Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Методичні підходи до розв’язування геометричних задач в основній школі

Виконала студентка 2 курсу магістратури,
групи М – М – 21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Бойко (Япс) Анна Віталіївна

Керівник кандидат фізико–математичних наук, професор кафедри математики з методикою викладання Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти:
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничо–математичної освіти Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти Харченко Наталія Борисівна

кандидат фізико–математичних наук, доцент
кафедри вищої математики Рівненського
державного гуманітарного університету
Марач Віктор Сільвестрович

Рівне–2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета державної політики щодо розвитку освіти, як зазначається в Доктрині освіти в Україні у ХХІ столітті, полягає у створенні умов для розвитку особистості і творчої самореалізації кожного громадянина України.

Сьогодні підвищується значення готовності людини до дій, результат яких не однозначний. У нашому житті виникають ситуації різного ступеня непередбачуваності. Від сучасного випускника вимагається якість знань та здібності, які дозволяють знаходити розв'язання в незапланованих ситуаціях.

Метою сучасної освіти повинно стати не прагнення сформувати слухняного виконавця, який володіє, можливо, й невеликим об'ємом знань, умінь і навичок, а виховання вільної, конкурентоспроможної особистості, яка вміє критично мислити, розв'язувати життєві проблеми, презентувати себе на ринку праці.

Пріоритетним напрямом реформування освіти є досягнення якісно нового рівня у вивченні базового навчального предмета – математики. Математичні знання і вміння розглядаються не як самоціль, а як засіб розвитку особистості школяра, забезпечення його особистої грамотності, як здатність розуміти роль математики у світі, в якому він живе, висловлювати обґрунтовані математичні судження і використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

Важливим засобом і метою навчання геометрії є розв’язування планіметричних задач. Математичні задачі виконують ряд функцій навчального, виховного, розвивального характеру. Особливої уваги потребує навчання розв’язуванню геометричних задач в 7–9 класах, оскільки від цього залежить не тільки засвоєння учнями геометрії на даному етапі, але і результативність їх навчальної і трудової діяльності в старших класах, після закінчення школи.

Однак аналіз практики навчання розв’язувати геометричні задачі, не дивлячись на удосконалення форм і методів роботи вчителів, виявляє у вміннях школярів істотні прогалини, які свідчать про те, що традиційна форма навчання розв’язувати геометричні задачі не є досить ефективною.

При вивченні планіметрії відбувається систематизація відомостей про основні фігури на площині та їх властивості, про геометричні величини, які характеризують плоскі фігури. Учні вчаться виконувати відповідні обчислення, знайомляться з використанням аналітичних методів (елементи тригонометрії і алгебри, вектори і координати) до розв'язування геометричних задач.

Аналіз стану навчання математики, зокрема геометрії, в середній школі показує, що результати навчання учнів, рівень активності їхньої навчально-пізнавальної діяльності і самостійності, творчих здібностей в значній мірі не відповідають запитам суспільства.

До кінця цю проблему не розв'язано, що негативно відбивається на розумовому розвитку учнів в процесі навчання. Внаслідок аналізу бесід з учнями, вчителями, спостережень за навчальним процесом на уроках, поведінкою учнів у навчальному процесі ми дійшли висновку, що для активізації навчально-пізнавальної діяльності, надання їй дослідницького, творчого спрямування, розвитку мислення учнів, розкриття творчого потенціалу учнів і вчителів, інтенсифікації навчального процесу недостатньо використовувати у навчальному процесі лише традиційні форми і засоби навчання.

Таким чином, важливість теоретичного і практичного розв’язання проблеми навчання розв’язуванню планіметричних задач у основній школі, її недостатня вивченість, велике значення для покращення геометричної підготовки учнів середньої школи обумовлюють актуальність вибраної теми магістерської роботи.

Об’єкт дослідження: процес навчання розв’язування задач з планіметрії в основній школі.

Предметом дослідження є формування умінь і навичок розв’язувати планіметричні задачі в основній школі.

Мета дослідження: опрацювати методичну літературу, присвячену даній темі, систематизувати методи і прийоми навчання розв’язування планіметричних задач в основній школі.

Відповідно до мети дослідження поставлені такі завдання:

1. Дослідити наукову та методичну літературу з обраної теми бакалаврської роботи.

2. Проаналізувати стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання планіметрії.

3. Розглянути теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

Для розв’язання поставлених завдань використано такі методи дослідження: системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів, спостереження, бесіди з учнями і вчителям, вивчення та узагальнення передового досвіду викладачів і методистів.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що матеріал роботи можна використовувати на уроках математики в класах з поглибленим вивченням.

Теоретичне значення дослідження полягає у розробці методики використання різних методів при розв’язуванні систем рівнянь в класах з поглибленим вивченням математики.

Апробація. Результати роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету у 2019 та 2020 роках та анансовані в роботі [38].

РОЗДІЛ 1. Теоретико-методична база вивчення геометрії в школі

1.1. Предмет геометрії. Завдання й зміст вивчення геометричного матеріалу в школі

«Серед рівних розумом - за однакових умов –
переважає той, хто знає геометрію»
Блез Паскаль

Походження геометрії тісно пов'язане з практичною діяльністю людини: оцінка відстані, вимірювання площі, об'єму зустрічались вже в давні часи. Сама назва даної науки походить від двох грецьких слів (γη - земля, μετρου - міра) і означає "землемірство".

Найбільш відомим із геометрів античного світу був Евклід (близько 330 - 275 р. до н.е.). Його класичний твір "Начала" являє собою справжню енциклопедію геометрії. Він складається з 15 книг, які служили підручником із геометрії понад 2000 років. У ньому викладено курс геометрії приблизно в такому обсязі, як він вивчається в середній школі[12, 211].

Відомості з геометрії в Київській Русі спочатку передавались усно. Починаючи з 16 століття почали писатись рукописні посібники. У 1629 році на території теперішньої України було складено "Книгу про сошне письмо", яка містила правила знаходження площ квадрата, прямокутника, трикутника й трапеції. Вперше на Україні, та й серед слов'янських народів, курс геометрії прочитав у Києво-Могилянській академії відомий діяч науки, культури та освіти Феофан Прокопович у 1707 році. Його курс містив основні положення Евклідової геометрії[37, 89].

Вивчення геометричного матеріалу має важливе значення для розумово відсталих. Без наявності елементарних геометричних знань неможливо пристосувати таку особистість до життя у суспільному середовищі після закінчення школи.

Геометричні уявлення, над якими працюють вчителі на уроках математики та геометрії утворюють в свідомості школярів цілісну систему геометричних знань про форми предметів, їхнє розміщення в просторі, величини, вимірювальні інструменти, що дозволяє практично користуватись отриманими знаннями після закінчення школи.

Особливості вивчення геометричного матеріалу учнями займались Н. Ф. Кузьміна-Сиромятникова, М. М. Перова, С. М. Попович, В. В. Єк та інші. Вони розробили та обґрунтували методику роботи по формуванню уявлень про геометричні фігури, визначили основні методи і принципи, використання яких на заняттях дає оптимальні результати[12, 74].

Геометрія в основній школі вирішує такі завдання:

- навчальні: формування в учнів системи знань про плоскі геометричні фігури та об'ємні тіла, їхні властивості, відношення, величини, вміння виділяти і знаходити їх у предметах навколишньої дійсності, розвивати навички користуватись відповідними мірами та вимірювальними інструментами;

- виховні: дотримуватись чистоти, бути акуратним, розвивати почуття взаємодопомоги, товариськості, ввічливості тощо;

- корекційно-розвивальні: формування і корекція просторових уявлень, моторики, мислення, уваги, пам'яті та інших психічних процесів та емоційно-вольових якостей, розширення уявлень і понять про геометричні фігури і тіла;

- практичні: формування вміння працювати з креслярськими інструментами, застосовувати отримані знання на уроках з інших дисциплін, під час професійно-трудової діяльності, формувати навички вимірювання і побудови геометричних фігур з допомогою відповідних креслярських інструментів, використовувати знання з геометрії під час вирішення життєво-важливих проблем.

Такі завдання вивчення елементів геометрії випливають із особливостей розвитку учнів та мети, яка стоїть перед нею – підготовки їх до практичної діяльності.

Обсяг геометричного матеріалу і послідовність його вивчення висвітлені у програмі з математики для загальноосвітньої школи. Та не завжди вдається вчителю сформувати всю систему необхідних геометричних знань в учнів базуючись лише на розробках програми. Тому для оптимального сприймання геометричного матеріалу педагог повинен підібрати й виготовити додаткові навчально-дидактичні посібники, які б дозволили давати матеріал з урахуванням принципу індивідуального та диференційованого підходу, організувати систематизацію та узагальнення геометричних знань[33,69].

У програмі геометричний матеріал розташований концентрично. Це дозволяє педагогу цілісно підійти до формування геометричних знань, умінь та навичок: у кожному класі учні повертаються до вже вивченої фігури, їхні знання при цьому постійно розширюються, поглиблюються, систематизуються. Ці знання вони використовують під час вирішення простих практичних завдань, які поступово ускладнюються. З кожним роком школярі удосконалюють свої навички креслення геометричних фігур, користування вимірювальними інструментами.

Покажемо концентричність розташування такого матеріалу на прикладі формування уявлень про квадрат. У 1-му класі учні повинні вміти впізнавати, називати і розрізняти його; у 2-му – креслити квадрат за даними вершинами (точками), відрізняти його від прямокутника за певними ознаками; у 3-му – виділяти у ньому сторони, визначати кути з допомогою косинця; у 4-му – креслити на нелінованому папері з допомогою косинця, мати уявлення про діагоналі; у 5-му – знаходити висоту квадрата, розпізнавати взаємне розташування фігур на площині; у 6-му – знайомляться з обчисленням його периметру; у 7-му – вимірювати кути з допомогою транспортира, виділяти його серед інших чотирикутників; у 8-му – користуватись позначеннями: квадратний міліметр – $(мм)^2$; квадратний сантиметр – $(см)^2$; квадратний дециметр – $(дм)^2$; квадратний метр – $м^2$; квадратний кілометр – $(км)^2$; га, а, S; у 9 – 10-му – обчислювати площу квадрата, прямокутника, паралелограма, креслити розгортку куба за заданими довжинами його ребер, обчислювати повну і бічну поверхню куба. Таким чином можна помітити, що з квадратом вчитель починає знайомити учнів у 1 – му класі, а закінчує вивчати його властивості – у 10-му.

Рівень розвитку в школярів понять про геометричні фігури визначається тим, наскільки правильно, доцільно і ефективно педагог використовував відповідні методичні прийоми, засоби і принципи навчання на уроках математики.

Вибір методів і прийомів, які використовуються при вивченні геометричного матеріалу, визначається його характером, індивідуальними можливостями учнів і завданнями навчально-виховного процесу загальноосвітньої школи. Навчання геометрії повинно носити наочний і дійовий характер. Формування будь-яких уявлень про геометричні фігури, відповідні форми, про можливості їхнього застосування під час трудової діяльності, в повсякденному житті можливе лише через безпосереднє сприймання самих геометричних фігур, подібних до них предметів навколишньої дійсності. Лише після того, як учні навчились їх розрізняти, можна переходити до використання моделей, креслень, таблиць. Тому уроки геометрії у старших класах або уроки математики в молодших, на яких учитель ставить за мету формувати геометричні уявлення, потрібно обладнати достатньою кількістю відповідних наочних і дидактичних посібників.

Засвоєння учнями знань про геометричні фігури, про їхні властивості неможливе без практичного тренування школярів. Кожен учень повинен самостійно вміти користуватись вимірювальними інструментами, мати можливість виготовити дані фігури, використовувати їх під час практичної діяльності[33, 237]. Тому доцільно, щоб набори роздаткового матеріалу були у кожного школяра.

Навчальна діяльність, у процесі якої вони оволодівають геометричним матеріалом, включає: організоване вчителем спостереження різних геометричних форм і відношень; практичне тренування у вимірюванні, побудові, конструюванні; формування вмінь розв'язувати задачі з геометричним змістом.

Через спостереження починається ознайомлення школярів з геометричними формами, істотними ознаками, положенням у просторі і на площині. Важливо, щоб учні не лише сприймали готові образи, які дає вчитель, а й самі відтворювали геометричні форми в процесі моделювання, креслення, вимірювання, малювання. Тому центральне місце у формуванні геометричних понять в учнів посідає практика[5, 66].

1.2. Організація вивчення геометричного матеріалу на уроках

Ефективність формування геометричних уявлень у школярів забезпечується правильною організацією їхнього вивчення. У молодших класах вивчення геометричного матеріалу відбувається на уроках математики. Причому геометричний матеріал потрібно включати в кожен урок, тісно пов'язуючи з вивченням арифметичного. Це вносить розмаїття у навчальну діяльність, робить уроки математики цікавішими, підвищує їхню практичну спрямованість. Іноді в молодших класах доцільно весь урок присвятити знайомству з геометричними формами. Це так звані „опорні уроки”[5, 78]. Їхня мета – познайомити школярів із тим чи іншим геометричним поняттям. Але таких уроків у чверті повинно бути небагато. Недоцільно концентрувати вивчення геометричного матеріалу в кінці чверті або навчального року, відводячи на нього відразу декілька занять. Така організація роботи не дозволяє учням його вивчити й адекватно використовувати під час практичної діяльності.

Усі практичні роботи з обведення, розфарбовування, креслення фігур школярі молодших класів виконують у зошитах із математики. У старших класах на уроки геометрії заводиться окремий зошит, в який вклеюють аркуші нелінованого та міліметрового паперу для формування навичок точності вимірювання й побудови фігур. У них креслення робляться олівцем, а інші записи виконуються кульковою ручкою. Робота над окремими завданнями може проводитись на окремих аркушах. Тому вчителю доцільно для кожного школяра відвести спеціальну папку[5, 96], в яку складати всі виконані й оцінені роботи. Це виховує в них почуття відповідальності, формує акуратність, бережливість. Крім цього, під час виконання завдань на окремих аркушах учитель може організувати взаємоперевірку, яка дозволяє у випадку наявності значної кількості помилок і неточностей просто замінити один аркуш іншим.

У старших класах на вивчення геометричного матеріалу виділяється один урок на тиждень. Але досвід учителів-практиків показує, що коли його вивчення зосередити лише на цих уроках, це призводить до безсистемності в знаннях учнів. Тому досвідчені педагоги, крім проведення окремих занять, систематично включають геометричний матеріал у більшість уроків математики невеликим обсягом.

При підготовці уроку з геометрії вчитель визначає тему, чітко формулює мету, продумує освітні, корекційно-розвивальні, виховні і практичні завдання. Він заздалегідь готує наочні посібники, дидактичний матеріал, інструменти для проведення практичних робіт на дошці і в зошитах, відбирає той матеріал, який закріплюється або повторюється, продумує, які нові знання потрібно повідомити учням, над виробленням яких вимірювальних і креслярських умінь вони будуть працювати, які типи завдань і практичних робіт виконуватимуть самостійно.

Далі він виділяє основні етапи уроку, типи вправ, завдання, практичні роботи, визначає, які методи і прийоми будуть використовуватися на кожному етапі, намічає, знання яких учнів вимагають перевірки, які завдання дати тому або іншому школяреві з метою подолання індивідуальних труднощів. Педагог також продумує диференційований підхід на кожному етапі уроку з метою максимального використання індивідуальних можливостей учнів. Він обмірковує методи і прийоми контролю знань на кожному етапі, заздалегідь намічає, хто буде оцінений наприкінці уроку, готує диференційоване домашнє завдання.

Залежно від того, які форми роботи використовуються в старших класах, виділяють такі типи уроків геометрії: 1) урок повідомлення нових знань; 2) урок повторення, узагальнення та систематизації знань; 3) урок закріплення; 4) контрольний урок; 5) комбінований урок[13, 5].

Урок має структуру відповідну його типу, яка нагадує структуру уроків математики. Тому описувати структуру кожного типу уроків із геометрії ми не будемо. Зупинимось лише на характеристиці структурних елементів уроку геометрії:

Організація учнів на урок. Цей елемент не відрізняється від такого ж елемента уроків математики. Його основне завдання - провести нервово-психологічне розвантаження школярів після перерви, переключити увагу з попередньої діяльності, сконцентрувати її на вчителі і на навчальному матеріалі.

Перевірка домашнього завдання. Організація цієї форми роботи викликає певні труднощі у педагогів. Причиною цього є те, що урок із геометрії у старших класах проводиться один раз на тиждень і тому до наступного заняття школярі часто забувають те, що вони вивчали на попередньому і перевірка домашньої роботи забирає багато часу. Повторне звернення до домашнього завдання відбувається в день перед уроком. Тому рекомендується використовувати уроки геометрії як опорні, на яких школярі знайомляться з новим матеріалом, узагальнюють його, систематизують і домашнє завдання задавати з урахуванням того, що даний матеріал буде повторюватись на уроках математики протягом тижня. Якщо вчитель буде задавати геометричний матеріал на домашнє опрацювання систематично – він може попередити його швидке забування. У такому випадку педагог має можливість тісніше пов'язати геометричний матеріал з арифметичним, з практичною діяльністю, причому він повторюється невеликими частинами, що дозволяє розумово відсталим школярам краще його засвоїти й усвідомити.

Актуалізація опорних знань дітей. Це досить важливий етап, адже він є сполучною ланкою між раніше засвоєними знаннями і новими, сприяє закріпленню матеріалу, вивченого на попередніх уроках. Його мета – визначити наявні вміння учнів виконувати вимірювальні, креслярські операції, повторити властивості фігур тощо. Його організація включає в себе підбір відповідних вправ геометричного спрямування.

Повідомлення теми і мети уроку. Тема і мета уроку геометрії дається у вигляді постановки перед учнями життєво-важливої проблеми, яку вони не можуть розв'язати через недостатність знань. Така організація роботи поступово підводить школярів до розуміння необхідності бази певних геометричних знань для їхньої майбутньої трудової діяльності і для життя в соціальному середовищі.

Повідомлення нового матеріалу. На цьому етапі уроку учні знайомляться з новими фактами, які розкривають властивості геометричних фігур, з'ясовують залежності між ними, у них формуються і надалі удосконалюються навички роботи з креслярськими інструментами тощо. Новий матеріал із геометрії дається невеликими частинами й органічно включається в кожен урок з математики. Це дозволяє школярам краще його усвідомити. Оскільки уроки геометрії доцільно використовувати як опорні, то новий матеріал необхідно закріплювати невелики порціями на уроках математики шляхом організації системи відтворюючих або тренувальних вправ[13, 6].

Первинне закріплення нового матеріалу. Вчитель на уроці організовує попередній контроль якості засвоєних знань із метою недопущення формування в школярів неправильних з'явлень про геометричні фігури і їхні властивості. На даному етапі учні розв'язують завдання, аналогічні тим, які пояснював вчитель. Їхню роботу потрібно контролювати і у разі потреби надавати допомогу.

Виконання практичних операцій. Серед практичних робіт з вивчення геометричного матеріалу значне місце відводиться кресленню. До 5-го класу учні вже повинні оволодіти навичками роботи з лінійкою, косинцем, циркулем, виконувати прості графічні роботи. Під час креслення їх потрібно навчити правильно оформлювати аркуш (зверху проводиться пряма лінія, над якою записується прізвище й ім'я учня, клас, число), на якому виконується креслення, розміщувати його симетрично відносно країв і центру, використовуються знаки ⊥, ∠, ‖, Δ, позначати фігуру відповідними літерами. Основна мета цього етапу – первинне закріплення знань, вміння виконувати графічні роботи, розв'язувати задачі геометричного змісту, користуватися під час обчислення відповідними формулами. На нього відводиться значна частина уроку, адже саме тут школярі повинні тренуватись виконувати різноманітні завдання, пов'язані з вивченим матеріалом[4, 189].

Повторення, узагальнення й систематизація знань учнів під керівництвом учителя і в процесі самостійної діяльності. Цей етап вимагає організації достатньої кількості тренувальних вправ, виконання практичних операцій з креслення, вимірювання, обчислення периметру та площі геометричних фігур, об'єму геометричних тіл. Саме тут відбувається формування вмінь і навичок проводити їхнє порівняння, розв'язувати задачі геометричного змісту тощо. Ця частина уроку присвячується формуванню вмінь застосовувати отримані знання в різних ситуаціях, при вирішенні навчальних і практичних завдань.

Домашнє завдання. Обов'язкова вимога – в домашньому завданні потрібно повторювати ті види робіт, над якими школярі працювати на уроці і його обсяг не повинен перевищувати 1/3 частину роботи, виконаної на занятті. Домашнє завдання потрібно пояснити, вказати на послідовність роботи, на необхідне для його виконання обладнання.

Підведення підсумків уроку. Завдання цього етапу – домогтися від школярів виділення головного, про що говорилось на уроці. Якщо на початку заняття вчитель знайомив учнів з планом, то в кінці перевіряє, чи вся передбачена робота виконана. Якщо план виконаний не повністю – педагог розкриває причини цього. На цьому етапі відбувається оцінювання школярів, хоч оцінки можуть виставлятись і на будь-якому іншому етапі.

На уроках вивчення геометричного матеріалу організовується контроль та облік знань школярів. Він дозволяє педагогу визначити рівень засвоєння матеріалу для того, щоб перейти до вивчення наступних тем; врахувати недоліки подачі матеріалу методичного характеру, внести відповідні корективи з урахуванням тих труднощів, які відчувають школярі.

Якщо окремі учні мають значні порушення моторики (паралічі, парези, гіперкінези), виражені порушення просторового орієнтування, важку ступінь розумової відсталості, вони працюють за індивідуальними завданнями[3, 71]. Оцінка при цьому виставляється не за якість його виконання, а за вміння дотримуватись правильної послідовності у побудові геометричних фігур.

Обсяг геометричного матеріалу в загальноосвітній школі визначається навчальною програмою, в якій чітко виділені два основні періоди. Перший період – нагромадження геометричних відомостей та елементарних уявлень і понять у молодших класах; другий – систематичне вивчення геометричного матеріалу в старших класах[27,153]. Тому вивчення геометричного матеріалу, на мій погляд, доцільно розглядати окремо в кожному періоді.

1.3.Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії

Метою навчання планіметрії є систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формування просторових уявлень, розвиток логічного мислення, засвоєння знань, потрібних для вивчення суміжних дисциплін[10, 17].

При вивченні планіметрії відбувається систематизація відомостей про основні фігури на площині і їх властивості, про геометричні величини, які характеризують плоскі фігури. Учні вчаться виконувати відповідні обчислення, знайомляться з використанням аналітичних методів (елементи тригонометрії і алгебри, вектори і координати) до розв'язування геометричних задач.

Практична спрямованість курсу планіметрії забезпечується систематичним використанням геометричних побудов та педагогічних програмних засобів для розв'язування задач на обчислення значень геометричних величин, доведення і побудову.

Важливим моментом при формуванні геометричних понять є використання динамічної наочності, яка реалізовується через використання педагогічних програмних засобів. За допомогою комп’ютера, як засобу моделювання, учень працює з графічним образом поняття разом із пов’язаними з ним числовими характеристиками, що спрощує усвідомлення змісту нового поняття, сприяє розвитку образного мислення та формуванню просторових уявлень.

Оперування динамічними графічними моделями не лише сприяє поліпшенню загального рівня графічної підготовки школярів, а є засобом формування в учнів широких узагальнень на різному графічному матеріалі.

Будь-яка тема шкільного курсу планіметрії є придатною для використання педагогічних програмних засобів[34, 38]. Загальновідомими і доступними для забезпечення вивчення планіметрії є, наприклад, такі програмні продукти: 1) GRAN1; 2) GRAN 2D; 3)GRAN 3D; 4)DERIVE; 5) Открытая математика “Планиметрия 1.0”.

У систематичному курсі геометрії (планіметрії) 7-9 класів на дедуктивній основі розвиваються п’ять змістових ліній: геометричні фігури і їх властивості; геометричні побудови; геометричні перетворення; геометричні величини; координати і вектори.

Розроблені педагогічні програмні засоби мають різні набори графічних операцій, тому по різному сприяють формуванню геометричних понять.

Пропедевтика формування знань змістової лінії “ Геометричні фігури та їх властивості” розпочинається ще в початковій школі[33, 381]. В 5-6 класах на наочно-інтуїтивному рівні учні ознайомлюються з основними геометричними фігурами – прямокутником, квадратом, трикутником, довільним многокутником. На цьому етапі навчання многокутники в основному виступають як дидактичний засіб вивчення арифметичного матеріалу, метричної системи мір. У 7-9 класах многокутники є об’єктами вивчення. На початку курсу в 7 класі ґрунтовно вивчається трикутник як одна з основних фігур курсу планіметрії, властивості якого часто використовуються при вивченні многокутників та інших плоских фігур. Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності відрізків прямих є основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії (у 8 класі – теорема Піфагора і розв’язування прямокутних трикутників, в 9 класі – ознаки подібності трикутників, розв’язування косокутних трикутників, формула площі трикутника).

Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. Означення рівності геометричних фігур у шкільному курсі вводиться у зв’язку з вивченням у 8 класі рухів. Означення рівних трикутників і ознаки їх рівності вивчаються в 7 класі на початку курсу, оскільки вони традиційно є основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач під час вивчення інших тем.

Основна мета вивчення теми “Рівність трикутників” – ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників і навчити застосовувати їх до розв’язування задач[33, 384]. Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії.

У зв’язку з вивченням ознак рівності трикутників і пов’язаного з ними навчального матеріалу використовується багато раніше вивчених понять і їх означень: відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, трикутник, рівні трикутники, перпендикуляр, проведений до прямої.

У цій темі вводяться шість нових понять: рівнобедрений трикутник, рівносторонній трикутник, теорема, обернена до даної, висота трикутника, проведена з даної вершини, медіана трикутника, проведена з даної вершини. Зазначені поняття можна вводити як абстрактно-дедуктивним так і кокнкретно-індуктивним методом. Важливо спеціально підкреслити суттєві властивості цих понять і протиставити їм несуттєві. Наприклад, до означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, входять дві суттєві властивості: 1) це – відрізок бісектриси кута трикутника; 2) він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні. Несуттєвим у цьому означенні є вид трикутника, розташування вершин на площині.

Поняття рівнобедреного трикутника доцільніше вводити конкретно-індуктивним методом, тобто на основі емпіричних узагальнень. Зміст цього методу полягає в тому, що пояснення нового матеріалу починається з розгляду прикладів. Використовуючи приклади, учні мають можливість виділити суттєві ознаки поняття, що вводиться. Це допомагає самостійно чи при допомозі вчителя сформулювати означення поняття. Оскільки учні часто припускаються помилок при розпізнаванні трикутників такого виду, то доцільно учням запропонувати моделі, в яких рівнобедрені трикутники виступають як окремими геометричними об’єктами так і складовими частинами многокутників. Зокрема, основа рівнобедреного трикутника не обов’язково має бути горизонтальною, як це здебільшого зображено в підручниках.

У процесі порівнянь і узагальнень учні виділяють суттєві і несуттєві ознаки. В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна суттєва ознака – рівність двох сторін. Несуттєвим є розташування цього трикутника на площині.

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення[18, 142].

Учні повинні виконувати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Як показує педагогічна практика навіть старшокласники припускаються помилок, проводячи висоту тупокутного трикутника. Саме тому при формуванні поняття висоти трикутника доцільно використовувати динамічні геометричні моделі. В процесі формування поняття висота трикутника учням необхідно також підкреслити суттєві ознаки і протиставити їм не суттєві.

Суттєві: 1) це є перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника; 2) вид трикутника;

Несуттєві: 1) розташування вершин трикутника; 2) розміщення трикутника на площині[21, 93].

Робота з динамічними моделями дозволяє попередити формування хибного враження, що основа висоти може лежати лише на стороні трикутника, а не на її продовженні.

Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії дає змогу вчителеві інтенсифікувати спілкування з учнями та учнів між собою; шляхом моделювання ефективніше підвести учнів до розуміння змісту понять; більше уваги приділити виявленню закономірностей досліджуваних процесів і явищ; підвищити рівень самостійності учнів у здобуванні нових знань.

РОЗДІЛ 2. Методичні підходи до розв’язування планіметричних задач

Розв’язування задач з планіметрії, як правило передбачає такі етапи.

1. Виконання малюнка за текстом умови.

2. Нанесення позначень на малюнок.

3. Скорочений запис тверджень умови задачі через введені позначення.

4. Формулювання і скорочений запис твердження, яке треба довести, або того, що треба знайти за умовою задачі.

5. Позначення того, що запис умови задачі закінчено: зазвичай проводять горизонтальну риску або пишуть слово « Розв’язання» («Доведення»).

6. Запис логічних кроків розв’язання (доведення):

– треба доводити ті співвідношення, що ми використовуємо і які не збігаються з твердженнями умови і не є аксіомами або теоремами;

– логічний крок має структуру: вихідне твердження; «тоді» ($\Rightarrow$); твердження-висновок;

– вихідними твердженнями логічного кроку можуть бути: твердження умови задачі, аксіоми, теореми та твердження, що були доведені в попередніх логічних кроках;

7. Запис відповіді або « що вимагалося довести»[12, 302].

2.1. Алгебраїчний метод

Розв’язування геометричних задач за допомогою алгебри, математичного аналізу, тригонометрії дозволяє не тільки показати єдність геометрії, алгебри, аналізу, але і озброїти студентів, що вчаться ефективним прийомам пошуку рішення завдань[36, 114].

Розглянемо суть цього методу в залежності від типу задач, які подані в таблиці 2. 1.

Табл. 2. 1.

№	Задачі	Суть методу
1.	На обчислення	За умовою задачі складається рівняння(система), з якого обчислюється шукана величина.
2.	На доведення	За умовою задачі складається рівняння(система), розв'язавши його переконуємось в справедливості твердження задачі.
3.	На побудову	а) За умовою задачі складається рівняння; б) виконується розв'язання задачі; в) досліджуються отримані формули; г) проводиться побудова шуканих величин за отриманими формулами.

Для складання рівняннь (систем) на початковому етапі навчання зручно користуватися таблицями, в яких відображені залежності між елементами геометричної фігури. Ці таблиці можуть служити орієнтовною основою для навчання розв'язання задач. Для складання таких таблиць вибирають опорні елементи, через які будуть визначати необхідні елементи з вказівкою тих теорем (формул), які дають можливість визначити ці елементи.

Спосіб введення допоміжної змінної

При розв'язуванні задач за допомогою алгебраїчного методу широко використовується спосіб введення допоміжної змінної.

Суть способу полягає в тому, що допоміжні змінні вибирають таким чином, щоб величини, дані в умові задачі, однозначно визначали геометричну фігуру[36, 153].

Приклад. В довільному чотирикутнику *ABCD:* $|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$. Знайти кут між прямими, які містять *AD* і *BC.*

Розв'язання. Для знаходженнч кута *DMC* довизначимо трикутник *DMC.* Нехай *DM = x, MC=y.*

1

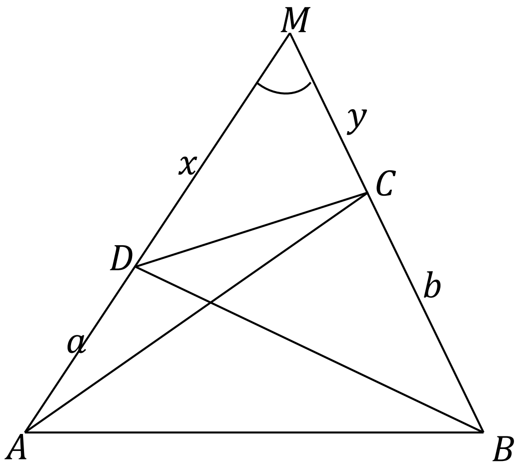


Рис. 2. 1.

Скористаємося теоремою косинусів і скористаємося рівністю $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ *(∗).*

1. Із ΔABM: $|AB|^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2 - 2(a+x)(b+y)\cos\alpha$.
2. Із ΔCDM: $|CD|^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$.
3. Із ΔACM: $|AC|^2 = (a+x)^2 + y^2 - 2(a+x)y\cos\alpha$.
4. Із ΔBDM: $|BD|^2 = x^2 + (b+y)^2 - 2x(b+y)\cos\alpha$.

Із (∗) і *1 – 4* $\Rightarrow ab\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Спосіб площ

Суть способу: для складання рівнянь (систем) в якості опорного елемента використовується площа[36, 181].

Перш ніж приступити до розв’язання задач за допомогою способу площ, нагадаємо деякі їх властивості, які дуже часто використовуються при розв'язанні.

Задача. Якщо одну з сторін трикутника, прилеглу до даного його кута, збільшити в *m* раз, то його площа теж збільшиться в *m* раз[31, 74].

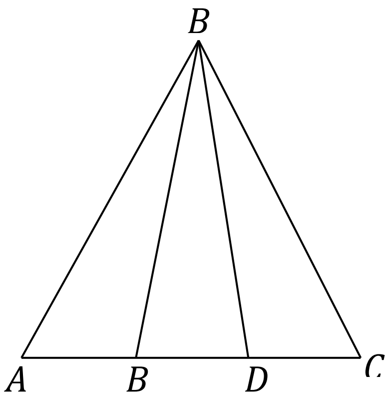


Рис. 2.2.

Розв’язання. Так як трикутник *ABC* і *ABD* мають спільну висоту, то відношення їх площин дорівнює відношенню основ.

$S_{ABC} : S_{ABD} = AC : AD = m$.

Наслідки з задачі.

a) медіана ділить трикутник на дві рівні частини;
b) бісектриса кута трикутника, яка знаходиться між сторонами *a* і *b*, ділить його на два трикутника, площі яких відносяться як *a:b;*
c) якщо два трикутника мають спільний кут, то їх площі відносяться як відношення сторін, що утворюють цей кут;
d) частинний випадок пункту с).

Якщо два трикутники подібні і сторони одного із них в m раз більше від відповідних сторін другого, то його площа в m^2 більша площі другого трикутника[11, 317].

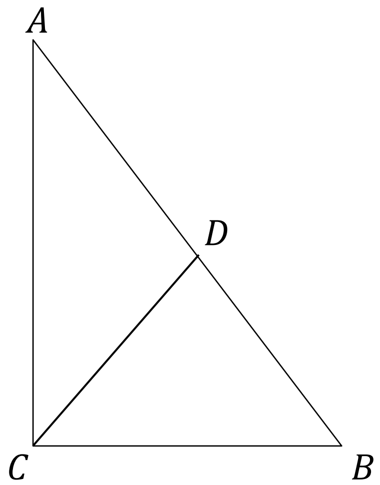


Рис. 2. 3.

Приклад. Дано прямокутний трикутник з катетами a і b. Обчислити довжину бісектриси проведеної на гіпотенузу із вершини прямого кута.

Розв'язання. Для визначення довжини бісектриси скористаємось способом площ.

$$S_{ABC} = S_{CAD}+S_{CDB} \tag{2. 1}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \tag{2. 2}$$

$$S_{CAD} = \frac{1}{2}b\cdot CD\sin 45° \tag{2. 3}$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}a\cdot CD\sin 45° \tag{2. 4}$$

Підставимо рівняння *(2. 2)- (2. 4)* в рівняння *(2. 1)*.Отримаємо

$ab = b\cdot CD\frac{\sqrt{2}}{2} + a\cdot CD\frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідки $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Спосіб доведення від супротивного

Англійський математик Г. Харді (1877 – 1947) сказав: «Доведення від супротивного, таке любе Евклідові, – це чи не найбільш витончена зброя математики»[11, 113].

Застосування доведення « від супротивного» вимагає таких логічних кроків-міркувань:

1) проаналізувати твердження яке вимагається довести, і сформулювати супротивне (протилежне) твердження;

2) зробити припущення, що сформульоване твердження є правильним;

3) спираючись на це припущення, логічними (дедуктивними) міркуваннями прийти до абсурдного висновку;

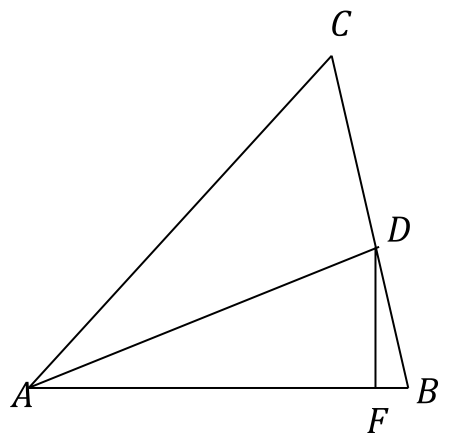
4) сказати, що тоді зроблене нами припущення треба відкинути і прийняти те твердження, яке й треба було довести.

Приклад. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і бісектриса, проведені з вершини гострого кута, не співпадають[2, 107].

Доведення. Розглянемо 4 варіанта міркуваннь від супротивного.

Спосіб 1. Припустимо від супротивного: медіана і бісектриса гострого кута співпадають. Тоді трикутник буде рівнобедреним, тому гіпотенуза дорівнює одному із катетів. Протиріччя.

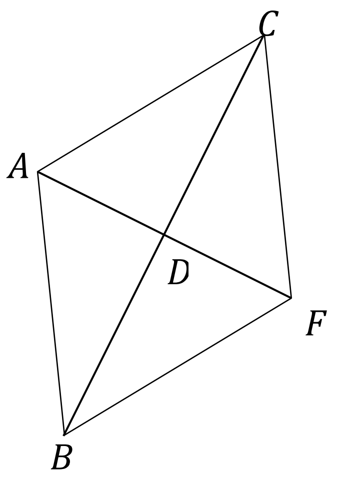
Спосіб 2.



Нехай AD – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо $DF \perp AB$, тоді $\Delta ACD = \Delta AFD$ і отже $CD = CF$, але $CD = BD$ $DF = DB$ – перпендикуляр і похила опинилися рівними. Протиріччя.

Спосіб 3.

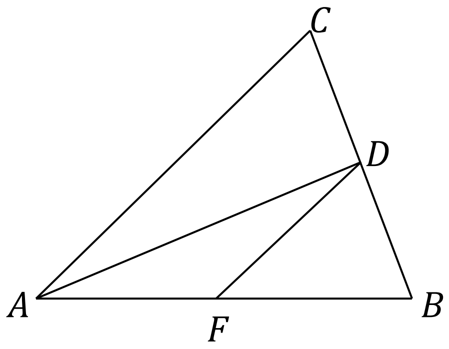
Нехай AD - бісектриса і медіана. Відкладемо $DF = AD$ і точку F



з'єднаємо з B і C, тоді $ABFC$ – ромб (це легко довести). Але тоді $\angle ACF = 2\angle ACB = 180°$. Чого бути не може.

Спосіб 4.

Припустимо, що AD – одночасно бісектриса і медіана. Проведемо середню лінію DF, тоді ΔADF – рівнобедрений (чому?) і значить $AF = FD$. Але тоді $FD = FB$; $\Delta\ FDB$ – теж рівнобедрений і значить



$\angle FBD = \angle FDB$.

Отримали, що гострий кут дорівнює прямому. Протиріччя.

В заключені слід відповісти на питання: Чи будь-яку теорему можна довести методом від супротивного?

Відповідь: Так. Будь-яку. Зокрема, кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення методом від супротивного. Робиться це дуже просто: припустимо « супротивне», а потім буквально повторюємо «пряме» доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему.

Інша справа, чи доцільно будь-яку теорему доводити методом від супротивного? Звичайно, ні.

Метод Торопова

Метод розв'язання трикутників Торопова вказує загальний прийом складання рівнянь для знаходження шуканих елементів трикутника за трьома його даними елементами. Нехай дано значення двох кутових елементів:

$U_1(A, B, C) = m_1, \qquad U_2(A, B, C) = m_2.$

Складемо наступну основну змішану систему:

$$\begin{cases} U_1(A,B,C) = m_1 \quad U_2(A,B,C) = m_2 \\ A + B + C = \pi, \ A > 0, B > 0, C > 0 \end{cases} \tag{2. 5}$$

Будь – яке розв’язання системи *(2. 5)* визначає трикутник за формою. Достатньо взяти один будь – який трикутник із знайденими величинами кутів, тоді будь – який подібний трикутник буде задовольняти умову задачі[36, 217].

Отже, будь–яке розв’язання системи *(2. 5)* (якщо воно існує) визначає нескінченну множину подібних між собою трикутників. Зокрема, якщо система *(2. 5)* не має розв’язку, то трикутників з даними співвідношеннями між його кутами не існує.

2.2. Розв’язування планіметричних задач векторним методом

Векторний метод

Геометричні задачі, що розв'язуються за допомогою векторів, можна умовно розділити на дві групи.

До першої групи відносяться задачі, в яких умова вже сформульована на мові векторів. До другої групи відносяться задачі, в формулюванні яких не вказано на зв’язок їх з векторним методом[35, 81]. Як правило, такі задачі можна розв’язувати різними способами, - векторний спосіб є одним з них. Ці задачі даються учням важче, ніж задачі першої групи, тому ми приділимо їм основну увагу.

В свою чергу задачі першої і другої групи діляться на два вида:

1) афінні задачі;

2) метричні задачі.

Успіх у вирішені задач за допомогою векторної алгебри лежить в основі наступних (умовах) уміннях:

1) вміння переводити текст задачі з геометричної мови на векторну і навпаки;

2) вміння виконувати операції над векторами;

3) вміння представляти вектор у вигляді суми (різниці) векторів, у вигляді перетворення вектора на число;

4) вміння виконувати перетворення векторних виразів;

5) вміння переходити від співвідношень між векторами до довжин і навпаки;

6) вміння застосовувати основні векторні рівняння (формули) до розв'язуваної задачі.

Основні векторні рівняння (формули) ми називаємо базисними задачами.

При розв'язуванні задач зводимо до обгрунтування колінеарності векторів, а саме:

1) паралельності прямих (відрізків);

2) належності трьох точок одній прямій;

3) доведення того, що даний чотирикутник є паралелограмом;

4) три даних прямих (відрізків) перетинаються в одній точці.

Зручно дотримуватися наступної схеми:

1. Аналіз змісту задачі, який включає:

a) виділення умови і вимоги задачі;

b) виконання малюнку до задачі;

c) записи умови і вимог через загальноприйняті позначення.

2. Визначення можливості розв'язання задачі за допомогою апарата векторної алгебри, що включає з'ясування питання, що означає розв'язати задачу на мові векторів. При цьому зручно використовувати таблиці переводу з геометричної мови на векторну[36, 229].

1. Доведення колінеарності векторів включає:

a) вибір двох неколінеарних векторів (по можливості тих, що виходять з однієї точки);

b) розкладання шуканих і даних векторів по вибраних базисних векторах;

c) перетворення отриманих векторних рівнянь до встоновлення колінеарності (неколінеарності) векторів.

Векторно-координатний метод

При розв'язуванні задач векморним методом широко застосовується координатний метод. Сумісне використання двох вище вказаних методів до розв'язання задач отримаємо назву векторно-координатного методу[30, 54].

Розглядання розв'язання задач, вирішуваних векторно-координатним методом, необхідне тому, що учні розглядають в курсі геометрії 8 класу тему: «Вектори на координамній площині» і отримують значний запас знань про вектори на координатній площині. В якості прикладу розглянемо задачу.

Задача. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма взяті відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5} AD$, $AN = \frac{1}{6} AC$. Довести, що B, M, і N лежать на одній прямій[32, 111].

Розв'язання. Систему координат виберемо так, як показано на рис. 2. 4 Координати т. M очевидно: $M(\frac{1}{6a};\ 0)$. Знайдемо координати т. N:

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, $AN = (\ b+a;\ c\ )$, тому $\overrightarrow{AN} = (\frac{b+a}{6};\ \frac{c}{2})$.

Розглянемо тепер вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$, покажемо, що вони колінеарні.

$\overrightarrow{BM} = (\frac{a-5b}{5}; -c\ ),\ \overrightarrow{BN} = (\ -\frac{5}{6}c).$

$\frac{\frac{1}{5}(a-5b)}{\frac{1}{6}(a-5b)} = \frac{6}{5}$ і $\frac{-c}{-\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$, то вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ колінеарні, отже точки B, M, і N лежать на одній прямій.

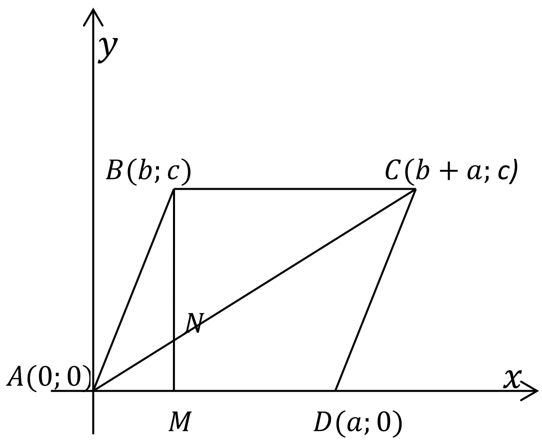


Рис. 2. 4.

Метричні задачі, що розв’язуються за допомогою векторів чи векторно – координатного методу, діляться на наступні основні види:

1) на обчислення довжини відрізка;
2) на обчислення кута між прямими (відрізками);
3) на використання необхідної і достатньої умови перпендикулярності двох векторів[37, 245].

При навчанні розв’язання задач вказаних видів доцільно використовувати наступну схему:

Загальна схема розв’язування метричних задач.

І. Загальні вказівки.

1. Провести аналіз змісту задачі (виділити умову і вимогу; виконати малюнок; записати умову і вимогу в загальноприйнятих позначеннях).

2. Визначити можливість розв’язання задачі за допомогою векторів чи векторно – координатного методу (перевести з геометричної мови на мову векторів чи векторно – координатну мову).

3. Розкласти вектори по двох базисних неколіанерних векторах. Конкретно по видах:

А). Обчислення довжини відрізка.

1) в якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі довжини і кут між ними;

2) розкласти шуканий вектор по базисним векторам;

3) знайти скалярний квадрат вектора.

Б). Обчислення кута між прямими.

1). В якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі відношення довжин і кут між ними;

2) розкласти вектори, що визначають шуканий кут, по базисним векторам;

3) знайти косинус кута між ними.

В). Використання необхідної і достатньої умови перпендикулярності двох векторів.

1) доведення перпендикулярності двох прямих, відрізків;

2) в якості базисних вибрати два неколінеарні вектори, у яких відомі довжини (чи відношення довжин) і кут між ними;

3) розкласти по базисних векторах вектори, перпендикулярність яких необхідно довести;

Г). Використання перпендикулярності двох прямих (відрізків).

1) в якості базисних векторів вибрати вектори, які перпендикулярні;

2) розкласти по базисних векторах необхідні елементи умови задачі;

3) знайти (довести) потрібне співвідношення, використовуючи скалярне перетворення вектором з урахуванням перпендикулярності базисних векторів[36, 214].

Розглянемо задачу, що ілюструє застосування даних вище схем.

Задача. Довести , що в довільному чотирикутнику $ABCD$

$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB{\cdot}BC \cdot cos\,\widehat{\beta} - 2BC \cdot CD\,cos\,\hat{C} - -2CD \cdot AB \cdot cos\,\widehat{AED}$, де E – точка перетину сторін AB і CD.

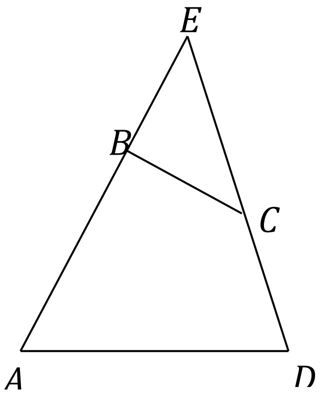


Рис. 2. 5.

Розв'язання.

Як бачимо, задача зводиться до знаходження довжини відрізка (сторони чотирикутника $ABCD$). $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$. Знайдемо скалярний квадрат вектора AD.

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + +2\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} \qquad (2.\ 6)$$

Розглянемо скалярне перетворення векторів:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC};\ \overline{AB} \cdot \overline{CD};\ \overline{BC} \cdot \overline{CD}; \overline{AB} \cdot \overline{BC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot cos(\ \overline{AB}\ {}^\wedge \overline{BC}\ )=$$

$$= |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|\,cos(180° - \beta) = -|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|\,cos\,\hat{\beta} \qquad (2.\ 7)$$

Аналогічно:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD}\ = -|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|\,cos\,\widehat{AED} \qquad (2.\ 8)$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{CD} = -|\overline{BC}| \cdot |\overline{CD}|\,cos\,\hat{C} \qquad (2.\ 9)$$

Підставимо рівняння *(2. 7)-(2. 9)* в рівняння *(2. 6),* отримаємо

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cos\hat{\beta} - 2|\overline{BC}| \cdot |\overline{CD}| \cos\hat{C} - -2|\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}| \cos\widehat{AED}. \qquad (2.10)$$

Запишемо рівняння *(2. 10)* на геометричній мові:

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB \cdot BC \cos\hat{\beta} - 2BC \cdot CD \cos C - 2CD \cdot \cdot AB \cos\widehat{AED} \; .$$

Координатний метод

Геометричні задачі, які розв'язуються з використанням методу координат, можна умовно розділити на дві групи, а саме:

1. Задачі, умова яких вже сформульована на координатній мові.
2. Задачі, в умові яких немає вказівок на зв'язок їх з координатним методом[15, 37].

Розв'язання задачі першої групи, як правило, зводиться до використання відомих формул і теорем. В якості прикладу розглянемо наступну задачу.

Задача. Обчислити координати центра *M* кола, описаного навколо трикутника *ABC,* якщо його вершини мають координати

A (2;1); B (-1;4); C (3;-1).

Розв'язання: Позначимо координати точки *M – M (x;y).* Так як точка *M* є центром описаного кола, то:

AM=BM і AM=CM. Знайдемо довжини відрізків:

AM, BM, CM. AM=$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$*; BM=*$\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$*; CM=*$\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$. Складемо систему рівнянь, прирівнявши *AM=BM* і *AM=CM* маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \qquad (2.\ 11)$$

Зведемо обидві частини рівнянь системи (2. 11) і спростимо. Після перетворень система (2. 11) має вигляд:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \qquad (2.\ 12)$$

Розв’язавши систему (2. 12), маємо : $x=-\frac{6}{5}$; $y=\frac{4}{5}$;

Відповідь: *M* $(-\frac{6}{5};\ \frac{4}{5})$.

Задачі другої групи викликають більше труднощів, тому приділимо їм основну увагу.

Розв’язання задач другої групи проходить за однією загальною схемою. Запишемо її.

Загальна схема розв’язання задач методом координат

1. Виходячи з аналізу умови задачі, визначаємо доцільність розв’язання її методом координат.

2. Вибираємо прямокутну систему координат на площині так, щоб подальші алгебраїчні перетворення були по можливості більш простими.

3. Знаходимо координати даних і вихідних елементів, використовуючи умову задачі і відомі теореми та формули .

4. Складаємо алгебраїчні вирази (рівняння, нерівності, системи рівнянь т. д.), які виходять з умови задачі. Перетворимо їх до отриманих результатів.

5. Отриманий результат переводимо з координатної мови на мову геометричну.

6. Записуємо відповідь. Перевіряємо чи немає реальнішого методу розв’язання[30, 66].

Метод координат також зручно використовувати при розв’язуванні задач на знаходження геометричних місць, а саме, на складання рівнянь ліній, заданих геометричними умовами. При розв’язуванні таких задач зручно користуватись загальною схемою.

Загальна схема розв’язування задач на знаходження геометричних місць.

1. Вибираємо зручну для розв’язування задачі прямокутну систему координат.

2. Знаходимо (позначаємо) координати заданих в умові точок.

3. Вибираємо на шуканій лінії довільну точку *M*. Позначаємо її координати через *(x; y)* і при цьому враховуємо, що точка *M* рухається по шуканій прямій.

4. Складаємо алгебраїчні вирази (рівняння, нерівності і т.д.), що зв'язують дані елементи задач з шуканими.

5. Знаходимо безліч рішень (рівняння, нерівності і т. д.). Робимо, по можливості, необхідні перетворення.

6. Записуємо відповідь. Аналізуємо розв’язок.

2.3. Метод геометричних перетворень

Як відомо, навчання учнів розв’язанню геометричних задач із використанням геометричних перетворень представляють особливі труднощі. Це пов’язано з тим, що розв’язування задач даним методом не можна звести до визначених алгоритмів або вказівок. Розв’язання кожної задачі представляє творчий процес[12, 331].

Тому, перш ніж приступити до навчання розв’язувати задачі даними методами, особливу увагу необхідно приділити поетапному формуванню наступних умінь:

a) будувати образи фігур при переміщені і гомотетії;

b) знаходити відповідні в перетвореннях точки на даних відповідних у тому ж перетворені фігурах.

c) виділяти елементи, що визначають перетворення: осі симетрії, центр і кут повороту, напрям і відстань паралельного перенесення, коефіцієнт гомотетії;

d) будувати відповідні в перетвореннях точки на заданих фігурах.

І тільки переконавшись, що учні вільно володіють вказаними методами, можна приступити до навчання розв’язання задач.

Для виявлення рівня сформованості уміння призначені діагностичні задачі, дані перед зразками розв’язання задач кожним методом.

Метод центральної симетрії

Підготовчі задачі

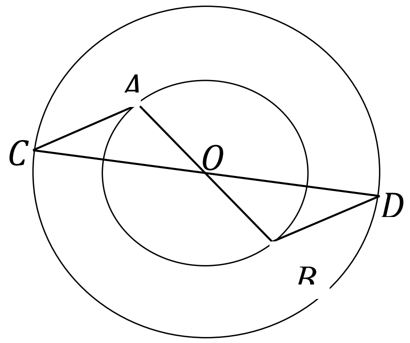


Рис. 2. 6.

Приклад. Нехай *AB* і *CD* – діаметрально протилежні точки двох концентричних кіл. Довести, що *AC* = *BD*.

Розв'язання. Z_0(A)=B, Z_0(C)=D $\Rightarrow$ $z_0(AC) = BD$,

Звідси *AC* = *BD*. Розом з тим доведено, що *AC* ∥ *BD*.

Приклад. Два рівних кола *W* і W_1 дотинкаютьса в точці *K*. Три прямі, що проходять через цю точку *K*, перетинають ці кола ще раз в точках *A, B, C* і *L*, *M, N*. Довести, що трикутник *ABC* дорівнює трикутнику *LMN*[32, 217].

Розв'язання. $Z_k(A) = z_k(KA) \cap z_k(W) = KL \cap W_1 = L$.

Аналогічно: $z_k(B) = M$ $z_k(C) = N$.

А тому $z_k(\Delta ABC) = \Delta LMN$, звідси $\Delta ABC = \Delta LMN$.

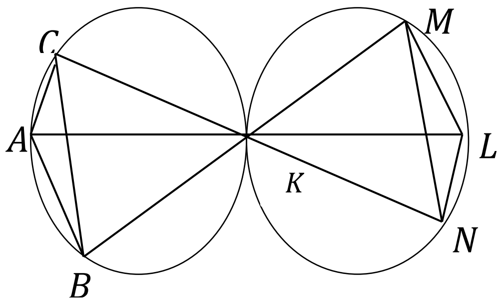


Рис. 2. 7.

Метод повороту навколо точки

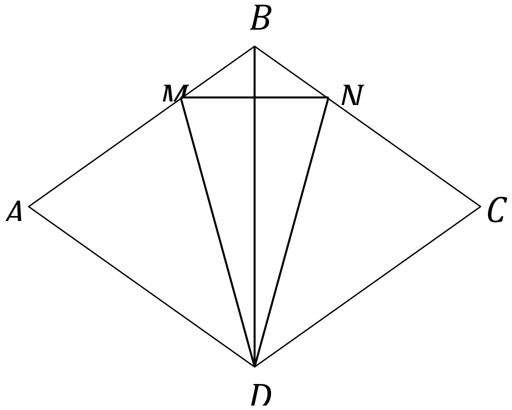


Рис. 2. 8.

Приклад. На сторонах *AB* і *BC* ромба *ABCD*, у якого кут *BAD = 60°* узяті відповідні точки *M* і *N* так, щоб *AM* = *BN*. Довести, що трикутник *MDN* правильний.

Розв'язання. Розглянувши рис.3 легко побачити, що $DA = DB = DC$, і $\angle ADB = \angle BDC = 60°$. А тому

$$\left.\begin{array}{l} R_D^{-60}(A) = B \\ R_D^{-60}(B) = C \end{array}\right| \begin{array}{l} R_D^{-60}(AB) = BC \\ M \in AB,\ N \in BC \end{array} \Rightarrow R_D^{-60}(M) = N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} DM = DN \\ \angle MDB = 60° \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \Delta MDN \text{ – рівносторонній.}$$

Приклад 2. В правильному шестикутнику $ABCDEF$, точка M – середина діагоналі AC, N – середина сторони DE. Довести, що трикутник MNF правильний.

Розв'язання. Розглянемо рис. 2. 9.

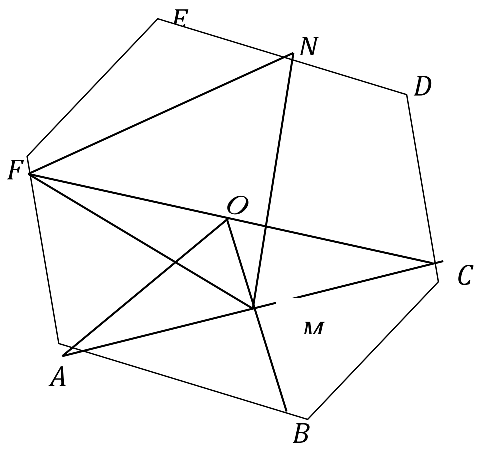


Рис. 2. 9.

Нехай O – центр даного шестикутника, тоді $ABCD$ – ромб і тому M – середина OB. Розглянемо поворот $R_F^{-60°}$ і знайдемо образ точки N. Маємо:

$$\left.\begin{array}{l} R_F^{-60}(E) = O, \\ R_F^{-60}(D) = B \end{array}\right| \Rightarrow R_F^{-60}(ED) = OB$$

$$\Rightarrow R_F^{-60}(N) = M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} FN = FM \\ \angle NFM = 60° \end{array}\right. \Rightarrow \Delta MNF \text{ – правильний.}$$

Метод осьової симетрії

Приклад. Побудувати трикутник за двома сторонами b і c і різниці його кутів, які лежать проти його сторін[11, 432].

I. ***Аналіз.*** Нехай трикутник ABC побудований. $AC = b$, $AB = c$, $\angle B - \angle C = \alpha$.

Проведемо через середину основи BC перпендикуляр MN і приймаємо його за вісь симетрії для побудови симетричного трикутника A_1BC.

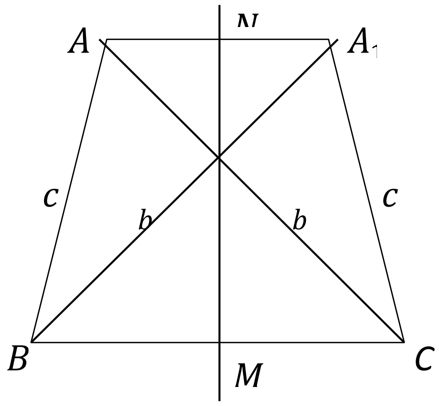


Рис. 2. 10.

Розглянемо трикутник A_1AC: $A_1C = c$, $A_1B = b$, $\angle ACA_1 = \angle B - \angle C = \alpha$,

$\angle BCA_1 = \angle B$.

Так як в трикутнику A_1BC відомі дві сторони і кут між ними, то його можна побудувати.

II. ***Побудова.***

1. Будуємо трикутник A_1BC (за двома сторонами і кутом між ними).
2. Ділимо відрізок AA_1 – навпіл.
3. Будуємо пряму l, перпендикулярну AA_1 і що проходить через його середину.
4. Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій AA_1.
5. Відкладаємо від точки перетину прямих C і CB рівний відрізок MC. Отримаємо точку B.
6. Трикутник ABC побудований.

III. ***Доведення.*** Трикутник ABC задовільняє умову задачі за побудовою.

IV. ***Дослідження.*** Задача завжди має єдиний розв’язок.

Метод паралельного перенесення

Приклад. Побудувати чотирикутник за трьома сторонати і двома кумами , прилеглим до невідомої сторони[2, 212].

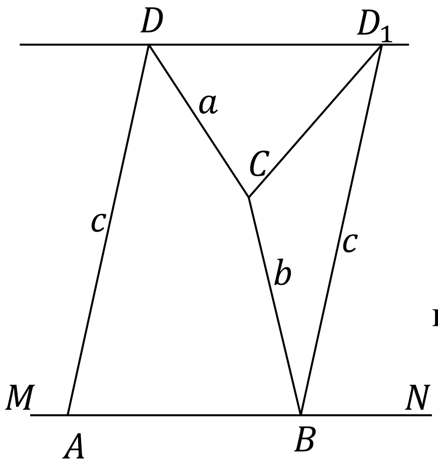


Рис. 2. 11.

Розв'язання.

I. ***Аналіз.*** Нехай наш чотирикутник побудований і задовільняє дану умову задачі: $D = a$, $CB = b$, $AD = c$, $\angle DAB = \angle A$;

$\angle CBA = \angle B$.

Зробимо паралельне перенесення відрізка AD в точку B. Тоді $\angle D_1BN = \angle DAB = \angle A$.

Так як $\angle CBA = \angle B$, то кут $CBD_1 = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Розглянемо трикутник CBD_1:

$CB = b$; $BD_1 = c$, $\angle CBD_1 = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Так як, відомі дві сторони і кут між ними, то трикутник CBD_1 – можна побудувати.

II. ***Побудова.***

1. Будуємо MN.
2. Будуємо $\angle CBD_1 = 180° - (\angle A + \angle B)$.
3. Будуємо трикутник CBD_1 (за двома сторонами і кутом між ними).
4. Для побудови точки D будуємо пряму l, паралельну MN і що проходить через точку D.
5. Знаходимо точку D (радіусом рівним з центром в т. C проводимо дугу до перетину з прямою l, що проходить через точку D_1 паралельну MN).
6. Знаходимо точку A (можна двома способами: 1) провести пряму, паралельну до D_1B, що проходить через D; 2) радіусом рівним C з центром в точці D описує дугу до перетину з прямою MN).

III. ***Доведення.*** Чотирикутник *ABCD* задовільняє умову задачі за побудовою.

IV. ***Дослідження.*** Задача має:

a) два розв’язки, якщо дуга проведена з т. *C* радіусом, що дорівнює *a*, перетне пряму *l,* в двох точках;

b) єдиний розв’язок, якщо дуга дотикається до прямої *l.*

c) Не має розв’язків, якщо дуга не перетинає пряму *l.*

РОЗДІЛ 3. Орієнтація навчальної діяльності під час розв’язування планіметричних задач

3. 1. Пропедевтика геометрії в 1-6 класах

Початкова школа. Найважливішими завданнями курсу математики початкової школи, що стосуються пропедевтики систематичного курсу геометрії, є такі: ознайомлення учнів з основними величинами та їх вимірюванням (довжини відрізків, площі фігур); формування уявлень про деякі геометричні фігури та їхні властивості; вироблення потрібних графічних умінь[4, 217].

Розглянемо, як здійснюється підготовча робота щодо геометричного матеріалу в 1–4 класах.

У першому класі на наочно-інтуїтивному і оперативному рівнях учні виконують побудови, практичні дії з фігурами. Вводяться: круг, трикутник, квадрат, чотирикутник, п'ятикутник. Учнів ознайомлюють з точкою і відрізком, їх зображенням, довжиною відрізка. Впроваджується одиниця довжини – сантиметр, пізніше – дециметр, розглядається поняття «відстань». В учнів формують уміння вимірювати довжини відрізків, будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки.

У другому класі учні продовжують виконувати вимірювання і побудову відрізків, розпізнавати знайомі фігури. Вводяться нові фігури – ламана, багатокутник. Учні вимірюють довжину ламаної, знаходять периметр багатокутника, вивчають кути багатокутника, прямий кут. Вводяться нові фігури: прямокутник, квадрат, коло і центр кола. Учні вчаться будувати прямокутники і квадрати на папері у клітинку, коло – за допомогою циркуля.

У третьому класі впроваджується буквене позначення геометричних фігур[5, 211]. Вперше вводиться поняття площі фігури як розміру частини площини обмеженої фігурою. Учні вивчають одиниці площі: квадратний сантиметр, квадратний дециметр, обчислюють площі фігур методом підрахунку. У цьому класі формується уміння будувати прямокутник і квадрат за даними довжинами сторін (по клітинках зошита). Учні продовжують розв'язувати вправи на знаходження периметра багатокутника.

У четвертому класі учні далі вивчають міри площі (крім відомих квадратного сантиметра і квадратного дециметра вводиться нова одиниця –

квадратний метр), визначають площі прямокутників та інших фігур за допомогою палетки.

Особливістю методики вивчення геометричного матеріалу в початковій школі є широке використання конкретно-індуктивного методу, наочності та практичних дій учнів. На основі наочного ознайомлення з моделями та рисунками учні мають навчитися вільно розпізнавати найпростіші геометричні фігури в предметах, моделях, рисунках, оволодіти навичками побудови та вимірювання. На цьому етапі навчання не передбачено введення означень геометричних фігур, проведення дедуктивних міркувань, крім, можливо, найпростіших дедуктивних висновків.

Курс математики 5-6 класів. На цьому етапі навчання дещо поглиблюють і розширюють відомості про відомі учням з початкової школи фігури, а також вводять нові фігури та геометричні поняття[4, 223]. Зокрема, учні продовжують вивчати відрізки та їх вимірювання, але при цьому їхню увагу звертають на те, що відрізок коротший за будь-яку іншу лінію, яка з'єднує його кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох частин, дорівнює сумі довжин цих частин. Отже, всі теоретичні факти щодо геометричних величин, сформульовані в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочнодійового мислення.

У п'ятому класі учнів ознайомлюють з новими геометричними фігурами: промінь (як фігура, утворена продовженням відрізка в один бік), пряма (як фігура, утворена продовженням відрізка в обидва боки), розповідають про площину як образ реальних об'єктів (поверхня скла, спокійного водоймища тощо). Безпосередньою побудовою вводять: поняття кута, його видів (прямий, гострий, тупий), одиницю виміру кутів[12, 285]. Формується уміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути заданої величини. Учням уже відоме поняття площі, вони вміють обчислювати площі квадрата і прямокутника, отже, на цьому етапі навчання вводяться формули площі квадрата і прямокутника ($S = a$, $S = ab$), нові одиниці площі (гектар, квадратний кілометр). Учнів вперше ознайомлюють з геометричним тілом –

прямокутним паралелепіпедом, з новою геометричною величиною – об'ємом, його одиницями, вони розв'язують вправи на обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

У шостому класі вводять формули довжини кола і площі круга – відомих з початкової школи геометричних фігур[6, 289]. Упроваджується нова фігура – круговий сектор, нові геометричні тіла – призма, піраміда, циліндр, конус.

Важливими для підготовки до вивчення систематичного курсу геометрії є відомості про перпендикулярні і паралельні прямі, про побудову їх за допомогою лінійки та косинця. На рівні практичних дій (побудови) учнів ознайомлюють з фактами, які стверджуються в курсі геометрії аксіомою паралельних.

На відміну від початкової школи в 5 – 6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводять на рівні означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), здійснюють нескладні дедуктивні міркування. Водночас, як і в початковій школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке залучення наочності, практичних вправ учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

Тому, для ефективного засвоєння планіметричного матеріалу, необхідна достатня підготовка учнів на кожному етапі навчання.

3. 2. Методика проведення перших уроків геометрії

На перших уроках геометрії ми подаємо навчальний матеріал, який вводить учнів у геометрію. Це відповідає параграфам 1 і 2 підручника О. В.

Погорєлова, в яких розглянуто первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні та перпендикулярні прямі), вводяться поняття про аксіому, теорему, формулюються всі аксіоми, покладені в основу курсу планіметрії.

Основною метою перших уроків геометрії є дати поняття про геометрію, систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури, ввести первісні (неозначувані) поняття і поставити учнів перед потребою означення деяких відомих їм фігур (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні прямі), розглянути первісні та означувані відношення, сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів, які наприкінці теми буде названо аксіомами[33, 243]. На перших уроках також вводять поняття про теореми , їх доведення і аксіоми. В учнів формують потребу доведення нових тверджень за допомогою аксіом і вже доведених тверджень. Вони набувають перші уміння виконувати доведення. Важливим завданням перших уроків є формування геометричної мови на основі вже відомої та нової для учнів термінології. На перших уроках геометрії ще не ставлять за мету пояснювати учням походження та роль первісних понять і аксіом, ідею аксіоматичної побудови геометрії. Про це можна говорити, завершуючи вивчення планіметрії або на перших уроках стереометрії, коли на прикладі планіметрії учні вже мають зразок дедуктивної побудови курсу. Проте ідею дедуктивної й аксіоматичної побудови математики вчитель має систематично втілювати з перших уроків геометрії, насамперед формуючи потребу означати нові геометричні поняття та доводити нові геометричні твердження на основі вже відомих понять, аксіом і доведених тверджень.

Щодо первісних, не означуваних понять планіметрії «точка», «пряма», то уявлення про них учні вже мають з попередніх класів. Однак, хоч уявлення про точку походить від об’єктів, які існують реально (місце дотику олівця до паперу, крейди – до дошки, місце перетину двох ліній тощо), потрібно підкреслити, що в геометрії точка не має розмірів. Так само, хоч уявлення про пряму дає туго натягнута нитка (стрічка), в геометрії пряма не має товщини, кінців і вважається необмежено подовженою[4, 216].

Формуючи поняття «належить» для точок і прямих на площині, потрібно звернути увагу на можливість використання різних термінів для позначення цього відношення: «точки *А* і *С* належать прямій а», «точки *А* і *С* лежать на прямій *а*», «пряма а проходить через точки *А* і *С*».

Щодо формування первісного відношення «лежить між» для трьох точок прямої, то потрібно відмежувати набуте учнями з життєвої практики поняття «лежить між». Наприклад, у побуті часто вживають вислови на зразок «місто Коростишев лежить між Києвом і Житомиром», пояснюючи, яким автобусом дістатися до Коростишева. Проте якщо подивитися на карту, то очевидно, що автомобільна траса, якою рухається автобус, не є прямою лінією. У цьому разі, з погляду геометрії, застосування цього терміна неправомірне, адже вислів «лежить між» в геометрії використовують для позначення властивості трьох точок, які належать лише прямій.

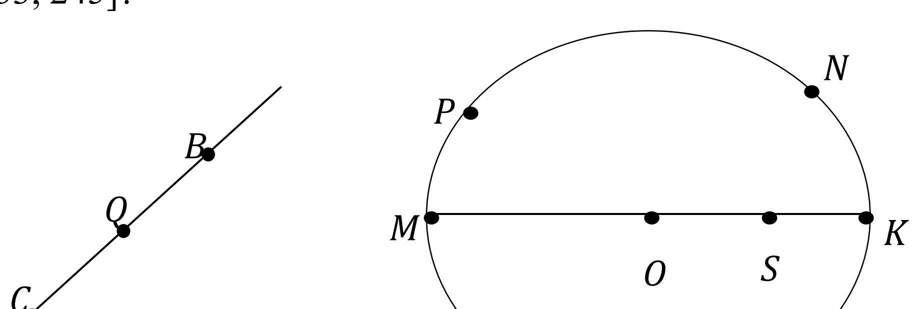
Якщо учням запропонувати самостійно позначити на прямій точку С, яка лежить між двома даними точками *А* і *В* цієї прямої, то хто-небудь із учнів може позначити цю точку лише посередині відрізка *АВ*. Потрібно наголосити, що це правильно не лише для точки, яка лежить посередині відрізка. Доцільно розв'язати усні вправи на підведення до поняття «лежить між», використовуючи різні відомі учням фігури (рис. 3.1). Система запитань може бути такою.

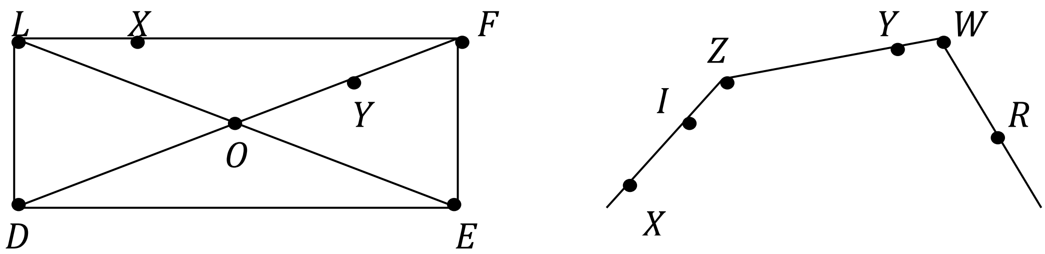
1. Чи лежить точка Р між точками *M* і *N* (рис. 3.1, б)?

2. Які точки на мал. 3.1, а, б лежать між двома іншими?

3. Чи лежить точка *F* між точками *L* і *E* (рис. 3.1, в)? Укажіть на цьому малюнку точки, які лежать між двома іншими.

4. Яка точка на рис. 3.1, г лежить між двома іншими? Які точки не мають цієї властивості[33, 245]?





в г

Рис. 3.1

За умови роботи за підручником О. В. Погорєлова на перших уроках геометрії вводять 25 означуваних понять[29], ще три впроваджують описанням, на прикладах (геометрична фігура, аксіома, дати означення чому-небудь). Більшість цих понять відома учням з попередніх класів, але тепер постає завдання сформулювати їх означення. Щодо терміна «означення», то, на відміну від термінів «аксіома», «теорема», його в підручниках не пояснюють.

З курсу логіки відомо, що означення – це твердження, в якому перелічуються істотні властивості поняття[24, 37]. На початку вивчення курсу геометрії з дидактичних міркувань надавати учням таке тлумачення терміна «означення» недоцільно. Тому досить обмежитися роз'ясненням на прикладах поняття «означити що-небудь».

Означувані поняття на перших уроках геометрії можна вводити конкретно-індуктивним і абстрактно-дедуктивним методами.

Наприклад, можна підвести учнів до означення відрізка, виокремлюючи істотні властивості точок цієї фігури. В цьому разі вчитель може подавати пояснення у формі такої евристичної бесіди.

Учитель. Візьмемо пряму *a* і позначимо на ній відрізок *AB* (рис. 3. 2).

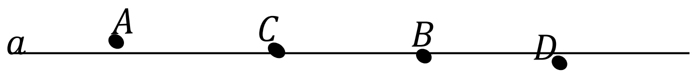


Рис. 3. 2

Звернемо увагу передусім на те, що відрізок – це частина прямої. Крім того, з'ясуймо істотну властивість точок, з яких складається відрізок *AB*. Позначимо точку *C*, яка належить цьому відрізку, і точку *D* прямої, яка не належить відрізку *AB*. Яку властивість має точка *C* стосовно точок *A* і *B*?

Учень. Точка *C* лежить між точками *A* і *B*.

Учитель. Чи має таку властивість точка *D*?

Учень. Ні, точка *D* не лежить між точками *A* і *B*.

Учитель. Чи матимуть таку саму властивість, як точка *C*, всі інші точки, з яких складається відрізок *AB*?

Учень. Так, всі вони лежать між точками *A* і *B*.

Учитель. Тепер спробуйте означити відрізок, тобто сказати, яка фігура називається відрізком. У цьому разі використайте помічені дві істотні властивості відрізка.

Учні формулюють означення. Вони можуть пропустити деякі слова, зокрема слово «усіх» стосовно точок прямої, з яких складається відрізок. Учитель уточнює означення, учні повторюють його.

Так само учні можуть самостійно формулювати відомі їм означення понять «розгорнутий кут», «паралельні прямі», «бісектриса кута». Стосовно означення паралельних прямих потрібно зауважити, що в планіметрії воно містить лише одну істотну властивість – «не перетинатися».

Означення таких понять, як «кут», «трикутник», «рівні трикутники», «суміжні кути», «перпендикуляр до прямої» тощо, доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом, тобто означення формулює сам учитель, наводить приклади, учні розв'язують задачі, що закріплюють нові поняття.

Щодо поняття «геометрична фігура», яке описово запроваджують на першому уроці, то слід мати на увазі, що в підручнику О. В. Погорєлова термін «плоскі фігури» застосовується до кутів і багатокутників дещо нетрадиційно[5, 302]. Тому на першому уроці, розглядаючи поняття «геометрична фігура», доцільно скористатися моделями каркасних (виготовлених з дроту) і плоских (виготовлених з паперу чи картону) трикутника і прямокутника, кола, круга, прямокутного паралелепіпеда, піраміди, кулі, циліндра, конуса. Потрібно зазначити, що трикутники, багатокутники, коло, круг можуть розміщуватися в одній площині всіма своїми точками, на відміну від паралелепіпеда, кулі, піраміди, циліндра, конуса, які називають тілами. Після цього легко ввести поняття планіметрії як розділу геометрії, в якому вивчають фігури на площині.

Ознайомлення з аксіомами і теоремами. Слід мати на увазі, що з аксіомами планіметрії на оперативному, практичному рівні учні фактично ознайомились у процесі вивчення курсу математики 1 - 6 класів. Однак на тому етапі навчання ці властивості найпростіших фігур аксіомами не називали. Цей термін не застосовують і на перших уроках планіметрії доти, доки учні не ознайомляться з поняттями «теорема» і «доведення» і не відчують потреби у використанні аксіом для обґрунтування доведень[4, 219].

Вивчення основних властивостей найпростіших фігур і формулювання кожної властивості доцільно починати з розгляду відповідних фігур і практичних дій учнів: вибір точок на прямій і поза нею, проведення прямої через дві задані точки, вимірювання довжини відрізка та величини кута, проведення через задану точку прямої, паралельної даній. Помічені властивості учні можуть сформулювати самостійно у вигляді тверджень, які пізніше називатимуться аксіомами.

Стосовно введення поняття аксіоми як твердження про властивості найпростіших фігур, що їх домовились прийняти без доведення, то на перших уроках планіметрії цими відомостями про аксіоми можна обмежитися.

У 10 класі на першому уроці стереометрії можна дещо розширити інформацію про аксіоми. Слід підкреслити, що ці твердження домовились прийняти без доведення. Залежно від особливостей вибору первісних понять і побудови курсу геометрії за аксіому можна взяти інше твердження, яке в іншому курсі доводиться. Так, якщо теорему про суму кутів трикутника вважати аксіомою, то можна довести властивість проведення через точку, яка не належить прямій, лише однієї прямої, паралельної даній. На цьому етапі навчання вже є можливість пояснити походження та значення первісних понять і аксіом при побудові курсу планіметрії.

Поняття про теорему і доведення вчитель має запровадити перед доведенням першої теореми про властивість прямої, яка не проходить через жодну вершину трикутника і перетинає одну зі сторін цього трикутника. Структуру змісту теореми (умова і висновок) також потрібно пояснити на прикладі формулювання цієї теореми, оскільки іншого зразка учні поки що не мають. Можна також показати учням зразок скороченого запису умови і висновку теореми за попередньо заготовленим рисунком.

Потрібно привчати учнів до культури записів на дошці та в зошиті: рекомендувати малюнок розміщувати зліва, а скорочений запис змісту теореми (задачі) – справа[5, 316]. Хоча в підручнику не вживаються термінологія і символіка множин, не практикується скорочений запис змісту теореми, проте можна використати символи належності та неналежності для точок. Скорочений запис може мати такий вигляд:

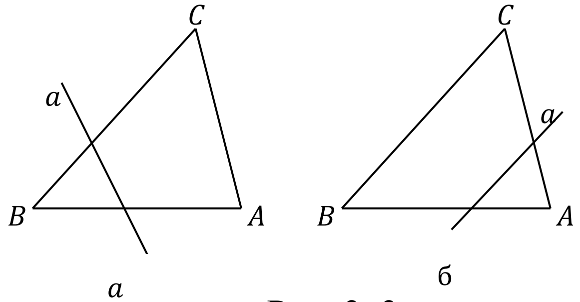


Рис. 3. 3

Дано: $\Delta ABC, a$ – пряма; a перетинає AB; $A \notin a, B \notin a, C \notin a$ (рис. 3.3).

Довести: a перетинає BC чи AC.

Деякі вчителі з перших уроків практикують виконання на дошці (а учні – в зошитах) скороченого запису основних етапів доведення. В цьому разі учні під час доведення теореми намагаються встигнути за вчителем виконати скорочений запис у зошиті. Такий методичний прийом вивчення доведень на перших уроках не можна вважати виправданим, оскільки учні не заглиблюються у зміст доведення, а прагнуть лише скорочено записати його. Якщо є потреба в скороченому записі доведення, то доцільніше надати учням час після того, як доведення пояснене і закріплене повторним поясненням чи відтворенням одним з учнів. Не слід ставити негативні оцінки за нездатність окремих учнів відтворити доведення перших теорем на наступному уроці після того, на якому вивчали теорему[18,93]. На рівні обов'язкових результатів навчання можна обмежитись лише вмінням сформулювати теорему, виконати рисунок, назвати загальну схему і твердження, які використовуються під час доведення.

Вже при вивченні властивостей найпростіших геометричних фігур, у процесі розв'язування задач на доведення і під час доведення теореми учні ознайомлюються зі схемою міркувань за методом від супротивного. У підручниках передбачене явне ознайомлення учнів з доведенням від супротивного. Щоб полегшити сприймання цього першого для учнів методу доведень, потрібно не тільки пояснити їм його суть, а й дати навчальний алгоритм і орієнтир доцільності використання. При цьому краще організувати на уроці колективний пошук алгоритму на прикладі відомих учням доведень двох тверджень. Короткий запис обох доведень можна заздалегідь заготувати на дошці[36, 247].

Задача. Чи може пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, не перетинати другу? Поясніть відповідь.

Доведення. Припустимо, що с не перетинає b. Тоді через точку A проходять дві прямі a і c, які не перетинають b, тобто паралельні b. Однак це суперечить аксіомі паралельних прямих.

Висновок. Припущення неправильне. Отже, a має перетнути b.

Теорема. Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму, і тільки одну.

Розглянемо другу частину доведення цієї теореми, де обґрунтовується єдиність побудованої прямої b, перпендикулярної до даної прямої a в точці A (рис. 3.4).

Дано: a – пряма,

A – точка, що належить a.

Довести: через точку A можна провести пряму, перпендикулярну до a, і тільки одну.

Доведення. Припускаємо, що існує інша пряма c, яка проходить через точку A і перпендикулярна до a. Тоді якщо позначити як c_1 промінь прямої c, що лежить в одній півплощині з b_1, то кут $(a_1 c_1)$ дорівнює 90°[35, 141].

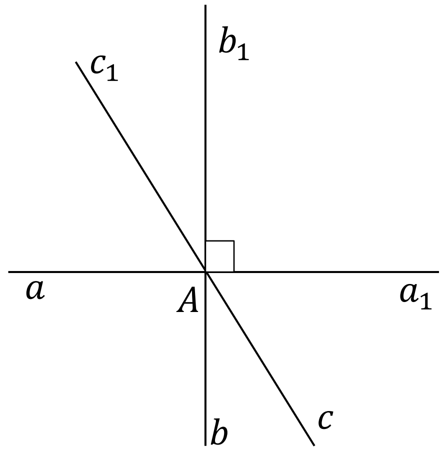


Рис. 3. 4

Отже, від променя a_1 в одну півплощину відкладено два кути $(a_1 b_1)$ i $(a_1 c_1)$, кожний з яких дорівнює 90°. Проте це суперечить аксіомі про відкладання кутів, оскільки кут, рівний заданому, можна відкласти лише один.

Висновок. Припущення неправильне. Отже, через точку A можна провести лише одну пряму , перпендикулярну до a.

Порівнюючи обидва доведення, учні помічають їхні істотні спільні кроки і з допомогою вчителя можуть сформулювати алгоритм методу доведення від супротивного, який доцільно оформити у вигляді таблиці, і вдаватися до цієї таблиці у разі потреби використати при доведенні метод від супротивного.

Для того щоб довести твердження методом від супротивного, потрібно:

1) припустити супротивне тому, що слід довести;

2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, за допомогою міркувань дійти висновку, який суперечить умові твердження, що доводиться, відомій аксіомі, доведеному раніше твердженню або припущенню;

3) зробити висновок, що припущення неправильне, а правильне те, що потрібно довести.

Можна дати учням орієнтир для застосування методу від супротивного: неможливість чого-небудь і єдиність чого-небудь в математиці завжди доводиться методом від супротивного. Цим методом інколи послуговуються також для доведення обернених тверджень.

Особливості системи задач перших уроків. Система задач, які розв'язують на перших уроках геометрії, спрямована насамперед на засвоєння основних властивостей найпростіших фігур, на формування вмінь посилатися на аксіому, теореми й означення під час доведення нових тверджень, розв'язування задач на доведення й обчислення, на засвоєння геометричної мови. У цій системі значну увагу потрібно приділити практичним вправам учнів щодо проведення прямих, вибір точок, які задовольняють певні вимоги, поясненню мовою геометрії помічених на рисунку властивостей точок, прямих, відрізків, кутів. Задачі на визначення довжин відрізків, градусної міри кутів розвивають в учнів окомір, практичні навички вимірювання й побудови відрізків і кутів заданої величини[4, 249].

Окремі задачі підготовляють учнів до доведення ознак рівності трикутників та привчає їх до міркувань, які виконуються при доведенні методом від супротивного.

Шкільна практика свідчить, що корисними для підготовки до вивчення трьох ознак рівності трикутників є задачі на побудову трикутника за двома сторонами і кутом між ними, за стороною і двома прилеглими кутами, за трьома сторонами. У цьому разі умови задач доцільно пропонувати у такому формулюванні[33, 254].

Задача. Накресліть довільний трикутник ABC. Позначте в ньому сторони AB, AC і кут A(рис. 3. 5). Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, в якому $A_1B_1 = AB, A_1C_1 = AC,$ і $\angle A_1 = \angle A$.

Виконуючи побудову під керівництвом вчителя, учні наочно переконуються, що побудований трикутник дорівнює трикутнику ABC.

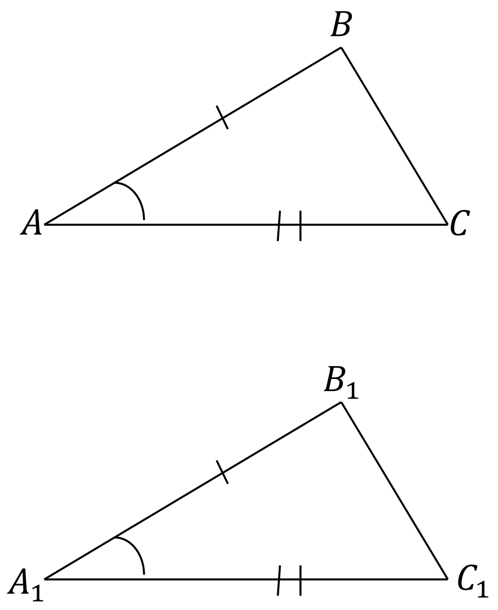


Рис. 3. 5

Отже, основною метою перших уроків геометрії є дати поняття про геометрію, систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури, ввести первісні (неозначувані) поняття і поставити учнів перед потребою означення деяких відомих їм фігур (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні прямі), розглянути первісні та означувані відношення, сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків та кутів.

3.3. **Аналіз шкільних підручників з геометрії**

До засобів навчання математики належать: підручник з математики, дидактичні матеріали і довідкова математична література, навчальне обладнання, зокрема наочні посібники, моделі, рисунки, схеми, таблиці, предмети оточення, інструменти, прилади, екранні засоби навчання, калькулятори, персональні комп'ютери, відповідні педагогічні програмні засоби. Вони мають утворювати єдиний комплекс, основою якого є підручник математики[37, 249].

У підручниках викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою.

Підручник призначений передусім для учнів відповідного віку. Водночас у деяких підручниках математики є матеріал, потрібний учителеві для організації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Крім того, підручником користуються батьки, допомагаючи учням під час виконання домашніх завдань і контролюючи їхню роботу.

До підручника з математики висувається низка вимог стосовно структури викладу навчального матеріалу, зокрема педагогічна доцільність теоретичної частини і системи задач підручника, точності, стислості та ясності мови, жвавості, цікавості викладу, якості ілюстративного матеріалу.

Обов'язковими вимогами до наукової системи підручника є математична коректність викладу теоретичного матеріалу, доцільність вибору наукової схеми викладу, відповідність трактовки понять, термінології та символіки традиціям, прийнятим у математичній науці і школі.

Дидактичні вимоги потребують забезпечення доступності, наочності, систематичності, стислості викладу матеріалу, наявності засобів мотивації учіння, розвитку мислення, пізнавальної активності й цікавості До предмета, диференціації навчання, спрямованості на формування загальнонавчальних умінь.

Вимоги до методичного апарату підручника пов'язані із забезпеченням належного розвитку змістових ліній, методичної доцільності викладу теоретичного матеріалу, системи вправ і задач, рівня реалізації внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків, наявності можливостей для контролю та самоконтролю, застосування технічних засобів навчання і комп'ютерної підтримки, прикладної, практичної спрямованості, наявності умов для організації самостійної роботи учнів на уроці та в позаурочний час[5, 126].

Важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Потрібно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики. Зміст, форми і місце роботи з підручником визначаються віком учнів, рівнем їхньої математичної підготовки і наявними вміннями працювати з книжкою.

Рекомендуються такі методи і форми роботи з підручником на уроці:

1. Читання тексту підручника після пояснення вчителя.
2. Розгляд прикладів підручника після пояснення їх учителем з метою закріплення, наведення власних прикладів.
3. Читання вголос учителем тексту підручника з метою навчання учнів виокремленню головного в тексті, розбиття його на змістовні частини, складання плану.
4. Читання тексту учнями, виокремлення в ньому головного і змістовних частин.
5. Самостійне читання тексту учнями, складання плану і відповідь на запитання вчителя або підручника[33, 119].

Добре відомо, що успіхи в навчанні школярів багато в чому залежать від змісту й структури підручника, по якому вони займаються. По одним підручниках школярі працюють із задоволенням (читають, розглядають малюнки, активно виконують пропоновані завдання). Інші навчальні тексти сприймаються інакше; видно, що більшість учнів з небажанням відкривають підручник, знаходять потрібний текст і без ентузіазму починають працювати з ним.

Чим же це обумовлено? Чому діти по-різному ставляться до навчальної книги? Залишимо осторонь майстерність учителів і ту точку зору, що гарний учитель може вдало провести урок, працюючи по будь-якому підручнику. Спробуємо зрівняти відомі шкільні підручники з позицій легкості сприйняття і доступності засвоєння навчального матеріалу.

У сучасній школі найбільше поширення одержали підручники наступних авторів: О. В. Погорєлов, Г. П. Бевз і ін., О. М. Афанасьєва і ін. та М. І. Бурда. Причому відзначається неоднозначне відношення вчителів до цих підручників. У методичній літературі є і позитивні й негативні відгуки про них; автори одних статей вважають, що деякі підручники непридатні для сучасної школи, інші ж, навпаки, захоплюються тим або іншим підходом автора до викладу шкільного курсу геометрії. Одних залучає суворий аксіоматичний підхід, інших більші можливості для організації розумової діяльності учнів[5, 243].

Щоб порівнювати зміст різних підручників геометрії необхідно звернути увагу на те, які цілі навчання геометрії вибиралися як ведучих останнім часом. Сьогодні основна мета навчання геометрії не зв'язується з розвитком тільки логічного мислення школярів. Виділяють загальнокультурні, наукові (властиво геометричні) і прикладні цілі навчання геометрії. Вважається, що при навчанні геометрії потрібно прагнути до розвитку в учнів інтуїції, образного (просторового) і логічного мислення, до формування в них конструктивно-геометричних умінь і навичок.

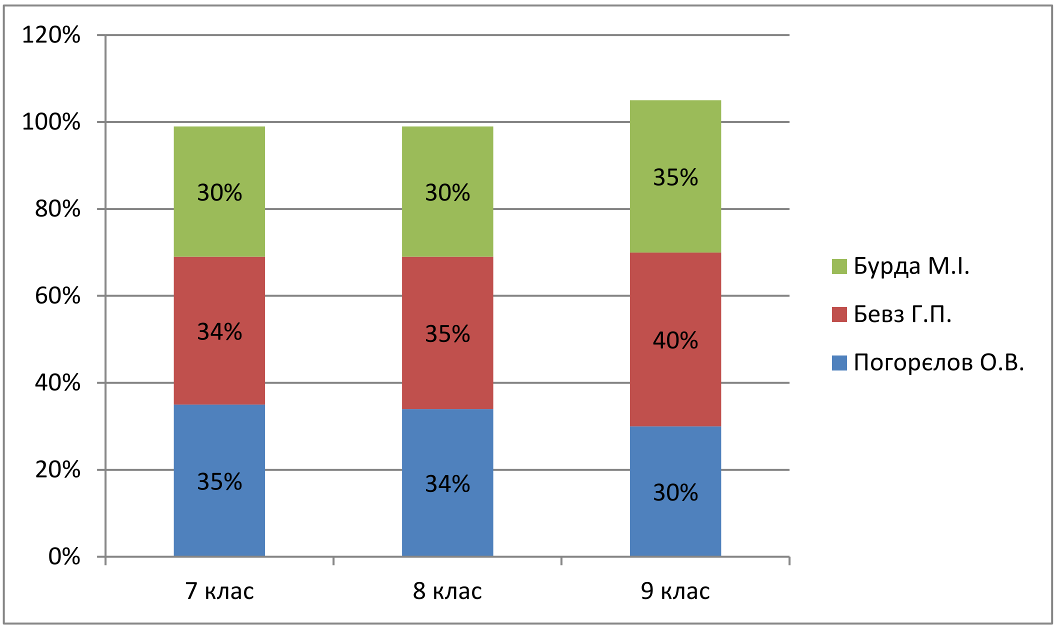
Без сумніву, реалізація цілей навчання геометрії в школі прямо зв'язана зі структурою курсу геометрії. Сьогодні провідні вітчизняні методисти і автори підручників виділяють кілька етапів вивчення шкільного курсу геометрії.

Безумовно, на кожному щаблі навчання геометрії в школі важлива роль у досягненні намічених цілей навчання приділяється використовуваним підручникам. При цьому потрібна гарна навчальна книга - підручник, який би містив необхідний мінімум і матеріал для просунутого навчання. Причому велике значення має «зовнішня оболонка» навчального матеріалу, що втримується в підручнику. Пропонуються різні способи керування пізнавальними діями учнів при роботі із книгою, розглянемо деякі з них. Звернемо увагу на допоміжну знакову систему підручників, тобто на ті значки, які полегшують роботу школяра при рішенні завдань. Відомо, що наявність різноманітних завдань у підручниках, що як варіюються за рівнем складності, так і творчих дає учневі волю вибору й активізує його прагнення до знань. Як приклади розглянемо підручник геометрії для 7-9 класів О. В. Погорєлова, Бевза Г. П., Бурди М. І.

Можна сказати, що в підручнику Г. П. Бевз і ін. існує градація завдань:

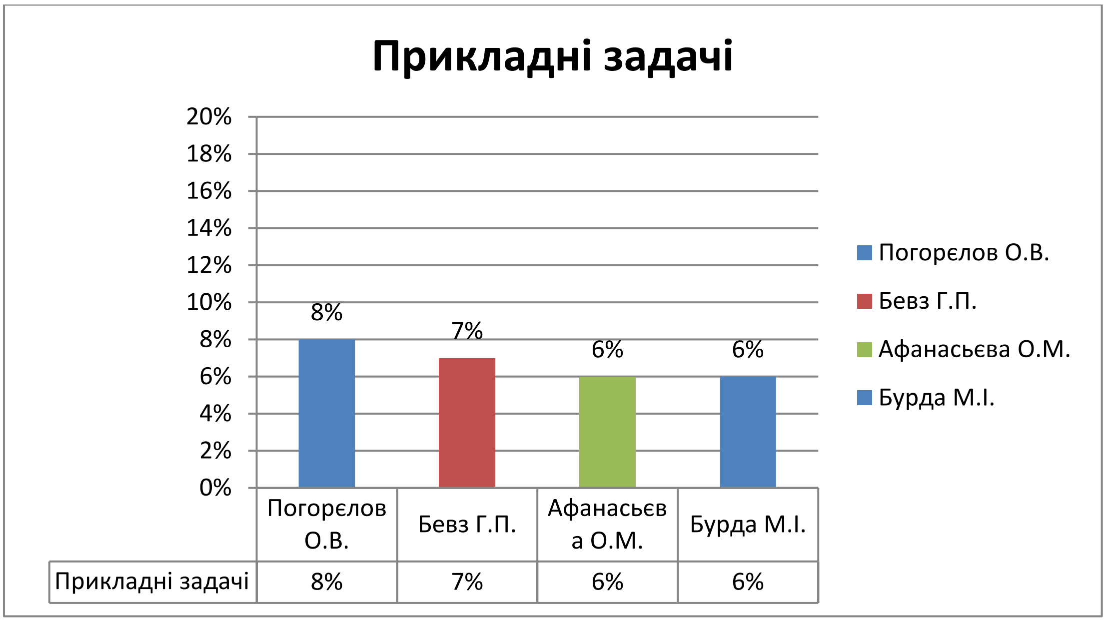
на початку відзначається група основних завдань, а потім групи більше простих і складних завдань. Цей розподіл знаходить висвітлення у використанні спеціальних значків для позначення. У підручнику О. М. Афанасьєва й ін. судити про складності завдання можна лише прочитавши її. Аналогічна ситуація і у підручнику О. В. Погорєлова. Теж саме і в підручнику Бурди М. І. Відмінність полягає лише в тому, що до деяких завдань є підказки - підписи або пункти параграфа, до якого вони відносяться. Автори кожного підручника приділяють велику увагу зразкам рішення опорних завдань, що ілюструють корисний факт, метод чи прийом.

Представимо інформацію про кількісне співвідношення завдань у підручниках геометрії для 7-9 класів у вигляді діаграми.



Кількісне співвідношення завдань у підручниках геометрії для 7-9 класів

Серед усіх завдань у шкільних підручниках міститься наступна кількість прикладних задач: О. В. Погорєлов – 8 %; у підручнику Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова – 7 %. Схожа картина і з підручниками О. М. Афанасьєва і ін. та М. І. Бурди – 6 %. Хоч таких задач, за висновками сучасних методистів, має бути приблизно 20 %.



Серед основних позитивних характеристик будь-якого підручника виділяється розгорнення тексту підручника. Вважається, що це помітно полегшує засвоєння матеріалу. Якщо розглядати підручник Г. П. Бевз і ін., то слід зазначити, що в цьому підручнику до деяких параграфів ідуть доповнення, що дозволяють повніше розкрити тему. Таке розмежування матеріалу дозволяє учням, прочитавши параграф, не тільки усвідомити його основні поняття, але й при бажанні, ознайомитися з додатковою інформацією з даної теми. Підручники О. В. Погорєлова та О. М. Афанасьєва і ін., призначені для загальноосвітньої школи. Авторам доводиться досліджуваний матеріал викладати в короткій формі, з огляду на, що він повинен бути доступний для учнів з різним рівнем сприйняття інформації й підготовленості по предметі.

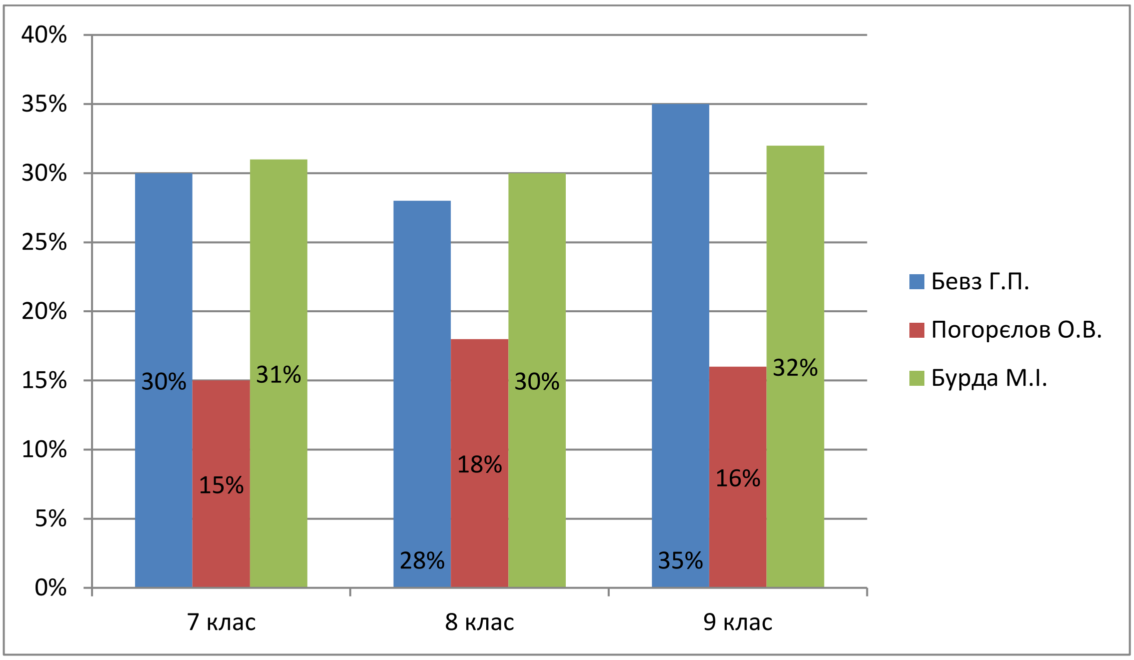
Ефективність навчання геометрії багато в чому визначається тим, яким чином кодується інформація, чи використовуються при цьому рисунки, креслення, схеми[4, 280]. Це пояснюється тим, що геометричний метод і полягає в тому, що сам логічний доказ або рішення завдання направляється наочним поданням; найкраще, коли доказ або рішення видно з наочної картини. Останнім часом фахівці все частіше говорять про необхідність візуалізації геометричних зв'язків у процесі формування знань школярів, і по-різному використовують принцип наочності при навчанні геометрії. Творчий колектив О. М. Афанасьєва і ін. бачить завдання викладання в школі в єдності строгої логіки і живого сприйняття реального світу. У своєму підручнику вони надають школярам можливість самостійно обробити текстову інформацію, перекладаючи її на мову малюнків, схем, креслень. Тому кількість малюнків у їхньому підручнику не перевершує 19 % від загального обсягу інформації.

О. В. Погорєлов на перше місце ставить розвиток логічного мислення учнів. Малюнки в його підручнику займають близько 23 % від загального обсягу інформації.

Авторський колектив Г. П. Бевз і ін. акцентує свою увагу на розвитку вмінь і навичок учнів, на доступності викладу, вважаючи, що кожний елемент курсу геометрії повинен опиратися на більш просте і зрозуміле наочне подання. Тому у підручнику Г. П. Бевз і ін. міститься багато малюнків і креслень.

У підручнику М. І. Бурди також подано багато ілюстрацій і креслень, які допомагають учням у сприйняті розглядуваного матеріалу.

Проілюструємо на діаграмах співвідношення візуальної інформації, у розглянутих підручниках.



Співвідношення візуальної інформації в підручниках з геометрії в 7-9 *класах*

Отже, важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Тому, кожному вчителю необхідно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики.

3.4. Педагогічний експеримент

У сучасних умовах учитель перетворюється на організатора особистісно рієнтованого навчання, яке передбачає розвиток і саморозвиток дитини. Щоб розвивати творчі здібності учнів, поступово та систематично залучати їх до самостійної пізнавальної діяльності, щоб забезпечити співпрацю між учнями та вчителем, традиційного уроку недостатньо.

Для експерименту було вибрано два класи: 10-А та 10-Б Великокоровинецької загальноосвітньої школи I – III ступенів (смт. Великі Коровинці, Чуднівського району, Житомирської області), у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий.

При вивченні методів розв’язання планіметричних задач у 10-Б класі на уроках було застосовано різні форми роботи: колективна, робота в групах та робота в парах, а особливо велике значення мали нетрадиційні уроки та застосування у навчанні комп’ютерної техніки. Такі форми навчання дають змогу диференціювати та індивідуалізувати процес навчання: формують внутрішню мотивацію до активного сприйняття, засвоювання та передачі інформації; сприяють формуванню комунікативних рис учнів; активізують розумову діяльність.

Застосування комп'ютерних технологій під час навчання зацікавило дітей у 10-Б класі, що відповідно змусило їх слухати уважніше виклад матеріалу, а оскільки комп'ютер дозволяє значно прискорювати розв'язання задачі, то відповідно і кількість розв’язаних різнотипних задач значно вища.

Було проведено діагностичну контрольну роботу для учнів даних 2-х класів. Перевірка знань учнів проводилася за допомогою діагностичного комплекту тестів. Загалом було представлено кожному учню 10-х класів 20 тестових завдань.

Результати тестування подано в таблиці 1.

Кількість завдань	Кількість учнів, що виконали завдання (у %)	
	10-А клас	10-Б клас
0–5	23%	18%
6–10	32%	28%
11–15	27%	33%
16–20	18%	21%

Табл. 1. Розподіл учнів за кількістю виконаних завдань (констатувальний зріз)

Отримані дані надали можливість обґрунтувати необхідність розробки й упровадження методики навчання геометрії в основній школі.

В учнів почали вироблятись необхідні для творчої роботи вміння, а саме:

- уміння зміцнювати навички у заданих ситуаціях;
- здатність вивільнювати підсвідоме, висловлювати ідеї і думки навіть тоді, коли вони здаються незрозумілими та недостатньо обґрунтованими;
- здатність бачити відмінні властивості та функції об'єктів, а також їх взаємозв'язки;
- уміння швидко та адекватно пристосовуватись до нових ситуацій;
- уміння засвоювати за аналогією, знаходити однакове, подібне у далеких, на перший погляд, явищах, подіях і процесах, котрі начебто не мають нічого спільного;
- розуміння та вміле використання цих подібностей під час розв'язування завдань і т.д.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у 10 -А та у

10 -Б класах. На основі результатів виконання підсумкової контрольної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів.

Рівень засвоєння методів розв’язання планіметричних задач в учнів 10-Б класу був значно вищим, ніж в учнів 10-А класу. Це було зумовлено тим, що при розв'язуванні планіметричних задач необхідно орієнтуватись у виборі конкретного методу для розв'язання конкретного прикладу. Якісний характер цього процесу і обумовлює ефективність розв'язання задачі. Це видно із результатів виконання контрольної роботи.

Проаналізувавши результати контрольної роботи, рівень знань, умінь та навичок учнів двох класів, можна зробити висновок про доцільність використання на уроках математики різних форм роботи з учнями. Покращення успішності у 10-Б класі показує, що дуже важливо у своїй практиці вчителю проводити нетрадиційні уроки, використовуючи інноваційні технології, адже це сприяє вихованню в дітей самостійності, активності, наполегливості, розвиває логічне мислення в учнів.

ВИСНОВКИ

У ході виконання магістерської роботи досліджено наукову та методичну літературу з обраної теми; проаналізовано стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання планіметрії, розглянуто теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

У першому розділі роботи розглянуто теоретико-методичну базу вивчення геометрії в основній школі. Ми звернули увагу на історію розвитку геометрії як науки, сучасні тенденції у методиці її викладання та рівень навчальних досягнень учнів з даного предмета.

Через спостереження починається ознайомлення школярів з геометричними формами, істотними ознаками, положенням у просторі і на площині. Важливо, щоб учні не лише сприймали готові образи, які дає вчитель, а й самі відтворювали геометричні форми в процесі моделювання, креслення, вимірювання, малювання. Тому центральне місце у формуванні геометричних понять в учнів посідає практика

Будь-яка тема шкільного курсу планіметрії є придатною для використання педагогічних програмних засобів. Загальновідомими і доступними для забезпечення вивчення планіметрії є, наприклад, такі програмні продукти: 1) GRAN1; 2) GRAN 2D; 3)GRAN 3D; 4)DERIVE.

Другий розділ присвячений методам розв’язування планіметричних задач. В ньому розглянуті методи розв'язування планіметричних задач, основні положення, які можуть бути використані при розв’язанні завдань, як підвищеного рівня, так і того, що розв’язуються в школі, наведені приклади та задачі для самостійного опрацювання, були розглянуті найпоширеніші планіметричні задачі, поглиблювались знання про методику розв'язування планіметричних задач.

При розв’язуванні задач в учнів закріплюються теоретичні знання, виробляються навички застосування цих знань у практичній діяльності, розвивається творча діяльність.

Таким чином, планіметричні задачі сприяють творчому оволодінню всією сукупністю математичних знань. Чітка структура всього вивченого матеріалу допоможе їм справлятися із завданнями різного рівня.

У третьому розділі представлена методика проведення перших уроків геометрії, проаналізовано шкільні підручники з геометрії та подані результати педагогічного експерименту.

Основною метою перших уроків геометрії є дати поняття про геометрію, систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури, ввести первісні (неозначувані) поняття і поставити учнів перед потребою означення деяких відомих їм фігур (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні прямі), розглянути первісні та означувані відношення, сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів.

Важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Потрібно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики. Зміст, форми і місце роботи з підручником визначаються віком учнів, рівнем їхньої математичної підготовки і наявними вміннями працювати з книжкою.

Результати магістерської роботи можуть бути використані як дидактичний матеріал для вчителів математики при проведенні уроків геометрії в основній школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акоф Р. Основы исследования операцій / Р. Акоф, М. Сасчени. – М. : Мир, 1973. – 213с.

2. Базылев В. Т. Сборник задач по геометри / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В. П. Иваницкая. – М. : Просвещение, 1980. – 238 с.

3. Балл Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. Посібник / Г. П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.

5. Бевз Г. П. Методика викладання математики, загальні питання / Г. П. Бевз. – К. : Радянська школа, 1968. – 344 с.

6. Бевз Г. П. Міжпредметні зв`язки, як необхідний елемент предметної системи навчання / Г. П. Бевз // Математика в школі. – 2003. – №6. – С. 11 - 15.

7. Белешко Д. Базові теореми планіметрії: елективний курс / Дмитро Белешко, Олег Дейнека ; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. – 48 с.

8. Белешко Д. Т. Практикум по решению геометрических задач / Д. Т. Белешко. – Рівне : РОІВВ, 1986. – 89 с.

9. Болтянський В. Г. Вектори в курсі геометрії середньої школи / В. Г. Болтянський, І. М. Яглом. – К. : Радянська школа, 1964. – 91 с.

10. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия: Кн: для учителя / В. Г. Болтянский . – М. : Просвещение, 1985. – 319 с.

11. Болтянский В. Г. Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1971. – 592 с.

12. Брадіс В. М. Методика викладання математики в середній школі / В. М. Брадіс. – К. : Радянська. школа, 1954. – 484 с.

13. Бродський Я.С. Шляхи реформування шкільної математичної освіти / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов // Математика в школах України. – 2003. – №26. – С. 2 – 6.

14. Бурда М. І. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглиб. вивченням математики / М. І. Бурда. – 2- ге вид. – К.: Освіта, 1998. – 240 с.

15. Гельфанд И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. – М. : Наука, 1973. – 88 с.

16. Геометрия. 7 - 9 классы / [Атанасян Л. С. и др.].ч– М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

17. Гурова Л. Л. Психологический анализ решения задач / Л. Л. Гурова. – Воронеж, 1976. – 327 с.

18. Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения / В. В. Давыдов. – М. : Вища школа, 1986. – 240 с.

19. Дороговцев А. Я. Метод координат / А. Я. Дороговцев, М. Й. Ядренко. К. : Вища школа, 1972. – 96 с.

20. Эсаулов А. Ф. Активизация учебно-познавательной деятельности студентов / А.Ф. Эсаулов . ─ М. : Высшая школа, 1982 . ─ 224 с.

21. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника / С. И. Зетель. – М. : Учпедгиз, 1962. – 153 с.

22. Зыкова В. И. Формирование практических умений на уроках геометрии / В. И. Зыкова. – М.: АПН РСФСР, 1963. – 200 с.

23. Зильберберг Н. И. Урок математики: подготовка и проведение: книга для учителя / Н. И. Зильберберг. – М. : Просвещение, 1995. – 178 с.

24. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноовсіт. навч. закл. / О. С. Істер. – К. : Освіта, 2007. – 159 с.

25. Капица П. Л. Эксперимент, теория, практика / П. Л. Капица. – М. : Наука, 1987. – 494 с.

26. Коксетер Г. С. М. Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. М. : Наука, 1978. – 224 с.

27. Лутай В. С. Філософія сучасної освіти : Навч. посібник / В.С. Лутай. – М. : Центр "Магістр-S" Творчої спілки вчителів України, 1996. – 256 с.

28. Машбиц Е. И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е. И. Машбиц. – К. : Высшая школа, 1987. – 223 с.

29. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. В. Погорєлов. – К. : Школяр, 2004. – 240 с.

30. Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой: метод координат / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1977. – 134 с.

31. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии.Часть 1 / В. В. Прасолов. - М. : Наука, 1986. – 251 с.

32. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии.Часть 2 / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1986. – 282 с.

33. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

34. Сяська Н. Особливості формування системи планіметричних задач / Наталія Сяська // Математика в школі. – 2003. – № 4. – С. 38 – 40.

35. Фредман Л. М. Как научится решать задачи / Л. М. Фредман, Е. Н. Турецький, В. Я. Стеценко. – М. : Просвещение, 1979. – 160 с.

36. Ципкин А. Г. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы / А. Г. Ципкин, А. И. Пинськый. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

37. Черкасов Р. С. Методика викладання математики в середній школі / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – Харків. : Основа, 1992. – 304 с.

38. Япс А. В., Крайчук О. В. Методичні підходи до розв'язування геометричних задач в основній школі //Наука,освіта, суспільство, очима молодих: Матер. XIII Міжн. наук. – практ. конф. здоб. вищої осв. і молод. наук. (26 травня 2020 р., м. Рівне) – Рівне: РДГУ. – 2020. – С.295-296.

39. Ярмаченко М. Д. Педагогічний словник. / М. Д. Ярмаченко – К.: Педагогічна думка, 2001. – 516 с.

40. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. / В.А. Ясінський.– Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

41. .Infolight - інформаційно-аналітичний центр. – Режим доступу: http://infolight.org.ua/content/rezultati-zno-z-matematiki-v-2013-roci-rozriz-rayoniv

Д О Д А Т К И

Додаток А

План-конспект уроку з геометрії на тему: «Прикладні задачі. Розв'язування прямокутних трикутників» (8 клас)

Тема: Прикладні задачі. Розв'язування прямокутних трикутників.

Мета: узагальнити й систематизувати знання учнів з даної теми; показати необхідність уміння розв'язувати прямокутні трикутники для вирішування практичних проблем; підготувати учнів до контрольної роботи;розвивати логічне мислення; виховувати працелюбність і любов до предмета.

Тип уроку: узагальнення та систематизація знань.

Обладнання: конспект уроку «Прямокутний трикутник».

Хід уроку

I. Організаційний момент

Учні розподіляються на групи по 5—6 осіб.

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Перевірку здійснюють у кожній групі консультанти і їхні помічники. Учитель перед уроком перевіряє виконання домашнього завдання у консультантів і дає їм необхідні інструкції.

ІІІ. Формулювання теми, мети і задач уроку

ІV. Актуалізація опорних знань учнів

Можна здійснити у вигляді математичної вікторини. Її може проводити як учитель, так і учень класу.

Питання вікторини

1. У рівнобедреному трикутнику основа у два рази більша від висоти. Знайдіть кути трикутника. (Проведемо висоту й одержимо два рівнобедрених прямокутники: кути 45°, 45°, 90°.)
2. Чи можна різносторонній трикутник розрізати на два рівних трикутники? (Ні. Якщо розріз робити за висотою, то отримані трикутники матимуть різні гіпотенузи. Якщо різати за похилою, то в одному трикутнику одержимо тупий кут, який не може дорівнювати жодному з кутів другого трикутника.)
3. Є дошка прямокутної форми. Столярові потрібно відрізати кінець дошки під кутом 45°. Як це зробити? (Від вершини прямого кута відкласти за довжиною дошки відстань, рівну її ширині).
4. Чи можна з 36 сірників, не ламаючи їх, скласти прямокутний трикутник? (Якщо сторони дорівнюють 3, 4, 5 — трикутник прямокутний. Якщо сторони $3n$, $4n$, $5n$ — теж прямокутний, n —будь-яке натуральне число, тому що $(3n) +(4n) =(5n)$. $P = 12n$. При 3P= 36. Тобто сторони дорівнюють 9, 12, 15.)
5. Ставок має форму квадрата, по кутах якого ростуть дерева. Як збільшити площу ставка, не чіпаючи дерев, щоб він знову мав би форму квадрата? *(Відповідь:* див. рис. 1.)

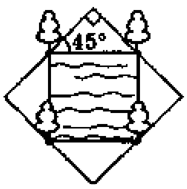


Рис. 1

V. Проведення конференції

Слово надається групі «Дослідники»

Доповідачі розповідають про Піфагорові числа.

1-й доповідач. Крім чисел 3, 4, 5 існує, як відомо, безліч цілих додатних чисел *a, b, c,* які задовольняють співвідношенню $a^2 + b^2 = c^2$. Вони називаються піфагоровими числами. Відповідно до теореми Піфагора такі числа можуть бути довжинами сторін деякого прямокутного трикутника: *a, b*— катети, *c* — гіпотенуза. Таким чином, якщо *a, b, c* — піфагорова трійка, то для будь-якого натурального числа *n* числа *na, nb* і *nc*— теж піфагорові числа.

Розглянемо трійки взаємно простих чисел. Покажемо, що в кожній з таких трійок *a, b, c* один з «катетів» повинен бути парний, а інший непарний. Станемо міркувати «від противного». Якщо a і bпарні, то парним буде $a^2 + b^2$, а отже, і «гіпотенуза». Це суперечить тому, що *a, b, c* взаємно прості. Таким чином, хоча б один із «катетів» a, bнепарний.

Нехай обидва «катети» непарні, а «гіпотенуза» парна. Припустимо, катети мають вигляд $2x + 1$ i $2y + 1$ тоді сума їх квадратів дорівнює $4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y + y^2) + 2$, тобто являє собою число, яке при діленні на 4 дає в остачі 2. У той же час квадрат будь-якого парного числа ділиться на 4 без остачі. Отже, сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом парного числа, іншими словами, ці три числа — не піфагорові.

Таким чином, із «катетів» a і b один парний, інший непарний. Тому число $a^2 + b^2$ непарне, отже, непарним є і число *c.* Ось, наприклад, деякі піфагорові числа: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$; $11^2 + 60^2 = 61^2$; $15^2 + 8^2 = 17^2$; $33^2 + 56^2 = 65^2$; $35^2 + 12^2 = 37^2$; $55^2 + 48^2 = 73^2$; $63^2 + 16^2 = 65^2$.

Піфагорові числа мають ряд цікавих особливостей:

- Один з «катетів» повинен бути кратним трьом.
- Один з «катетів» повинен бути кратним чотирьом.
- Одне з піфагорових чисел повинне ділитися на п'ять.

2-й доповідач. Зручний і дуже точний спосіб, уживаний землемірами для проведення на місцевості перпендикулярних ліній, полягає в наступному.

Нехай через точку *A* потрібно провести перпендикуляр до прямої *MN.* Відкладають від точки *A* на прямій *MN* чотири рази будь-яку відстань *a* (рис. 2). Потім зав'язують на шнурі три вузли, відстані між якими дорівнюють 3a і 5a. Приклавши крайні вузли до точок *A* і *B,* натягують шнур за середній вузол. Шнур набуває вигляду трикутника, у якому кут *A* — прямий. Цей давній спосіб, очевидно, застосовувався тисячоріччя тому будівельниками єгипетських пірамід. Він заснований на тому, що кожний трикутник, сторони якого відносяться як 3:4:5, відповідно до теореми Піфагора — прямокутний, оскільки $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Тому трикутник з катетами 3 і 4 і гіпотенузою 5 називають єгипетським. *Слово надається групі «Теоретики»*

3-й доповідач. Доведемо теорему Піфагора, застосовуючи формули для обчислення площ квадратів і прямокутних трикутників.

Доведення

Побудуємо два квадрати зі сторонами a і b, як показано на рис. 3. Від точки *A* відкладемо відрізок завдовжки *a (AC=a).* Сполучимо точки B і Сі на відрізку *BC*як на стороні побудуємо квадрат. Його площа дорівнює c^2. $AD = a + b, DC = b, BN = b, \angle 1 = \angle 2$,, як кути з відповідно паралельними сторонами. Тоді $\Delta KDC = \Delta MNB$ за катетом і гострим кутом. Аналогічно $\Delta CAB = \Delta KLM$. Тому сума площ квадратів зі сторонами *a* і *b*дорівнює площі квадрата зі стороною *c*.

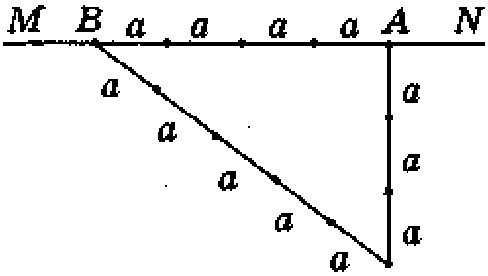


Рис. 2

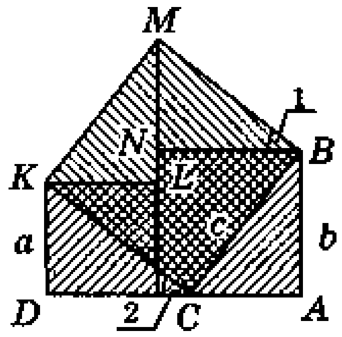


Рис. 3

Слово — групі «11практики»

4-й доповідач. Довгий час вважали, що теорема Піфагора до Піфагора не була відома, і тому вона носить його ім'я. Проте встановлено, що ця найважливіша теорема зустрічається у Вавилонських текстах, написаних за 1200 років до Піфагора. Єгиптяни придумали задачу про лотос.

На глибині 12 футів росте лотос із тринадцятифутовим стеблом. Визначте, на яку відстань квітка може відхилитися від вертикалі, яка проходить через точку кріплення стебла до дна (рис. 4).

Розв'язання $d = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (футів).

Відповідь: 5 футів.

5-й доповідач. За рис. 5 визначимо висоту ялинки *AH.* Для цього позначимо точку *B* на певній відстані *a* від основи ялинки *H*і вимірюємо кут

$\angle ABH = \alpha$. Тоді $AH = \alpha tg\alpha$.

3-й доповідач. До стіни будинку заввишки 4 м поставлено драбину. На якій відстані від будинку потрібно її поставити, щоб вона була нахилена до землі під кутом 15°?

Розв'язання Проведемо відрізок *BM*під кутом 30° до землі (рис. 6). Тоді $\angle CMB = 180° - 30° = 150°$. Отже, $\angle CBM = \angle MCB = 180° - 150° - 15° = 15°$.

Таким чином, трикутник *CMB* рівнобедрений з основою *BC,* тобто $CM =$

$NB = 8$м (оскільки в трикутнику $MBA(\angle A = 90°)$ катет BA є протилежним куту 30°, отже, гіпотенуза у два рази більша). Із трикутника MBA $(\angle A = 90°) AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (м). Тоді $AC = CM + AM = 8 + 4\sqrt{3}$ (м).

Відповідь: $8 + 4\sqrt{3}$ м.

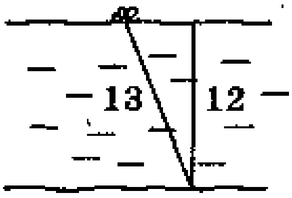


Рис. 4

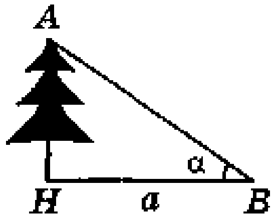


Рис. 5

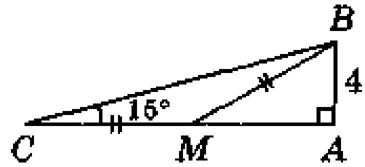


Рис. 6

VI. Розв'язування задач у групах

«Мозковий штурм»

Кожна група одержує картку із задачами, які потрібно розв'язати протягом 20—25 хвилин.

Картка

1. Бамбуковий стовбур заввишки 9 футів переломлений бурою так, що якщо верхню частину його пригнути до землі, то верхівка торкнеться землі на відстані 3 футів від основи стовбура. На якій висоті переломлений стовбур?
2. Ескалатор метрополітену має 17 сходинок від підлоги наземного вестибюля до підлоги підземної станції. Ширина сходинок 40 см, висота 30 см. Визначте: а) довжину сходинок; б) кут їх нахилу; в) глибину станції по вертикалі.

Задача 1. Нехай стовбур переломлений на висоті *x* футів від землі, *BC*= *x* (рис. 7). Тоді верхівка бамбука — точка *A* розміщена на відстані 3 футів від основи стовбура, *AC = 3* фути. Тоді *AB*= (9-*x)* футів.

Маємо: $(9 - x)^2 - x^2 = 3^2, 81 - 18x + x^2 - x^2 = 9;\ 18x = 72;\ x = 4.$

Відповідь: 4 фути.

Задача 2.

У кожному маленькому прямокутному трикутнику (рис. 8) знайдемо довжину гіпотенузи:$\sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ (см). Таких відрізків 17. Отже, довжина сходинок 5017 = 850 (см) = 85 (дм). Глибина станції за вертикаллю: 30 17 = 510 (см) =51 дм. Тоді кут нахилу сходинок знайдемо так: $\sin\alpha = \frac{51}{85} = 0{,}6;\ \alpha = 37°.$

Відповідь: 85 дм, 51 дм, 37°.

Захист робіт

Учні пояснюють розв'язання задач, супроводжуючи пояснення записами на дошці. Після захисту задач групи ставлять одна одній питання: перша група — другій, друга — третій і т. д.

Приклади усних питань:

1. Визначте синус, косинус і тангенс кута A на рис. 9.
2. На рис. 10. Яким числам пропорційні катети трикутника? $tgR = \frac{12}{35}$.
3. Чому дорівнюють катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{2}$ см?
4. Чому дорівнює гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо обидва його катети дорівнюють 5 см?

VII. Підбиття підсумків уроку

Консультанти груп і вчитель оцінюють роботу групи в цілому й кожного учня окремо.

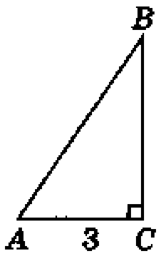


Рис. 7

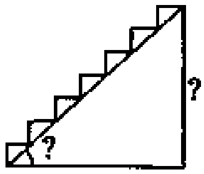


Рис. 8

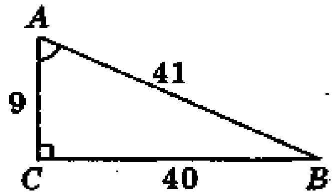


Рис. 9

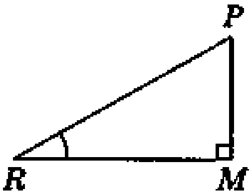


Рис. 10

Кожний учень піднімає кольоровий квадрат: «зелений» — задоволений своєю роботою на уроці, очікування виправдалися; «жовтий» — не дуже задоволений собою; «червоний» — не задоволений. Учитель з'ясовує причини, за якими учень не досяг бажаних результатів, визначає, що потрібно виправити, над чим попрацювати, на що звернути увагу під час підготовки до контрольної роботи.

VIII. Домашнє завдання

1. Між двома площадками на одному поверсі потрібно укласти на металевих балках бетонні щаблі. Під яким кутом до обрію слід закріпити балки, якщо підйом щабля дорівнює 15,5 см, а ширина — 32,5 см?

2. Один із катетів прямокутного трикутника більший від другого на 3 см, а відношення гіпотенузи до катета дорівнює 5:4. Знайдіть сторони трикутника.

3. У прямокутній трапеції один із кутів дорівнює 135°, середня лінія — 18 см, а основи відносяться як 1:8. Знайдіть меншу бічну сторону.

4. Діагональ прямокутника дорівнює 52 мм, а сторони відносяться як

5:12. Знайдіть його периметр.

5. Підготуватися до контрольної роботи, повторити теоретичний матеріал з теми «Розв'язування трикутників».

Додаток Б

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Ромб. Квадрат»
(8 клас)

Тема. Ромб. Квадрат

Мета: працювати над засвоєнням учнями змісту означень, властивостей та ознак ромба і квадрата. Формувати вміння:

- відтворювати вивчені твердження;
- застосовувати властивості, ознаки ромба і квадрата до розв'язування типових задач;
- застосовувати властивості, ознаки ромба і квадрата разом із раніше вивченими твердженнями в темі «Чотирикутники» до розв'язування задач підвищеного рівня складності.

Тип уроку: засвоєння вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспект «Ромб, квадрат».

Хід уроку

І. Організаційний етап

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Перевірку засвоєння учнями теоретичного матеріалу попереднього уроку можна провести або у формі математичного диктанту, або у формі бесіди за тими самими питаннями, що включені в математичний диктант.

Математичний диктант

Варіант 1

1. Чи є прямокутником паралелограм, один із кутів якого прямий?
2. Чи правильно, що кожен прямокутник є паралелограмом?
3. Діагоналі прямокутника *AEKM* перетинаються в точці *O*. Відрізок *AO* дорівнює 3 дм. Знайдіть довжину діагоналі *EM*.
4. Діагоналі чотирикутника рівні. Чи обов'язково цей чотирикутник є прямокутником?

Варіант 2

1. Чи обов'язково чотирикутник з прямим кутом є прямокутником?
2. Чи правильно, що кожен паралелограм є прямокутником?
3. Діагоналі паралелограма мають довжину 3 дм і 5 дм. Чи цей паралелограм є прямокутником?
4. Сума довжин діагоналей прямокутника дорівнює 13 м. Знайдіть довжину кожної діагоналі.

Перед виконанням математичного диктанту слід нагадати учням правила виконання його завдань, а саме: умова завдань не записується (учні мають записати тільки номер запитання), відповідь має бути короткою, але змістовною (тобто у відповіді має бути аргументація — посилання на відповідне геометричне твердження).

Письмова частина домашнього завдання докладно перевіряється тільки в учнів, які потребують додаткової педагогічної уваги; у ході фронтальної перевірки правильності виконання письмових завдань достатньо озвучити твердження, яке було використане під час розв'язування задачі, а також здобуту відповідь.

III. Формулювання мети і завдань уроку

Щоб створити умови для усвідомленого сприйняття учнями логіки вивчення матеріалу, пропонуємо їм проаналізувати, яким чином із довільного паралелограма утворилась нова фігура — прямокутник (якщо всі кути паралелограма «зробити» рівними, то «виходить» прямокутник). Далі вчитель ставить запитання: «Які ще елементи паралелограма можна зробити рівними?» Звісно, більшість учнів дає правильну відповідь (сторони). Після чого формулюється наступне запитання: «Чи існує паралелограм, у якого і сторони, і кути рівні?» Здобувши ствердну відповідь, учитель виділяє таким чином два нові (тобто такі, що раніше не вивчались на уроках геометрії) геометричні об'єкти. Вивчення означення, властивостей та, можливо, ознак цих фігур, опанування способами їх застосування є основною дидактичною метою уроку.

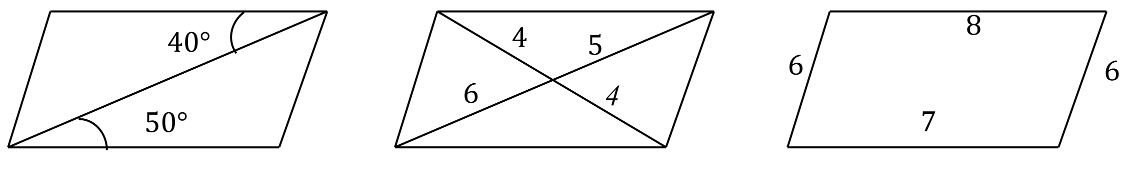
IV. Актуалізація опорних знань та вмінь

З метою свідомого розуміння та подальшого засвоєння змісту означень, властивостей, ознак ромба і квадрата слід активізувати знання і вміння учнів щодо означення, властивостей та ознак паралелограма, прямокутника; означення, властивостей та ознак рівнобедреного трикутника.

Досягненню цієї мети сприятиме розв'язування усних задач.

Виконання усних вправ

1. Яких помилок припустилися під час зображення паралелограма *(рис. 1)*?



а) б) в)

Рис. 1

2. У чотирикутнику *ABCD AB = DC, AD = BC (рис. 2)*. Доведіть, що *ABCD* — паралелограм.

3. У паралелограмі *ABCD AM* — бісектриса кута *A, BH* — бісектриса кута *B (рис.3)*. Доведіть, що $BH \perp AM$.

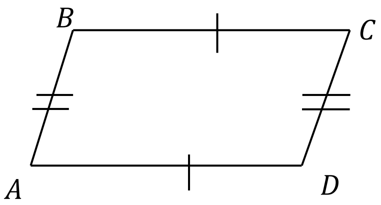


Рис. 2

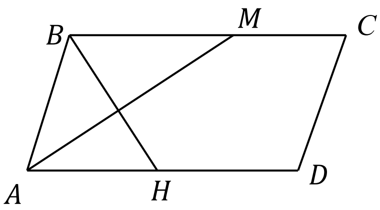


Рис. 3

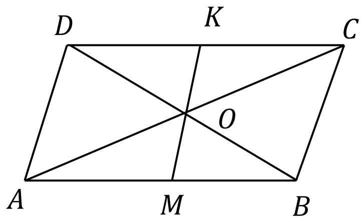


Рис. 4

4. У паралелограмі *ABCD* через точку перетину діагоналей проведен відрізок, кінці якого лежать на його сторонах (рис.4). Доведіть, що *OM = OK*

V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу

1. Означення ромба.
2. Властивості ромба.
3. Ознаки ромба.
4. Квадрат: означення, властивості.

Розглядаючи питання про означення прямокутника й ромба, слід звернути увагу учнів на той факт, що оскільки названі фігури є різновидами паралелограма, то й означення цих фігур дається через поняття паралелограма (тобто мова йде про формулювання означень через споріднене поняття); таким чином ми попереджаємо традиційні помилки учнів, яких вони припускаються, формулюючи означення прямокутника (ромба) як чотирикутника, у якого... (далі йде перелік певних ознак). Означення квадрата також формулюється за цим принципом, але на відміну від прямокутника та ромба, для яких безпосередньо спорідненим є поняття паралелограма, означення квадрата формулюється через поняття або ромба (в якого всі кути прямі), або через поняття прямокутника (в якого всі сторони рівні). При цьому завертаємо увагу учнів на еквівалентність цих обох означень.

Вивчаючи властивості ромба і квадрата, так само як і під час розгляду питання про властивості прямокутника, слід зробити акцент на тому, що із самих означень цих фігур випливає більшість їх властивостей (для ромба – це всі властивості паралелограма, а для квадрата – це всі властивості і прямокутника, а отже й паралелограма та ромба). Тому все, що слід зробити на цьому етапі вивчення матеріалу, – це сформулювати вивчені властивості, адаптувавши їх для названих фігур (зрозуміло, що доводити ці властивості не треба).

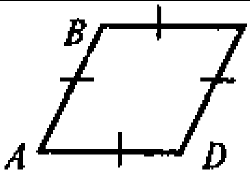
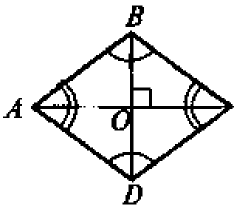
Інша річ, «додаткові» властивості та ознаки ромба.

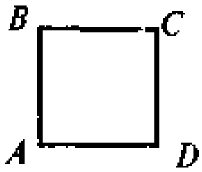
Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — ромб.

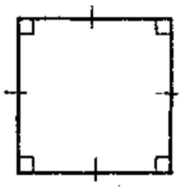
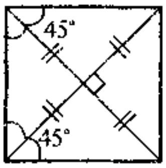
1. Якщо сусідні сторони паралелограма рівні, то цей паралелограм — ромб.
2. Паралелограм із перпендикулярними діагоналями є ромбом.
3. Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його протилежних кутів, то цей паралелограм – ромб.

Оскільки вони є специфічними (тобто виконуються тільки для ромба), то необхідно їх довести (доведення можна провести за підручником або запропонувати учням виконати його самостійно, або запропонувати в якості індивідуального завдання для сильних учнів).

Повний перелік тверджень, які слід вивчити з восьмикласниками стосовно ромба і квадрата, вміщено в конспекті «Ромб. Квадрат».

	**Ромб** *Означення.* Паралелограм, усі сторони якого рівні, називається ромбом	
	**Властивості**	**Ознаки**
	1. Має всі властивості паралелограма, тобто: 1) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; 2) $AO = OC$, $BO = OD$	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — ромб

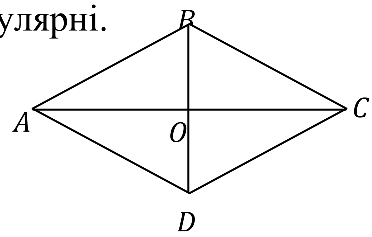
	2. Якщо *A BCD* — ромб, AC і BD — діагоналі, то: 1) $AC \perp BD$, 2) $\angle OAD = \angle OAB$. $\angle ODA = \angle ODC$	2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб
		3. Якщо $ABCD$ — паралелограм і *AC1BD,* то $ABCD$ – ромб
		4. Якщо $ABCD$ — паралелограм і AC — бісектриса кутів A і C, то $ABCD$ - ромб
Квадрат		
	*Означення.* Прямокутник, усі сторони якого рівні, називається квадратом. *Означення.* Ромб, усі кути якого прямі, називається квадратом	

Властивості		
		Має всі властивості прямокутника і ромба

VI. Формування первинних умінь

Виконання усних вправ

1. Назвіть види паралелограмів, у яких: а) усі кути рівні; б) усі сторони рівні; в) діагоналі рівні; г) діагоналі перпендикулярні.



2. Діагоналі ромба *ABCD* перетинаються в точці *O* (рис. 5). Назвіть: а) бісектрису трикутника *ABD;* б) висоту трикутника *ABC;* в) медіану трикутника *BCD.*

2. Діагоналі квадрата *A BCD* перетинаються в точці *O.* Н рівні трикутники, які утворюються при перетині діагоналей. Визначте ıı вид.

Рис. 5

Виконання графічних вправ

1.Накресліть дві перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці *O.* На одній з прямих відкладіть по різні боки від точки *O* рівні відрізки *OA* і *OC,* а на другій прямій — рівні відрізки *OB* і *OD.* Сполучіть точки *A, B, C* і *D.*

а) Виміряйте сторони чотирикутника *ABCD* і визначте його вид.

б) Виміряйте кут *A* чотирикутника *ABCD.* Користуючись властивостями цього чотирикутника, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте результати вимірюванням.

в) Виміряйте кути *ADB* і *CDB.* Виділіть кольором усі пари рівних кутів між діагоналями і сторонами чотирикутника.

1. Накресліть прямокутний трикутник *ABD* з гіпотенузою *BD.* Про ведіть через вершини *B* і *D* прямі, паралельні сторонам *AD* і *AB* відповідно. Позначте точку *C* — точку перетину цих прямих.

а) Виміряйте сторони чотирикутника *ABCD* і визначте його вид.

б) Проведіть діагональ *AC.* Виміряйте і порівняйте довжини діагоналей чотирикутника.

в) Позначте на прямих *BC* і *AD* точки C_1 і D_1 так, щоб чотирикутник ABC_1D_1 був квадратом.

Виконання письмових вправ

1. Знайдіть кути ромба, якщо:

а) один із них на 120° більший за інший;

б) одна з його діагоналей дорівнює стороні.

2. Знайдіть кути ромба, якщо:

а) кути, утворені його стороною з діагоналями, відносяться як 1 : 4;

б) висота ромба удвічі менша від сторони.

3. Периметр квадрата дорівнює 40 м. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.

4*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, в дві інші — на катетах. Знайдіть периметр квадрата, якщо гіпотенуза дорівнює 18 см.

VII. Підсумки уроку

1. Які спільні властивості мають ромб і квадрат?

2. Які властивості квадрата не характерні для прямокутника?

3. Чи є квадратом:

а) прямокутник *ABCD,* діагональ *AC* якого є бісектрисою кута *BAD;*

б) ромб, діагоналі якого рівні;

в) паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні;

г) чотирикутник, усі сторони якого рівні?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст означення, властивостей та ознак ромба і квадрата.

Розв'язати задачі.

1. Знайдіть кути ромба, якщо:

а) сума двох із них дорівнює 220°;

б) діагональ утворює з однією зі сторін кут 25°.

2. Відстань між протилежними сторонами квадрата дорівнює 5 см. Знайдіть периметр квадрата.

3. Знайдіть кути ромба, якщо висота, проведена з вершини тупого кута, відтинає від ромба рівнобедрений трикутник.

Повторити вивчений матеріал. Побудувати схему, що відображається зв'язок між чотирикутниками, паралелограмами, прямокутниками, ромбами та квадратами.

Додаток В

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Розв'язування задач з теми «Паралелограм».
(8 клас)

Тема. Розв'язування задач з теми «Паралелограм».

Мета: узагальнити та систематизувати знання учнів щодо означень, властивостей та ознак різновидів паралелограма; вдосконалити вміння учнів застосовувати вивчені твердження під час побудови правильних міркувань для розв'язування типових задач; розвивати логічне мислення та уяву; виховувати працелюбність та любов до предмета.

Тип уроку: узагальнення та систематизація знань.

Наочність та обладнання: конспекти «Паралелограм», «Ромб. Квадрат».

Хід уроку

І. Організаційний етап

ІІ. Перевірка домашньої роботи

Самостійна робота

Варіант 1. 1.Чи є ромбом будь-який квадрат?
2.Чи правильно, що існує прямокутник, який не є паралелограмом?
3.Три кути паралелограма рівні. Визначте вид паралелограма.
4.Як за допомогою транспортира за найменшої кількості вимірювань перевірити, чи є ромбом даний паралелограм?

Варіант 2. 1. Чи є прямокутником будь-який квадрат?
2. Чи правильно, що існує ромб, який не є паралелограмом?
3. Три сторони паралелограма рівні. Визначте вид паралелограма.
4. Як за допомогою транспортира за найменшої кількості вимірювань перевірити, чи є прямокутником даний паралелограм?

Варіант 3. 1.Чи існує чотирикутник з перпендикулярними діагоналями, який не є ромбом?
2. Чи правильно, що жоден прямокутник не є ромбом?
3. Визначте вид чотирикутника, у якого є дві пари рівних протилежних кутів і жоден з них не гострий.
4. Як за допомогою лише циркуля перевірити, чи є чотирикутник квадратом?

Варіант 4. 1.Чи існує чотирикутник з рівними діагоналями, який не є прямокутником?
2.Чи правильно, що жоден ромб не є прямокутником?
3.Визначте вид чотирикутника, у якого дві сторони паралельні і дорівнюють третій стороні.
4.Як за допомогою лише циркуля перевірити, чи є чотирикутник

прямокутником?

Оскільки письмові завдання домашньої роботи відповідали за змістом та рівнем складності письмовим завданням класної роботи, перевірку цих завдань здійснюється в стислій формі (озвучується, яке твердження було використане, а також відповідь).

III. Формулювання мети і завдань уроку

Мета уроку безпосередньо випливає з теми уроку. Оскільки на попередніх двох уроках було вивчено досить великий об'єм теоретичного матеріалу, а також розглянуто випадки лише прямого застосування вивчених тверджень, то на цьому уроці логічно було б систематизувати твердження та опанувати прийоми, а також сформувати сталі вміння (навички) із застосування набутих знань.

IV. Актуалізація опорних знань

Оскільки одна з цілей уроку — систематизація знань учнів щодо вивчених означень, властивостей та ознак прямокутника, ромба і квадрата, то для досягнення цієї мети треба поновити в пам'яті учнів названі твердження. Для цього доцільно розв'язати усно задачі.

Виконання усних вправ

1.У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить їх на чотири рівні відрізки. Якого виду цей чотирикутник?

2.Знайдіть у прямокутнику (рис. 1) усі рівні між собою кути.

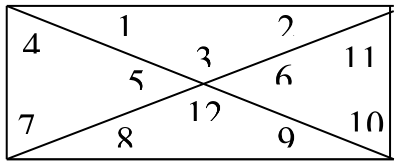


Рис. 1

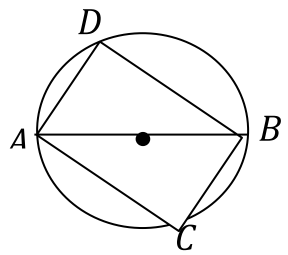


Рис. 2

3. *AB* — діаметр кола, в який вписано чотирикутник *ADBC,* причому *AD=BC (рис. 2)*. Доведіть, що *ADBC* — прямокутник.

4. *ABCD* — ромб *(рис. 3)*. Визначте кут *x*.

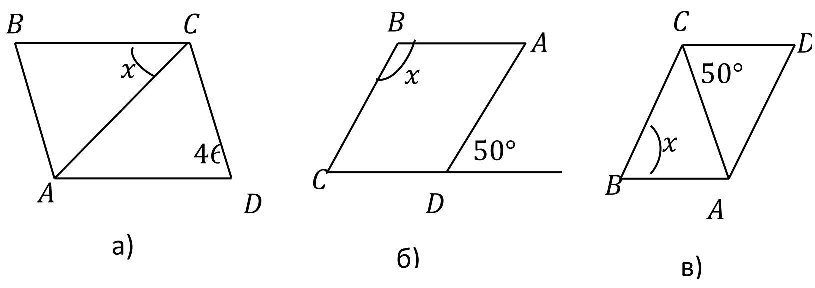


Рис. 3

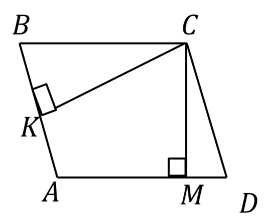


Рис. 4

5.*ABCD* - паралелограм, *CM=CK (рис.4).* Доведіть, що *ABCD* - ромб.

V. Узагальнення та систематизація знань

Виконання усних вправ

1.Чи правильні твердження?

1) Якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то цей чотирикутник не ромб.

2) Якщо в паралелограмі діагоналі нерівні, то він не може бути прямокутником.

2.Чи правильні твердження?

1) Кожний квадрат є прямокутником.

2) Існує ромб, який є прямокутником.

3) Жодний прямокутник не є ромбом.

4) Існує квадрат, який не є ромбом.

3.Чим відрізняється квадрат від ромба, який не є квадратом? Які спільні властивості мають ці фігури?

Після виконання усних вправ учні презентують схеми, які вони склали вдома.

Далі проводиться обговорення, корекція та узагальнення здобутих результатів. Таким чином формується уявлення учнів про співвідношення між вивченими поняттями «чотирикутник», «паралелограм», «прямокутник», «ромб», «квадрат», яке може бути зображене у вигляді схеми.

Після виконаної роботи зі складання схеми слід провести роботу із читання цієї схеми, а саме обговорити ряд питань такого змісту:

1. Як довести, що даний чотирикутник є прямокутником?
2. Як довести, що даний чотирикутник є ромбом?
3. Як довести, що даний чотирикутник є квадратом?
4. Як довести, що даний паралелограм є прямокутником?
5. Як довести, що даний паралелограм є ромбом?
6. Як довести, що даний паралелограм є квадратом?

7.Дано прямокутник. Які рівності виконуються для його елементів?
8.Дано ромб. Які рівності виконуються для елементів цього ромба?
9.Дано квадрат. Які рівності виконуються для елементів цього квадрата?

Відповіді на ці запитання є фактично загальними схемами для розв'язування типових задач на обчислення та доведення в темі «Прямокутник. Ромб. Квадрат».

VI. Застосування вмінь та навичок

На цьому етапі уроку проводиться робота із формування в учнів умінь використовувати схему та наслідки з неї для розв'язування задач достатнього рівня складності на доведення та обчислення із використанням означень, властивостей та ознак прямокутника, ромба і квадрата.

Виконання письмових вправ

1.Діагоналі паралелограма утворюють кути з однією з його сторін. Доведіть, що цей паралелограм — прямокутник.
2.Точка перетину діагоналей прямокутника розташована від більшої сторони на 5 см ближче, ніж від меншої сторони. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.
3.У паралелограмі *ABCD* бісектриси кутів *A* і *B* перетинають сторони *BC* і *AD* у точках *E* і *F* відповідно. Доведіть, що *ABEF* — ромб.
4.Висота, що проведена із вершини тупого кута ромба, ділить його сторону навпіл. Знайдіть:

а) кути ромба;

б) сторону ромба, якщо його менша діагональ дорівнює 16 см.

5.Доведіть, що прямокутник, діагоналі якого перпендикулярні, є квадратом.
6.На діагоналі *AC* квадрата *ABCD* позначено точки *K* і *M* так, що *AK* = *CM* *(рис.* 5). Доведіть, що *BMDK* - ромб.

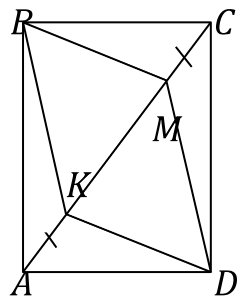
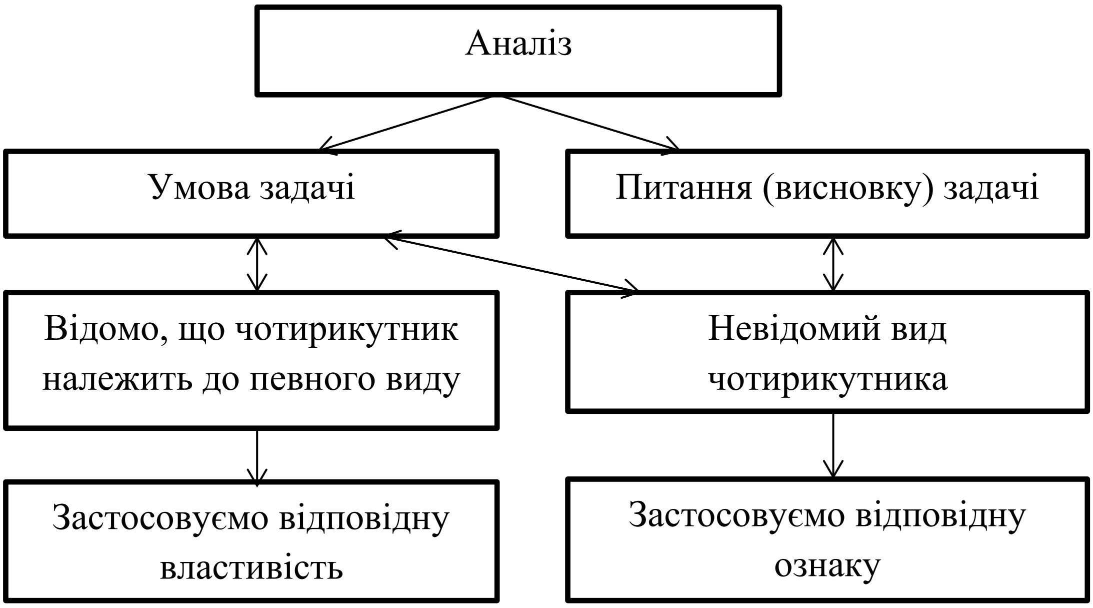


Рис.5

За наявності часу та за рахунок побудови схематичного рисунка і запису тільки плану розв'язання, кількість задач для письмового розв'язання може бути збільшена. Під час розв'язування задач учитель формує в учнів уміння діяти за схемою.



Після проведення аналізу умови задачі учні складають відповідний логічний ланцюжок, який допоможе розв'язати задачу.

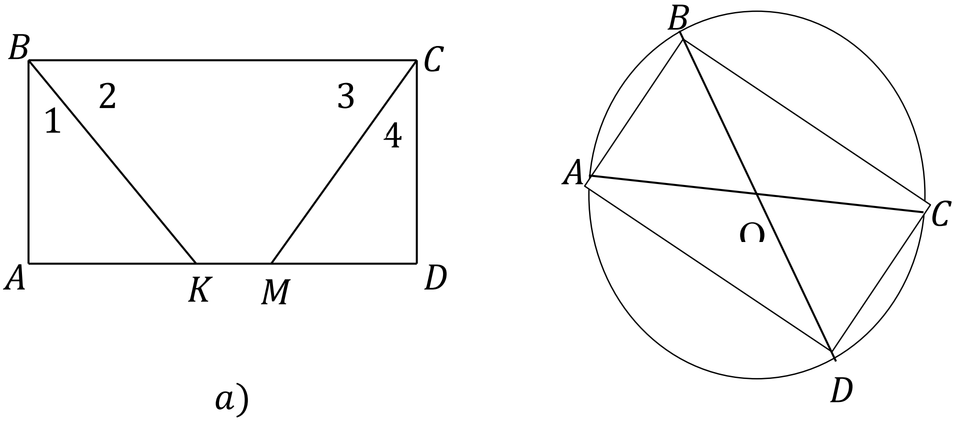
Такі розумові дії (виділення питань задачі; визначення виду питання; визначення виду твердження, що має бути використане для пошуку відповіді на питання, а далі — складання логічного ланцюжка із використанням даних задачі) мають передувати записам у зошитах учнів.

Формування вміння виконувати такі розумові дії — одна із головних цілей вивчення геометрії.

VII. Підсумки уроку

Для перевірки засвоєння учнями основного змісту уроку вчитель може запропонувати учням розв'язати усне завдання: за відповідним готовим малюнком *(рис. 6 а, б)* складіть задачу, щоб вона розв'язувалась із використанням:

а) властивості прямокутника; б) ознаки прямокутника.



а) б)

Рис. 6

VIII. Домашнє завдання

Повторити теоретичні відомості з теми «Паралелограм та його види».

Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

Варіант 1

5. Кут між діагоналлю і стороною ромба дорівнює 20°. Знайдіть кути ромба.
6. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 1 : 8. Знайдіть тупий кут, який утворюється при перетині діагоналей прямокутника.
7. Доведіть, що прямокутник є квадратом, коли дві сусідні сторони утворюють з діагоналлю рівні кути.
8. Побудуйте ромб за висотою і периметром.

Варіант 2

1. Кут ромба дорівнює 140°. Знайдіть кут між протилежною до цього кута діагоналлю і стороною ромба.
2. Діагональ ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на 10° більший за інший. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.
3. Доведіть, що паралелограм є ромбом, якщо дві сусідні сторони утворюють з діагоналлю рівні кути.
4. Побудуйте ромб за гострим кутом і висотою.

Додаток Г

План-конспект уроку з геометрії на тему:
«Тематична контрольна робота з теми «Прямокутний трикутник»

Тема: Тематична контрольна робота

Мета: перевірити рівень засвоєння учнями знань щодо змісту основних понять теми; перевірити якість сформованих умінь щодо застосування набутих знань для виконання зображення фігур за умовою задачі, а також для розв'язання стандартних і нестандартних задач.

Тип уроку: контроль та корекція знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап

II. Перевірка домашнього завдання

Зібрати зошити із виконаною домашньою контрольною роботою (роботу перевірити та врахувати під час виставлення тематичного бала).

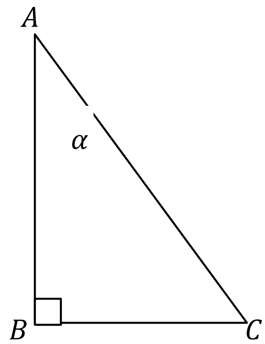
III. Формулювання мети і завдань уроку

IV. Умова тематичної контрольної роботи

Варіант 1

Початковий рівень

1.На малюнку в прямокутному трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $\angle A = \alpha$.



а) Виразіть cos α;

б) виразіть гіпотенузу AC через катет BC і тригонометричну функцію кута α;

в) виразіть sin C через тригонометричну функцію кута α.

Середній рівень

1. Спростіть вираз $3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$.

2. Синус гострого кута втричі більший за його косинус. Чому дорівнює тангенс даного кута?

Достатній рівень

3. Розв'яжіть прямокутний трикутник з гіпотенузою 6 см і гострим кутом 30°.

4. Знайдіть тангенс гострого кута α, якщо cos α = 0,8.

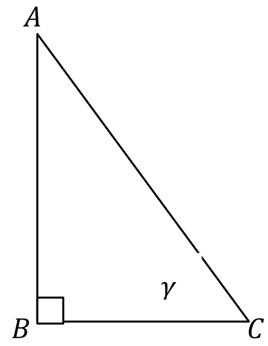
Високий рівень

5. Знайдіть висоту й бічну сторону рівнобедреної трапеції з основами 2 і 8 та гострим кутом α.

Варіант 2

Початковий рівень

1. На малюнку в прямокутному трикутнику ABC $\angle A = 90°$, $\angle C = \gamma$.



а) Виразіть $\sin \gamma$;

б) виразіть катет AB через катет AC і тригонометричну функцію кута γ;

в) виразіть $\cos \gamma$ через тригонометричну функцію кута γ.

Середній рівень

2. Спростіть вираз $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

3. Синус гострого кута вдвічі менший за його косинус. Чому дорівнює тангенс даного кута?

Достатній рівень

4. Розв'яжіть прямокутний трикутник із катетом 4 см і прилеглим кутом 60°.

5. Знайдіть тангенс гострого кута α, якщо $\sin \alpha = 0{,}6$.

Високий рівень

6. Знайдіть діагоналі ромба зі стороною 6 і гострим кутом α.

V. Підсумки уроку

Як варіант проведення цього етапу уроку можна запропонувати (після виконання роботи) оголошення правильних відповідей до завдань, виконаних учнями; або роздати учням для опрацювання вдома (домашній аналіз контрольної роботи) копії правильних розв'язань завдань контрольної роботи (заготовлених учителем заздалегідь).

VI. Домашнє завдання

Виконати аналіз контрольної роботи (за розданими розв'язаннями).

Додаток Д

Лист самоконтролю з теми:

"Теорема Піфагора"

Варіант 1

1. Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 1 см і 3 см, то гіпотенуза дорівнює …

а) 4 см; б) $2\sqrt{2}$ см; в) $\sqrt{10}$ см; г) 10 см. (1 бал)

2. Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а один з катетів – 9 см, то другий катет дорівнює …

а) 6 см; б) 12 см; в) $3\sqrt{34}$ см; г) 24 см. (1 бал)

3. Якщо діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а одна із сторін – 6 см, то периметр прямокутника дорівнює …

а) 14 см; б) 22 см; в) 36 см; г) 28 см. (1 бал)

4. Якщо основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота, що проведена до неї, - 12 см, то бічна сторона трикутника дорівнює …

а) 13 см; б) $2\sqrt{61}$ см; в) $\sqrt{119}$ см; г) $2\sqrt{34}$ см. (1 бал)

5. У рівнобедреному трикутнику висота, що проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки a і b, починаючи від вершини кута між бічними

сторонами. Визначити основу трикутника.

а) $\sqrt{2ab}$; б) $\sqrt{2b(a+b)}$; в)$\sqrt{a+b}$; г) 2ab. (2 бали)

6. Більша основа прямокутної трапеції – 10 см, а менша – 6 см. Знайти більшу бічну сторону трапеції, якщо менша дорівнює 3 см.

а) 10 см; б) $\sqrt{13}$ см; в) $2\sqrt{13}$ см; г) 5 см. (2 бали)

36. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює 18 см, а висота трикутника дорівнює 48 см. Визначити периметр трикутника.

(4 бали)

Варіант 2

1. Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, то гіпотенуза дорівнює …

а) 5 см; б) $2\sqrt{7}$ см; в) $4\sqrt{7}$ см; г) 10 см. (1 бал)

2. Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з катетів – a, то другий катет дорівнює …

а) $\sqrt{c^2+a^2}$; б) $\sqrt{a^2-c^2}$; в) $\sqrt{c^2-a^2}$; г) $\sqrt{c^2+a^2}$. (1 бал)

3. Якщо діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см, то його сторона дорівнює …

а) 26 см; б) $\sqrt{119}$ см; в) 13 см; г) 42 см. (1 бал)

4. Якщо бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а основа – 6 см, то висота, проведена до основи трикутника, дорівнює …

а) 4 см; б) $\sqrt{11}$ см; в) 8 см; г) $\sqrt{61}$ см. (1 бал)

5. У трикутнику висота і медіана, що проведені до сторони 12см, відповідно дорівнюють 4 см і 5 см. Знайти довжину меншої з двох інших сторін трикутника.

а) $\sqrt{97}$ см; б) $2\sqrt{13}$ см; в) $4\sqrt{13}$ см; г) 5 см. (2 бали)

6. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 14 см і 24 см, а бічна сторона – 13 см. Знайти висоту трапеції.

а) $\sqrt{69}$ см; б) 6 см; в) 12 см; г) 8 см. (2 бали)

7. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює 8 см, а висота трикутника – 18 см. Визначити периметр трикутника.

(4 бали)