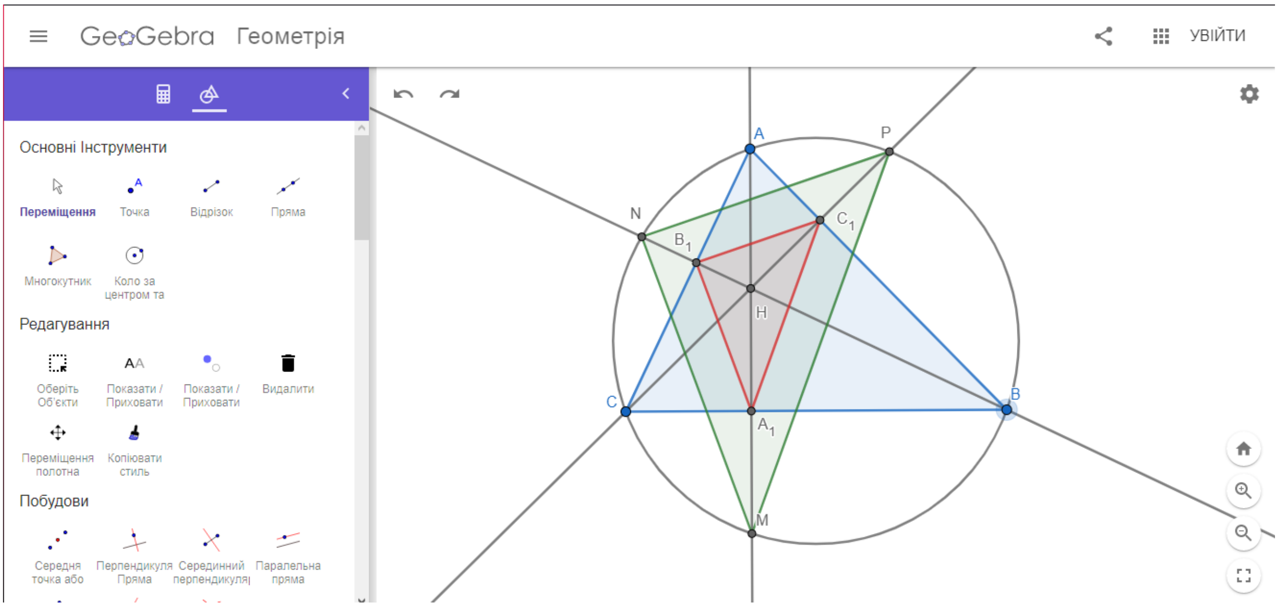


Рис. 3.30

Тепер очевидно, що трикутник MNP є гомотетичним трикутнику $A_1B_1C_1$ із центром H та коефіцієнтом 2. Отже, радіус описаного кола навколо трикутника MNP у два рази більший за радіус описаного кола навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Зауважимо, що трикутники MNP і ABC вписані в одне й те ж саме коло.

- Інверсія

Задача 3.15. Дано коло $z\,(O, R)$ та ΔABC, де $A, B, C \in z$. Побудуйте фігуру, яка інверсна вписаному у коло ΔABC.

Аналіз. ΔABC – даний трикутник, $A, B, C \in z\,(O, R)$. При інверсії, точки, які належать базисному колу переходять самі у себе, тобто $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$. Пряма, яка не проходить через центр базисного кола, переходить у коло, яке уявно проходить через центр інверсії, тобто AB перейде у дугу AKB, BC – в дугу BLC, AC – в дугу AMC. Таким чином, ΔABC перейде у три дуги.

Побудова. Виконаємо побудову за допомогою програми CaRMetal (рис.

3.31):

1) Будуємо коло $z\,(O,R)$ та ΔABC , де $A,B,C\ \in z$;

2) Знаємо, що вершини трикутника перейдуть самі у себе $A\equiv A', B\equiv B', C\equiv C'$;

3) Сторони трикутника перейдуть у дуги: $AB\ \to\ AKB$, $BC\ \to\ BLC$, $AC\ \to\ AMC$.

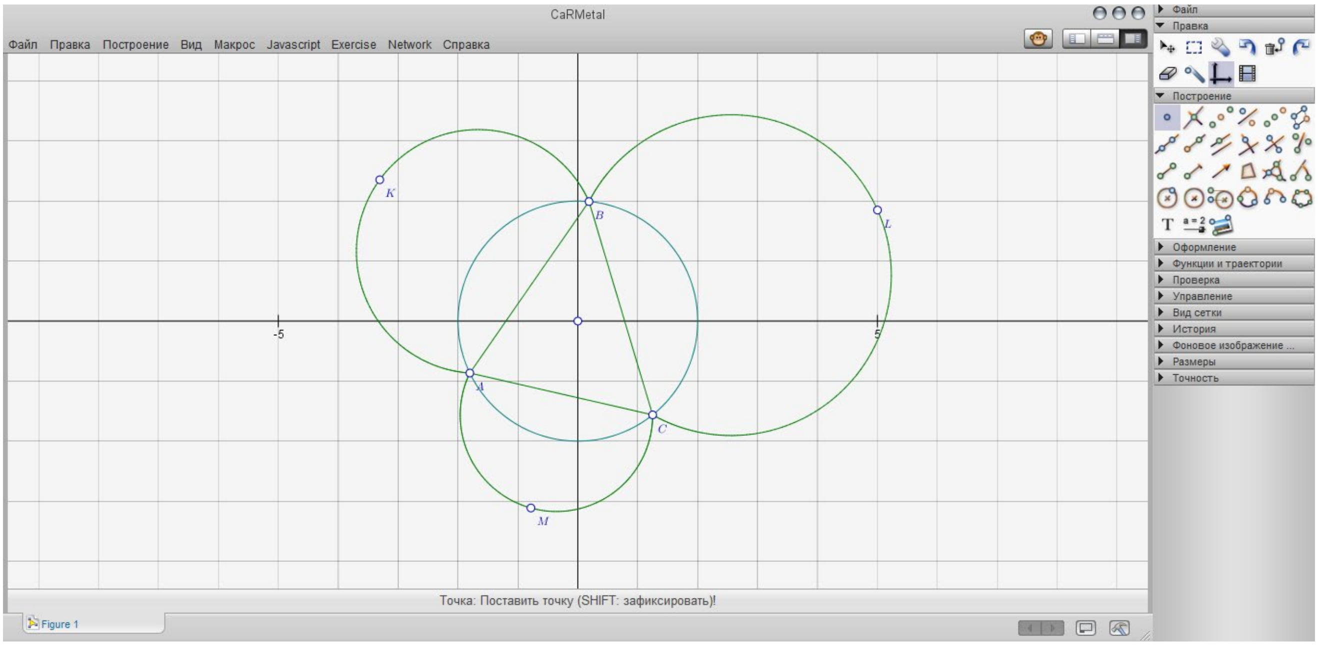


Рис. 3.31

Задача 3.16. Через дану точку A проведіть коло, яке ортогональне двом даним колам.

Аналіз. $z_1\,(O_1,R_1)$, $z_2\,(O_2,R_2)$ – дані кола, точка A – дана точка.

Приймемо z_1 , z_2 – за базисні кола, тоді точка A при інверсії перейде у точки A' ($A'\in O_1A$) та A'' ($A''\in O_2A$).

Тоді $A,A',A''\in z\,(O,OA)$, z – шукане коло.

Побудова. Виконаємо побудову за допомогою програми CaRMetal:

1) Будуємо $z_1\,(O_1,R_1)$, $z_2\,(O_2,R_2)$ – дані кола;

2) Точка $A\ \to\ A'$ ($A'\in O_1A$);

3) Точка $A\ \to\ A''$ ($A''\in O_2A$);

4) $A,A',A''\in z\,(O,OA)$;

$z(O, OA)$ – шукане коло (рис. 3.32).

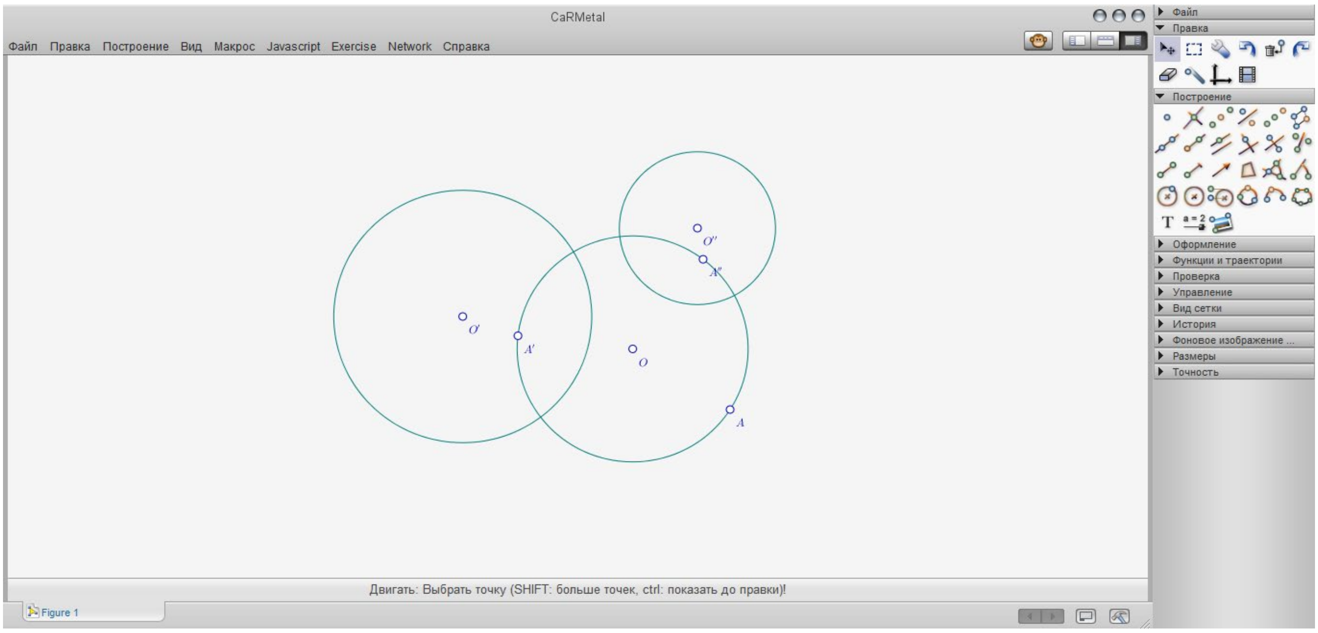


Рис. 3.32

Доведення. Коло, яке проходить через три взаємоінверсні точки, ортогональне двом колам, які є базисами інверсії. A, A', A'' - взаємоінверсні точки.

Дослідження. Задача має єдиний розв’язок.

Висновки до третього розділу

У третьому розділі, з метою формування математичних компетентностей засобами інформаційних технологій, розроблені презентації для вивчення нового матеріалу та розв'язані задачі з теми «Геометричні перетворення».

Для формування математичних компетентностей засобами інформаційних технологій були використані наступні програмні середовища:

- MS Office PowerPoint;
- GRAN-2D;
- GeoGebra Геометрія;
- CaRMetal.

Розв'язування задач засобами інформаційних технологій дозволяє підвищити мотивацію навчання учнів, якість технологічної підготовки учнів забезпечити індивідуалізацію процесу навчання.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В результаті аналізу науково-методичної, навчальної, психолого-педагогічної літератури, навчальних програм та державних стандартів з теми дослідження ми розглянули формування математичних компетентностей учнів середньої школи, дослідили методи компетентнісного навчання, які варто застосування вчителеві у навчальній діяльності, продемонстрували методику вивчення та викладання у шкільному курсі математики теми «Геометричні перетворення». Також розробили дидактичне забезпечення з використанням таких інформаційних технологій як MS PowerPoint, GeoGebra, GRAN-2D, CaRMetal.

На уроках математична компетентність учнів формується шляхом оволодіння новими математичними знаннями, вміннями та навичками. Останнім часом популярним є використання таких діяльнісних методів, прийомів і технологій роботи з учнями як навчання з використанням інформаційних технологій, проектне навчання, проблемне навчання, особистісно-орієнтоване навчання.

Поняття математичної компетентності включає у себе вміння структурувати дані, створювати, аналізувати і перетворювати математичну модель ситуації, інтерпретувати отримані результати. Але компетентність не обмежується лише сукупністю предметних знань, умінь та навичок, а формується в результаті як навчання, так і життєвого досвіду. Іншими словами, математична компетентність озброює вмінням застосовувати математику для вирішення проблем, що виникають у реальному житті.

В процесі формування математичної компетентності головне завдання вчителя – мотивація учнів до прояву самостійності та ініціативності. Фактично вчитель має створити середовище для повномасштабного забезпечення формування логічних, інтелектуальних, аналітичних та інших здібностей учнів.

Результатом вивчення теми «Геометричні перетворення» учні повинні вміти:

1) Описувати: а) рухи: паралельне перенесення, симетрію відносно точки і прямої та поворот; б) гомотетію, перетворення подібності, подібність фігур та, у класах з поглибленим вивченням математики, інверсію;

2) Будувати: образи фігур при русі та перетвореннях подібності;

3) Наводити приклади: а) центрально-симетричних та фігур, які мають вісь симетрії; б) подібних фігур;

4) Формулювати: а) теорему про відношення площ подібних фігур; б) властивості руху та перетворення подібності;

5) Застосовувати набуті знання до розв'язування задач.

У роботі розглядались: рух і його властивості; паралельне перенесення, поворот, симетрія відносно точки та прямої; перетворення подібності та його властивості; гомотетія; подібність фігур.

У нашому дослідженні з'ясували, що застосування інформаційних технологій при вивченні теми «Геометричні перетворення» сприяє підвищенню якості навчання. Організація навчання за допомогою інтерактивних комп'ютерних моделей, що створені використанням таких засобів, як GeoGebra Геометрія, Gran-2D, CaRMetal та їм подібні – перспективний напрямок в оновленні процесів викладання та вивчення математики.

Залучення учнів до розв'язування задач з використанням інформаційних технологій створює умови для забезпечення індивідуалізації процесу та високої мотивації навчання. Застосування інформаційних технологій підвищує якість науково-технологічної підготовки школярів, що у перспективі слугуватиме підвищенню економіки нашої країни.

В ході дослідження, зауважили, що застосування інформаційних технологій не повинне повністю замінити процес побудови фігур олівцем, так як саме побудови від руки формують в учнів корисні креслярські навики.

Поставлена мета дослідження досягнута. Всі завдання виконано.

Перспективою подальших досліджень є детальний аналіз інших тем з геометрії та розробки відповідного дидактичного забезпечення засобами інформаційних технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ткаченко О., Кожевнікова М. Формування компетентностей на уроках математики//Математика в школах України. – Х., 2014. – №6. – С.2-3.

2. Нестеренко, Ю. В. Кращі завдання на кмітливість [Текст] / Ю. В. Нестеренко, С. М. Олехнік, М. К. Потапов. - М.: АСТ-ПРЕСС, 1999. - 304 с.

3. Іванова, Т. В. Компетентнісний підхід до розробки стандартів для 11-річної школи: аналіз, проблеми, висновки [Текст] / Т. В. Іванова / / Стандарти і моніторинг в освіті. -2004. - № 1. - С. 16-20.

4. Каверін, Н. В. Методи рішення арифметичних задач у середній школі. 5-6 класи [Текст] / Н. В. Каверін. - М.: Учпедгиз, 1952. - 64 с.

5. Хуторський, А.В. Ключові компетенції та освітні стандарти [Електронний ресурс] / А. В. Хуторський / / Інтернет-журнал «Ейдос». - 2002. - 23 квітня. - [Режим доступу: http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm].

6. Ерднієв, П. М. Розвиток навичок самоконтролю при навчанні математиці [Текст] / П. М. Ерднієв. - М.: Учпедгиз, 1957. - 72 с.

7. Компетентнісний підхід у сучасній освіті. Світовий досвід та українські перспективи / Під ред. О. В. Овчарук. — К.: К. І. С., 2004. — С.112.

8. Про загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти [Електронний ресурс]: наказ МОН України від 5 травня 2008 р., №371 / Міністерство освіти України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0371290-08#Text

9. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]: Постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. №1392 / Кабінет Міністрів України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п#Text

10. Важливий аспект математичної підготовки школярів / І. Ф. Тесленко, Н. Д. Мацько, М. І. Бурда, Г. М. Литвиненко // Радянська школа. – 1984. – №8. – С. 37-41.

11. Рожинська Е. К. Нові підходи до викладання математики в умовах реформування вітчизняної освіти: методичний лист / Укл. Е. К. Рожинська. – Миколаїв: ОІППО, 2017 – 48 с.

12. Родигіна І. В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання / І. В. Родигіна. – Х.: Видавнича група «Основа», 2005. – 29 с.

13. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / С. А. Раков // Математика в школі. — 2005. — № 5. — С. 2—8.

14. Солодченко Л. І. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики: на основі принципу історизму та прикладної спрямованості. – Тернопіль – Харків: Видавництво «Ранок», 2011 – 144 с.

15. В. Я. Ромаюк, Л. І. Дутко Технології інтерактивного навчання на уроках математики – Львів: Тріада плюс, 2004

16. А. В. Погорєлов. Геометрія: Учеб. Для 7-11 кл. сред. шк. - 4-е изд. - М.: Просвещение - 1993 г.

17. З. І. Слєпкань Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. - К.: Зодіак-ЕКО, 2010 р.

18. Мерзляк, А.Г. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів [Текст] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. - Харків: «Гімназія», 2010. - с.159-206.

19. Єршова, А.П. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів [Текст] / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижанівський, С.В. Єршов. – Харків: Видавництво «РАНОК», 2010. – с.113-155.

20. Бурда М. І., Савченко Л. М. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики. – К.: Освіта, 2004. – 240 с.

21. Фішман, І.С. Ключові компетентності як результат освіти [Електронний ресурс] / І. С. Фішман. - [Режим доступу: http://www.conf.univers.krasu.ru/conf_9/docl_s.html].

22. Закон України „Про основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007–2015 роки" [Електронний ресурс] // Відомості Верховної Ради

України (ВВР). — 2007. — № 12. — С. 102. — Режим доступу : http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/537-16. — Назва з екрану.
23. Kaput J. Technology and mathematics education / Kaput J. In D. A. Grouws (Ed.) — New York : Macmillan, 1992. — 556 p.
24. Gonzales P. Highlights from the trends in international mathematics and science study [Electronic resource] / [Gonzales P., Guzman J. C., Partelow L., Pahlke E., Jocelyn L., Kastberg D., & Williams] — T. : TIMSS, 2003. — Access mode: http://nces.ed.gov /pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=2005005.
25. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів. / Жалдак М. І. — Видання 2-е, перероблене та доповнене. — К. : РННЦ «ДІНІТ», 2003. — 324 с.
26. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів. / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. — К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. — 254 с.
27. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посіб. для вчителів і студ. /Т. Г. Крамаренко; за ред. М. І. Жапдака. — Кривий Ріг : Видавничий дім., 2008. — 272 с.
28. Солтис. А. С. Формування математичних компетентностей засобом GEOGEBRA при вивченні теми "Геометричні перетворення" / А. С. Солтис. // XIII Міжнародна науково-практична конференція «Наука, освіта, суспільство очима молодих». – Рівне, 2020. – С.
29. Математика. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів // Міністерство освіти і науки України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
30. Ракута В. М. Система динамічної математики GEOGEBRA як універсальний засіб для вивчення шкільного курсу математики / Ракута Валерій Михайлович // FOSS Lviv 2014, 24-27 квітня 2014 року. — Львів, 2014. — С. 101-103
31. GeoGebra Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.geogebra.org

32. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках геометрії: посібник [для вчителів] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – К. : ДІНІТ, 2003. – 168 с.
33. Новиков С. П. Применение новых информационных технологий в образовательном процессе / С. П. Новиков // Педагогика. – 2003. – № 9. – С.32-38.
34. Окопелов О. П. Процесс обучения в виртуальном образовательном пространстве / О. П. Окопелов // Информатика и образование. – 2001. – №3. – С.12-14.
35. Математика. 5–9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів // Міністерство освіти і науки України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
36. Архіпова Т. Л. Вплив нових інформаційних технологій на активізацію навчально-пізнавальної діяльності підлітків / Т. Л. Архіпова. - С .160-167
37. Співаковський О. В. Інформаційно-комунікаційні технології в початковій школі: Навчально-методичний посібник для студентів напряму підготовки «Початкова освіта» / Л. Є. Петухова, В. В. Коткова. – Херсон : ХДУ, 2011. – 267 с.
38. Гуревич Р. С. Самостійна робота майбутніх учителів математики: використання засобів мультимедіа: монографія / Р. С. Гуревич, О. Л. Коношевський. - Вінниця: Планер, 2010. - 232 с.
39. Шипілова І. Комп'ютерні технології на уроках математики / І. Шипілова // Відкритий урок: розробки, технології, досвід. - 2010. - № 4. - С. 26-30.
40. Семеніхіна О., Юрченко А. Уміння візуалізувати навчальний матеріал засобами мультимедіа як фахова компетентність учителя / О. Семеніхіна, А. Юрченко // Науковий вісник Ужгородського національного університету: Серія «Педагогіка. Соціальна робота». – Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла». – Випуск 33. – 2014. – С. 176-179.