Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методичні підходи до вивчення рівнянь і нерівностей з модулем в основній школі

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М – М – 21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Романюк Ольга Павлівна

Керівник кандидат фізико–математичних наук, професор кафедри математики з методикою викладання Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти:
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничо–математичної освіти Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти Харченко Наталія Борисівна

кандидат фізико–математичних наук, доцент кафедри вищої математики Рівненського державного гуманітарного університету
Марач Віктор Сільвестрович

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Завдання навчання математики в школі полягає не тільки в тому, щоб дати учням певну суму знань, а й тому (і це головне), щоб сформувати в них відповідні фахові компетентності і, зокрема, розвинути творче математичне мислення, зацікавити їх математикою, прищепити навички самостійно виконувати дослідження і розв'язувати складні математичні задачі.

Поняття «модуля числа» (абсолютної величини числа) згідно із діючою програмою та базових підручників вводиться у курсі математики закладів загальної середньої освіти у шостому класі. Проте в процесі вивчення матеріалу недостатньо уваги приділяється розв'язанню завдань із даної тематики, як у шостомукласі, так і у старших класах. Базові підручники містять лише окремі види задач з використанням поняття модуля числа. Серед причин, які спричиняють недоліки у навчанні учнів розв'язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля, можна виділити дві групи:

1) недоліки, які обумовлені діяльністю вчителів;
2) недоліки, які є в учнів.

Засвоєння поняття модуля числа потрібне не лише для оволодіння алгоритмами арифметичних дій з додатними та від'ємними числами. Воно сприяє формуванню в учнів абстрактного та алгоритмічного видів мислення; логічного мислення розгалуження (при використанні алгебраїчного змісту модуля); наочно-образного мислення (при використанні геометричної інтерпретації модуля); пошукової евристичної діяльності (при пошуку раціональних способів розв'язування). Саме для перевірки наявності відповідних типів мислення абітурієнтів до завдань вступних іспитів у вищих навчальних закладах, як правило, включають задачі на модуль числа.

Оволодіння навичками розв'язування задач на модуль числа є умовою не тільки успішного складання вступного іспиту з математики, це необхідно і для подальшого вивчення курсу вищої математики.

На **актуальність** даної проблеми вказують потреби шкільної практики. Як відомо, при навчанні учнів розв'язуванню рівнянь та нерівностей з модулями виникають деякі труднощі у відшуканні розв'язків того чи іншого рівняння, а також труднощі при виборі методів та способів розв'язування. Актуальність даної тематики та недостатня розробленість певних аспектів розглядуваної проблеми обумовили вибір теми нашого дослідження: **"Методичні підходи до вивчення рівнянь і нерівностей з модулем в основній школі".**

Мета роботи: розробити методичну систему по формуванню в учнів навичок розв'язування задач на модуль числа.

Об'єкт роботи: процес діяльності вчителя та учня при вивченні рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля.

Предмет роботи: методична система вивчення рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля.

У процесі дослідження була висунута **гіпотеза:** виділення в процесі розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля чітко вираженого етапу по навчанню змісту і структури рівнянь та нерівностей, цілеспрямованої системи по вивченню методів розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями, сприяє оперативному й усвідомленому їх використанню в ході розв'язання рівнянь і нерівностей, більш високому рівню засвоєння програмного матеріалу, підвищенню математичної культури і підготовки до успішного продовження навчання.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– провести аналіз програм з математики;
– виявити взаємозв'язки між темами;
– проаналізувати методичне забезпечення дисципліни;
– систематизувати відомості про абсолютну величину числа, розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля в шкільному курсі алгебри;
– конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів;

– підібрати диференційовану систему вправ;
– подати приклади розв’язування рівнянь та нерівностей різної складності.

Для досягнення мети та розв’язання поставлених завдань були використані **теоретичні** (аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з проблеми дослідження, змісту програм і підручників для різних типів шкіл) та **емпіричні** (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження, бесіди з вчителями, батьками та учнями) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями закладів загальної середньої освіти при організації навчання математики на уроках і факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності.

Структура роботи: робота побудована за логічним принципом і складається зі вступу, основної частини, яка включає три розділи, висновків, списку використаних джерел та додатків. Рівняння і нерівності згруповані за методами розв’язання. Розв’язування рівнянь і нерівностей кожної групи починається з типових прикладів з детальним поясненням. Серед поданих рівнянь і нерівностей є як і традиційні, на застосування вивчених в шкільному курсі формул, так і нестандартні, які сприяють розширенню кругозору учнів, формуванню в них фахових компетентностей.

Апробація результатів дослідження: основні результати магістерської роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2019 та 2020 роках.

РОЗДІЛ 1. АБСОЛЮТНА ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА

1.1. Поняття про абсолютну величину числа

Абсолютною величиною (модулем) невід'ємного числа називається саме це число, а абсолютною величиною від'ємного числа називається протилежне йому число.

Наприклад, абсолютною величиною числа 5 є 5, абсолютною величиною числа 0 є 0, абсолютною величиною числа - 4 є 4. Все це записують так:

$$|5| = 5, \quad |0| = 0, \quad |-4| = 4.$$

Отже, з означення абсолютної величини виходить, що

$$|a| = \begin{cases} a, якщо - a \geq 0, \\ -a, якщо - a < 0. \end{cases}$$

Очевидно, абсолютна величина числа має такі найпростіші властивості:
а) абсолютна величина числа є число невід'ємне, тобто при будь-якому a

$$|a| \geq 0;$$

б) абсолютна величина числа не менша від цього числа, тобто при будь-якому a

$$|a| \geq a.$$

1.2. Властивості абсолютної величини числа

Розглянемо кілька теорем, які виражають основні властивості поняття про абсолютну величину числа.

Теорема 1. Абсолютна величина алгебраїчної суми кількох дійсних чисел не більша від суми абсолютних величин доданків, тобто

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|.$$

Якщо доданки невід'ємні або недодатні, то абсолютна величина суми дорівнює сумі абсолютних величин доданків; якщо доданки мають різні знаки, то абсолютна величина суми менша від суми абсолютних величин доданків. *Наприклад*

$$|-3+(-5)+(-7)|=|-15|=15, \qquad |-3|+|-5|+|-7|=3+5+7=15.$$

Як бачимо,

$$|-3+(-5)+(-7)|=|-3|+|-5|+|-7|.$$

Далі

$$|2+(-4)+(-8)|=|-10|=10, \qquad |2|+|-4|+|-8|=2+4+8=14.$$

Отже,

$$|2+(-4)+(-8)|\geq|2|+|-4|+|-8|.$$

Доведення. Доведемо цю теорему для $n=2$. Нехай $a_1+a_2\geq 0$, тоді, оскільки

$$|a_1|\geq a_1 \text{ і } |a_2|\geq a_2,$$

то

$$|a_1+a_2|=a_1+a_2\leq|a_1|+|a_2|.$$

Нехай $a_1+a_2<0$, тоді, оскільки $|a_1|\geq -a_1$ і $|a_2|\geq -a_2$, то

$$|a_1+a_2|=-(a_1+a_2)=-a_1-a_2\leq|a_1|+|a_2|.$$

Наведене доведення легко поширюється на будь-яку кількість доданків.

Теорема 2. Абсолютна величина різниці двох дійсних чисел не менша від різниці абсолютних величин цих чисел, тобто

$$|a-b|\geq|a|-|b|.$$

Доведення. Застосовуючи теорему 1, дістанемо:

$$|a|=|(a-b)+b|\leq|a-b|+|b|,$$

звідки

$$|a-b|\geq|a|-|b|.$$

Якщо $a-b$ і b невід’ємні або недодатні, то $|a-b|=|a|-|b|$; якщо $a-b$ і b мають різні знаки, то $|a-b|>|a|-|b|$.

Наприклад,

$$|8-3| = |8| - |3|,$$

$$|-5-(-2)| = |-5| - |-2|,$$

$$|-7-10| > |-7| - |10|,$$

$$|15-(-4)| > |15| - |-4|.$$

Теорема 3. Абсолютна величина суми двох дійсних чисел не менша від різниці абсолютних величин цих чисел, тобто

$$|a+b| \geq |a| - |b|.$$

Доведення. Застосовуючи теорему 2, дістанемо:

$$|a+b| = |a-(-b)| \geq |a| - |-b| = |a| - |b|.$$

Якщо $a+b$ і b мають різні знаки або принаймні одне з цих чисел дорівнює нулеві, причому $|a| \geq |b|$, то $\vee |a+b| = |a| - |b|$; в усіх інших випадках $|a+b| > |a| - |b|$.

Теорема 4. Абсолютна величина різниці двох дійсних чисел не більша від суми абсолютних величин цих чисел, тобто

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

Доведення. На підставі теореми 1 маємо:

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Якщо a і b мають різні знаки або принаймні одне з них дорівнює нулеві, то $|a-b| = |a| + |b|$; якщо a і b мають різні знаки, то $|a-b| < |a| + |b|$.

З теореми 1-4 виходить, що

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|.$$

Теорема 5. Абсолютна величина добутку кількох дійсних чисел дорівнює добуткові абсолютних величин цих чисел.

Теорема 6. Абсолютна величина двох дійсних чисел дорівнює частці абсолютних величин діленого і дільника.

Доведення теорем 5 і 6 безпосередньо випливає з означень дій множення і ділення [19].

1.3. Арифметичне значення квадратного кореня

Арифметичним значенням квадратного кореня називається невід’ємне значення кореня з невід’ємного числа.

Наприклад, арифметичним значенням $\sqrt{25}$ є 5, $\sqrt{0}$ є 0.

Звичайно, коли не зроблено будь-яких застережень, символом $\sqrt{a}$ позначається арифметичне значення кореня.

Розглянемо вираз $\sqrt{a^2}$.

Якщо $a \neq 0$, то цей корінь має два значення: a і $-a$. Одне з них додатне (арифметичне значення), а друге від’ємне [19].

При $a > 0$ арифметичним значенням кореня є число a, тобто

$$\sqrt{a^2} = a .$$

При $a < 0$, очевидно, $-a > 0$ і арифметичним значенням кореня є число $-a$, тобто

$$\sqrt{a^2} = -a .$$

Якщо $a = 0$, то розглядуваний корінь має лише одне значення 0, яке є його арифметичним значенням, тобто при $a = 0$

$$\sqrt{a^2} = a = 0 .$$

Отже,

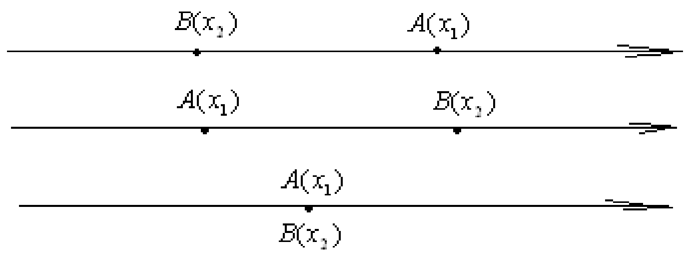
$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ÿêùî} \quad -\text{à} \geq 0, \\ -\text{à}, \text{ÿêùî} \quad -\text{à} < 0. \end{cases}$$

тобто

$$\sqrt{a^2} = |a| .$$

1.4. Геометричний зміст модуля числа.

Якщо на числовій осі маємо точки $A(x_1)$ та $B(x_2)$, то відстань d між ними буде дорівнювати:



$d = x_1 - x_2$, якщо $x_1 > x_2$;

$d = x_2 - x_1$, якщо $x_1 < x_2$;

$d = 0$, якщо $x_1 = x_2$.

Враховуючи означення модуля числа дістанемо:

$d = |x_1 - x_2|$

Отже, геометричний зміст виразу $|a - b|$ такий:

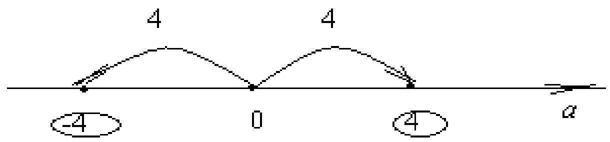
$|a - b|$ - це відстань між точками $A(a)$ та $B(b)$.

Якщо $b = 0$, то отримаємо $|a - 0| = 0$.

Тому ***геометричний зміст числа*** такий:

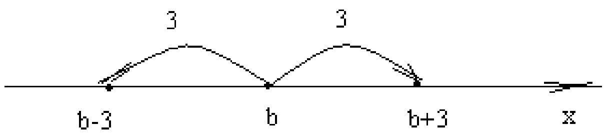
$|a|$ - це відстань між точкою $A(a)$ та початком відліку $B(0)$.

Наприклад, якщо $|a| = 4$, то геометрична інтерпретація цього виразу має вигляд:



Тобто $a = \pm 4$.

Якщо $|x - b| = 3$, то маємо:



Тобто $x = b \pm 3$.

Це дозволить нам легко розв'язувати деякі лінійні рівняння та нерівності з модулями [1].

РОЗДІЛ 2
РОЗВЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ РІЗНИМИ МЕТОДАМИ

2.1. Лінійні рівняння і нерівності з абсолютними величинами

Найпростіші рівняння виду $a|kx+l|+b=0$.

Розглянемо рівняння

$$a|kx+l|+b=0. \tag{1}$$

Очевидно, якщо $a=0$, то при $b=0$ його розв'язком є довільне число, а при $b\neq 0$ це рівняння не має розв'язків.

Якщо $k=0$, то при $a|l|+b=0$ розв'язком рівняння є довільне число, а при $a|l|+b\neq 0$ рівняння не має розв'язків.

Розглянемо тепер випадок, коли $a\neq 0$ і $k\neq 0$. Тоді з рівняння (1) виходить:

$$|kx+l|=-\frac{b}{a}. \tag{2}$$

а) Нехай $\frac{b}{a}<0$. Тоді $-\frac{b}{a}>0$ і з рівняння (2) виходить:

$kx+l=\mp\frac{b}{a}$, звідки $kx=-l\mp\frac{b}{a}$ і $x=-\frac{l}{k}\mp\frac{b}{ak}$.

б) Нехай $b=0$. Тоді рівняння (2) набирає вигляду

$|kx+l|=0$, звідки $kx+l=0$ і $x=-\frac{l}{k}$.

в) Нехай $\frac{b}{a}>0$. Тоді $-\frac{b}{a}<0$ і рівняння (2) не має розв'язків [10].

2.2. Найпростіші лінійні рівняння, що містять знак модуля

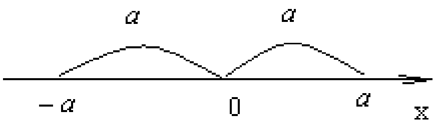
Рівняння виду $|x|=a$ ми вже вміємо розв'язувати:

при $a<0$ $\quad x\in\otimes$;

при $a=0$ $\quad x=0$;

при $a>0$ $\quad x=\pm a$.

Дійсно, нерівність $|x|<0$ не виконується ні для якого значення x. Якщо $|x|=0$, то це означає, що відстань між початком відліку і точкою $X(x)$ дорівнює 0, тобто $x=0$. І нарешті, якщо $a>0$ то маємо



і $x\in\{\pm a\}$.

Якщо використати ***алгебраїчний зміст модуля числа***, то можна розглянути два випадки:

1) при $x>0$ $\quad|x|=x$, і $x=a\geq 0$

або

2) при $x\leq 0$ $\quad|x|=-x$, і $x=-a\leq 0$.

Обидва отримані рівняння не мають розв'язків при $a<0$ і мають один і той же розв'язок $x=0$ при $a=0$. А от якщо $a>0$, то маємо два різних кореня $x=\pm a$.

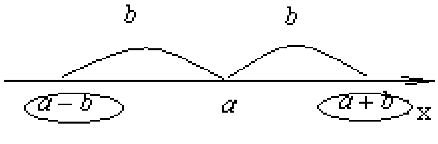
Отже, як бачите, рівняння цього типу можна розв'язувати, використовуючи і геометричний і алгебраїчний змісти модуля числа [1].

Аналогічно будемо розв'язувати рівняння вигляду $|x-a|=b$. Очевидно, що у випадку, коли $b<0$, розв'язків нема, а при $b=0$ матимемо один корінь $x=a$. Нехай $b>0$. Тоді:

$$\begin{cases}|x-a|=b\\ b>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq a\\ x-a=b\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq a\\ -(x-a)=b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq a\\ x=a+b\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq a\\ x=a-b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 0\\ x=a\pm b\end{cases}$$

Згідно ***геометричного змісту модуля числа*** це рівняння розв'язується наступним чином:

$$|x-a|=b>0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a+b\\ x=a-b\end{array}\right.\\ b>0\end{cases},\text{ бо}$$



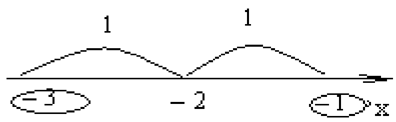
Приклад 1. $|x+2|=1$.

1-ий спосіб.

$$|x+2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x+2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2<0 \\ -x-2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -2 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-2 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3;-1\}.$$

2-ий спосіб.

Згідно геометричного змісту модуля:



Тоді $|x+2|=1 \Leftrightarrow x\in\{-3;-1\}$.

Відповідь: $x\in\{-3;-1\}$.

Якщо перед x в під модульному виразі стоїть знак «-», то використовуючи властивість модуля, легко звести задачу до задач розглянутого типу. Наприклад,

$$|-x-2|=1 \Leftrightarrow |x+2|=1;$$

$$|2-x|=1 \Leftrightarrow |x-2|=1 \text{ тощо.}$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при x не дорівнює ± 1. Наприклад, нехай треба розв’язати рівняння:

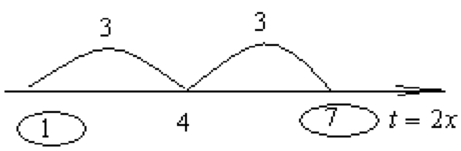
Приклад 2. $|2x-4|=3$.

Розв’язання.

Розв’язання з використанням алгебраїчного змісту модуля не викликає труднощів, якщо спиратись на властивості нерівностей:

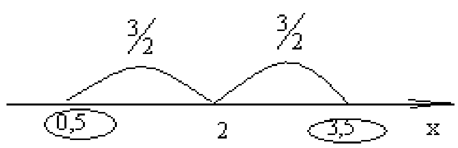
$$|2x-4|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-4\ge 0 \\ 2x-4=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-4<0 \\ -2x+4=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ 2x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{3{,}5;0{,}5\}.$$

При використанні геометричного змісту модуля числа можна зробити заміну змінної, нехай $t=2x$. Тоді маємо



,звідки $|2x-4|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=7 \\ 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{3{,}5;0{,}5\}$.

Але можна скористатись і властивістю модуля:



$$|2x-4|=3 \Leftrightarrow |2(x-2)|=3 \Leftrightarrow 2|x-2|=3 \Leftrightarrow |x-2|=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $x \in \{3,5;0,5\}$.

Підкреслимо, що бажано вільно володіти обома способами розв'язання [2].

Дійсно, якщо потрібно розв'язати, наприклад рівняння

Приклад 3. $|2-x|=2x+1$, то краще використати алгебраїчний зміст модуля:

$$|2-x|=2x+1 \Leftrightarrow |x-2|=2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x-2=2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ -x+2=2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ 3x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $x=\frac{1}{3}$.

Розв'язуючи рівняння з модулем, не треба поспішати, а краще спочатку поміркувати. Дійсно, якщо перед нами рівняння

Приклад 4. $|2x+1|=x-1$, то, оскільки ліва частина невід'ємна, дістанемо, що $x \ge 1$. Тоді $2x+1>0$ і нарешті рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ 2x+1=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \otimes.$$

Відповідь: $x \in \otimes$.

Чи є ще якісь способи розв'язання лінійних рівнянь з модулем? Так! Треба зауважити, що інколи доцільно піднести праву і ліву частини рівняння з модулями до квадрату,

“Модуль полюбляє квадрат”

Дійсно розглянемо рівняння

Приклад 5. $|x-1|=x+1$.

Розв'язання.

$$|x-1|=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ |x-1|^2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2-2x+1=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Відповідь: $x=0$.

Доцільно підносити ліву і праву частини рівняння до квадрату, якщо коефіцієнти при x у лівій та правій частинах рівняння за модулем рівні. У цьому випадку доданки, що містять x^2 скоротяться.

Якщо коефіцієнти при x у лівій та правій частинах за модулем різні, то рівняння теж можна піднести до квадрату і дістати квадратне рівняння. Вибір способу розв'язання (перехід до сукупності системи чи розв'язування квадратного рівняння) є справою смаку [1].

2.3. Найпростіші лінійні нерівності, що містять знак модуля.

Розглянемо нерівність виду

$$|x-a| \underset{>}{<} b, \quad \text{де } b>0. \tag{1}$$

Такі нерівності, безумовно, можна розв'язувати, використовуючи алгебраїчний зміст модуля числа. Дійсно,

Приклад 1. $|x-2|<3$.

Розв'язання.

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\ge 0 \\ x-2<3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ -x+2<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 2 \\ x<5 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-1;5).$$

Відповідь: $x\in(-1;5)$.

Приклад 2. $|x+1|\ge 2$.

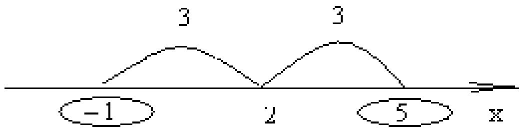
Розв'язання.

$$|x+1|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+1\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ -x-1\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x\le -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -3 \end{array}\right. .$$

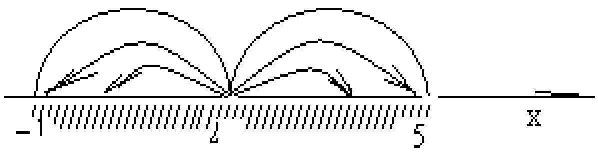
Відповідь: $x\in(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$.

А тепер спробуємо розв'язати ці нерівності, спираючись на *геометричну інтерпретацію модуля* [6].

Перш, ніж розв'язувати нерівність $|x-2|<3$, розглянемо геометричну інтерпретацію співвідношення $|x-2|=3$:



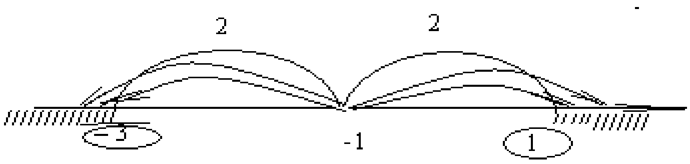
Точки, що задовольняють нерівність $|x-2|<3$ мають знаходитись від точки з координатою 2 на відстанях, що менші за 3:



Тоді розв'язком даної нерівності будуть усі точки, що розташовані між точками $\{-1\}$ та $\{5\}$, тобто $x \in (-1;5)$ [15].

Аналогічно, при розв'язанні нерівності прикладу 2, ми повинні відмітити точки, що знаходяться від точки $\{-1\}$ на відстані, що не менше за 2: Тому розв'язком нерівності буде об'єднання інтервалів:

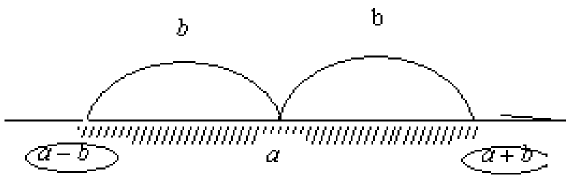
$x \in (-\infty;-3] \cup [1;\infty)$.



Ми розглянули випадок, коли $b>0$. Розв'язок при $b<0$ або $b=0$ легко отримати, використовуючи твердження про те, що модуль числа – величина невід'ємна.

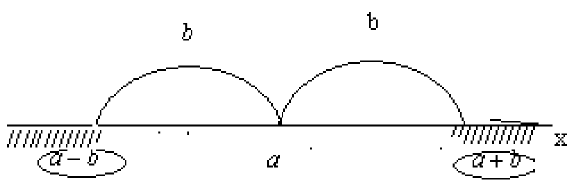
Підсумуємо, що ми маємо в випадку $b>0$:

$$\begin{cases} b>0 \\ |x-a| \le b \end{cases} \Leftrightarrow x \in [a-b; a+b]$$



(2)

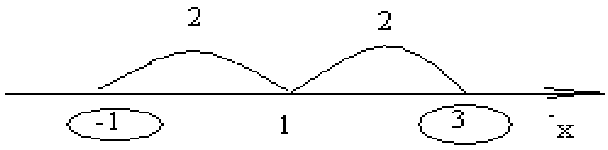
$$\begin{cases} b>0 \\ |x-a| \ge b \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; a-b] \cup [a+b; \infty)$$



Розв'яжемо декілька прикладів, використовуючи геометричний зміст модуля числа (не дивуйтесь, що першими йдуть рівняння – вони будуть використані далі у розв'язанні нерівностей):

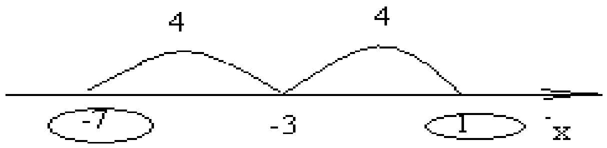
Приклад 3. $|x-1|=2$.

Відповідь: $x\in\{-1;3\}$.



Приклад 4. $|x+3|=4$.

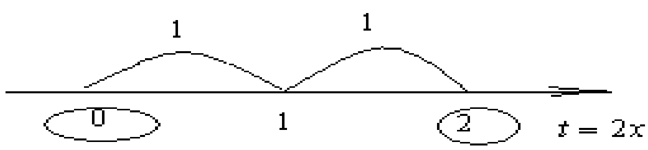
Відповідь: $x\in\{-7;1\}$.



Приклад 5. $|2x-1|=1$.

$$|2x-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=t \\ |t-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

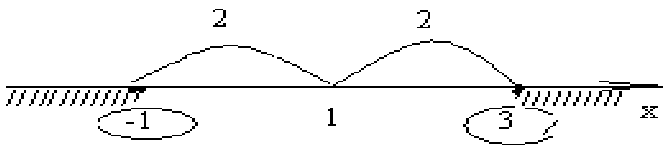
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=t \\ t\in\{0;2\} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{0;1\}.$$



Відповідь: $x\in\{0;1\}$.

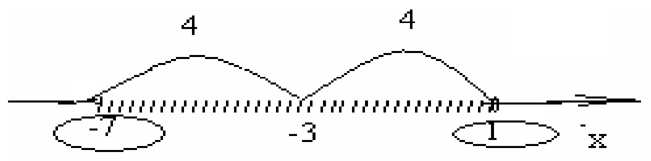
Приклад 6. $|x-1|\ge 2$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-1]\cup[3;\infty)$.



Приклад 7. $|x+3|<4$.

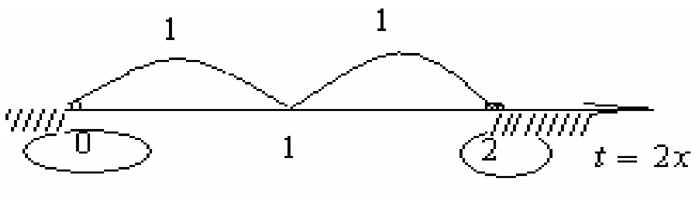
Відповідь: $x\in(-7;1)$.



Приклад 8.

$$|2x-1|>1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=t \\ |t-1|>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x>2 \\ 2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<0 \end{cases}.$$



Відповідь: $x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$.

Зверніть увагу, що якщо у (2) покласти $a=0$, то дістанемо

$$\begin{cases} b>0 \\ |x|\le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ x\in[-b;b] \end{cases} \text{ і } \begin{cases} b>0 \\ |x|\ge b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ x\in(-\infty;b]\cup[b;\infty) \end{cases}.$$

Також наведені вище приклади можна розв'язувати так:

$$|x-1|=2 \Leftrightarrow x-1=\pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. ;$$

$$|2x-1|=1 \Leftrightarrow 2x-1=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2 \\ 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{0;1\} ;$$

$$|x-1| \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \le 2 \\ x-1 \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;3] ;$$

$$|x-1| \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \le -2 \\ x-1 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty) \text{ [8].}$$

2.4. Метод інтервалів

Основним методом розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями є ***метод розбиття на проміжки***. Суть його така. Якщо деяке рівняння або нерівність містить вирази $|f_1(x)|,\ |f_2(x)|,\ldots,|f_k(x)|$, а інших виразів, які стояли б під знаком модуля, немає , то ОДЗ цього рівняння або нерівності розбивають на проміжки, на яких кожен з виразів $f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)$ зберігає знак. (Якщо, наприклад, I – один із зазначених проміжків і в кожній його точці $f_1(x)<0$, а $f_2(x)>0,\ldots, f_k(x)>0$, то на цьому проміжку $|f_1(x)|=-f_1(x)$, $|f_2(x)|=f_2(x),\ldots,|f_k(x)|=f_k(x)$.) Записане без модулів рівняння або нерівність розв'язують на кожному проміжку знакосталості. Об'єднавши розв'язки, знайдені на всіх проміжках, отримують розв'язок заданого рівняння або нерівності.

Описаний метод розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями є найбільш універсальним у тому розумінні, що його можна застосовувати при розв'язуванні довільного рівняння або нерівності, які містять змінну під знаком модуля. Проте, при розв'язуванні конкретних типів рівнянь або нерівностей з модулями буває зручніше використати інші, спеціальні для даного типу рівнянь або нерівностей, способи [17].

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|2x+1|=3$. (1)

1-й спосіб. Вираз, що стоїть під знаком модуля, перетворюється в нуль лише в точці $x=-0{,}5$. На кожному з проміжків $(-\infty;-0{,}5)$, $(-0{,}5;\infty)$ цей вираз зберігає знак. Розглянемо задане рівняння спочатку на проміжку $(-\infty;-0{,}5)$. В кожній його точці вираз $2x+1$ набуває від'ємного значення, а тому $|2x+1|=-(2x+1)$. Отже, на проміжку $(-\infty;-0{,}5)$ рівняння (1) можна записати у вигляді $-(2x+1)=3$. Корінь $x=-2$ цього рівняння належить проміжку, на якому ми розглядаємо рівняння (1). Тому $x=-2$ - корінь рівняння (1). Залишається розглянути випадок, коли $x\in(-0{,}5;\infty)$. На даному проміжку $|2x+1|=3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$. Оскільки $1\in(-0{,}5;\infty)$, то $x=1$ - також корінь рівняння (1). Отже, $X=\{-2;1\}$ [2].

Проведені міркування можна записати у такій формі:

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 0,\\ 2x+1=3,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0,\\ -(2x+1)=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -0{,}5,\\ x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-0{,}5,\\ x=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

2-й спосіб. Ліва і права частини рівняння невід'ємні при будь-якому дійсному значенні змінної x. Тому

$$(1)\Leftrightarrow |2x+1|^2=3^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

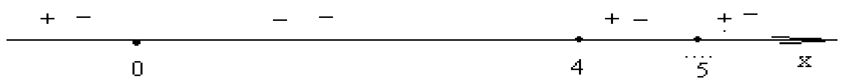
3-й спосіб. Модуль числа дорівнює 3 тоді і лише тоді, коли цим числом є 3 або -3. Тому $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=3,\\ 2x+1=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

Оскільки $x^2\ge 0$ і $|x-5|\ge 0$ при всіх дійсних x, причому вирази x^2 і $|x-5|$ одночасно не перетворюються в нуль, то $x^2+|x+5|>0$ при всіх $x\in R$. Тому ОДЗ рівняння є множина всіх дійсних чисел і вихідне рівняння рівносильне такому:

$$|x^2-4x^2|+3=x^2+|x+5|. \tag{2}$$

Вираз x^2-4x перетворюється в нуль у точках $x=0$ і $x=4$, а вираз $x-5$ - у точці $x=5$. На малюнку на кожному проміжку знакосталості першим відзначено знак виразу x^2-4x, а другим – знак виразу $x-5$.



Враховуючи, що на проміжках $(-\infty;0)$, $(4;5)$ послідовності знаків виразів x^2-4x і $x-5$ співпадають, розглянемо такі випадки.

1. $x\in(-\infty;0)\cup(4;5)$. На цій множині матимемо: $x^2-4x+3=x^2-x+5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Оскільки $-\dfrac{2}{3}\in(-\infty;0)\cup(4;5)$, то $x=-\dfrac{2}{3}$ - корінь рівняння (2).

2. $x\in[0,4]$. Розкривши модулі, отримаємо рівняння $-x^2+4x+3=x^2-x+5$, яке має два корені: $\dfrac{1}{2}$ і 2. Числа $\dfrac{1}{2}$ і 2 є коренями рівняння (2).

3. $x\in[5;\infty)$. На цьому проміжку: $x^2-4x+3=x^2-x+5 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{5}$. Оскільки $\dfrac{8}{5}\notin[5;\infty)$, то $x=\dfrac{8}{5}$ - не є коренем рівняння (2).

Відповідь. $X=\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2};2\}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $|x+2|+|x+1|=2$ [15].

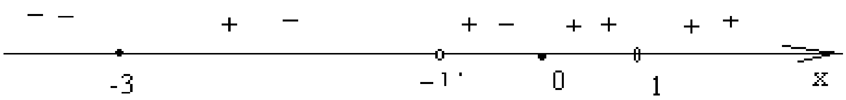
Якщо a і b - деякі точки числової прямої, то $|a-b|$ - відстань між цими точками. Використовуючи цей геометричний зміст модуля різниці двох чисел, задачу можна пере формулювати так: знайти на числовій прямій всі точки x, сума відстаней від яких до точок -2 і 1 дорівнює 2. Покажемо, що таких точок не існує. Дійсно, сума відстаней від кожної точки x відрізка $[-2;1]$ до його кінців дорівнює довжині відрізка, тобто 3. Якщо ж $x\notin[-2;1]$, то відстань від точки x тільки до дальшого від неї кінця вже більша за 3. Отже, точок, сума відстаней яких до точок -2 і 1 дорівнює 2, не існує, а тому задане рівняння не має коренів.

Приклад 4. Розв’язати нерівність $\frac{|x+3|+x}{1-|x|}>2$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді

$$\frac{|x+3|+x-2+2|x|}{1-|x|}>0. \tag{3}$$

ОДЗ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$. Вирази, що стоять під знаками модулів, перетворюються в нуль у точках $x=-3$ або $x=0$. Ці точки разом з межами ОДЗ нерівності розбивають числову пряму на п’ять проміжків. На малюнку на кожному з цих проміжків першим відзначено знак виразу $x+3$, а другим – знак виразу x.



Розглянемо випадки.

1. $x\in(-\infty;-3)$. На даному проміжку матимемо:
$\frac{-x-3+x-2-2x}{1+x}>0\Leftrightarrow\frac{2x+5}{x+1}<0\Leftrightarrow x\in(-2{,}5;-1)$. Оскільки жодна точка інтервалу $(-2{,}5;-1)$ не належить вибраному проміжку $(-\infty;-3)$, то розв’язком нерівності (3) на цьому проміжку є $X_1=\otimes$.

2. $x\in[-3;-1)\cup(-1;0)$. Розкривши модулі на даній множині, отримуємо: $\frac{x+3+x-2-2x}{1+x}>0\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}>0\Leftrightarrow x\in(-1;\infty)$. Тоді $X_2=(-1;0)$ - розвязок нерівності (3) на множині $x\in[-3;-1)\cup(-1;0)$.

3. $x\in[0;1)\cup(1;\infty)$. $\frac{x+3+x-2-2x}{1-x}>0\Leftrightarrow\frac{4x+1}{x-1}<0\Leftrightarrow x\in(-\frac{1}{4};1)$. $X_3=[0;1)$ - розвязок нерівності (3) на множині $x\in[0;1)\cup(1;\infty)$.

Отже, $X=X_1\cup X_2\cup X_3=(-1;0)\cup[0;1)=(-1;1)$.

Нерівності з модулями іноді зручно розв’язувати методом рівносильних перетворень. При цьому можна використовувати такі твердження.

1. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$ 2. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{array}\right.$

3. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x).$

Доведемо, наприклад, справедливість першого твердження.

Нехай $x = a$ - довільний розв'язок нерівності $|f(x)| > g(x)$. Тоді $|f(a)| > g(a)$- правильна частина нерівності. 1) Якщо $f(a) \geq 0$, то $f(a) > g(a)$, тобто $x = a$ є розв'язком першої нерівності сукупності, а отже, і розв'язком всієї сукупності. 2) Якщо $f(a) < 0$, то $-f(a) > g(a)$, а $f(a) < -g(a)$, тобто $x = a$ є розв'язком другої сукупності, отже, і розв'язком всієї сукупності. Таким чином, довільний роз'вязок нерівності є розв'язком сукупності.

Нехай $x = b$ - довільний розв'язок сукупності. Тоді з двох числових нерівностей $f(b) > g(b)$ або $f(b) < -g(b)$ принаймні одна є правильною. Розглянемо такі випадки. 1) Якщо $g(b) \geq 0$ і правильною є нерівність $f(b) > g(b)$, то $f(b) > 0$ і цю нерівність можна переписати у вигляді $|f(b)| > g(b)$. 2) Якщо $g(b) \geq 0$ і правильною є нерівність $f(b) < -g(b)$, то $f(b) < 0$ і цю нерівність можна переписати у вигляді $-f(b) > g(b) \Leftrightarrow |f(b)| > g(b)$. 3) Якщо $g(b) < 0$, то нерівність $|f(b)| > g(b)$ є правильною, оскільки модуль числа $f(b)$ завжди більший за від'ємне число $g(b)$. В усіх випадках $x = b$ є розв'язком нерівності $|f(x)| > g(x)$.

Отже, кожний розв'язок нерівності $|f(x)| > g(x)$ є розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$ і навпаки. Тому дані нерівність і сукупність рівносильні.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $|2x+4| > 1-x$.

$$|2x+4| > 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4 > 1-x, \\ 2x+4 < -(1-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -1, \\ x < -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5) \cup (-1;\infty).$$

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\big||x+2| + 2x + 1\big| \geq 2$.

$$(\ldots) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+2| + 2x + 1 \geq 2, \\ |x+2| + 2x + 1 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+2| \geq -2x+1, \\ |x+2| \leq -2x-3. \end{array}\right.$$

Розглянемо окремо кожну нерівність сукупності.

$$|x+2| \ge -2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 \ge -2x+1, \\ x+2 \le -(-2x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{1}{3}, \\ x \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{3};\infty).$$

$$|x+2| \ge -2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \le -2x-3, \\ x+2 \ge -(-2x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{5}{3}, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-\frac{5}{3}].$$

Отже, $X = (-\infty;-\frac{5}{3}] \cup [-\frac{1}{3};\infty)$ [17].

2.5. Розв’язання рівнянь, що містять модуль під знаком модуля

До розв’язання деяких задач даної тематики інколи достатньо використати означення модуля числа та елементарних навичок розв’язування лінійних рівнянь з модулем .

Приклад 1. $||x+5|-2| = 0$.

Розв’язання.

$$||x+5|-2| = 0 \Leftrightarrow |x+5| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5 = 2 \\ x+5 = -2 \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -7 \end{array}\right..$$

Відповідь: $x \in \{-7;-3\}$ [7].

Не завжди потрібно йти шляхом формального розкриття модуля, згідно його означення. Перш, ніж почати розв’язування, треба уважно подивитись, може знак виразу під якимось з модулів визначається однозначно і тоді співвідношення спрощується, а саме:

Приклад 2. $||x+2|+2| = 1$.

Розв’язання.

$|x+2|$ - невід’ємна величина, тому $||x+2|+2| > 0$, і за означенням модуля числа маємо $||x+2|+2| = |x+2|+2$.

Тоді $||x+2|+2| = 1 \Leftrightarrow |x+2| = -1 \Leftrightarrow x \in \otimes$.

Відповідь: $x \in \otimes$.

Приклад 3. $|||x-2|-1|-4|+5| = 4$.

Розв'язання.

$$\left|\left|\left||x-2|-1\right|-4\right|+5\right|=4 \Leftrightarrow \left|\left||x-2|-1\right|-4\right|+5=4 \Leftrightarrow \left|\left||x-2|-1\right|-4\right|=-1 \Leftrightarrow x\in\otimes.$$

Відповідь: $x\in\otimes$.

Приклад 4. $\left|x+5-|8-x|\right|+x=3$.

Розв'язання.

$$\left|x+5-|8-x|\right|+x=3 \Leftrightarrow \left|x+5-|8-x|\right|=3-x.$$

Ліва частина невід'ємна, тому $x\le 3$, тоді $8-x>0$ і $|8-x|=8-x$. Маємо:

$$\left|x+5-|8-x|\right|=3-x \Leftrightarrow |x+5-8+x|=3-x \Leftrightarrow |2x-3|=3-x \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x-3=3-x\\ 2x-3=-3+x\end{array}\right.\\ x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\end{array}\right..$$

Відповідь: $x\in\{0;2\}$.

Якщо «звільнитись» від знаків абсолютної величини, спираючись на алгебраїчний зміст модуля, то зручно «звільнитись» спочатку від внутрішніх модулів, а потім «відкрити» ті модулі, що залишились [7].

Приклад 5. $\left||2x+1|-2\right|=1$.

Розв'язання.

$$\left||2x+1|-2\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 0\\ |2x+1-2|=1\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0\\ |-2x-1-2|=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ |2x-1|=1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ |2x+3|=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=-1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}2x+3=1\\ 2x+3=-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

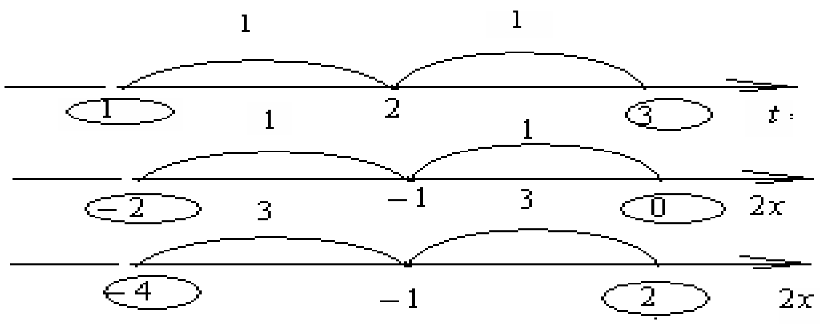
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2;\pm 1;0\}.$$

Відповідь: $x \in \{-2;\pm1;0\}$.

Для порівняння розв'яжемо приклад спираючись на геометричний зміст модуля числа:

Приклад 5. (2-ий спосіб)

$$\left||2x+1|-2\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1|=t\geq 0 \\ |t-2|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x+1|=1 \\ |2x+1|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x\in\{-4;\pm2;0\} \Leftrightarrow x\in\{-2;\pm1;0\}.$$



Розв'язати ці приклади також можна спираючись на властивість модуля.

Приклад 5. (3-ій спосіб)

$$\left||2x+1|-2\right|=1 \Leftrightarrow |2x+1|-2=\pm1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x+1|=1 \\ |2x+1|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=\pm1 \\ 2x+1=\pm3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-2 \\ 2x=0 \\ 2x=-4 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Окрім наведених вище способів розв'язання не треба забувати про те, що «модуль полюбляє квадрат»!

Приклад 6. $\left||2-x|+5\right|=x$.

$$\left||2-x|+5\right|=x \Leftrightarrow |2-x|+5=x \Leftrightarrow |x-2|=x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5\geq 0 \\ (x-2)^2=(x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq 5 \\ x^2-4x+4=x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ x=3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\otimes.$$

Який спосіб розв'язання вибирати – це справа того, хто розв'язує задачу, але ми радимо «бачити» всі можливі способи, тоді ви маєте змогу знайти дійсно раціональний у даному конкретному випадку спосіб розв'язання.

2.6. Розв'язання нерівностей, що містять модуль під знаком модуля. Використання геометричної інтерпретації модуля числа

Способи розв'язання таких нерівностей аналогічні способам розв'язання рівнянь з попереднього пункту. А саме: можна розпочати зі знаку виразу під зовнішнім модулем (можливо він визначений внаслідок невід'ємності внутрішнього модуля або виразу, з яким порівнюється зовнішній модуль); можна скористатись алгебраїчним змістом; можна спиратись на геометричний зміст модуля; нарешті, просто піднести обидві частини нерівності до квадрату (у цьому випадку не забудьте обумовити невід'ємність того, що підноситься до квадрату) [1].

Приклад 1. $||x-2|-2| \ge 3$.

Розв'язання.

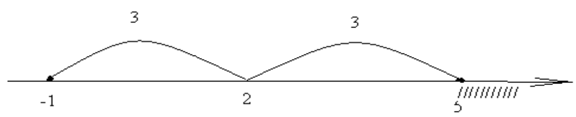
$$||x-2|-2| \ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ |x-4| \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ |x| \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4 \\ x-4 \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \le x < 4 \\ -x+4 \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-\infty;-3] \cup [3;\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 7 \\ x \le -3 \end{array}\right..$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$.

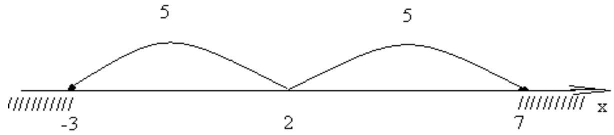
Розв'яжемо цей приклад, використовуючи геометричний зміст модуля числа:

$$||x-2|-2| \ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = t \ge 0 \\ |t-2| \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-2| \ge 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 7 \\ x \le -3 \end{array}\right..$$



Відповідь: $x \in (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$.



Приклад 2. $||x+1|-6| < x$.

Розв'язання.

$$\big||x+1|-6\big|<x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \big||x+1-6|\big|<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ |x-5|<x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 5 \\ x-5<x \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<5 \\ -x+5<x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 5 \\ \begin{cases} 0<x<5 \\ x>2{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x>2{,}5.$$

Відповідь: $x>2{,}5$.

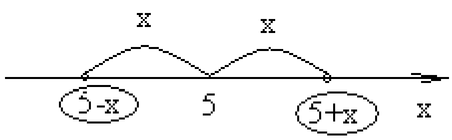
Приклад 2 можна розв’язати і використовуючи вже знайоме нам правило “модуль полюбляє квадрат”:

$$\big||x+1|-6\big|<x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ |x-5|<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-10x+25<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x>2{,}5.$$

Нагадуємо, що підносячи рівність чи нерівність до квадрату, треба переконатись, що ліва і права частини співвідношення невід’ємні!

Геометрична інтерпретація модуля «працює» не тільки при порівнянні модуля з відомим числом. Наприклад, останній приклад можна розв’язати наступним чином:

$$\big||x+1|-6\big|<x \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ |x-5|<x \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<5+x \\ x>5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x>2{,}5.$$

2.7. Рівняння і нерівності, що містять суму модулів, їх геометрична інтерпретація

Рівняння та нерівності вигляду

$$a_1|f_1(x)|+a_2|f_2(x)|+\ldots+a_n|f_n(x)| \gtrless g(x), \tag{1}$$

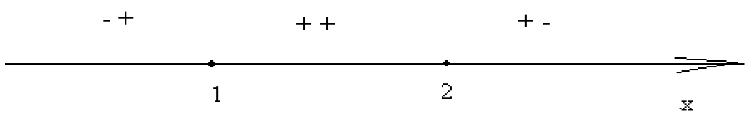
розв’язуються, як правило, ***методом інтервалів***. Тобто знаходять точки, в яких $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ змінюють знак. Ці точки поділяють область визначення на проміжки, на кожному з яких всі $f_i(x)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$ зберігають знак. Потім, використовуючи означення абсолютної величини, на кожному з цих проміжків розкривають модулі, що стоять у лівій частині (1). Таким чином переходять до розв'язання рівносильної сукупності систем, що не містять знак модуля [9].

Приклад 1. $|x-1|+|2-x|=x$.

Розв'язання.

Вирази під знаком модуля змінюють знак при переході через точки $x=1$ та $x=2$, відповідно. На інтервалах $x\le 1$, $1<x\le 2$ та $x>2$ знаки $(x-1)$ і $(x-2)$ зберігаються. Для їх визначення можна взяти будь-яке число з даних проміжків:

$(x-1)\,|_{x=0}<0$, $(2-x)\,|_{x=0}>0$; $(x-1)\,|_{x=1,5}>0$, $(2-x)\,|_{x=1,5}>0$; $(x-1)\,|_{x=10}>0$, $(2-x)\,|_{x=10}<0$;



За означенням модуля маємо рівняння на сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 1\\ -x+1+2-x=x\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\le 2\\ x-1+2-x=x\end{cases}\\ \begin{cases}x>2\\ x-1-2+x=x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 1\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\le 2\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x>2\\ x=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{1;3\}.$$

Відповідь: $x\in\{1;3\}$.

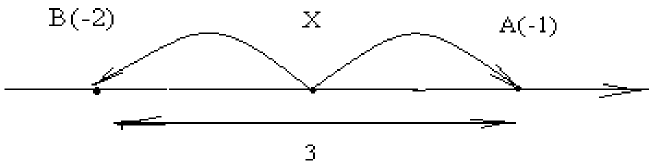
Коли розглядається рівняння виду $|f(x)|=|g(x)|$, то не треба забувати, що

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=\pm g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$$

В випадках, коли співвідношення, що розглядається має вигляд $|x-a|+|x-b| \underset{<}{>} c$ розв'язок можна спростити, якщо використати геометричну інтерпретацію модуля. Розглянемо приклад: $|x-1|+|x+2|=3$.

Маємо: $|x-1|$ – відстань між точками $X(x)$ та $A(1)$, $|x+2|$ – відстань між точками $X(x)$ та $B(-2)$. Тоді умова рівняння означає, що $AX+BX=3$. Де ж на числовій вісі треба розмістити $X(x)$, щоб це співвідношення виконувалось?

Спочатку на числовій вісі позначимо точки $A(1)$ та $B(-2)$:



Відстань між цими точками $AB=3$. Тобто маємо $AX+BX=AB$, що за аксіомою вимірювання відрізків можливо лише у випадку, якщо точка $X(x)$ розташована на відрізку $[AB]$. Отже, $x\in[-2;1]$.

Факти, що

● точка прямої тоді і тільки тоді належить відрізку прямої, коли сума відстаней від точки до кінців відрізка дорівнює довжині відрізка;

● точка прямої тоді і тільки тоді лежить зовні відрізка прямої, коли сума відстаней від точки до кінців відрізка перевищує довжину відрізка,

значно спрощують розв'язання задач, що містять суму модулів лінійних виразів.

Узагальнюючи маємо, що

$$\begin{cases}|x-a|+|x-b|=c\\ c=|a-b|\end{cases}\Leftrightarrow x\in[\min\{a;b\};\max\{a;b\}]; \qquad (2)$$

$$\begin{cases}|x-a|+|x-b|=c\\ c<|a-b|\end{cases}\Leftrightarrow x\in\otimes; \qquad (3)$$

$$\begin{cases}|x-a|+|x-b|=c\\ c>|a-b|\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\min\{a;b\}-l\\ x=\max\{a;b\}+l\end{array}\right.\\ l=\dfrac{c-|a-b|}{2}\end{cases}. \qquad (4)$$

де $\min\{a;b\}=\left[\begin{array}{l}a, a\le b\\ b, b\le a\end{array}\right.$, $\quad \max\{a;b\}=\left[\begin{array}{l}a, a\ge b\\ b, b\ge a\end{array}\right.$.

Геометричну інтерпретацію модуля числа можна використовувати і при розв'язанні нерівностей. Для цього корисно зафіксувати наступний висновок з (2)-(4):

$$|x-a|+|x-b|\ge|a-b|, \text{ при всіх } x\in R. \qquad (5)$$

Дійсно, якщо $x\in[AB]$, де $A(a)$, $B(b)$, то $AX+XB=|a-b|$,

$|x-a|+|x-b|=|a-b|$. Якщо ж $x \notin [AB]$, то $AX+XB>|a-b|$, $|x-a|+|x-b|>|a-b|$.

Тобто маємо: $|x-a|+|x-b|=|a-b|$, при $x \in [\min\{a;b\};\max\{a,b\}]$;

$$|x-a|+|x-b|>|a-b|, \text{ при } x \notin [\min\{a;b\};\max\{a,b\}]. \qquad (6)$$

Звернемо ще увагу на рівняння та нерівності виду

$$|kx-a|=|nx-b|, \quad |kx-a| \underset{<}{>} |nx-b|.$$

Їх можна розв'язувати методом інтервалів, можна піднести до квадрату, а можна використати одну із властивостей модуля ($|a|-|b|\ge 0 \Leftrightarrow a^2-b^2\ge 0$)[8].

2.8. Рівняння і нерівності, що містять різницю модулів, їх геометрична інтерпретація

Подивимось спочатку на вираз

$$|x-a|=|x-b|. \qquad (1)$$

У попередньому пункті ми розв'язували такого виду рівняння методом інтервалів, або піднесенням лівої та правої частин рівняння до квадрату.

$$|x-a|=|x-b| \Leftrightarrow a^2-2ax+x^2=b^2-2bx+x^2 \Leftrightarrow 2(a-b)x=a^2-b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ x\in R \end{cases} \\ \begin{cases} a\ne b \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Але $x=\dfrac{a+b}{2}$ – це середина відрізку AB, де $A(a)$, $B(b)$!

Спробуємо отримати цю відповідь виходячи з геометричної інтерпретації модуля (при $a\ne b$):

$|x-a|$ – відстань між точками $X(x)$ і $A(a)$,

$|x-b|$ – відстань між точками $X(x)$ і $B(b)$,

а умова (1) означає, що точка $X(x)$ рівновіддалена від кінців відрізку AB, тобто є серединою відрізка AB:

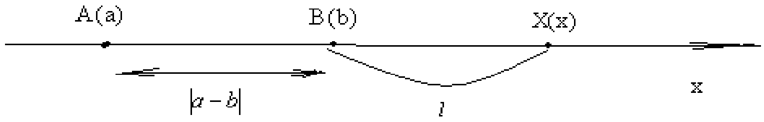
$$|x-a|=|x-b| \Leftrightarrow X=\frac{a+b}{2}, a\ne b. \qquad (2)$$

Тепер нехай

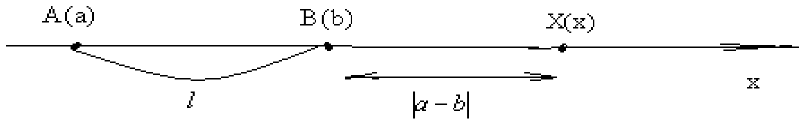
$$|x-a| = |x-b| + c,\ c > 0,\ a \neq b. \qquad (3)$$

Тоді $AX > XB$, і можливі графічні інтерпретації:

а) при $b > a$



при $b < a$



Позначивши $XB = l$, маємо

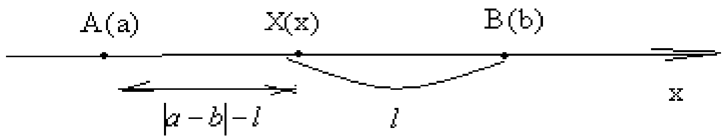
$$\begin{cases} AX = |a-b| + l \\ AX = l + c \end{cases},$$

де перша умова відповідає графічній інтерпретації, а другу маємо з (3). Звідки випливає, що $x \notin [AB]$ є розв'язком (3) лише в випадку $c = |a-b|$, а саме

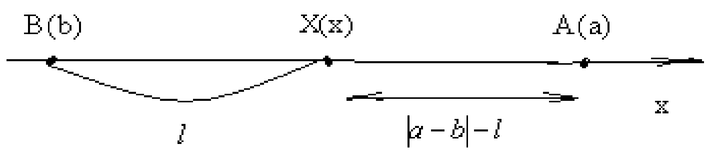
$x \geq b$, якщо $b > a$;

$x \leq b$, якщо $b < a$.

б) при $b > a$



при $b < a$



Тоді з графічної інтерпретації та умови задачі (3) отримаємо

$$\begin{cases} AX = |a-b| - l \\ AX = l + c \end{cases} \text{ і } l = \frac{|a-b| - c}{2}.$$

Тобто $x \in [AB]$ є розв'язанням у випадку $c < |a-b|$, а саме

$$x = b - \frac{|a-b| - c}{2}, \text{ якщо } b > a;$$

$$x = b + \frac{|a-b| - c}{2}, \text{ якщо } b < a.$$

У випадку $c > |a-b|$, очевидно, що (2) розв'язків не має, тобто $x \in \otimes$.

Таким чином:

$$\begin{cases} |x-a| = |x-b| + c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge b, \text{ÿêùî} \ \ : b \ge a \\ x \le b, \text{ÿêùî} \ \ : b \le a \end{array} \right. ; \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} |x-a| = |x-b| + c \\ 0 < c < |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b - l, \text{ÿêùî} \ \ : b > a \\ x = b + l, \text{ÿêùî} \ \ : b < a \end{array} \right. , \tag{4.2}$$

де $l = \frac{|a-b| - c}{2}$.

$$\begin{cases} |x-a| = |x-b| + c \\ c > |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in \otimes. \tag{4.3}$$

Доведемо наприклад співвідношення (4.1), виходячи з властивостей модуля. Дійсно, розглядаючи (4.1), маємо:

$|x-b| + |a-b| = |x-a| \Leftrightarrow |x-b| + |a-b| = |(x-b) - (a-b)|$, що згідно однієї з властивостей відповідає умові

$$(x-b)(a-b) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge b \\ b \ge a \end{cases} \\ \begin{cases} x \le b \\ b \le a \end{cases} \end{array} \right.$$, тобто (4.1) доведено.

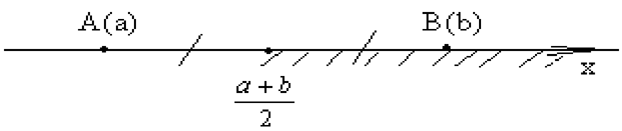
Спираючись на геометричну інтерпретацію співвідношень рівності (2) та (4), нескладно проаналізувати співвідношення нерівності:

$|x-a| > |x-b|$ (5) та $|x-a| \underset{<}{>} |x-b| + c, c > 0$. (6)

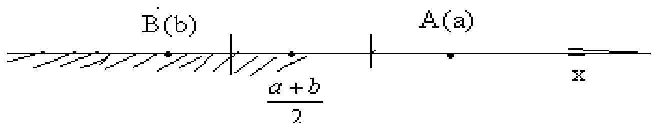
Дійсно, співвідношення $|x-a| = |x-b|$ означає рівність відрізків $AX = BX$, де $X(x)$, $B(b)$, $A(a)$. Тобто $X = \frac{a+b}{2}$, як середина відрізків AB.

Тоді (5) означає, що $AX > BX$ і

при $b > a$



при $b < a$



Маємо:

$$|x-a| > |x-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{a+b}{2}, \text{ÿêùî} \ : b > a \\ x < \dfrac{a+b}{2}, \text{ÿêùî} \ : b < a \end{array}\right. . \tag{7}$$

Узагальнюючи міркування можна зробити *висновок*, що

$$\begin{cases} |x-a| \geq |x-b| + c \\ c > |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in \otimes . \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} |x-a| < |x-b| + c \\ c > |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in R . \tag{8.2}$$

$$\begin{cases} |x-a| > |x-b| + c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in \otimes . \tag{8.3}$$

$$\begin{cases} |x-a| \geq |x-b| + c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-a| = |x-b| + c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow (x-b)(b-a) \geq 0 . \tag{8.4}$$

$$\begin{cases} |x-a| \leq |x-b| + c \\ c = |a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in R . \tag{8.5}$$

Співвідношення (8.1)-(8.2) доводяться виходячи з властивостей модуля [16].

2.9. Рівняння і нерівності з невідомими під знаком абсолютної величини (модуля)

При розв’язанні рівнянь і нерівностей з невідомою величиною під знаком модуля зручно користуватись наступними співвідношеннями.

1. Для рівнянь:

а) $|f(x)| = A, \quad A > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = A, \\ f(x) = -A; \end{array}\right.$

б) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right. \end{cases}$

в) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$

г) $|f| + |g| = |f + g| \Leftrightarrow f \cdot g \geq 0$.

Останнє співвідношення випливає з властивості

$$|x| + |y| \geq |x + y|.$$

2. Для нерівностей:

а) $|f(x)| \geq A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq A, \\ f(x) \leq -A; \end{array}\right.$

б) $|f(x)| \leq A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq A, \\ f(x) \geq -A; \end{array}\right.$

в) $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x); \end{array}\right.$

г) $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x); \end{array}\right.$

д) $\begin{array}{l} |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) < 0 \\ \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0. \end{array}$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$|x^2 - 4x + 2| = 1.$$

Розв'язування. Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 1, \\ x^2 - 4x + 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{3}, \\ x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{1, 3, 2 \pm \sqrt{3}\}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$|x^2 - 4x + 5| = \cos\frac{2}{3}\pi.$$

Розв'язування. Оскільки $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, то рівняння розв'язків не має (абсолютна величина від'мною бути не може) [16].

Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x^2 - 4x| = 2x - 8$

Розв'язування. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2x-8\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x=2x-8, \\ x^2-4x=-2x+8. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=0, \\ x^2-2x-8=0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4, \\ x=4, \\ x=-2. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4 .$$

Відповідь: $x\in\{4\}$.

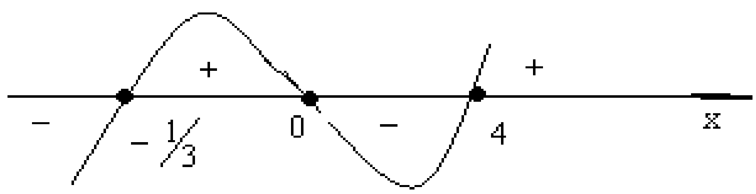
Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\left|x^2-4x\right|+\left|3x+1\right|=\left|x^2-x+1\right| .$$

Розв'язування. Оскільки $x^2-4x+3x+1=x^2-x+1$,то дане рівняння рівносильне нерівності

$(x^2-4x)(3x+1)\ge 0 \Leftrightarrow x(x-4)(3x+1)\ge 0$.

Застосовуючи метод інтервалів, знаходимо:



Відповідь: $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup[4;\infty)$ [11].

Приклад 5. Розв'язати рівняння

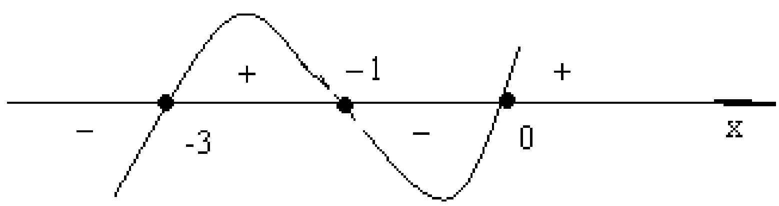
$$\left|x^2+3x\right|+\left|2x+2\right|=\left|x^2+x-2\right| .$$

Розв'язування. Перепишемо рівняння, скориставшись тотожною рівністю $\left|2x+2\right|=\left|-2x-2\right|$:

$$\left|x^2+3x\right|+\left|-2x-2\right|=\left|x^2+x-2\right|,$$

Оскільки виконується рівність $x^2+3x-2x-2=x^2+x-2$, то рівняння рівносильне нерівності

$(x^2+3x)(-2x-2)\ge 0 \Leftrightarrow 2x(x+3)(x+1)\le 0$.



Відповідь: $x \in (-\infty;-3] \cup [-1;0]$.

Приклад 6. Розв’язати нерівність

$$\left|\frac{x-3}{x^2+3x}\right| \le 1.$$

Розв’язування. Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2+3x} \le 1, \\ \dfrac{x-3}{x^2+3x} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2+3x} - 1 \le 0, \\ \dfrac{x-3}{x^2+3x} + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3-x^2-3x}{x^2+3x} \le 0, \\ \dfrac{x-3+x^2+3x}{x^2+3x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x} \le 0, \\ \dfrac{x^2+4x-3}{x^2+3x} \ge 0. \end{cases}$$

Розкладемо чисельники і знаменники лівих частин на множники, для цього шукаємо корені рівнянь:

$x^2+2x+3=0$; $\quad x^2+4x-3=0$; $\quad x^2+3x=0$.

Перше рівняння дійсних коренів не має, отже, вираз x^2+2x+3 додатній при всіх дійсних значеннях x, і тому обидві частини першої нерівності на цей вираз можна поділити.

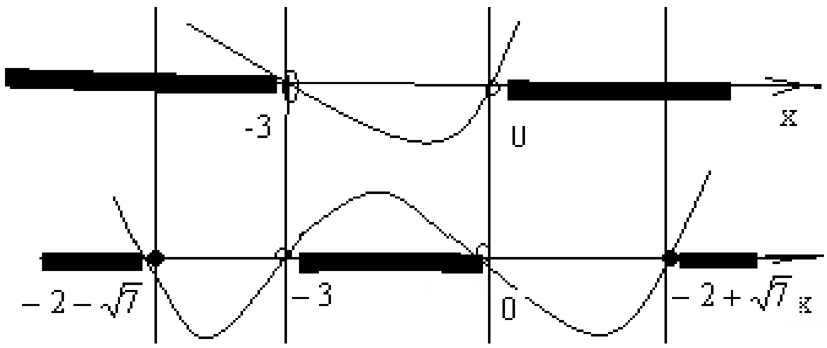
$x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x_1=-2-\sqrt{7}$; $x_2=-2+\sqrt{7}$;

$x^2+3x=0 \Leftrightarrow x_1=0$; $x_2=-3$.

Отже система нерівностей рівносильна такій:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x(x+3)} \ge 0, \\ \dfrac{(x-(-2-\sqrt{7}))(x-(-2+\sqrt{7}))}{x(x+3)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3) > 0, \\ x(x+3)(x-(-2-\sqrt{7}))(x-(-2+\sqrt{7})) \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne -3. \end{cases}$$

Нанесемо розв’язки кожної з нерівностей на паралельні осі координат і знайдемо перетин множин розв’язків:



Відповідь: $x \in (-\infty; -2-\sqrt{7}] \cup [-2+\sqrt{7}; \infty)$.

Приклад 7. Розв’язати нерівність

$$\left|\frac{x^2-4x}{x^2-1}\right| \geq 1.$$

Розв’язування. Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей:

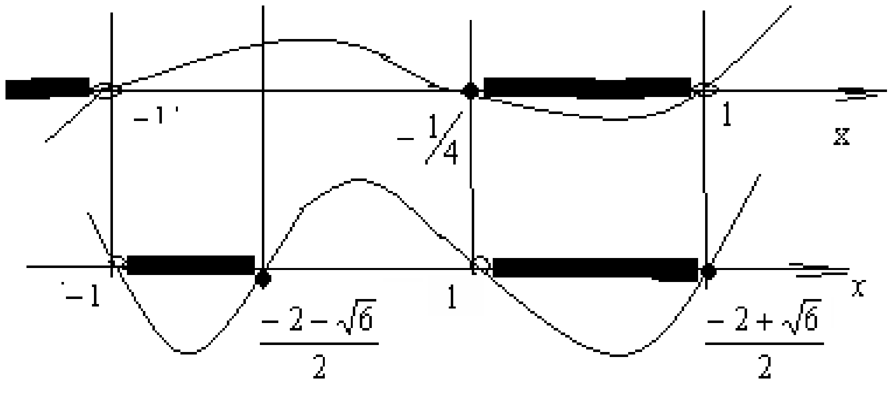
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4x}{x^2-1} \geq 1, \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2-1} \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4x}{x^2-1} - 1 \geq 0, \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2-1} + 1 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4x-x^2+1}{x^2-1} \geq 0, \\ \dfrac{x^2-4x+x^2-1}{x^2-1} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4x-1}{x^2-1} \leq 0, \\ \dfrac{2x^2-4x-1}{x^2-1} \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (4x-1)(x-1)(x+1) \leq 0, \\ 2(x-x_1)(x-x_2)(x-1)(x+1) \leq 0, \end{array}\right. \\ x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Тут x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $2x^2-4x-1=0$;

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}; \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

Нанесемо розв’язки кожної з нерівностей на окрему числову вісь з урахуванням умови $x \neq \pm 1$ і знайдемо об’єднання множин розв’язків.



Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{2-\sqrt{6}}{2}] \cup [\frac{1}{4}; 1) \cup (1; \frac{2+\sqrt{6}}{2}]$.

Приклад 8. Розв’язати нерівність

$$|x^2-4x+3| < -1.$$

Розв’язування. Нерівність розв’язків не має, бо абсолютна величина виразу завжди невід’ємна.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-9}\right| \ge -1$.

Розв'язування. Нерівність справджується в кожній точці, що належить області визначення, бо абсолютна величина виразу невід'ємна. Областю визначення даної нерівності є всі точки числової прямої, крім $x = \pm 3$.

Відповідь: $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;\infty)$ [13].

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\left|x^2-4x+1\right| < 2x+1$.

Розв'язування. Нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x^2-4x+1 < 2x+1, \\ x^2-4x+1 > -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x < 0, \\ x^2-2x+2 > 0. \end{cases}$$

Друга нерівність виконується при всіх $x \in R$, бо дискримінант рівняння x^2-2x+2 від'ємний. Тому система рівносильна нерівності

$x^2-6x<0 \Leftrightarrow x(x-6)<0$.

Відповідь: $x \in (0;6)$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність $x^2-3x+|x-3|>0$.

Розв'язування. Перепишемо нерівність у вигляді $|x-3|>-x^2+3x$ і застосуємо відповідну схему:

$$|x-3|>-x^2+3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3>-x^2+3x, \\ x-3<x^2-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3>0, \\ x^2-4x+3>0. \end{array}\right.$$

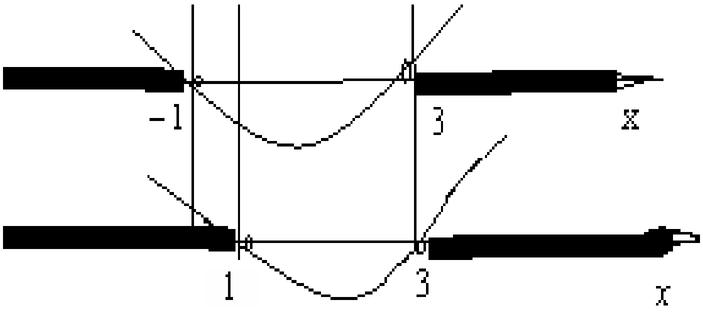
Знаходимо корені рівняння $x^2-2x-3=0$ та $x^2-4x+3=0$.

$x^2-2x-3=0$ - $x_1=-1$ та $x_2=3$;

$x^2-4x+3=0$ - $x_3=1$ та $x_4=3$.

На основі знайдених коренів маємо

$$\left[\begin{array}{l} (x+1)(x-3)>0, \\ (x-1)(x-3)>0. \end{array}\right.$$



Наносимо розв'язки кожної з нерівностей на окрему числову вісь і знаходимо об'єднання множин розв'язків.

Відповідь: $x \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$.

Приклад 12. Розв’язати нерівність

$$\left|x^2 - 4x + 3\right| > \left|2x + 5\right|.$$

Розв’язування. Оскільки обидві частини нерівності набувають невід’ємних значень, то піднесення обох частин до квадрату є рівносильним перетворенням. Отже, одержимо нерівність

$$(x^2 - 4x + 3)^2 > (2x - 5)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)^2 - (2x - 5)^2 > 0.$$

Розкладаємо ліву частину на множники як різницю квадратів

$$(x^2 - 4x + 3 - 2x + 5)(x^2 - 4x + 3 + 2x - 5)^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 2x - 2) > 0.$$

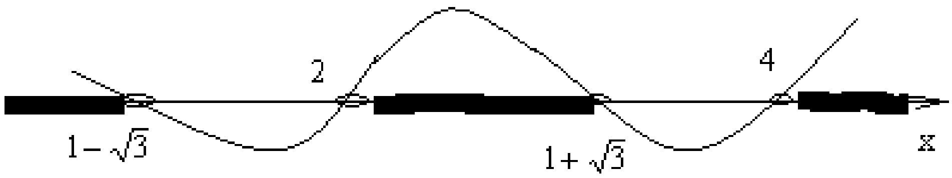
Розкладемо кожен із квадратних тричленів на множники, попередньо знайшовши корені рівнянь:

$x^2 - 6x + 8 = 0$ - $x_1 = 2$, $x_2 = 4$;

$x^2 - 2x - 2 = 0$ - $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$;

$(x - 2)(x - 4)(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3})) > 0$.

Записуємо розвя’зки одержаної нерівності, користуючись методом інтервалів.



Відповідь: $x \in (-\infty;1 - \sqrt{3}) \cup (2;1 + \sqrt{3}) \cup (4;\infty)$.

Ми розглянули найпростіші схеми, які застосовуються при розв’язанні рівнянь і нерівностей з невідомими під знаком абсолютної величини.

У складних випадках для розв’язання таких рівнянь і нерівностей застосовують так званий метод інтервалів. Розглянемо цей метод стосовно вказаних задач.

Нехай ми маємо рівняння (нерівність) вигляду

$$\left|f_1(x)\right| \pm \left|f_2(x)\right| \pm \ldots \pm \left|f_n(x)\right| + g(x) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

Щоб звести подібні у такому рівнянні (нерівності), потрібно спочатку позбутися знаків модуля, для цього і служить ***метод інтервалів***. Суть цього методу у такому.

1. Знаходимо область визначення рівняння чи нерівності і наносимо ці проміжки на числову вісь.
2. Знаходимо дійсні корені сукупності рівнянь (точки, в яких вирази, що стоять під знаками абсолютної величини, обертаються на нуль)

   $$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots. \\ f_n(x) = 0, \end{array}\right.$$

   які належать області визначення. Нехай це будуть числа $x_1, x_2, ..., x_i$.
3. Відкладаємо $x_1, x_2, ..., x_i$ на області визначення на числовій осі, і поділяємо таким чином область визначення на проміжки. Неперервна функція, а ми розглядаємо лише такі функції, на області визначення може змінювати знак, лише при обертанні на нуль, або при переході від одного проміжку визначення до іншого, тому на кожному з утворених проміжків вирази $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ зберігають сталі знаки.
4. Визначаємо знаки кожного з виразів $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ на кожному з утворених проміжків і будуємо таблицю знаків.
5. На кожному з утворених проміжків початковому рівнянню (нерівності) ставимо у відповідність рівносильне рівняння (нерівність). Для цього досить розкрити на розглядуваному проміжку знаки абсолютної величини за простим правилом: якщо на даному проміжку вираз $f_i(x), (i = 1,2,...,n)$ додатній, то знак модуля заміняється звичайною дужкою, якщо ж від’ємний, то при знятті знака модуля потрібно весь вираз домножити на мінус одиницю. До кожного з таким чином утворених рівнянь (нерівностей) дописуємо нерівність, що задає розглядуваний проміжок і записуємо це як

систему. У результаті матимемо сукупність систем, розв'язки яких і будуть розв'язком початкового рівняння (нерівності).

Зауваження. Точки розбиття (корені сукупності рівнянь), якщо вони належать області визначення, потрібно обов'язково включати в один із розглядуваних проміжків [10].

Розглянемо приклади.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $|x^2-4x|=|x+4|-3x+1$.

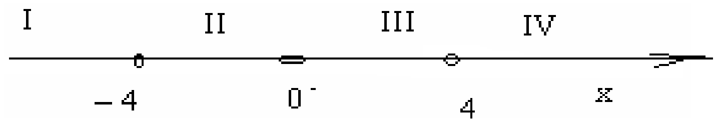
Розв'язування. Перепишемо рівняння так

$$|x^2-4x|-|x+4|+3x-1=0.$$

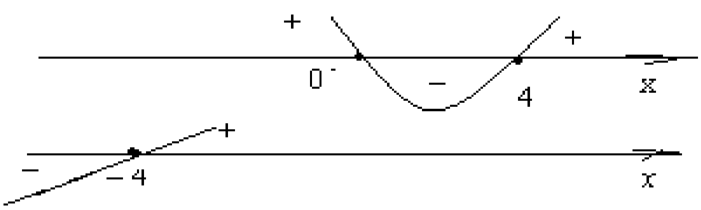
1. Область визначення даного рівняння – всі дійсні значення x.
2. Визначимо точки, в яких вирази, що стоять під знаком модуля обертаються на нуль, тобто розв'яжемо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x=0, \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-4)=0, \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

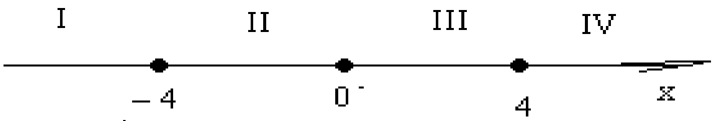
3. Наносимо ці точки на числову пряму:



4. Визначаємо знаки виразів x^2-4x та $x+4$ на кожному з утворених проміжків:



Будуємо таблицю знаків:



x^2-4x	+	+	–	+
$x+4$	–	+	+	+

З аналізу таблиці видно, що при розгляді рівняння I і IV проміжки можна розглядати разом, бо чергування знаків виразів на них однакове.

5. Розглядаємо утворені проміжки. Перший проміжок зліва $x \le -4$. Розкриваємо знаки модулів, користуючись таблицею знаків:

$$\left|x^2-4x\right| = x^2-4x\,; \quad |x+4| = -(x+4)\,; \quad (-|x+4| = x+4)\,.$$

Таким чином, на першому проміжку маємо

$$\begin{cases} x \le -4, \\ x^2-4x+x+4+3x-1=0. \end{cases}$$

Діючи аналогічно, одержуємо інші системи сукупності:

$$\begin{cases} -4 < x \le 0; x \ge 4 \\ x^2-4x-(x+4)+3x-1=0; \end{cases} \quad \text{(ці проміжки розглядаємо разом),}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 4, \\ -(x^2-4x)-(x+4)+3x-1=0. \end{cases}$$

Розв’язуємо одержану сукупність систем

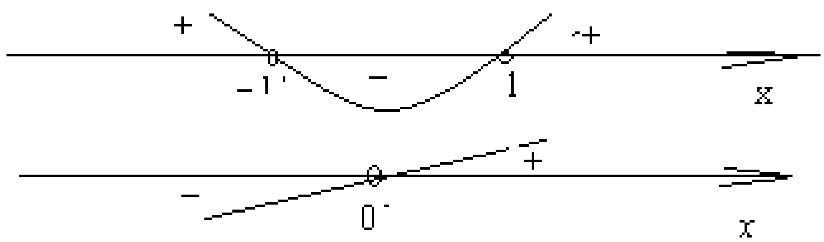
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -4, \\ x^2+3=0, \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le x \le 0; x \ge 4, \\ x^2-2x-5=0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 4, \\ -x^2+6x-5=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \Pi \not\subset, \\ \begin{cases} -4 \le x \le 0; x \ge 4, \\ x = 1 \pm \sqrt{6}, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 4, \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{6}, \\ \begin{cases} 0 < x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{6}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \Pi \{1-\sqrt{6}; 1\}$.

Приклад 14. Розв’язати нерівність $\left|x^2-1\right| > 2|x| + x - 1$.

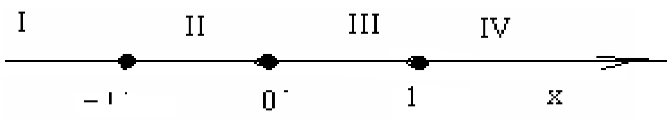
Розв’язування. Перепишемо нерівність так: $\left|x^2-1\right| - 2|x| - x + 1 > 0$.

Область визначення нерівності – всі дійсні значення x. Визначаємо точки, в яких вирази, що знаходяться під знаком абсолютної величини, обертаються на нуль та знаки цих виразів на одержаних проміжках.



$$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=-1; x_2=1; x=0\,.$$

Будуємо таблицю знаків:



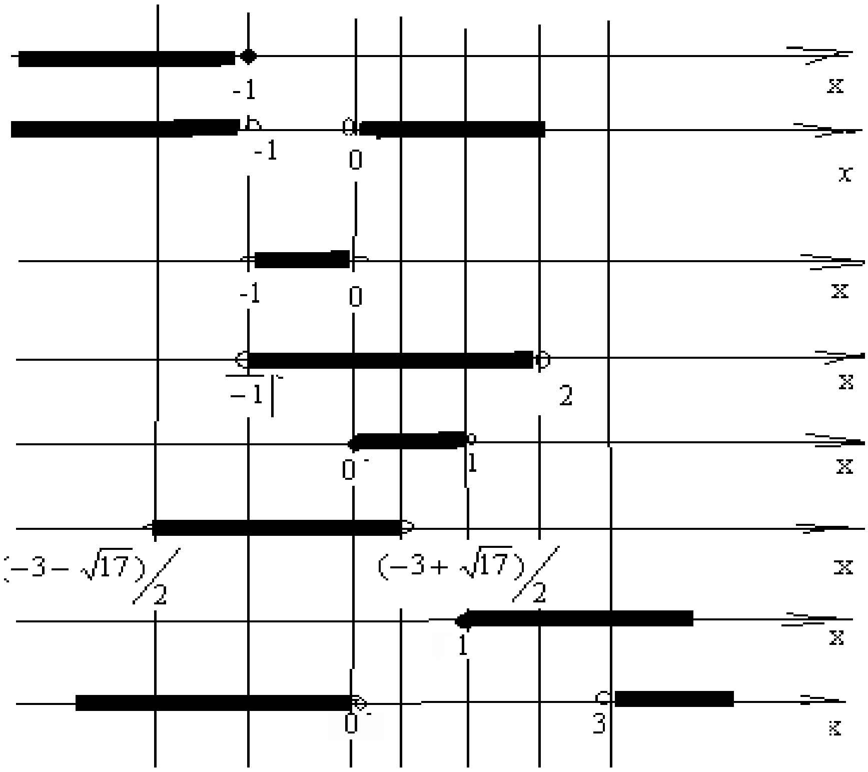
x^2-1	+	−	−	+
x	−	−	+	+

Зауважимо, що у цьому випадку потрібно кожен проміжок розглядати окремо.

Складаємо сукупність систем і розв'язуємо їх

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1,\\ x^2-1+2x-x+1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<0,\\ -x^2+1+2x-x+1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<1,\\ -x^2+1-2x-x+1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1,\\ x^2-1-2x-x+1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1,\\ x^2+x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<0,\\ x^2-x-2<0,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<1,\\ x^2+3x-2<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1,\\ x^2-3x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1,\\ x(x+1)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<0,\\ (x+1)(x-2)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<1,\\ (x-(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}))(x-(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}))<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1,\\ x(x-3)>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-1),\\ x\in(-1;0),\\ x\in[0;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}),\\ x\in(3;\infty).\end{array}\right.$$



Відповідь: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}) \cup (3;\infty)$ [2].

РОЗДІЛ 3
ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА АНАЛІЗ ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

Під педагогічним експериментом традиційно розуміють заздалегідь сконструйований та реалізований процес навчання, що дає можливість спостерігати педагогічні явища в контрольованих умовах. Важливими особливостями педагогічного експерименту є можливість внесення до процесу навчання змін стосовно змісту чи структури навчального матеріалу або методів навчання (відповідно до завдань експерименту), створення умов для виявлення різноманітних аспектів організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів, урахування якісних та кількісних результатів навчання.

Отже, експеримент – це науково поставлений дослід у галузі навчальної чи виховної робота, вивчення обстежуваного педагогічного явища в спеціально створених і контрольних умовах.

Педагогічний експеримент планується, як правило, з метою визначення або уточнення основних напрямів здійснення наукового дослідження, дослідної перевірки його результатів, ефективності розробленої методичної системи.

Для вивчення практичного значення виконаних досліджень був проведений педагогічний експеримент у Християнівській загальноосвітній школі І – ІІІ ступенів (с. Христинівка, Ізяславського району, Хмельницької області) На початку навчального року в експериментальному та контрольному класах були проведені зрізи сформованості вмінь розв’язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля. Результати проведеної роботи представлені у таблиці 3.1. Як свідчать дані таблиці 3.1 принципових відмінностей у знаннях, уміннях і навичках у учнів контрольного і експериментального класів не спостерігалося. На основі даних про індивідуальні особливості кожного учня, про причини помилок, про стан особистісно-орієнтовного навчання учнів розв’язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля. Для цього використовувалася система особистісно-орієнтовних вправ.

Таблиця 3.1

Результати експериментальної роботи.

Види вправ та завдань	Контрольний клас	Експериментальний клас
Означення модуля числа $\lvert a \rvert$	85,1%	84,7%
Геометричний зміст модуля	70,2%	78,3%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = A, A > 0$	87,5%	87,9%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = g(x)$	68,6%	67%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = \lvert g(x) \rvert$	75%	77,1%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert \geq A$, $\lvert f(x) \rvert \leq A$	83,9%	82,3%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert \geq g(x)$, $\lvert f(x) \rvert \leq g(x)$	72,4%	69,9%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert < \lvert g(x) \rvert$	64,7%	64,8%

Для формування необхідного виду пізнавальної діяльності у процесі навчальної роботи використовувалися структурно логічні схеми, які дозволяли здійснювати особистісно-орієнтований підхід до задоволення особистісних потреб учнів. Так, для учнів, які не засвоювали з першого разу відповідні прийоми ми використовували багаторазове пояснення на уроці, поєднання різних форм роботи учнів на різних етапах уроку тощо.

У кінці навчального року було проведено контрольний зріз, результати якого представлено у наступній таблиці №2.

Таблиця 3.2

Результати контрольного зрізу на кінець навчального року.

Види вправ та завдань	Контрольний клас	Експериментальний клас
Означення модуля числа $\lvert a \rvert$	88,4%	96%
Геометричний зміст модуля	85,3%	89,9%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = A, A > 0$	89,2%	91,8%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = g(x)$	78,7%	92%
Розв'язування рівнянь виду $\lvert f(x) \rvert = \lvert g(x) \rvert$	82%	89,5%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert \geq A$, $\lvert f(x) \rvert \leq A$	85,6%	90,4%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert \geq g(x)$, $\lvert f(x) \rvert \leq g(x)$	78,8%	87,9%
Розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x) \rvert < \lvert g(x) \rvert$	77,5%	85,6%

Аналіз даних таблиць дає підстави для висновку про те, що особистісна зорієнтованість навчального процесу в експериментальних класах обумовила підвищення результативності в оволодінні методами розв'язання рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, хоча для остаточного висновку про це потрібна подальша експериментальна оцінка отриманих результатів. Проте наведені дані переконливо доводять ефективність методики розв'язування рівнянь та нерівностей, використання якої забезпечило не лише поліпшення засвоєння знань на середньому та достатньому рівнях, а й сприяло формуванню навичок розв'язування більш складних задач, творчої діяльності учнів та вмінь працювати з додатковою літературою.

Здійснена експериментальна перевірка запропонованого змісту і методики проведення уроків, спостереження за діяльністю учнів, бесіди з вчителями та учнями дозволили зробити висновок про правильність обрання форм і методів, використаних під час проведення уроків.

ВИСНОВКИ

У результаті написання магістерської роботи була досягнута поставлена мета дослідження, а саме, розв'язані наступні завдання:

– проведений аналіз програм, виявлені взаємозв'язки між темами;
– систематизовані відомості про розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля в шкільному курсі алгебри старшої школи;
– конкретизовані вимоги до уявлень, знань, умінь та навичок учнів;
– запропонувано методичні рекомендації щодо розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля;
– підібрана диференційована система вправ, подані приклади розв'язування рівнянь та нерівностей різної складності.

Результати виконаних досліджень можна сформулювати у вигляді таких коротких висновків:

1. Проведено і теоретично обґрунтовано методичну систему по навчанню учнів розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, вивчення стану впровадження такої системи навчання в практику роботи шкіл, проведення експериментальних досліджень.

2. На основі аналізу підручників, нових методичних посібників, посібників для вищих навчальних закладів, передового педагогічного досвіду проаналізовано різні способи розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля.

3. Магістерська робота розкриває методичне формулювання різних типів мислення через дидактику завдань на модуль числа. У роботі описуються поняття модуля числа, його властивості, геометричний зміст та містяться різні методично-теоретичні розробки розв'язування завдань з абсолютною величиною, відповіді-поради та повторення матеріалу. У процесі написання роботи вивчались такі методи розв'язування: за допомогою означення, алгебраїчного та геометричного змісту модуля, піднесення до квадрату,

метод інтервалів. До кожного способу розв’язання та різного методу, наведено відповідний приклад і показано різницю між різними способами отримання розв’язку.

До пунктів роботи подано необхідний теоретичний матеріал, на якому ґрунтується розв’язування відповідних вправ. Завдання на поняття про модуль числа розглядаються від найпростіших до завдань рівня вступних іспитів до вищих навчальних закладів та олімпіад з математики.

Теоретичний аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури, спостереження за процесом навчання учнів розв’язування рівнянь та нерівностей з модулями за допомогою різних методів дозволили встановити, що нині діюча методика не в повній мірі відповідає сучасним вимогам.

У ході педагогічного експерименту була випробувана і виявилася ефективною система вправ для особистісно-орієнтованого навчання учнів розв’язувати рівняння і нерівності з модулями, що вказує на правильність гіпотези, висунутої в процесі досліджень. Перевірка ефективності здійснювалась шляхом порівняння результатів виконання контрольних завдань учнями. Аналіз даних дає підстави для висновку про те, що особистісна зорієнтованість навчального процесу обумовила підвищення результативності в оволодінні методами розв’язання рівнянь і нерівностей, що містять змінну під знаком модуля.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова – К.: Факт, 2004. – 256 с.

2. Апостолова Г. В. Я сам! / Апостолова Г. В. – К.: Факт, 1997. – 204 с.

3. Барановська Г. Г. Практикум з математики. Алгебра / Г. Г. Барановська, В. В. Ясінський – К.: "КПІ", ч.1 1997, ч.2 1998. – 190 с.

4. Барановська Г. Г. Практикум з математики. Показникова та логарифмічна функції / Г. Г Барановська., В. В. Ясінський – К.: "КПІ", 1998. – 124 с.

5. Барановська Г. Г. Практикум з математики. Тригонометрія / Г. Г. Барановська, В. В. Ясінський – Н.: Вирій, 1997. – 121 с.

6. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства. – Изд. 2-ге, переработ / М. И. Башмаков – М.: «Наука», 1976. – 95 с.

7. Белешко Д.Т. Методика розв'язування нестандартних математичних задач. Частина 1 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 127с.

8. Белешко Д.Т. Методика розв'язування нестандартних математичних задач. Частина 2 / Д.Т. Белешко, М.А. Віннічук, О.В. Крайчук. – Х.: Вид. група "Основа", 2017. – 78с.

9. Гайдуков И. И. Абсолютная величина / И. И. Гайдуков – М.: Просвещение, 1964. – 96 с.

10. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич – М.: Просвещение, 1982. – 271 с.

11. Голубев В. И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике / В. И. Голубев – Львов: Журнал "Квантор", 1991. – 97 с.

12. Вавилов В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В. В. Вавилов – М.: Наука, 1987. – 273 с.

13. Завало С. Т. Рівняння і нерівності / С. Т. Завало – К.: «Рад. шк.», 1973. – 383 с.

14. Истер А. С. Решебник основних конкурсних задач по математике: учеб. пособие. / А. С. Истер.– К.: А.С.К., 2004. – 569 с.

15. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. / Т. В. Коваль. – Тернопіль: Мандрівець, 2008. – 80с.

16. Крайчук Олександр Універсальний метод розв'язування нерівностей / Олександр Крайчук Олена Крайчук // Нова педагогічна думка. № 1 (21), 2000. – С.77–85.

17. Крайчук О.В. Елементи математичного моделювання у шкільному курсі математики // Наукові записки.Серія «Психологія і педагогіка» - Острог, 2002. – Вип.3. – С.475–478.

18. Крайчук О.В. Роль і місце тестового опитування при діагностиці результатів навчання математики / О.В. Крайчук, Н.В. Синицька // Наука, освіта, суспільство очима молодих: матеріали VIII Міжнародної науково–практичної конференції студентів та молодих науковців. Частина 1. Психолого-педагогічний напрям. – Рівне: РВВ РДГУ. – 2015. – С. 140–142

19. Кравцев С. В. Методы решения задач по алгебре от простых до самих сложных / С. В. Кравцев, Ю. Н. Макаров, В. Ф. Максимов, М. И. Нараленков, В. Г. Чирский – М.: Издательство «Екзамен», 2007. – 554 с.

20. Кравчук В. Р. Алгебра. Пробний підручник для 10 класу шкіл, ліцеїв гімназій фізико-математичного профілю / В. Р. Кравчук, В. М. Козира, Я. Ф. Гап'юк, Я. Т. Гринчишин. – Тернопіль: «Підручники і посібники», 1997. – 256 с.

21. Концепція розвитку загальної середньої освіти // Освіта в Україні. – 2000. – № 3. – С. 8 – 11.

22. Концепція профільного навчання в старшій школі. Електронний ресурс. Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/37784/

23. Про Державну національну програму «Освіта» (Україна XXI століття). Електронний ресурс. Режим доступу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/896-93-%D0%BF

24. Роганін О. М. Алгебра та початки аналізу в таблицях та схемах / О. М. Роганін – Х.; Торсінг плюс, 2007. – 112 с.

25. Сільвестрова І. А. Навчаємось розв’язувати рівняння і нерівності / І. А. Сільвестрова, М. С. Фурман – Х.: Основа, 2005. – 271 с.

26. Финкельштейн Л. П. Задачи с абсолютной величиной (модулем) / Л. П. Финкельштейн – К.: Вища школа, 1993. – 75 с.

27. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства / Л. И. Шарова – К.: Вища школа, 1981. – 279 с.

28. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

29. Шваєцький М. Г. Абсолютні величини в шкільному курсі математики. Посібник для вчителів / М. Г. Шваєцький – К.: Радянська школа, 1967. – 248 с.

30. Якісна освіта – запорука самореалізації особистості // Освіта України. – 2007. – № 59. –С.2–4.

31. Яков Л.К. Рівняння. / Л.К.Яков. – К.: Рад. школа, 1968. – 346 с.

32. Янченко Г., Кравчук В. Математика. Підручник для 6 класу. – Терногопіль: Підручники і посібники, 2006. –326с.

33. Яремчук В. П. Алгебра, програма, типові задачі / В. П. Яремчук, В. В. Ясінський. – К.: "КПІ", 1996. – 179 с.

34. Ярмаченко М. Д. Педагогічний словник. / М. Д. Ярмаченко – К.: Педагогічна думка, 2001. – 516 с.

35. Ясінський В. В. Задачи по математике / В. В. Ясінський – К.: "КПІ", 1992. – 265 с.

36. Ясінський В. В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський – К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2003. – 372 с.

37. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. / В.А. Ясінський.– Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

38. Infolight - інформаційно-аналітичний центр. – Режим доступу: http://infolight.org.ua/content/rezultati-zno-z-matematiki-v-2013-roci-rozriz-rayoniv

ДОДАТОК

Усні вправи

1. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|x-3|<2.$$

2. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|x+2|\geq 3.$$

3. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|4-x|<1.$$

4. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|x+1|\geq 4.$$

5. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|x-1|>0.$$

6. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|x+3|<0.$$

7. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|x+1|>0.$$

8. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|x-4|<0.$$

9. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|x-6|\geq 0.$$

10. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|2x+9|\geq 0.$$

11. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|3-x|\leq 0.$$

12. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|2+x| \le 0.$$

13. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|5-x| \le 0.$$

14. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|4+x| \le 0.$$

15. Знайти найбільше від'ємне цілочисельне рішення нерівності:

$$|2x+9| < -1.$$

16. Знайти найменше додатнє цілочисельне рішення нерівності:

$$|4x+1| > -2.$$

17. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$|2x+3| = |4x-1|.$$

18. Знайти найменший корінь рівняння:

$$|7-x| = |5+2x|.$$

19. Знайти корінь рівняння:

$$|x-2| = |3-x|.$$

20. Знайти корінь рівняння:

$$|x+3| = -|x+2|.$$