

Рівненський державний гуманітарний університет  
Факультет математики та інформатики  
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота  
магістерського рівня на тему:  
Узагальнення та систематизація знань з математики

Виконав: студент 2 курсу магістратури,  
групи ММ-21

Спеціальності 014 Середня освіта  
(Математика)

Ліщишин Сергій Володимирович

Керівник: к.п.н., доц., кафедри  
математики з МВ

Коваль Володимир Васильович

---

Рецензенти: к.п.н., доц., кафедри вищої  
математики

Присяжнюк Ігор Михайлович

---

к.п.н., проф., кафедри математики з  
методикою викладання

Павелків Ольга Миколаївна

---

Рівне 2020

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 Науково-теоретичні основи дослідження.....	7
РОЗДІЛ 2 Психолого-педагогічні основи дослідження.....	23
РОЗДІЛ 3 Узагальнення і систематизація знань учнів при вивченні математики.....	32
3.1 Методика динамічного узагальнення і систематизації навчального матеріалу.....	32
3.2 Формування системних знань з геометрії.....	41
РОЗДІЛ 4 Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів.....	56
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ.....	60
 ДОДАТКИ	
Додаток 1. Відображення в тематичному плануванні курсу геометрії, її основних змістовних ліній.....	63
Додаток 2. Плани конспекти уроків узагальнення і систематизації знань...83	83

## ВСТУП

Провідне місце в системі неперервної освіти належить загальній середній освіті. Вона потребує глибоких докорінних перетворень, які ставлять перед школою задачу не лише дати учням знання, але й навчити застосовувати ці знання на практиці, проявляти пізнавальний інтерес.

Одна з важливих особливостей наукового пізнання порівняно з буденним полягає в його організованості і використуванні цілого ряду методів дослідження. Під методом при цьому розуміється сукупність прийомів, способів, правил пізнавальної, теоретичної і практичної, перетворюючої діяльності людей.

У зв'язку з цим вчителю необхідно більше уваги приділяти розвитку мислення учнів, формуванню різних методів наукових досліджень.

Реалізація концепції загальної середньої освіти має на увазі не лише вдосконалення програм, підручників, методів і форм навчання, але й привити кожному учню стійке бажання і уміння вчитися, самостійно отримувати і реалізовувати знання. Від розв'язання цієї задачі багато в чому залежить ефективність навчально-виховного процесу, формування гармонійно розвинутої і соціально зрілої особистості, готової до активної трудової діяльності.

Важливою умовою всебічного розвитку особистості євляється розумове виховання. Математика володіє величезними можливостями для розумового розвитку учнів, завдяки усій своїй системі, виключній ясності і точності своїх розумінь, висновків і формулювань. Одна із відповідальних задач навчання математики полягає в розвитку мислення учнів, вдосконаленні вміння мислити, робити висновки, тобто формувати розумову культуру.

Важливу роль в умовах пандемії коронавірусу відіграє діяльнісний підхід до навчання математики.

Діяльнісний підхід до процесу навчання – розглядання навчання як активної діяльності учнів з метою засвоєння знань, способів їх набуття. Цей

підхід передбачає таку організацію діяльності учнів в процесі навчання, при якій створюються умови для ефективного засвоєння учнями знань і способів діяльності для їхнього розвитку.

Реалізація розвиваючого навчання полягає в тому, що вчитель не тільки застосовує різноманітні методи і форми роботи з учнями на уроці, але й систематично навчає їх способам виконання тих чи інших видів навчально – пізнавальної діяльності. Управління і самоуправління навчально-пізнавальною діяльністю можливе тільки при умові сформованості в учнів прийомів розумової діяльності, а через них і раціональних прийомів навчальної роботи. Загальні і специфічні прийоми розумових дій повинні стати об'єктом засвоєння і свідомого їх використання, контролю зі сторони вчителя і самоконтролю учнів. Корисно навчити школярів правилам виконання окремих видів розумових дій, алгоритмам, правилам – орієнтирам, евристичним схемам основних видів навчальної діяльності.

Аналіз методичної літератури, досвід роботи вчителів математики середніх загальноосвітніх шкіл, аналіз результатів вступних та шкільних екзаменів дали можливість зробити висновок про недостатньо високий рівень знань учнів з математики, а саме не точне розуміння означень, тверджень, невміння застосовувати відомий теоретичний матеріал на практиці.

Таким чином, актуальність дослідження обумовлена з однієї сторони, новими вимогами суспільства до особистості педагога, який володіє високою творчою активністю в професійній діяльності, а з другого боку – недостатньо розробленим інтегральним підходом до досягнення нового рівня професійної підготовки вчителя, в структурі якої повинні бути представлені різні сторони культури, включаючи культуру творчої діяльності, вміння задумуватися над особистою педагогічною технікою, грамотно її аналізувати, адекватно і природньо застосовувати.

Для цього розумно використати великий потенціал математичної підготовки, власний досвід математичної діяльності.

Предметом дослідження є зміст і роль загальних розумових дій і прийомів розумової діяльності.

Об'єктом дослідження є шляхи і засоби узагальнення та систематизації навчального матеріалу під час вивчення курсу математики.

Гіпотеза: сформованість у школярів такого прийому розумової діяльності як узагальнення та систематизація навчального матеріалу веде не тільки до зацікавленості предметом, а й до покращення якісних показників успішності з математики.

Для досягнення сформульованої нами мети і перевірки гіпотези були поставлені наступні завдання дослідження:

- 1) розробити ефективну методику динамічного узагальнення і систематизації навчального матеріалу;
- 2) здійснити формування системних знань з алгебри;
- 3) здійснити формування системних знань з геометрії;
- 4) розробити уроки систематизації та узагальнення знань;
- 5) здійснити відображення в тематичному плануванні курсів геометрії і алгебри їх основних змістовних ліній;
- 6) експериментально перевірити ефективність розробленої методики.

Для досягнення цілей роботи, перевірки гіпотези і виконання поставлених вище завдань були використані наступні методи дослідження:

- аналіз програм з математики, навчальних посібників, методичних матеріалів, що стосуються загальних розумових дій і прийомів розумової діяльності;
- спостереження за ходом освітнього процесу, за діяльністю учнів;
- експериментальна перевірка розробленої методики навчання;
- статистична обробка експериментального матеріалу.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що використання його результатів в шкільній практиці сприяє не тільки зацікавленості учнів предметом, а й покращенню якісних показників успішності з математики.

Завдання дослідження визначили структуру магістерської роботи: вона складається з вступу, чотирьох розділів, висновку, списку літератури і додатків. Основний зміст магістерської роботи викладений на сторінках машинописного тексту. Список літератури включає 42 найменування. У тексті роботи є малюнки, і таблиці

Апробація результатів дослідження здійснювалась на звітній науково – практичній конференції викладачів та здобувачів вищої освіти РДГУ та відображена в навчально – методичному посібнику “Систематизація та узагальнення знань учнів під час вивчення курсу математики середньої загальноосвітньої школи.”

## РОЗДІЛ І НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Одне з центральних місць в методиці викладання математики займають методи дослідження. Знання методів дослідження математики необхідне для організації ефективного навчання учнів. Методи дослідження сприяють розвитку мислення школярів, підвищують їх загальну культуру, здібність до порівняння прийомів, сформованих на уроках математики, з процесом вивчення інших навчальних предметів. Це відбувається тому, що до цих методів дослідження математики належать такі важливі теоретичні методи, як використання порівняння і аналогії, застосування індуктивних і дедуктивних висновків.

Для розв'язання питання про те, як навчати учнів, потрібно, по-перше, знати, для чого це вивчається, які знання, вміння навички повинні набути учні в результаті цього вивчення; по-друге, потрібно провести логіко-дидактичний аналіз того, що вивчається, тобто знати структуру та інші особливості змісту навчання, його викладення в шкільному підручнику; по-третє, необхідно знати об'єкт навчання, тобто рівень розумової діяльності учнів, які вони мають знання, вміння і навички, на які можна спиратись при подачі нового матеріалу.

Тільки після наявності інформації на питання: «для чого?», «чому?», «кого?» - ми можемо успішно вирішити питання «як?», тобто питання про вибір адекватних методів навчання, найкращим чином відповідаючи, цілям змісту навчання і рівню розумової діяльності і знань учнів.

Отже, проблема методів дослідження вирішується з урахуванням цілей навчання, дослідження, специфіки і структури змісту (як навчального предмета в цілому, так і окремих його розділів, тем, понять) і особливостей розумової діяльності учнів, стану вже отриманих ними в процесі попереднього навчання знань, вмінь і навичок.

Говорячи про методи навчання, необхідно перед усім зрозуміти це поняття. Під методом навчання ми будемо розуміти впорядкований спосіб взаємозв'язаної діяльності вчителя і учня, що направлений на досягнення

цілей навчання як засобу освіти і виховання. Виходячи з такого розуміння методів навчання, опис кожного методу навчання повинен включати:

- 1) опис навчальної діяльності вчителя;
- 2) опис учбової (пізнавальної) діяльності учня;
- 3) зв'язок між ними, або спосіб, за допомогою якого навчаюча діяльність вчителя керує пізнавальною діяльністю учнів.

Загальновідома роль задач у навчанні математиці і розвитку математичного мислення учнів. Засвоєння математичних знань і рівень математичного розвитку учнів завжди перевірялись, перевіряються і, напевно, будуть перевірятись з допомогою розв'язування задач. Тому проблема методів навчання включає і проблему методів навчання розв'язування задачі.

Як навчити учнів розв'язувати задачі? Це одна з найбільш складних і важливих педагогічних проблем. В даній роботі ми хочемо показати як можна навчити учнів використовувати такі наукові методи дослідження як аналіз, синтез, аналогія, порівняння, узагальнення, абстрагування, конкретизація.

Світлана Григулич у статті "Прийоми індивідуалізації самостійної роботи учнів на уроці" (журнал "Математика в школі", 2000р., № 6) намагається показати, як за допомогою певним чином організованої самостійної роботи можна не лише враховувати, а й розвивати цілий ряд якостей особистостей учнів. Для цього автор пропонує на факультативах використовувати диференційовані індивідуальні картки, у виготовленні яких помічником може стати комп'ютер, а точніше програмне забезпечення: MathCAD, Mathematika, DERIVE, GRAN1. Окрім врахування індивідуальних особливостей учнів, така самостійна робота передбачає їх розвиток. Підносяться до вищого ступеня розумові здібності, уява, пам'ять, увага, мова, комунікативність та самостійність. Навчальна самостійна робота, організована таким чином здійснює реалізацію впровадження в шкільне життя особистісно-орієнтованого підходу до всіх його учасників.



Книга Л.М Фрідмана “Психолого-педагогические основы обучения математики в школе.” призначена для того, щоб допомогти вчителю математики в складній справі оволодіння психолого-педагогічними основами своєї діяльності. Особлива увага в книзі звернена на формування позитивної мотивації школярів при навчанні математиці. В ній розглядаються і проаналізовані з точки зору сучасних психолого-педагогічних поглядів і ідей всі основні сторони діяльності вчителя математики.

В посібнику Слєпкань 3.1. “Психолого-педагогические основы обучения математике”, що носить монографічний характер, поданий аналіз психологічних закономірностей процесу засвоєння математичних понять, розв'язування задач, доведення теорем на різних етапах засвоєння. На основі досягнень вітчизняних психологів та дидактиків розглянуто різні шляхи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні математики і можливості управління цією діяльністю.

Світлана Музиченько у статті “Урок узагальнення, систематизації та корекції знань і умінь” (журнал “Математика в школі”, 2001р., № 5) намагається показати, яким ефективним засобом узагальнення і систематизації знань є виконання учнями порівняльних характеристик великих об'єктів, що вивчалися впродовж кількох уроків. Узагальнення та систематизація знань з тієї чи іншої теми може здійснюватися на трьох основних рівнях. Насамперед, розглянутий у процесі вивчення теми матеріал має бути чітко впорядкований у межах самої теми. Для цього із сукупності розглянутого матеріалу необхідно виділити основні факти (поняття, їх властивості тощо) та зафіксувати найбільш істотні зв'язки і відношення між ними.

Другий рівень систематизації передбачає з'ясування місця вивченої теми в структурі курсу математики.

Нарешті, учні повинні мати уявлення про можливості (якщо такі є) практичного застосування розглянутої теми за межами математики. В зв'язку з цим, мета уроку може бути конкретизована.

В навчально-методичному посібнику В.Н.Осінської “Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах.” висвітлюється власний досвід роботи по ціленаправленому формуванню в учнів важливих прийомів розумової діяльності: порівняння, аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення, аналогії, конструювання означень, побудови індуктивних і дедуктивних умовиводів в процесі вивчення геометрії, а також курсу алгебри і початків аналізу. Велика увага приділяється самостійному пошуку закономірностей, методів доведення, складанню конспектів. Наводяться приклади конспектів учнів, а також фрагменти деяких уроків, які ілюструють паралельне формування системи знань і прийомів розумової діяльності.

В книзі В.Ю.Середі “Вчись мислити логічно” доступно і на конкретних прикладах розкриваються основні формально-логічні закони побудови правильних суджень та умовиводів. За допомогою цих законів, а також елементів математичної логіки аналізуються причини появи типових помилок при розв’язуванні різних задач шкільного курсу математики. Також пропонуються вправи для самостійного виконання.

В посібнику В.П.Іржавцевої та Л.Я.Федченко “Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики” описаний досвід роботи заслуженої вчительки школи УРСР, лауреата Державної премії СРСР, який заснований на поглибленому аналізі взаємозв’язків складових елементів шкільного курсу математики і багатопланового використання його результатів для активізації пізнавальної діяльності учнів. В методиці викладання математики із загальнонаукових методів дослідження найчастіше використовують аналіз, синтез, індукцію, дедукцію, узагальнення, обмеження, абстрагування, конкретизацію, спостереження, порівняння, аналогію і т. ін.

Аналіз і синтез. *Аналіз* - логічний прийом, суть якого полягає в тому, що виучуваний об’єкт мисленно (чи практично) розчленовується на складові елементи (ознаки, властивості, відношення), кожен з яких досліджується

окремо як частка розчленованого цілого. Предметом аналізу можуть бути: формулювання означення, аксіоми і теореми; доведення теореми. В процесі пошуку розв'язання задачі предметом аналізу є відношення, котрі існують між шуканою і даними величинами. Процедурою, оберненою до аналізу, є синтез. Синтез - логічний прийом, за допомогою якого окремі елементи об'єднуються в ціле. Аналіз—спосіб пошуку розв'язання задачі, доведення теореми. Синтез, опираючись на дані, одержані в ході аналізу дає розв'язання задачі чи доведення теореми.

В реальній мислиннєвій діяльності аналіз і синтез пов'язані нерозривно. Особливо яскраво це спостерігається в математиці при розв'язуванні задач та доведенні теорем. Розв'язування будь-якої задачі чи доведення будь-якої теореми починається з аналізу їх формулювань, з вичленення того, що дано і що потрібно довести. Далі йде співвіднесення умов та вимог одне з одним, тобто синтез.

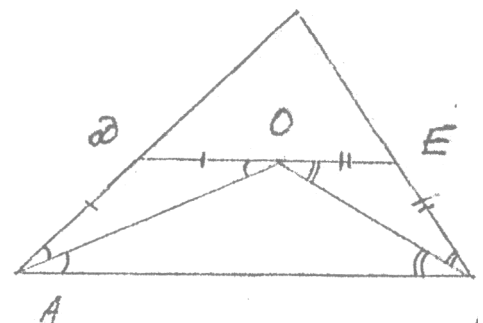
С.Л. Рубінштейн виділяє важливу форму аналізу - аналіз, що здійснюється через синтез. Суть його полягає в тому, що об'єкт в процесі мислення включається у все нові та нові зв'язки і в силу цього виступає у все нових значеннях, котрі фіксуються в нових поняттях; з об'єкту, таким чином, ніби вичерпується все новий та новий зміст; він ніби повертається кожного разу іншою своєю стороною, в ньому виявляються все інші властивості.

Наведемо приклади задач з геометрії та алгебри, в розв'язанні яких використовується аналіз та синтез.

Задача. В  $\triangle ABC$  бісектриси кутів  $A$  і  $C$  перетинаються в точці  $O$ , через яку проведена пряма  $DE$ , паралельна  $AC$ . Довести, що довжина відрізка  $DE$  дорівнює сумі довжин відрізків бічних сторін, прилеглих до основи  $AC$ .

Доведення:

$DE=DO+OE=AD+EC$ , так як  $DO=AD$  і  $OE=EC$  як сторони рівнобедрених трикутників. Дійсно,  $AO$  – бісектриса  $\angle BAC$



за умовою, отже,  $\angle DAO = \angle OAC$ , але  $\angle OAC = \angle DOA$  як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих  $AC$  і  $DE$  та січній  $AO$ . Отже,  $\angle DAO = \angle DOA$ , тобто  $\triangle ADO$  - рівнобедрений. Таким же чином доводиться, що  $\triangle OCE$  - рівнобедрений.

В процесі розв'язування даної задачі відрізок  $AO$  виступає в трьох значеннях: як відрізок бісектриси, як відрізок січної при паралельних прямих і як основа рівнобедреного трикутника. Виділяючись в результаті аналізу серед інших елементів малюнку, цей відрізок співвідноситься (синтез) з іншими елементами і включається у все нові зв'язки, що, в кінцевому рахунку і дає можливість довести дану рівність.

*Приклад.* Розв'язати рівняння  $3^x = \frac{1}{81}$

Щоб розв'язати це найпростіше показникове рівняння, потрібно виділити (аналіз) праву частину рівняння та представити (переосмислити) дріб  $\frac{1}{81}$  як степінь числа 3, співвідносячи (синтез) праві та ліві частини рівняння та вибравши за одну і ту ж саму основу степенів число 3.

Для цього учні, як правило, спочатку представляють число 81 як степінь  $3^4$ , а потім дріб  $\frac{1}{3^4}$  представляють як степінь з від'ємним показником.

В кожному з наведених прикладів один і той самий елемент задачі розглядається з різних точок зору. Такий прийом розумової діяльності в психології називають також прийомом переосмислення елементів задачі. Щоб навчити школярів розв'язувати задачі та доводити теореми, необхідно цілеспрямовано навчати їх прийому переосмислення.

#### Узагальнення і обмеження.

В навчанні математики, як і в наукових дослідженнях, часто виникає потреба переходити від чогось одиничного до загального, від менш загального до більш загального. Такі переходи називають узагальненнями. Наприклад, учні спочатку вивчають натуральні числа, потім - цілі, раціональні, дійсні. Кожна з названих числових множин загальніша від попередньої, містить попередню як свою частину. Такі переходи -

узагальнення поняття числа. Говорять також “розширення поняття числа”. Інший приклад - узагальнення або розширення поняття степеня, коли послідовно вводять степені з цілими, раціональними і дійсними показниками.

Можна узагальнювати і: теореми. Наприклад, теорема косинусів - узагальнення теореми Піфагора, теореми про відстань між двома точками на координатній площині чи в просторі - узагальнення теореми про відстань між точками координатної прямої.

Операцію, протилежну до узагальнення, називають обмеженням або спеціалізацією. Наприклад, коли в школі, давши загальне означення чотирикутника, переходять послідовно до вивчення паралелограмів, прямокутників, квадратів, кожного разу здійснюють обмеження поняття. У результаті об’єм поняття звужується, а зміст збагачується.

#### Абстрагування і конкретизація.

Абстрагування (лат. *abstractio* - відтягування, відвернення) - це процес мисленнєвого ізолювання. Виділення окремих властивостей з багатьох властивостей розглядуваних об’єктів чи явищ. Результатом такого ізолювання є абстракції-створені людським розумом нематеріальні образи. Операцію, протилежну до абстрагування, називають конкретизацією.

Для математики абстрагування і конкретизація мають особливо важливе- значення. Адже кожне математичне поняття - абстракція. І кожна теорема - абстрактне твердження про абстрактні образи і відношення. В оточуючому нас матеріальному світі немає таких об’єктів, як число, рівняння, функція, пряма, вектор і т.ін. До цих, як і до всіх інших математичних понять, вчені прийшли в результаті абстрагування мільярди разів бачених матеріальних предметів і їхніх властивостей. Абстрагувались, щоб “очистити” досліджувані властивості реальних конкретних речей від неістотних, сторонніх, щоб полегшити їхні дослідження. Щоб потім можна було глибоко вивчені абстрактні поняття і відношення застосовувати до безлічі конкретних матеріальних об’єктів, явищ і подій, що відбуваються в дійсному світі.

Зверніть увагу на відмінність двох переходів:

а/ м'яч, дробинка, бульбашка і т. ін. → куля;

б/ куля, конус, циліндр і т. ін. → тіло обертання.

В першому випадку переходять від матеріальних об'єктів до нематеріального поняття, це - абстрагування; в другому - від абстрактних понять до абстрактного, це - узагальнення.

Конкретними називають об'єкти, які не є абстрактними, але нерідко і менш загальними. Так, кулю вважають конкретним прикладом тіл обертання, чотирикутник - конкретним прикладом многокутника, хоч і куля, і чотирикутник - поняття абстрактні.

При доведенні кожної теореми ми конкретизуємо. Наприклад, доводячи властивість рівнобедреного трикутника, звичайно малюємо тільки один якийсь рівнобедрений трикутник ABC і на ньому здійснюємо доведення. А довівши теорему для цього конкретного трикутника, наголошуємо, що можна було б повторити всі наведені міркування для будь-якого іншого рівнобедреного трикутника. Отже, теорема справедлива для кожного рівнобедреного трикутника. Останнє - узагальнення. Як бачимо, слова “конкретний”, “конкретизація” нерідко вживають в розумінні “спеціальний”, “спеціалізація”.

#### Індукція і дедукція.

Міркувати, робити висновки можна в двох взаємно протилежних напрямках: від кількох одиничних або менш загальних тверджень переходити до об'єднуючого їх загального утвердження, або від відомого загального твердження до менш загальних чи одиничних. Перший шлях міркувань називають індукцією (лат. *inductio* - наведення), а другий - дедукцією (лат. *deductio* - виведення).

У таких науках, як хімія, біологія, педагогіка, психологія переважають індуктивні методи міркувань. Тут на основі конкретних експериментів роблять загальні висновки. У математиці поширені дедуктивні методи. Тут обґрунтованими вважають тільки ті твердження, які строго доведені як

теореми. А ті, що встановлені безпосередньо перевіркою, не вважаються обґрунтованими, хоч вони і підтверджені тисячами прикладів.

Припустимо, що намалювавши 10 різних трикутників і вимірявши досить точно їх кути, учень прийшов до висновку: сума кутів кожного трикутника дорівнює  $180^\circ$ . Таке міркування - індукція. В даному випадку висновок, зроблений індуктивним методом, правильний. Але буває й інакше.

Розглянемо кілька тверджень:

Число  $10^3 - 10$  ділиться на 3

»  $10^5 - 10$  » на 5

»  $10^7 - 10$  » на 7

»  $10^9 - 10$  » на 9

»  $10^{11} - 10$  » на 11

»  $10^{13} - 10$  » на 13

»  $10^{15} - 10$  » на 15 і т.д.

Кожне з цих тверджень правильне. З них за допомогою індукції можна вивести таке загальне положення: “При кожному непарному  $k$  число  $10^k - 10$  ділиться на  $k$ . А це твердження неправильне, бо, наприклад,  $10^{21} - 10$  не ділиться на 21.

У цьому прикладі міркування за допомогою індукції призвели до неправильного твердження.

Отже, індукція не є методом доведення, вона не має “доказової сили”. Міркування за допомогою індукції тільки ймовірні, правдоподібні, але не строгі.

Незважаючи на це, індукцію дуже часто застосовують і вчені-математики в своїх дослідженнях, і вчителі-математики в процесі навчання.

У наукових дослідженнях індукція відіграє дуже важливу роль. Справа в тому, що математик у процесі дослідження не тільки доводить різні теореми, а й відшукує їх, виявляє різні закономірності і властивості. Доведення - це здебільшого заключний етап дослідження, а вся попередня робота полягає в розгляді різних конкретних прикладів, у порівнянні,

зіставленні і т. ін. Робота математика, що передує доведенню, має здебільшого індуктивний характер. Ось що говорить з цього приводу математик Ф. Клейн: “Індуктивна робота того, хто перший установив яке-небудь твердження, має, звичайно, таку саму цінність, як і дедуктивна робота того, хто його вперше довів, бо те й друге однаково потрібне”.

Для навчання індукція також має велике значення.

У молодших класах, в яких з дидактичних міркувань багатьох тверджень строго доводити не можна, індукція відіграє роль обґрунтувань. Наприклад, учням показують, що  $2+3=3+2$ ,  $7+2=2+7$ ,  $6+8=8+6$ , і після розгляду кількох таких числових рівностей роблять узагальнення: які б не були натуральні числа  $a$  і  $b$ ,  $a+b=b+a$ . Цей висновок зроблено індуктивним методом. Аналогічно пояснюють в VI класі основну властивість дроби, зведення дробів до спільного знаменника, розв’язування рівнянь і т. ін.

У IX класі індуктивним методом дістають формули  $n$ -х членів прогресій:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Так само знаходимо  $a_5 = a_1 + 4d$ ,  $a_6 = a_1 + 5d$ ,... Взагалі

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Строго довести цю формулу можна методом математичної індукції, але дев’ятикласникам цей метод невідомий.

У старших класах індуктивний метод міркувань замість строгих доведень застосовують рідко.

Щоб не плутати індукцію з повною індукцією чи математичною індукцією, її називають ще *неповною індукцією*. Отже, неповна індукція і індукція - синоніми. А міркування на основі повної чи математичної індукції не індуктивні, а дедуктивні.

#### Спостереження і порівняння.

Дослідження якого-небудь об’єкта чи явища звичайно починають із



спостереження. Дивлячись па графік функції, встановлюють, при яких значеннях аргументу вона зростає, при яких спадає, як швидко змінюється і т. ін. Розглядаючи зображення многогранника, встановлюють, які його грані паралельні, які ребра мимобіжні. І перш ніж розв'язати рівняння, перетворити вираз, обчислити інтеграл, ми вдивляємось в дані рівняння, вираз, інтеграл. Все це - спостереження.

І в процесі навчання учням часто доводиться спостерігати. Наприклад, уже в першому класі, показуючи різні малюнки чи вирізки, учитель пояснює: “Оце прямокутник. І це прямокутник. А це - не прямокутник...” Учні спостерігають. І коли старшокласникам показують, як розміщений графік похідної даної функції, як розв'язувати логарифмічне рівняння, як будувати осьовий переріз конуса - учні спостерігають. Один з видів спостереження - дослід. Зрозуміло, що в навчанні математики досліді демонструють набагато рідше, ніж при навчанні фізики, хімії, біології. Але іноді буває корисно провести і математичний дослід. Наприклад, пересипаючи пісок із порожнього конуса в циліндр з таким самим радіусом основи і висотою, можна переконатись, що об'єм конуса втричі менший від об'єму відповідного циліндра. Ось чому формула об'єму конуса відрізняється від формули об'єму циліндра коефіцієнтом  $\frac{1}{3}$ .

Порівняння в навчанні - це розумова операція, за допомогою якої встановлюються риси спорідненості і відмінності між певними предметами.

Правило - орієнтир порівняння містить в собі приблизно такий перелік операцій:

- визначити мету порівняння;
- перевірити, чи відомий матеріал про об'єкти, котрі будуть порівнюватися;
- виділити головні ознаки, за якими будуть порівнюватися об'єкти;
- знайти відмінність чи спорідненість;
- визначити причину чи поставити питання про її вияснення;

- зробити висновок із порівняння.

Форми порівняння: зіставлення і протиставлення.

*Протиставлення* - форма порівняння, спрямована на усвідомлення відмінного в предметах і явищах при виділенні суттєвих ознак і властивостей. *Зіставлення* - форма порівняння, скерована на виділення суттєвих властивостей спільних для ряду об'єктів.

В розумовій діяльності учня протиставлення і зіставлення, як форми порівняння, виконуються в єдності і є засобом аналізу і синтезу вивчуваних понять, фактів, предметів. В навчальному процесі ці розумові операції найчастіше виконуються послідовно.

Види порівняння - бувають часткові і повні. Суть часткового порівняння в установленні лише подібного чи лише відмінного.

Повне порівняння вимагає установлення спорідненості і відмінності.

Часткове порівняння ефективне на етапах сприйняття і осмислення знань.

Пізнавальні завдання на протиставлення можуть бути такими:

1. Чим різниться об'єкт А від об'єкту В?
2. Які якості відсутні в об'єкті А порівняно з об'єктом В?
3. Які додаткові властивості притаманні об'єктові А порівняно з об'єктом В?
4. Чим різняться формулювання? Чим різняться задачі і ін.?

З метою узагальнення матеріалу школярам пропонуються завдання на зіставлення об'єктів (знаходження спільного).

Повне порівняння ефективне на етапах узагальнення і систематизації знань.

За способами здійснення розрізняють порівняння паралельні, послідовні, відстрочені.

Паралельні порівняння застосовуються під час одночасного вивчення взаємозв'язаних понять, теорем, задач, під час викладу матеріалу укрупненими блоками.

Послідовне порівняння полягає в тому, що новий об'єкт порівнюється з раніше вивченим.

Відстроченими називаються порівняння об'єктів, які вивчались на різних уроках, досить віддалених один від одного в часі.

Комплексне порівняння - це коли знаходять подібне і відмінне за різними ознаками і в різних напрямках.

Логіко-дидактичними вимогами до порівняння є наявність предмета порівняння і мети порівняння; порівнювати можна лише однорідні предмети.

Аналогією (гр. *analoia* - відповідність, схожість, подібність) називається такий умовивід, при якому відбувається перенесення інформації про ознаки і відношення з одного предмета на інший на основі певного відношення між ними.

Наприклад, зрізаний конус багато чим схожий на зрізану піраміду: вони мають по дві основи, ці основи паралельні і подібні, твірні зрізаного конуса перетинаються при продовженні в одній точці і т.д. Відомо, що об'єм зрізаної піраміди обчислюють за формулою

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

де  $S_1$  і  $S_2$  - площі її основ, а  $H$  - висота. Тому, можливо, і об'єм зрізаного конуса можна обчислювати за такою формулою. Останній висновок зроблено на основі аналогії. У простих випадках міркування за аналогією схематично можна зобразити так:

А має властивість  $a, b, c, x$

В мав властивість  $a, b, c$

Можливо, В мав властивість  $x$ .

Міркування за аналогією не строгі, вони не мають "доказової сили". Іноді, як у розглянутому прикладі, вони приводять до правильних висновків, а іноді - до неправильних.

Обеліск, як і зрізана піраміда, має дві паралельні основи з відповідно паралельними сторонами; усі бічні грані в обеліска, як і в зрізаної

піраміди, є трапеції і т.д. Тому, можливо, об'єм обеліска можна обчислити за такою самою формулою, як і об'єм зрізаної піраміди. Цей висновок зроблений за аналогією. Він неправильний.

Хоч міркування за аналогією можуть призводити до неправильних висновків, проте математики в процесі досліджень дуже часто користуються аналогією. Аналогії дають можливість не тільки розв'язувати вже сформульовані задачі, а й створювати нові теорії. Наприклад, за аналогією з тривимірним простором створено  $n$ -вимірний простір; за аналогією з теорією рівнянь створено теорію конгруенцій; за аналогією з теорією логарифмів створено теорію індексів; за аналогією з десятковою системою числення створено двійкову, трійкову та інші системи числення. Математики звичайно не обмежуються одними правдоподібними аналогіями, а намагаються встановити *ізоморфізм* (гр.  $\omega\xi$  - однаковий,  $\mu\sigma\phi\eta$  - форма) - таке бієктивне відображення однієї множини на іншу, при якому певні властивості (відношення, операції) першої множини переходять на відповідні властивості другої. Щоб краще дослідити властивості якоїсь системи, підшуковують іншу систему, ізоморфну даній, і, по можливості, простішу від неї, тобто створюють модель даної системи. А дослідивши властивості моделі, роблять висновки і про наявність відповідних властивостей у даній системі. У школі цей метод наукового дослідження (моделювання) застосовують, коли, наприклад, лінійні рівняння з двома змінними ілюструють за допомогою прямих у декартовій системі координат і т. ін.

У процесі навчання аналогія відіграє двояку роль. В одних випадках вона допомагає краще усвідомити програмний матеріал і міцніше його запам'ятати; в інших випадках вона є причиною багатьох досить поширених помилок, які негативно впливають на знання учнів.

Наприклад, якщо під час вивчення дій над дробами із змінними вчитель нагадуватиме, що ці дії аналогічні відповідним діям над звичайними дробами, то учні швидше і краще засвоять новий матеріал і засвоять старий. Якщо, розглядаючи взаємне розміщення двох куль, учитель порівнює цей

матеріал з відомим вже учням взаємним розміщенням двох кіл на площині, це також сприятиме осмисленню і запам'ятовуванню обох цих питань. Корисно зауважити учням, що рівняння площини і сфери в координатному просторі відповідно аналогічні рівнянням прямої і кола на координатній площині, а пояснюючи формулу відстані між двома точками простору, слід згадати, що за аналогічними формулами знаходять відстані між двома точками площини і прямої:

$$\text{на прямій; } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2},$$

$$\text{на площині: } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\text{у просторі: } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Вище розглядали позитивну роль аналогії в процесі навчання. Але вона досить часто відіграв' і негативну роль. Аналогія в багатьох випадках є причиною грубих математичних помилок. Наприклад, учні часто пишуть:

$$\frac{a+m}{c+m} = \frac{a}{c} \text{ - за аналогією з } \frac{am}{cm} = \frac{a}{c};$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 \text{ - за аналогією з } (ab)^3 = a^3 b^3$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a + b| \text{ - за аналогією з } \sqrt{a^2 b^2} = |ab|;$$

$$\log a + \log b = \log a + b \text{ - за аналогією з } 1a + 1b = 1(a + b).$$

Часто вважають, що коли якесь число ділиться на 2 і на 4, то воно ділиться на 8 (аналогія: коли число ділиться на 2 і на 3, то воно ділиться на 6); вважають, що коли 40 більше від 32 на 25%, то й 32 менше від 40 на 25 % (аналогія: якщо 40 більше від 32 на 8, то й 32 менше від 40 на 8) і т.д.

Основним запобіжним засобом проти таких помилок повинно бути глибоке і свідоме вивчення математичних понять і тверджень. Треба, щоб учні засвоювали не стільки форму, скільки суть цих понять і тверджень, щоб не включали в поняття ті предмети, які не належать йому, і не застосовували відомі формули і правила там, де їх не можна застосувати. Але якщо учень все-таки допустить помилку і напише, наприклад,  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$  (розуміючи, що ця рівність правильна при всіх значеннях а і b), треба не просто сказати, що це неправильно, а й показати, чому не можна так писати.

Найкраще навести контрприклад: Хіба  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3+4$ ?

## РОЗДІЛ II ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

В даний час спостерігається посилений інтерес вчителів математики до психолога - педагогічних проблем, до психологічних знань. Цей інтерес зумовлений тим, що вчителі математики в своїй повсякденній практичній діяльності зустрічаються з такими проблемами, які можна вирішити лише на основі психолого-педагогічних знань, а також за умови глибокого психологічного осмислення сутності цих проблем.

Мета навчання математиці в загальноосвітній школі полягає у тому, щоб кожен учень оволодів такою системою математичних знань і вмінь та навиків, що ґрунтуються на них, щоб він:

1) науково правильно розумів своєрідність відображення у математиці найпростіших законів про кількісні співвідношення та просторові форми у природі, суспільстві і виробництві і мав свідоме уявлення про історію, походження та розвиток цих знань;

2) ясно розумів сутність елементарних методів наукових досліджень і доведень, що застосовуються в математиці, міг будувати математичні моделі найбільш важливих практичних задач і розв'язувати їх;

3) мав достатню математичну підготовку для вивчення інших предметів середньої школи, для практичної діяльності в будь-якій галузі.

Якщо цієї мети буде досягнуто, то вивчення математики зіграє важливу роль у здійсненні загальних цілей середньої освіти, у розвитку особистості кожного школяра [35,36]

Вивчати процес формування у дітей наукових понять вперше почали вітчизняні психологи під керівництвом Виготського. Великий вклад у вирішення цієї проблеми внесли психологи В.В.Давидов, К.Н.Кабанова-Меллер, Н.Ф.Тализіна, Д.Н.Богоявлінський, Н.А.Менчинська та інші.

В дослідженнях Н.А.Менчинської та В.І.Зикової показано, що учні нерідко допускають помилки при розв'язуванні задач практичного змісту і виявляються безпорадними при необхідності математизувати життєву

ситуацію. Зокрема, при проведенні практичних робіт на місцевості школярі не можуть перенести систему нескладних дій, сформованих в умовах навчальної роботи в класі. Під час практичних робіт велика кількість учнів не може реально оцінити точність результатів обчислень за даними, отриманими у вимірюваннях. Це зайвий раз підтверджує дидактичну цінність практичних робіт по математиці.

Спостереження Я.І.Груденова показали, що застосовуючи систему різнотипних задач і вправ, неперервного повторення розв'язується першочергова задача розвиваючого навчання - прямо і побічно формувати в процесі розв'язування задач прийоми виконання дій, що складають механізм розв'язування задачі.

Провідною дидактичною ідеєю уроку даного типу є актуалізація основних понять. Як правило, коли на уроці повторюється навчальний матеріал, учні втрачають інтерес і увагу, коли нічого нового вони не дізнаються. Тому автор приділяє значну увагу задачам графічного характеру, оскільки вони є важливим засобом розвитку геометричної інтуїції учня, допомагають вивченню основних понять, активізують пізнавальну діяльність учня, підвищують інтерес учня до математики та якості їх знань.

Світлана Григулич у статті "Прийоми індивідуалізації самостійної роботи учнів на уроці" (журнал "Математика в школі", 2000р., № 6) намагається показати, як за допомогою певним чином організованої самостійної роботи можна не лише враховувати, а й розвивати цілий ряд якостей особистостей учнів. Для цього автор пропонує використовувати диференційовані індивідуальні картки, у виготовленні яких помічником може стати комп'ютер, а точніше програмне забезпечення: MathCAD, Mathemanka, DERIVE, GRAN1. Окрім врахування індивідуальних особливостей учнів, така самостійна робота передбачає їх розвиток. Підносяться до вищого ступеня розумові здібності, увага, пам'ять, мова, комунікативність та самостійність. Навчальна самостійна робота, організована таким чином здійснює реалізацію впровадження в шкільне



життя особистісно зорієнтованого підходу до всіх його учасників.

Уміння формувати математичні поняття, доводити теореми, розв'язувати математичні задачі вимагає не тільки знань, а й певного рівня психологічної стійкості і психоінтелектуальної культури, їхньому формуванню сприяє використання спеціальних добірок вправ, за допомогою яких моделюється не суто математичні, а психологічні аспекти розв'язування задач, відпрацьовуються окремі прийоми розумової діяльності, які потім свідомо переносяться учнями на математичну основу.

Вміло підібрана система вправ при вивченні методів дослідження в курсі основної школи та на факультативах сприяє розвитку творчого мислення учнів. Основними методичними вимогами до розвитку мислення учнів при вивченні математики є:

1. *Урахування індивідуальних і вікових особливостей учнів.*
2. *Постійна увага до навчання школярів загальним розумовим діям: аналіз і синтез, порівняння і абстракція, узагальнення.*
3. *Міцне володіння програмним матеріалом.*

Нове відкривається при опорі на вже наявні знання, тому однією з важливих умов розвитку творчого мислення є легкість актуалізації цих знань відповідно до вимог нової задачі. Для цього знання мають бути не тільки добре осмислені, категоризовані, а й міцно закріплені в пам'яті. Важливе вільне володіння логічними операціями, різноманітними способами розв'язування задач, доведеними до рівня автоматизації, щоб не відволікати думку, спрямовану на розв'язування основної проблеми. Творення таких умов нерозривно пов'язане з репродуктивним мисленням.

Цьому сприяють різноманітні види наочності - від предметної до досить абстрактної, умовно-знакової. При сприйнятті наочного матеріалу людина може охопити єдиним поглядом всі компоненти, які входять до цілого, прослідкувати можливі зв'язки між ними, провести категоризацію за ступенем значимості, загальності, що слугує основою не тільки для розуміння сутності нової інформації, а й для її переводу у довготривалу

пам'ять.

4. *Активна пізнавальна діяльність учнів.* Вона вимагає від учителя чіткого виділення часу на пояснення нового матеріалу, теоретичний матеріал бажано вводити великими блоками - тим самим швидко осмислюється достатньо повна система фактів, необхідних для розв'язування задач даної теми. Але після цього потрібно відвести не частину, а один чи кілька уроків повністю на розв'язування задач.

5. *У позаурочний час добре сприяють розвитку творчого мислення різноманітні математичні олімпіади, конкурси, факультативи тощо, проте елементи змагання можливі і на уроці.*

Серед методів дослідження, які сприяють розвитку творчого мислення, дослідники зазначають проблемний виклад матеріалу, евристичну бесіду, дослідницький метод, розв'язування пізнавальних задач і завдань, вправ, які передбачають суттєві зміни в структурі знань тощо.

Особливо корисним для формування творчого мислення є метод моделювання - метод теоретичного дослідження, який передбачає створення штучних або ж природних систем (моделей), що імітують суттєві особливості оригіналу. Модель - уявна або ж предметна копія, замінює оригінал і стає джерелом інформації про нього. При створенні математичних моделей доцільно використовувати між предметні зв'язки таких шкільних предметів як фізика, хімія, креслення, трудове навчання тощо.

Невдалий вибір ситуації, з якої формується модель, призводить до нерозуміння учнями ключових понять моделі. Наприклад, вивчаючи функції, учні важко сприймають матеріал, що стосується розривних функцій. Чому це так?

Оскільки сприйняття починається з деякого очікування або ж гіпотези, то з цього випливає, що, готуючись до формування у школярів мисленого образу математичного об'єкта, зокрема методів дослідження, учитель повинен в першу чергу піклуватися про появу в дітей адекватного очікування і застосовувати такий наочно образний матеріал, котрий підкріплював би їх

очікування і не входив з ним у протиріччя. Традиційно поняття методів дослідження вводиться з використанням таких побутових ситуацій, що створюють неадекватне очікування. Воно формує неправильний напрям думки учня, і такий образ функції, який потім призводить до численних помилок.

Задачі, підібрані для факультативу повинні складати визначену систему, яка відповідатиме обраній методиці і відповідній меті дослідження. В методичній літературі поки що не сформульовано загальні науково обґрунтовані критерії кількісного і якісного підбору задач, їх логічної послідовності розподілу з кожної теми. Тому вчителю математики необхідно самому здійснювати такий підбір задач: з окремої теми, розділу та цілого курсу.

Потрібно зазначити, що подібна система задач повинна задовольняти певним методичним вимогам.

1. Чітке визначення дидактичної мети всієї системи задач і кожної задачі окремо.

2. Послідовність ускладнення.

3. Система має охоплювати всі види задач (на обчислення, побудову, доведення та дослідження). Це допомагає відшуканню різноманітних способів розв'язання однієї і тієї самої задачі, а також дає багатий матеріал та великі можливості для складання задач і їх розв'язування.

4. Система задач має бути чітко диференційованою, з метою забезпечення умов для роботи різних категорій учнів у зоні їх найближчого розвитку.

Слід зазначити, що підібрані задачі в цілому і кожна задача окремо матимуть педагогічну цінність, якщо людина, яка склала систему може відповісти на питання:

1. Яку мету переслідує дана задача?

2. Необхідність саме цієї задачі, а не іншої.

3. Наскільки задача цікава для учнів, чи збуджує вона в учнів

цікавість до розв'язання і до розв'язування взагалі? Чим саме? Чи можливо підвищити цей інтерес?

4. Чому такі, а не інші конкретні дані взято в задачі?
5. Чи зможе учень самостійно розв'язати дану задачу? Що для цього він повинен знати, пам'ятати, уміти ?
6. Якою мірою йому повинен допомагати вчитель при виникненні труднощів?
7. Чого хочемо домогтися від учнів у процесі розв'язування даної задачі?
8. Як дана задача пов'язана з попередньою і наступною роботами учня? Система задач стає ефективним засобом розвитку творчого мислення учнів у процесі розв'язування задач, якщо в її основу покладено такі принципи систематизації вправ: 1) принцип постійного наростання складності пропонованих вправ; 2) принцип наведення на відкриття. Ці принципи визначають характер розвитку як окремо взятої задачної лінії, так і всієї системи в цілому.

Математичні здібності за В. Крутецьким мають такі компоненти:

- 1) швидкість запам'ятовування і збереження в пам'яті не тільки чисел і конкретних даних, а й способів розв'язування типових задач, логічних схем;
- 2) вміння швидко і широко узагальнювати (кожна конкретна задача розв'язується, як типова); 3) миттєве виділення суттєвих ознак при сприйнятті умови задачі, формальне бачення математичного матеріалу; 4) тенденція міркування згорнутими умовами; 5) велика рухливість розумових процесів, легкий і вільний перехід з однієї розумової операції до іншої, з прямого на зворотній хід думок; 6) винахідливість у подоланні труднощів, вміння дивитися на проблему під різними кутами зору; 7) високий рівень просторової уяви, вміння переводити математичні проблеми (задачі) у наочно-образний план; 8) прагнення до ясності, простоти (раціональності), економності (елегантності) розв'язань; 9) вміння знаходити логічний і

математичний сенс у багатьох явищах дійсності, здійснювати своєрідне перенесення математичних методів на нематематичні явища

Процес гуманізації освіти передбачає впровадження в шкільне життя особисто-зорієнтованого підходу до всіх його учасників. Спробуємо показати, як за допомогою певним чином організованої факультативної роботи можна не лише враховувати, а й розвивати цілий ряд якостей учнів.

Самостійність учня реальна лише в тому випадку, якщо виконуватимуться певні умови:

факультативна робота учня максимально індивідуалізована (для кожного учня окремі завдання);

створена атмосфера співпраці учня з учителем і однокласниками;

сформований позитивний мотив щодо її виконання;

відсутній страх перед негативною оцінкою.

Зрозуміло, що підготовка для кожного учня окремих завдань (а особливо коли це стосується методів дослідження) з урахуванням його індивідуальних особливостей - клопітка робота. Диференціювання навчального матеріалу, хоча б за рівнем знань учнів, не кажучи вже про сам процес виготовлення карток, потребує багато часу і матеріальних витрат.

Після етапу пояснення нового матеріалу на уроці, для закріплення знань, формування умінь та навичок з теми, учням пропонується навчальна самостійна робота, оцінювання якої відбуватиметься без вираження в балах (учневі, в разі потреби, оцінка буде прогнозуватись, але не виставлятись). Таким чином знімається момент негативного ставлення учнів до самостійної роботи на факультативі саме з причини страху перед негативною оцінкою. Проте не оцінювання робіт може викликати байдуже ставлення до їх виконання. Тому значну увагу в організації навчальних самостійних робіт слід звернути на створення позитивних мотивів щодо її виконання, атмосфери співпраці і доброзичливості між учнями, між учителем і учнями.

Учням пропонуватиметься виконання лише тих завдань, які для них посильні. Після виконання завдань, учень отримує наступне. Здійснити

самоконтроль щодо правильності виконання, учневі допомагатимуть картки з відповідями.

Під час виконання такої самостійної роботи вчитель в разі потреби надаватиме консультацію. На певному етапі роботи вчитель назначатиме кількох учнів, які опрацювали достатню для них (в міру научуваності) кількість завдань, тобто добре зрозуміли та засвоїли, як виконувати такі завдання і можуть пояснити їх виконання іншим. Вони стають асистентами вчителя, допомагають товаришам у їх навчанні.

Навчальна самостійна робота, організована таким чином, враховує ряд індивідуальних особливостей учнів: властивості пам'яті;

- розумові здібності (під час роботи вчитель, а пізніше його асистенти допомагають зрозуміти матеріал);

- рівень знань (завдання є різного рівня складності); темп учіння (за час відведений на самостійну роботу, учні опрацюють різну кількість завдань, тобто в кінці виконання роботи одні з них здобудуть лише навички виконання таких завдань, інші - відпрацюють навички до рівня, характерного для них за такий короткий час роботи).

Окрім врахування індивідуальних особливостей учнів, така факультативна робота передбачає їх розвиток. Підносяться до вищого ступеня *розумові здібності* (вміння аналізувати, порівнювати, здійснювати аналогію); *уява* (вміння уявно здійснювати паралельне перенесення); *пам'ять* (здатність фіксувати в пам'яті графічні об'єкти); *увага* (здатність до самоконтролю); *мова*; *комунікативність* (вміння ставити запитання, пояснювати товаришеві незрозуміле); *воля* (намагання отримати кращий від попереднього результат навчання); *самостійність* (зменшення потреби в допомозі вчителя).

Контроль знань, отриманих в результаті такої самостійної роботи учнів, можна здійснити (в кінці уроку чи на початку наступного) за допомогою контролюючої самостійної роботи, яка диференціюватиметься вже на два чи чотири варіанти і оцінюватиметься в балах.

Завдання також записують на дошці. Це дає змогу використовувати їх для контролю знань з інших тем.

Самостійна робота, організована таким чином, краще враховує індивідуальні особливості учнів, розвиває таку важливу у навчанні якість їх особистості, як самостійність, створює умови оптимальнішого засвоєння знань, умінь і навичок, необхідних для засвоєння потрібного матеріалу навчальної теми. Систематичне проведення таких робіт дає змогу не лише враховувати, а й розвивати ряд якостей особистостей учнів та суттєво підвищувати рівень їх знань, покращити успішність з предмета.

Подолання вказаних вище труднощів пов'язане з удосконаленням всієї системи роботи вчителя математики. Зараз вже очевидно, що необхідною є побудова науково обгрунтованої системи всієї навчально-виховної роботи вчителя, що ґрунтується на психолого-педагогічних закономірностях розвитку особистості учня, процесу навчання і виховання.

### **РОЗДІЛ 3. Систематизація і узагальнення знань учнів під час вивчення курсу математики.**

3.1 Методика динамічного узагальнення і систематизації навчального матеріалу.

Послідовне здійснення систематизації - необхідна умова формування узагальнених знань, творчо застосовуваних в різних ситуаціях. Узагальнення знань, в свою чергу, природним чином передбачає їх систематизацію.

Математика, як і будь-яка наука, представляючи собою систему понять (суджень) і їх відносин, має свою специфіку.

Для шкільного курсу математики характерним є також те, що багато понять не вводяться відразу в повному обсязі і змісті. Зміст і обсяг таких понять розширює і збільшує поступово, у міру розвитку курсу. Досить згадати поняття числа, функціональної залежності, геометричної фігури. Уже в початкових класах учнів індуктивним шляхом знайомлять з цими поняттями. До моменту їх вивчення в систематичних курсах алгебри і геометрії накопичується достатньо матеріалу для їх введення на основі систематизації і узагальнення, попереджуючи формальне засвоєння знань.

Наприклад, розвиток поняття степеня числа здійснюється послідовно-від натурального, цілого, раціонального показника до дійсного. На заключному етапі кількісне розширення поняття степеня призводить до якісного стрибка - появи першої досліджуваної в школі трансцендентної функції  $y = a^x$ , яка своїми властивостями значно відрізняється від степеневої функції  $y = ax^n$ .

У процесі узагальнення з'являється можливість звернути увагу учнів на діалектичний характер поняття функції, виражаючи взаємозв'язок і взаємозумовленість явищ об'єктивної дійсності, на роль цього поняття в проникненні діалектичного методу в математичну науку.

В системі нашої роботи узагальнення теоретичних знань здійснюється в такій послідовності:

- 1) узагальнення понять;



- 2) узагальнення тверджень;
- 3) узагальнення теорій;
- 4) виділення змістових ліній, фундаментальних ідей, методів, використовуваних при побудові курсу.

При узагальненні понять встановлюються внутрішньопредметні зв'язки, завдяки чому знання стають системними.

Узагальнення теми або розділу ставить школяра в умови, коли необхідно піднятися над вивченим матеріалом, оглянути його зверху, виділивши найголовніше. Одночасно йде активне повторення навчального матеріалу, знання поглиблюються, розширюються, доводяться до світоглядного рівня, виробляються інтелектуальні вміння і навички. Паралельно формуються практичні вміння і навички (Розв'язування задач, прикладів, вправ, графічні побудови і т.п.), тобто теоретичні знання застосовуються в прикладній діяльності учнів. Завдяки тому, що ці знання також узагальнюються і систематизуються, вдається значно розширити зону їх застосування, збільшити обсяг вправ і підняти ефективність практичної роботи учнів.

У формуванні вмінь узагальнювати навчальний матеріал виділені наступні напрямки:

- 1) ознайомлення учнів зі змістом поняття "узагальнення", значенням узагальнення в пізнавальному процесі;
- 2) відкрита постановка дидактичної мети - навчитися узагальнювати досліджувані відомості; усвідомлення цієї мети учнями;
- 3) ознайомлення з видами узагальнень, з розумовими операціями, що лежать в їх основі; робота учнів по засвоєнню прийомів узагальнення;
- 4) організація роботи з узагальнення навчального матеріалу на уроках математики в 5-11-х класах;
- 5) організація узагальнюючого повторення за темами і розділами програми;
- 6) проведення заключного оглядового повторення по всьому курсу.

Слід зазначити, що процес засвоєння нових знань відбувається як рух від одного рівня пізнання до іншого, більш високого, визначається результатами спілкування вчителя з учнями. Навчання виявляється, таким чином, провідним фактором розвитку з орієнтацією на зону "найближчого розвитку" (на те, що учень може виконувати за допомогою вчителя). Ось чому надзвичайно важливою є організація навчально-виховного процесу на етапі первинного ознайомлення учнів з навчальним матеріалом.

На уроках осмислення учнями навчального матеріалу відбувається в процесі поглибленого розкриття його змісту. При цьому процеси мислення здійснюються в формі переходів від чуттєво-конкретного, одиничного до абстрактного. Узагальнення відбуваються в порівнянні, з допомогою виділення подібних властивостей, їх систематизації та класифікації. Тут беруть участь всі базові розумові процеси: порівняння, співствілення і розрізнення, аналіз і синтез, абстракція і узагальнення, які лежать в основі переходів від конкретного, одиничного до абстрактного, загального і від абстрактного, загального до конкретного, наочного, одиничного. Ефективність етапу закріплення забезпечується тим, що до нового матеріалу звертаються неодноразово, відтворюють його буквально або перекодовують засобами символічної математичної мови, включають в систему вже засвоєних знань. Таким чином усуваються причини появи прогалів в знаннях учнів і створюються сприятливі умови для підвищення ефективності вивчення програмного матеріалу.

Для структури уроків характерна органічна єдність логічного і психологічного, чітка упорядкованість в роботі вчителя і учнів в їх нерозривному взаємозв'язку. Основною завжди виявляється не окрема частина структури кожного уроку, а та ведуча змістовна ідея, яка проходить через всі етапи одного уроку і всіх уроків шкільної математики взагалі. Причому в співвідношенні діяльності вчителя і учня домінує активна пізнавальна діяльність останнього. Особлива увага, що приділяється організації навчальної діяльності на етапі підготовки до сприйняття нових

знань, сприяє усуненню однієї з причин формалізму в математичних знаннях учнів, що складається в передчасному згортанні учителем початкової ланки в процесі пізнання. В цьому плані цілком виправдовують себе вступні уроки, що проводяться з основних тем програми на обов'язковому рівні навчання.

Важливим є не тільки факт наявності в учнів знань, а й характер процесу, в результаті якого вони сформовані. Введення нових знань як нового елемента в систему вже відомих положень математичної теорії створює умови для активної пізнавальної діяльності учнів і в той же час робить їх системними - основна ознака, який відрізняє наукові знання від ненаукових.

Систематизація знань невіддільна від їх узагальнення: чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними зв'язків і відносин, і тим ширше коло знань об'єднується в систему. Залежно від ролі і місця в навчальному процесі ми будемо розрізняти наступні етапи узагальнення і систематизації знань.

1. Первинні узагальнення – найбільш елементарні узагальнення, здійснювані під час сприйняття безпосереднього і опосередкованого і усвідомлення навчального матеріалу. В результаті цього процесу в пам'яті учнів утворюються загальні уявлення про предмети і явища.

2. Локальні (приватні), або понятійні узагальнення здійснюються на уроці в процесі роботи над засвоєнням нових понять, на етапі осмислення знань. Основним напрямком навчання з метою засвоєння понять є розкриття причинно-наслідкових та інших зв'язків у досліджуваних об'єктах, виявлення їх внутрішньої сутності.

3. (Міжпонятійні або поурочні.) узагальнення і систематизації, які полягають у визначенні між досліджуваними поняттями загальних і істотних ознак і властивостей, в переході від менш до більш загальних понять, в об'єднанні засвоєних понять в системи, в розкритті зв'язків і відносин між елементами даної системи, розміщенні їх у певному порядку і раціональній послідовності. Виділення даного виду узагальнення дає можливість вивченні

на уроці поняття звести в єдину систему, передбачену програмою або вчителем, і веде до засвоєння відповідних теорій і найважливіших ідей. Цей вид узагальнення і систематизації здійснюється головним чином на спеціально виділеному етапі уроку.

4. Тематичні узагальнення і систематизації повинні забезпечити засвоєння цілої системи або циклу понять, що вивчаються на протязі тривалого часу, що склали зміст великих розділів програми.

5. Підсумкові узагальнення і систематизації служать для встановлення зв'язків і відносин між системами знань, засвоєними в процесі оволодіння цілим курсом, засвоєння цілісної системи знань по окремих галузях науки. Уроки підсумкових узагальнень і систематизації проводяться в кінці вивчення того чи іншого навчального курсу. Для систематизації відбираються основні положення, ідеї, теорії, що характеризують загальні закономірності історичного розвитку природи і суспільства.

6. Міжпредметні узагальнення і систематизації здійснюються по ряду споріднених предметів наприклад, математики, фізики, хімії. на спеціальних уроках міжпредметного узагальнюючого повторення.

Розглянемо далі основні компоненти процесу засвоєння учнями знань з геометрії і алгебри як складну динамічну систему.

Аналіз уроків узагальнення і систематизації знань і виявлення труднощів, пов'язаних з їх проведенням, показує, що нерідко такі уроки перетворюються в уроки простого повторення зокрема, актуалізація опорних знань найчастіше перетворюється в просте відтворення матеріалу попереднього уроку безвідносно до того, як цей матеріал "працює" на тему і мету даного уроку, на яких формуванню системи знань, системності розуміння учнями досліджуваного матеріалу належної уваги не приділяється. Запропонована методика роботи базується на тому, що узагальнення і систематизація знань учнів стають обов'язковим компонентом навчання, причому використовуються всі рівні узагальнення і систематизації: первинні, понятійні, міжпонятійні, тематичні, підсумкові та міжпредметні.

Узагальнення постає тут не тільки на спеціальних уроках, але здійснюється на кожному уроці у вигляді актуалізації знань, пов'язаних з знову досліджуваними змістовними лініями курсу математики. Це сприяє формуванню системності знань, умінь і навичок учнів.

Систематизацію та узагальнення як обов'язкові компоненти навчання проводимо в двох напрямках:

1. узагальнення і систематизація всього шкільного курсу математики (курсу єдиної математики, геометрії, алгебри, алгебри і початків аналізу) ;

2. навчання учнів математики через узагальнення і систематизацію знань, умінь і навичок.

Курс математики узагальнюємо за принципом понятійних, тематичних і змістовних блоків знань, які оформляємо в вигляді спеціальних опорних конспектів-окремих зошитових листів з короткими символічними записами і малюнками, що відображають істотні зв'язки в тому чи іншому матеріалі, що вивчається. (Учні зберігають опорні конспекти в зошитах або спеціальних конвертах . Опорні конспекти вчителі оформляють у вигляді плакатів).

Опорні конспекти, що видозмінюються в залежності від вікової групи учнів, забезпечують поетапне формування у дітей “математичних” розумових дій на основі поступового перекодування зі словесної мови на мову математики.

Особливу увагу приділяємо формуванню системи знань, поясненню дітям ієрархічної структури основних закономірностей, понять, фактів складаючи основне ядро відповідної частини програмного матеріалу даного класу. Швидкий темп і проходження навчального матеріалу забезпечується тим, що спочатку учні добре і усвідомлено заучують ті визначення, формули, правила, без яких неможливе успішне оволодіння будь-яким предметом. Встановивши потім (за допомогою вчителя) взаємозв'язки між ними (переважно дедуктивним шляхом), учні потім швидко розуміють і всі інші, засновані на цих фундаментальних закономірностях знання.

Важливим вважається також те, що при повторному відтворенні тієї чи іншої навчальної інформації діти навчаються виділяти основне, відкидаючи другорядне.

Нехай, наприклад, ми починаємо працювати в 5-х класах.

В програмі 5-6-х класів є наступні змістовні лінії:

- 1) арифметика;
- 2) елементи алгебри;
- 3) елементи геометрії;

Перш за все відновлюємо систему знань, умінь і навичків учнів, отриманих ними за 1-4-й класи, і лише потім переходимо до вивчення програми 5-го класу.

На першому уроці по першій темі 5-го класу пов'язуємо цю тему з системою знань 1-4-х класів, співвідносячи з однією з змістовних ліній 5-го класу. В кінці уроку, узагальнюючи і систематизуючи нові знання і вміння, продовжуємо систему знань і умінь відповідної змістовної лінії, показуємо можливість і перспективу розвитку нових знань.

На другому уроці з даної теми простежуємо її зв'язки з системою знань, що входять в програму початкових класів і першого уроку програми 5-го класу, проведеного по цій темі.

Аналогічно працюємо на третьому, четвертому і т.д. уроках., Нарешті, закінчуємо розгляд першої теми курсу 5-го класу, і проводячи тематичне узагальнення і систематизацію, формуємо нову систему знань і умінь відповідної змістовної лінії. Якщо друга тема курсу 5-го класу є продовженням тієї ж змістовної лінії, то ми і далі ведемо роботу по вказаному плану. Якщо ж ця тема є продовженням іншої змістовної лінії, то ми переходимо до неї, по-перше, через внутрішньокурсовий зв'язок і, по-друге, через актуалізацію наявного блоку знань і умінь вже цієї змістовної лінії, а потім в аналогічному плані вивчаємо другу тему 5-го класу.

Аналогічно вивчаємо курс 5-го класу до кінця року, узагальнюючи і систематизуючи кожен з трьох його змістовних ліній. Закінчуємо п'ятий рік

навчання формуванням системи знань, умінь і навичок відповідно з арифметики; елементів алгебри; елементів геометрії.

Наочно описаний процес можна уявити так, як показано на схемі 1.

Така ж робота триває в 6-му класі: вивчається програма і відповідно узагальнюються і систематизуються знання, вміння і навички учнів з арифметики; елементів алгебри; елементів геометрії.

В кінці 6-го класу утворюємо систему знань і умінь за всі попередні роки навчання, в якій виділяємо три блоки 1 – арифметика; 2 – елементи алгебри; 3 – елементи геометрії.

Відповідно до цих блоків складаємо три опорні конспекти.

На уроках підсумкового повторення відпрацьовуємо сформовану систему знань і умінь учнів, формуємо у них чіткі уявлення про перспективу математичних знань, які будуть отримані в наступному, 7-му класі (див.схему 2, с.65 )

В 7-му класі переходимо до вивчення алгебри і геометрії. В курсі алгебри виділяємо наступні змістовні лінії:

- 1 ) дійсні числа;
- 2 ) тотожні перетворення;
- 3 ) рівняння і нерівності;
- 4 ) елементарні функції.

В курсі геометрії змістовні лінії такі:

- 1 ) геометричні фігури і їх властивості;
- 2 ) геометричні величини;
- 3 ) елементи тригонометрії;
- 4 ) координати і вектори.

Тому 7-й клас починаємо трохи інакше, ніж 5-й. Встановивши систему знань, умінь і навичок учнів за попередні роки навчання, відкриваємо перспективу одного з нових курсів – курсу алгебри, його будову і змістовні лінії; показуємо взаємозв'язок ліній "Арифметика" і "Дійсні числа",

"Елементи алгебри" і "Тотожні перетворення", "Рівняння і нерівності", "Елементарні функції".

Після цього переходимо до вивчення курсу алгебри 7-го класу. Працюємо в плані, реалізованому в 5-6-х класах, з тією відмінністю, що узагальнюємо і систематизуємо вже по змістовних лініях курсу алгебри.

Аналогічно після показу зв'язку змістовної лінії

"Елементи геометрії" з змістовними лініями "Геометричні фігури і їх властивості", "Геометричні величини" (див. схему 3, с.66) приступаємо до вивчення курсу геометрії.

Отже, кожен рік навчання починається з повторення системи узагальнених і систематизованих за змістом курсу знань, умінь і навичок учнів за всі попередні роки навчання (на обов'язковому рівні). Після достатнього повторення проводиться контроль і корекція знань, умінь і навичок з обов'язковим висновком не тільки необхідної, а й можливості поглиблення і подальшого розширення знань, умінь і навичок учнів. Тільки після цього починається вивчення курсу даного року.

Проводиться перший урок – узагальнюються і систематизуються знання, вміння і навички, отримані на цьому уроці.

Проводиться другий урок – узагальнюються і систематизуються знання, вміння і навички двох уроків.

Проводиться третій урок – узагальнюються і систематизуються знання, вміння і навички трьох уроків і т.д.

Кожну тему, поняття, змістовну лінію узагальнюємо і систематизуємо на спеціальних уроках.

Таким чином, від узагальнення і систематизації на кожному уроці природньо переходимо до динамічного узагальнення відповідної теми в цілому, а від узагальнення і систематизації однієї, двох, трьох і так далі тем – до узагальнення і систематизації розділу і змістовної лінії. І кожного разу узагальнення і систематизація проводиться з обов'язковим виділенням і активізацією головних, основних знань, умінь і навичок учнів.



Закінчується кожний рік узагальненням і систематизацією знань, навичок і умінь учнів в межах даного року і всіх попередніх років навчання.

Узагальнюючи і систематизуючи знання, навички та вміння учнів в обсязі того чи іншого поняття, конкретної теми або змістовної лінії, отримуємо, як уже зазначалося, понятійні тематичні та змістовні блоки знань і умінь, які оформляємо у вигляді опорних конспектів в зошиті учнів.

Як же складаються блоки знань і умінь – опорні конспекти? Орієнтиром для вчителя при складанні понятійних і змістовних блоків можуть служити схеми, аналогічні тим, які представлені на таблицях 1 та 2.

Понятійний опорний конспект складається зазвичай протягом усього часу вивчення поняття в кілька прийомів, з урахуванням рівня знань учнів і їх вікових особливостей.

Наприклад понятійний конспект “Трикутник” на рівні 7-го класу виглядає так, як показано на (мал. 1 с.67)

Ми бачимо, що опорний конспект цей дуже деталізований, містить всі необхідні визначення і твердження про властивості фігури що нас цікавить.

На рівні 8-го класу відповідний опорний конспект значно лаконічніший (мал. 2 с.69)

Зменшилась кількість словесних записів, збільшився об’єм інформації, чіткіше проглядаються внутрішні зв’язки і відношення між складовими частинами опорного конспекту.

При закінченні 9 класу понятійний опорний конспект "Трикутник" формується остаточно (мал. 3 с.68)

Ми бачимо, що словесний текст майже зник, зорове сприйняття стало більш "математичним". Учні, поступово оволодівши тим чи іншим математичним поняттям, опановують і математичну мову.

Слід відзначити, що робота зі створення того чи іншого понятійного блоку і узагальненню (від уроку до уроку) тематичного блоку з оцінкою його значення по відношенню до відповідних змістовних ліній здійснюється в процесі оволодіння новими знаннями і вміннями.

Наприклад на першому ж уроці геометрії, проведеному по програмі 7-го класу, починаємо формувати 3 блоки знань: понятійні - "Точка" і "Пряма", а також тематичний - "Аксиоми геометрії". Знання другого уроку приєднуємо до знань першого. З появою нового поняття "відрізок" формуємо наступний блок і т.д.

До кінця першого року вивчення геометрії маємо п'ять тематичних і сім понятійних блоків, (опорних конспектів)

Спочатку учні виконують узагальнення і систематизацію під керівництвом вчителя, а через певний час пропонуємо їм відповідні завдання для самостійної роботи.

### 3.2 ФОРМУВАННЯ СИСТЕМНИХ ЗНАНЬ З ГЕОМЕТРІЇ

Пропедевтика вивчення курсу геометрії починається в 1-4-х класах на інтуїтивній основі із залученням елементів дедуктивного мислення. Теоретичний матеріал викладається на наочно-інтуїтивному рівні, найважливіші методи і закони формулюються у вигляді правил.

Учні 1 - 4-х класів повинні вміти:

- розпізнавати і зображати на клітчастому папері з допомогою циркуля і лінійки найпростіші геометричні фігури: (точка, відрізок, коло, багатокутник );
- виміряти довжину відрізка, довжину ламаної;
- будувати відрізок даної довжини;
- обчислювати периметр і площу прямокутника.

Учні 5-6-х класів повинні знати:

Геометричні фігури: відрізок, пряма, промінь, кут, трикутник, прямокутник, круг, коло. Перпендикуляр до прямої. Прямий кут. Паралельні прямі. Куб, прямокутний паралелепіпед, куля.

Приклади величин: довжина, площа, об'єм, градусна міра кута. Одиниці вимірювання довжин, площ, об'ємів і кутів. Площа прямокутника.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда. Формули довжини круга і площі кола.

Інструменти: лінійка, кутник, транспортир, циркуль.

Побудова відрізків і кутів заданої величини. Побудова перпендикуляра до прямої і паралельних прямих за допомогою кутника і лінійки.

Таким чином, до початку вивчення систематичного шкільного курсу геометрії учні, які засвоїли програмний матеріал на наочно-інтуїтивному рівні, знають цілий ряд геометричних фігур і вміють їх розпізнавати і зображати. Зокрема, уміють будувати відрізки і кути заданої величини, перпендикуляр до прямої, паралельні прямі; вимірювати: відрізки і кути; обчислюють довжину кола, площу і периметр прямокутника, площу круга, об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Курс геометрії 7-9-х класів передбачає систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формується просторова уява учнів, розвивається їх логічне мислення і підготовка до вивчення стереометрії, а також суміжних дисциплін (фізика, креслення та ін.)

Посилюється теоретична значимість досліджуваного матеріалу розширюються внутрішні логічні зв'язки курсу; підвищується роль дедукції, ступінь абстрактності досліджуваного матеріалу. Учні опановують прийоми аналітико-синтетичної діяльності при доведенні теорем і розв'язанні задач, розвивається їх логічне мислення. Систематичний виклад курсу дозволяє розпочати роботу по формуванню уявлень учнів про будову математичної теорії. Прикладна спрямованість курсу забезпечується постійним зверненням до наочності, зокрема до малюнків і креслень на всіх етапах навчання та розвитком на цій основі геометричній інтуїції учнів. Систематичне звернення до прикладів з практики розвиває у них вміння виокремлювати геометричні форми і відношення в предметах і явищах дійсності, використовувати мову геометрії для їх опису.

Практична спрямованість курсу забезпечується систематичним застосуванням геометричного апарату для вирішення задач на обчислення значень геометричних величин, доведення і побудову.

При вивченні планіметрії учні отримують систематичні відомості про основні фігури на площині та їх властивості; знайомляться з геометричними величинами, котрі характеризують плоскі фігури, і вчать виконувати відповідні обчислення; знайомляться з застосуванням аналітичного апарату, (елементи тригонометрії і алгебри, вектори і координати), до вирішення геометричних задач.

В результаті вивчення курсу планіметрії всі учні повинні володіти наступними вміннями (обов'язковий мінімум)

– зображати геометричні фігури, зазначені в умовах теорем та задач і виділяти відомі фігури на кресленнях і моделях;

- вирішувати типові завдання на обчислення, доведення і побудову, опираючись на теоретичні відомості, отримані в курсі;
- проводити доведення в ході рішення типових задач;
- обчислювати значення геометричних величин (довжин, кутів, площ) використовуючи вивчені властивості і формули;
- виконувати основні побудови циркулем і лінійкою; вирішувати комбіновані задачі, що зводяться до виконання основних побудов;
- застосовувати основний апарат алгебри і тригонометрії в ході рішення геометричних задач;
- використовувати вектори і координати для вирішення стандартних задач (обчислення довжин і кутів, додавання векторів і множення вектора на число).

Мета курсу геометрії 10-11-х класів - систематичне вивчення властивостей геометричних тіл в просторі, розвиток просторової уяви і подальший розвиток логічного мислення учнів, засвоєння ними способів обчислення важливих геометричних величин.

Курсу притаманний систематизуючий, узагальнюючий характер, спрямованість на закріплення і розвиток умінь і навичок, отриманих в неповній середній школі. При доведенні теорем і розв'язанні задач активно використовуються вивчені в курсі планіметрії властивості геометричних фігур, застосовуються геометричні перетворення, вектори і координати. Досить високий рівень абстрактності досліджуваного матеріалу, логічна строгість викладу поєднуються зі значним ступенем наочності.

Прикладна спрямованість навчання забезпечується застосування наочності на всіх етапах навчального процесу, постійним зверненням до досвіду учнів. Важливими в практичному плані є вміння зображати відомі геометричні тіла, знаходити їх об'єми і площі поверхонь.

При вивченні стереометрії учні набувають систематичні відомості про основні види просторових тіл їх властивості, знайомляться з теоретичним

обґрунтуванням методів зображення просторових тіл на площині, опановують вміннями обчислювати значення геометричних величин.

В результаті вивчення курсу стереометрії всі учні повинні оволодіти наступними вміннями (обов'язковий мінімум)

- зображувати просторові геометричні тіла, вказані в умовах теорем і завдань, і виділяти відомі тіла на кресленнях і моделях;
- вирішувати типові завдання на обчислення і доведення, спираючись на отримані теоретичні відомості;
- проводити доказові міркування в ході рішення типових задач, використовуючи теоретичні відомості, отримані при вивченні планіметрії і стереометрії;
- обчислювати значення геометричних величин, довжин, кутів, площ і об'ємів застосовуючи вивчені в курсах планіметрії і стереометрії формули і теореми;
- застосовувати апарат алгебри, початків аналізу і тригонометрії в ході розв'язування геометричних задач;
- використовувати координати і вектори для розв'язування простих стандартних задач.

Систематичне звернення до неї допомагає вчителю дотримуватися однієї з найважливіших умов його успішної роботи: чітко передбачати результати, очікувані на кожній стадії навчання.

Крім того як відзначається в програмі, вчителю математики необхідно, відволікаючись від місця конкретної теми в курсі, оцінити її значення по відношенню до відповідної змістовної лінії, правильно визначити і розставити акценти в навчанні, організувати підсумкове повторення матеріалу. Це означає що для успішної роботи вчителю математики слід поглиблено проаналізувати тематику того чи іншого навчального курсу, виділивши основні змістовні лінії.

Зокрема, в курсі геометрії можна виділити чотири основні змістовні лінії:

- 1) геометричні фігури і їх властивості;
- 2) геометричні величини;
- 3) координати і вектори;
- 4) елементи тригонометрії.

Що стосується навчального підручника “Геометрія, 7-11 класи” О.В.Погорелова, де матеріал впорядкований в відповідності з внутрішньою логікою предмета і викладено з суворим дотриманням аксіоматичного принципу, то в ньому ці лінії перериваються і не завжди проглядаються з достатньою чіткістю.

Висновок цей підтверджує аналіз таблиці 1 (див. “Додатки” с.63)

відображаючи з допомогою горизонтальних стрілок зв'язок кожної програмної теми шкільного курсу геометрії (основні рубрики, пункти навчального посібника О.В.Погорелова) з тією чи іншою змістовною лінією (зазначеної кінцем відповідної стрілки).

Наприклад вивчення змістової лінії "Геометричні величини" розпочинається в темі 5, продовжується в темах 21, 23 і 33, потім в темах 49, 75, 76, 91, 94, 95 і значними блоками в темах 76-81, 110-121.

Аналогічний висновок (спираючись на таблицю 1) можна зробити відносно інших змістовних ліній курсу геометрії:

має місце об'єктивно обумовлена відсутність цілісності відображення кожної з них у відповідній системі тематичного планування.

Остання обставина тягне за собою відомі труднощі вивчення геометрії. Пропоновані шляхи їх подолання будуть розглянуті далі, а зараз звернемося до питання про формування і засвоєння понятійних блоків знань і вмінь.

Відзначимо насамперед, що понятійний апарат кожної відповідної лінії курсу геометрії досить широкий.

Так, наприклад, змістовна лінія планіметрії "Геометричні фігури і їх властивості" включає такі поняття: "точка", "пряма", "відрізок", "промінь", "кут", "трикутник", "коло", "паралелограм" і ін. Блок знань кожного

конкретного поняття формується протягом цілого ряду уроків, перериваючись, відновлюючись, продовжуючись і знову перериваючись і т.д.

Це підтверджується таблицею 2 (див. "Додатки" с. 72, що відображає за допомогою стрілок) зв'язок тематичного планування курсу геометрії з поняттями змістової лінії "Геометричні фігури і їх властивості".

Зокрема, блок знань поняття "трикутник" формується при вивченні тем 7,15-19,21, 22, 24, 26, 40, 41, 43, 46, 60, 68-70, 77, 79. У темі 7 вводимо означення і позначення трикутника і його елементів, рівних трикутників, доводимо існування трикутника, рівного даному. Потім переходимо до основних властивостей паралельних прямих, суміжних і вертикальних кутів, інших питань. А повертаємося до трикутника тільки через сім тем.

У темах 15-19 розглядаємо ознаки рівності трикутників, рівнобедрений трикутник, продовжуємо вивчення елементів трикутника; в темах 21, 22, 24 вивчаємо суму кутів трикутника, прямокутний трикутник і побудову трикутника. І знову перериваємо формування нових знань понятійного блоку "Трикутник" на чотирнадцять тем. У темі 40 вивчаємо теорему Піфагора, переходимо до інших питань, зупиняємось та повертаємось до подальшого формування цього блоку знань.

Звісно вищезгадані інтервали в формуванні даного понятійного блоку знань створюють певні труднощі в оволодінні відповідним матеріалом. Але, незважаючи ні на що, результат

вивчення змістовної лінії планіметрії "Геометричні фігури і їх властивості" – цілком відповідні знання і вміння на рівні "володіти" – повинен бути досягнутий неодмінно.

Підведемо певні підсумки розгляду курсу геометрії.

Пропедевтичний курс геометрії 1-6-х класів дав учням вміння пізнавати і зображати 9 фігур, будувати і вимірювати відрізки і кути, обчислювати площу і периметр прямокутника і кола, довжину круга, об'єм прямокутного паралелепіпеда.



Перший урок за програмою 7-го класу продовжив цю систему знань і вмінь відкриттям геометрії як науки, її аксіоматичної основи і дедуктивної побудови. Далі роботу по узагальненні і систематизації проводимо, складаючи:

- тематичний опорний конспект "Система аксіом";
- понятійний опорний конспект: "Точка", "Пряма", "Відрізок", "Промінь", "Кут", "Трикутник", "Коло";
- змістовні опорні конспекти: "Геометричні фігури і їх властивості", "Геометричні величини";
- тематичні: "Методи геометрії", "Геометричні побудови"

Ось і весь перелік блоків знань 7-го класу.

В 8-му класі продовжуємо змістовні блоки "Геометричні фігури та їх властивості", "Геометричні величини" і складаємо блоки "Елементи тригонометрії", "Координати і вектори", продовжуємо тематичний блок "Методи геометрії" і складаємо блоки "Чотирикутники", "Перетворення фігур", "Декартові координати на площині", продовжуємо всі понятійні блоки 7-го класу (окрім опорних конспектів "Точка" і "Пряма")

В 9-му класі продовжуємо всі змістовні блоки, завершуючи блок "Елементи тригонометрії" і в аспекті площини блоки "Геометричні фігури і їх властивості", "Координати і вектори", складаємо тематичний блок "Багатокутники" і продовжуємо

блок "Чотирикутники", а також всі понятійні блоки 8-го класу (окрім блоку "Відрізок", в якому, як і в блоках "Точка" і "Пряма", вже відпала необхідність.)

Отже, планіметрія завершена за 6 років пропедевтики і 3 роки вивчення маємо:

3 понятійних блоки: "Кут", "Трикутник", "Коло" (необхідність понятійних блоків - "Точка", "Пряма", "Відрізок", "Промінь" – відпала.)

6 тематичних блоків: "Аксиоми", "Геометричні побудови", "Чотирикутники", "Перетворення фігур", "Багатокутники", "Методи геометрії".

4 змістовних блоки: "Геометричні фігури і їх властивості", "Геометричні величини", "Елементи тригонометрії", "Координати і вектори".

Ще 2 роки цілеспрямованого вивчення стереометрії - і шкільний курс геометрії завершено.

У 10-му класі завершуємо узагальнення і систематизацію теми "Аксиоми геометрії", на більш високому рівні розглядаємо питання про аксіоматичні основи геометрії, про геометрію як науку. Складаємо тематичний опорний конспект знань і умінь "Паралельність і перпендикулярність".

Продовжуємо найважливішу змістовну лінію курсу геометрії - "Геометричні фігури і їх властивості", встановлюючи взаємозв'язки основних фігур в просторі.

Продовжуємо узагальнення і систематизацію змістовної лінії "Геометричні величини" і завершуємо змістовну лінію "Координати і вектори".

У 11-му класі проводимо узагальнення і систематизацію теми "Геометричні тіла", завершуємо змістові лінії "Геометричні фігури і їх властивості", "Геометричні величини", також тематичний блок "Перетворення фігур".

Отже, до початку узагальнюючого повторення курсу геометрії маємо опорні конспекти, (блоки знань і умінь):

змістовні - геометричні фігури і їх властивості;

геометричні величини;

координати і вектори;

елементи тригонометрії;

тематичні - аксиоми геометрії;

методи геометрії;  
 геометричні побудови;  
 перетворення фігур;  
 багатокутники, чотирикутники;  
 паралельність і перпендикулярність;  
 геометричні тіла;  
 понятійні – кут;  
 трикутник;  
 коло – круг.

Першу змістовну лінію програма визначає наступним чином:

Геометричні фігури і їх властивості

7-9 й класи

Початкові поняття планіметрії. Геометричні фігури. Поняття про рівність фігур. Поняття про аксіоми і теореми.

Суміжні і вертикальні кути та їх властивості. Ознаки паралельності прямих. Перпендикулярні прями. Теореми про паралельність і перпендикулярність прямих.

Трикутник. Ознаки рівності трикутників. Властивості рівнобедреного трикутника. Сума кутів трикутника. Теорема Піфагора.

Паралелограм і його властивості. Ознаки паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат і їх властивості. Трапеція. Правильні многокутники.

Коло і круг. Дотична до кола і її властивості.

Властивості серединного перпендикуляря до відрізка: коло описане навколо трикутника. Властивості бісектриси кута, коло вписане в трикутник.

Поняття про подібність фігур. Ознаки подібності трикутників

Рухи: осьова і центральна симетрії, поворот, па паралельне перенесення. Приклади фігур, що володіють симетрією.

Основні задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

10-11-й класи

Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії.

Взаємне розташування двох прямих у просторі: паралельні що перетинаються і мимобіжні прямі.

Взаємне розміщення прямої і площини: прямі що перетинаються і паралельні пряма і площина. Ознака паралельності прямої і площини. Перпендикулярність прямої і площини. Ознаки перпендикулярності прямої і площини. Теореми про паралельність і перпендикулярність прямої і площини.

Взаємне розташування двох площин: пересічні і паралельні площини. Ознака паралельності двох площин. Перпендикулярність площин. Теореми про паралельність і перпендикулярність площин. Двогранний кут.

Паралельне проектування та його властивості. Зображення фігур на площині.

Багатогранники: призма і піраміда. Паралелепіпед. Пряма і правильна призма; правильна піраміда. Перетин багатогранників. Поняття про правильні многогранники.

Поняття про тіла і поверхні обертання. Циліндр, конус, куля, сфера. Осьові перерізи циліндра і конуса. Переріз кулі площиною. Дотична площина до сфери.

Поняття про рух. Симетрія відносно точки і площини, приклади тіл і поверхонь, які мають симетрію. Паралельне перенесення. Поняття про рівність фігур в просторі.

Отже, опорний конспект першої змістової лінії може виглядати так, як показано на (мал.10 с.70)

Другу змістовну лінію програма визначає наступним чином:

Геометричні величини

5-6-ті класи

Приклади величин: довжина, площа, об'єм, градусна міра кута. Одиниці довжин і кутів, площ, об'ємів і кутів. Площа багатокутника. Об'єм прямокутного паралелепіпеда. Формули довжини кола і площа круга.

7-9-ті класи

Довжина відрізка і його властивості. Відстань між точками. Відстань від точки до прямої. Величина кута і його властивості. Вимірювання вписаних кутів. Довжина дуги. Число  $\pi$ .

Поняття про площі: основні властивості площі. площі прямокутника, трикутника, паралелограма, трапеції. Відношення площі подібних фігур. Площа круга та його частин.

#### 10-11-ті класи

Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Лінійний кут двогранного кута.

Поняття про об'єм, основні властивості об'єму. Об'єми многогранників: прямокутного паралелепіпеда, призми, піраміди.

Об'єми тіл обертання: циліндра, конуса, кулі. Площі бічних поверхонь призми, піраміди, циліндра, конуса. Площа сфери.

Опорний конспект цієї змістовної лінії зображений на (мал..11 с.72)

Третю змістовну лінію програма виділяє так:

Координати і вектори

#### 7-9-ті класи

Прямокутна система координат на площині. Формули відстані між двома точками площини із заданими координатами. Рівняння прямої та кола.

Вектор. Довжина і напрям вектора. Кут між векторами. Колінеарні вектори. Сума векторів та їх властивості Множення вектора на число та його властивості. Розкладання векторів по осях координат. Координати вектора. Скалярний добуток векторів і його властивості. Проекція вектора на вісь.

#### 10-11-ті класи

Прямокутна система координат в просторі. Вектори в просторі. Сума векторів та її властивості. Множення вектора на число та його властивості. Координати вектора. Кут між векторами. Скалярний добуток векторів.

Четверта змістовна лінія в програмі відображається так:

Елементи тригонометрії

#### 7-9-ті класи

Синус, косинус і тангенс кута.

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Теорема синусів і косинусів. Розв'язування трикутників. Відповідний опорний конспект зображений на рис. 19. Два понятійних блоки "Кут" (7 і 11-ті класи), понятійний блок "Коло", а також п'ять тематичних блоків "Аксіоми геометрії", "Геометричні побудови", "Багатокутники", "Геометричні тіла", "Паралельність і перпендикулярність в геометрії". Наведені в додатках с.

Отже, підкреслимо ще раз, що опорні конспекти грають інформаційну роль, навчальну та формує мислення. Складаючи опорний конспект, ми користуємося насамперед програмою з математики і підручником.

Навчальну роль опорного конспекту можна розглядати на наступному прикладі. Урок геометрії в 10-му класі. Зміст - основні фігури простору, аксіоми стереометрії. До уроку у вчителя підготовлений плакат - аксіоми планіметрії, а у кожного учня - аналогічний тематичний опорний конспект. На уроці формуємо систему аксіом курсу геометрії і завершуємо роботу по формування тематичного блоку знань. Наступний урок - деякі наслідки аксіом стереометрії. Можна рекомендувати таку методику в навчанні доведення теорем. Вивчаємо теорему 14.1 (через пряму і точку що їй не належить можна провести площину, і притому тільки одну.

Деталізуємо умова і висновок в записах, що дано і що треба довести. Вивчили умову - починаємо пошук доведення. Питання перше: Що треба зробити? Відповідь: провести площину. Питання друге: А коли ми можемо провести площину? І порада: давайте подивимося опорний конспект, переберемо аксіоми –  $I_1$  – ні,  $I_2$  - ні,  $C_3$  – так.

Отже, потрібні дві різні прямі, що мають спільну точку.

Одна пряма у нас уже є, потрібна друга пряма. А що треба, щоб провести пряму?

Знову робота з опорним конспектом - і відповідь

дає аксіома  $I_2$  : дві точки. Одна точка поза даною прямою є, а іншу можна позначити на ній за аксіомою  $I_1$  . Отже, провели другу пряму, яка має

з даною одну спільну точку. Тоді, за аксіомою  $S_3$  проводимо шукану площину. Подібна робота кожного учня з опорним конспектом полегшує пошуки введень і поступово сприяє запам'ятовуванню і накопиченню основних знань.

Так як рішення будь-якого завдання після аналізу умови вимагає додаткових знань про об'єкти умови, то інформаційна і навчальна роль опорного конспекта тут безперечно особлива для учнів, які ще недостатньо вільно володіють всім об'ємом знань, не усвідомлюють усіх необхідних змістовних зв'язків.

## **Розділ 4. Педагогічний експеримент та статистика обробки його результатів.**

Педагогічний експеримент є таким методом досліджень, при якому відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов що відповідають меті дослідження.

Педагогічний експеримент – це науково поставлений дослід спостереження досліджуваного явища в точно врахованих умовах, які дають можливість стежити за ходом явища і відтворювати його при повторенні цих умов. Характерною рисою експерименту є заплановане втручання людини в явище, що вивчається, можливість його багаторазового відтворення у змінених умовах.

Предметом педагогічного експерименту є визначення ефективності методики узагальнення і систематизації знань з математики.

В експерименті брали участь учні 8 класу Сморгівської ЗОШ, та учні 8 класу Берегівської ЗОШ Млинівського району Рівненської області в яких рівень навчальних досягнень з математики майже однаковий

Ми використали порівняльний вид експерименту. Оскільки робота велась паралельно в двох класах, де на дану тему виділялась однакова кількість годин, то об'єм матеріалу відповідно був поданий однаковий, однак відрізнялись форми подання. Експериментальний 8 клас Сморгівської ЗОШ вивчав тему, використовуючи розроблену нами методику, а контрольний 8 клас Берегівської ЗОШ – традиційні методи проведення уроків.

В 8 класі Сморгівської ЗОШ на уроках геометрії проводилося навчання за розробленою нами методикою.

Навчаючий етап експерименту передбачав постановку і розв'язання таких завдань:



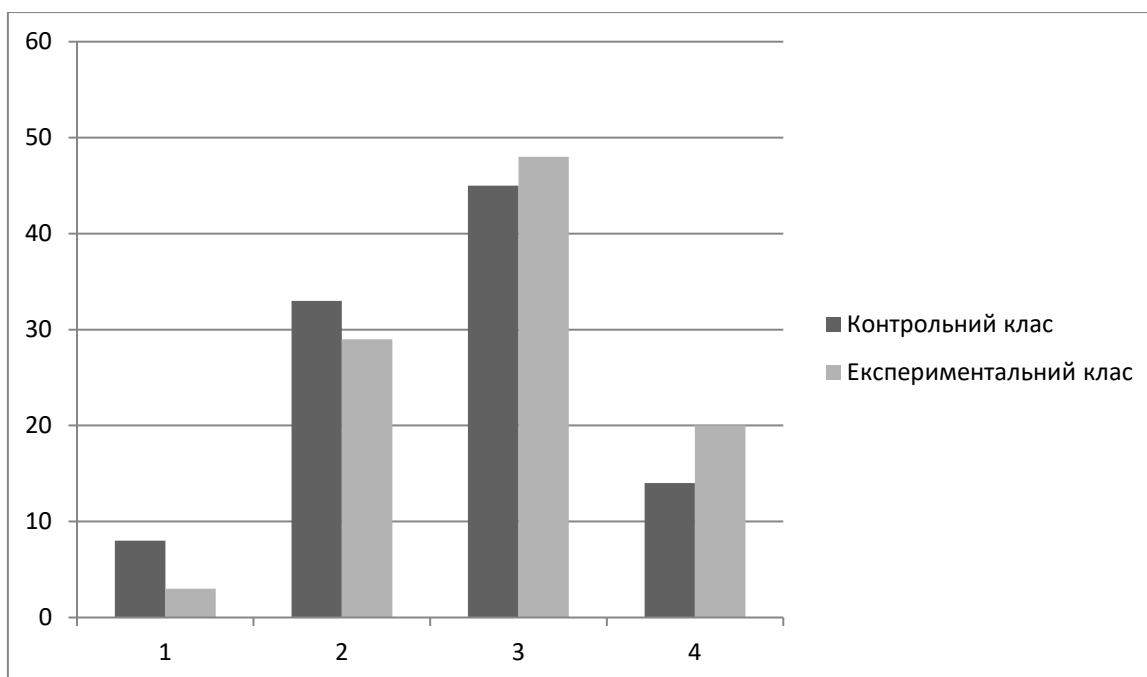
- закріпити знання;
- звести навчальний процес до єдиного всім зрозумілого;
- перевірити розроблену систему рівневих завдань з математики для 8 класів.

Після проведення уроку узагальнення та систематизації знань в 8-х класах, виконання контрольних завдань передбачало письмову перевірку на рівні не нижче обов'язкового, результати яких такі:

Таблиця

Рівень знань учнів	Відсотковий показник рівня знань учнів контрольного 8 класу Берегівської ЗОШ	Відсотковий показник рівня знань учнів експериментального 8 класу Сморгівської ЗОШ
Початковий	8	3
Середній	33	29
Достатній	45	48
Високий	14	20

Результати також подаємо у вигляді діаграми:



Отже, можна зробити висновок, що учні експериментальних класів, які навчалися за впровадженою методикою, узагальнення і систематизації, показали дещо вищий рівень знань, ніж учні контрольної групи, для яких навчання проводилося традиційними методами. Використання даної методики узагальнення і систематизації знань на уроках математики підвищує ефективність засвоєння знань та підсилює мотивацію вивчення учнями навчального предмету, так як для учнів цікавішим являється предмет, який краще засвоюється і є більш зрозумілим, це дозволяє зекономити час і має високу степінь наочності.

## Контрольна робота

### Варіант 1

1. Чи може паралелограм мати кути  $42^\circ$  і  $51^\circ$ ? Відповідь обґрунтувати.
2. Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 7 см. знайти основи.
3. Довести, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.

### Варіант 2

1. Чи може паралелограм мати кути  $26^\circ$  і  $54^\circ$ ? Відповідь обґрунтувати.
2. Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 2 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр становить 18 см.
3. Довести, що коли діагоналі паралелограма є бісектрисами його кутів, то цей паралелограм ромб.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Артемов А.К. Об эвристических приемах при обучении геометрии. - Математика в школе, 1973, № 6, с.17-18.
2. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков. М.: Просвещение, 1971. — 461с.
3. Балк М. Б., Балк Г. Д. О привитии школьникам навыков эвристического мышления. - Математика в школе, 1985, №2, с. 14-17.
4. Власенко О.І. Методика викладання математики.-К.: Вища школа, 1974. - 207с.
5. Григулич С.М. Прийоми індивідуалізації самостійної роботи учнів на уроці.//Математика в школі. -2000. - № 6, с.34-36.
6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. М.: Просвещение, 1990. - 223с.
7. Зміст та аналіз письмових екзаменів з алгебри початків аналізу за курс середньої школи. Дудницин Ю.П., Смірнова В.К. Львів.: журнал Квантор, 1991. -95с.
8. Эрдниев П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике. - М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1960. - 149с.
9. Эрдниев П.М. Преподавание математики в школе. К.: Высшая школа, 1989.-366с.
10. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. Изд. 2-е — М.: Просвещение, 1970. - 180с.
11. Иржавцева Б.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики. К.: Рад. шк., 1988. — 206с.
12. Каменецкий С.Е., Солодухин Н.А. Модели и аналогии в курсе физики средней школы. М.: Просвещение, 1982. - 96с.
13. Кужель О.В. Контрприкладі в математиці. К.: Рад. школа. 1988 -93с.
14. Козира В.М. Деякі прийоми розв'язування задач на подільність. У світі

математики, К.: вид-во ТВ і МС, 1996, том 2, випуск 4. - 328с.

15. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи: пособие для учащихся УП-УШ классов. - М.; Просвещение 1980 —96с.

16. Кашин Б С. и др.. Методы обучения математики: некоторые вопросы теории и практики. / Каплан Б.С, Рузин Н.К., Столяр А.А.: Минск: Народная асвета, 1981.-230с.

17. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. М.: Просвещение, 1992. -320с.

18. Лоповок Л.М. Факультативные занятия по геометрии для 7-11 классов. К.: Рад. школа, 1990. - 128с.

19. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру. К.: Вища школа, 1992. - 240с.

20. Людмилов Д.С., Людмилова С.Д. Метод обучающих задач в преподавании математики. - Математика в школе, 1973, №5, с.23-25.

21. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: Учеб, пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В. А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. - 416с.

22. Моденов П.С. Екзаменаційні задачі з математики з аналізом їх розв'язування. М : Просвещение,1969, - 351с.

23. Новиков Л.О., Скоробогатько В. Я Методи математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння. Л.: Слово і комерція, 1995. - 217с.

24. Оконь В. Процесе обучения. М.: Учпедгиз, 1962. - 169с.

25. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. К.: Радянська школа, 1980, - 143с.

26. Погорелов О.В. Геометрія 7-11 К : - "Освіта", 1993 - 351с.

27. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975,- 462с.

28. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959. — 206с.

29. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Изд-во

- иностранный литературы. 1957. — 535с. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1976. - 133с.
30. Саранцев Г.И. Сборник упражнений по методике преподавания математики в средней школе. М. Просвещение, 1983. — 78с.
31. Саранцев Г.И. О формировании некоторых умений в курсе геометрии. — Математика в школе. 1981. №4, с. 19-23.
32. Середа В.Ю. Вчись миелита логічно. - К.: Радянська школа, 1989. - 175с.
33. Туманов С.И. Поиски решения задач. М.: Просвещение, 1969 - 280с.
34. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе. -М.: Просвещение., 1983., 160с.
35. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1979. - 160с.
36. Хитрина Н.А. О применении контрпримеров. - Математика в школе, 1982, №4, с.15-16.
37. Цукаръ А.Я. Использование аналогий в преподавании математики. - Математика в школе, 1982, №4, с. 13.
38. Цукаръ А.Я. Построение контрпримеров. - Математика в школе, 1983, №2, с.12-16.
39. Черкасов Р.С, Столяр А. А. Методика преподавания в средней школе. М.: Просвещение, 1985. —335с.
40. Шевченко А.В. Математична індукція. На допомогу студентам та викладачам. К.: "Четверта хвиля". 1996. —47с.
41. Ясиновий Э.А. Задачи, составленные по аналогии с другими задачами. - Математика в школе, 1974, №1, с.17-22.

## Додаток 2

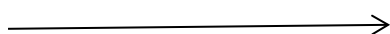
Відображення в тематичному плануванні курсу геометрії її основних  
змістовних ліній

## Геометрія

Таблиця 1

№	Клас	Тема	Змістовні лінії			
			Геометричні фігури і їх властивості	Геометричні величини	Елементи тригонометрії	Координати Вектори
1	2	3	4	5	6	7
	7-й	§1. Основні властивості простих геометричних фігур				
1.		Точка і пряма →				
2.		Основні властивості належності точок і прямих →				
3.		Основні властивості взаємного розташування точок на прямій і на площині →				
4.		Півпряма →				
5.		Основні властивості вимірювання відрізків і кутів →				

6.	Основні властивості відкладання відрізків і кутів	→			
7.	Існування трикутника рівного даному	→			
8.	Основні властивості паралельних прямих	→			
9.	Аксиоми, теореми і доведення	→			
	§2. Кути				
10.	Суміжні кути	→			
11.	Вертикальні кути	→			
12.	Перпендикулярні прямі	→			
13.	Доведення від супротивного	→			
14.	Кути, відкладені в одну Площину	→			
	§3. Ознаки рівності трикутників				
15.	Перша ознака рівності трикутників	→			
16.	Друга ознака рівності трикутників	→			
17.	Рівнобедрений трикутник	→			
18.	Медіана, бісектриса і висота трикутника	→			
19.	Третя ознака рівності трикутника	→			
	§4. Сума кутів трикутника				
20.	Ознаки паралельності				

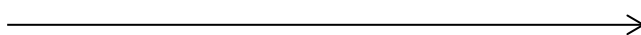




		прямих			
21.		Сума кутів трикутника	→	→	
22.		Прямокутний трикутник	→		
23.		Існування	→	→	
		перпендикуляра до прямої	→		
		§5. Геометричні побудови			
24.		Коло	→		
25.		Що таке задачі на			
		побудову	→		
26.		Побудова трикутника з			
		заданими сторонами	→		
27.		Побудова кута, рівного			
		даному	→		
28.		Побудова бісектриси кута	→		
29.		Поділ відрізка по навпіл	→		
30.		Побудова			
		перпендикулярної прямої	→		
31.		Геометричне місце точок	→		
32.		Метод геометричних			
	8-й	місць	→		
33.		Кути, вписані в коло	→	→	
		§6. Чотирикутники			
34.		Визначення			
		чотирикутника	→		
35.		Паралелограм	→		
36.		Прямокутник. Ромб.	→		
		Квадрат.	→		
37.		Теорема Фалеса	→		
38.		Трапеція	→		
		§7 Теорема Піфагора			

39.	Косинус кута	→			→
40.	Теорема Піфагора	→			→
41.	Відношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику	→			→
42.	Як користуватися таблицями синусів, косинусів, тангенсів				→
43.	Основні тригонометричні тотожності				→
44.	Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів				→
45.	Зміна синуса, косинуса, тангенса при збільшенні кута				→
46.	Нерівність трикутника				→
47.	§8. Декартові координати на площині Введення координат на площині				→
48.	Координати середини відрізка				→
49.	Відстань між точками	→			→
50.	Рівняння кола	→			→
51.	Рівняння прямої	→			→
52.	Розташування прямої відносно системи координат	→			→

53.	Перетин кола і прямої	→				→
54.	Визначення синуса, косинуса, тангенса для будь-якого кута				→	
55.	§9. Перетворення фігур Приклади перетворення фігур	→				
56.	Рух	→				
57.	Властивості руху	→				
58.	Рівність фігур	→				
59.	Перетворення подібності і його властивості	→				
60.	Подібність фігур	→				
61.	§10. Вектори на площині Паралельне перенесення і його властивості	→				
62.	Поняття вектора					→
63.	Абсолютна величина і напрямок вектора					→
64.	Координати вектора					→
65.	Додавання векторів					→
66.	Множення вектора на число					→
67.	Скалярний добуток векторів					→
68.	§11. Розв'язування трикутників Теорема косинусів					→
69.	Теорема синусів					→
70.	Розв'язування					



		трикутників			
		§12. Багатокутники			
71.		Ламана	→		
72.		Випуклі багатокутники	→		
73.		Правильні багатокутники	→		
74.		Подібність правильних випуклих багатокутників	→	→	
75.		Довжина кола	→	→	
76.		Центральний кут і дуга кола	→	→	→
		§13. Площі фігур			
77.		Поняття площі	→	→	
78.		Площа трикутника	→	→	
79.		Площа простих фігур	→	→	
80.	9-й	Площа подібних фігур	→	→	
81.		Площа круга	→		
		§14. Аксиоми стереометрії			
82.		Деякі наслідки аксіом стереометрії	→		
		§15. Паралельність прямих і площин			
83.		Паралельні прямі в просторі	→		
84.		Паралельність прямої і площини	→		
85.		Паралельність площин	→		
86.		Зображення просторових фігур на площині	→		
		§16. Перпендикулярність прямих і площин			

87.	Перпендикулярність прямих	→			
88.	Перпендикулярність прямої і площини				
89.	Перпендикуляр і похила	→			
90.	Перпендикулярність площин	→			
91.	Відстань між мимобіжними прямими	→			
	§17. Декартові координати і вектори в просторі				
92.	Введення декартових координат в просторі				→
93.	Перетворення фігур в просторі	→			
94.	Кут між прямими і площинами	→			
95.	Площа ортогональної проекції багатокутника	→			
96.	Вектори в просторі				→
97.	Рівняння площини				→
	§18. Багатогранники				
98.	Багатогранні кути	→			
99.	Багатогранник	→			
100.	Призма	→			
101.	Побудова плоских перерізів	→			
102.	Паралелепіпед	→			
103.	Піраміда	→			

104	Правильні багатогранники →				
	§19. Тіла обертання				
105	Циліндр →				
106	Конус →				
107	Куля →				
108	Рівняння сфери →				→
109	Поняття тіла і його поверхні в геометрії →				
	§20. Об'єми тіл				
110	Поняття об'єму →				
111	Об'єм прямокутного паралелепіпеда →				
112	Об'єм похилого паралелепіпеда →				
113	Об'єм призми →				
114	Об'єм піраміди →				
115	Об'єми подібних тіл →				
116	Об'єми циліндра і конуса →				
117	Загальна формула для об'ємів тіл обертання →				
118	Об'єм кулі і її частин →				
	§21. Площі поверхні тіл				
119	Поняття площі поверхні →				
120	Площа сфери →				
121	Бічна поверхня циліндра →				

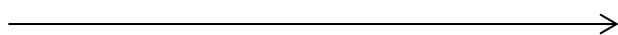
--	--	--	--	--	--	--

Таблиця 2





	відрізків і кутів																		
6.	Основні властивості відкладання відрізків і кутів																		
7.	Існування трикутника, рівного даному																		
8.	Основні властивості паралельних прямих																		
9.	Аксіоми, теореми і доведення §2 Кути																		
10.	Суміжні кути																		
11.	Вертикальні кути																		
12.	Перпендикулярні прямі																		
13.	Доведення від супротивного																		
14.	Кути, відкладені в одній площині																		
	§3 Ознаки рівності трикутників																		
15.	Перша ознака рівності трикутників																		
16.	Друга ознака																		







41.	Відношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику					→						
42.	Як користуватися таблицею синусів, косинусів і тангенсів											
43.	Основні тригонометричні тотожності					→						
44.	Значення синусів, косинусів, тангенсів деяких кутів											
45.	Зміна синуса, косинуса, тангенса при збільшенні кута											
46.	Нерівність трикутника §8 Декартові координати на площині	→				→						
47.	Введення координат на площині					→						
48.	Координати середини відрізка		→									









Продовження табл.2

№ п/п	Зміст тематичного планування курсу	Пряма	Площина	Кут	Багатогранники		Тіла і поверхні обертання			
					Призми	Піраміда	Циліндр	Конус	Куля	Сфера
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
82.	§14. Аксиоми стереометрії Деякі наслідки аксіом стереометрії	→	→							
83.	§15. Паралельність прямих і площин Паралельні прямі в просторі	→								
84.	Паралельність прямої і площини	→	→							
85.	Паралельність площин	→	→							
86.	Зображення просторових фігур на площині §16. Перпендикулярність прямих і	→	→							

	площин									
87.	Перпендикуляр ність прямих	→								
88.	Перпендикуляр ність прямої і площини	→	→							
89.	Перпендикуляр і похила	→								
90.	Перпендикуляр ність площин		→							
91.	Відстань між мимобіжними прямими		→							
	§17. Декартові координати і вектори в просторі									
92.	Введення декартових координат в просторі									
93.	Перетворення фігур в просторі									
94.	Кут між прямими і площинами	→		→						
95.	Площа ортогональної проекції		→							



112	прямокутного паралелепіеда Об'єм похилого	→								
113	паралелепіеда Об'єм призми	→								
114	Об'єм піраміди	→								
115	Об'єми подібних тіл									
116	Об'єми циліндра і	→								
117	конуса Загальна формула для									→
118	об'ємів тіл обертання Об'єм кулі і її частин									→
119	§21. Площі поверхні тіл Поняття площі поверхні									
120	Площа сфери									→
121	Бічна поверхня циліндра	→								→

Додаток 3. Плани конспекти уроків узагальнення і систематизації знань

**Тема.** Раціональні числа. Розв'язування вправ.

**Мета.**

Узагальнити та систематизувати знання учнів з теми «Раціональні числа та дії з ними».

Розвивати навчальні інтереси, здібності на основі розумових дій; формувати навички аналізу, систематизації, узагальнення.

Виховувати активну позицію в навчанні і житті; сприяти розвитку математичної культури учнів.

**Тип уроку:** Урок узагальнення і систематизації знань, умінь та навичок.

**Обладнання:** Роздатковий матеріал.

**Хід уроку**

**I. Організаційний етап.**

(учитель перевіряє готовність учнів до уроку, налаштовує їх на роботу)

Ми сьогодні продовжуємо працювати над темою «Раціональні числа та дії з ними».

Нехай девізом нашого уроку будуть такі слова: «... Покажи мені - і я запам'ятаю, дай мені діяти самому - і я навчусь...»

То ж дійте, думайте, питайте, пропонуйте – бо тільки таким шляхом ми зможемо пізнати істину.

**II. Мотивація навчальної діяльності.**

Давайте згадаємо умови успішної роботи кожного учня на уроці.

- Бути уважним, самостійним, здогадливим.
- Не залишати питання без відповіді.

- На виконання кожного завдання затратити мінімум часу і максимум зусилля.

- Не підглядати, не підслуховувати.

У кожного з вас на парті таблиця оцінювання, яку ви заповнюєте протягом уроку.

<b>ВИД РОБОТИ</b>	<b>ОЦІНЮВАННЯ</b>	<b>НАБРАНІ БАЛИ</b>
Домашнє завдання	1-8 балів	
«Займи позицію»	0-5 балів	
Тестові запитання	1 – 10 балів	
«Доміно»	1 бал	
«Дерево розв'язків»	6-балів	
Завдання на карточках	1 – 3 бали	
Перехід до 12 балів:	34,33-12; 31,32-11; 29,30-10; 28,27-9; 5-8; 24,23-7; 21,22-6; 20,19-5; 18,17-4.	Всього:

### **III. Перевірка домашнього завдання. Взаємоперевірка.**

– Прочитайте до виконаної вправи домашнього завдання.

#### Гра «Іспит»

– Давайте проведемо свого роду іспит, перед вами лежать білети. Ваше завдання вибрати білет і дати відповідь на запитання.

1. Які числа називаються цілими?
2. Чому дорівнює модуль нуля?
3. Як розкрити дужки перед якими стоїть знак «+»?
4. Як розкрити дужки перед якими стоїть знак «-»?
5. Чому дорівнює модуль від'ємного числа?
6. Які числа менші за нуль?
7. Як додати два числа з різними знаками?

8. Що таке модуль числа?
9. Які числа називаються протилежними? Наведіть приклади.
10. Які числа більші за нуль?
11. Яке число більше, додатне чи від'ємне?
12. Чи може значення модуля дорівнювати від'ємному числу?
13. Сформулюйте правило віднімання раціональних чисел.
14. Які числа називаються раціональними?
15. Чому дорівнює сума двох протилежних чисел?
16. Чому дорівнює модуль додатного числа?
17. Що таке координатна пряма?
18. Як додати два від'ємних числа?
19. Які числа називаються від'ємними?

Поставте свої отримані бали в таблицьку.

#### **IV. Формулювання мети і завдань уроку.**

На сьогоднішньому уроці ми з вами завершуємо працювати над темою «Раціональні числа та дії з ними».

Перед нами стоять такі завдання:

Знати: що таке модуль числа, раціональні числа, правила додавання і віднімання раціональних чисел;

Вміти: виконувати додавання і віднімання раціональних чисел; застосовувати ці правила при розв'язуванні прикладів, задач і рівнянь.

Давайте сформулюємо з вами очікувані результати, що б ми хотіли отримати в результаті цього уроку.

Очікувані результати: формулювати правила додавання і віднімання раціональних чисел; застосовувати правила додавання і віднімання раціональних чисел до практичних завдань.

Відкрийте робочі зошити, запишіть сьогоднішню дату.

#### **V. Узагальнення і систематизація знань.**

*Актуалізація опорних знань.*

Інтерактивна технологія «Займи позицію».

Якщо ви вірите в правильність даного твердження, то пишете 1, якщо не вірите – 0. У кінці роботи у вас з'явиться число, його ми будемо перевіряти.

Чи вірите ви, що ...

1. Натуральні числа, протилежні їм і число 0, називаються цілими числами. (1)
2. Модулем додатного числа, є число від'ємне. (0)
3. Сума двох протилежних чисел дорівнює 2. (0)
4. Результатом частки двох чисел з різними знаками, є число від'ємне. (1)
5. Добутком двох протилежних чисел, є число 9. (0)

Відповідь. **10010**.

Поставили бали в таблицю згідно критеріям: правильна відповідь – 1 бал.

Підніміть руки, хто отримав 5 балів. Молодці!

Робота над тестовими запитаннями.

На дошці записано два числа, наприклад  $16i - 2$ .

Ви повинні швидко відповісти на мої питання в короткій формі. Кожна правильна відповідь оцінюється 1 балом.

1. Модулі цих чисел. ( $16; 2$ )
2. Яке число більше? (16)
3. Їх добуток. ( $-32$ )
4. Їх сума. (14)
5. Їх різниця. (18)
6. Їх частка. ( $-8$ )
7. Запиши нерівність, при якій всі числа більші за обидва. ( $x > 16$ )
8. Запиши нерівність, при якій всі числа менші за обидва. ( $x < -2$ )
9. Запиши добуток першого і протилежного другому. ( $16 * 2 = 32$ )
10. Запиши часту другого і протилежного першому. ( $-2 : (-16) = 0,125$ )

Поміняйтеся зошитами, зробимо взаємоперевірку. ( вчитель повторює питання, хтось з учнів каже відповідь)

Поставте отримані бали в табличку.



## Усні обчислення

### Гра «Доміно»

Перед тобою на парті розташовані картки доміно, на одних половинках яких написані арифметичні вирази, а на інших - різні числа. Одна в мене. Один учень зачитує арифметичний вираз, іншим, звичайно ж, потрібно правильно вирішити цей приклад, знайти в себе таку відповідь (усно і тихо, не підказуючи іншим), підняти руку, повідомити її і зачитати свій арифметичний вираз. Гра продовжується, поки відповідь не дасть той учень, що починав.

0	7	-6	-1	-2	8
$-1+8$	$-3+(-3)$	$-3:3$	$-5+3$	$-2\cdot(-4)$	$-4-3$

-7	-11	-4	4	13	-60
$5-16$	$4-8$	$-4+8$	$10-(-3)$	$15-75$	$-5+5$

### Завдання на карточках. Гра «Поле Чудес»

Нам потрібно з вами розшифрувати слово. Це ім'я відомого математика, який вніс значний вклад у розвиток математики.

(Верхня частина таблиці закрита, учні розв'язують завдання на карточках, знаходять відповідь і відкривають відповідну букву.)

Р	е	н	е	Д	е	К	а	р	Т
2	-16,9	5	-8	20	1	3	-4	-10	-9,5

- $-6 + 8$ ;
- $-8,45 \cdot 2$ ;
- $-40 : (-8)$ ;
- $-5 + (-3)$ ;
- $-4,6 + 20,6$ ;
- $-6 : (-6)$ ;
- $-15,3 : (-5,1)$ ;
- $-0,8 \cdot 5$ ;
- $16,5 : (-1,65)$ ;
- $-14,3 - (-4,8)$ .

Отже, ми отримали ім'я Рене Декарт. А хто ж це такий, і що він зробив для математики, нам розповість Іванна. (учениця читає розповідь, яку підготувала вдома)

**Виконання письмових вправ. Робота з підручником.**

<b>I.</b>	<b>Дії</b>
1	Додавання
2	Віднімання
3	Множення
4	Ділення
<b>II.</b>	<b>Числа</b>
5	- 200
6	5
7	- 4
8	- 8
9	400
10	6
<b>III.</b>	<b>Числа-результати</b>
11	
12	

«Дерево розв'язків»

(один з учнів виконує вправи на дошці, інші в зошитах)

Тепер попрацюємо з підручником, виконаємо такі вправи.

№ 1422

№ 1429

№ 1440

**VI. Підсумок уроку. Оцінювання учнів.**

Гра «Скільки живе черепаха?»

Програма дій.

13	
14	

1. Потрібно послідовно виконати чотири команди. Кожна команда зашифрована у вигляді чотирьох чисел. Перше число ( від 1 до 4) позначає математичну дію (див. I частину таблиці); друге і третє (від 5 до 10) – позначають числа, з якими треба зробити відповідну математичну дію (див. II частину таблиці); четверте число (від 11 до 14) позначає номер, навпроти якого у порожню клітинку слід записати результат дії (див. III частину таблиці). Число, яке буде записаним останнім, і є відповіддю на питання.

2. Послідовність команд (шифровка):

- 1) 3 – 5 – 7 – 12
- 2) 2 – 9 – 12 – 13
- 3) 1 – 8 – 10 – 11
- 4) 4 – 13 – 11 – 14

3. Пояснення для учнів.

Щоб виконати, наприклад, команду 3 – 6 – 8 – 12, треба виконати дію 3, тобто помножити числа, надані за номерами 6 і 8 у II частині таблиці, тобто слід помножити 5 і -8, а результат -40 записати в клітинку навпроти номера 12 у III частині таблиці, тобто сюди (показую). Виконавши таким чином надану послідовність команд, навпроти клітинки 14 ви отримаєте число, яке буде відповіддю на питання «Скільки років живе черепаха?»

Виконуйте самостійно.

Тепер, перевірте чи всі заповнили табличку яку я роздавав на початку уроку, чи ніхто не забув вписати отримані протягом уроку бали. Підрахуйте їх. За даними таблиці, переведіть їх в оцінку. Таку оцінку ви отримуєте за роботу на сьогоднішньому уроці. Хто задоволений нею, я виставлю в класний журнал і щоденник. Хто ні, має можливість допрацювати матеріал і, на наступному уроці, отримати кращу!

**VII. Домашнє завдання.**

Підготуватись до контрольної роботи. Повторити весь теоретичний матеріал.

