Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методичне забезпечення студентів при дистанційному навчанні з теми «Многогранники в шкільному курсі»

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М-М -21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Берковська Ольга Володимирівна

Керівник: канд. пед. наук, доц., проф. кафедри
математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц.
Сяський Василь Олексійович

канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри ВМ
Марач Віктор Сільвестрович

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

Вступ

Основною метою сучасної системи освіти є формування розвиненої особистості, спеціаліста спроможного створити конкуренцію в умовах сучасного ринку праці, що здатний мислити, аналізувати, порівнювати, практично вирішувати поставлені перед ним життєві та професійні проблеми.

Курс геометрії старшої школи пропонується будувати так, щоб елементи стереометрії тісно переплітались з відповідним планіметричним матеріалом.

Використання многогранників з самого початку вивчення стереометрії служить різним дидактичним цілям. На многограннику зручно демонструвати взаємне розташування прямих і площин у просторі, показувати застосування ознак паралельності та перпендикулярності прямих і площин у просторі. Ілюстрація перших теорем стереометрії на конкретних моделях підвищує інтерес учнів до предмету.

Розуміння того, що практично потрібно в геометрії і що в даному предметі може служити для розвитку особистості, має визначати і зміст предмета, і постановку його викладання.

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях.

Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач.

Враховуючи сучасну епідеміологічну ситуацію, яка склалася у всьому світі і державі, дистанційна форма навчання стала найбільш безпечною та ефективною формою навчання.

Науково-методичне забезпечення дистанційного навчання включає: методичні (теоретичні та практичні) рекомендації щодо розроблення та використання педагогічно-психологічних та інформаційно-комунікаційних технологій дистанційного навчання; критерії, засоби і системи контролю якості дистанційного навчання; змістовне, дидактичне та методичне наповнення веб-ресурсів (дистанційних курсів) навчального плану підготовки [9].

Актуальність теми дослідження полягає у тому, що вивчення многогранників використовується не тільки в навчанні, але й в повсякденному житті. Многогранники можна спостерігати у будівельній справі, архітектурі, машинобудуванні і у багатьох інших галузях науки й техніки.

Мета роботи: розробити методику вивчення теми «Многогранники» та дидактичне забезпечення з теми при дистанційному навчання, що забезпечить підвищення якості освіти і сприятиме індивідуалізації пізнавальної діяльності студентів.

Об'єкт дослідження є процес вивчення многогранників в шкільному курсі.

Предмет дослідження: особливості вивчення теми при дистанційному навчанні.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі **завдання роботи:**

1) вивчити і проаналізувати літературні джерела;

2) визначити теоретичні засади організації дистанційного навчання;

3) розглянути основні задачі, які розв’язуються при вивченні даної теми в класах академічного рівня та з’ясувати, які помилки можуть допускати учні;

4) описати методику вивчення теми «Многогранники» в шкільному курсі;

5) розробити навчально-методичне забезпечення студентів при дистанційному навчанні з даної теми;

6) з?ясувати доцільність використання методичного забезпечення при вивчені даної теми.

Для дослідження даної теми та розв?язання всіх завдань застосовувались такі методи дослідження:

- теоретичні: вивчення та аналіз навчальної літератури, синтез отриманих результатів (розробка теоретичного і практичного матеріалу);
- емпіричні: вивчення та узагальнення методичного досвіду вчителів з даної проблеми, аналіз продуктів діяльності.

Теоретичне значення даної роботи полягає в тому, що її результати можуть сприяти оптимізації навчального процесу.

Розділ 1. Науково-теоретичні основи теми дослідження

1.1. Еволюція розвитку знань про многогранники

Найперші відомості про многогранники стали відомими ще за три тисячі років до нашої ери у Єгипті та Вавилоні. Теорія многогранників також є й сучасним розділом математики. Вона тісно використовується в топології, теорії графів, має значне застосування в теоретичних та практичних дослідженнях з геометрії.

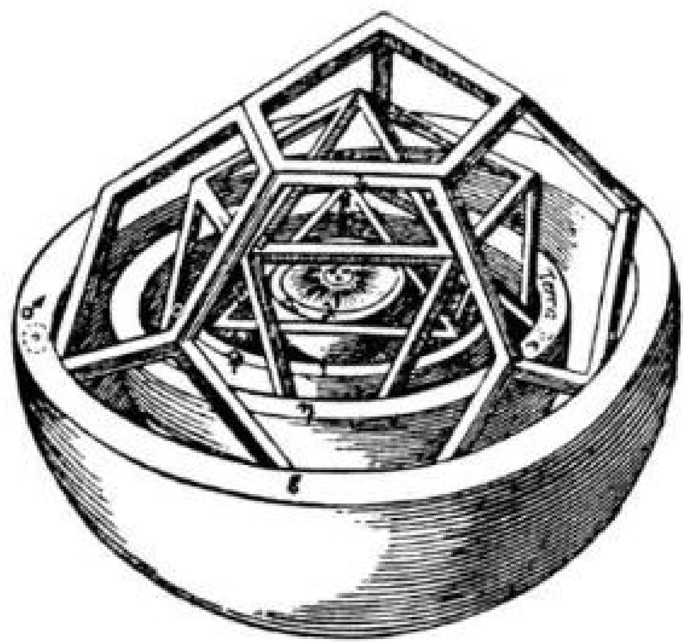
Сучасний світ наповнений симетрією, яка асоціюється у нас з прекрасним. Саме через це виникає цікавість до правильних многогранників, котрі привернули до себе увагу безліч мислителів, від Платона і Евкліда до Ейлера і Коші.

Більша частина знань про правильні многогранники була здобута древніми греками. Деякі джерела приписують їх відкриття Піфагору. Інші стверджують, що йому були знайомі тільки тетраедр, куб і додекаедр, а честь відкриття октаедра і ікосаедра належить Теетет Афінському, сучасник Платона. У будь-якому випадку, Теетет дав математичний опис п’яти правильних многогранників і вперше доказав, що їх рівно п’ять.

Правильні многогранники описуються у філософії Платона, на честь якого отримали назву «Платонові тіла». Платон писав про них у своєму трактаті «Тімей» (360 р. до н. е.), де зіставив кожну з чотирьох стихій (землю, повітря, воду і вогонь) певному правильному многограннику. Земля зіставлялася кубу, повітря – октаедру, вода – ікосаедру, а вогонь – тетраедру. З приводу п’ятого елемента, додекаедра, Платон зробив невиразне зауваження: «... його бог визначив для Всесвіту і вдався до нього в якості зразка».

Наступний етап розвитку многогранників пов’язаний з Евклідом, який дав повний математичний опис правильних многогранників в останній, 13 книзі «Почав» (300 р. до н. е.). В цій книзі описується тетраедр, октаедр, куб, ікосаедр і додекаедр в зазначеному порядку. Для кожного многогранника Евклід знайшов відношення діаметра описаної сфери до довжини ребра. В книзі стверджується, що не існує інших правильних многогранників.

У XVI столітті німецький астроном Йоганн Кеплер намагався знайти зв’язок між п’ятьма відомими на той момент планетами Сонячної системи і правильними многогранниками. У «Таємниці світу», опублікованій в 1596 році, Кеплер виклав свою модель Сонячної системи. В ній п’ять правильних многогранників вміщувалися один в інший і поділялися серією вписаних і описаних сфер. Кожна зі сфер відповідала одній з планет (Меркурія, Венери, Землі, Марса, Юпітера і Сатурну). Многогранники були розташовані в наступному порядку: октаедр, за ним ікосаедр, додекаедр, тетраедр і, нарешті, куб. Таким чином, структура Сонячної системи і відносини відстаней між планетами визначалися правильними многогранниками. Пізніше від оригінальної ідеї Кеплера довелося відмовитися, але результатом його пошуків стало відкриття двох законів орбітальної динаміки – законів Кеплера, які змінили курс фізики та астрономії, а також правильних зірчастих многогранників [3].



Також важливим досягненням Кеплера в геометрії многогранників є відкриття двох правильних зоряних тіл. Всього їх існує чотири, два інших відкрив французький математик Луї Пуансон в 1809 р. Але саме Кеплер першим опублікував повний список тринадцяти архімедових тіл і дав їм назви, під якими вони відомі сьогодні.

Серйозний етап у вивченні многогранників був зроблений в XVIII столітті Леонардом Ейлером (1707-1783), який встановив співвідношення між числом вершин, ребер і граней опуклого многогранника. Теорема Ейлера була опублікована у 1758 р. в «Записках Петербурзької академії наук». Дана теорема доводить, що сума граней і вершин будь-якого многогранника дорівнює числу ребер, збільшеному на 2. Тобто, Грані+Вершини=Ребра+2 або Г+В-Р=2 [3].

Многогранники використовуються не лише в науці, їх форми досить популярні в архітектурі та мистецтві. Також, досить часто, ці геометричні фігури можна зустріти в природі у вигляді кристалів, піщинок або вірусів.

В часи епохи Відродження, великий інтерес митців був прикутий до правильних многогранників. Леонардо да Вінчі захоплювався теорією многогранників, тому на його полотнах часто зустрічаються дані фігури.

Перші архітектурні споруди будувалися за мотивами многогранників. Найпопулярнішою була пірамідальна форма. Побудувати споруду такого типу було не просто, блок для будівництва мав бути ідеально виміряним та вирівняним з самого початку, в іншому випадку вони не зійдуться на вершині піраміди.

Найграндіознішою спорудою на Землі є Піраміда Хеопса, висота якої 147 м. До кінця XIX ст. піраміда Хеопса була найвищою спорудою на Землі [45]

Отже, многогранниками цікавилися в різні часи історії світу, ними захоплювалися та використовували в науці, мистецтві та архітектурі. Ці геометричні фігури стали основами дя багатьох історичних споруд, які існують до теперішніх часів.

1.2. Стереометричний матеріал в шкільному курсі геометрії

Навчальна програма з математики демонструє основну мету вивчення многогранників. Вміння обчислювати практично важливі геометричні величини та розвиток просторової уяви учнів є базою вивчення теми «Многогранники». Багато фактів, котрі стосуються многогранників, потребують розвитку логіки та уяви в учнів, що й створює труднощі.

Сучасна шкільна програма для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів включає в себе вивчення многоранників у 11 класі.

Тема «Многогранники» містить такі розділи: Двогранні кути; Лінійний кут двогранного кута; Многогранні кути; Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники; Призма. Пряма і правильна призми; Паралелепіпед; Піраміда. Правильна піраміда; Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди; Правильні многогранники; Об'єми призми, паралелепіпеда, піраміди. Це обов'язковий мінімум, яким повинні оволодіти учні, вивчаючи тему «Многогранники».

Даному курсу стереометрії властивий систематизуючий та узагальнюючий характер викладу, котрий спрямований на закріплення та розвиток умінь і навичок, отриманих в середній школі. Доводячи теореми і виконяючи завдання учні використовують вивчені раніше властивості геометричних фігур, застосовуються геометричні перетворення, вектори і координати. Уміння зображати основні геометричні тіла, обчислювати їх площі поверхонь та об’ємів несуть в собі практичну значимість.

Вимоги до знань і вмінь учнів:

– учні повинні розпізнавати основні види многогранників та їх елементи;

– учні повинні формулювати означення двогранного кута, лінійного кута двогранного кута, многогранного кута, многогранників, вказаних у змісті програми;

– обгрунтовувати властивості многогранників, знати формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди;

– обчислювати основні елементи многогранників;

– використовувати вивчені формули та властивості для розв’язування задач [4].

Вивчення математики поділяється на три рівні: рівень стандарту, академічний і профільний, кожен з яких має свою навчальну програму.

Програма передбачає резерв навчальних годин, це час для повторення, узагальнення та систематизації вивченого матеріалу. Спосіб їх використання кожен обирає самостійно.

Змістове наповнення навчального матеріалу посилює міжпредметні зв’язки під час його вивчення. В основному це застосування методів аналізу і алгебри при вивченні геометрії, та навпаки. Приділяється увага для представлення учням математичних понять і методів, що використовуються в інших природничих науках та технологіях.

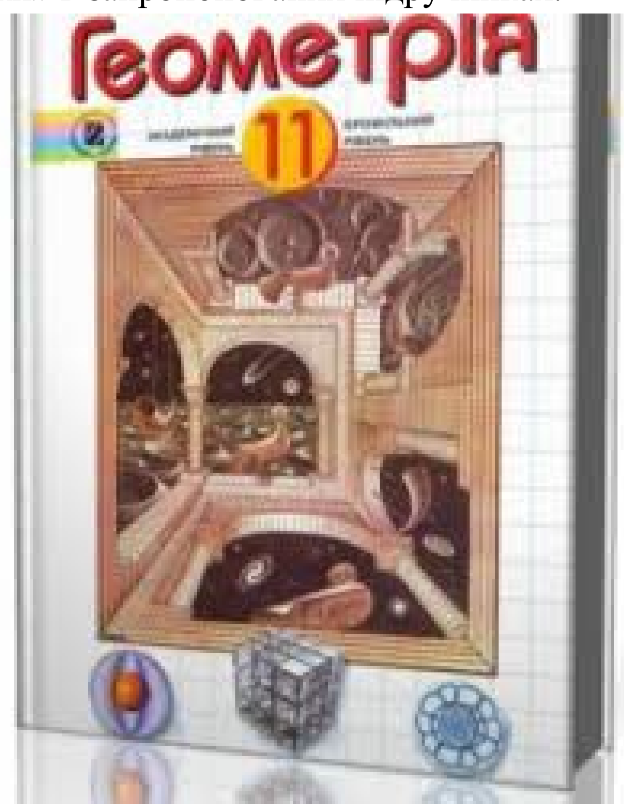
Методика вивчення геометрії підбирається, орієнтуючись на розумові особливості учнів і зміст навчального матеріалу.

Вимоги програми при підготовці учнів орієнтують вчителя на виконання мети навчання з кожної теми програми, дають змогу визначити технології проведення занять, поточного і тематичного оцінювання.

Урок є основною формою подачі знань, на якому учні отримують інформацію, аналізують її та застосовують практично при розв`язанні задач.

Сучасний вчитель математики на своїх уроках застосовує наочність, навчаючі програми (GRAN-3D, Maple, MathCad, GeoGebra) та електронні бібліотеки, все це сприяє більш ефективному засвоєнню матеріалу учнями.

У вимогах програми пропонується декілька варіантів підручників з геометрії, які створені з урахуванням вимог Державного стандарту. Проаналізуємо вивчення теми «Многогранники» в запропонованих підручниках.



Геометрія. 11 клас. Академічний рівень, профільний автор Апостолова Г. В. 2011 рік [2].

Ціль даного підручника – вивчення геометрії в 11 класах *академічного та* профільного рівня навчання. Даний підручник містить більш ширший теоретичний матеріал про многогранники, увага приділяється історичним питанням. Зміст матеріалу суворіший, порівняно з підручниками рівня стандарту.

Завдання розташовані послідовно, за рівнями складності та мають приклади розв?язків.

Для поглибленого рівня навчання підручник містить завдання з однією або ж двома зірочками. Додаткові завдання та питання історичного змісту теми, що вивчаються знаходяться в кінці кожного розділу.

Відмінність матеріалу, що вивчається є раннє введення просторових фігур, у тому числі многогранників. Мета – систематизувати та узагальнити знання про просторові тіла, дещо їх розширити, використовувати набуті знання при розв’язуванні задач.

Назва розділу: «Тіла. Многогранники. Тіла обертання», свідчить, що інформація є складною та змістовною. В ньому дається визначення многогранника як просторової фігури, поверхня якої складається з скінченного числа многокутників – грані многогранника. Многогранні кути подаються окремим розділом що вивчається перед розділом, про многогранники. Наступний розділ «Тіла обертання». В одному параграфі представлені означення циліндра, призми, піраміди і конуса, що пов`язані між собою.

Зразок тематичного планування в даному підручнику.

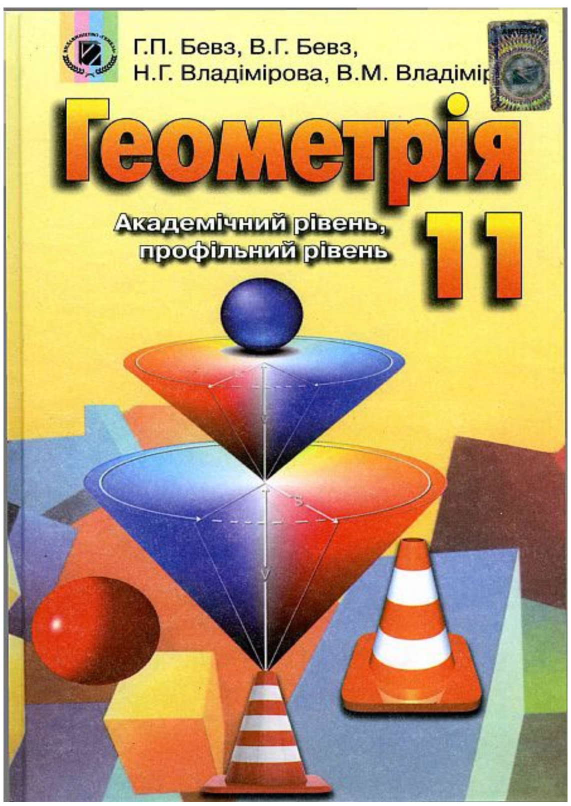
Параграф за підручником	Зміст	Кількість годин
§11	Двогранні кути	2
§12	Тригранні кути. Багатогранні кути	2
§13	Тіла.	3
§14	Многогранники. Правильні многогранники.	5
§15	Властивості призми.	4
§16	Властивості піраміди.	4
§17	Геометрія тетраедра.	3
§23	Об’єм прямої призми.	2
§24	Об’єми піраміди та конуса.	3

Опуклі многогранники посідають особливе значення при вивченні просторових фігур. Дане поняття в підручнику вводиться таким чином: многогранник називається опуклим, якщо він є опуклою фігурою, тобто будь-які дві внутрішні точки можна сполучити відрізком, який лежатиме в ньому [3, 103].

Теорема Ейлера та її застосування розглядається саме в цій темі. Автор виділяє п`ять видів правильних многогранників, чотири види зірчастих многогранників та деякі види напівправильних многогранників.

Працюючи з даним підручником, вчитель має змогу врахувати особливості учнів, застосовувати власні методики для вивчення многогранників.

Бевз Г.П. Геометрія: 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 336 с. [6].



Тема «Многогранники» вивчається у другому розділі. Відмінність підручника полягає у вдалому розділенні вивчення многогранників та тіл обертання. Завдяки цьому учнями легше сприймається подана інформація. Також містяться параграфи, що вивчаються лише у профільних класах.

В підручнику присутній теоретичний матеріал, завдання різних рівнів, задачі різної складності та повторення вивченого.

Для тих, хто хоче знати більше, вміщено додаток «Елементи геометрії тетраедра», список тем для самостійних наукових досліджень і перелік додаткової літератури.

Параграф за підручником	Зміст	Кількість годин
§15	Двогранні кути.	2

§16	Тригранні кути.	2
§17	Многогранні кути.	2
§18-§19	Геометричні тіла і многогранники.	3
§20	Призма.	4
§21	Паралелепіпед .	3
§22	Піраміда і зрізана піраміда.	4
§23	Правильні многогранники.	4
§31	Об’єм прямої призми і циліндра	2
§32	Об’єм піраміди і зрізаної піраміди	2

Мета підручника полягає в практичному застосуванні здобутих знань. Матеріал адаптований для вивчення геометрії учнями, в ньому відсутній зайвий текст.

Всі підручники, які використовуються вчителями при вивченні даної теми, розглядають один і той самий основний матеріал, різниця полягає у викладі інформації та додаткових темах. Авторські колективи, що створюють підручники, вносять в кожен свою особливість, що полегшує вивчення многогранників.

Розділ 2. Методика вивчення теми «Многогранники» в умовах сучасної школи

2.1. Вивчення понять про многогранники в основній школі

При плануванні теми «Многогранники» слід попередньо розбити її на логічно закінчені частини. Це допоможе вчителю правильно організувати повторення, проводити систематично облік і контроль знань учнів, вчасно і поступово готувати засоби наочності, згрупувати вміння та навички у відповідності до вказівок програми, завчасно підібрати відповідні завдання, підготувати тематику і зміст самостійних, контрольних робіт, а також інші дидактичні матеріали.

Тема «Многогранники» вивчається в 11 класі. На уроки геометрії в 11 класі відводиться по 4 години на тиждень за профільним рівнем, всього 140 годин і 4 години резервного часу. З них на многогранники відводиться 28 годин.

Підготовчою роботою до початку вивчення теми «Многогранники» є повторення теми «Многокутники» та початкових відомостей зі стереометрії з курсу геометрії 9-го класу, властивостей і формул площ многокутників, задач на побудову перерізів з курсу 10 класу.

Початковим етапом вивчення теми, майже у всіх підручниках геометрії профільного рівня, є вивчення найпростіших просторових фігур, а саме многогранних кутів. Учні повинні розуміти, що пряма на площині розбиває її на дві півплощини. Дві півплощини зі спільною прямою, що їх обмежує, можуть і не лежати в одній площині, а утворювати двогранний кут [6].

Двогранний кут – це фігура, утворена двома півплощинами, які мають спільну пряму, що їх обмежує. Півплощини називаються гранями кута, а спільна пряма – ребром кута. Мірою двогранного кута є міра відповідного йому лінійного кута.

Лінійний кут двогранного кута – це кут, утворений двома півпрямими, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає даний двогранний кут. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута. При вивченні геометрії на профільному рівні до вивчення вище зазначеного матеріалу додають теорему про три синуси для двогранного кута. Теорема формулюється так: якщо в одній грані двогранного кута міри φ провести пряму a, яка утворює кут σ з ребром цього кута, то кут γ між прямою a і другою гранню двогранного кута визначається співвідношенням: $\sin\gamma = \sin\varphi \sin\delta$ (рис. 2.1). Доведення теореми є в підручниках [3]. Також розглядається бісектор двогранного кута. Бісектором двогранного кута називають півплощину, що поділяє його на два рівні двогранні кути.

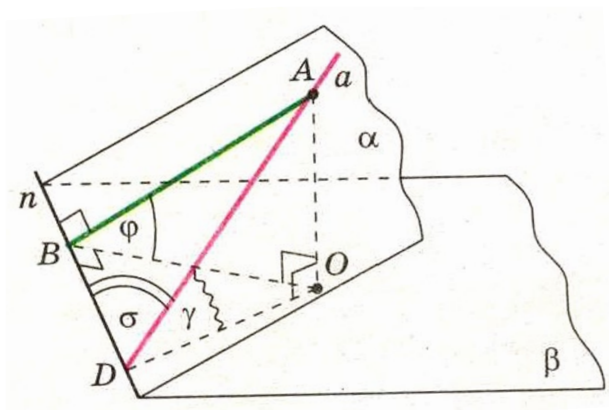


Рис. 2.1

Відповідно тригранний кут – це фігура, що складається з трьох плоских кутів. Гранями тригранного кута є плоскі кути, ребрами є сторони плоских кутів, вершиною тригранного кута є спільна вершина плоских кутів. Двогранні кути, що утворені гранями тригранного кута, називаються двогранними кутами тригранного кута. Кожен плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів [6].

Розглядаються основні теореми для тригранних кутів в класах профільного рівня [3]:

•теорема косинусів для тригранного кута: якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ – лінійний кут двогранного кута, протилежного до γ, то $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$;

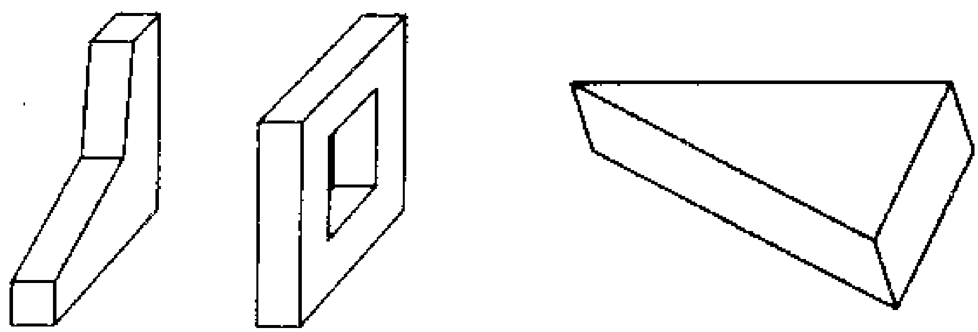
•теорема про три косинуси: якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його кутів;

•теорема синусів для тригранного кута: якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma$ – лінійні кути протилежних їм двогранних кутів, то $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi_\alpha} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi_\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\varphi_\gamma}$.

Отже, після вивчення вище поданого матеріалу, вчитель з легкістю підводить учнів до визначення многогранника. Означення многогранника може бути дано різними способами, в різній літературі і в різних підручниках зустрічаються різні підходи до його визначення. Можна визначити многогранник як тіло і як поверхню. Такі визначення многогранника дані на основі різної аксіоматики. У шкільних підручниках частіше дається якесь одне визначення, але корисно учням давати й інші способи визначення многогранника.

Наприклад, у Бевза Г. П.: «Многогранником називається тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників» [6, 129]. Таке саме визначення дається і в підручнику Апостолової Г. В.: «Многогранники – тіла, межа яких складається з многокутників» [3, 104]. Менш вживаним визначенням многогранника є: «Многогранник – це поверхня, складена з многокутників і обмежує деяке геометричне тіло» [26, 112]. Відповідно многокутники, які обмежують многогранник, називаються гранями. Сторони граней – ребра, а їхні кінці – вершини многогранника. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, – діагональ многогранника.

Після введення поняття многогранника в школі, як правило, розглядають опуклі многогранники. Вдалим вважається підхід, коли відразу дається визначення опуклого многогранника і для нього визначаються елементи. Вивчення властивостей як опуклих многокутників, так і опуклих многогранників займає дуже важливе місце в шкільному курсі геометрії. Однак точний зміст поняття «опуклий» в середній школі не розкривається і причини, що змушують вимагати опуклість розглянутих многокутників і многогранників, ніде не пояснюються. Учні часто взагалі не сприймають поняття «опуклий» і лише за звичкою, механічно у відповідь на пропозицію зобразити будь-яку опуклу фігуру, зображують фігуру (рис. 2.2 а) , а іноді навіть фігуру, зображену на рис. 2.2 б, а не фігуру, зображену на рис. 2.2 в. При цьому недолік загальної математичної культури змушує їх вважати, що всі чотирикутники є опуклими.



а) б) в)

Рис. 2.2

Як і інші геометричні фігури, многогранники бувають опуклі та неопуклі.

Поняття опуклого многогранника найчастіше вводять по аналогії з опуклим многокутником. Тобто многогранник називається опуклим, якщо він лежить по один бік від кожної з обмежуючих його площин. Такий підхід прийнятий в підручниках. Або многогранник називається опуклим, якщо будь-які дві його точки можуть бути з’єднані відрізком. Кожний тетраедр, куб, паралелепіпед – многогранники опуклі. Якщо многогранник неопуклий, площини деяких його граней розтинають його на частини. Кожна грань опуклого многогранника – опуклий многокутник.

Дуже цікавим, для дітей, є момент, коли учитель показує на прикладі, як самостійно побудувати многогранник за допомогою розгортки. Справді, якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розкласти на площині, дістанемо розгортку даного многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. На рис. 2.3 подані деякі розгортки куба.

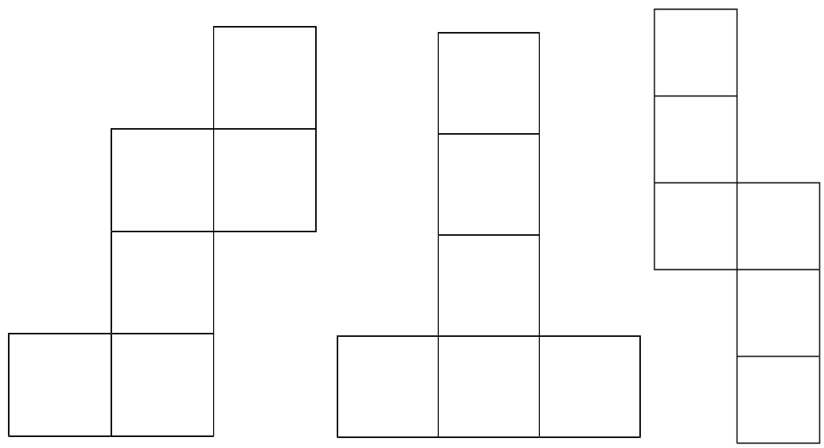


Рис. 2.3

Таким чином, площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.

Так, всі фігури і тіла, що розглядаються в елементарній геометрії, або є опуклими, або представляють собою нескладні комбінації опуклих тіл.

Наступну інформацію, яку мають отримати учні після даної, це основні види призм. Спираючись на попередньо викладений матеріал, учитель пояснює визначення призми. А саме, призмою називається многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми. Необхідно показати, як побудувати такий многогранник.

Нехай α і α_1 – дві паралельні площини, l – пряма, що їх перетинає, і $ABC \dots K$ – n-кутник у площині α (рис. 2.4). Проведемо через кожну точку X

цього *n*-кутника пряму, паралельну прямій l , і позначимо через X_1 точку перетину її з площиною α_1. Усі побудовані так відрізки XX_1 заповнюють деякий многогранник. Цей – многогранник $A_1B_1C_1 \dots K_1$ – рівний *n*-кутник з відповідно паралельними сторонами, а решта *n* граней: ABB_1C_1, BCC_1B_1, … – паралелограми.

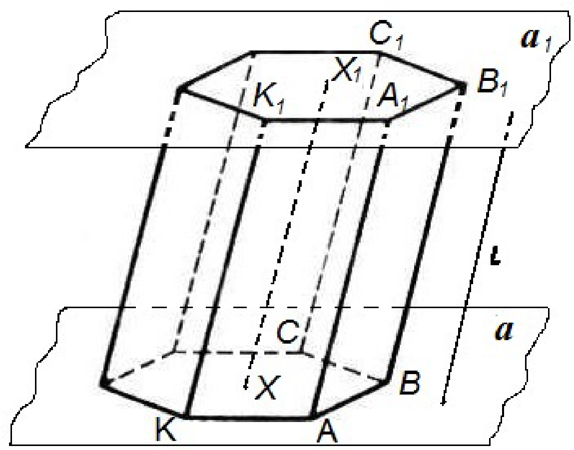


Рис. 2.4

Рівні *n*-кутники $ABC \dots K$ і $A_1B_1C_1 \dots K_1$ побудованої призми називають її основами, паралелограми AA_1B_1B, BB_1C_1C , …, KK_1A_1A – бічними гранями, відрізки AA_1, BB_1, CC_1, …, KK_1 – бічними ребрами призми. Поверхня такої *n*-кутної призми складається з двох різних *n*-кутників і *n* паралелограмів, бічна поверхня – з *n* паралелограмів.

Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основи. Інші призми – похилі. Кожна бічна грань прямої призми – прямокутник.

Висота призми – відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра. Цей момент дуже важливий, адже багато учнів не знають, що висота прямої призми дорівнює довжині бічного ребра і не можуть розв’язати елементарні задачі.

Призма називається правильною, якщо вона пряма, а її основи – правильні многокутники. Усі бічні грані правильної призми – рівні прямокутники. На рис. 2.5 зображені правильні трикутна, прямокутна і шестикутна призми.

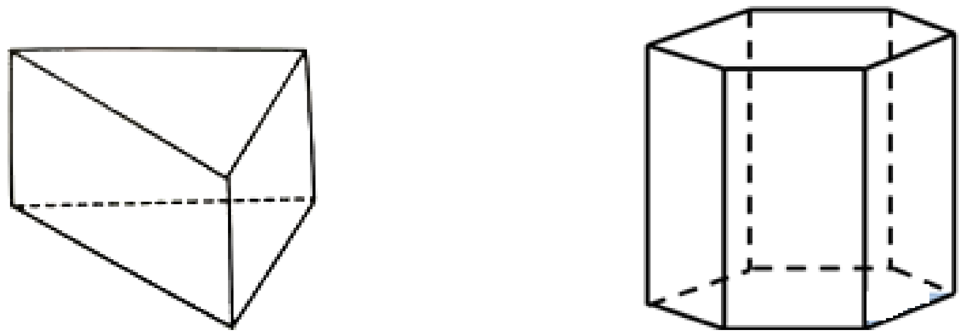


Рис. 2.5

Якщо призма опукла, то будь-яка площина, що проходить через бічне ребро і діагональ основи, розтинає її на дві інші призми. Така площина називається діагональною площиною, а переріз призми цією площиною – діагональним перерізом. Діагональний переріз будь-якої призми – паралелограмом, а прямої призми – прямокутник [6, 136-138].

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней. Про це уже говорилось раніше, постає питання: чи можна обчислити площу бічної поверхні прямої призми іншим способом? Так дійсно, можна обчислити, про це свідчить наступна теорема, яку необхідно довести учням в класах профільного рівня навчання.

Теорема 1. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту призми.

Постає питання чи можна обчислити площу бічної поверхні похилої призми? Щоб знайти площу бічної поверхні похилої призми, треба знайти площу кожної її бічної грані та результати додати. Це пояснення легке, але його замало для класу профільного рівня. Тому для знаходження площі бічної поверхні похилої призми інколи зручно користуватись такою теоремою.

Теорема 2. Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на бічне ребро.

Слід наголосити, що площа поверхні призми дорівнює сумі площі її бічної поверхні та подвоєної площі основи: $S_п = S_б + 2S_о$.

Один з різновидів призми є паралелепіпед, основою якого є паралелограм. Усі шість граней паралелепіпеда – паралелограми. Протилежні грані паралелепіпеда рівні та лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні та паралельні. Виникає питання: «Чому?»

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається прямим паралелепіпедом. У нього всі бічні грані – прямокутники, а основи – паралелограми. Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, його називають прямокутним паралелепіпедом. Довжини трьох його ребер, які виходять з однієї вершини, називаються вимірами прямокутного паралелепіпеда. Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називається кубом. Правильна чотирикутна призма – окремий вид прямокутного паралелепіпеда. Дуже важливо розглянути властивості всіх різновидів призм [6, 144-145].

Піраміда, зрізана піраміда. Правильна піраміда

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину (рис. 2.6).

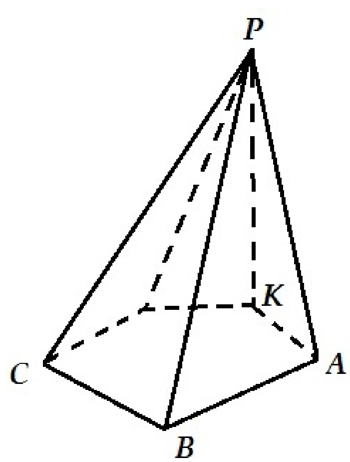


Рис. 2.6

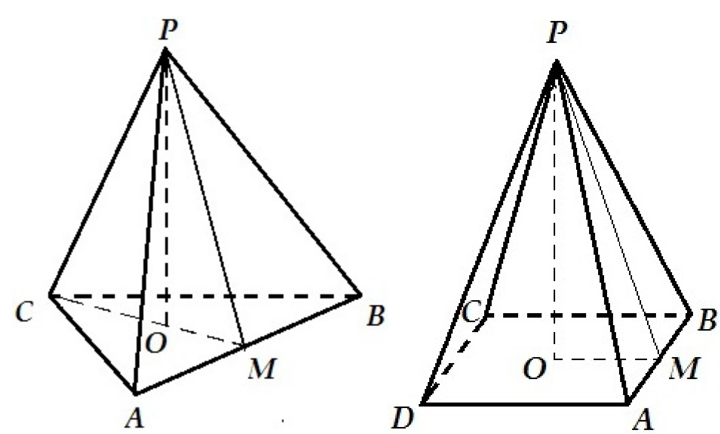


Рис. 2.7

Ці трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями, їхню спільну вершину – вершиною піраміди. Грань піраміди, яка не є бічною, – основа піраміди. Залежно від числа сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, …, n-кутні піраміди. Трикутну піраміду називають ще тетраедром.

Кожне ребро піраміди, яке не є стороною основи, називають бічним ребром. Якщо піраміда опукла, то будь-яка площина, що проходить через бічне ребро і діагональ основи, розтинає її на дві інші піраміди. Така площина називається діагональною площиною, а переріз піраміди цією площиною – діагональним перерізом. Кожний діагональний переріз піраміди – трикутник. Трикутна піраміда діагональних перерізів не має.

Висота піраміди – перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи, або довжина цього перпендикуляра.

Піраміда називається правильною, якщо її основа – правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні та всі ребра при основі рівні. Усі бічні грані правильної піраміди – рівні рівнобедрені трикутники. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають апофемою піраміди. Неправильні піраміди апофем не мають. На рис. 2.7 зображено правильні трикутну і чотирикутну піраміди. Відрізки PO – їхні висоти, а PM – апофеми. Бічна поверхня піраміди складається з усіх бічних граней.

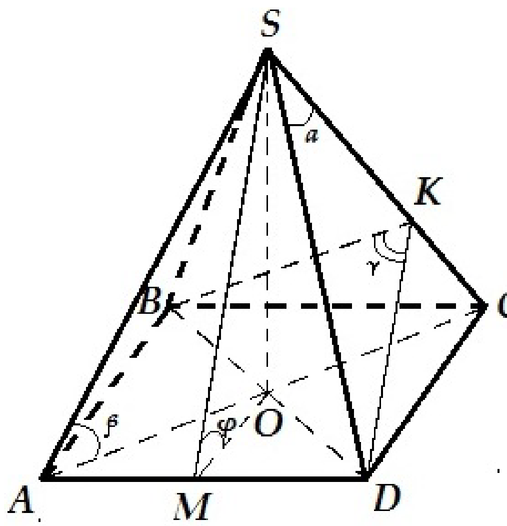


Рис. 2.8

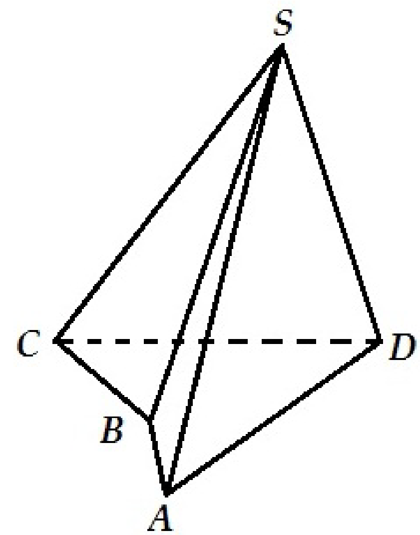


Рис. 2.9

У піраміді бажано розрізняти кути: плоский кут при вершині α , кут нахилу бічного ребра до площини основи β , двогранний кут при бічному ребрі γ , двогранний кут при ребрі основи φ тощо (рис. 2.8). Зверніть увагу: двогранний кут при бічному ребрі може бути більшим від 18^{0} (рис. 2.9), двогранний кут при основі піраміди також може бути тупим. Тому двогранний кут при основі може не дорівнювати куту, під яким бічна грань нахилена до площини основи.

Теорема 3. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди: $S_{\text{б}} = \frac{1}{2}Pl$.

Площа поверхні піраміди дорівнює сумі площі її бічної поверхні та площі основи: $S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{о}}$.

Якщо кожний двогранний кут при основі піраміди дорівнює φ , а площа її основи $S_{\text{о}}$, то площа бічної поверхні: $S_{\text{б}} = \frac{S_{\text{о}}}{cos\varphi}$. Це випливає з теореми про площу ортогональної проекції.

Більш детальніше розглядається геометрія тетраедра, а саме, основні властивості тетраедра, середні лінії та медіани тетраедра, правильний та рівногранний тетраедр, ортоцентричний та прямокутний тетраедр. Цей матеріал розглядається тільки в класах профільного рівня.

Якщо довільну n-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, ця площина відітне від піраміди многогранник, дві грані якого подібні n-кутники, а решта n граней – трапеції. Таку частину піраміди називають зрізаною пірамідою. Паралельні грані зрізаної піраміди називають її основами, а всі інші – бічними гранями. Висота зрізаної піраміди – відстань між площинами її основ.

Зрізану піраміду називають правильною, якщо вона є частиною правильної піраміди. На рис. 2.10 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – її основи, відрізок MM_1 – апофема.

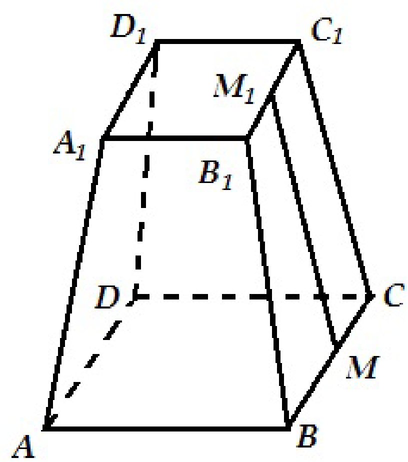


Рис. 2.10

Теорема 4. Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему.

Зрізана піраміда не є пірамідою, оскільки не відповідає означенню піраміди. Тому не можна стверджувати, що «зрізана піраміда – це така піраміда, у якої …» або що «піраміди бувають повні та зрізані». [6, 152-157]

Правильні многогранники

Після введення опуклих многогранників вивчаються їх види: призми, піраміди та їх різновиди. Практично у всіх підручниках вони визначаються однаково. А при введенні визначення правильного многогранника автори підручників розходяться в поглядах. Тому цікаво розглянути різні підходи до визначення поняття правильного многогранника і їх методичні особливості.

У різних підручниках з геометрії 11 класу профільного рівня використовуються різні визначення цього поняття. Так, в підручнику Апостолової Г.В. многогранник називається правильним, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники і, крім того, в кожній вершині сходиться одне і те ж число ребер.

Правильних многокутників нескінченно багато. А правильних многогранників існує лише п’ять: чотиригранник, шестигранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник.

Правильний чотиригранник (рис. 2.11) обмежують чотири правильні трикутники. Його ще називають правильним тетраедром. Він має 4 вершини і 6 ребер. На рис. 2.12 зображено правильний тетраедр, розгорнутий у площину однієї зі своїх граней. Таке зображення многогранника називається його розгорткою.

Правильний шестигранник або гексаедр (рис. 2.13) має 6 граней-квадратів, 8 вершин і 12 ребер. Його ще називають кубом. Розгортка куба має вигляд, як на рис. 2.14.

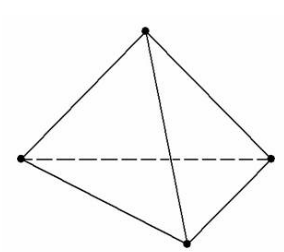


Рис. 2.11

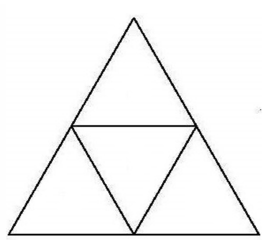


Рис. 2.12

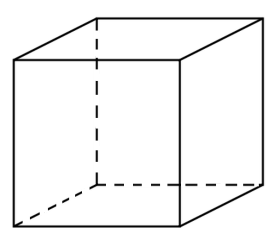


Рис. 2.13

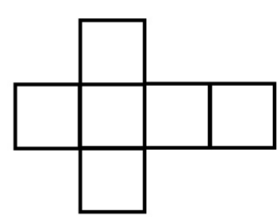


Рис. 2.14

Поверхню правильного восьмигранника або ще говорять октаедра, як і чотиригранника, утворюють правильні трикутники, але відмінність у тому, що у восьмигранника їх не чотири, а вісім (рис. 2.15). Він має 6 вершин і 12 ребер. Розгортка зображена на рис. 2.16.

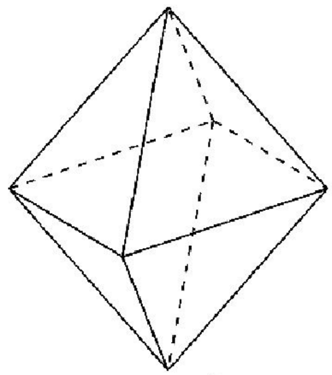


Рис. 2.15

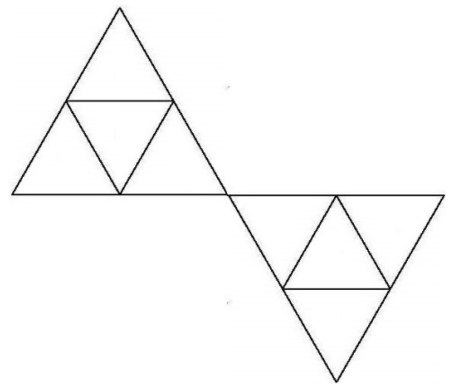


Рис. 2.16

Правильний дванадцятигранник (додекаедр) має 12 граней (рис. 2.17), кожна з них являє собою правильний п’ятикутник. У додекаедрі 20 вершин і 30 ребер. На рис. 2.18 зображено його розгортку.

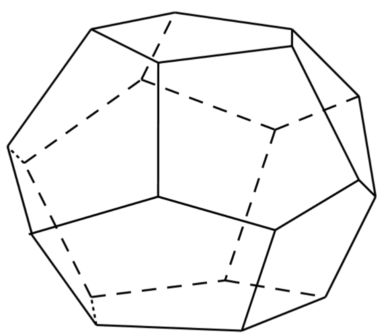


Рис. 2.17

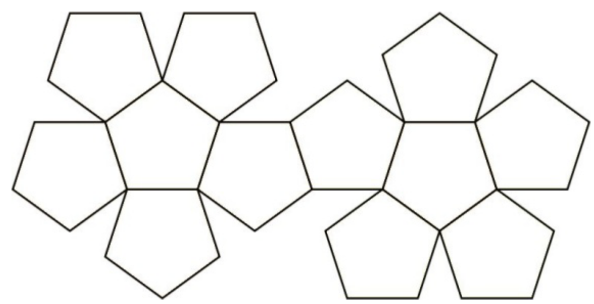


Рис. 2.18

Правильний двадцятигранник (ікосаедр) обмежують 20 рівносторонніх трикутників, які сходяться у 12 вершинах (рис. 2.19). Він має 30 ребер. Розгортку зображено на рис. 2.20.

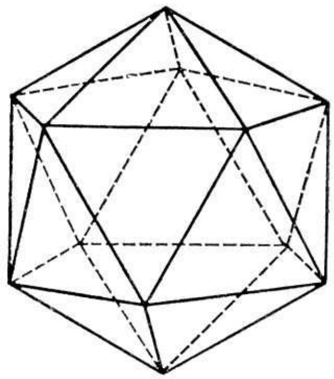


Рис. 2.19

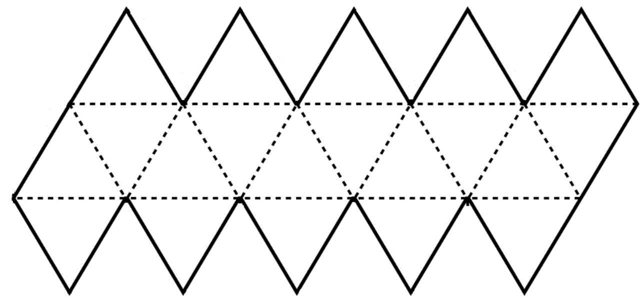


Рис. 2.20

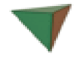
Вершини правильного многогранника рівновіддалені від його центра. Тоді вершини кожного з п'яти видів правильних многогранників, у тому числі й ікосаедра, лежать на поверхні кулі.

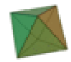
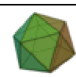
Дванадцять вершин ікосаедра – це максимальне число точок, які можна нанести на поверхню кулі так, щоб відстань між будь-якими двома сусідніми точками була однакова.

Площа поверхні правильного многогранника (площа його розгортки) дорівнює площі правильного многокутника його грані, взятої стільки разів, скільки граней має відповідний правильний многогранник [3, 112-113].

Правильні многогранники ще називають платоновими тілами, як було зазначено раніше, хоч їх знали піфагорійці за кілька століть до Платона.

Число вершин, ребер і граней для цих многогранників наведено нижче у таблиці, яку обов'язково потрібно дати для учнів під час вивчення даної теми [44].

Назва многогранника	Зображення	Число вершин В	Число ребер Р	Число граней Г
Тетраедр		4	6	4
Куб або гексаедр		8	12	6

Октаедр		6	12	8
Додекаедр		20	30	12
Ікосаедр		12	30	20

Виникає питання: Чому існує лише п’ять правильних многогранників?

На цьому етапі потрібно довести уже згадану теорему Ейлера про співвідношення між числом граней, ребер і вершин многогранника.

Теорема 5. Для кожного опуклого багатогранника сума числа вершин В і числа граней Г на 2 більша за число його ребер Р:

$$В + Г - Р = 2$$

Уперше це співвідношення виявив Рене Декарт близько 1620 р. У 1752 р. цю формулу відкрив Леонард Ейлер, коли описував типи опуклих многогранників залежно від числа їхніх вершин. Нині її називають формулою або теоремою Ейлера.

Доведення. Є багато доведень теореми Ейлера. В одному з них використовується формула для суми кутів многогранника та поняття центрального проектування. Розглянемо це доведення.

Візьмемо ззовні многогранника точку *O* поблизу будь-якої його грані та спроектуємо многогранник на площину цієї грані із центра *O*. Їх проекції утворюють на площині проекції многокутника *F,* що складається з «павутиння» многокутників. Підрахуємо двома способами суму кутів δ усіх цих многокутників.

1) Сума кутів *n*-кутника дорівнює $\pi(n-2)$ для кожного з отриманих многокутників. Додамо ці числа для всіх граней. Число членів виду πn дорівнює загальній кількості сторін усіх граней, тобто *2P* – адже кожне ребро належить двом граням. Загальна кількість доданків дорівнює кількості граней Г.

Маємо $\delta = \pi(2P - 2\Gamma)$.

2) Тепер знайдемо суми кутів при кожній вершині «павутиння» і додамо їх. Якщо вершина лежить у середині многокутника F, то сума кутів навколо неї дорівнює . Таких вершин буде ($\text{В} - k$), $k -$ число вершин самого многокутника *F*. Їх внесок у суму δ дорівнює .

Сума кутів многокутника *F* дорівнює $\pi(k - 2)$. Але ми повинні врахувати цю суму двічі – як суму кутів граней і як суму кутів «розбиття».

Маємо

Прирівнявши два результати $\pi(2P - 2\Gamma) = 2\pi(\text{В} - 2),$ - отримаємо

$$\text{В} + \Gamma - \mathbf{P} = \mathbf{2}.$$

Що і треба було довести [23]. Інші випадки доведення теореми Ейлера наведено в додатку 1.

Зрозуміло, що число вершин (В), число граней (Г) та число ребер (Р) кожного з правильних многогранників задовольняють формулу Ейлера, яку ми тільки що довели. В класах профільного рівня розглядається питання, чому існує лише п’ять правильних многогранників?

Отже, весь вище викладений матеріал про многогранники вивчається в класах профільного рівня.

2.2. Зображення многогранників та допущення типових помилок учнями

Значення рисунка при вивченні геометрії дуже важливе, особливо при розв’язуванні задач з взаємозв’язаними між собою елементами фігури, в тому числі з додатковими побудовами. Виготовлення будь-якого предмета починається із зображення його на папері, яке дозволяє визначити не лише форму і розміри всіх частин предмета, а й мати наочне уявлення про нього.

Раніше вміння зображати просторові геометричні фігури учні здобували на уроках креслення, але сьогодні у зв’язку з відсутністю в багатьох школах таких уроків, всі навантаження і відповідальність за вироблення графічної грамотності в учнів старших класів лягає на вчителя математики.

Зображення просторових фігур є найважливішим для розвитку просторової уяви і просторового мислення. Розв’язання стереометричної задачі починається з виконання рисунка, оскільки без нього складно, а в ряді випадків і неможливо, засвоїти умову задачі, проаналізувати та розв’язати її. Так при розв'язанні задач на переріз многогранника площиною рисунок є розв'язком і відповіддю на поставлене в задачі питання. Рисунок при цьому буде розглядатися як ілюстрація, як наочна графічна модель, яка допомагає з’ясувати особливості даної просторової фігури. При цьому спотворення, зумовлені проекцією на площину, ми перестаємо помічати.

Специфіка розв’язування стереометричних задач пов’язана з особливостями геометричних побудов у просторі.

Розв’язуючи задачу чи доводячи теорему із курсу стереометрії, ми користуємося, як правило, не просторовою моделлю відповідної фігури, а її зображенням на площині. Той, хто хоче розв’язувати стереометричні задачі, повинен перш за все навчитися вірно зображувати просторові фігури на площині – на аркуші паперу або на класній дошці.

Рисунок має бути правильним, тобто всі елементи рисунка виконані в одній і тій же паралельній проекції.

Поширеною є помилка, коли призма, в основі якої лежить рівнобічна трапеція, зображується в одній (паралельній) проекції, а висота основи призми зображується довільним чином (рис. 2.21)

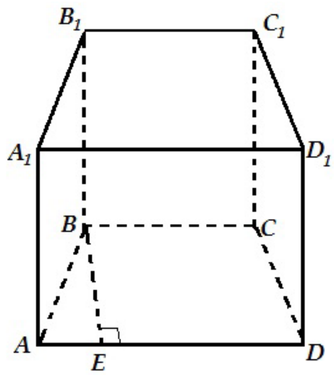


Рис. 2.21

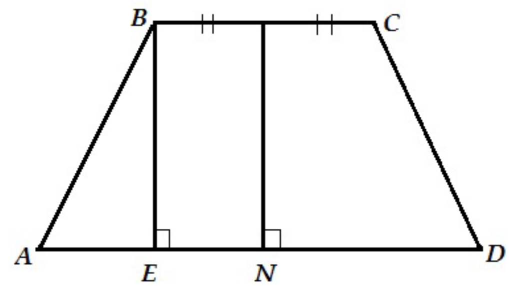


Рис. 2.22

Розглянемо основу оригіналу – рівнобічну трапецію (рис. 2.22). Висота трапеції паралельна до осі симетрії (BE || MN). Скориставшись цим фактом і властивостями паралельного проектування, можна виконати зображення висоти в тій проекції, що і призма.

Рисунок має бути наочним, тобто таким, який дає повне уявлення про оригінал, який зображується; сприяє розвитку просторового мислення, допомагає знаходити правильні шляхи розв'язання задачі.

Не треба при цьому плутати наочність з правильністю зображень. Зображення може бути правильним, але зовсім не наочним. Якщо зображення має помилки, тобто не є правильним, то його не можна вважати наочним, бо воно викличе неправильне уявлення про оригінал, адже вимога наочності зображення є дуже істотною.

Рисунок має бути простим у побудові, тобто виконуватись просто і всі побудови мають бути зрозумілі учням. Тільки при цих умовах можна одержати хороше зображення, яке виконане за короткий час [49].

Розглядати побудову зображень геометричних тіл на площині краще в темах «Многогранники» та «Тіла обертання» при вивченні певного тіла після введення його означення.

Перше з чим треба ознайомити учнів – це правила оформлення зображення многогранника на папері:

1) При виконанні малюнків просторових фігур використовують різні типи ліній:

суцільні – для зображення видимого контуру,

штрихові – невидимого,

штрих-пунктирні – для зображення осей симетрії, осей обертання.

2) Допоміжні лінії проводяться товщиною в 1/3 основних.

3) Лінії креслять олівцем, а буквені позначення роблять чорнилом (пастою). Часто для виділення окремих елементів або частин рисунка користуються кольоровими олівцями, ручками або фломастерами, крім червоного кольору.

4) Зображаючи комбінації геометричних фігур, зокрема многогранників і круглих тіл, вписану фігуру зображають штриховими лініями (як невидиму) або суцільними, вдвоє тоншими, ніж лінії видимого контуру, вважаючи описану фігуру прозорою. Але краще вписану і описану фігури, їх елементи зображати різними кольорами, уникаючи при цьому червоного і вважаючи кожну з фігур самостійною [38].

Частіше геометричні тіла розглядаються такими, що стоять на горизонтальній площині, тому, щоб побудувати зображення того чи іншого трьохвимірного об’єкта, необхідно перш за все побудувати зображення його основи, а потім – зображення його елементів (висоти, вершин, ребер тощо).

Іноді можна обмежуватися зображенням відповідного перерізу фігури.

Перш, ніж почати знайомити учнів з побудовою многогранників, треба їм повідомити, що призми та піраміди краще зображати так, щоб найбільше число граней та ребер були видимими.

Побудова основних многогранників

1. Зображення правильної призми

Призму зручніше починати будувати з верхньої основи, так як її сторони є видимими, а ребра зручніше проводити вниз. Розглянемо це питання на прикладі зображення трикутної призми. Нарисуємо зображення правильного трикутника (верхньої основи призми) – довільний трикутник ABC (рис. 2.23).

Проведемо вниз від його вершин вертикальні прямі і відкладемо на них рівні відрізки, що відповідають висоті призми. З'єднуємо точки A_1, B_1, C_1 і отримаємо зображення правильної трикутної призми з нижньою основою $A_1B_1C_1$.

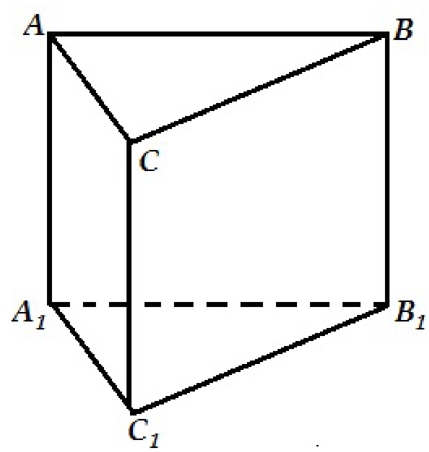


Рис. 2.23

2. Зображення правильної піраміди

Розглянути це питання разом з учнями достатньо буде на прикладі однієї з правильних пірамід. Можна взяти, наприклад, правильну чотирикутну піраміду. Спочатку будуємо зображення основи піраміди – квадрата – паралелограм $ABCD$ (рис. 2.24). Тепер знайдемо центр квадрата, точку C – точка перетину діагоналей, проведемо через неї вертикальну пряму. На цій прямій відкладемо відрізок OS, що зображає висоту піраміди. Проведемо бічні ребра, тобто відрізки, що з'єднують вершину піраміди S з вершинами основи $ABCD$.

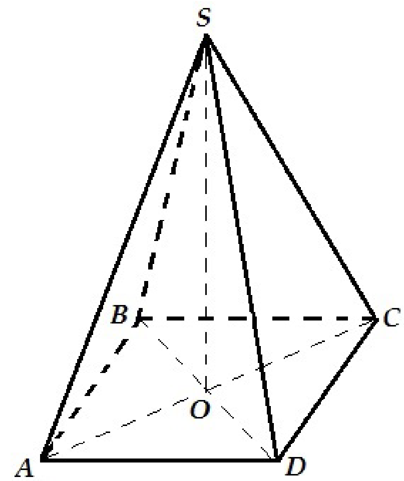


Рис. 2.24

3. Зображення зрізаної піраміди.

Треба обов'язково наголосити на тому, що спочатку будується піраміда, а лише потім паралельними до сторін основи лініями зобразити зріз. Решту стерти (рис. 2.25) [38].

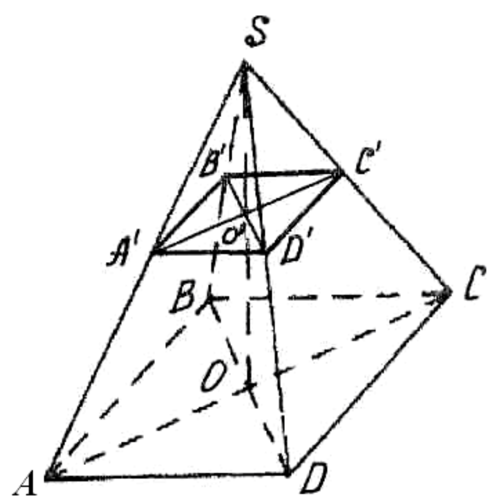


Рис. 2.25

Оскільки всі круглі тіла зображуються в ортогональній проекції, то й многогранники, що знаходяться з ними в комбінації, мають зображуватись в ортогональній проекції.

Головним правилом при побудові комбінацій тіл є те, що побудова починається з зображення круглого тіла. Для всіх комбінацій основних геометричних тіл не можна визначити певне місце при викладенні теоретичних відомостей курсу стереометрії. Багато з них мають зображуватись при розв'язуванні конкретних задач, тому деякі комбінації не пов'язані з якимись конкретними темами викладу навчального матеріалу. Приклади основних комбінацій тіл (рис. 2.26).

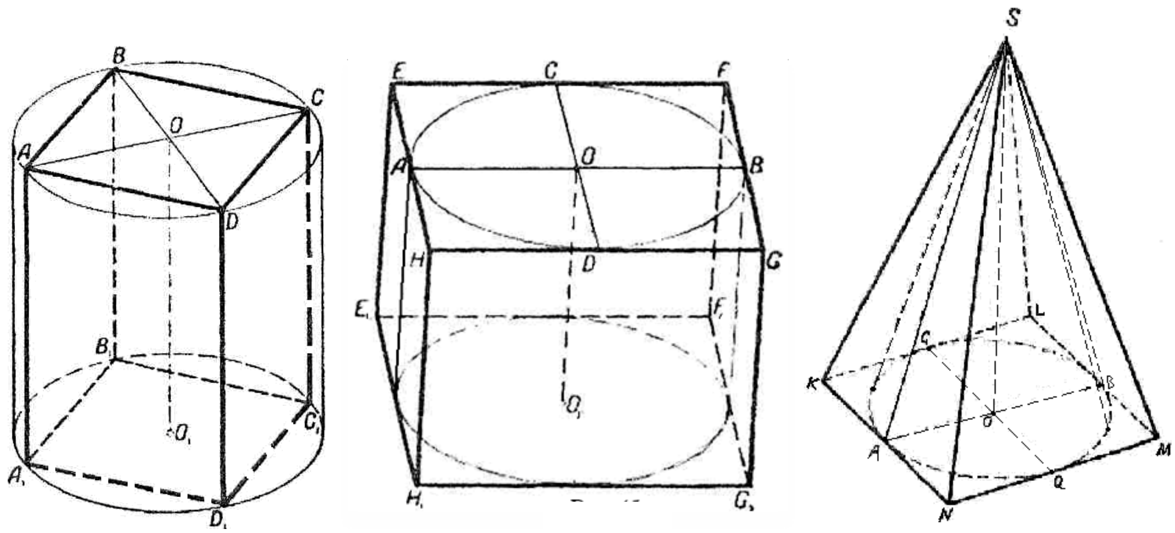


Рис. 2.26

Існує велика кількість задач на побудову перерізів многогранників, де рисунок відіграє не останню роль. Щоб правильно виконувати ці перерізи потрібно знати, як здійснюється метод зовнішніх або внутрішніх слідів, зрозуміти як використовувати слід, прямої в площині та січної площини в даній площині, правил паралельного і центрального проектування, а також відповідних тверджень стереометрії [23].

При вивченні теми «Перерізи многогранників площиною» особливу увагу потрібно приділити вмінню будувати точку перетину (слід) прямої з площиною та пряму (слід) перетину двох площин, одна з яких задана трьома точками. Тому доцільно розпочати викладання теми з вивчення двох базових задач [21].

Задача 1. Побудувати слід перетину прямої AB з площиною α, якщо пряма задана точками A і B.

Побудова. Побудову слід почати з зображення площини α у вигляді паралелограма (рис. 2.27) Якщо умова задачі передбачає, що AB не паралельна до α, то точки A і B розташуємо на різній відстані від площини.

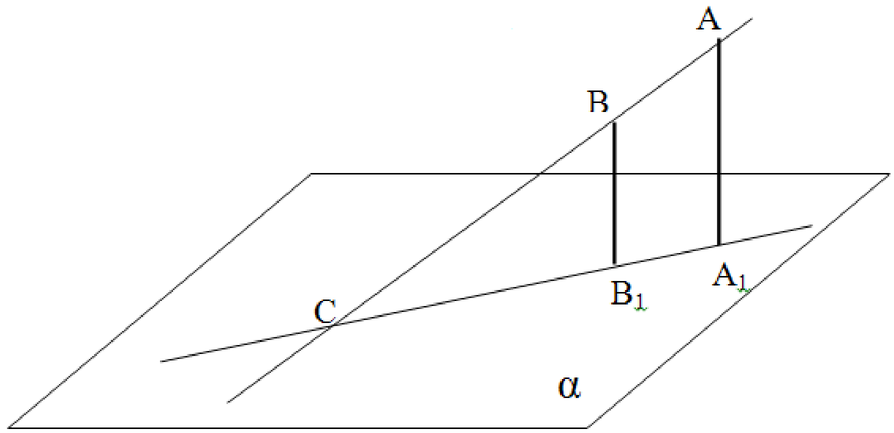


Рис. 2.27

Проведемо додаткову побудову, знайдемо проекції точок A і B на площину α

(, B_1). Для цього проведемо умовні перпендикуляри з точок A і B на площину α. Отже, основи цих перпендикулярів і будуть проекціями точок A і B на площину α. Тоді пряма A_1B_1 є проекцією прямої AB на дану площину.

Тому спільна точка прямої AB і площини α має лежати на прямій A_1B_1.

Отже, досить лише знайти точку перетину прямих AB і A_1B_1 і вона буде шуканою точкою (слідом) перетину прямої AB і площини α .

Задача 2. Побудувати слід перетину площини (ABC), що задана точками A, B і C з площиною α .

Побудова. Зображуємо площину α як паралелограм (рис. 2.28) і три точки A, B і C на різній відстані від α. Проводимо міркування: дві площини перетинаються по прямій. Для побудови цієї прямої досить знайти дві її точки, що належать обом даним площинам. Як їх знайти? Площина (ABC) задана трьома точками A, B і C отже, можна вважати, що на ній задано дві прямі AB і AC .

Спільні точки прямих *AB* і *AC* з площиною α будуть шуканими точками. Використовуємо міркування задачі 1, щоб побудувати ці точки (*E* і *F* відповідно).

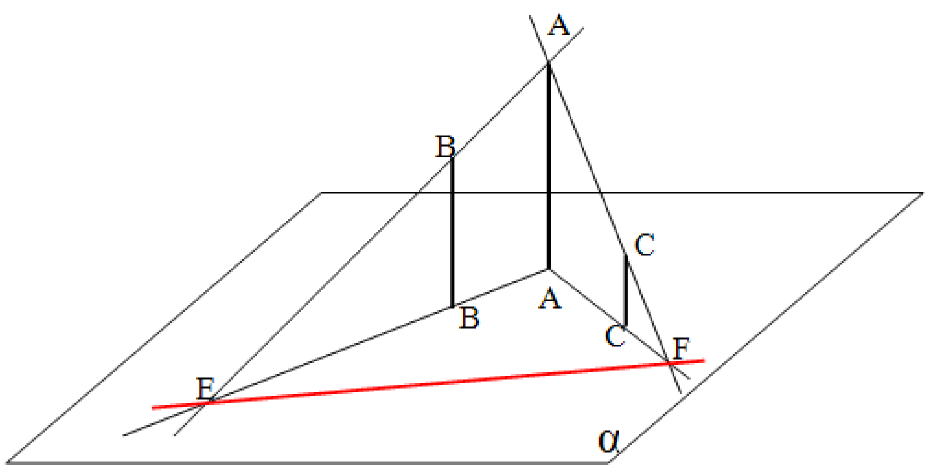


Рис. 2.28

Пряма *EF* і є шукана пряма (слід) перетину площин (ABC) і α [21].

Побудова перерізу многогранника площиною

Задачі на перерізи многогранника площиною зазвичай полягають в тому, щоб побудувати паралельну проекцію самого многогранника і умови за допомогою яких задається січна площина, обчислити площу одержаного перерізу або відношення, в якому січна площина поділяє об'єм многогранника. Розв’язання кожної з двох частин такої задачі має бути переконливо обґрунтованим.

В залежності від взаємного розташування многогранника і січної площини переріз може бути трикутником, чотирикутником, тощо, однак число сторін многокутника, тобто перерізу, не може перебільшувати числа всіх граней даного многогранника. Наприклад, перерізи куба площиною можуть мати форму трикутника, чотирикутника, п’ятикутника, шестикутника, при чому кожен з цих видів перерізів може утворитися в різних варіантах (наприклад, трикутник правильний, рівнобедрений, різносторонній).

При побудові перерізу многогранника площиною, незалежно від методу побудови, потрібно розв’язати дві задачі: будувати точку перетину прямої (ребра) січною площиною і лінію перетину двох площин (січної площини і площини грані) [21].

Побудова перерізу многогранника площиною, що задана трьома точками.

Задача 3. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки *M*, *N* та *K* на бічних ребрах.

Побудова. Нехай маємо зображення даної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.29) з даними точками на ребрах: , , . Щоб побудувати шуканий переріз, потрібно знайти точку, що належить ребру DD_1. Для цього спочатку з’єднаємо відрізками точки *M* і *N*, *N* і *K*, що лежать на бічних ребрах даного тіла та точки *M* і *K*, оскільки вони належать площині діагонального перерізу . Проведемо також другий діагональний переріз BDD_1B_1, який перетинається з

O_1

площиною по прямій де точки C і – спільні точки діагоналей основ AC та BD , A_1C_1 та B_1D_1 відповідно. Відрізок MK перетинає цю пряму у точці F . Отже, пряма NF належить січній площині за теоремою про належність прямої до площини. Ця пряма (NF) перетинає ребро DD_1 у точці F. Тоді точка F лежить в одній площині з точкою N, а також з точкою K.

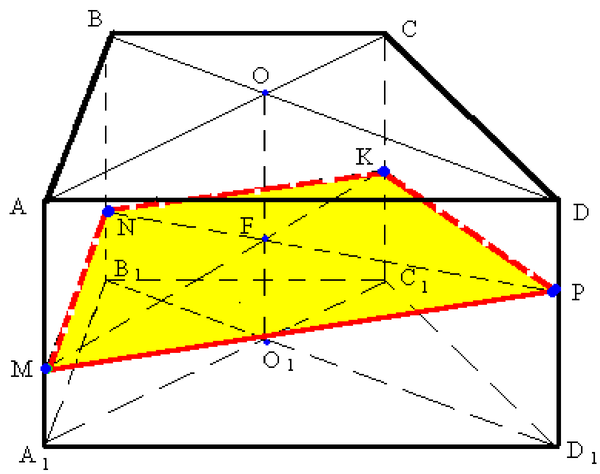


Рис. 2.29

Утворилися відрізки MP і KP , що також є сторонами перерізу. Отже, перерізом є чотирикутник $MNKP$.

Задача 4. Побудувати переріз піраміди площиною, що задана трьома точками на бічних гранях.

Побудова. Нехай (рис. 2.30) дано зображення правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з точками K, N і F на бічних гранях, через які проходить січна площина. Для того, щоб побудувати переріз піраміди цією площиною, потрібно знайти відповідні точки на бічних ребрах піраміди.

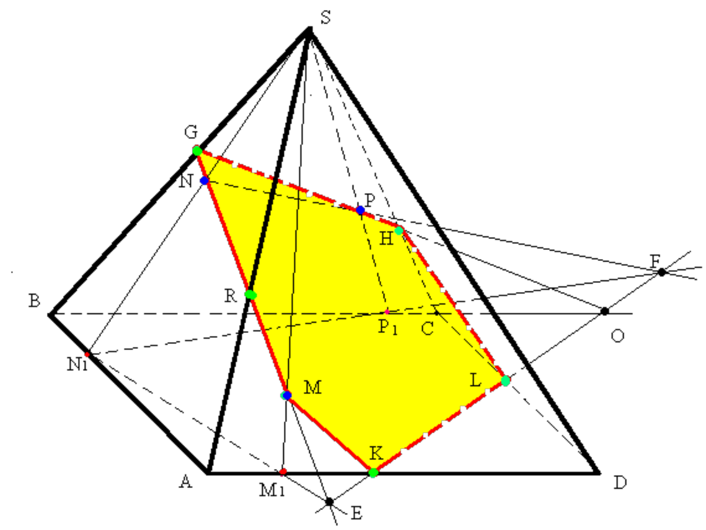


Рис. 2.30

При центральному внутрішньому проектуванні з центром у вершині піраміди S точка M переходить у точку M_1 на ребрі основи AD, точка N – у точку N_1 на ребрі основи BA і точка F – у точку P_1 на ребрі BC. Отже, при такому проектуванні площина (MNP) перетинає площину основи піраміди по

прямій EF, де ; $F = N_1P_1 \cap NP$. Ця пряма перетинає основу піраміди по відрізку KL. У площині (ADS) проведемо пряму KM, яка перетинає ребро SA у точці R; пряма RN перетинає ребро SB у точці G, пряма GP перетинає ребро SC у точці H.

Отже, п'ятикутник $KRGHL$ є шуканим перерізом [5].

Задання січної площини прямою і точкою поза нею, двома прямими, що перетинаються, або двома паралельними прямими, рівносильне визначенню цієї площини трьома точками, що не лежать на одній прямій. При цьому, у ряді випадків побудова перерізу полегшується, тому, що ми одразу отримуємо 2-4 вершини многокутника – перерізу.

Звичайно є безліч задач на побудову перерізів. Ми розглянемо один випадок, коли слід перетинає многогранник.

Задача 5. Побудувати переріз куба площиною, що проходить через середини двох сусідніх ребер, основи та середину бічного ребра, яке не перетинає прямі, що містять ці ребра основи.

Побудова. Нехай маємо (рис. 2.31) зображення даного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, січна площина перетинає основу по прямій, що проходить через точки N і M на

ребрах AB і AD відповідно, а ребро містить точку K січної площини, яка поділяє ребро навпіл.

Побудова перерізу починається з пошуків точок, по яких січна площина

D_1D

перетинає ребра і . Проведемо пряму MN у площині нижньої основи. Бачимо, що площина (NKM) перетинає ребро B_1B у точці R ($R = KP_2 \cap B_1B$, а і ребро DD_1, у точці L ($CD \cap NM = P_1$, $KP_1 \cap DD_1 = L$). Отже, п'ятикутник $MNRKL$ – шуканий переріз.

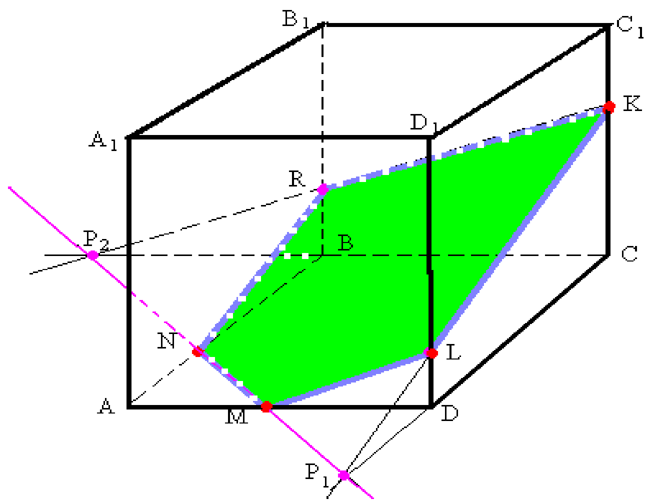


Рис. 2.31

Побудова перерізу многогранника площиною, що проходить через задану на грані точку під заданим кутом λ до площини основи, або через задану сторону основи під кутом λ до площини основи. При побудові таких перерізів многогранників потрібно враховувати метричну визначеність кута. Якщо ж кут метрично не визначений, то побудову обґрунтовуємо, спираючись на означення кута між площинами.

Задача 6. Побудувати переріз трикутної призми площиною, що проходить через сторону основи під кутом λ до площини основи.

Побудова. Нехай маємо призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 2.32), січна площина проходить через сторону основи Ac під кутом λ до площини основи.

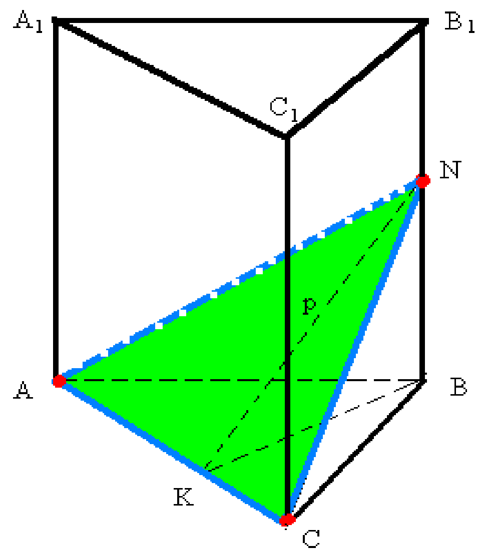


Рис. 2.32

Отже, ця площина обов'язково матиме спільну точку з ребром BB_1 або з його продовженням, в залежності від величини кута. Якщо кут λ метрично не визначений, обґрунтуємо його побудову таким чином: точка B є горизонтальною проекцією шуканої точки на основі призми, опустимо $BK \perp AC$, потім у площині KBB_1 будуємо довільну пряму KP, перпендикулярну до сторони AC. Ця пряма перетинає ребро BB_1 у точці M. Трикутник AMC – шуканий переріз [5].

2.3. Аналіз задач на многогранники у завданнях ЗНО.

Зовнішнє незалежне оцінювання – процес визначення рівня навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів (ЗНЗ) установами, що не залежать від загальноосвітніх та вищих навчальних закладів. В Україні такими установами є Український центр оцінювання якості освіти (УЦОЯО) та дев'ять регіональних центрів.

Запровадження ЗНО відбувається з метою забезпечення конституційних прав громадян на рівний доступ до якісної освіти, утвердження справедливості в державі, сприяння інтеграції України в європейський освітній простір.

Дане оцінювання є:

– зовнішнім, оскільки процедура відбувається на базі спеціально підготовлених пунктів тестування і виключає можливість оцінювання навчальних досягнень учнів у своєму навчальному закладі;

– незалежним, бо здійснюється організацією, яка не залежить і не підпорядкована ЗНЗ і ВНЗ, хоч тісно співпрацює з ними;

– об'єктивним, оскільки ставить однакові вимоги та забезпечує рівні умови всім учасникам в Україні;

– прозорим, бо забезпечує можливість спостереження з боку громадськості за дотриманням усієї процедури;

– шансом для учнів при вступі до вищого навчального закладу.

Технологія проведення ЗНО стимулює учнів краще вчитися, формує у них відповідальність за навчання, ставить випускників із різних соціальних прошарків у рівні умови, зменшує різницю між вимогами середніх і вищих навчальних закладів.

Готуючись до ЗНО з математики, слід врахувати структуру та зміст відповідного тесту. До нього включені завдання трьох різних форм:

– завдання з вибором однієї правильної відповіді (частина 1);

– завдання відкритої форми з короткою відповіддю (частина 2);

– завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю (частина 3).

Що стосується завдань з теми «Многогранники», то на них відводиться 5% від кількості всіх завдань. Якщо ж говорити про самі завдання, то вони аналогічні, тільки формулювання самого завдання може звучати по іншому.

Для підготовки до ЗНО з даної теми, учень повинен знати:

– основні види многогранників: призма, паралелепіпед, піраміда, зрізана піраміда та їх елементи;

– види перерізів многогранника площиною;

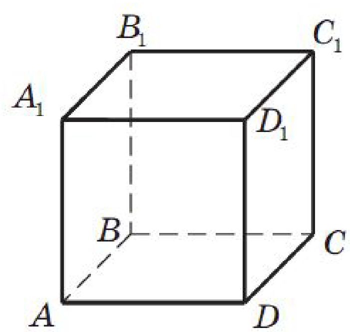
– комбінації геометричних тіл;

– формули для обчислення площ поверхонь, об'ємів многогранників;

Отже, учень повинен вміти: розв'язувати задачі на обчислення площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл; визначати за розгорткою поверхні, вид геометричного тіла; застосовувати означення та властивості основних видів многогранників до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту [1, 2-5].

Наведемо приклади завдань з теми «Многогранники», які зустрічаються в ЗНО 2009 – 2013 років з математики [21].

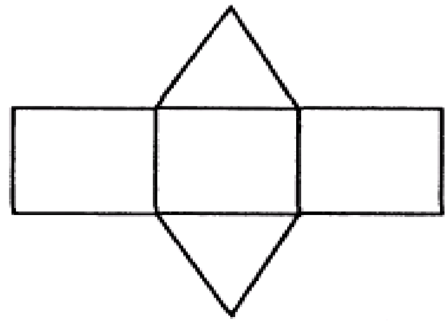
Завдання 1. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть серед поданих нижче пряму, що утворює з CD_1 пару мимобіжних прямих.



А	Б	В	Г	Д
A_1B	C_1D	CB_1	AB	CD

Відповідь: AB

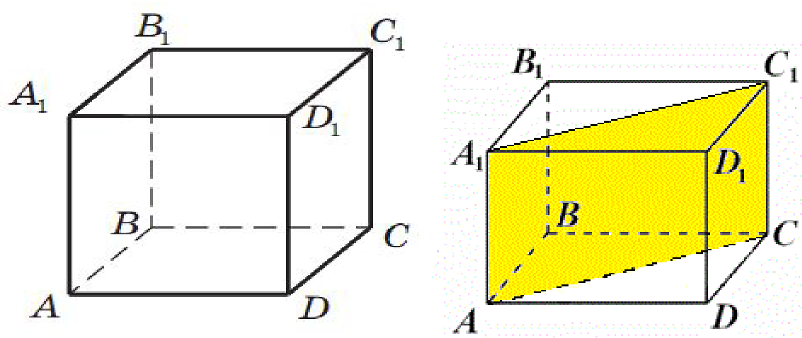
Завдання 2. На рисунку зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його вершин.



А	Б	В	Г	Д
10	9	8	6	5

Відповідь: Г (6)

Завдання 3. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки A, C, C_1, є



А	Б	В	Г	Д
Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник	прямокутник	ромб	трапеція

Відповідь: прямокутник

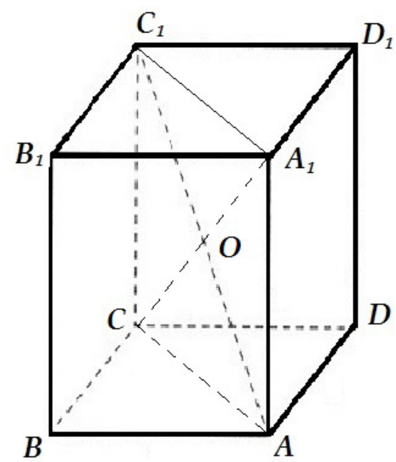
Завдання 4. Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25 см, 12 см, 6,5 см. Знайдіть масу m цеглини. (Для знаходження маси цеглини скористайтесь формулою $m = \rho V$, де V – об'єм, – густина цегли.)

А	Б	В	Г	Д
5,31 кг	3,51 кг	3,5 кг	3,41 кг	3 кг

Розв'язання. $V_{\text{пар.}} = a \cdot b \cdot c$. Оскільки нам відомі всі значення, маємо $V_{\text{пар.}} = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ ($см^3$). Тому $m = \rho V = 1{,}8 \cdot 1950 = 3510$ (г). Залишилось перевести см в к, $3510 \text{ г} = 3{,}51 \text{ кг}$.

Відповідь: $3{,}51$ кг

Завдання 5. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є прямокутник, площа якого дорівнює 40 $см^2$. Периметр основи призми дорівнює $20\sqrt{2}$ см. Визначте висоту призми.



А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$ см	см	4 см	1 см	2 см

Розв'язання. За умовою в основі даної чотирикутної призми лежить квадрат $- ABCD$, $P_{ABCD} = 20\sqrt{2}$ (см), тому $AB = \frac{20\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2}$ (см). З $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^0$) знайдемо $AC = \sqrt{2 \cdot AB^2} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10$ (см).

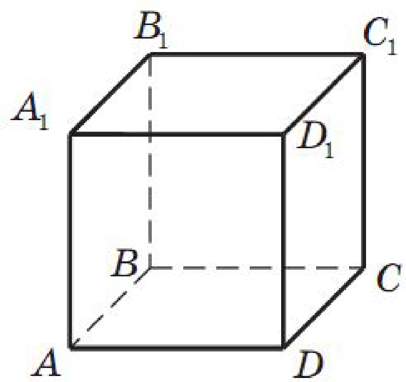
Оскільки площа перерізу відома, то маємо

$$AC \cdot AA_1 = S_{ACC_1A_1}$$

$$AA_1 = \frac{40}{10} = 4 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 4 см

Завдання 6. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення	**Закінчення речення**
1 Пряма CB	**А** паралельна площині AA_1B_1B.
2 Пряма CD_1	**Б** перпендикулярна площині AA_1B_1B.
3 Пряма AC	**В** належить площині AA_1B_1B.
4 Пряма A_1B	**Г** має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки
	Д утворює з площиною AA_1B_1B кут $45°$.

Відповідь: 1 – Б; 2 – А; 3 – Д; 4 – В.

Завдання 7. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (ширина кімнати – 4 м, довжина – 5 м, висота – 2,5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібна для

м

того, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 витрачається 0,25 кг фарби?

Розв'язання. Нехай $S_б$ – площа всіх стін кімнати,

$$S_{\text{біч.парал.}} = 2(4 * 2{,}5) + 2(5 * 2{,}5) = 2 * 10 + 2 * 12{,}5 = 20 + 25 = 45$$

м

( ).

Оскільки площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Тоді $S_{б} = 0{,}8 * 45 = 36\ (см^2)$.

$м^2$

Площа стелі буде дорівнювати $S_{\text{ст.}} = 4 * 5 = 20$ ( ).

Отже, $S_{б} + S_{\text{ст.}} = 36 + 20 = 56\ (см^2) \Rightarrow 56 * 0{,}25 = 14\ (кг)$

Відповідь: 14 кг

Завдання 8. Об’єм куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 216 $см^3$ (рис. 2.44). Обчисліть об’єм піраміди D_1ACD (у $см^3$).

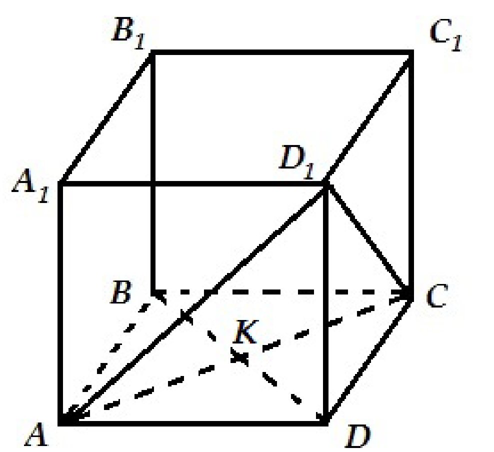


Рис. 2.44

Розв’язання. За умовою $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 216 см^3$, тобто $V = a^3$. Звідси знайдемо $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{216} = 6$ (см), або $DD_1 = DC = AD = 6$ (см). Ми знаємо, що $V_{D_1ACD} = \dfrac{a\, S_{ACD}}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$ (за теоремою Піфагора з $\triangle ACD$). З умови випливає що $BD \perp AC$, тоді $\angle K = 90^0$, $KD = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см).

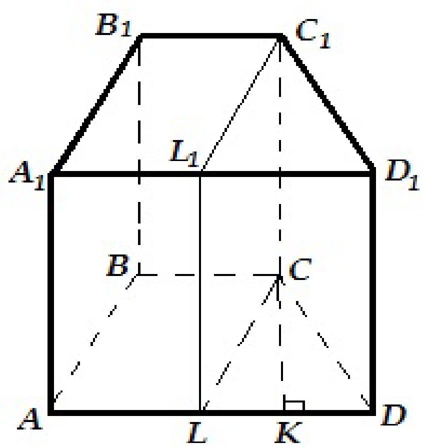
Маємо, що $S_{ACD} = \frac{1}{2}AC * KD = \frac{1}{2}6\sqrt{2}\,3\sqrt{2} = 18$ ($см^2$). Тоді

$$V_{D_1ACD} = \frac{6 * 18}{3} = 36 \quad (см^3).$$

Відповідь: 36 $см^3$

Завдання 9. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу (у $см^2$), якщо об'єм призми дорівнює 672 $см^3$

, а її висота – 8 см.



Розв'язання. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 672$ $см^3$ або $V = S_{осн.} \cdot H$, $H = CC_1 = 8$ (см).

Нехай $AD - x$, тоді за умовою $CK = h = x$, $BC = \frac{x}{6}$, отже

$$S_{осн.} = \frac{AD + BC}{2} \cdot KC = \frac{x + \frac{x}{6}}{2} \cdot x = \frac{7x^2}{12} \ (см^2).$$

Отримаємо таке рівняння: , $x^2 = 144$, $x = 12$ (см).

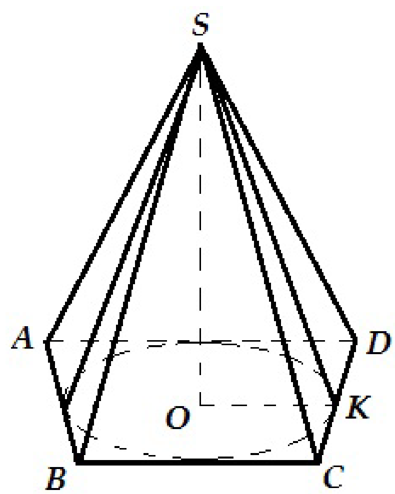
З $\triangle CKL$ $\left(\angle K = 90^0\right)$ знайдемо CK, $LK = 5(\text{см})$, $CK = 12(\text{см})$ тоді $CL = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13(\text{см})$.

Отже площа перерізу буде дорівнювати:

$S_{\text{пер.}} = CC_1 \cdot CL = 8 \cdot 13 = 104\ (\text{см}^2)$

Відповідь: 104 см^2

Завдання 10. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 10 см і основами 16 см і 4 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60^0. У відповіді запишіть значення .

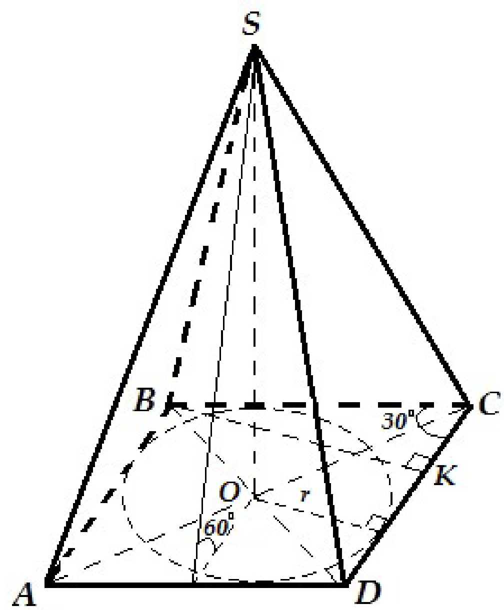


Розв'язання. $ABCDS -$ піраміда в основі якої лежить рівнобічна трапеція в яку вписано конус. За умовою $AD = 16\text{см},$ $BC = 4\text{см},$ $AB = CD = 10\text{см}$. Радіус основи вписаного конуса дорівнює $r = OK = \frac{1}{2}\sqrt{AD \cdot BC} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4\ (\text{см})$. За умовою $\angle SKO = 60^0$, тому з $\triangle SOK$ $(\angle O = 90^0)$, $SK = \dfrac{OK}{\cos 60^0} = 4 \cdot 2 = 8\ (\text{см})$. Всі потрібні величини відомі, отже

Відповідь: 32

Завдання 11. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30^0. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60^0. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у $см^2$), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює $3\ см$.

Розв'язання. Нам відома така формула: $S_{біч.} = \frac{S_{осн.}}{\cos \alpha}$, де $\alpha -$ кут нахилу бічних граней до основи, у нашому випадку $\alpha = 60^0$. За умовою $ABCD -$ ромб, $r = 3$ см $-$ радіус вписаного кола в основу, тобто в ромб.



$BK -$ висота ромба. Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти ромба, тому $BK = 2 \cdot r = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

З $\triangle CKB$ $(\angle K = 90^0)$ $BC = \frac{BK}{\cos 30^0} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$ (см) . Тому $S_{осн.} = BC \cdot BK = \ = 6 \cdot 12 = 72$ $(см^2)$. Маючи всі дані можна обчислити бічну поверхню піраміди:

$$S_{біч.} = \frac{72}{\cos 60^0} = 72 \cdot 2 = 144 (см^2)$$.

Відповідь: 144 $см^2$.

Отже, тема «Многогранники» відіграє суттєву роль у ЗНО, так як наявні завдання всіх рівнів складності. Тому слід приділяти велику увагу розв’язуванню таких задач в школі. Адже розділ «Многогранники» має систематизувати і розширити знання учнів, розвинути логічне мислення, уяву, сформувати знання і вміння обчислювати площі та об’єми просторових тіл.

Розділ 3: Дидактичне забезпечення при вивченні многогранників за дистанційною формою навчання

3.1. Використання різних видів контролю на уроках стереометрії

Об'єктом оцінювання навчальних досягнень учнів є знання, рівень розвитку інтелектуальних, загальнонавчальних і соціальних умінь, досвід творчої діяльності учнів й досвід емоційно-ціннісного ставлення до навколишньої діяльності.

На уроках стереометрії доцільно використовувати наступні види контролю:

1. **Попередній:** несе в собі діагностичну мету, застосовується перед вивченням нової теми, для того щоб вчитель зміг оцінити готовність учнів до нових знань. Результати цього контролю допомагають краще визначити методи, форми і засоби навчання.

2. **Поточний:** здійснюється під час, майже, кожного уроку. Для об`єктивної оцінки, за даною формою, педагог має попередньо вивчити рівень

письмових робіт учня. Поточний контроль полягає в систематичному спостереженні за роботою класу в цілому і кожного учня окремо, перевірка знань, умінь і навичок учнів поєднується з вивченням нового матеріалу, його повторенням, закріпленням і практичним застосуванням. Цей контроль несе також виховну мету, адже він стимулює учнів до саморозвитку та збагачення знань самостійно, допомагає налагодити тісніший контакт між вчителем та учнем.

3. **Періодичний:** використовується рідше, ніж всі інші види контролю, але має не менш важливу інформативну цінність. За допомогою періодичного контролю вчитель може краще оцінити знання не лише одного учня, а всього класу. Зазвичай проводиться після вивчення розділу або в кінці семестру і охоплює великий обсяг інформації.

4. **Повторний:** попередньо визначений та проводиться в зазначений час. Проводиться для порівняння результатів знань учнів при вивченні будь-якої теми, з метою визначення росту інтелектуального рівня учнів.

5. **Тематичний:** різновид періодичного контролю, ціллю даного контролю є оцінення знань учнів з кожної теми, служить для кращого засвоєння знань. Тематичне оцінювання виключає випадковість відповідей при підсумковому оцінюванні. Перед проведенням даного виду контролю, кожен учень має бути ознайомлений з типовими завданнями та їх обсягом.

6. **Підсумковий:** проводиться наприкінці навчального року, а також при закінченні курсу навчання в школі. Основною формою є іспити та ЗНО. Метою є визначення засвоєних знань протягом вивчення не конкретного розділу чи теми, а всього навчання в школі.

Контроль відіграє серйозну роль при оцінюванні учнів, він присутній на кожному уроці. Це допомагає вчителю «тримати руку на пульсі», дає змогу побачити прогалини в знаннях школярів.

Для здійснення всіх видів контролю вчитель має систематично спостерігати за роботою учнів. Контролювати виконаннях всіх письмових робіт та використовувати різні методи перевірки.

Також розрізняють системи контролю. До них відносять:

1. Усне опитування.
2. Письмове опитування.
3. Тести.
4. Заліки.
5. Іспити.
6. Перевірка домашньої роботи.

Усна перевірка. Даний вид перевірок реалізовується різноманітними методами, вибір яких залежить від змісту самого матеріалу. При виборі параметрів перевірки, варто звертати увагу на наступне:

- перевірка виконання домашнього завдання;
- підготовленість до засвоєння нового навчального матеріалу;
- перевірка рівня розуміння і ступеня засвоєння нового матеріалу.

Даний метод полягає в тому, що вчитель при безпосередньому спілкуванні (бесіді) з класом загалом та кожним учнем зокрема, задаючи запитання з теми засвоєного матеріалу, на підставі отриманих відповідей, визначає рівень його засвоєння. Реалізація може відбуватися або з усім класом або конкретно з одним учнем, що дає визначити глибину.

Популярним видом усного опитування являється проставлення бала за урок декільком учням. Він виставляється за проявлені учнями знання та вміння протягом уроку. Це може реалізовуватися за рахунок активності в доповненні, уточненні та поглибленні відповідей інших учнів в класі, які теж беруть участь в усному опитуванні уроку. Також учень може давати відповіді на запитання вчителя при розгляді та роз’ясненні нового матеріалу. В таких випадках в кінці уроку педагог виставляє підсумковий бал за урок в межах від 4 до 8 балів. Виставлення такого роду балів розвиває та підтримує активність і увагу учнів, а також дає їм змогу накопичувати бали (оцінки) протягом навчального процесу. Методологія усного опитування включає в себе 2 частини:

- розробка перевірочних питань;
- відповіді учнів на них.

Розробка питань і завдань – основний елемент усної перевірки. Якість таких питань визначається безпосередньо їх змістом, характером розумових дій учнів під відповіді на них, а також вмінням в формулюванні і глибині цієї відповіді. При складанні питань опиратися треба на ті питання, які є основними по даній тематиці або є важкими для засвоєння учнями, а також ті, які дадуть змогу успішно засвоювати наступні теми і розділи курсу. Проведення усного опитування можна вважати успішним, якщо воно покращило свідомість сприйняття знань і доцільність їх подальшого застосування, а також якщо воно розвиває самостійність і активність учнів. Якісна оцінка усної перевірки залежить від підбору, послідовності і постановки питань. Кожне з питань повинно бути конкретизованим і логічно завершеним, а також точним, лаконічним і максимально стислим.

Методи усного опитування застосовуються на різних етапах заняття. Застосування тих чи інших прийомів в основному залежить від мети і логічного завдання уроку. Усна перевірка може проходити в формі спілкування по запитаннях, які будуються з основних понять, що лежать в основі кожної теми.

В якості доповнення опитування біля дошки часто вчителі застосовують так званий “усний рахунок”. Але його недоліком є те, що в ньому беруть участь не всі учні.

Альтернативним варіантом “усного рахунку” може виступити математичний диктант. Вчитель або самотужки або з допомогою звукозапису ставить питання, а учні один за одним занотовують відповіді.

Проведення диктанту вимагає від учителя значних зусиль: необхідно у відповідному темпі зачитувати завдання, стежити за учнями та миттєво реагувати на збої в його проведенні. Темп диктанту має бути схожим на той, яким ведучі радіо чи теленовин подають щодня останні вісті, паузи визначаються за середнім темпом класу. Обирається середньостатистичний учень і зачитування наступного завдання відбувається тоді, коли він дав відповідь на попереднє. Часто величина паузи рівноцінна повторному зачитуванню завдання. Варто не забувати, що метою математичного диктанту є не виявлення рівня кмітливості, а саме глибина їх знань. Якщо під час відповіді на питання учень надовго задумується, це означає, що відповіді він не знає, а, отже, продовження паузи не буде доцільним. Не останнім аспектом є правильна організація перевірки диктантів. Не буде ефективним перевірка і оголошення результатів на наступний день чи пізніше, так як кожен учень прагне відразу дізнатися результат, що підвищує його інтерес до такого методу перевірки. Враховуючи це, рекомендується проводити перевірку відразу після завершення диктанту. Враховуючи специфіку математичних диктантів (темп, сприйняття на слух та стислі відповіді), їхні педагогічні можливості обмежені. Вони допомагають поверхнево оцінити рівень засвоєння матеріалу і не дають побачити рівень поглиблених знань. Тому не зовсім правильно порівнювати диктанти з іншими видами контролю.

Письмове опитування. Одним з основних традиційних методів перевірки на уроках математики є письмове опитування. Зачасту ми його знаємо як самостійна або контрольна робота. Цей метод полягає в тому, що після проходження певних тем чи розділів програми педагог проводить практичні чи письмові роботи з метою перевірки рівня їх засвоєння. За їх результатами вчителем виставляються оцінки в класний журнал. Застосування даного методу дає змогу вчителю поставити одне і теж питання більшій кількості учнів або усім учням, що дає можливість перевірити рівень засвоєння знань усього класу. Письмові роботи дозволяють учителю порівняти знання і вміння учнів та робити висновки про якість знань, рівень їх розвитку та займають значно менше часу. Проте, вони мають і свої недоліки: не завжди можна бути впевненим в тому, що учні правильно розуміють завдання письмової роботи і, відповідно, вчасно надати для них відповідну допомогу. При тому треба ще й враховувати помилки, які допускаються учнями в кожній роботі. Ведення обліку основних пробілів у знаннях і вміннях учнів дає змогу здійснювати спеціальну індивідуальну роботу для усунення помилок і подальшого покращення успішності.

З метою попередження списування та розмов між учнями під час проведення письмової перевірки застосовують завдання за варіантами або навіть індивідуальні завдання для кожного учня.

При написанні контрольної роботи за чверть, півріччя чи рік учень вже не обмежується знаннями в рамках однієї теми, яка вивчалася б на попередніх уроках, а повинен вирішувати різноманітні завдання, що охоплюють більш ширше коло навчальних питань. Тут вже виявляється така якість засвоєння як усвідомленість.

Під час написання підсумкових письмових завдань проявляється і така якість, як оперативність, що показує вміння учня застосовувати одні і ті ж навики під час виконання завдань різного типу і ступеня складності.

Тестування – нестандартний метод, що базується на сукупності завдань і питань, що реалізовуються в стандартних умовах та дозволяє виявити типи поведінки та рівень володіння будь-якими видами діяльності.

Тест, як в психологічному, так і в педагогічному розумінні, означає перевірку, випробування, а не просто виявлення факту наявності чи відсутності певної властивості, його не варто порівнювати з екзаменаційними питаннями, анкетами чи головоломками. Він заснований на підготовленому наборі завдань, що дають змогу якісно оцінити якості певної властивості на базі використання методів статистики. З допомогою тестів виявляється лише результат, а не хід виконання завдань і дає змогу для простого вгадування учнями відповіді.

Для оптимальної перевірки знань не варто обмежуватися одним видом контролю, а варто застосовувати комбіноване поєднання різних методів. Найбільш частого застосування в математичній практиці набули наступні тести:

- встановлення істинності чи хибності твердження;
- вибір однієї вірної відповіді з запропонованих;
- заповнення пробілів в реченні;
- перехресний вибір на встановлення відповідності між заданими елементами множин;
- встановлення правильної послідовності елементів заданої множини.

Для підвищення надійності отримуваних результатів при організації контролю варто застосовувати різноманітні їх комбінації. Проте, враховуючи усю проблематику, варто застосовувати саме ті тести, з якими учні справляються краще. Часто у вчителів виникають певні проблеми в оцінюванні результатів тестування. Формування шкали оцінки результатів тестів здійснюється зазвичай тільки з урахуванням правильного виконання завдання.

Важливим у процесі навчання виступає контроль, який має відбуватися протягом всього навчального року. В успішній організації навчального процесу перевіряються декілька фактів, насамперед якість засвоєння необхідного матеріалу, набуття учнем соціального досвіду, навичок взаємодії та індивідуальний розвиток учнів.

Підсумовуючи, можна сказати, що методичний контроль та його раціональне застосування дають можливість вчителям отримати об'єктивний матеріал, детальний аналіз якого дає повне уявлення сильних та слабких сторін їхньої діяльності, вчасно виявити недоліки та провести необхідні заходи для їх усунення та якісного підвищення ефективності навчання.

3.2. Забезпечення навчального матеріалу сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями

Враховуючи сучасну санітарно-епідеміологічну ситуацію у світі чи не єдиним виходом для здобуття знань учнями є дистанційне навчання. Дана форма навчання стала актуальною для всіх вчителів.

Дистанційне навчання — сукупність сучасних технологій, що забезпечують доставку інформації в інтерактивному режимі за допомогою використання інформаційно-комунікаційних технологій від тих, хто навчає, до тих, хто навчається.

Для того, щоб організувати взаємозв`язок між вчителем та учнем дистанційно, спочатку потрібно провести опитування для вибору засобів проведення роботи. Проаналізувавши відповіді вчитель обирає варіант, котрий найбільш зручний у використанні та найзрозуміліший учням, також враховується доступність програмних засобів.

При необхідній реєстрації учнів на веб-ресурсі, варто звернути увагу інформаційну безпеку та мінімізувати кількість платформ, на яких буде відбуватися навчання. Максимально зменшити кількість особистих даних у роботі.

Основними формами дистанційного навчння є:

1. **Відеоконференція** — це спілування в режимі онлайн, що проводиться в попередньо зазаначений день та час. Вчитель має змогу використовувати наочність для кращого пояснення матеріалу, а також, при потребі, усно опитувати, що дає змогу об`єктивно оцінювати учнів.

2. **Форум -** форма спілкування вчителя й учнів, яка найширше використовується у дистанційному навчанні. Кожний форум присвячений певній проблемі або темі. Педагог стимулює учнів до діалогу задаючи їм запитання, поданням інформації або повідомленнями. Програмне забезпечення форумуу дозволяє вчителю використовати підготовлені матеріали, що містяться в файлах, будь-яого розміру. Також можна ділити учнів для групової роботи, а потім об`єднувати для ообговорення результатів.

3. **Чат** — спілкування відбувається тут і зараз через інтернет. Чати поділяють на текстовий, голосовий, аудіо- та відеочат. Для вивчення навчального матерілу з математики найкраще піідходить відеочат, він дає змогу пояснити та проконтролювати запис найважливішої інформації учнями.

4. **Блог** — це форма спілкування, яка блязька до форум, де право на публікацію належить одній особі чи групі людей. Автор розміщує на сайті свого мережевого щоденника допис і надає можливість іншим учням прочитати й прокоментувати розміщений матеріал. В учнів з’являється можливість обговорити й оцінити якість публікації. Блог зручний для розміщення теоретичної інформації та публікування завдань, які учень виконує самостійно.

5. **Електронна пошта** — це стандартний сервіс інтернету, що забезпечує передавання повідомлень. Даний сервіс використовується для індивідуального спілкування вчителя та учня.

6. **Анкетування** — для поточного контролю в ході дистанційного навчання зручно використовувати різноманітні анкети. Анкета є достатньо гнучким інструментом, оскільки питання можна ставити безліччю різних способів. У дистанційному навчанні після засвоєння кожної теми можна використовувати анкети, в яких учень може зробити самооцінку результатів навчання, це допоможе вчителю зорієнтуватися в рівні розуміння викладеного матеріалу.

Для проведення уроків онлайн сучасний вчитель має чимало можливостей, щоб реалізувати передачу інформації для учнів. Це дає змогу якісно навчати майбутнє покоління, передати знання та проконтролювати їх засвоєння не виходячи з дому.

Інформаційно-комунікаційні технології – це тенденція сучасного освітнього процесу. Ґаджети присутні у всіх сферах нашого життя, тому не дивно, що їх застосування поширилося і в освіті.

Комп`ютерні технології стали невід`ємною частиною освітнього процесу. Вони дають педагогу можливість краще пояснювати навчальний матеріал та пробуджують інтерес до навчання в учнів.

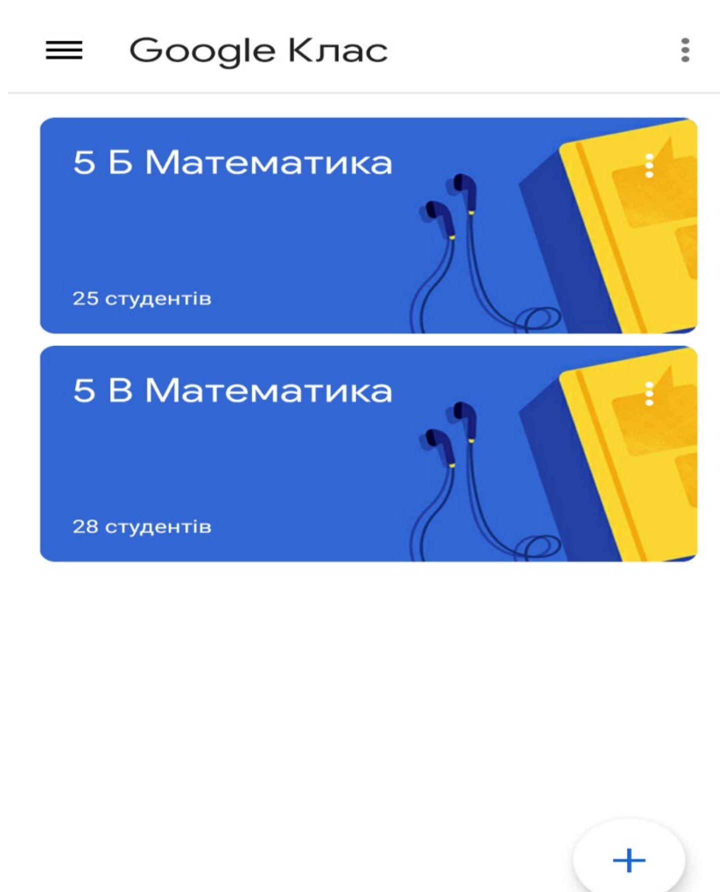
В мережі Internet поширено багато веб-ресурсів, що допомагають вчителю якісно здійснювати навчання за дистанційною формою. До них відносяться:

1. **Платформа Moodle** (https://moodle.org/) — безкоштовна відкрита система, що дає змогу вчителю використовувати широкий набір інструментів для навчання. Інформацію можна подавати у різних формах, здійснювати опитування школярів різними типами тестувань. До інструментарію Moodle входять:

- дискусійні форуми;
- завантаження файлів;
- журнал оцінювання;
- обмін повідомленнями;
- календар подій;
- новини та анонси;
- онлайн-тестування;
- Вікі-ресурси.

За допомогою платформи Moodle учні можуть мати доступ до навчальних матеріалів та завдань цілодобово, особисто спілкуватися з вчителем, бачити свої успіхи та завантажувати файли з прикладами завдань. Також на даній платформі присутня функція нагадування про терміни виконання роботи, що допомагає школярам не забути про жодне завдання.

2. Платформа Google Classroom (https://classroom.google.com) — це сервіс, що пов’язує Google Docs, Google Drive і Gmail, дозволяє організувати онлайн-навчання, використовуючи відео-, текстову та графічну інформацію. За допомогою даної платформи педагог може використовувати будь-які форми оцінювання учнів, давати коментарі

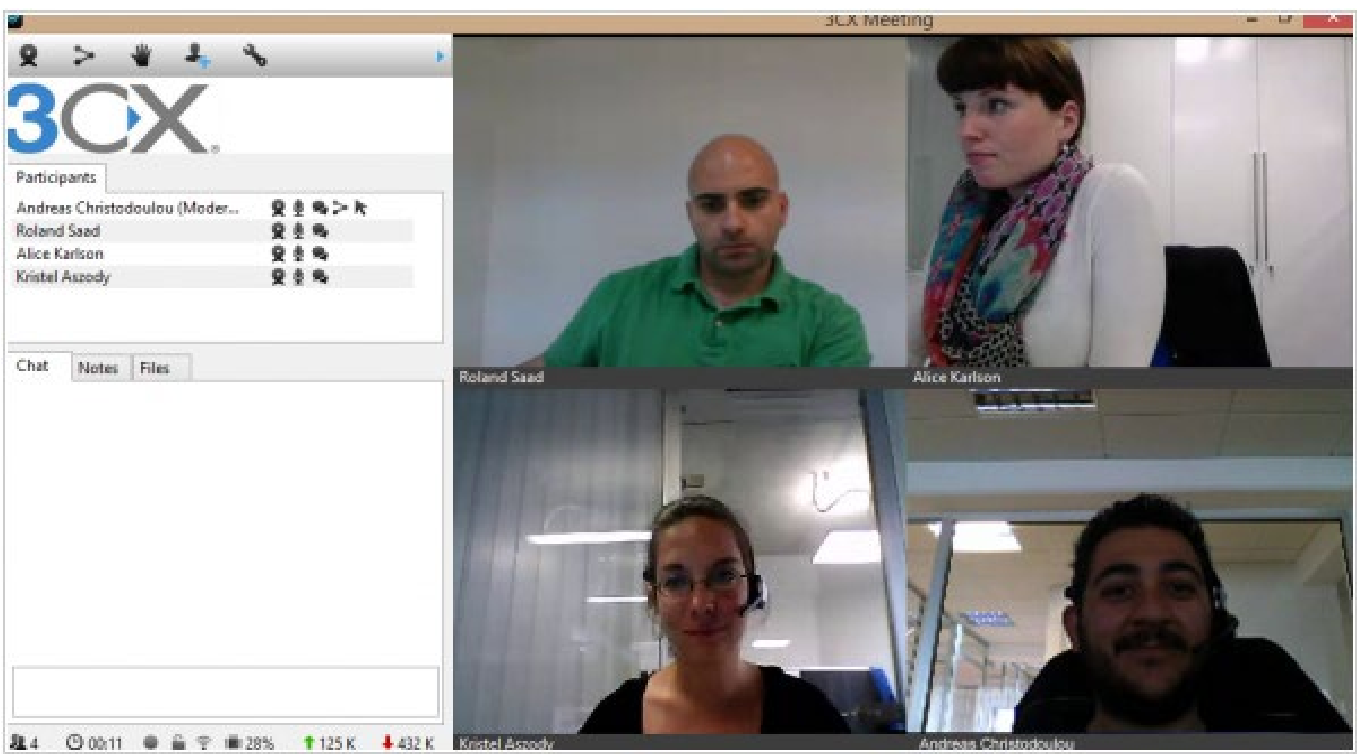


виконаним завданням, спілкуватися зі школярами в реальному часі.

Платформа Google Classroom дозволяє вчителю працювати з кожним класом окремо. Для реєстрації в цьому веб-ресурсі учень повинен мати свою власну електронну пошту, а також, за наданим вчителем кодом, приєднатися до свого класу. Також платформа дозволяє за допомогою Google-форм збирати відповіді учнів і потім проводити автоматичне оцінювання результатів тестування.

3. Zoom (zoom.us/download) — сервіс для проведення відеоконференцій та онлайн-зустрічей. Це безкоштовна програма, яка дає змогу проводити уроки онлайн.

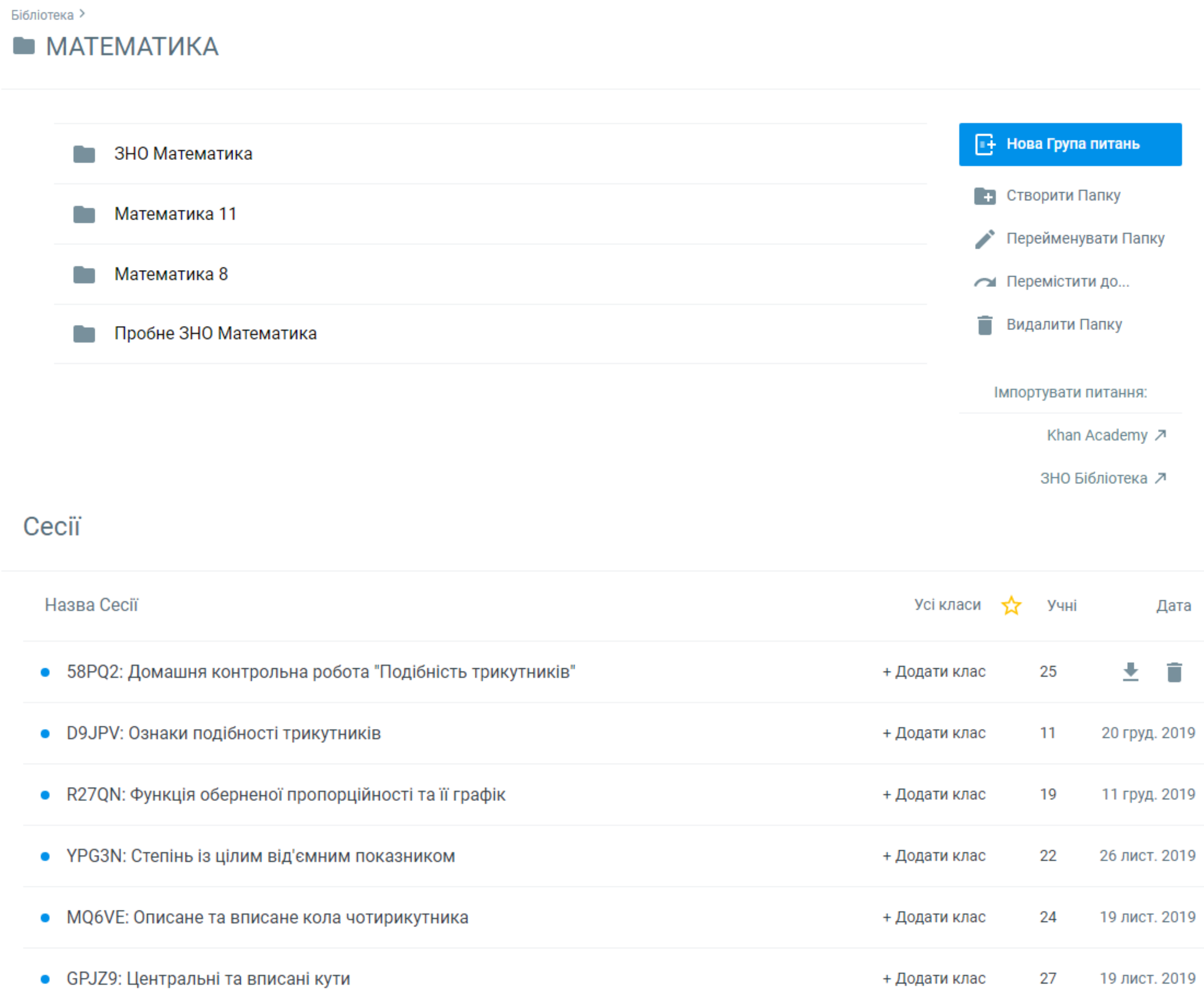
Щоб працювати в Zoom необхідно створити обліковий запис. За допомогою посилання можна підключитися до відеоконференції та приймати в ній активну участь. Цей веб-сервіс зручно використовувати для визначених заздалегідь занять. Платформа містить інтерактивну дошку, яка є зручною та зрозумілою у використанні та дозволяє демонструвати підготовлений заздалегідь матеріал з теми, яка вивчається. Завантажити програму можна на офіційному сайті Zoom.



4. Classtime (https://www.classtime.com/uk/) — платформа для створення інтерактивних навчальних завдань, яку зручно використовувати не лише дистанційно, а й для роботи на уроках офлайн.

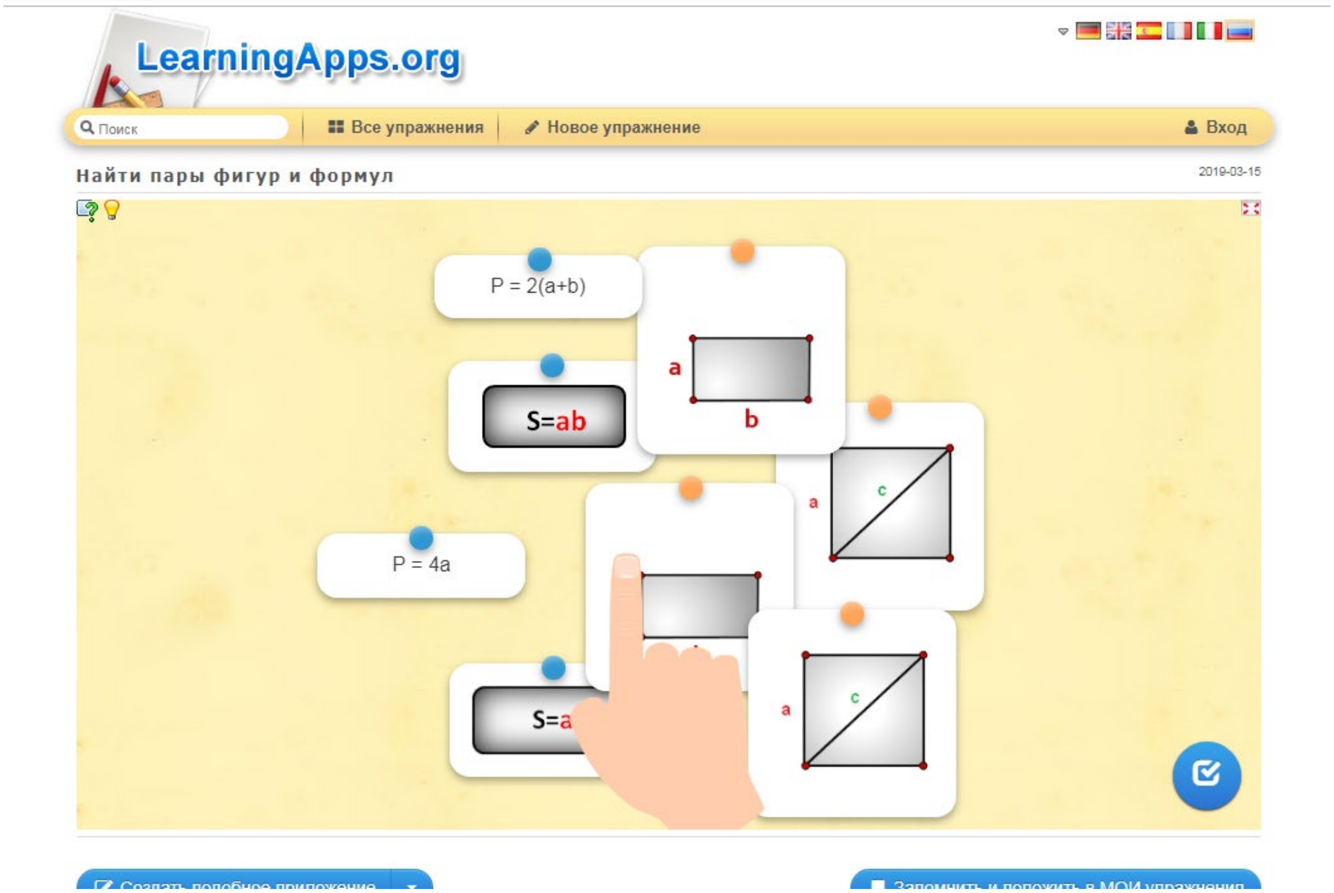
Для початку роботи учні за кодом приєднуються до даного веб-сервісу та починають працювати. Classtime містить широкий вибір типів завдань, присутня електронна бібліотека, а також дозволяє зберігати результати учнів у хмарному сервісі, що спрощує перенесення оцінок.

Дана платформа значною мірою допомагає вчителю в його роботі, адже відсутня паперова взаємодія, а це значною мірою економить час. Педагог не перевіряє письмові роботи школярів, а розробляє нові цікаві завдання. Також в Classtime можна задавати домашні завдання та підготовку до контрольних чи самостійних робіт.



5. LearningApps.org (LearningApps.org) — онлайн-сервіс, який дозволяє створювати інтерактивні вправи, що допомагають краще засвоїти вивчений матеріал. Дає змогу створювати цікаві завдання для учнів з різних тем, має спеціальний конструктор, який полегшує створення різних вправ.

LearningApps.org зручно поєднувати з відеоуроками або ж відеоконференціями. Вчитель створює завдання, даючи посилання, після чого учні повинні інтерактивно попрацювати з об`єктами, які розміщені на екрані. Цей онлайн-сервіс краще використовувати для перевірки теоретичних, а не практичних знань.



Отже, інформаційно-комунікаційні ресурси є необхідними для здійснення навчання учнів в умовах дистанційного навчання. Кожен вчитель має змогу проаналізувати та зробити вибір на користь тієї чи іншої платформи, яка допоможе йому якісно донести знання учням.

3.3. Підготовка та створення відеоуроків з теми «Многогранники»

На сьогоднішній день вчителі активно можуть застосовувати різноманітні психолого-педагогічні та інформаційно-комунікаційні технології, які допоможуть учням швидше осягнути основний обсяг навчального матеріалу, а також нададуть змогу для самостійного вивчення та інтерактивної взаємодії між учнем та вчителем.

Для реалізації таких технологій використовують такі ресурси: власні сайти, платформи «Мій клас», «Google Classroom», «Zoom», «Youtube», електронне листування тощо.

Проте, пріоритетним методом навчання залишається словесний метод викладу навчального матеріалу. Прослуховування аудіотексту розвиває в учнів стійкість уваги, слухову пам'ять, навички спостереження та, саме головне, володіння та спілкування державною мовою, грамотне висловлювання при застосуванні математичної термінології.

Таким чином при дистанційному навчанні вчителю варто розширювати методи зорових і зорово-слухових елементів подання інформації.

Це може реалізовуватися сервісом «Zoom», з допомогою якого можна провести онлайн заняття. Таке заняття відбувається у визначений вчителем час, але через певні об'єктивні чи суб'єктивні причини не забезпечить 100-відсоткову явку учнів. Можливим варіантом виходу з такої ситуації є надання доступу для його перегляду після завершення, щоб ним могли скористатися учні, які були відсутні. Проте, відповідно до вимог чинного законодавства, для цього обов'язково потрібна згода батьків учнів, щоб не порушити право кожного з них на захист власного зображення. В таких випадках доцільніше використовувати не онлайн заняття, а створення власних відеоуроків.

ВІДЕОУРОК – форма дистанційного навчання, з допомогою якої можна змінити звичну форму викладу матеріалу шляхом заміни пояснення його біля дошки на запис на відеокамеру необхідних дій і роз'яснень чи виконання дій на комп'ютері з голосовим поясненням.

Час такого запису залежить від рівня володіння комп'ютером, так як окрім підготовки медіа файлів їх необхідно правильно змонтувати та викласти на загальнодоступний ресурс (наприклад Youtube). Відеоурок підходить для вивчення нового матеріалу, вдосконалення вивченого чи узагальнення та систематизації пройденого на попередніх уроках.

Відеоуроки мають ряд переваг для учнів:

- перегляд в будь-який зручний час;
- можливість повторного перегляду уроку чи його частини;
- розплановування часу навчання;
- можливість задання питань після його перегляду та отримання відповідей;
- покращення ефективності засвоєння матеріалу.

Створення уроку відбувається в 2 етапи:

- підготовка матеріалів та сценарію уроку;
- технічна реалізація (безпосередньо запис та монтування).

На першому етапі необхідно:

1. Задати для себе питання:
    - чого хочеться досягнути?
    - що для цього треба зробити?
    - як досягти поставленої мети?
2. Визначити:
    - тему, мету уроку та очікуваний результат;
    - зміст нового матеріалу;
    - задачі і вправи, які будуть розглянуті в ході вивчення і пояснення нового матеріалу.
3. Продумати:
    - як актуалізувати опорні знання учнів;
    - цікаву і доступну подачу матеріалу (наприклад, додавання певного роду несподіванки);

- послідовність викладу нового матеріалу, приклади вправ і задач для його засвоєння;
- як будуть з’являтися об’єкти, які на даному етапі є предметом обговорення;
- виділення цих об’єктів (обведення, підкреслення тощо).

4. Врахувати:

Психофізіологію уваги:

- Зосередженість – утримання уваги на одному об’єкті;
- Стійкість, яка навіть при активній роботі з об’єктом може зберігатися 15-20 хв.;
- Обсяг – кількість об’єктів, що сприймаються одночасно з однаковою ясністю (норма - 7±2);
- Розподіл уваги – одночасна увага на декількох об’єктах і повне їх сприйняття. В учнів вона не сильно, зазвичай, розвинута, тому варто застосовувати принцип «фон і фігура», при якому застосовують виділення об’єкта, який вивчається, порівняно з рештою зображеного на екрані, щоб зосередити увагу на необхідному;
- Переключення уваги – переміщення уваги з одного об’єкта на інший.

5. Скласти сценарій відеоуроку.

Реалізація другого етапу від вчителя вимагає:

1. Задати для себе питання:

- де буде вестися відео зйомка уроку (навчальний клас, у школі біля дошки, вдома за робочим місцем, комп’ютером, ноутбуком, планшетом тощо);
- відповідно підготувати місце для зйомки уроку (дошка, крейда, креслярське знаряддя, проєктор, комп’ютер, ноутбук і ін.);

2. Визначити:

•пристрої запису відео та аудіо (відеокамера та мікрофон, що вбудовані в засоби зйомки чи приєднані додатково до комп'ютера чи ноутбука тощо);

•при потребі – програмне забезпечення для створення відеоуроку, електронна онлайн-дошка (для прикладу безкоштовна програма IDroo) чи засіб для створення презентацій з анімацією (Power Point);

•програмне забезпечення для запису відео (для запису чи захвату відео з екрана монітора);

•програмне забезпечення для монтування відео (безкоштовні програми або, за потреби, платні більш вдосконалені ресурси).

3. Продумати:

•методи зйомки відео: фрагментами чи повністю;

•яким чином буде відображено об'єкти для викладу матеріалу;

•як реалізувати завершення уроку.

4. Врахувати:

•тривалість відеоуроку (не більше ніж 15 чи 20 хвилин);

•ступінь навантаження заняття як основного джерела інформації. Якщо складність тематики вимагає більш детального і розширеного розгляду, варто розбити подання інформації на декілька частин чи уроків.

5. Перевірити чи у відео не потрапило нічого зайвого, що могло б завадити оптимальному викладу матеріалу. Щоб все зняте допомагало якомога ефективно донести заплановану тематику.

6. Переконатися у оптимальному співвідношенні фону та подій, які відбуваються на другому плані, із відображенням важливих елементів першого плану, застосовуючи різні композиційні прийоми, які допоможуть втримати увагу учня на важливих об'єктах.

Якщо створення уроку відбувається в домашніх умовах без змоги долучити усі необхідні допоміжні матеріали, можна створити відеоурок, використавши скринкаст [18].

Скринкаст – це запис інформації, яка відображена на екрані монітора (відеозахват), тобто відео того, що відбувається на екрані комп’ютера чи ноутбука з можливістю додавання звукового супроводу та необхідних коментарів викладача.

Такий метод є значно практичнішим, аніж звичайний текстовий опис, підручник чи інструкція, тому що учні відразу бачать, що і як варто виконувати.

Такого типу урок можна створити, маючи всього лиш комп’ютер з зовнішнім мікрофоном чи ноутбук з вмонтованим засобом для запису аудіо, а також мінімальний набір програмного забезпечення для зйомки і обробки (в основному безкоштовного і вільного доступу).

Для прикладу, з допомогою програми Microsoft Office PowerPoint, можна створити презентацію з анімацією (поява чи виділення об`єктів реалізовується за визначеним алгоритмом чи за командами з клавіатури чи відносно запланованого голосового коментаря).

Таким чином можна зробити висновок, що підготовка відеоуроків з будь-якої тематики завжди вимагає індивідуального підходу. Варто враховувати як ступінь підготовленості навчальної аудиторії до сприйняття матеріалу, так і методи та засоби реалізації його представлення. Для вчителя необхідно знайти «золоту середину» в розумінні учнями необхідного матеріалу та можливостями максимально доступної технічної реалізації виконавцем.

Висновки

Вивчення многогранників використовується не тільки в навчанні, але й в повсякденному житті. Многогранники можна спостерігати у будівельній справі, архітектурі, машинобудуванні і у багатьох інших галузях науки й техніки.

Тема «Многогранники» може вивчатися не лише у класно-урочній системі, а й дистанційно. Ця форма навчання є найбільш гнучкою та доступною для багатьох учнів. Можливість навчатися у будь-який час, в будь-якому місці, у своємі темпі та спокійній обстановці.

Згідно із поставленою метою і завданнями було систематизовано теоретичний матеріал по темі «Многогранники», розглянуто методику вивчення даної теми в шкільному курсі математики, розроблено дидактичне забезпечення, яке сприяє підвищенню розуміння геометрії, розвитку просторового мислення, формуванню в учнів вмінь розв'язувати задачі на многогранники.

Дана магістерська робота містить три розділи, а саме:

1. Науково-теоретичні основи теми дослідження.

2. Методика вивчення теми «Многогранники» в умовах сучасної школи.

3. Дидактичне забезпечення при вивченні многогранників за дистанційною формою навчання.

В першому розділі наводяться історичні відомості про походження многогранників, їх значення у стародавні часи, а також місце у сучасному житті та науці. Також було показано місце даної теми в шкільному курсі математики, тобто в навчальній програмі загальноосвітньої школи. Проаналізовано підручники з геометрії для 11 класу академічного рівня та виявлено, що найбільш адаптованим підручником для загальноосвітніх шкіл є підручник Бевза Г.П. [4].

Другий розділ даної роботи містить весь теоретичний матеріал, який передбачено діючою програмою Міністерства освіти і науки України для навчання у загальноосвітній школі в класах академічного рівня. Розглядаються особливості сучасної методики вивчення теми «Многогранники», різні підходи та методи вивчення перерізів многогранників та наведено приклади завдань на многогранники із ЗНО минулих років.

Третій розділ магістерської роботи містить дидактичне забезпечення при вивченні мгогогранників за дистанційною формою. Описуються інформаційно-комунікаційні ресурси, які є необхідними при вивченні теми дослідження.

Дана робота посилається на розроблені додатки, які ширше розкривають поставлені завдання.

На вивчення теми «Многогранники» у школі відводиться досить мало часу. Матеріал є складний і вимагає великої зосередженості та практичних навиків. Враховуючи той факт, що завдання на многогранники є у варіантах завдань ЗНО, то безперечно варто приділити більше часу на вивчення даної теми.

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, обґрунтовування тверджень, моделювання ситуацій та ін. Учитель постійно має пам’ятати, що у нього одне єдине завдання – навчати, розвивати та виховувати учня.

Список використаної літератури

1. Александра О.М. Повний курс підготовки до ЗНО з математики: Навч. посібник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2019. 232 с.

2. Апостолова Г. В. Геометрія. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академічний рівень, профільний рівень. Київ: Генеза, 2011. 304 с.

3. Бевз Г.П. , Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. Геометрія. 11 клас: академічний рівень, профільний. Київ: Генеза, 2011. 336с.

4. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.С, Сердюк З.О. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень. Київ: Зодіак-ЕКО, 2011. 180 с.

5. Гириловська І.В. Формування в учнів умінь будувати перерізи многогранників. *Рідна школа*. 2003. №2. С. 50-52.

6. Губин А.В. Задачи на сравнение объемов многогранников. *Математика в школе.* 2006. №5. С. 55-63.

7. Домарев В.В. Защита информации и безопасность компьютерных систем. Київ: DiaSoft, 2000. 480 с. Библиогр.: с. 451-453.

8. Економіка та інформаційні технології: зб. наук. праць каф. економ. кібернетики. Вип. 3 / М-во освіти і науки України, Рівнен. держ. гуманіт. ун-т; [редкол.: Н. Г. Калічава, Л.В. Гладун, О.В. Крайчук та ін.]. Рівне: [РДГУ], 2005. 120с.

9. Еляков А. Д. Современные информационные технологии в процесе защиты страны. *Научно-техническая информация*. 2011. № 2. С. 1-13.

10. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 2000. 256с.

11. Збірка тестових зошитів та відповідей ЗНО 2006-2018 р. Київ: Український ЦОЯО, 2018 р.

12. Коваль В.В., Крайчук О.В., Клекоць Г.Я. Загальна методика викладання математики. Рівне: РДГУ, 2005. 165с.

13. Ковальчук М. Б. Узагальнююче повторення на рівні системи понять теми "Многогранники". *Математика в школі*. 2004. №5. С.12-14.

14. Концепція профільного навчання в старшій школі. *Освіта України*. 2009. № 854. С. 8-9.

15. Корнейчук І. В. Аналогія у вивченні властивостей многогранників. *Математика в школі*. 2009. №11. С. 29-33.

16. Лосєва Н. М., Луковська К.П. Виховання прагнення учнів до саморозвитку під час вивчення теми "Правильні многогранники". *Математика в школі*. 2009. №6. С.25-29.

17. Методика навчання геометрії: Навч. посібник для вузів / під ред. В.А. Гусєва. Москва: Академія, 2004 р.

18. Методика підготовки та створення відеоуроків із математики / С.Ю. Панченко. *Математика в школах України*. 2020. №13-15 (637-639). С. 37-43.

19. Навчальна програма для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. URL: https://mon.gov.ua

20. Пасько В. П., Прокопенко Н.С. Програма курсу за вибором "Основи комп'ютерної безпеки" для основної школи. *Комп'ютер у школі та сім'ї.* 2008. №8. С.15-18.

21. Роганін О.М. Аксіоми стереометрії. Різнорівневі завдання. 10-й клас. *Математика.* 2003. № 33. С. 11-16.

22. Роганін О.М., Тавшунська Т.П. Тестові завдання. Стереометрія, 10-й клас. *Математика*. 2002. № 34. С. 20-24.

23. Руденко В.О. Правильні многогранники. Кількісні характеристики правильних многогранників: 11-клас. *Математика в школах України*: Науково-методичний журнал. 2006. №28. С.20-25.

24. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак ЕКО, 2000. 512 с.

25. Тадеєв В.О. Геометрія. 11 клас: академічний рівень, профільний рівень. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 305 с.

26. Тарасенкова Н. А., Бурда М.І., Богатирьова І.М., Воловик О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Експрес-контроль з геометрії для 11 класу (академічний рівень): Метод. посібник. К.: Освіта, 2011.

27. Тарасенкова Н. А., Бурда М.І., Богатирьова І.М., Воловик О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Самостійні та контрольні роботи з геометрії для 11 класу (академічний рівень): Метод. посібник. К.: Освіта, 2011.

28. Тимошенко Н.М. Початкові поняття стереометрії. *Математика*. 2003. № 48. С. 6-8.

29. Формування ключових компетентностей на уроках математики / Укладач С.М. Боднар. *Математика в школах України*. 2019. №7-9 (595-597). С. 4-5.

30. Цупенко С.П. Алгебра і початки аналізу. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень: Багаторівневі різнорівневі тренувальні вправи для класних робіт і домашніх завдань. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 272 с.

Додаток 1

Різні доведення теореми Ейлера.

Сучасна теорія многогранників бере свій початок з робіт Леонарда Ейлера (1707-1783) – одного з найвидатніших математиків світу, роботи якого зробили вирішальний вплив на розвиток багатьох розділів математики. Ейлер був не тільки видатним математиком, але й великою творчою особистістю. Їм було написано близько 760 наукових статей для журналів, 40 книг, 15 робіт для різних конкурсів. Вражає працездатність вченого, що росла протягом усього життя. Так, в перші 14 років наукової діяльності Ейлером було написано 80 робіт обсягом близько 4000 друкованих аркушів, а в останні 14 років життя, незважаючи на важку хворобу – сліпоту, опубліковано понад 359 праць загальним обсягом приблизно 8000 друкованих аркушів. Багато рукописів Ейлера збереглися до наших днів. Ейлер довгий час (з 1727 по 1741 рік і з 1766 до кінця життя) жив і працював у Росії, був дійсним членом Петербурзької академії наук, справив великий вплив на розвиток російської математичної школи, на підготовку кадрів вчених – математиків і педагогів Росії.

Роботи Ейлера дали поштовх до виявлення та вирішення різних проблем, сприяли розвитку багатьох розділів математики. Математики наступних поколінь вчилися у Ейлера. Наприклад, французький вчений П.С. Лаплас говорив: «Читайте Ейлера, він учитель всіх нас».

У 1752 році Ейлером була доведена знаменита теорема про кількість граней, вершин і ребер опуклого многогранника. Вона була поміщена в роботі «Доведення деяких чудових властивостей, яким підпорядковані тіла, обмежені плоскими гранями».

Розглянемо різні доведення цієї теореми. У подальшому даний матеріал можна використовувати як для факультативних і гурткових занять, так і для самостійного вивчення учнями.

Перш ніж розглядати доведення, потрібно звернутись до наступної таблиці (Г – число граней багатогранника, В – вершин, Р – ребер):

Назва багатогранника	**Г**	**У**	**Р**
Тетраедр	4	4	6
Чотирикутна призма	6	8	12
Семикутну піраміда	8	8	14
П'ятикутна біпіраміда	10	7	15
Правильний додекаедр	12	20	30

Тепер знайдемо суму Г+В-Р для кожного з представлених в таблиці многогранників. У всіх випадках вийшло: Г + В-Р = 2. Справедливо це тільки для вибраних многогранників? Виявляється це співвідношення справедливо для довільного опуклого многогранника. Це властивість вперше було помічено і потім доведено Л. Ейлером.

Теорема Ейлера. Для будь-якого опуклого багатогранника справедливе співвідношення $\Gamma + \text{В} - \text{Р} = 2$, де Г – число граней, В – число вершин і Р – число ребер даного многогранника.

Доведення. Існує безліч різних доказів теореми Ейлера. Пропонується розглянути три найбільш цікавих з них.

1) Найбільш поширений спосіб, що бере свій початок в роботі самого Ейлера і розвинутий у роботі французького математика Огюста Коші (1789 - 1857) «Дослідження про многогранник» (1811р.), полягає в наступному.

Уявімо, що поверхня даного многогранника зроблена з еластичного матеріалу. Видалимо (виріжемо) одну з його граней, отриману поверхню «розтянем» на площину. Тоді на площині виходить сітка (рис. 1), що містить областей (які назвемо гранями), E вершин і F ребер (які можуть викривлятися).

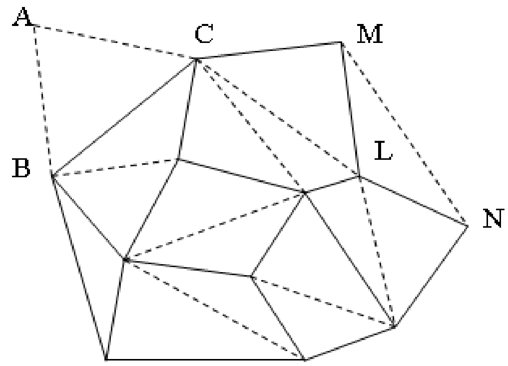


Рис. 1

Для даної сітки потрібно довести співвідношення , тоді для многогранника буде справедливо співвідношення $Г + В - Р = 2$.

Доведемо, що співвідношення не змінюється, якщо в сітці провести яку-небудь діагональ. Дійсно, після проведення деякої діагоналі в сітці буде граней, Е вершин і $Р + 1$ ребро, тобто

$$Г'+ 1 + В \quad -(Р)$$

(.

Користуючись цією властивістю, проведемо в сітці діагоналі, що розбивають її на трикутники (на рис.1 діагоналі зображені пунктирами), і доведемо співвідношення методом математичної індукції по числу n трикутників в сітці.

Нехай $n = 1$, тобто сітка складається з одного трикутника. Тоді , $В = 3$, $Р = 3$ і виконується співвідношення . Нехай тепер співвідношення має місце для сітки, що складається з n трикутників. Приєднаємо до неї ще один трикутник. Його можна приєднати наступними способами:

1. Як ΔABC (рис. 1). Тоді сітка складається з граней, $В + 1$ вершин і $Р + 2$ ребер, отже:

$$(Г' + 1) + (В + 1) - (Р + 2) = Г' + В - Р \,;$$

2. Як ΔMNL. Тоді сітка складається з граней, E вершин і $P+1$ ребер, отже:

$$Г(\square' + 1) + В - (Р + 1) = Г' + В - Р.$$

Таким чином, в обох випадках, тобто при будь-якому приєднанні $(n+1)$-го трикутника, вираз не змінюється, і якщо воно дорівнювало 1 для сітки з n трикутників, то воно дорівнює 1 і для сітки з (n +1) трикутника. Отже, співвідношення має місце для будь-якої сітки з трикутників, значить, для будь-якої сітки взагалі. Отже, для даного многогранника справедливе співвідношення $Г + В - Р = 2$. Таке доведення запропоноване в літературі [33].

2) Спосіб доведення теореми Ейлера, пов'язаний з сумою плоских кутів опуклого многогранника. Позначимо її Σa. Нагадаємо, що плоским кутом многогранника є внутрішні плоскі кути його граней.

Наприклад, знайдемо Σa для таких многогранників:

а) тетраедр має 4 грані – всі трикутники. Таким чином, Σa ;

б) куб має 6 граней – всі квадрати. Таким чином, $\Sigma a = 6 \cdot \pi = 12\pi$;

в) візьмемо тепер довільну п'ятикутну призму. У неї дві грані – п'ятикутники і п'ять граней – паралелограми. Сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює 3π. Нагадаємо, що сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $\pi(n-2)$. Сума кутів паралелограма дорівнює . Таким чином,

$$S_1 = 2 \cdot 3\pi + 5 \cdot 2\pi = 16\pi.$$

Отже, для знаходження Σa спочатку вираховували суму кутків, що належать кожній грані. Скористаємося цим прийомом і в загальному випадку. Введемо наступні позначення: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_r$ – число сторін 1, 2, 3 і так далі до останньої грані многогранника. Тоді

$$\Sigma a = \pi(S_1 - 2) + \pi(S_2 - 2) + \ldots + \pi(S_r - 2) =$$

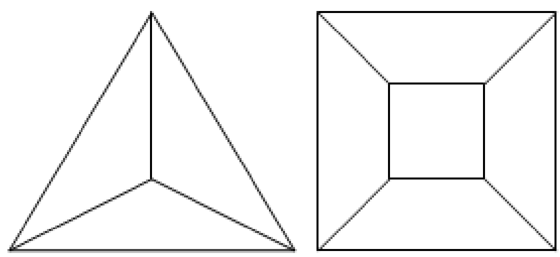
Далі знайдемо загальне число сторін всіх граней многогранника. Воно дорівнює $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_Г$. Так як кожне ребро многогранника належить двом граням, маємо:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_Г = 2 \cdot \mathrm{P}$$

Нагадаємо, що через Р ми позначили кількість ребер даного многогранника. Таким чином отримуємо:

$$\Sigma a = 2\pi\left(\mathrm{P} - \Gamma\right). \qquad (1)$$

Порахуємо тепер Σa іншим способом. Для цього будемо міняти форму многогранника таким чином, щоб у нього не змінювалося число Г, Е і F. При цьому може змінитися кожний плоский кут окремо, але число Σa залишиться тим самим. Виберемо таке перетворення многогранника: приймемо одну з його граней за основу, розташуємо його горизонтально і «ростянем» для того, щоб на нього можна було спроектувати інші грані многогранника. Наприклад, на рис. 2-а показано, до чого ми прийдемо в разі тетраедра, а на рис. 2-б – у разі куба.



а) б)

Рис. 2

На рис. 3 показано многогранник довільного типу.

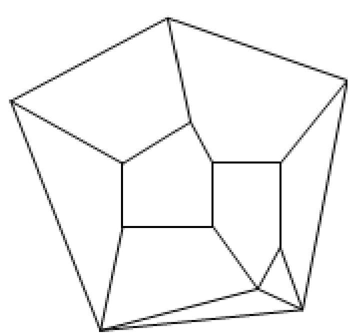


Рис. 3

Зауважимо, що спроектований многогранник представляє собою злиття двох, накладених один на одного, многокутних пластин із загальним контуром, з яких верхня розбита на $(\Gamma - 1)$ многокутник, а нижня на грані не ділиться. Позначимо число сторін зовнішнього многокутника через r . Тепер знайдемо Σa спроектованого многокутника. Σa складається з наступних трьох сум:

1) Сума кутів нижньої межі, у якої r сторін, дорівнює $\pi (r-2)$.

2) Сума кутів верхньої пластини, вершинами яких є вершини нижньої межі, теж дорівнює $\pi (r-2)$.

3) Сума «внутрішніх» кутів верхньої пластини дорівнює , так як верхня пластина має $(\text{В} - r)$ внутрішніх вершин і всі кути групуються біля них. Отже,

$$\Sigma a = \pi \left(r-2\right) + \pi \left(r-2\right) + 2\pi \left(\text{В} - r\right) = 2\pi\text{В} - 4\pi. \qquad (2)$$

Таким чином, порівнюючи вирази (1) і (2), отримуємо: $\Gamma + \text{В} - \text{Р} = 2$, що й потрібно було довести.

Цей спосіб доведення теореми Ейлера розглянуто в книзі [35].

3) Метод, запропонований математиком Л.М. Бескін [7]. Тут, як і у першому випадку, вирізаємо одну грань многогранника і отриману поверхню розтягуємо на площину. При цьому на площині виходить деяка плоска фігура, наприклад, зображена на рис.4.

Уявімо собі, що ця плоска фігура зображує собою острів, який з усіх боків оточений морем і складається з окремих полів – граней, відокремлених один від одного і від води греблями – ребрами.

Почнемо поступово знімати греблі, щоб вода потрапила на поля. Причому греблю можна зняти тільки в тому випадку, якщо вона межує з водою лише з одного боку. Знімаючи чергову греблю, ми зрошуємо рівно одне поле. Покажемо тепер, що число всіх гребель (тобто Р – число ребер взятого многогранника) дорівнює сумі чисел знятих і залишених гребель.

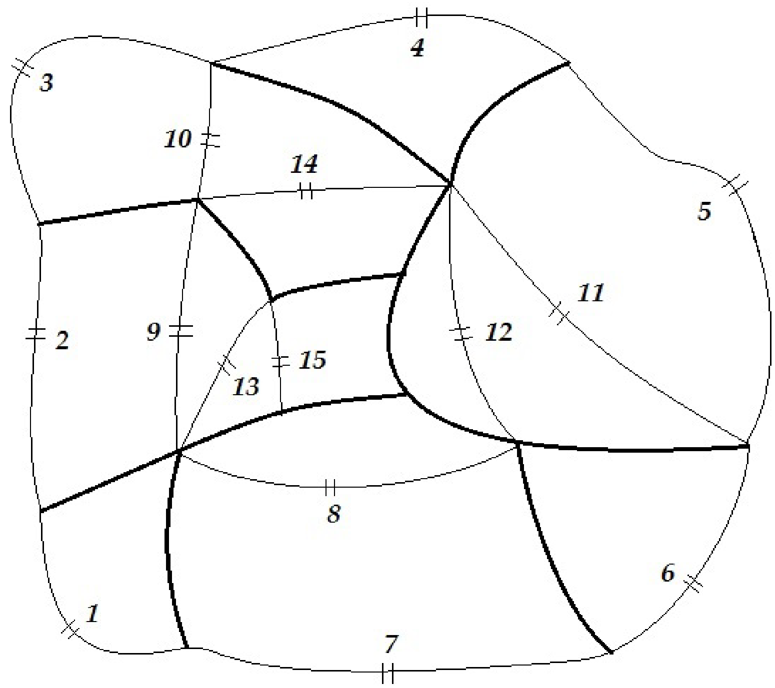


Рис. 4

Отже, число знятих гребель $(\Gamma - 1)$. Дійсно, знімаючи греблі, які омиває вода тільки з одного боку, ми окропили всі поля (тобто межі, число яких дорівнює $(\Gamma - 1)$, так як одна грань була спочатку вирізана). На рис. 4 номери 1, 2, 3, ..., 15 показують порядок зняття гребель. Кількість залишкових гребель $(\mathrm{B} - 1)$. Покажемо це, на рис. 5 наша система зображена після зняття всіх можливих гребель.

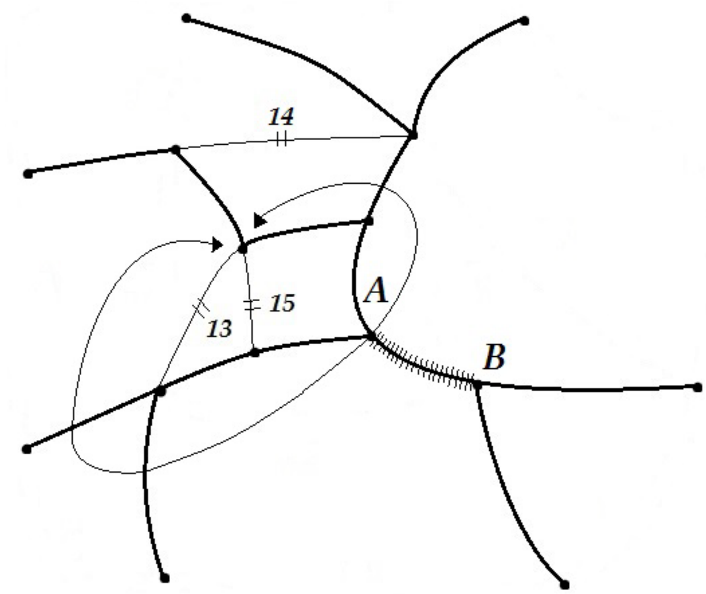


Рис. 5

Більше ні одну греблю зняти не можна, так як вони омиваються з двох сторін. Далі ніякі дві вершини системи, наприклад B і D (рис. 5), не можуть з'єднуватися двома шляхами, тому що в противному випадку вийшов би замкнутий контур (рис. 6), всередині якого не було б води, що суперечить тому, що всі поля окроплені водою. Звідси випливає, що в системі гребель повинен бути глухий кут, тобто вершина, до якої веде одне єдине ребро.

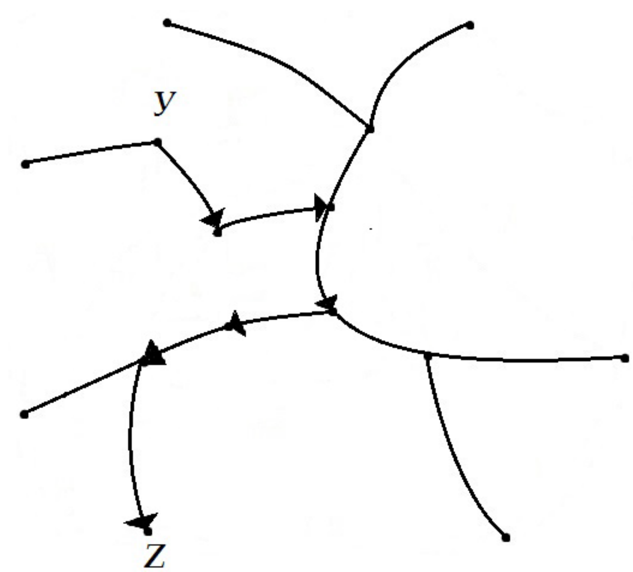


Рис. 6

Виберемо будь-яку вершину, наприклад вершину [illegible] (рис. 6), і підемо по шляху, складеному з гребель, причому не будемо проходити ніяку вершину двічі. Врешті-решт, так як число вершин звичайно, ми прийдемо в глухий кут. Тоді відрізок-тупик, тобто вершину В і прилеглої до неї ребро-греблю, відріжемо. У решти системи знову виберемо яку-небудь вершину, підемо від неї і відріжемо глухий кут. Роблячи так, ми нарешті прийдемо до системи, в якій немає гребель, а є тільки одна вершина, яка залишиться після відрізання останнього глухого кута. Таким чином, число гребель одне $(В - 1)$.

Остаточно отримаємо:

$$Р = (Г - 1) + (В - 1),$$

звідки

$$Г + В - Р = 2.$$

Теорема доведена.

Додаток 2

Приклади зображень комбінацій многогранників

Задача 1. Основою піраміди є квадрат зі стороною a. Висота піраміди ділить навпіл сторону основи (рис.1). Грань піраміди, протилежна цій стороні, утворює з основою двогранний кут α. В піраміду вписаний куб так, що чотири його вершини лежать на бічних ребрах піраміди, а чотири інші вершини належать основі піраміди. Знайти об'єм куба.

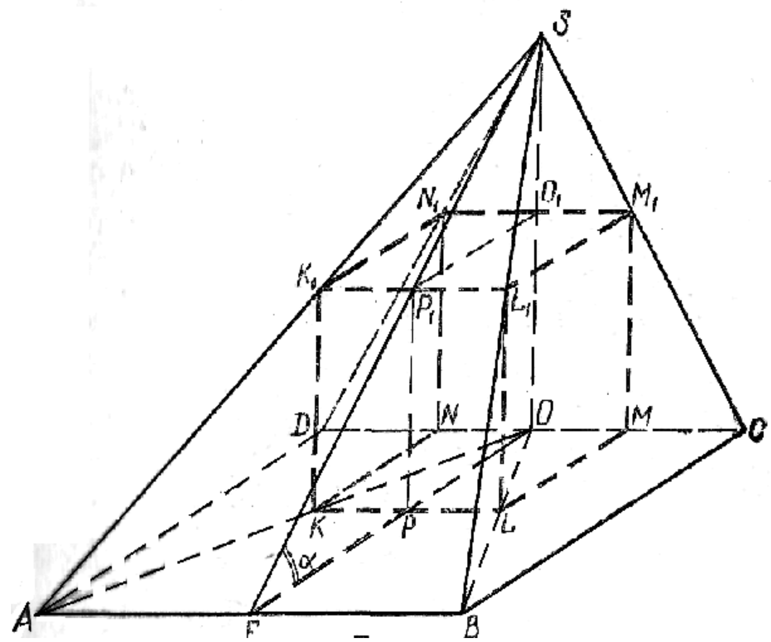


Рис. 1

При побудові зображення фігури враховуємо, що висота піраміди співпадає з висотою грані DSC, яка є рівнобедреним трикутником. Грань MM_1N_1N – квадрат, вписаний в рівнобедрений трикутник DSC так, що його дві вершини і N лежать на основі DC трикутника, а дві інші на його бічних сторонах.

Для більшої наочності площину DSC розміщують фронтально, тобто паралельно площині зображення. Отже, грань DSC піраміди і вписаний у неї квадрат виконані без спотворень. Спочатку виконується зображення куба, а потім добудовується зображення піраміди. Для цього через точки D і C проводимо прямі, паралельні ML. Точки A і B знаходимо як точки перетину цих прямих з і SL_1.

Задача 2. В правильну чотирикутну піраміду вписаний куб так, що чотири його вершини лежать в площині основи, а чотири інші – на апофемах піраміди (рис.2). Знайти ребро куба, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а висота h.

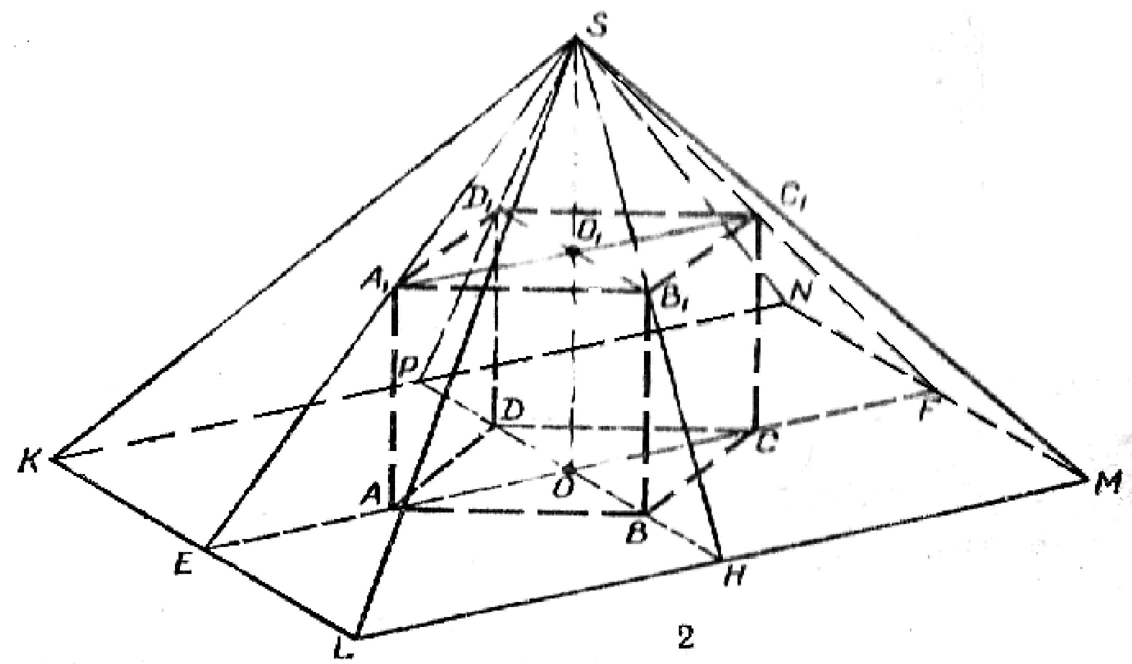


Рис. 2

І в цьому випадку спочатку виконуємо зображення куба, передню грань

розміщуємо фронтально. Будуємо зображення – осі куба, на продовженні

вибираємо довільно точку S – зображення вершини піраміди. Продовжимо Ac і , будуємо зображення діагоналей нижньої основи куба, проводимо прямі SA_1, SB_1, SC_1, SD_1. Точки E, H, F, P – точки перетину цих прямих з Ac і є зображеннями середин сторін основи піраміди, а відрізки SE, SH , $SF,$ SP – зображення її апофем. Проводимо через E і F прямі, паралельні , а через H і P – прямі, паралельні AS . Точки перетину цих прямих є зображеннями вершин основи піраміди.

Додаток 3

ПЛАН-КОНСПЕКТ УРОКУ

Тема: Призма. Пряма і правильна призми.

Мета: *засвоїти поняття многогранника, означення призми, її елементів, види призми, означення прямої та правильної призми; вміти застосовувати вивчений матеріал під час розв'язування задач; сприяти розвитку просторової уяви, мислення, уваги; виховувати інтерес до математичних знань та прагнення бути активними в колективних творчих справах.*

Тип уроку: вивчення нового матеріалу.

Наочність та обладнання: ПК; програма GRAN-3D; проектор; підручник: Бевз Г.П. Геометрія. 11 клас: академічний рівень.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Організація учнів до уроку геометрії. Запис дати в зошитах.

Проведення бесіди з техніки безпеки під час роботи за комп'ютером.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірка виконаних вправ з підручника.

III. Формулювання мети й завдання уроку

На сьогоднішньому уроці ми вивчимо означення многогранника, призми її елементів та основні види призм. При чому ви навчитесь самостійно в зошитах лінійкою і олівцем будувати різні призми. В основному звернемо увагу на особливості побудови призми, та розташування головних її елементів за допомогою програми GRAN-3 D та проектора. Тим самим ми будемо розвивати вашу уяву та мислення.

IV. Мотивація навчальної діяльності

Сьогодні ви побачите як працює програма GRAN -3D і на наступних уроках ви самостійно навчитесь користуватись цією програмою та навчитесь будувати потрібні вам фігури.

V. Актуалізація опорних знань, умінь та навичок

Під час актуалізації опорних знань застосовується інтерактивна технологія загального групового обговорення. Учням ставить питання для обговорення: Що ви знаєте про многогранник: означення, його елементи, види?

Після чого проводиться фронтальна бесіда:

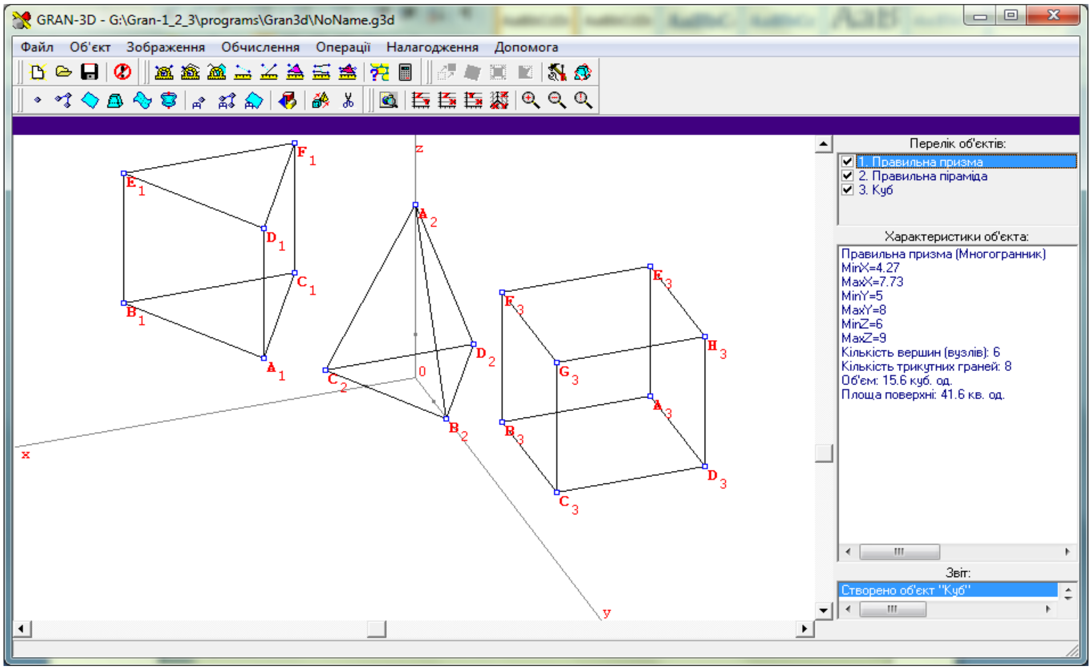
1) Яким може бути взаємне розміщення двох різних площин у просторі?
2) Які дві площини називаються паралельними?
3) Наведіть приклади паралельних площин у предметів із оточуючого середовища.
4) У якому випадку дві площини будуть паралельними?
5) Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина?
6) Сформулюйте означення прямої перпендикулярної до площини.
7) Що таке перпендикуляр? похила?

VI. Вивчення нового матеріалу

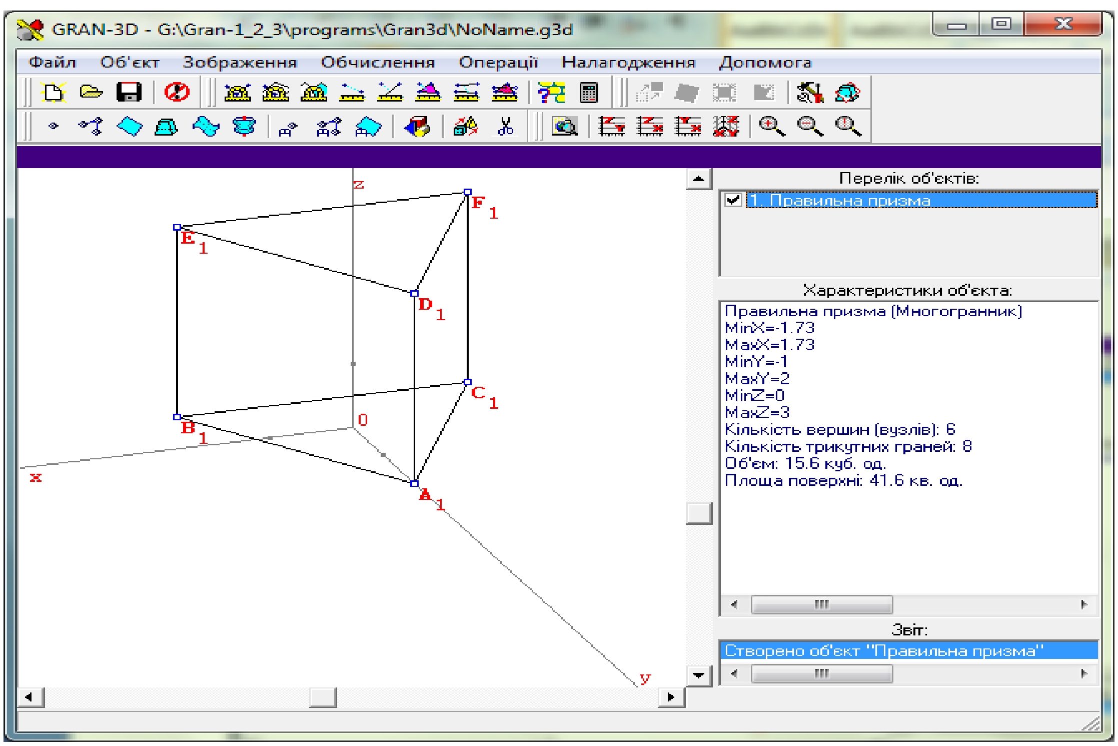
Многогранник та його елементи

Ми живемо у тривимірному просторі, в якому потрібно вміти орієнтуватися, розуміти, як він улаштований. Саме стереометрія допомагає збагнути це, оскільки вивчає *просторові фігури*.

У стереометрії вивчають фігури у просторі, що називаються тілами. Наочно геометричне тіло можна уявити як частину простору, зайняту фізичним тілом та обмежену поверхнею. (Демонструємо деякі моделі многогранників за допомогою програми GRAN -3D.)



Многогранником називається тіло (частина простору), обмежене скінченною кількістю плоских многокутників (за допомогою програми вивести на дошку многогранник).



Многокутники, які обмежують многогранник, називають його *гранями,* їх сторони – *ребрами,* а вершини – *вершинами* многогранника.

На рисунку гранями є многокутники: $A_1B_1C_1$, $F_1D_1E_1$, $A_1B_1E_1D_1$, $A_1D_1F_1C_1$, A_1C_1

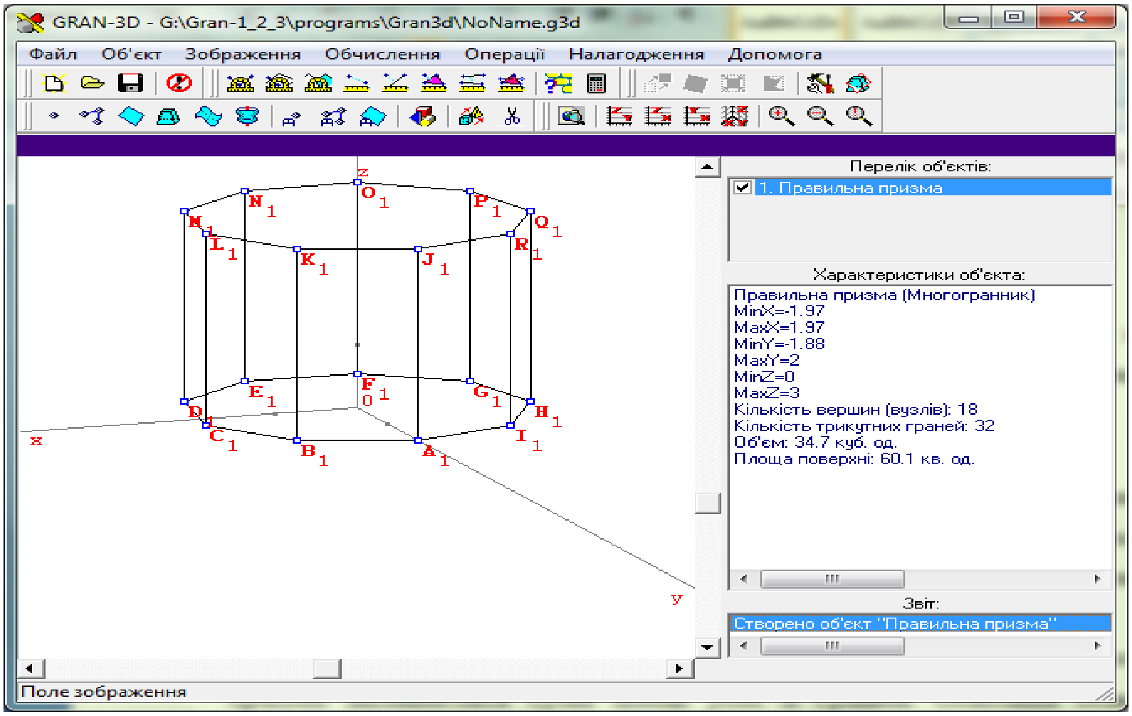
$C_1B_1E_1F_1$, ребрами – сторони A_1B_1, , C_1B_1, A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1, E_1F_1, F_1D_1, D_1E_1; вершинами – точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1.

Завдання для класу

1. Наведіть приклади предметів побуту, які мають форму многогранників.
2. Скільки вершин, ребер, граней має: паралелепіпед, куб?
3. Яке найменше число ребер може мати многогранник?
4. Побудуйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і скільки вершин він має?
5. Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розкласти на площині, то дістанемо розгортку даного многогранника.

Призма та її елементи

Многогранник, дві грані якого – рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней – паралелограми, називається n-кутною *призмою*. (Демонструємо модель n-кутної призми.)



Рівні *n*-кутники призми називаються *основами,* а паралелограми — *бічними гранями,* сторони основи — *ребрами основи,* інші ребра — *бічними ребрами.*

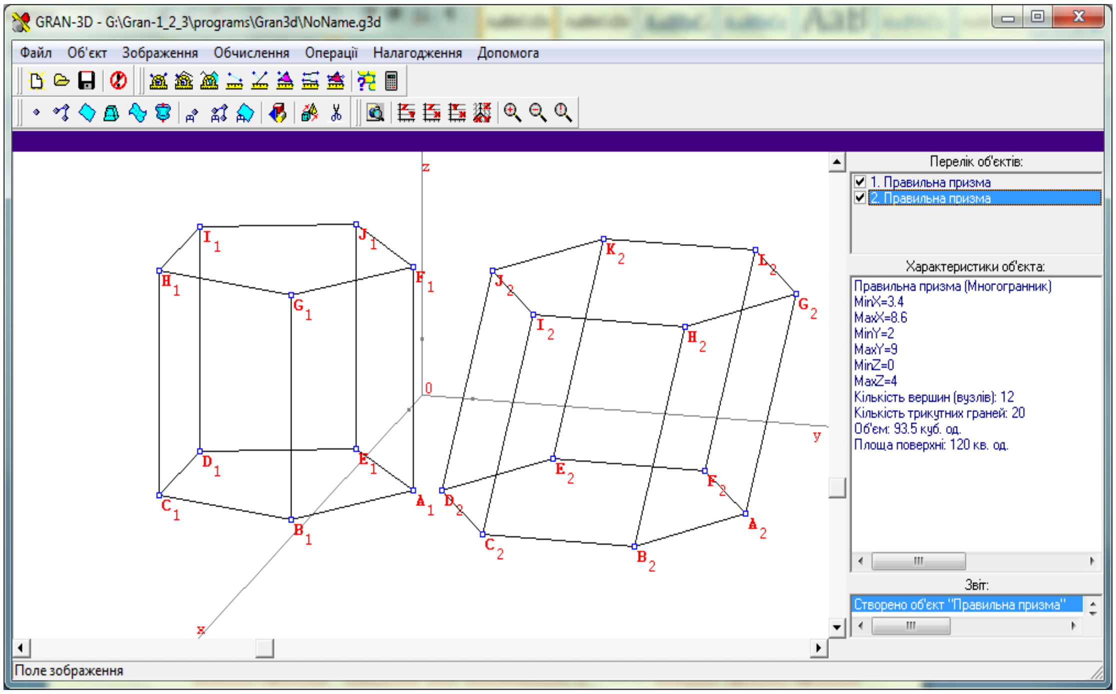
З означення призми випливає, що основи призми рівні, а також лежать у паралельних площинах. Бічні ребра паралельні й рівні.

Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні. *Площею поверхні призми* називається сума площ усіх її граней. Оскільки основи рівні, то $S_{пов.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$, де $S_{пов.}$ – площа поверхні призми; $S_{бічн.}$ – площа бічної поверхні призми; $S_{осн.}$ – площа основи призми.

Завдання класу

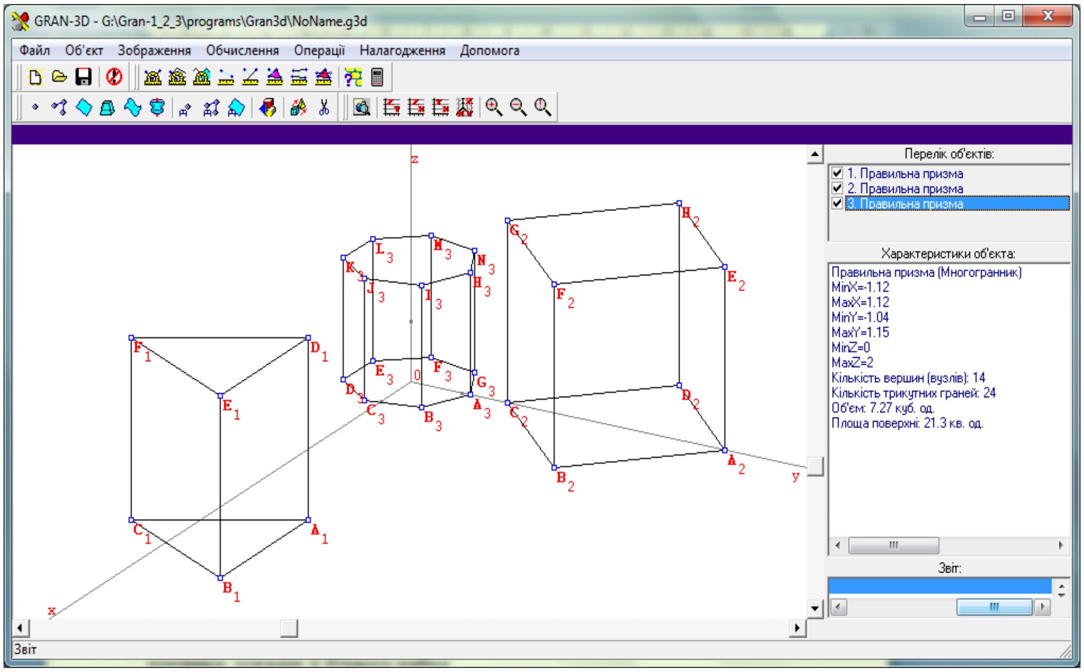
1. Скільки граней має *n*-кутна призма? Чи може призма мати 10 граней?
2. Скільки ребер має *n*-кутна призма? Чи може призма мати 10 ребер?
3. Скільки вершин має *n*-кутна призма? Чи може призма мати 10 вершин?
4. Скільки граней має 15-кутна призма? Вершин? Ребер?

Призма називається *прямою,* якщо її бічні ребра перпендикулярні до основи. Інші призми – похилі. (Демонструються моделі прямих та похилих призм, дати час для дітей, щоб вони самостійно побудували многогранники в себе в зошитах.)

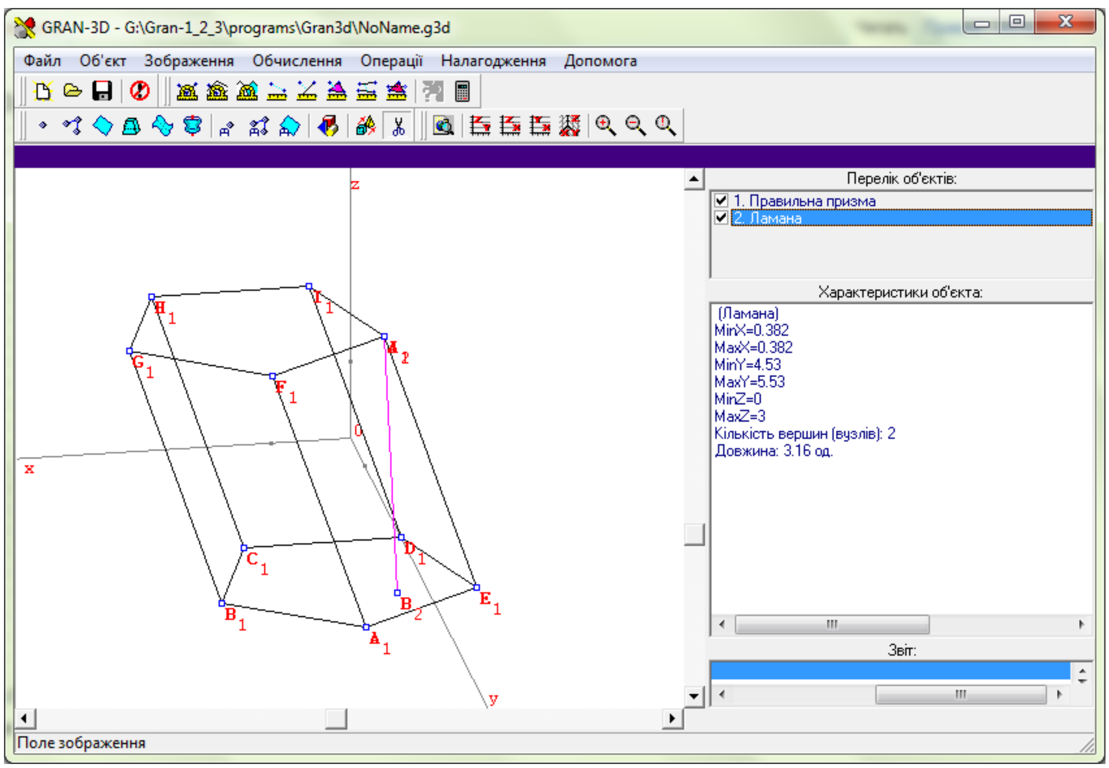


Пряма призма називається *правильною,* якщо в її основі лежить правильний многокутник. Слід зазначити, що бічними гранями прямої призми є прямокутники.

Висота призми – відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра $h = A_1D_1$.(Демонструються моделі правильних призм.)



Висота похилої призми в нашому випадку дорівнює $h = A_2B_2$.



VII. Закріплення й осмислення нового матеріалу

Розв'язування задач

1. Знайдіть площу поверхні куба, ребро якого дорівнює 5 см.

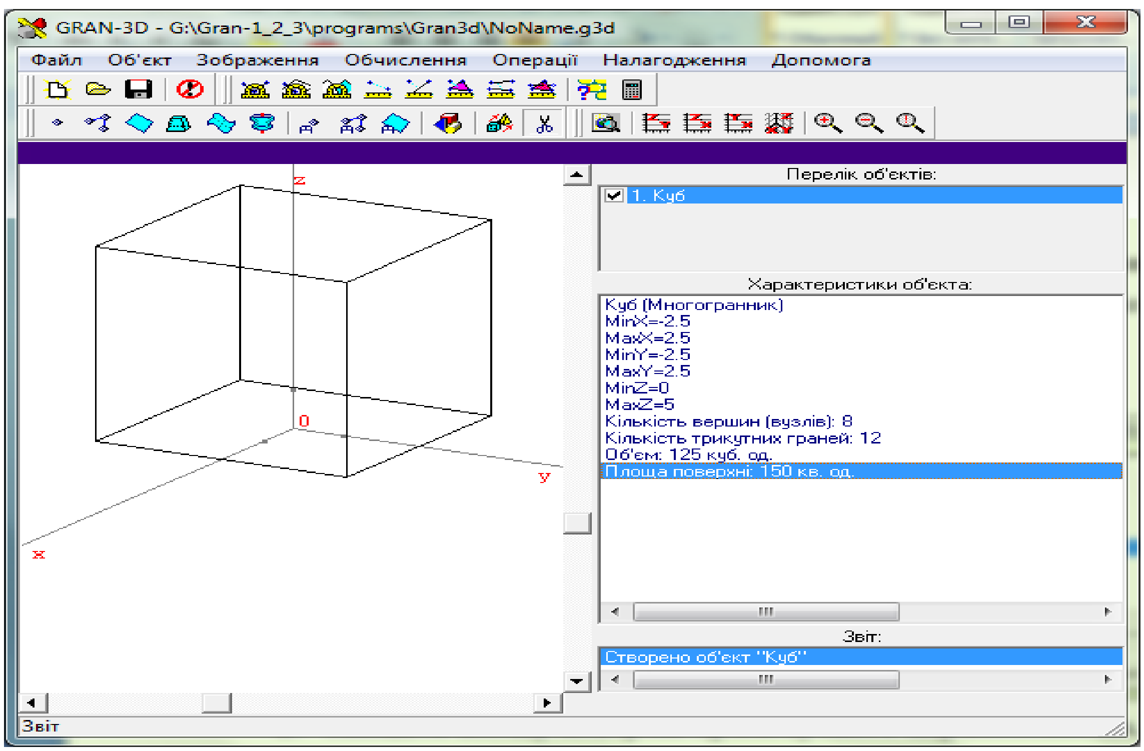
Розв’язання:

Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$S_{пов.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$,. Відомо, що грані куба – квадрати. Площа квадрата дорівнює a^2, де a – сторона квадрата або ребро куба. Тому

$$S_{пов.} = 6 * a^2 = 6 * 5^2 = 150\ (см^2).$$

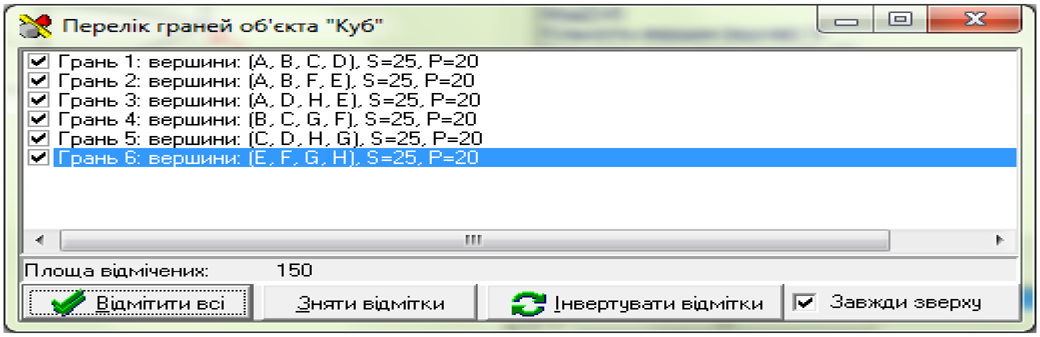
Перевіримо правильність обчислення площі повної поверхні за допомогою програми GRAN-3D. Для цього запустимо середовище GRAN-3D. Використовуючи клавішу швидкого доступу *Створити базовий просторовий об'єкт* обираємо вкладку *Куб* та вводимо довжину ребра, в нашому випадку 5 см. Натиснувши кнопку *Створити* на екрані з'явиться куб. Для того щоб знайти повну поверхню куба досить глянути в *Характеристики об'єкта* в правому нижньому куті вікна програми.



Також виконавши наступні кроки: *Обчислення – Многогранник – Площі та периметри граней* та виділити всі грані куба, отримаємо площу поверхні, яка

150 см²

дорівнює .



Відповідь: $S_{\text{пов.}} = 150$ см².

2. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, сторони основи якого дорівнюють 3 см і 4 см, а бічне ребро 5 см.

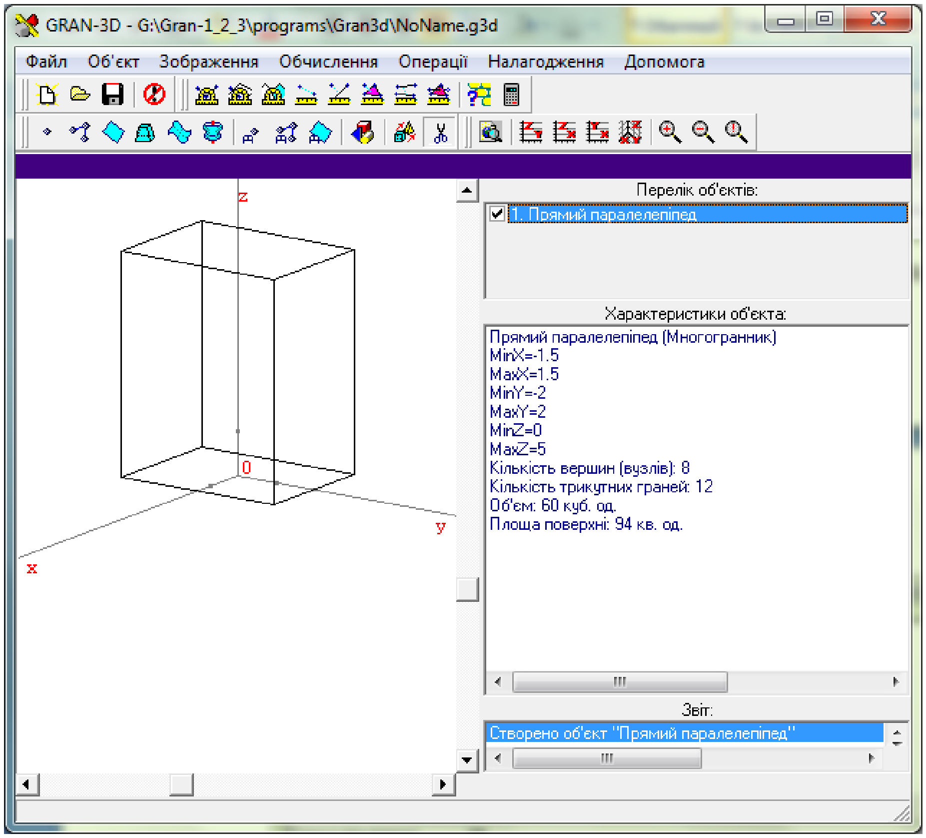
Розв'язання:

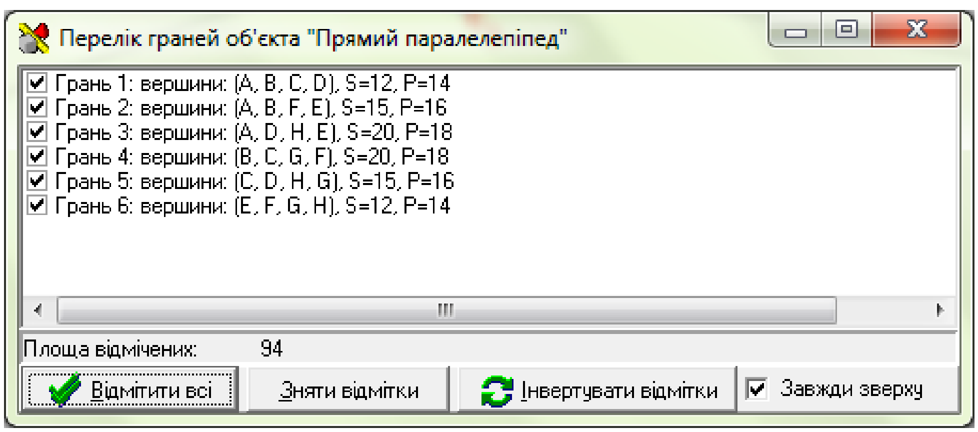
Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$. Отже,

$$S_{\text{пов.}} = 2 * 3 * 4 + 2 * 4 * 5 + 2 * 3 * 5 = 94 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Перевіримо правильність розв'язку за допомогою програми.





94 см²

Дійсно площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює .

Відповідь: $S_{\text{пов.}} = 94$ см².

3. Основа прямої призми – рівносторонній трикутник з стороною 4 см, а бічне ребро дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

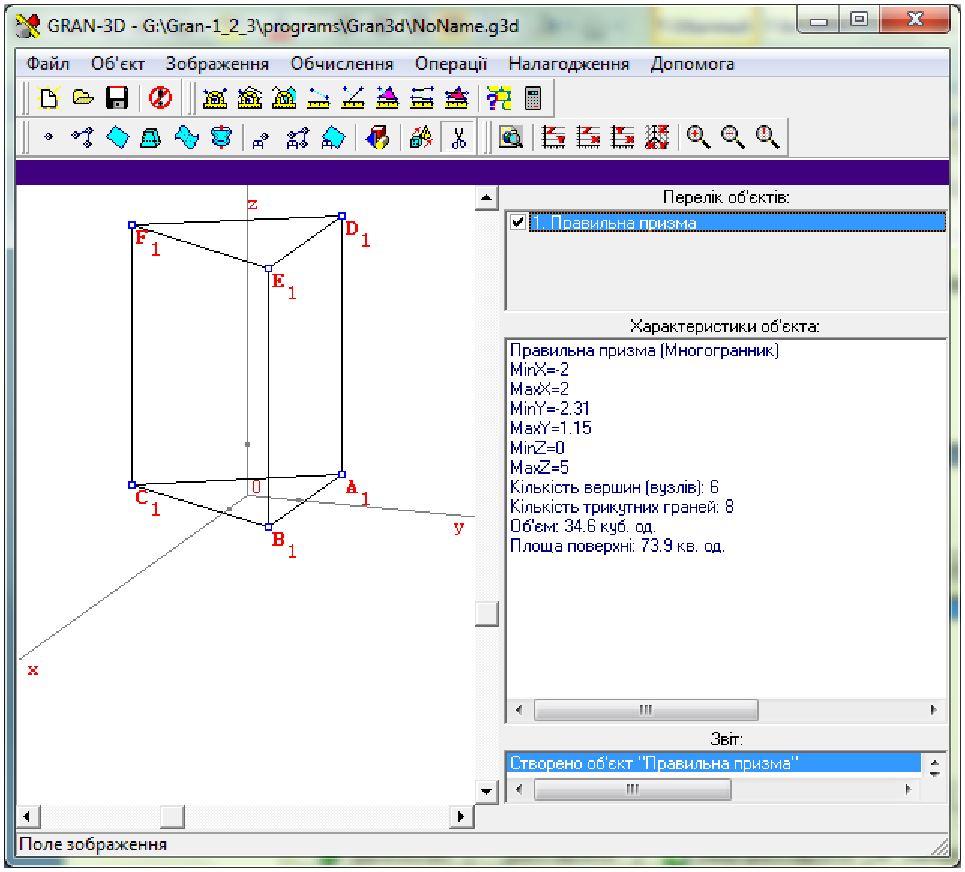
Розв'язання:

Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$. Отже, $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} * 4 * \sqrt{4^2 - 2^2} = 4\sqrt{3}$ (см²). Тоді

$$S_{\text{пов.}} = 3 * 4 * 5 + 2 * 4\sqrt{3} = 73{,}9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

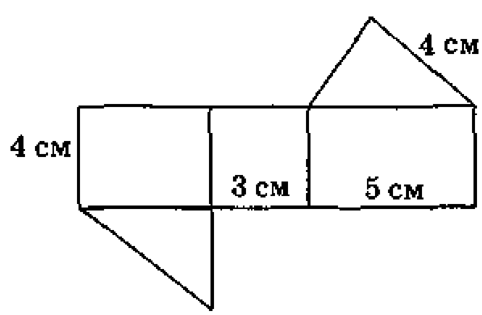
Перевіримо правильність розв'язку за допомогою програми.



Площа повної поверхні призми дорівнює 73,9 см².

Відповідь: $S_{\text{пов.}} = 73{,}9$ см²

4. На рисунку зображено розгортку прямої трикутної призми. За наведеними даними знайдіть площу поверхні.



Розв’язання:

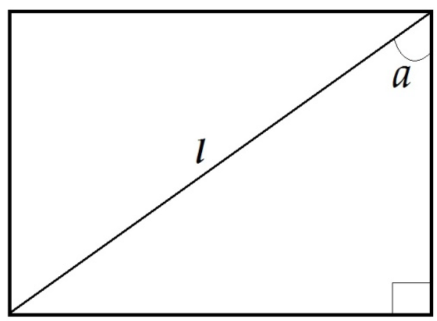
На рисунку показано всі дані,які необхідні для визначення площі поверхні. $S_{\text{бічн.}} = 4 * 4 + 3 * 4 + 5 * 4 = 16 + 12 + 20 = 48\ (\text{см}^2)$. Основа призми – прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 см. Звідси випливає, що $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} * 4 * 3 = 6\ (\text{см}^2)$. Отже $S_{\text{пов.}} = 48 + 2 * 6 = 60\ (\text{см}^2)$.

Відповідь: 60см^2

5. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює l і утворює з бічним ребром кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Розв’язання:

Бічна грань правильної трикутної призми матиме вигляд:



Знайдемо катети отриманого прямокутного трикутника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{l} \Rightarrow a = l * \sin\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{l} \Rightarrow b = l * \cos\alpha.$$

Знаючи сторони прямокутника: $S = l^2 \sin\alpha\cos\alpha$

Відповідь: .

VIII. Підсумки уроку

Запитання

1. Що таке n-кутна призма?
2. Яка призма називається прямою? правильною?
3. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?

4. Ребро куба дорівнює 5 см. Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними.

а) Площа однієї грані куба дорівнює 20 см^2.

б) Площа поверхні куба дорівнює 150 см^2.

г) Діагональ грані куба дорівнює $5\sqrt{2}$ см.

IX. Домашнє завдання

1. Вивчити формули площі поверхні прямої призми.
2. Розв'язати задачі.

1) Знайдіть площу бічної поверхні правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 6 см, а висота — 5 см.

2) Знайдіть площу повної поверхні прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см, а бічне ребро призми дорівнює 10 см.

Додаток 4

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1

«Многогранники»

І варіант

1.(1б) У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 13см, а діагональ основи 10см. Знайдіть висоту піраміди.

2. (1б) Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, діагональ основи якої дорівнює 5см, а висота піраміди дорівнює 4см.

3.(2б) Установіть відповідність

1 Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами 2см, 5см, 3см	**А** 20см^2
2 Площа повної поверхні трикутної призми, усі бічні грані якої рівні, з площею основи 5см^2, площею бічної грані 15см^2	**Б**64см^2
3 Площа бічної поверхні куба з ребром 4см	**В**62см^2
	Г55см^2

4.(2.б) Знайдіть ребра прямокутного паралелепіпеда, якщо їх довжини відносяться як $2:6:9$, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 33 см.

5. (3б) Основою прямого паралелепіпеда є ромб з діагоналями 6 і 8см. Діагональ бічної грані дорівнює $\sqrt{61}$см. Знайти більшу діагональ паралелепіпеда і площу повної поверхні.

6. (3б) Основою піраміди є рівнобедренний прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 4 см. Бічні грані піраміди, що містять катети трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

ІІ варіант

1.(1б) Знайдіть бічне ребро правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює 12 см, а діагональ основи дорівнює 18см.

2. (1б) Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутноїпіраміди, діагональ основи, якої дорівнює 24 см, а бічне ребро – 13 см.

3.(2б) Установіть відповідність

1 Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда з	**А** 16см^2

вимірами 1см, 4см, 3см	
2 Площа повної поверхні чотирикутної призми, усі бічні грані якої рівні, з площею основи 5см^2, площею бічної грані 15см^2	**Б** 96см^2
3 Площа повної поверхні куба з ребром 4см	**В** 38см^2
	Г 70см^2

4. (2б.) Знайдіть лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда, якщо сума усіх його ребер дорівнює 180 см, а лінійні розміри відносяться як $4:5:6$.

5.(3 б) Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм із сторонами 3 і 5см, кут між якими 60°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{85}$см. Знайти бічне ребро паралелепіпеда і його повну поверхню.

6. (3б)Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, з основою 12 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює $8\sqrt{3}$см.