Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)
на тему
«Методика розв’язування стереометричних задачна побудову з використанням ІКТ»

Виконав: студент II курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності 041 Середня освіта (Математика)
Кузьмич Олександр Сергійович
____

Керівник: канд. пед. наук, доц.
Коваль Володимир Васильович
____

Рецензент: доц. кафедри вищої математики
Демчик Світлана Петрівна
____

Рівне-2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Геометричні задачі на побудову, можливо, найдавніші математичні завдання. Найважливіші аксіоми геометрії, сформульовані основоположником наукової геометричної системи Евклідом близько 300 р. до н.е., ясно показують яку роль зіграли геометричні побудови у формуванні геометрії. Комусь вони зараз можуть здатися не дуже цікавими і потрібними, адже сучасні технічні пристрої можуть зробити всі ці побудови швидше і точніше, ніж будь-яка людина, а заодно зможуть виконати і такі побудови, які просто неможливо виконати за допомогою циркуля і лінійки.

Геометричні побудови є досить істотним елементом вивчення геометрії. Однак, аналіз змісту шкільної програми з математики дозволив виявити ряд недоліків у навчанні школярів:

1. Намітилася чітка тенденція до скорочення кількості задач на побудову в шкільному курсі математики. Це пояснюється тим, що значно звужена роль задач на побудову, яка відповідає цілям навчання, таким як розвиток мислення і виховання учнів, і виявляється у вигляді впливу на мислення учнів, в першу чергу на логічне.

2. Знання учнів з даної теми нерідко носять формальний характер, спостерігається відсутність структурності. Так, при вивченні задач на побудову єдине, що вимагає вчитель - це знання відповідних алгоритмів побудов. При цьому не пояснюється, як отриманий даний алгоритм. Тому учень змушений запам'ятовувати матеріал без розуміння.

3. На даний момент в школі недостатньо приділяється уваги розгляду таких основних методів розв'язування задач на побудову як метод перетворень, алгебраїчний метод, метод геометричного місця точок.

4. В учнів немає чіткого уявлення про етапи розв'язування задач на побудову: аналіз, побудова, доведення та дослідження, які точно відповідають етапам будь-якого логічного міркування. Практично не приділяється увага одному з важливих етапів - дослідження, в якому учні часто не бачать сенсу,

незважаючи на те, що він, у свою чергу, є хорошим засобом розвитку логічного мислення.

Ефективність засвоєння знань учнями за умов широкого впровадження засобів нових інформаційних технологій навчання (НІТН) при вивченні геометрії в значній мірі залежить від педагогічних програмних засобів (ППЗ), що дозволяють поєднати високі обчислювальні можливості при дослідженні різноманітних об’єктів з унаоченням результатів на всіх етапах розв’язування задач.

Використання спеціалізованих програмних засобів надає можливість учневі розв’язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату (наприклад, обчислювати об’єми та площі поверхонь довільних многогранників, не знаючи формул для їх обчислення).

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, орієнтованих на використання при вивченні математики. Це такі програми як DERIVE, EUREKA, GRAN1, Maple, MathCAD, Mathematika, MathLab, Maxima, Numeri, Reduce та інші. Але, програм, призначених для підтримки шкільного курсу геометрії розроблено досить мало. Більшість з наявних програмних засобів означеного типу мають англомовний інтерфейс та розроблені без врахування особливостей програми шкільного курсу геометрії в Україні. До найбільш розповсюджених програмних засобів такого типу належать зарубіжні пакети CABRI та SketchPad, що відносяться до так званих середовищ динамічної геометрії.

ППЗ GRAN-3D надає учням змогу оперувати моделями просторових об’єктів, що вивчаються в курсі стереометрії.

Об'єктом дослідження є геометричні побудови у просторі.

Предметом дослідження є основні методи розв’язування задач на побудову в просторі з використанням ІКТ.

В основу дослідження була покладена **гіпотеза:** просторова уява учнів та їх математична підготовка при вивченні даної теми покращаться, за умови доцільно розробленої системи проведення уроків, а особливо уроків з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Метою дипломної роботи є ознайомлення з методикою викладання даної даної теми з використанням ІКТ в шкільному курсі геометрії. Систематизація теоретичних відомостей та підбір практичних завдань.

Для досягнення мети було поставлено такі **завдання**:

- опрацювати навчально-методичну літературу по даній темі;
- висвітлити основні методи розв'язання задач на побудову;
- показати застосування даних методів до розв'язування стереометричних задач;
- показати застосування програми Gran 3D до розв'язування стереометричних задач.

В дипломній роботі використані наступні **методи дослідження**:

- Теоретичні: аналіз наукової літератури з проблеми дослідження.
- Емпіричні: вивчення досвіду роботи вчителів; спостереження за навчальним процесом**;** статистична обробка отриманих результатів; аналіз підсумків експеременту.

Теоретичне значення дослідження полягає у виявленні та запобіганні певних помилок під час вивчення даної теми.

Практичне значення дослідження полягає у розробці методики проведення уроків з даної теми у 10-11 класах.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1.1. Проблема навчання розв'язування задач в психолого-педагогічній літературі

У науковій літературі немає єдиного трактування поняття «задача», хоча воно вживається в різних наукових сферах. Розглянемо та проаналізуємо різні означення поняття «задача».

У психолого-педагогічній літературі існує два основних підходи до означення поняття «задача», яка розглядається як:

- ситуація (проблемна), в якій повинен діяти суб'єкт. У такому розумінні поняття вживається тоді, коли вивчається не сама задача, а процес її розв'язування;

- деяка реальна система, що існує незалежно від суб'єкта дії.

Л. Фрідман розглядає задачу як модель проблемної ситуації, вираженою за допомогою знаків певної природної або штучної мови.

Ю. Калягін під поняттям задачі розуміє стаціонарну ситуацію деякої цілісної системи, що складається із взаємопов'язаних деякими властивостями і відношеннями елементів. Коли суб'єкт вступає в контакт з цією ситуацією і хоча б один елемент або властивість чи відношення виявляються невідомими по відношенню до даного суб'єкта, то така ситуація стає проблемною. Якщо при цьому перед суб'єктом ставиться мета знайти цей невідомий компонент, то проблемна ситуація стає задачею.

С. Музиченко за основу трактування поняття «задача» бере об'єктивну, а не суб'єктивну відсутність інформації про той чи інший компонент системи. Водночас варіація невідомих компонентів дає можливість одній і тій самій стаціонарній ситуації бути джерелом різних задач. Під поняттям «системи», яка лежить в основі означення задачі, розуміють «дещо ціле, в 8 якому поєднані закономірно розташовані, такі, що знаходяться у взаємозв'язку, частини».

Отже, в дидактиці та методиці задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб'єкта діяльності, а у психології – як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта. Ми будемо керуватися означенням поняття «задача» С. Музиченко.

Задача має чотири основні функції: навчальну, розвивальну, виховну і контролюючу. Жодна із названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділити провідну функцію і добиватись її реалізації в першу чергу. Кожна з основних функцій важлива в загальній системі навчання, але найбільша увага приділяється розвивальній функції.

Охарактеризуємо кожну з функцій задачі.

Навчальна функція полягає в формуванні в учнів системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах навчання. За допомогою системи задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й на етапі мотивації переконуються у потребі здобуття нових знань; у процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальна функція задач спрямовується на розвиток мислення школярів, на формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння математизувати ситуацію тощо.

Виховна функція задач спрямовується на формування в учнів наукового світогляду, вона сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція задач полягає у встановленні рівня навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом.

До структури системи задач, які реалізують навчальні, розвивальні і виховні функції, повинні входити:

1) задачі із провідною навчальною функцією, до яких віднесено:

• пропедевтичні (на спостереження ознак і властивостей фігур; співставлення дослідних фактів);

• репродуктивні (на підведення фігури під поняття; зображення фігур; виведення наслідків і умов; взаємне розміщення фігур);

• тренувальні (на застосування виведених формул, теорем; знаходження точкових множин; визначення співвідношень між елементами фігур);

2) задачі із провідною розвивальною функцією, до яких віднесено:

• на виділення характерних ознак і властивостей;

• переосмислення фігур;

• аналіз, синтез, узагальнення;

• з не сформульованою умовою або вимогою;

• із суперечливою умовою або вимогою;

• з кількома розв’язками;

• з недоступними елементами;

• з обмеженнями;

• на відновлення фігур;

3) задачі з провідною виховною функцією включають такі:

• на формування пізнавального інтересу;

• на політехнічне, естетичне, економічне, трудове виховання;

• на виховання потреби доводити;

• на формування навичок раціональної навчальної праці;

• на виховання спостережливості, самостійності.

Звичайно, такий поділ має швидше логічний характер: конкретну задачу далеко не завжди можна віднести до того чи іншого виду. Скоріше навпаки – в досить змістовній задачі реалізуються всі її цілі, серед яких іноді важко виділити домінуючу функцію.

Задачі у навчанні математики є як об’єктом вивчення, так і засобом навчання.

У шкільній практиці до задач у широкому розумінні відносять не тільки текстові і сюжетні задачі, але й різні вправи та приклади. Кожна задача має умову і вимогу. Вимога, сформульована в задачі, є істотною її характеристикою. Вона значною мірою визначає способи, методи, прийоми розв’язування задач та методику навчання учнів їх розв’язувати.

В залежності від того яку вимогу поставлено у задачі, розрізняють такі види задач: на обчислення, доведення, побудову і дослідження.

Якщо говорити про задачі на обчислення, то в них потрібно знайти числове значення величини або множини таких величин за даними умовами. До такого типу задач можна віднести текстові задачі і різні приклади (задачі на розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем тощо).

У задачах на доведення потрібно довести сформульоване в них твердження. Тим самим вони мало відрізняються від теорем. Виходячи з цього одне й те саме твердження подається в різних підручниках або під рубрикою теорем, або під рубрикою задач. Найважливіші твердження називають теоремами, їх використовують під час розв’язування різних задач і доведення інших теорем.

До задач на побудову відносять геометричні задачі, в яких потрібно побудувати ту чи іншу фігуру, що задовольняє умову задачі. До таких задач також можна віднести задачі на побудову графіків функцій, діаграм, перерізів многогранників та інших тіл.

У задачах на дослідження вимагається дослідити деяку закономірність, властивість, характеристику об’єкта.

Ю. Кулюткін в залежності від характеру вимог поділяє задачі на три великі групи:

- задачі на розпізнавання, в яких потрібно знайти один із компонентів деякої системи об’єктів (наприклад, знайти висоту – шуканий компонент для заданого конуса – система об’єктів);

- задачі на конструювання, де шуканим елементом є та чи інша система, причому вона повинна володіти наперед описаними у вимогах задачі функціями;

- задачі на пояснення і доведення, в яких потрібно знайти зв'язки і залежності між заданими фактами і явищами.

Л. Фрідман також виділяє три групи, але за основу поділу взято більш чіткі критерії: трансформація задачі за допомогою алгебри висловлень у символічну структурну модель, причому задачі з різних предметів, і демонстрація, що за своєю структурою кожна задача відноситься до однієї із груп:

- задачі на знаходження шуканого;

- задачі на доведення або пояснення;

- задачі на перетворення або побудову.

На думку методистів Л. Лоповка, Н. Четверухіна та ін., геометрична задача має багато спільних рис з алгебраїчними. Але разом з тим, розв'язування геометричної задачі має низку специфічних особливостей, характерних лише для геометричних задач. В алгебраїчних задачах учні відшукують залежності між відомими та невідомими величинами безпосередньо в самому тексті задачі і тільки тоді застосовують формули, кількість яких – обмежена. Під час розв'язування геометричної задачі учні повинні добирати функціональну залежність з великого числа теорем, які існують поза текстом умови задачі.

Другою особливістю геометричної задачі є вдало чи не вдало зроблений рисунок, який в стереометричній задачі відіграє надзвичайно важливу роль, конкретизуючи величини, дані в умові задачі, і допомагаючи учням підібрати потрібну для розв'язування конкретної задачі теорему. Відомо, що формування просторових уявлень учнів на уроці відбувається під керівництвом учителя.

На першому етапі учням дається орієнтована основа на утворення нових понять і уявлень. На другому етапі відбувається узагальнення та закріплення утворених понять та уявлень – учні «висловлюють» сформовані просторові уявлення словесно (усно та письмово), графічно, у вигляді символів, виготовлення моделей тощо. Такий процес утворення геометричних уявлень сприяє формуванню нових усвідомлених понять, розвитку математичної мови, просторової уяви, логічного та теоретичного мислення.

Слід розрізняти поняття «уявлення» і «уява». У психології уявлення трактується як образ раніше сприйнятого предмета або явища (уявлення пам’яті), а також образ, створений продуктивною уявою; це вища форма чуття, відображення у вигляді наочно-образного знання.

Уява – це психічна діяльність, яка полягає у створенні уявлень і мислених ситуацій, які насправді ніколи загалом не сприймалися людиною. Розрізняють уяви відтворювальні і творчі. На думку О. Александрова, геометрія в своїй сутності є таким поєднанням живої уяви та строгої логіки, в якому вони взаємно організовують і спрямовують одна одну. Уява дає змогу безпосередньо бачити геометричний факт і підказує логіці його вираження й доведення, а логіка, в свою чергу, надає уяві точності та спрямовує її на створення картин, що виявляють потрібні логіці зв'язки. Уява – це прекрасна, могутня здібність людини. Вона потрібна людині для орієнтування в навколишньому світі і в розвиненій формі важлива для багатьох видів діяльності. Уява потрібна кваліфікованому робітнику, інженеру, архітектору, авіатору, скульптору та ін.

Метою вивчення стереометрії є систематичне вивчення властивостей геометричних фігур у просторі, розвиток просторових уявлень і уяви, засвоєння учнями способів обчислення важливих для практики геометричних величин і подальший розвиток логічного мислення.

Зміст шкільного курсу стереометрії протягом останніх років не зазнав істотних змін і залишається традиційним. Здебільшого його згруповано навколо п'яти змістових ліній: 1) просторові геометричні фігури та їх властивості; 2) геометричні побудови; 3) геометричні перетворення; 4) координати і вектори в просторі; 5) геометричні величини. Щодо шкільного курсу стереометрії на всіх рівнях навчання (базовий, профільний, поглиблений) вивчаються наступні теми: «Вступ до стереометрії»; «Паралельність прямих і площин у просторі»; «Перпендикулярність прямих і площин у просторі»; «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі»; «Многогранники»; «Тіла обертання»; «Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл».

У курсі стереометрії розвиваються далі основні змістові лінії планіметрії, тому навчанню стереометрії притаманний узагальнюючий характер викладу, застосування великої кількості аналогій, що дозволяє закріпити та систематизувати знання з планіметрії. Але не всі змістові лінії планіметрії в стереометрії розвиваються однаково.

Наприклад, всі основні види геометричних перетворень, що були вивчені в планіметрії, переходять до стереометрії і навіть додається нове – симетрія відносно площини, розширюються поняття гомотетії, паралельного перенесення тощо.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу стереометрії: знаходження площ фігур, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об’ємів тіл обертання тощо. Курс стереометрії має широкі можливості для інтелектуального розвитку учнів, насамперед логічного мислення, просторових уявлень і уяви.

Для формування в учнів просторових уявлень і розвитку уяви важливо починати запровадження понять, аксіом, теорем і багатьох задач стереометрії з розгляду моделі та наочного рисунка. Модель і рисунок дають змогу учням виокремити істотні властивості просторових фігур і абстрагуватися від неістотних, виконати узагальнення, помітити потрібні відношення і зв'язки між елементами фігур, здійснити аналіз через синтез під час доведення теорем і розв’язування задач, узагальнити виконане доведення, поширивши твердження на всі фігури певного класу.

Водночас потрібно зважати на особливості курсу стереометрії, в якому учням зустрічаються складніші співвідношення геометричних фігур, ніж на площині. Стереометричний рисунок, який є найдоступнішим і найпоширенішим засобом унаочнення, все-таки подає просторові фігури у зміненому вигляді, що утруднює уяву. В стереометрії через складність просторових уявлень необхідною стає логіка, що дає великий і переконливий матеріал для розвитку в учнів логічного мислення. Недарма О. Александров у згаданій статті зазначав, що завдання навчання геометрії – розвивати в учнів три якості: просторову уяву, практичне розуміння та логічне мислення.

Із визначених програмою вимог до навчання стереометрії принципово важливою є та, що високий рівень абстрактності стереометричного матеріалу, логічна строгість систематичного викладу мають поєднуватися з високим ступенем наочності, мотивації вивчення навчального матеріалу і з практичною спрямованістю навчання. Унаочнення потрібне під час вивчення всіх розділів курсу стереометрії. Водночас практика доводить, що надмірне захоплення унаочненням може гальмувати розвиток просторових уявлень і уяви учнів, а відрив від практичного застосування матеріалу, що вивчається, знижує пізнавальний інтерес, мотивацію, спричинює формалізм у знаннях і вміннях учнів.

Орієнтація на безумовне досягнення всіма учнями обов’язкових результатів навчання і створення умов для випереджального навчання тих, хто має здібності та цікавиться математикою, потребує забезпечення диференціації за рівнем вимог з урахуванням індивідуального стилю навчання, відмінностей у розумовому, емоційно-вольовому розвитку учнів, їх навченості та темпах оволодіння програмним матеріалом. Зважаючи на вік старшокласників, учитель під час вивчення стереометрії має більші можливості для організації самостійної навчальної діяльності учнів, систематичного повторення, розширення й узагальнення як планіметричного матеріалу, так і нових для учнів тісно пов’язаних з ним теоретичних відомостей та способів діяльності в стереометрії.

Якщо говорити про систему задач шкільного курсу математики, то на думку С. Музиченко, більш доцільним буде таке означення системи-це сукупність тих або інших взаємопов’язаних об’єктів, які розміщені в певній послідовності, причому однорідність елементів системи зумовлює необхідність їх впорядкування.

Внутрішня строга логічна структура математики як науки визначає чітку послідовність вивчення її окремих тем. Таким чином потрібно будувати строгу послідовність задач, які будуть запропоновані учням в межах вивчення окремої теми математики. Така методично і дидактично виважена послідовність задач з кожної теми і є системою задач шкільного курсу математики.

Слід відзначити, що існує безліч різних систем задач шкільного курсу математики і класифікувати їх неможливо, оскільки, як було зазначено, не існує єдиного означення поняття «задачі». Існують різні види задач, причому кожний поділ задач можна робити за різними критеріями.

Роль процесу розв’язування задач для формування математичних знань та умінь учнів проблема, що не втрачає своєї актуальності. Процес розв’язування стереометричної задачі недооцінюється, якщо вбачати в ньому лише умови накопичення знань та умінь зі стереометрії, не зважаючи при цьому на значну роль процесу розв’язування стереометричної задачі з точки зору психології, зокрема розвитку мислення особистості. Науковці відмічають недостатність методичних рекомендацій щодо організації процесу розв’язування стереометричних задач для вчителів-практиків, які сформульовані на основі результатів наукових досліджень розвитку мислення учнів власне під час розв’язування стереометричної задачі.

Отже, можна стверджувати, що немає єдиного тлумачення поняття «задача», з точки зору психології, оскільки під задачею розуміють і вимогу, поставлену перед суб'єктом, і мету його дій, і ситуацію, що охоплює, поряд з метою, умови, в яких вона повинна бути досягнута, і словесний опис такої ситуації. Але в усіх тлумаченнях поняття присутня думка про те, що процес розв’язування задачі і процес мислення невід’ємні і супроводжують один одного. Ми погоджуємось з думкою, що результатом розв’язування поставленої задачі перед учнем в школі має бути, зокрема, організована мисленнєва діяльність, наслідком якої є накопичення нових знань, умінь, навичок та удосконалення вже набутих.

1.2. Стереометричні задачі та їх структура

Розв’язування задач - це робота дещо незвичайна, а саме розумова робота. А щоб навчитися будь-якій роботі, треба заздалегідь добре вивчити той матеріал, над яким доведеться працювати, ті інструменти, за допомогою яких виконується ця робота.

Значить, для того щоб навчитися розв’язувати задачі, треба розібратися в тому, що собою вони представляють, як вони влаштовані, з яких складових частин вони складаються, які інструменти, за допомогою яких проводиться розв’язання задач.

Отже, що ж таке стереометрична задача? Якщо придивитися до будь-якої задачі, то побачимо, що вона є вимога або питання, на який треба знайти відповідь, спираючись і з огляду на ті умови, які зазначені в задачі. Тому, приступаючи до розв’язання будь-якої задачі, треба її уважно вивчити, встановити, в чому полягають вимоги та умови. Все це називається аналізом задачі. Ось і почнемо вчитися робити аналіз задачі [3].

Схематичний запис завдань

Результати попереднього аналізу завдань треба якось зафіксувати, записати. Словесна, описова форма запису - непрактична. Треба знайти більш зручну, більш компактну і в той же час досить наочну форму запису результатів аналізу завдань. Такою формою є схематичний запис завдання.

Зауважимо, що не для кожного завдання треба робити схематичний запис. Для завдань, які записані мовою символів, схематичний запис не потрібен.

Першою особливістю схематичного запису завдань є широке використання в ній різного роду позначень, символів, букв, малюнків та креслень. Другою особливістю є те, що в ній чітко виділені всі умови і вимоги задачі, а в запису кожної умови вказані об'єкти та їх характеристики, в схематичному записі фіксується тільки те що необхідно для розв'язання задачі; всі інші подробиці, наявні в задачі, при схематичному записі відкидаються [24].

Використання креслень для схематичного запису стереометричних задач

Для схематичного запису стереометричних задач корисно використовувати креслення тієї фігури, яка розглядається в задачі. При побудові такого креслення треба виконувати ряд вимог. Зазначимо головні з них:

1. Креслення повинно являти собою схематичний малюнок основного об'єкта задачі (геометричної фігури, або сукупності фігур, або якоїсь частини цих фігур) з позначенням за допомогою літер та інших знаків всіх елементів фігури і деяких їхніх характеристик. Якщо в тексті задачі зазначені які-небудь позначення фігури або її елементів, то ці позначення повинні бути і на кресленні; якщо ж в задачі ніяких позначень немає, то слід скористатися загальноприйнятими позначеннями або придумати найбільш зручні.

2. Це креслення повинне відповідати задачі. Це означає, що якщо в задачі в якості основного об'єкта названо, наприклад, трикутну призму і при цьому не вказано її вид, то треба побудувати довільну трикутну призму.

3. При побудові креслення немає потреби дотримуватись строго якогось певного масштабу. Проте бажано дотримуватись пропорцій в побудові окремих елементів фігури. Точно так само треба дотримуватися на кресленні таких відношень як: паралельність, перпендикулярність та інших, заданих в задачі.

4. При побудові креслень просторових фігур необхідно дотримуватися всіх правил креслення.

Крім креслення, для схематичного запису геометричних задач використовується ще короткий запис всіх умов і вимог. У цьому короткому записі, користуються прийнятими на кресленні позначеннями, записуються всі характеристики і відношення, зазначені в умовах задачі. Назви фігур або окремих її частин бажано замінювати записом їх визначень.

У короткому записі можна використовувати, там, де це доцільно, стандартні математичні знаки (паралельності, перпендикулярності і інші). Звичайно, всі наведені рекомендації мають не загальний характер, і при розв'язуванні окремих геометричних завдань креслення фігур і короткий запис умови можуть проводитися інакше [21].

Структура процесу розв'язання стереометричних задач

З яких же етапів складається процес розв'язування стереометричної задачі? Очевидно, отримавши завдання, перше що потрібно зробити, - це розібратися в тому, що це за задача, які її умови, в чому полягають її вимоги, тобто провести аналіз задачі. Цей аналіз і становить перший етап процесу розв'язання задачі.

У ряді випадків аналіз треба якось оформити, записати. Для цього використовуються різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає другий етап процесу розв'язання.

Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідні головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язання даної задачі. Пошук цього способу складає третій етап процесу розв'язання.

Коли спосіб розв'язання задачі знайдений, його потрібно здійснити, - це буде вже четвертий етап процесу - етап здійснення (викладу) розв'язання.

Після того як розв'язання здійснено і викладено (письмово чи усно), необхідно переконатися, що воно правильне та задовольняє всім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку, що становить п'ятий етап процесу розв'язання.

При вирішенні багатьох завдань, крім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме встановити, за яких умов задача має розв'язок і до того ж скільки розв'язків у кожному окремому випадку, при яких умовах задача взагалі не має розв'язку. Все це становить шостий етап процесу розв'язання.

Переконавшись у правильності, якщо потрібно, провівши дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, - це буде сьомий етап.

Нарешті, в навчальних і пізнавальних цілях корисно також провести аналіз виконаної задачі, зокрема встановити, чи немає іншого, більш раціонального способу розв'язання, чи не можна її узагальнити, які висновки можна зробити з розв’язку . Все це складає останній, звичайно не обов'язковий, восьмий етап розв’язання.

Отже, весь процес розв'язування стереометричних задач можна розділити на вісім етапів:

1-й етап - аналіз задачі;

2-й етап - схематичний запис задачі;

3-й етап - пошук способу розв'язання задачі;

4-й етап - реалізація розв'язку задачі;

5-й етап - перевірка виконання;

6-й етап - дослідження задачі;

7-й етап - формулювання відповіді задачі;

8-й етап - аналіз.

Наведена схема дає лише загальне уявлення про процес розв’язання стереометричних задач як про складний і багатоплановий процес [7].

1.3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Розв'язок стереометричної задачі на побудову — деяка фігура, розв'язок задачі на дослідження — висловлення. Розв'язування задачі на доведення не зводиться до відшукання розв'язку.

Одна й та сама задача може мати кілька розв'язань. Коли йдеться про розв'язання однієї й тієї самої задачі за допомогою різних методів або прийомів, говоритимемо про різні способи розв'язання.

Для прикладу розв'яжемо кількома способами таку задачу.

Задача. Доведіть, що всі три відрізки, які сполучають середини протилежних ребер довільного тетраедра, проходять через одну точку і діляться нею навпіл.

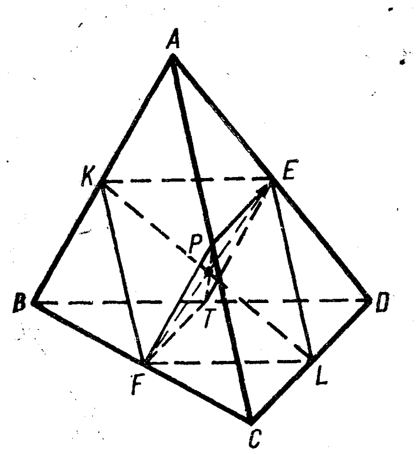


Рисунок.1

Перший спосіб. Нехай K, E, L, F, P, T — середини ребер тетраедра ABCD (рис.1). Відрізки KE і FL—середні лінії трикутників ABD і CBD, тобто вони паралельні BD і кожний з них дорівнює $\frac{1}{2}BD$. Отже, KELF — паралелограм, а його діагоналі KL і EF перетинаються в точці M, яка є одночасно серединою KL і EF. Аналогічно можна показати, що PETF — також паралелограм, а його діагоналі перетинаються в точці, яка є серединою EF, тобто в точці M. Отже, M — середина кожного з трьох відрізків KL, EF і PT. Це й треба було довести.

Другий спосіб. Позначимо середини відрізків KL, EF і PT відповідно буквами M, M_1, M_2 і зафіксуємо довільну точку O. Тоді: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right), \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right), \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right)$

Видно, що $OM = OM_1 = OM_2$, а це можливо тільки тоді, коли M, M_1, M_2 — та сама точка. Отже, M — середина кожного з трьох відрізків KL, EF і PT.

Третій спосіб. Нехай точки K, E, P, L, F, T — середини ребер тетраедра ABCD, а M — середина відрізка KL. Тоді центральна симетрія відносно M відобразить точки E і P на такі точки E_1 і P_1 що $LE_1 \parallel$ KE, і $LE_1 =$ KE а $LP_1 \parallel$ KP і $LP_1 =$ KP. Це можливо лише тоді, коли точка E_1 збігається з F, а P_1 з T. Як бачимо, центральна симетрія відносно M відображає точки $K,\ P,\ E$, відповідно на $L,\ T,\ F$, тобто M — спільна середина кожного з відрізків KL, PT , EF.

З геометричних перетворень простору в загальноосвітній школі вивчають паралельне перенесення, симетрію відносно точки або площини і гомотетію. З деякими іншими перетвореннями старшокласників ознайомлюють на факультативних заняттях.

Методи геометричних перетворень ми радимо використовувати тільки там, де вони справді допомагають раціоналізувати розв'язання, зробити його простішим, зрозумілішим. При цьому немає потреби розглядати відображення всього простору на себе, а тільки фігури на фігуру, тобто паралельно переносити, повертати не весь простір, а тільки якусь лінію, многокутник.

Якщо, розв'язуючи геометричну задачу, оперують координатами окремих точок, рівняннями ліній або поверхонь, то використовують координатний метод. Цим методом можна розв'язувати і планіметричні, і стереометричні задачі. У першому випадку розглядають систему координат на площині, у другому — в тривимірному просторі.

Координатний метод часто поєднують з векторним, розглядаючи вектори, задані своїми координатами. Раціональність розв'язання стереометричної задачі координатним методом значною мірою залежить від того, як розглядувану фігуру розмістити відносно координатних осей. Найзручніше цим методом користуватись тоді, коли йдеться про фігури, що мають прямий тригранний кут. У цьому разі осі координат доцільно розмістити в. напрямі ребер тригранного кута. Але не тільки такі задачі можна розв'язувати координатним методом.

3. МЕТОДИКА РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Останній розділ шкільної геометрії присвячений тілам (фігурам) обертання. Вивчаючи його, учні вперше ознайомлюються з багатьма новими формулами: для обчислення площ поверхонь і об'ємів циліндрів, конусів, куль тощо. Зрозуміло, що весь теоретичний матеріал бажано поєднувати з розв'язуванням задач на обчислення. Починати треба з найпростіших задач, які можна розв'язувати й усно. Наприклад, ввівши поняття циліндра і його осьового перерізу, корисно однією з перших запропонувати таку задачу.

Також особливу увагу приділяють прикладнім задачам. У навколишньому реальному світі є немало різних предметів, які мають форму фігур обертання. Це - труби, шайби, диски, циліндри, резервуари, цистерни, заклепки, рулони тощо.

Можна, викликавши учня до дошки, дати йому, наприклад, шайбу для гри в хокей і запропонувати визначити її об'єм. Учень сам повинен знайти потрібні розміру записати результати вимірювання і виконати розрахунки. Розв'язуючи такі прикладні задачі, треба додержувати правил наближених обчислень. Справа не тільки в тому, що густина матеріалу і розміри — наближені значення величин, а й у тому що всі згадані в задачах фізичні тіла — не ідеальні циліндри. Так, краї електродів не завжди мають форму круга, шахтний стовбур — циліндричну поверхню, а заглибина, висвердлена в металі, не скрізь має форму циліндра.

Перш ніж розв'язувати які-небудь задачі на фігури обертання, треба навчити учнів зображати їх. У багатьох методичних посібниках пропонується малювати фігури обертання за допомогою шаблонів, зокрема еліпсів.

Малюнок до стереометричної задачі повинен бути правильним не з погляду нарисної геометрії.

У шкільних навчальних посібниках задач на дослідження, пов'язаних з фігурами обертання, мало. Але практика показує, що ці задачі дуже корисні і хоч один-два десятки їх бажано розв'язати з учнями. Зрозуміло, що йдеться про прості задачі, доступні для всіх десятикласників.

РОЗДІЛ І2. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Психолого-педагогічний процес навчання

Процес навчання - головне та вирішальне джерело систематичного впливу на студента, його думки, почуття, сферу мислення. Велике значення у розвитку активізації пізнавальної діяльності мають місце моменти, що вносять елементи захоплення навчальним процесом, допомагають зняти напругу та втомленість після занять. Головне завдання, що стоїть перед викладачем, це допомогти дитині вчитися. Показати, що математика - не лише "довгі приклади на всі дії, а й цікаві, змістовні задачі, які потребують не тільки прорахунків, а й міркувань".

Ефективність навчання математики залежить від багатьох факторів, з-поміж яких психологічні та педагогічні домінують, причому психологічні компоненти складають основу педагогічних і є для них визначальними. Як відомо, *навчання* — це цілісний двосторонній процес педагогічної діяльності вчителя та навчально-пізнавальної діяльності студентів, у результаті якого відбувається засвоєння суб'єктами учіння визначених знань, навичок і вмінь та реалізуються відповідні виховні функції. До психологічних факторів навчання належать вікові та індивідуальні особливості учнів (відчуття, почуття, воля, увага, сприймання, пам'ять, мислення, уява тощо), змістові особливості навчального матеріалу, а також психологія педагогічної взаємодії між усіма складовими навчання. Психологізація навчального процесу поглиблюється у зв'язку з тим, що він виконує триєдину функцію: засвоїти визначені елементи знань, за їх допомогою розвивати психологічні процеси суб'єктів учіння, соціалізувати (виховувати) їх. Процес засвоєння знань задіює відповідні психологічні компоненти і водночас розвиває їх, причому розвиток інтенсифікується в гуманізованому й адаптованому до потреб і можливостей дітей середовищі, яке відповідає національним звичаям, традиціям і менталітету. Отже, психологізація навчання — це не лише вивчення і врахування вікових та індивідуальних особливостей суб'єктів учіння під час навчального процесу, а й адаптування до них змісту навчання, дослідження і використання психологічних можливостей навчального матеріалу у розвитку емоційно-вольових та інтелектуально-пізнавальних процесів, національному вихованні студентів. Кожна навчальна дисципліна має свої психологічні пріоритети. Якщо засобами літератури найбільше розвивається емоційно-почуттєва сфера, то строга логічність математичних форм найбільше розвиває інтелектуальні сили суб'єктів учіння, але лише за умов, якщо навчальний матеріал доступний і водночас достатньо важкий для розуміння і засвоєння його учнями. Зміст математичних дисциплін характеризують їх особливості, які належним чином впливають і на їх місце в структурі навчального процесу, і на психологічне забезпечення засвоєння математичних знань. До них належать: високий рівень узагальнення й абстрагованості; тісний взаємозв'язок між усіма елементами знань; велика кількість термінів і понять; домінування дедуктивних умовиводів, логічних обґрунтувань, постійне включення аналітико-синтетичних функцій мислення; переважання методу вправлянь, його суттєва роль не лише для формування відповідних навичок і вмінь, а й для засвоєння теоретичних знань; загальне домінування розвивальних функцій над освітніми під час вивчення математики; велика роль ядра математичних знань і навичок для успішного подальшого просування і в навчанні, й у розвитку. Серед визначених особливостей математики як навчального предмета більшість носить психологічний характер, домінантою якого є інтелект учнів. Тому навчання математики допомагає встановити розумові здібності учнів для того, щоб і самою технологією навчання, й адаптованим змістом оптимізувати поступ їх мислення. Звісно, в умовах колективного навчання реалізувати сповна розвивальні можливості математичних дисциплін є непростою справою, оскільки кожна дитина за своїми здібностями є неповторною і вимагає індивідуального розвитку (навчання). З іншого боку, дитина найкраще розвивається в інтелектуальному колі, яке утворюється під час навчання оптимальної кількості індивідуумів. Отже, поєднання індивідуальних і групових форм навчання допоможе найкращим чином досягти освітньо-розвивальних цілей, особливо якщо психологічні аспекти професійно включатимуться і в навчання, і у розвиток. Провідною функцією математичних знань є інтелектуальний розвиток студентів. Формування в них загальних прийомів розумових дій, а також специфічних прийомів, де під час навчання їх використовують і як засіб досягнення навчальних цілей, і як предмет навчально-пізнавальної діяльності. Практика показала, що особливістю пізнавальної діяльності студентів, що слабо навчаються з математики, є не сформованість загальних розумових дій. Причиною є надання пріоритету освітнім цілям, недостатня увага до розумового розвитку дітей, тобто використання математичних знань для формування загальних і специфічних прийомів розумової діяльності, які не часто стають предметом навчання. Учитель розглядає розширення обсягу знань як кінцеву мету навчання. Така установка веде до перевантаження учнів, і щорічно зростає кількість учнів, які не тільки перестають засвоювати математичні знання, а й сприймати їх. Щоб не допустити несприймання значною частиною студентів математичних знань на тому чи іншому році навчання потрібно:

— виділяти ядро елементів знань на кожному навчальному етапі, без яких подальший доступ неможливий;

— решту, поза ядром, елементів знань використовують переважно для формування прийомів розумової діяльності;

— адаптувати рівень складності ядрових знань до рівня розумових можливостей тієї чи іншої типологічної групи студентів;

— з метою полегшення запам’ятовування знань психологізувати матеріал, використовуючи аналогію, порівняння, логіку встановлення і обґрунтування понять.

Розумова пасивність, бездіяльність, яка нерідко обумовлена надмірністю вимог до студентів стомлює їх, а не активна осмислена розумова праця пов’язана з позитивним емоційним підкріпленням [7].

2.2. Психологічний аналіз структури розумової діяльності під час вивчення базисних задач стереометрії

Сучасна дидактика, спираючись на сучасні досягнення педагогіки та психології, бачить у зацікавленості ще більші можливості як для навчання, так і для формування особистості студента в цілому.

У студентів одного віку пізнавальний процес має різні ступені індивідуального розвитку та їх характер. Елементарним рівнем пізнання вважається відкрита безпосередня зацікавленість новими фактами, знаннями, що формуються на уроці, більш високим рівнем є прагнення студента до вирішення складних завдань. Саме цей рівень може вирішитися завдяки різноманітним методам навчання при вивченні тем. Вони допомагають розкрити студента, дають поштовх до навчання, прививають любов до математики.

Таким чином, математичні знання і вміння розглядаються не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості студента, забезпечення його математичної грамотності як здатності розуміти роль математики в світі, в якому він живе, висловлювати обґрунтовані математичні судження і використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

Основними завданнями курсу планіметрії є вдосконалення вмінь студентів будувати зображення просторових фігур та розв’язувати різноманітні задачі, які стосуються цієї теми.

Особливістю просторового мислення є використання певної системи орієнтації в просторі. Серед можливих систем найбільш природною вважається система орієнтації за допомогою тіла, щолежить в основі практичної орієнтації серед предметів і явищ. Дитина сприймає предмети в просторі з позиції вертикального положення власного тіла і сааме ця позиція є точкою відліку для створення різних просторових образів. Під час переходу до геометричного простору учні зазнають труднощів і виникає потреба відійти від звичної схеми тіла до абстракції. Визначаючи просторове розміщення геометричних об'єктів за точку відліку приймається не спостерігач, а будь-який, наперед обраний елемент, по відношенню до якого в просторі розміщуються всі інші елементи. Тому перехід від чіткої системи відліку до заданої чи до вільновибраної істотно ускладнює формування просторових образів у школярів.

Поділ курсу геометрії на планіметрію та стереометрію з фактично поодинокими вкрапленнями просторових зображень на площині приводить до гальмування просторової уяви та її спотворення.

Не менш важливим є врахування негативного впливу попереднього досвіду студентів, набутого при засвоєнні математичних знань на попередніх етапах навчання. Так, зокрема, вивчаючи многокутники в курсі планіметрії, в учнів чітко формуються правила їх зображення, що робить обмеженим бачення цих же фігур у просторі під час зображення їх на площині. Психологи відзначають, що причиною виникнення таких помилок є пригнічення більш слабких асоціацій сильними та звичними асоціаціями. І як наслідок, відбувається необгрунтоване перенесення вивчених раніше правил, закономірностей у нові умови, неправомірне використання аналогій, «до уявлення» в рисунках тих образів і властивостей, яких він не має.

Під час оперування просторовими образами в процесі переходу від площини до простору і навпаки здійснюється процес проекціювання. Учні оволодівають цим поняттям спочатку тільки емпірично, інтуїтивно, а вже пізніше наповнюють свої знання науковим змістом. Запізнє теоретичне обґрунтування процесу проекціювання гальмує проекційні уявлення учнів. Вони не розуміють, що будь-яка плоска фігура є своєрідною проекцією просторової фігури. До того ж постійне оперування площинними зображеннями призводить до жорсткого закріплення фіксованої позиції спостерігання [26].

РОЗДІЛ 3
МЕТОДТКА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ З ОСНОВНИХ РОЗДІЛІВ ШКІЛЬНОЇ СТЕРЕОМЕТРІЇ

3.1. Паралельність прямих і площин

На уроках стереометрії розрізняють два види задач на побудову: уявлювані й ефективні. Про ефективні побудови говорять тоді, коли їх виконують за допомогою лінійки, циркуля або інших креслярських інструментів. Якщо побудови за допомогою інструментів не виконують, а тільки описують словами їх можливість, посилаючись на аксіоми чи теореми, то мають на увазі уявлювані побудови.

Задачі на **уявлювані побудови** в 9-му класі розв'язують на основі таких припущень:

1) можна позначити точку на будь-якій фігурі; можна позначити точку, яка не належить певній фігурі (в останньому випадку мається на увазі фігура, відмінна від простору);

2) через будь-яку певну точку можна провести пряму; через дві точки можна провести тільки одну пряму;

3) через будь-яку певну точку можна провести площину; через дві точки можна провести площину; через три точки, що не належать одній прямій, можна провести тільки одну площину;

4) тільки одну площину можна провести через дві прямі, що перетинаються, через дві паралельні прямі, через пряму і точку, що лежить поза нею;

5) якщо в одній площині задано дві непаралельні прямі, то можна визначити їх точку перетину;

6) якщо задано дві непаралельиі площини, то можна визначити їх лінію перетину;

7) у заданій площині можна виконати будь-яку з побудов, які розглядаються в планіметрії: відкласти відрізок даної довжини, побудувати кут,

який дорівнює даному, поділити відрізок на n рівних частин, провести бісектрису кута, через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій або перпендикулярну до неї тощо.

Зрозуміло, що під час розв'язування задачі на уявлювану побудову за допомогою креслярських інструментів нічого не будують. Яким інструментом можна провести площину? І хоч говоримо «проведемо площину через три дані точки», маємо на увазі інше: «через три дані точки можна провести площину» (в розумінні сформульованих вище припущень) [3].

Найпростіші задачі на уявлювані побудови в розділі «Паралельність прямих і площин» такі:

1. Через дану в просторі точку проведіть пряму, паралельну даній прямій.
2. Через дану в просторі точку проведіть пряму, паралельну даній площині.
3. Через дану в просторі точку проведіть площину, паралельну даній площині.

Спинимось на методиці розв'язування останньої задачі. Найчастіше розв'язують її так.

Нехай дано площину α і точку A поза нею (на малюнку зображають площину α і точку A). Треба провести площину, яка проходила б через точку A і була паралельна площині α. Пригадаємо ознаку паралельності двох площин. Отже, бажано провести через точку A дві прямі, паралельні α, а потім через ці дві прямі провести площину...

Далі слід описати і зобразити на малюнку побудову, обгрунтувати її і показати, що так побудована площина єдина. Все це можна зробити, наприклад, так, як описано в посібнику О. В. Погорєлова (теорема 15.5) [23].

Однак не треба думати, що задачу можна розв'язати тільки таким способом. Наприклад, можна через точку A провести пряму (рис. 3.1.1), що перетинає площину α в якійсь точці A_1 і відкласти на ній точку O так, щоб $OA = 2OA_1$.

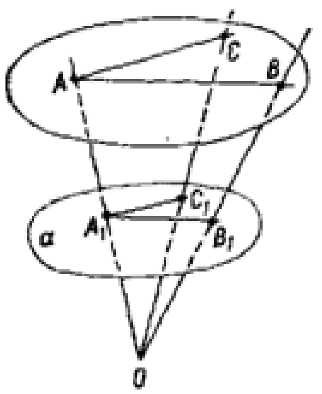


Рис. 3.1.1

Потім на площині α взяти точки B_1 і C_1, які не лежать з точкою A_1, на одній прямій, а на променях OB_1, OC, позначити точки B і С так, щоб $OB = 2OB_1$ і $OC=2OC_1$. Площина, що визначається точками A, B і C, - це та площина, яку треба було побудувати.

Справді, за властивістю середньої лінії трикутника $AC \,||\, A_1C_1$, $AB \,||\, A_1B_1$, прямі A_1B_1 і A_1C_1 лежать у площині α, тому прямі AC і BC паралельні площині α, отже, і площина, яка проходить через них, паралельна площині α. Задачу можна розв'язати багатьма іншими способами.

Задача 1. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній з двох даних площин, що перетинаються [1].

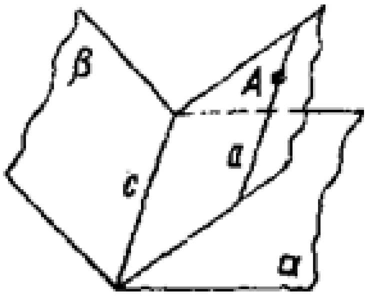


Рис. 3.1.2

Приступаючи до розв'язування, спочатку конкретизують задачу. Нехай дано площини α і β, що перетинаються по якійсь прямій c, і точку A (рис. 3.1.2). Треба провести через точку A пряму так, щоб вона була паралельна кожній з площин α і β.

Далі виконують аналіз. Припустимо, що потрібну пряму a побудовано. Вона паралельна прямій c, бо коли пряма паралельна кожній з *площин, що* перетинаються, то вона паралельна й лінії їх перетину. Отже, щоб розв'язати задачу, треба через дану точку *A* провести пряму, паралельну прямій *c*.

Так або приблизно так міркує людина, яка шукає спосіб розв'язання цієї задачі. Приблизно так міркує людина й тоді, коли відшукує спосіб розв'язання задачі на обчислення, доведення або дослідження. Але всього цього не описує в розв'язанні. Вважаємо, що задачі на побудову не повинні бути винятком: під час їх розв'язування досить описати і виконати побудову, обгрунтувати її і пояснити, скільки розв'язків може мати задача. Але описувати, внаслідок яких міркувань учень прийшов до даної побудови, не обов'язково. Оформити розв'язання цієї задачі можна, наприклад, так:

Розв'язання.

1 спосіб. Через пряму *c* і дану точку *A* проводимо площину. У цій площині через точку *A* проводимо пряму *a,* паралельну с. Пряма *a* - це та пряма, яку треба було побудувати. Справді, вона паралельна прямій с, що належить кожній з даних площин, отже, $a || \alpha$ і $a || \beta$. Крім того, пряма *a* проходить через дану точку *A*. Пряма *a* єдина.

У розв'язанні з докладнішим поясненням бажано було б дописати після першого речення «Це можна зробити згідно з теоремою 14.1, така пряма єдина», а після другого - «Згідно з аксіомою паралельності таку пряму можна провести тільки одну». Учитель повинен радити учням, як повно вони мають давати пояснення під час розв'язування задачі в той чи інший період навчання.

Таке розв'язання (без опису аналізу) не тільки набагато коротше від традиційного, а й простіше, бо в ньому немає потреби доводити твердження, сформульоване в аналізі. Щоправда, коли б в аналізі було доведено сформульоване твердження, тоді простіше було б дослідження. Але не завжди дослідження буває так тісно пов'язане з аналізом.

Задачу можна розв'язати й іншим способом.

2 спосіб.

Геометричне місце прямих, що проходять через точку A і паралельні площині α, є площина α_1 яка паралельна площині α і проходить через току A (рис. 3.1.3).

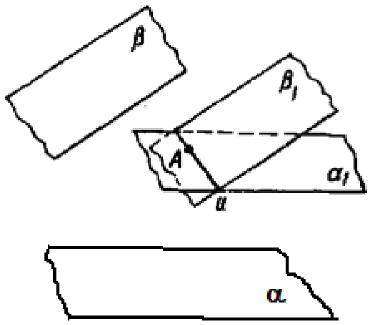


Рис. 3.1.3

Так само множина прямих, що проходять через точку A і паралельні площині β, є площина яка паралельна площині β_1 і проходить через точку A. Побудуємо ці дві площини. Вони визначають пряму перетину a, що проходить через A. Пряма a - шукана. Справді, $a \subset \alpha_1$ і $\alpha_1 || \alpha$, тому $a || \alpha$, $a \subset \beta_1$ і $\beta_1 || \beta$, тому $a || \beta$. Отже, пряма a паралельна кожній з даних площин і проходить через дану точку A, тобто задовольняє всі частини умови задачі. Оскільки через да ну точку A можна провести тільки одну площину, паралельну площині α, і тільки одну площину, паралельну площині β, і проведені непаралельні площини визначають тільки одну пряму перетину, то пряма a завжди існує і тільки одна.

Зрозуміло, що різні розв'язання здебільшого супроводять різними малюнками. На малюнку до першого розв'язання (рис. 2.2) обов'язково треба позначити пряму c, по якій перетинаються дані площини, на малюнку до другого розв'язання (рис. 2.3) цю пряму можна не проводити.

Задача 2. Точки A і B належать площинам α і β, які перетинаються, але не належать їх лінії перетину c. Проведіть через A і B площину, паралельну c [5].

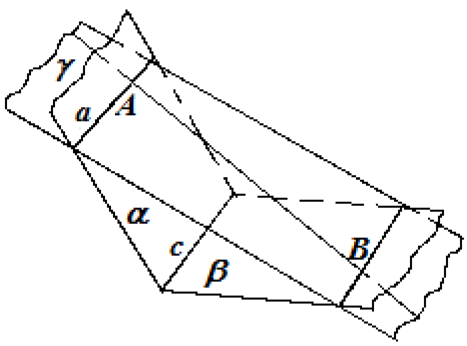


Рис. 3.1.4

Розв'язання. Площина γ, яку треба провести, має проходити через пряму AB. Щоб виконати побудову, треба знати ще яку-небудь пряму цієї площини. Площинну γ і α мають перетинатись по прямій a, що проходить через точку A. Оскільки площина γ має бути паралельна прямій c, прямі a і c також повинні бути паралельні.

П о б у д о в а . У площині α через точку A проведемо пряму a, паралельну прямій c. Через дві прямі AB і a, що перетинаються, проведемо площину γ. Площина γ задовольняє умову задачі.

Д о в е д е н н я . Площина γ згідно з побудовою проходить через дані точки A і B. Оскільки γ містить пряму a, паралельну прямій с, то $\gamma \parallel c$. Отже, γ - саме та площина, яку треба було побудувати.

Д о с л і д ж е н н я . У площині α через точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну прямій c. Через прямі a і AB можна провести тільки одну площину. Отже, задача завжди має один розв'язок.

Можна розв'язати задачу й іншим способом: крім прямої a, побудувати в площині β через точку B пряму b, паралельну c, а через дві паралельні прямі a і b провести площину γ. Перший спосіб раціональніший.

Задачі на е ф е к т и в н і п о б у д о в и починають розв'язувати лише тоді, коли учні засвоять основні властивості паралельного проектування (припускається, що напрями прямих і відрізків, про які йдеться в цих властивостях, не збігаються з напрямами проектування):

1) проекцією прямої є пряма;
2) проекцією відрізка є відрізок;
3) паралельні відрізки на проекції зображаються паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;
4) відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих зберігається;
5) проекцією спільної точки двох фігур є спільна точка їх проекцій.

Однією з перших задач на проекційному малюнку можна запропонувати учням таку.

Задача 3. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте третю висоту трикутника [8].

Спостереження показують, що так сформульованої задачі нерідко учні не розуміють. Краще, якщо учитель розв'яже її сам перед класом.

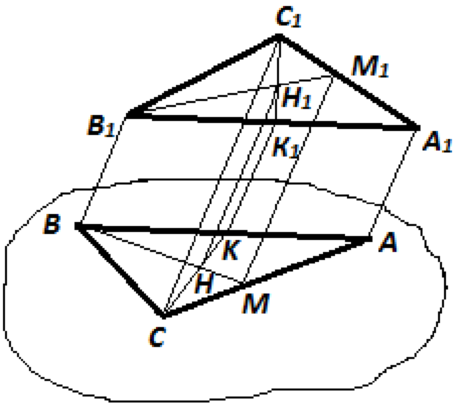


Рис. 3.1.5

Розв'язання. Нехай трикутник ABC - проекція якогось трикутника-оригіналу $A_1B_1C_1$, а відрізки BM і CK - проекції висот B_1M_1 і C_1K_1 (рис. 3.1.5). Зрозуміло, що $B_1M_1 \perp A_1C_1$ і $C_1K_1 \perp A_1B_1$, але при проектуванні кути не зберігаються, проекції взаємно перпендикулярних відрізків часто зображаються не взаємно перпендикулярними. Проекція трикутника не визначає однозначно той трикутник, який спроектовано. Але виявляється, що коли на проекції трикутника задано проекції двох його висот, то вже можна, не знаючи трикутника-оригіналу, побудувати проекцію третьої висоти даного трикутника. Справа в тому, що в кожному трикутнику всі три висоти, або прямі, яким вони належать, перетинаються в одній точці. Отже, проекція третьої висоти або її продовження має проходити через точку перетину проекцій двох інших висот.

Розв'язуючи такі задачі, не обов'язково креслити фігуру-оригінал і її проекцію. Досить побудувати одну проекцію і подальші побудови робити циркулем і лінійкою, як це ми роблять під час розв'язування планіметричних задач на побудову.

Задача 4. Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює 45° [5].

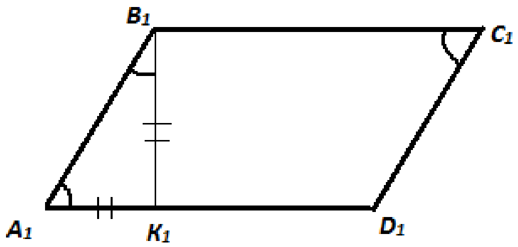


Рис. 3.1.6

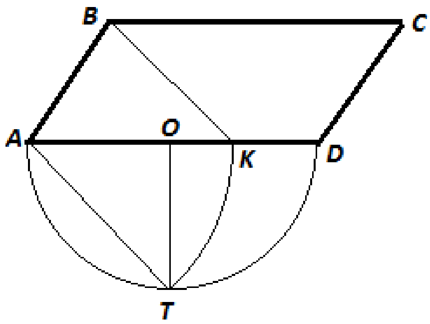


Рис. 3.1.7

Р о з в ' я з а н н я . Нехай $A_1B_1C_1D_1$ - ромб, в якого $A_1 =$ 45°, і B_1K_1 - його висота (рис. 3.1.6). Тоді трикутник $A_1B_1K_1$ прямокутний і рівнобедрений. Отже, $A_1K_1 : A_1D_1 = A_1K_1 : A_1B_1 = 1:$. Якщо $ABCD$ - зображення такого ромба (рис. 3.1.7), а BK - зображення його висоти, то повинна виконуватись пропорція $AK:AD=1:\sqrt{2}$, бо при паралельному проектуванні відношення відрізків однієї прямої зберігається.

Тому, щоб розв'язати задачу, на відрізку AD треба знайти таку точку K, яка б задовольняла подану вище пропорцію. Для цього на відрізку AD, як на діаметрі, описуємо півколо, з його центра O проводимо перпендикуляр до відрізка AD. Нехай T– точка перетину цього перпендикуляра з півколом, а коло радіуса AT з центром в точці A перетне відрізок AD в точці K. BK - зображення висоти ромба, яке треба було побудувати. Справді, якщо $AK=1$, *т*о і $AT=1$, а $AD=\sqrt{2}$ отже, $AK:AD=1:\sqrt{2}$, як і повинно бути. Якщо висоти проводять з вершин тупих кутів, то задача має 4 розв'язки. А взагалі вона має безліч розв'язків. Її задовольняє, наприклад, кожний з відрізків, паралельних BK, з кінцями на прямих BC і AD.

Задача 5. Дано паралельну проекцію кола і його діаметра. Як побудувати паралельну проекцію перпендикулярного діаметра [11].

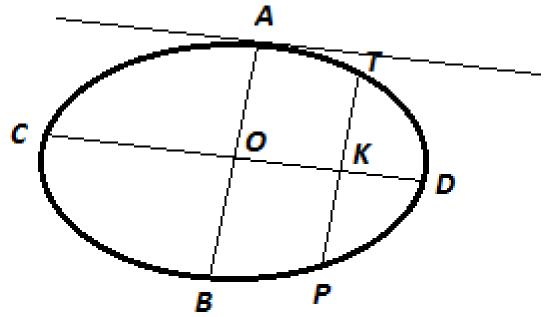


Рис. 3.1.8

Точно кажучи, так сформульована задача - не на побудову. Щоб її розв'язати, не треба виконувати побудову, потрібно тільки розповісти, як її можна виконати. Тому задовільною можна вважати й таку відповідь: через кінець даного діаметра AB треба провести дотичну до еліпса, а через середину AB провести діаметр, паралельний цій дотичній .

Але математично строга за допомогою циркуля і лінійки, наприклад, учні не зможуть побудувати дотичну до еліпса в даній точці. Тому кращою є інша відповідь: треба провести довільну хорду TP еліпса, паралельну AB. Хорда CD, що проходить через середини відрізків AB і TP - шуканий діаметр. Справедливість побудови випливає з того, що діаметр кола (без його кінців) є множиною середин усіх хорд, перпендикулярних до цього діаметра.

3.2. Перпендикулярність прямих і площин

Задачі на побудову можна розв'язувати за допомогою уявлюваних побудов і побудов на проекційних малюнках. На жаль, у навчальних посібниках задач обох типів дуже мало. Із задач на уявлювані побудови з дев'ятикласниками насамперед потрібно розглянути такі:

1. Через дану точку проведіть площину, перпендикулярну до даної прямої [18].
2. Через дану точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної площини [19].

3. Через дану пряму проведіть площину, перпендикулярну до даної площини [18].

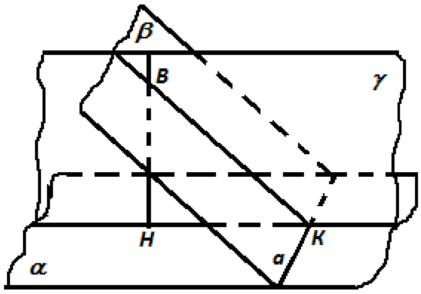


Рис. 3.2.1

1. Розв'язання.

Першу з цих задач можна розв'язати так. Нехай дано пряму a і точку B поза нею (рис. 3.2.1). Проведемо через них площину β , а в ній – пряму BK перпендикулярну до прямої a. Точка K – перетину цих прямих. Побудуємо через пряму a ще одну пощину α, відмінну від площини β, а в ній – пряму KH *перпедникулярну а*. Через прямі KB і KH, які перетинаються, можна провести площину γ. Ця площина задовольняє задачу, бо, по-перше, вона проходить через точку B, по-друге, вона перпендикулярна до прямої a, оскільки прямі KB і HK, які належать площині γ і перетинаються, перпендикулярні до прямої a.

Скільки є таких площин? З описаної побудови не випливає, що тільки одна, адже площина α - тільки одна з безлічі можливих. Тому єдиність побудованої площини краще довести методом від супротивного. Припустимо, що крім площини γ через дану точку B можна провести ще й площину γ_1 перпендикулярну до прямої a. Якщо вона площину α перетне по прямій HK_1 то це означає, що в площині α через точку H можна провести два різні перпендикуляри, що неможливо. Отже, побудована площина γ єдина.

Подане розв'язання стосується випадку, коли дана точка B лежить поза даною прямою a. Для повноти розв'язання треба розглянути ще один можливий випадок, коли дана точка B, через яку треба провести площину, перпендикулярну до прямої a, лежить на прямій a. У цьому випадку через пряму a проводимо дві різні площини. В них через точку B будуємо перпендикуляри до прямої a.

Площина, що проходить через побудовані перпендикуляри, шукана. Доведення і дослідження аналогічні тим, які були наведені при розгляді першого випадку. Задача завжди має один розв'язок.

Задачу можна розв'язати й іншими способами, але розглянутий –найраціональніший.

2. Розв'язання. Другу задачу розв'яжемо двома способами.

П е р ш и й   с п о с і б.

Якщо через дану точку B поза площиною α треба провести пряму, перпендикулярну до площини α, то побудову можна виконати так.

У даній площині α проводимо довільну пряму a (рис. 2.9) , а через неї і точку B - площину β. У площині β проводимо до прямої a перпендикуляр BK, а в площині α через K проводимо пряму $KH \perp a$. Через прямі BK і KH будуємо площину γ, а в ній з точки B проводимо перпендикуляр BH до прямої KH. Пряма BH – шукана, *бо* вона перпендикулярна до прямих a і KH, які перетинаються і лежать в площині α, отже $BH \perp a$.

Якщо точка H, через яку треба провести перпендикуляр до площини α, належить α, то побудову виконуємо в іншій послідовності . Через точку H в даній площині α проводимо довільну пряму HK, а в довільній її точці K - пряму $a \perp HK$. Через пряму a площини α проводимо ще одну площину β, відмінну від площини α, а в ній – пряму $KB \perp a$. Нарешті, через прямі KH і KB будуємо площину γ, в якій через дану точку H проводимо перпендикуляр HB до прямої HK. Пряма HB – шукана. В обох випадках задача має один розв'язок: через дану точку до даної площини можна провести тільки один перпендикуляр [23].

Д р у г и й   с п о с і б.

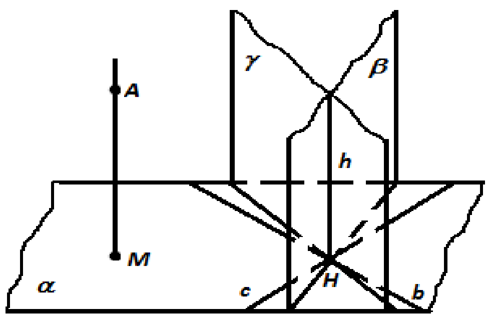


Рис. 3.2.2

Нехай через дану в площині α точку H треба провести пряму, перпендикулярну до площини α (рис. 3.2.2). Проведемо в площині α через точку H дві довільні прямі b і c і дві площини β і γ відповідно перпендикулярні до цих прямих. Пряма, по якій перетинаються площини β і γ, шукана, бо вона перпендикулярна до прямих b і c площини α, які перетинаються, отже, перпендикулярна й до площини α.

Якщо треба провести перпендикуляр до площини α через точку A, що лежить поза площиною α, то спочатку описаним вище способом будуємо перпендикуляр до α через будь-яку точку H цієї площини, а потім через A проводимо пряму, паралельну цьому перпендикуляру.

Задача 6. Трикутник ABC – зображення правильного трикутника, відрізок MK зображає перпендикуляр, проведений з точки K до площини трикутника. Побудуйте прямі, що проходять через точку K і перпендикулярні до сторін трикутника [8].

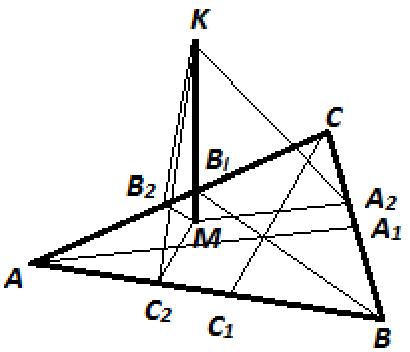


Рис. 3.2.3

Р о з в ' я з а н н я . Відомо, що висоти правильного трикутника є його медіанами, тому вони повинні зображатись медіанами даного трикутника ABC. Будуємо їх: AA_1, BB_1, CC_1. Через точку M проводимо прямі $MA_2 \parallel AA_1$, $MB_2 \parallel BB_1$, $MC_2 \parallel CC_1$ (рис. 3.2.3). Кожний з цих відрізків - зображення перпендикуляра до відповідної сторони, проведеного через точку M. Відрізки KA_2, KB_2, KC_2 - шукані, оскільки вони є похилими, проекції яких перпендикулярні до сторін Δ ABC. Згідно з теоремою про три перпендикуляри: $KA_2 \perp CB$, $KB_2 \perp AC$, $KC_2 \perp AB$.

Задача має безліч розв'язків. Якщо P - довільна точка прямої MA_2, то пряма KP також перпендикулярна до прямої BC.

3.3. Многогранники

Переважна більшість задач на побудову, які розв'язують під час вивчення розділу, це задачі на побудову перерізів многогранників площинами. Їх ефективно розв'язують на проекційних малюнках. Основні способи таких побудов - спосіб слідів і спосіб відповідності. Не менш загальним і доступним для учнів 9-11 класів є спосіб паралельних площин.

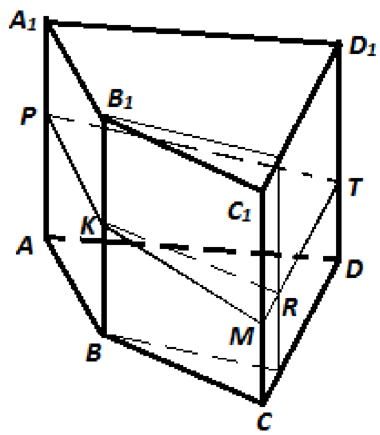


Рис. 3.3.1

Нехай нам потрібно побудувати переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.3.1) площиною, яка проходить через дані на її бічних ребрах точки K, P, T, треба :

1) провести $BL \| CO$, позначити точку L, в якій перетинаються прямі BL і AD;

2) провести $LL_1 \| AA_1$

3) провести $KR \| PT$, позначити точку R, в якій перетинаються прямі KR і LL_1

4) провести пряму TR до перетину з AA_1 у точці M.

Чотирикутник $KPTM$ - шуканий переріз. Якщо пряма TR перетинає не ребро AA_1, а його продовження, то в перерізі буде п’ятикутник. Користуючись згаданими трьома способами, можна будувати перерізи не тільки призм, а й інших многогранників.

Задача 7. На трьох попарно мимобіжних ребрах паралелепіпеда взято три точки. Побудуйте переріз, що проходить через ці три точки [1].

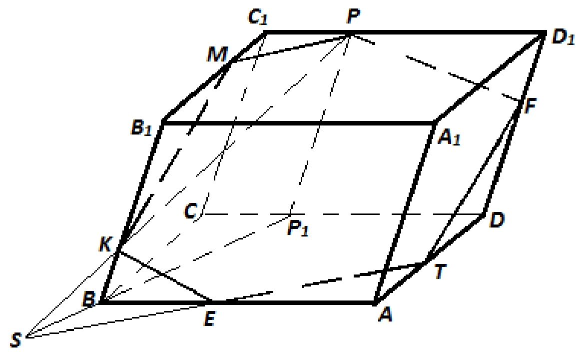


Рис. 3.3.2

Р о з в ' я з а н н я . Щоб побудувати переріз паралелепіпеда (рис. 3.3.2), який проходив би через точки *K, P* і *T,* позначимо проекцію (паралельну бічному ребру) точки *P* буквою P_1. Якщо прямі *PK* і P_1B перетинаються в точці S, знаходимо точку *E,* в якій пряма *ST* перетинає ребро *AB*. Далі у верхній основі паралелепіпеда проводимо відрізок *PM,* паралельний *TE,* а в грані C_1CD - відрізок *PF,* паралельний *KE*. Шестикутник *KMPFTE* — переріз, який треба було побудувати.

Задача 8. Чотири вершини куба розміщені в точках O (0;0;0), A(2;0;0), C(0;2;0), O_1(0;0;2). Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки K(5;0;0), P(0;5;0) і T(0;0;5). Побудувавши в прямокутній системі координат за даними координатами куб і площину *KPT* [29] .

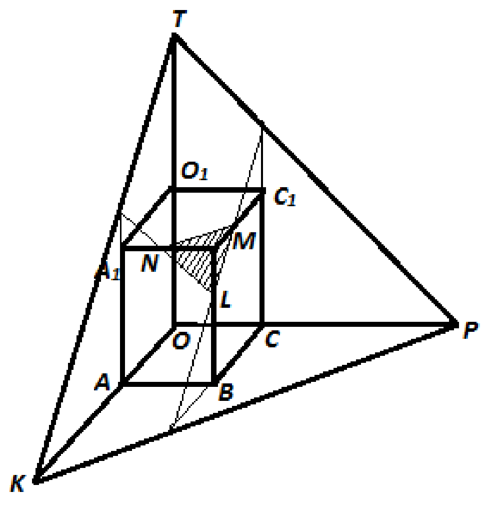


Рис. 3.3.3

Р о з в ' я з а н н я . Якщо прямі CB і KP перетинаються в точці S, а прямі CC_1, і PT – в точці Q, то пряма перетинає ребра куба BB_1 і C_1B_1 у точках L і M. Аналогічно знаходимо точку N. Рівносторонній трикутник LMN - шуканий переріз.

Задача 9. Побудуйте куб, вписаний у правильну чотирикутну піраміду так, щоб чотири його вершини лежали на апофемах піраміди, а чотири - на її основі [27].

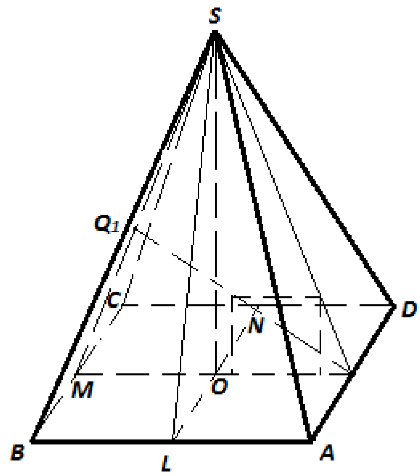


Рис. 3.3.4

Розв'язання. Спочатку потрібно побудувати правильну чотирикутну піраміду (рис. 3.3.4), провести її висоту і апофеми. Потім можна запропонувати учням розмістити вершини вписаного куба «на око». В результаті в учнівських зошитах «куби» будуть або високі, або низькі. Не біда: на помилках навчаються. Тепер учні уважніше слухатимуть пояснення. Діагональний переріз куба повинен бути вписаний у рівнобедрений трикутник *SKM.* Сторони діагонального перерізу відносяться як $1:\sqrt{2}$.

Намалюємо довільний прямокутник з таким відношенням сторін, як показано на першому малюнку, а потім скористаємось методом подібності. Дістанемо одну з вершин вписаного куба. Тепер уже неважко знайти інші вершини: $Q, Q_1, P_1, P, R_1, R, T_1, T$ (рис. 2.15).

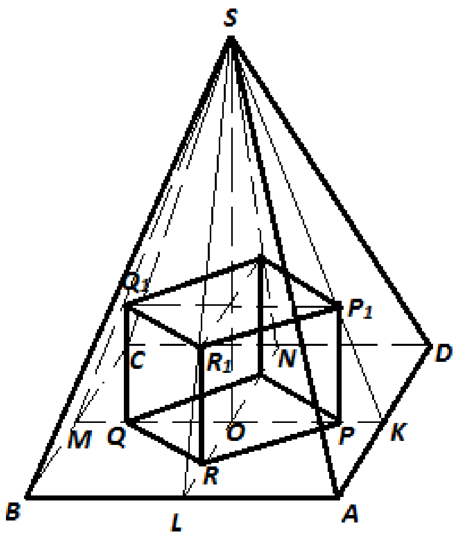


Рис. 3.3.5

3.4. Тіла обертання

Перш ніж розв'язувати які-небудь задачі на фігури обертання, треба навчити учнів зображати їх. Мало показати, як це робити, необхідно закріпити набуте вміння на вправах, зокрема й таких:

1) Намалюйте циліндр.
2) Намалюйте циліндр, висота якого втричі більша від діаметра основи.
3) Намалюйте рівносторонній циліндр.
4) Намалюйте циліндр і який-небудь його осьовий переріз.

Аналогічні вправи слід пропонувати учням і про конус та зрізаний конус.

У багатьох методичних посібниках пропонується малювати фігури обертання за допомогою шаблонів, зокрема еліпсів. Пропозиція корисна, але не треба впадати в крайність і вимагати, щоб учні абсолютно всі фігури обертання завжди зображали за допомогою шаблонів. Треба час від часу пропонувати їм малювати еліпси і від руки. Адже й ті, хто після десятирічки продовжуватиме навчатись, і кому на виробництві доводитиметься малювати ескізи різних деталей і споруд, схожих на фігури обертання, робитимуть це здебільшого без шаблонів еліпсів. Тому в основному на уроках геометрії десятикласники повинні вчитись малювати прості фігури обертання не тільки за допомогою шаблонів.

Циліндр, конус, зрізаний конус радимо малювати так, щоб їх зображення були фігурами симетричними, тобто, щоб великі осі еліпсів розміщались горизонтально. Тільки якщо фігуру обертання малюють на зображенні многогранника, еліпси зображають відповідно до граней многогранника. При побудовах малюнків до задач, зрозуміло, можливі деякі неточності. Проте вдаватись у деталі в таких випадках на уроках стереометрії не треба. Малюнок до стереометричної задачі повинен бути правильним не з погляду нарисної геометрії, а з погляду правильності відображення в ньому основних відношень, важливих для **даної задачі**, щоб вписана куля дотикалась до всіх граней многогранника, щоб вершини вписаного в неї многогранника не виходили за межі її поверхні тощо [7].

Корисні такі вправи:

1) Намалюйте правильну трикутну призму, описану навколо кулі.
2) Намалюйте правильну зрізану чотирикутну піраміду, вписану в сферу.
3) Намалюйте правильну трикутну піраміду, описану навколо циліндра.
4) Намалюйте сферу, описану навколо прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

Такі вправи сприяють вихованню графічної культури учнів. До того ж вони ніби розчленовують на частини ті труднощі, з якими стикаються учні під час розв'язування стереометричних задач.

Зрозуміло, що вчитель повинен не тільки пропонувати учням вправи і оцінювати їх виконання, а й **навчати**, як ці вправи правильно виконувати. Іноді досить порадити, як краще розмістити фігуру, з чого починати малюнок, як усунути недоліки, а іноді й самому слід показати, як треба малювати подібні комбінації фігур. Наприклад, першу із сформульованих вище вправ можна пояснити учням так.

Задача 10. Намалюйте правильну трикутну призму, описану навколо кулі [9].

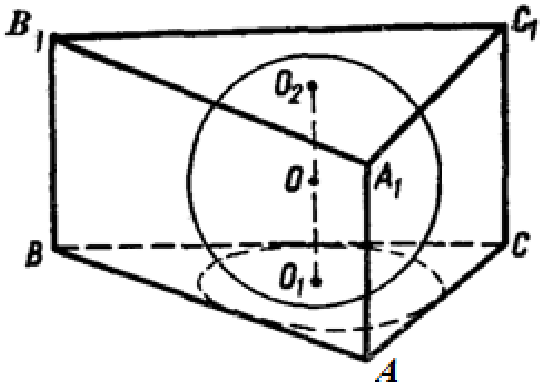


Рис. 3.4.1

Розв'язання. Спочатку намалюємо основу описаної призми — трикутник ABC, позначимо точку O_1 в якій перетинаються медіани цього трикутника (рис. 3.4.1).

Уявимо собі, якою повинна бути проекція вписаної кулі: це буде круг, який дотикається сторін трикутника *ABC* в їх серединах. Намалюємо відповідний еліпс. Великий діаметр цього еліпса має дорівнювати висоті описаної призми. Будуємо приблизно такої висоти бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1. Нехай O_2 - точка перетину медіан $\Delta\ A_1B_1C_1$. Точки O_2 і O_1 - полюси вписаної кулі. З середини O відрізка O_2O_1, як з центра, проводимо коло діаметром, який трохи більший від O_2O_1. Це коло - обрис вписаної вдану призму кулі.

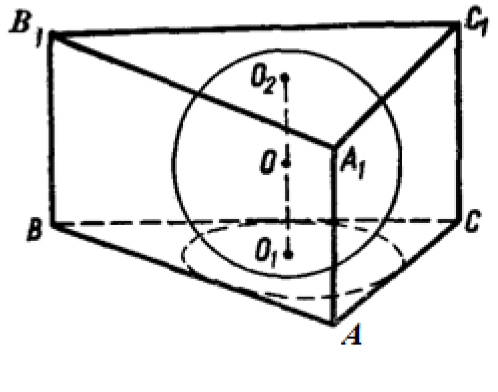


Рис. 3.4.2

Можна починати виконувати малюнок не з основи призми, а з її перерізу площиною, що проходить через середини бічних ребер (рис. 3.4.2).

Намалюємо зображення рівностороннього трикутника *KPT*. Впишемо в нього еліпс так, щоб він дотикався до кожної сторони трикутника в її середині.

Нехай O – центр цього еліпса. Проведемо через точки K, P, T і O вертикальні прямі і відкладемо на них відрізки $KA=KA_1=PB=PB_1=TC=TC_1=OO_1=OO_2$, довжина кожного з яких дорівнює половині довжини великого діаметра еліпса.

$ABCA_1B_1C_1$ – зображення правильної призми, описаної навколо кулі з центром О, O_1 *і* O_2 – полюси цієї кулі. Радіусом, трохи більшим від OO_1 опишемо її обрис. Малюнок готовий.

З десятикласниками доцільно розв'язати кілька задач на побудову перерізів фігур обертання.

Задача 11. Побудуйте переріз циліндра площиною, яка паралельна осі циліндра і проходить через дві дані на його поверхні точки [3].

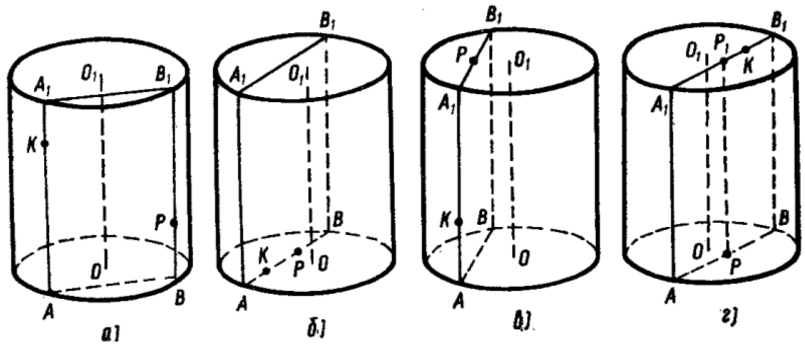


Рис. 3.4.3

Р о з в ' я з а н н я. Якщо дані точки K і P належать бічній поверхні циліндра (рис. 3.4.3), то через них проводимо твірні AA_1 і BB_1. Чотирикутник AA_1B_1B— шуканий переріз.

У розглянутих випадках задача має єдиний розв'язок. Але якщо дані точки лежать на одній твірній або в різних основах на одному перпендикулярі до цих основ, то задача має безліч розв'язків. А випадок, коли січна площина проходить через вісь циліндра, доводиться трактувати по-різному, залежно від прийнятого в посібнику означення прямої, паралельної площині.

Задача 12. Точки A, B, C належать різним твірним циліндра. Побудуйте точки перетину площини АВС з якою-небудь іншою твірною циліндра (або з її продовженням) [5].

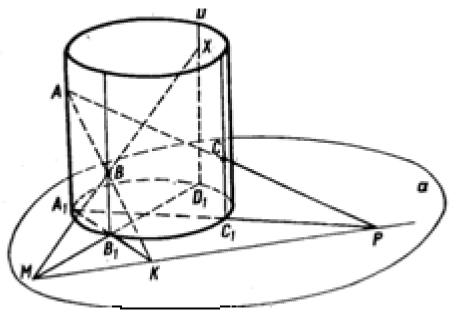


Рис. 3.4.5

Р о з в ' я з а н н я . Нехай дані точки *A, B, C* розміщені на різних твірних циліндра (рис. 3.4.5). Побудуємо точку перетину площини *ABC* з твірною DD_X. Побудову можна виконати в такій послідовності:

$AB \cap A_1B_1=K$, $AC \cap A_1C_1=P$, $B_1D_1 \cap KP=M$, $MB \cap DD_1=X$.

Точка *X* — це та точка, яку треба побудувати. Справді, з двох перших рівностей випливає, що площина *ABC* перетинає площину нижньої основи циліндра по прямій *KP*. Твірні BB_1 і DD_1 паралельні і точка *M* лежить в їх площині. Отже, пряма *MB* обов'язково перетне пряму (якщо *M* не збігається з B_1). Оскільки *M* і *B* належать січній площині *ABC,* то й кожна інша точка прямої *MB,* зокрема й точка *X*, належить січній площині.

Під час розв'язування задачі може трапитись, що пряма *MB* перетне не твірну , а її продовження.

Твірна DD_1 може бути розміщена так, що $B_1D_1 \parallel KP$, у цьому разі треба провести пряму *BX* паралельно *KP*. Точки *A* і *B* можуть бути задані так, що $AA_1=BB_1$, тоді пряму *PK* треба проводити паралельно A_1B_1. Нарешті, всі три дані точки можуть лежати на однакових відстанях від нижньої площини основи циліндра, тоді й точку *X* треба відкласти на такій самій відстані від D_1.

РОЗДІЛ 4
ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

Педагогічний експеримент є таким методом досліджень, при якому відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов, що відповідають меті дослідження.

Педагогічний експеримент – це науково поставлений дослід, спостереження досліджуваного явища в точно врахованих умовах, які дають можливість стежити за ходом явища і відтворювати його при повторенні цих умов. Характерною рисою експерименту є заплановане втручання людини в явище, що вивчається, можливість його багаторазового відтворення у змінених умовах. [13,с.26]

Предметом педагогічного експерименту є визначення ефективності застосування інформаційно- комунікаційних технологій на уроках геометрії при розв’язуванні задач векторно-координатним методом.

В експерименті брали участь учні 10-А та 10-Б класів Рівненської міської ЗОШ №22 у яких рівень навчальних досягнень з математики майже однаковий.

Ми використали порівняльний вид експерименту. Оскільки робота велась паралельно в двох класах, де на дану тему виділялась однакова кількість годин, то об’єм матеріалу відповідно був поданий однаковий, однак відрізнялись форми подання. Експериментальний 10-Б клас вивчав тему, використовуючи розроблену нами методику, а контрольний 10-А – традиційні методи проведення уроків.

В 10-Б класі на уроках геометрії навчальні заняття проводилися з використанням презентації та пакетів математичних програм Gran та GeoGebra.

Навчаючий етап експерименту передбачав постановку і розв’язання таких завдань:

– закріпити знання з теми дослідження;
– урізноманітнити навчальний процес;

– перевірити розроблену систему рівневих завдань з математики для учнів десятих класів;

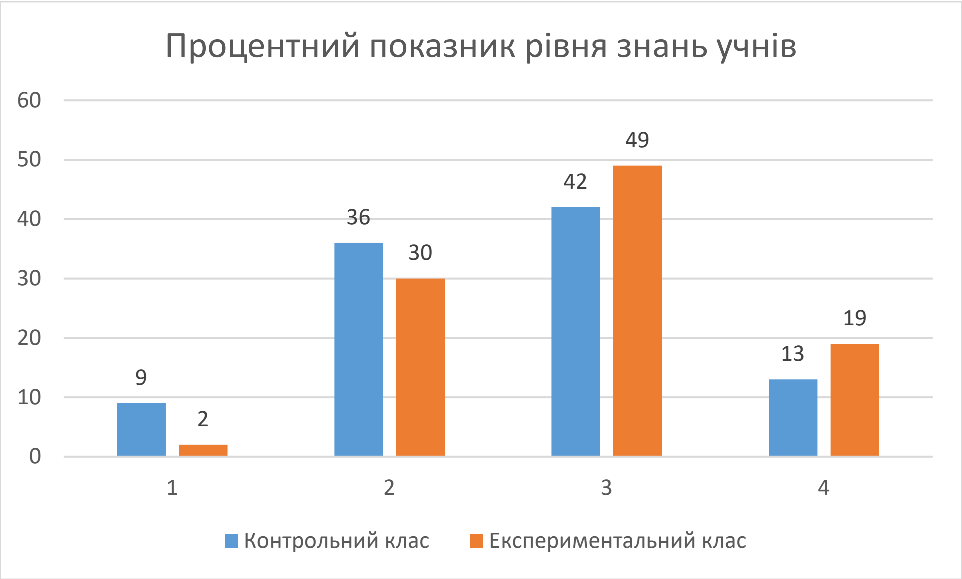
– з’ясувати порівняльну ефективність традиційного навчання та навчання за допомогою комп’ютерних технологій.

Після проведення уроку узагальнення та систематизації знань (Додаток А) в 10-А та 10-Б класах, виконання контрольних завдань передбачало письмову та комп’ютерну перевірку на рівні не нижче обов’язкового, результати яких такі:

Таблиця 4.1

Рівень знань учнів	Процентний показник рівня знань учнів контрольного 10-А класу	Процентний показник рівня знань учнів експериментально 10-Б класу
Початковий	9	2
Середній	36	30
Достатній	42	49
Високий	13	19

Результати також подамо у вигляді діаграми.



Отже, можна зробити висновок, що учні експериментальних класів, які навчалися за впровадженою методикою, з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, показали дещо вищий рівень знань, ніж учні контрольної групи, для яких навчання проводилося традиційними методами. Використання комп’ютера на уроках математики підсилює інтерес до уроку, до предмету, підсилює мотивацію вивчення учнями навчального предмету, дозволяє зекономити час, має високу степінь наочності.

ВИСНОВКИ

Сьогодні, як ніколи, все гостріше викристалізовуються протиріччя між: змістом шкільної математичної (зокрема, геометричної) освіти і дидактичним, процесійно-методичним його забезпеченням, з одного боку, та постійно зростаючими програмними вимогами, які під час навчально-виховного процесу ставить учитель, колектив до особистості учня, його уваги, пам’яті, мислення і фактичним рівнем психічного розвитку, розвитком якостей особистості з іншого; варіативністю інтересів, нахилів, здібностей суб’єктів навчального процесу та браком особистісної зорієнтованості змісту й організації навчання математики; наявною практикою впровадження ІКТ під час навчання математики та відсутністю науково виваженого психолого-педагогічного й методичного супроводу; об’єктивною необхідністю реалізації дидактичних умов, що закладені в змісті шкільної геометричної освіти і спрямовані на формування умінь та навичок розв’язувати стереометричні задачі на побудову та недостатнім методичним забезпеченням, необхідним для розв’язання цих завдань.

Систематичне вивчення геометричних побудов необхідно в шкільному курсі, так як в процесі виконання завдань вони концентрують в собі знання з інших областей математики, формують пошукові навички вирішення практичних проблем, долучають до самостійних досліджень, сприяють виробленню просторової уяви.

Під час вивчення стереометрії роль рисунка, є, безумовно, вирішальною. Вчитель, щоб викликати в учнів наочне просторове уявлення геометричних образів, поєднує його разом з викладом теоретичних міркувань та пояснень. Таке вивчення предмета є конкретнішим і відповідає практичним завданням засвоєння курсу стереометрії. У вивченні стереометрії роль проекційного рисунка вирішальна. З одного боку, вчитель ілюструє за допомогою рисунка на дошці свій виклад, щоб викликати в учнів наочне просторове уявлення про геометричні образи, поєднуючи з ними теоретичні міркування та пояснення. Таке вивчення предмета є конкретнішим і відповідає практичним завданням засвоєння курсу стереометрії. Логічно вибудувана лінія формування й розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації є запорукою їх графічної культури.

Комп'ютерна підтримка вивчення геометрії з використанням програмного засобу типу GRAN-3D дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи та поглиблюючи вивчення і розуміння методів геометрії на відповідних рівнях в середніх навчальних закладах з найрізноманітнішими ухилами навчання – гуманітарного спрямування, СПТУ різних профілів, середніх загальноосвітніх школах, гімназіях, ліцеях, класах і закладах з поглибленим вивченням природничо-математичних дисциплін. При цьому і програми курсів геометрії, і глибина вивчення відповідних понять, законів, методів, аналітичного апарату можуть суттєво різнитися між собою.

Такий підхід до вивчення геометрії дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, що в свою чергу значно сприяє розвиткові образного мислення, оскільки усі рутинні обчислювальні операції та побудови виконує комп'ютер, залишаючи учневі час на дослідницьку діяльність.

Разом з тим очевидною є потреба розвиваючих вправ із залученням традиційних засобів навчання, гармонійного і педагогічно доцільного поєднання нових інформаційних технологій і традиційних методичних систем навчання.

При написанні роботи було досягнуто поставленої мети, а саме ознайомлено з методикою викладання теми «Геометричні побудови в просторі» в шкільному курсі геометрії з використанням ІКТ та систематизовано теоретичні відомості, підібрано практичні завдання.

В процесі написання дипломної роботи були вирішені наступні завдання:

- опрацьовано навчально-методичну літературу по даній темі;
- висвітлено основні методи розв'язання задач на побудову;
- показано застосування даних методів до розв'язування стереометричних задач;

- показано застосування програми Gran 3D до розв'язування стереометричних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров І. І. Збірник геометричних задач на побудову за рішеннями / І.І. Александров. – 18-те вид. - М.: Учпедгиз, 1954. – 342 с.

2. Андрєєв, А.А. Комп'ютерні та телекомунікаційні технології в сфері освіти / А.А. Андрєєв / / Шкільні технології. - 2007. - № 3-151-170 с.

3. Аргунов Б. І. Елементарна геометрія: навч. посібник для пед. інститутів / Б.І. Аргунов, М.Б. Балк. - М.: Просвещение, 1966. – 268 с.

4. Артеменко Н. М. Методи розв'язування стереометричних задач / Н. М. Артеменко// Математика в школах України. - № 5. – С. 37-39.

5. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии/ Л. С. Атанасян. – ч.1.-М.: Просвещение,1974. – 387 с.

6. Бевз Г. П. Двогранні кути/ Г. П. Бевз // Математика в школах України, 2009. –№6. – С. 35-36.

7. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навчальний посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

8. Бевз Г. П. Методика решения стереометрических задач: Пособие для учителя / Г. П. Бевз. – К.: Рад. шк.., 1988. – 192 с.

9. Бурда М.І., Савченко Л.М., Собко М.С. Геометрія. Експериментальний навчальний посібник для 8 класу шкіл з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики.-К.:Освіта, 1992.-88 с.

10. Бурда М.І., Савченко Л.М., Собко М.С. Геометрія. Експериментальний навчальний посібник для 9 класу шкіл з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики.-К.:Освіта, 1994.-144 с.

11. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи / Я. Е. Гольдберг. – К.: Рад. шк.,1989, 162 с.

12. Глізбург, В.І. Інформаційні технології при освоєнні топологічних і диференційовано-геометричних знань в умовах безперервної математичної освіти / В.І. Глізбург / / Інформатика та освіта. - 2009. - № 2. - 122-124 с.

13. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник.-М.:Наука, 1987.-240 с.

14. Жалдак М.І. Компьютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів/ М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. - .-К: РННЦ „ДІНІТ”, 2004 -168 с.:іл.

15. Жалдак М.І. Компьютер на уроках математики: Посібник для вчителів. –К.:Техніка, 1997.-304 с.: іл.

16. Ільясова, Р.А. Шляхи формування методичної майстерності майбутнього вчителя математики у використанні інформаційно-комунікаційних технологій / Р.А. Ільясова / / Інформатика та освіта. - 2009. - № 3. -100-102 с.

17. Іманова, О.А. Розвиток діяльнісної та креативної компонент медіакомпетентності учнів старших класів середньої повної школи засобами мультимедійних технологій / О.А. Іманова, О.Г. Смолянінова / / Інформатика та освіта. - 2009. - № 5. -106-109 с.

18. Киселев А. П. Геометрия / Под. ред. Н. А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 328с.

19. Лисянська Г.В. Геометрія. Стереометрія: навч. – метод. посібник / Г.В.Лисянська, Н.Ю.Іохвідович, Р.В.Посилаєва. - Х.: ХДТУБА, 2011. – 92с.

20. Литвиненко В. Н. Сборник задач по стереометрии с методами решений: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1998. – 255 с: ил.

21. Місюркеев І. В. Геометричні побудови. Посібник для вчителів / І.В.Місюркеев. - М: Учпедгиз, 1950. – 238 с.

22. Повзло Н. М. Проблеми розв’язування стереометричниз задач та пояснення їх розвазання / Н. М. Повзло // Математика в школах України. – 2009. –№6. – С. 36-39.

23. Погорєлов О. В. Геометрія. Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед. ШК/ О. В. Погорєлов – 6-те ВИД.- К: Освіта , 2001. – 128 с.

24. Понарін Я. П. Елементарна геометрія: У 2 т. - Т.2: Стереометрія, перетворення простору / Я.П.Понарін - М.: МЦНМО, 2006. – 256 с.

25. Раков С.А., Горох В.П. Компьютерные эксперименты в геометрии.- Харків. МП Регіональний центр нових інформаційних технологій. 1996.-176 с.

26. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 240 с.

27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник / З. І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

28. Сучасні освітні технології. Навчальний посібник / Г.К. Селевко. - М.: Народна освіта, 1998. - 256 с.

29. Шаригін І. Ф. Задачі з стереометрії / І.Ф. Шаригін. - М.: Наука, 2009. – 288 с.

30. Ярова О. Т. Комп’ютерні технології на уроках геометрії[Електронний ресурс] / Ольга Тимофіївна Ярова – Режим доступу до ресурсу: http://www.google.com.ua/url?url=http://liceymilicii.edu.kh.ua/Files/downloads/%25D0%25A1%25D1%2582%25D0%25B0%25D1%2582%25D1%2582%25D1%258F_%25D0%25B6%25D1%2583%25D1%2580%25D0%25BD%25D0%25B0%25D0%25BB_%25D0%25AF%25D1%2580%25D0%25BE%25D0%25B2%25D0%25B0.docx&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ei=Te11Veb1J8u3swG1p4DIBQ&ved=0CB4QFjAC&usg=AFQjCNH1nwNJxpjO9FGwLA8K0uPzvU6wGw.

Додаток 1

Конспект уроку

Тема уроку. Многогранники. Призма.

Мета уроку: ознайомити учнів із поняттям задачі многогранника. Сформувати вміння та навички обчислювати об'єм призми, площу її бічної поверхні. Використовувати здобуті знання та вміння для розв'язування складніших задач. Виховувати організованість у процесі виконання практичних завдань. Розвивати вміння творчо висловлювати думки в процесі аналізу запропонованого матеріалу.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання та матеріали: ПК, пакет програмного забезпечення GRAN 3D.

Хід уроку

1. **Організаційна частина**
2. **Перевірка домашнього завдання**

Перевірка наявності домашнього завдання та відповіді на запитання учнів, які виникли в них під час їх виконання.

3. **Актуалізація опорних знань.**
   - Продовжити речення « Дві площини паралельні, якщо…»
   - Дайте означення двох прямих.
   - Що називається двогранним кутом?
   - Що таке лінійний кут?
   - Дайте означення тригранного кута.
4. **Мотивація навчальної діяльності.**

Форму многогранника мають багато предметів (Рис.1), що нас оточують щодня. Многогранники відіграють важливу роль, як в теорії так і на практиці.

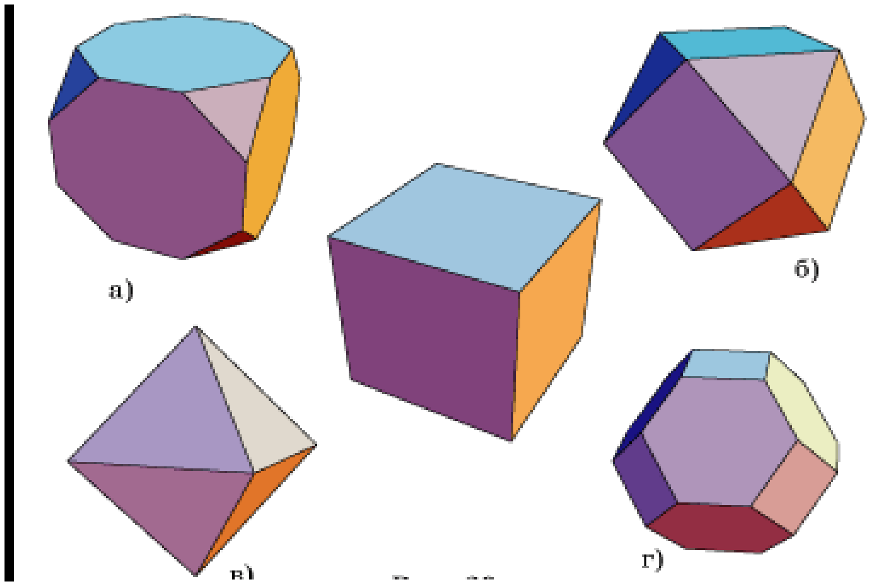


Рис. 1

5. Вивчення нового матеріалу.

Отже, *многогранником називається тіло, обмежене скінченною кількістю площин.*

Многокутники, які обмежують многогранник, називаються його *гранями*, сторони многокутників – *ребрами*, а вершини – *вершинами многокутника.*

Відрізок, що сполучає дві його вершини, які не містяться в в одній грані, називаються *діагоналлю* многогранника.

Наприклад, на Рис.2 зображений прямокутний паралелепіпед, він має 6 граней (прямокутників), 12 ребер, 8 вершин, 4 діагоналі.

(На парті має бути модель прямокутного паралелепіпеда, все пояснення ілюструється на моделях)

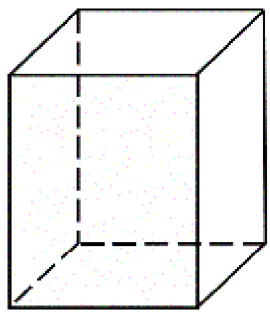


Рис. 2

Одним із найпростіших видів многогранників є пряма призма(Рис. 3). *Пряма призма – многогранник, у якого дві грані, які є основними, лежать у* *паралельних площинах, а всі ребра, які не належать цим граням, перпендикулярні до площини основи.*

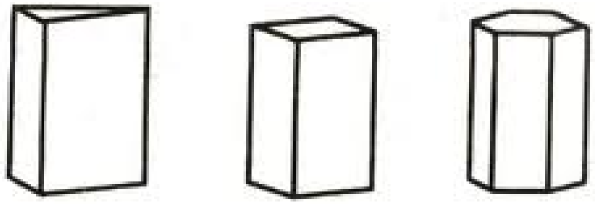


Рис. 3

Із означення прямої призми випливає, що бічні ребра призми рівні між собою як відрізки паралельних прямих, які розміщені між паралельними площинами. Через це кожна бічна грань призми – прямокутник. Висотою призми є її бічне ребро.

Пряму призму, основою якої є паралелограм, називають *прямим паралелепіпедом.*

Якщо в основі прямого паралелепіпеда є прямокутник, то такий паралелепіпед називають прямокутним. Прямокутний паралелепіпед мають цеглини, ящики, книжки тощо (Рис. 4)

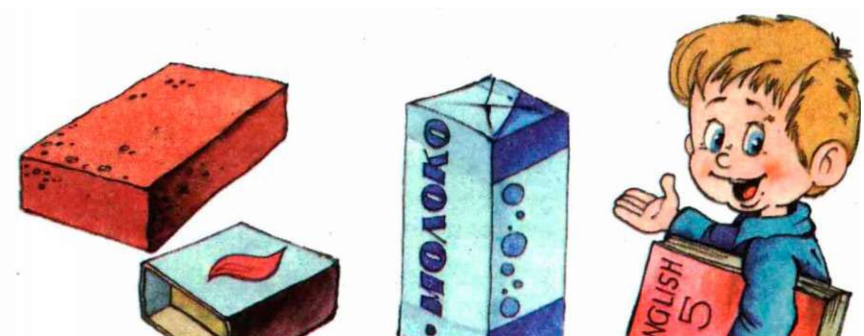


Рис. 4

Пряма призма, в основі якої лежить правильний многокутник, називають *правильною призмою.*

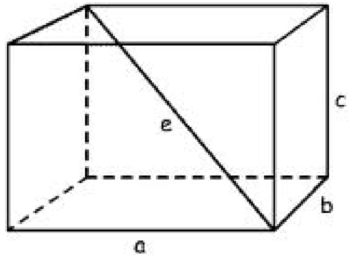


Рис. 5

Розглянемо, площі бічної і повної поверхні призми:

$\mathbf{S_{біч}= a_1H+ a_2H+ a_3H+…+ a_nH=H(a_1+a_2+…+a_n)=H*P}$

$\mathbf{S_{пов=}\ S_{біч}+S_{осн}}$,

де $a_1+a_2+…+a_n$ – сторони основи призми, H – висота(H=c), P – периметр призми.

Нам з 5-6 класів відомо, що об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів (Рис. 5) ***V= abh***. Цю формулу можна записати у вигляді : ***V= S*h***, де ***S=ab*** **–** площа призми. Остання формула справджується для будь-якої призми.

6. Закріплення нового матеріалу. Розв’язування задач.

Задача №123. Знайти повну поверхню і об’єм куба з ребром 3 см. (Учням пропонується розв’язати задачу наввипередки)

Правильність розв’язання задачі перевіримо використовуючи ППЗ Gran3D.

Алгоритм розв’язання задачі (за допомогою комп’ютера):

1) Вибираємо команду *Об’єкт/створити базовий об’єкт*
2) Вибираємо вид многогранника *Куб*
3) *Спосіб задання – ребро*
4) Вказуємо довжину ребра - *3*
5) Натискаємо кнопку *Створити.*

Побудувавши куб, з довжиною ребра 3 см, ми отримали у вікні *характеристики об’єкта,* що площа повної поверхні куба- 47,9 см^2, а об’єм дорівнює 18 см^3(Рис. 6).

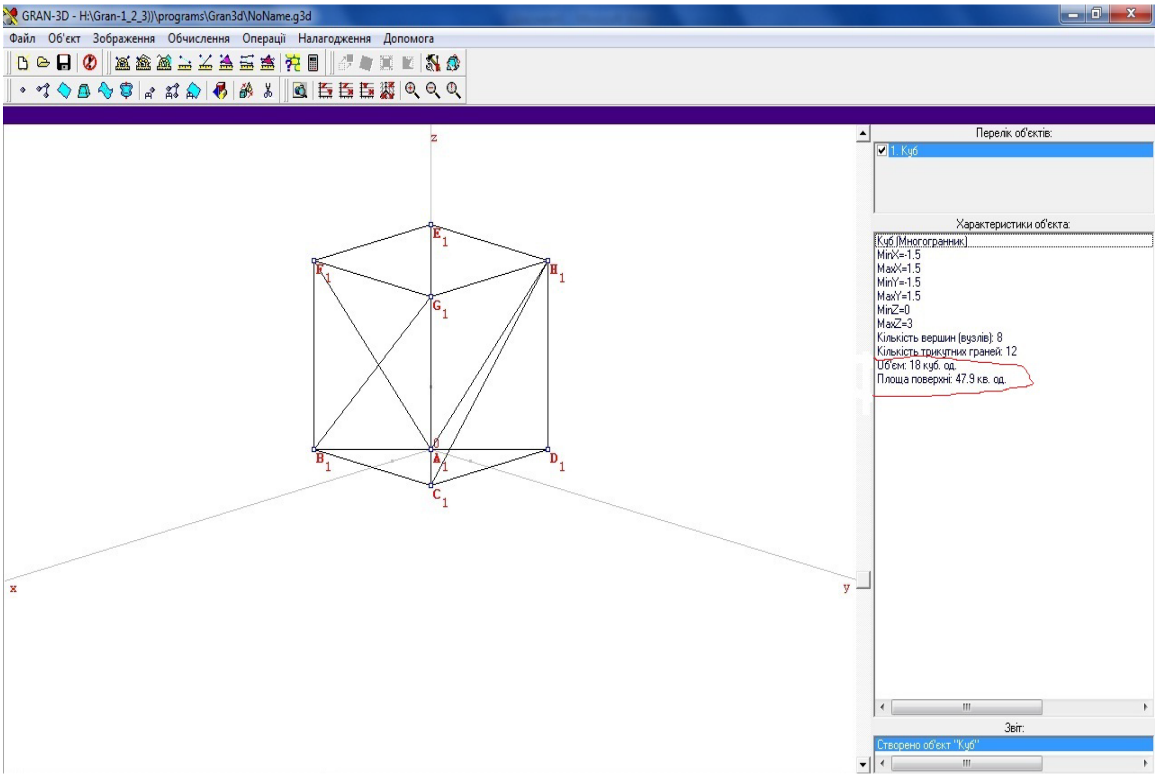


Рис. 6

Задача № 125. Дано пряму призму в основі якої лежить паралелограм, сторони якого 6 см і 8 см, а гострий кут 60^0. Знайти площу бічної поверхні і об’єм призми, якщо відомо, що висота дорівнює 10 см.

Правильність розв’язання задачі перевірити використовуючи ППЗ Gran3D.

(Учні розв’язують дану задачу, звіряючись із дошкою, де один із учнів розв’язує цю задачу з допомогою вчителя. Правильність усі разом перевіряють за допомогою комп’ютера).

Алгоритм розв’язання задачі (за допомогою комп’ютера):

1) Вибираємо команду *Об’єкт/створити базовий об’єкт*
2) Вибираємо вид многогранника *Прямий паралелепіпед*
3) Вибираємо те, що дано: в основі – *дві сторони і кут між ними* та *висота*
4) Натискаємо кнопку *Створити.*

Ми отримали об’єм призми - 416 $см^3$. Далі шукаємо площу бічної поверхні.

5) Вибираємо *Обчислення- Многогранник- Площі та периметри граней.*

6) Ставимо мітки на бічних гранях

Ми отримали, що площа бічної поверхні дорівнює 280 см^2.(Рис. 7)

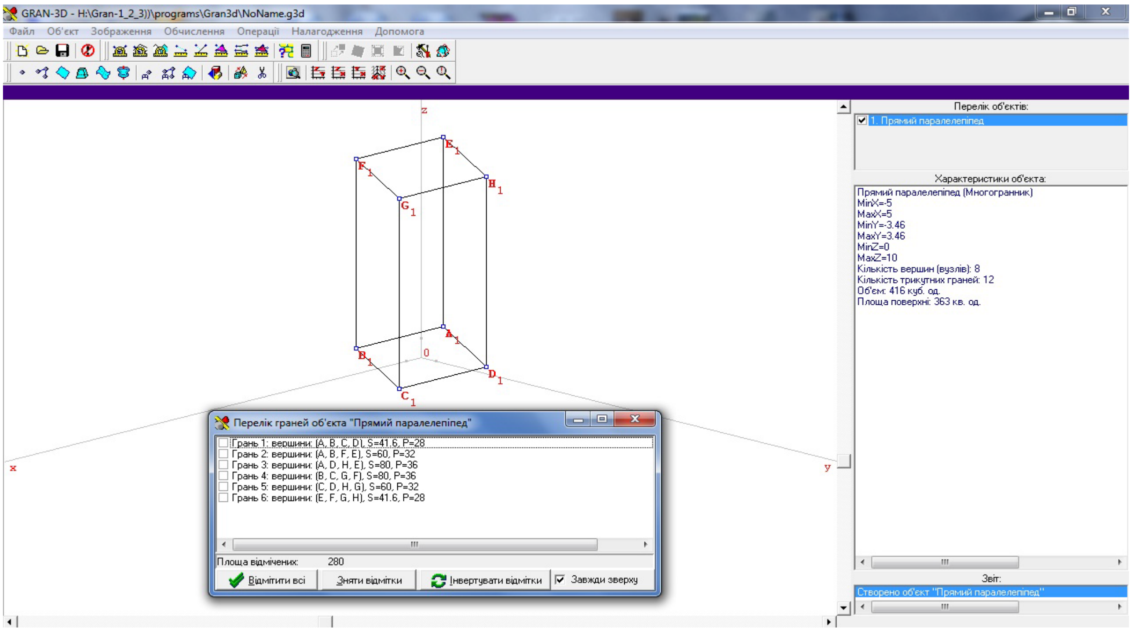


Рис. 7

7. **Домашнє завдання.** Розв’язати задачу. Перевірити правильність виконання за допомогою комп’ютера.

Задача . В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один і катетів 6 см. Знайти площу бічної поверхні і об’єм призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

8. Підведення підсумків уроку.

Додаток 2

Конспект уроку

Тема уроку. Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра.

Мета уроку: повторення, приведення в систему й розширення відомостей про циліндр, площу поверхні та об'єм циліндра; формування вмінь учнів знаходити площі поверхонь і об'єми циліндрів.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання та матеріали: ПК, пакет програмного забезпечення GRAN 3D.

Вимоги до рівня підготовки учнів: пояснюють, що таке циліндр та його елементи; зображують і знаходять на рисунку циліндр; записують й пояснюють формули площі поверхні та об'єму циліндра; застосовують вивчений матеріал до розв'язування задач, у тому числі прикладного змісту.

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірити наявність виконаного домашнього завдання та відповісти на запитання учнів, які виникли в них при розв'язуванні задач.

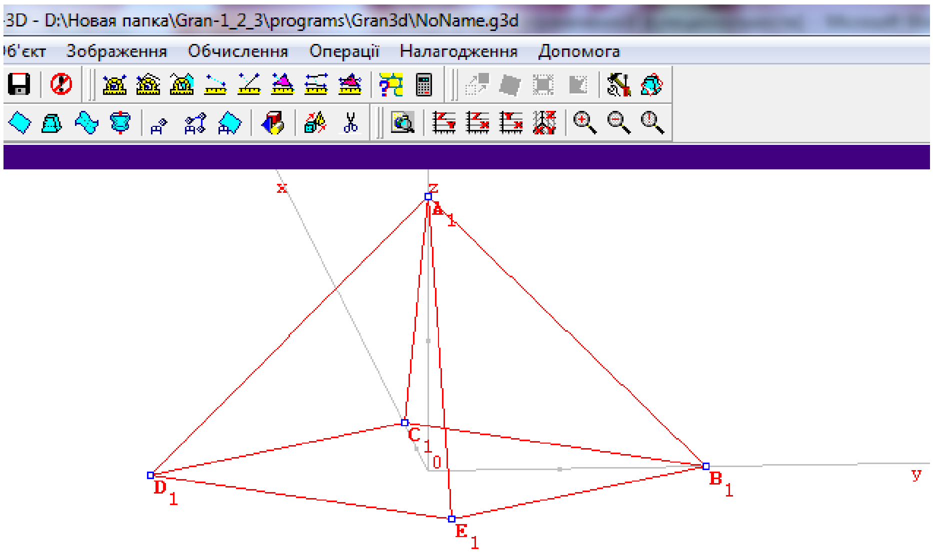
Розв'язання

1) Нехай *SABCD* — правильна піраміда .
$SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = AD = a.$

$S_{\text{пір}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бічн}} = AB^2 + 4 \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2 + a^2\sqrt{3} =$

$= a^2(1 + \sqrt{3}).$

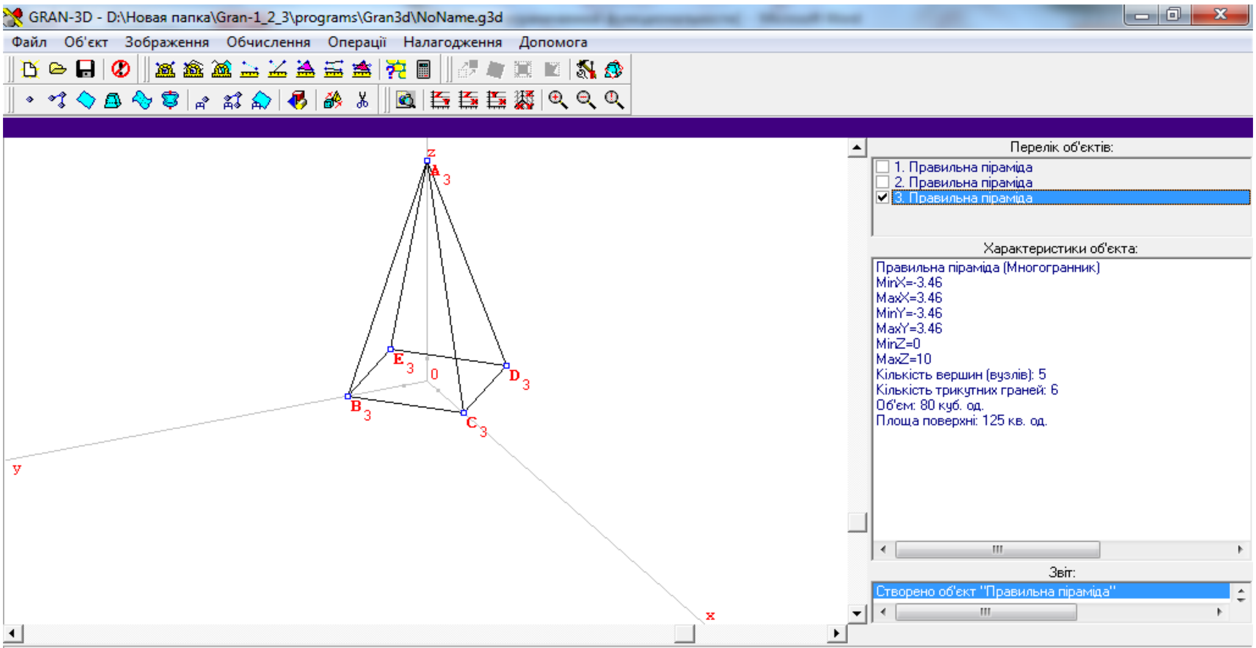
Відповідь. $a^2(1 + \sqrt{3})$.



2) *ABCD* — ромб (рис. 259), $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $SO = 10$ cm.

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}AC \cdot BD\right) \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\right) \cdot 10 = 80 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 80 см^3.

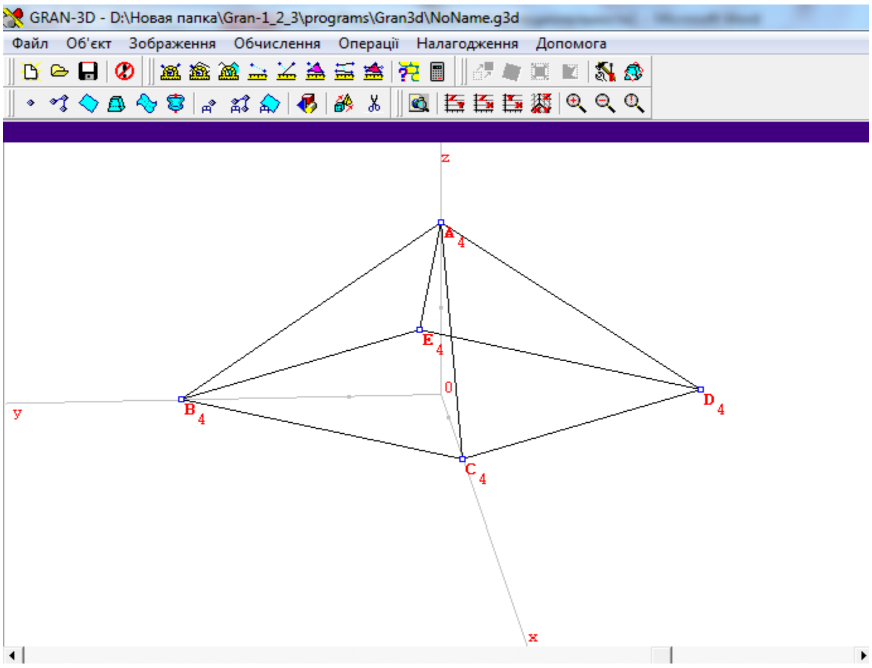


3) *SABCD* — правильна піраміда. АС = 4 см, $\angle ASO = 45°$.

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (см)}. \ SO = AO = 2 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{ОСН}} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8(\text{см}^2). \ V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $5\frac{1}{3}$ см^3.



ІІІ. Поетапне сприймання й усвідомлення нового матеріалу

Циліндр та його елементи

Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.

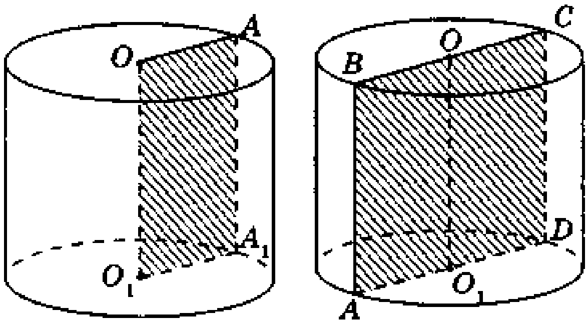
На рис. 1 зображено циліндр, утворений обертанням плоского прямокутника $OABO_1$ навколо прямої OO_1 — осі циліндра.

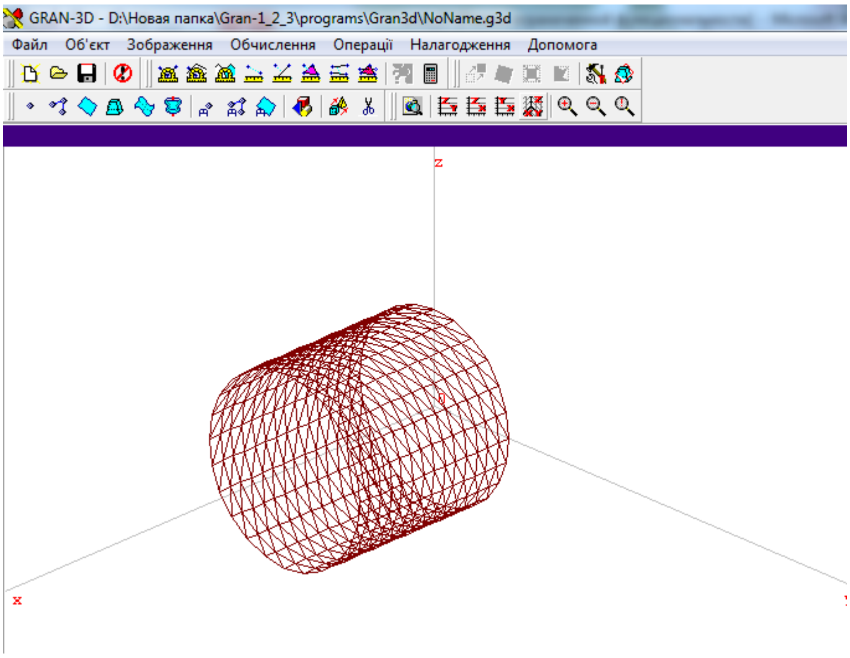
Сторони OA і O_1B описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах і називаються *основами* циліндра. Радіуси кругів називаються *радіусами* циліндра.

Сторона AB описує поверхню, яка називається *бічною поверхнею* циліндра. Відрізки бічної поверхні, які паралельні й дорівнюють AB, називаються *твірними* циліндра.

Висотою циліндра називається відрізок, перпендикулярний до основ, циліндра, кінці якого належать основам. Висота циліндра дорівнює його твірній.

Осьовий переріз циліндра — прямокутник зі сторонами, що дорівнюють висоті циліндра й діаметру його основи. На рис. 2 прямокутник $ABCD$ — осьовий переріз циліндра.

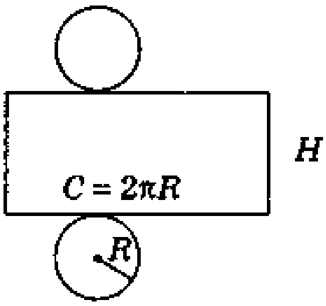




Площа поверхні та об'єм циліндру

Поверхня циліндра складається з двох рівних основ і бічної поверхні.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і одній із твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо розгортку циліндра (рис. 3). Вона складається з прямокутника, сторони якого дорівнюють довжині кола основ і висоті циліндра, і двох кругів, що є основами циліндра.



Площею бічної і повної поверхні циліндра називають площу розгортки бічної і повної поверхонь.

Тоді площа бічної поверхні $S_{бічн}$ і площа повної поверхні $S_{цил}$ визначаються формулами:

$$S_{бічн} = 2\pi RH,$$

$$S_{цил} = S_{бічн} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R),$$

де R, H — радіус і висота циліндра відповідно.

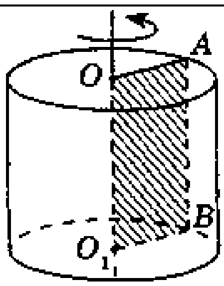
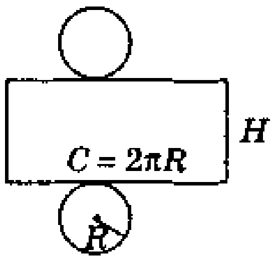
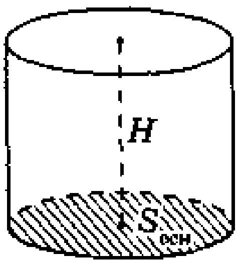
Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту $V = S_{осн} H$.

Якщо радіус основи циліндра дорівнює R, а висота H, то його об'єм

$$V = \pi R^2 H.$$

Учні складають конспект (зразок наведено у табл. 1).

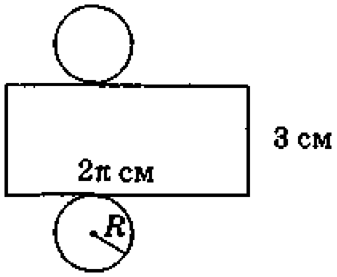
Таблиця 1

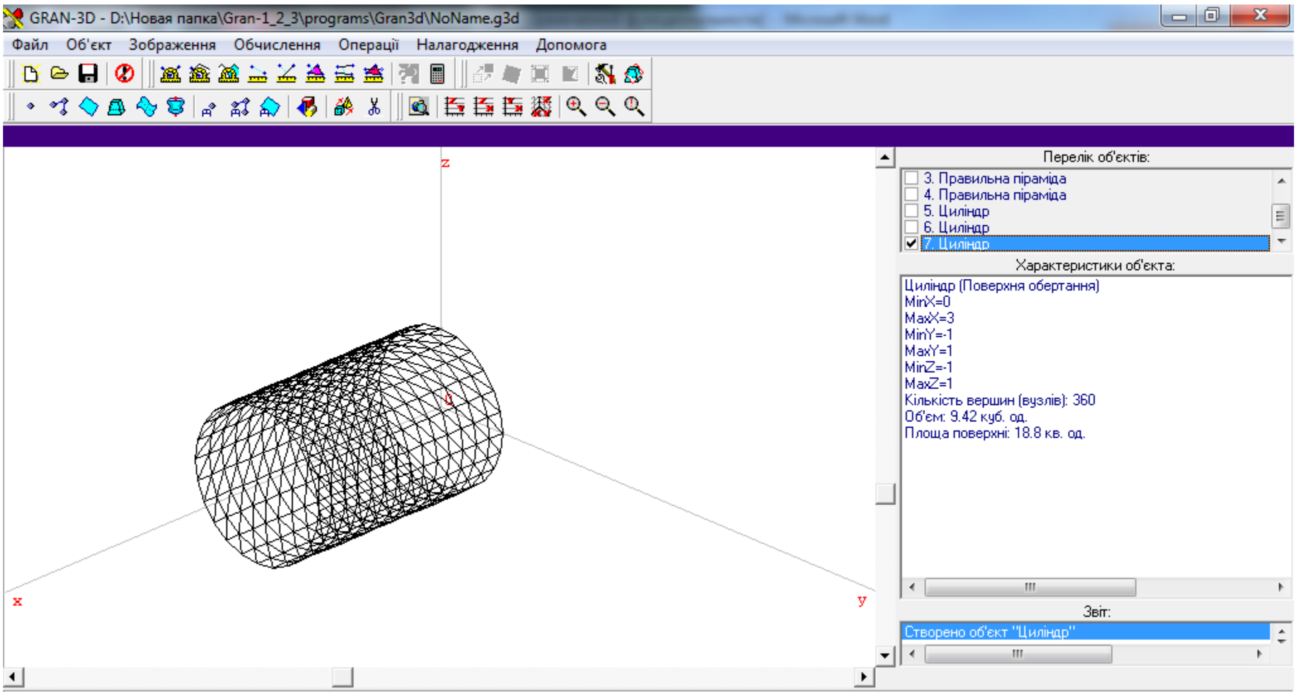
Циліндр	
	*Прямим круговим циліндром* називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. *OA*, O_1B — радіуси, *AB* — твірна (висота), O_1O — вісь
	*Площа поверхні циліндра* $S_{цил} = S_{бічн} + 2S_{осн}$, де $S_{бічн} = 2\pi RH$, $S_{осн} = \pi R^2$
	*Об'єм циліндра* $V = S_{осн} \cdot H$; $V = \pi R^2 H$

III. Закріплення й осмислення нового матеріалу

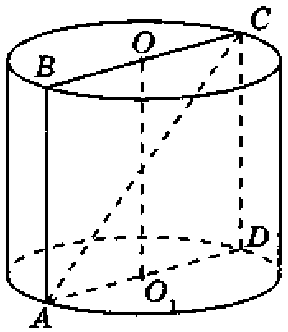
Розв'язування задач

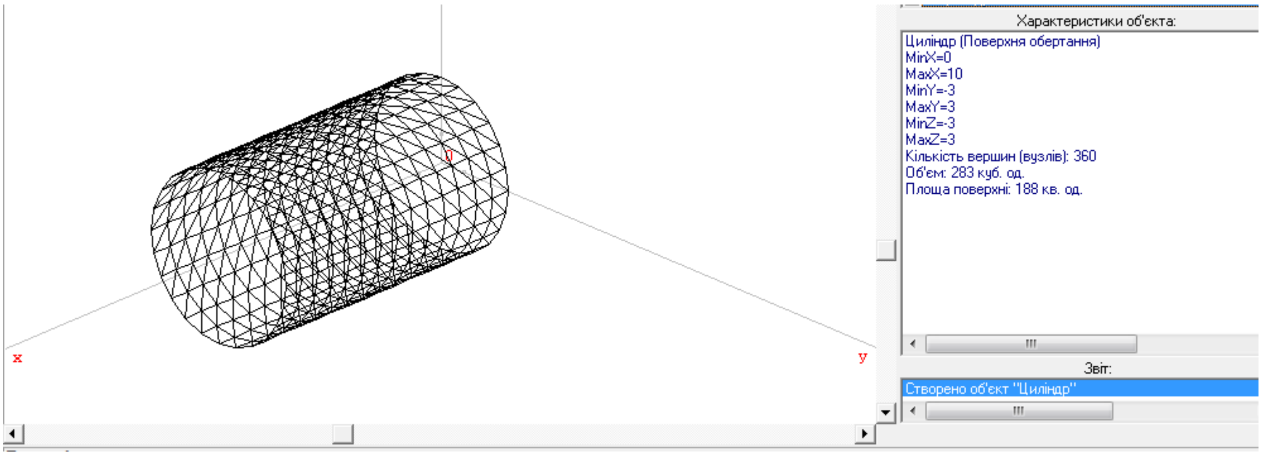
1. На рис. 4 зображено розгортку циліндра. За наведеними даними знайдіть площу і об'єм циліндра. (*Відповідь.* 8π см^2 і 3π см^3.)





2. Діагональ AC осьового перерізу $ABCD$ циліндра дорівнює 10 см, а його висота OO_1 — 8 см (рис. 5). Знайдіть площу поверхні та об'єм циліндра. (*Відповідь.* 66π см^2 і 72π см .)





3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює кут α з твірною циліндра. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм циліндра. *(Відповідь.* $\pi d^2 \sin\alpha\cos\alpha$, $\dfrac{\pi d^3 \sin^2\alpha \cos\alpha}{4}$.)

V. Домашнє завдання

1. Вивчити формулу площі поверхні та об'єму циліндра.
2. Розв'язати задачу.

Об'єм циліндра — $8\pi\sqrt{5}$ см^3, а його висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть діагональ осьового перерізу та площу бічної поверхні циліндра.

VI. Підбиття підсумків уроку

Запитання до класу

1. Дайте означення циліндра.
2. Що таке висота циліндра? осьовий переріз циліндра?
3. Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра?
4. Чому дорівнює об'єм циліндра?