Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему:

Методичні особливості навчання учнів профільних класів розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей

Виконала**:** студентка 2 курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Стрибулевич Діана Петріна

Керівник: канд. пед. наук, доц., проф. кафедри
математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц.
Сяський Василь Олексійович

канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри ВМ
Марач Віктор Сильвестрович

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасному суспільстві формування в школярів математичної компетентності є надзвичайно важливим завданням для підготовки випускників до подальшого дорослого життя. Збільшення кількості проблем і ситуацій, із якими молоді люди стикаються щодня, зокрема і у професійних сферах, потребує певного рівня розуміння математики, здатності до математичного обґрунтування й використання математичних інструментів, щоб надалі ці проблеми можна було цілковито усвідомити та розв’язати.

Школа XXI століття – це школа, в якій повинні реалізовуватись нові ідеї щодо організації освіти. У реформуванні освіти в Україні в даний момент найактуальнішою проблемою є впровадження профільного навчання. Нова українська школа має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб школярів, для формування в учнів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності.

Вивчення логарифмічних та показникових рівнянь та нерівностей є однією з основних та важливих змістових ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу, яка має розгалужену систему внутрішньо-предметних зв’язків з іншими лініями курсу та досить широко використовується при вивченні інших дисциплін. Тому традиційно логарифмічні рівняння та нерівності представлені в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Проаналізувавши звіти Українського центру оцінювання якості освіти, результати виконання цих завдань за останні роки значно погіршилися, що вимагає пошуку шляхів удосконалення методики вивчення логарифмічних та показникових рівнянь та нерівностей.

Над вивченням показникових і логарифмічних функції працювали такі вчені: Архімед, І. Бюргі, Дж. Непер, А. Брігс, А. Влакк, В. Оутред, Р. Декарт, І. Ньютон, Лейбніц, Й. Бернуллі, Л. Ейлер та інші. Для осмислення цілісності формування прийомів навчальної діяльності учнів з розв’язування рівнянь та нерівностей важливими є результати психологічних та педагогічних досліджень, досліджень методистів, пов'язаних з аналізом навчальної діяльності. Аналіз дидактичних особливостей формування знань і вмінь учнів, пов'язаних із розв'язуванням логарифмічних рівнянь та нерівностей, спирається на дослідження дидактичних закономірностей організації особистісно орієнтованого навчання (праці Ю.К. Бабанського, М.А. Данилова, Л.В. Занкова, І.Я. Лернера, В.І. Лозової, В.О. Оніщука, В.В. Сєрікова, М.Н. Скаткіна, А.В. Хуторського, З.І. Слєпкань та ін.) .

На сьогоднішній день переважна більшість сучасних випускників закладів середньої освіти не вміє застосовувати отримані за роки навчання знання з вивчених предметів інакше, аніж до розв'язування завдань, які запропоновані в шкільних підручниках. Більш того бажання вчитися в певної кількості учнів зникає ще в перші роки середньої школи. І така тенденція простежується вже не перші десятиліття.

Актуальність вивчення даної теми не викликає сумнівів, оскільки ці функції трапляються в найрізноманітніших галузях науки — фізиці, хімії, біології, економіці, інформатиці, медицині, лісництві, картографії, будівництві тощо, а питання методики її вивчення у школі не розкрито повною мірою.

Мета дослідження: систематизувати відомості про показникову та логарифмічну функції, розкрити роль і місце вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи, ознайомитися з методикою їх викладання.

Об'єкт дослідження: показникові і логарифмічні рівняння і нерівності.

Предмет дослідження: методика навчання учнів розв'язуванню цих видів рівнянь і нерівностей у профільних класах.

Завдання дослідження:

1. Систематизувати відомості про показникові і логарифмічну функції, види і методи розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи.

2. З’ясувати місце показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей в діючій навчальній програмі з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.
3. Проаналізувати сучасні діючі і пробні підручники з алгебри.
4. Навести приклади розв’язування рівнянь і нерівностей різної складності.
5. Ознайомитися з методикою вивчення даної теми в сучасній школі.
6. Запропонувати методичні рекомендації щодо викладання тем “Показникова функція” та «Логарифмічна функція» в профільних класах загальноосвітньої школи та розробити дидактичні матеріали (самостійні і контрольні роботи, розробки уроків, перевірочні роботи).
7. Познайомитися з дидактичними засобами навчання, які можна використати під час дистанційного навчання та навести приклади їх застосування під час вивчення даних тем.
8. Обґрунтувати психолого-педагогічні та методичні вимоги щодо формування математичних компетентностей старшокласників у процесі вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.
9. Розробити окремі компоненти методичної системи навчання старшокласників розв’язування даних рівнянь та нерівностей, спрямованої на набуття ними математичних компетентностей.
10. Здійснити практичну перевірку результатів дослідження.
11. Зробити висновки щодо особливостей вивчення даної теми у профільних класах.

Для розв’язання поставлених завдань використовувались наступні методи дослідження:

1. Дослідницький метод при вивченні психолого-педагогічної, наукової та методичної літератури з предмету дослідження;
2. Теоретичні методи: системний аналіз (уточнення понятійного апарату, з’ясування внутрішньопредметних зв’язків змістової лінії рівнянь та нерівностей шкільного курсу алгебри і початків аналізу з іншими змістовими

лініями, виділення орієнтовних основ діяльності з розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей); порівняння, узагальнення даних з проблеми дослідження на основі вивчення наукової психолого-педагогічної літератури, навчальної та методичної літератури;

3. Аналітичні методи;

4. Практична реалізація запропонованої методики.

Структура роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, загального висновку, списку використаних джерел та 6 додатків.

Розділ І. Теоретичні основи дослідження показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей

1.1. З історії вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей

Винайдення логарифмів на початку XVII століття тісно пов'язане з розвитком в XVI столітті виробництва і торгівлі, астрономії і мореплавання, які вимагали удосконалення методів обчислювальної математики. Все частіше потрібно було швидко виконувати громіздкі дії над числами, все точнішими і точнішими повинні були бути результати дій. Ось тоді-то і знайшла втілення ідея логарифмів, цінність яких полягає в зведенні складних обчислень до простіших.

Логарифм – з грецької означає “логос”- відношення і “аритмос”- число. Його винайдення пов’язане з двома постатями: швейцарцем Іобстом Бюргі (1552-1632), знаним годинникарем і майстром астрономічних інструментів, і шотландцем Джоном Непером (1550-1617), який теж не був математиком за професією, астрономія була його «хобі».

В середині 16 століття Симон Стівен опублікував таблицю для обчислення складних відсотків, необхідність яких була викликана зростанням торгово-фінансових операцій. Сам Стівен не помітив того, що його таблицями стали користуватися для спрощення обчислень. Це побачив один з його сучасників - Бюргі. Талановитий математик І. Бюргі не був професійним вченим. Він був майстерним годинниковим майстром та механіком. У 1603 р. на запрошення імператора Рудольфа 2 він прибув до Праги, де став придворним годинникарем. Його перебування в Празі збіглося за часом з перебуванням там Йоганна Кеплера. Діяльність Бюргі була високо оцінена Кеплером, який і закликав Бюргі опублікувати свої винаходи. Бюргі склав таблицю логарифмів, де лише множення громіздких чисел на 1,0001 довелося проводити понад 200 мільйонів разів. Бюргі не поспішав здати в друк свою працю. Однак найважливішою причиною обмеженого успіху таблиці Бюргі стало те, що ще за 6 років до її опублікування з'явилася більш досконала таблиця логарифмів Джона Непера. Обидва автори прийшли до своїх таблиць незалежно один від одного.

Вони склали таблиці так званих натуральних логарифмів. Бюргі працював над таблицями 8 років і видав їх у 1620 році під назвою «Арифметична і геометрична таблиця прогресії». Проте його таблиці не отримали широкого поширення, бо Непер видав свій «Опис дивовижної таблиці логарифмів» на 6 років раніше. Тому і визнали число е неперовим числом.

Складанню таблиць Непер присвятив близько 20 років свого життя. Таблиця Непера зіграла величезну роль в математичній науці. Таблиці натуральних логарифмів склав і видав у 20-х роках 17 ст. Джон Спейдель. Ідея створення десяткових логарифмів була здійснена іншим вченим – Бріггсом. А Едмонт Гунтер в 1624 році через 10 років після появи перших таблиць винайшов логарифмічну лінійку.

Понад три з половиною сторіччя з тих пір, як у 1614 році були опубліковані Непером перші логарифмічні таблиці, вони вірою і правдою служили астрономам і геодезистам, інженерам і морякам, скорочуючи час на обчислення і, як сказав французький вчений Лаплас, продовжуючи життя обчислювачам.

Ще донедавна важко було уявити собі інженера без логарифмічної лінійки в кишені, адже вона дозволяла швидко одержувати відповідь з достатньою для інженера точністю до трьох значущих цифр. І хоч тепер її витіснили калькулятори та комп’ютери, проте можна сміливо сказати, що без логарифмічної лінійки не було б і перших комп’ютерів.

До початку XVII ст. у математиці уникали вживання дробових та від’ємних показників степенів. Лише в кінці XVII ст. у зв’язку з ускладненням математичних задач з’явилася необхідність розширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n - будь-яке дійсне число, дало змогу розглянути показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел (для цілих n степенева функція визначена і для $x<0$).

Термін «показник» (нім. exponent, лат. exponere — «виставляти на показ»; exponens, exponentis — «той, що виставляється на показ», «той, що показується») для степеня запропонував у 1553 році Михайль Штифель (1487—1567). Він увів дробові й нульові показники. Позначення a^x для натуральних показників увів Рене Декарт (1637), а вільно поводитися з такими самими дробовими й від'ємними показниками почав 1676 р. Ісаак Ньютон. Степені з довільними дійсними показниками, без будь-якого загального означення, розглядали також Лейбніц та Йоганн Бернуллі. 1679 р. Лейбніц увів поняття експоненціальної (тобто показникової) функції для залежності $y=a^x$ та експоненціальної кривої для графіка цієї функції.

Питання, пов’язане з показниковою функцією, розробляв і Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові і логарифмічні кількості», зокрема зазначив, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, «чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще і кількість, яку підносять до степеня». До перших належать a^x, до других y^z.

1.2. Аналіз навчальної програми з алгебри та початків аналізу для учнів 11 класу профільного рівня

Пріоритетним напрямком розвитку сучасної освітньої системи, у тому числі й основної школи, є особистісно-диференційований підхід до навчання учнів, що передбачає варіативність обсягу навчального матеріалу, тобто можливість вивчати обраний предмет з різним ступенем змістовного наповнення: на рівні стандарту (обов’язкового для всіх учнів) або поглибленому рівні. У старшій школі вивчення математики диференціюється за трьома рівнями: рівнем стандарту, академічним і профільним.

Провідною ідеєю організації процесу вивчення математики у середніх ЗНЗ є рівнева і профільна диференціація. На її основі створюються умови для гуманізації, демократизації та реалізації культуротворчої функції національної школи. Програми визначають базовий зміст математичної освіти в основній і старшій школі з урахуванням кількості годин на математику, передбачених базовим та іншими навчальними планами, діючими підручниками та навчальними посібниками.

Програми передбачають можливість реалізації базової математичної освіти з різним ступенем обгрунтованості і повноти на основному (обов'язковому для всіх школярів) та підвищеному (для тих, хто має нахили та зацікавленість до математики) рівнях та визначають мінімальний і максимальний обсяги навчального матеріалу у масовій школі. Рівень їх засвоєння - необхідна умова для одержання учнем відповідно позитивної та відмінної оцінок з предмету.[9]

Наприклад, при вивченні математики на академічному рівні основним завданням є не лише засвоєння математичних знань, а й вироблення вмінь і навичок застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодіння математичними методами, моделями, що забезпечить подальше успішне вивчення профільних предметів, зокрема хімії, фізики, біології, технологій та інших. При цьому зв'язки математики з профільними предметами посилюються за рахунок розв'язання задач прикладного характеру, прикладів застосування математичних понять, методів і моделей у відповідних шкільних курсах.

При вивченнні математики на поглибленому рівні передбачене збільшення навчального часу: до годин інваріантної складової, додаються години варіативної складової. Отже, на алгебру та початки аналізу виділяється не менше 5 годин в тиждень, на геометрію – 3 години на тиждень. А решта годин варіативної складової навчального плану використовується на вивчення курсів за вибором, факультативів тощо.

Складові частини поглибленого вивчення математики включені органічно до загальноосвітнього курсу як його поглиблення, розширення і застосування набутих в основному курсі знань до більш ширшого кола задач, а також розширене вивчення властивостей об'єктів, що будуть вивчатися в основному курсі. Розглядаються також додаткові методи для розв'язування задач на базі теоретичного матеріалу, поданого в основному курсі та деякі окремі теми, які не включені до основного курсу.

Вивчення теоретичного матеріалу на основному рівні, як правило, не потребує відтворень доведень і обгрунтувань, але якщо діти прагнуть їх вивчити, то ці зусилля варто підтримувати та заохочувати, як і спроби розв'язувати задачі і вправи складніші, ніж обов'язкові для всіх учнів. Зрозуміло, що підвищений рівень засвоєння учнями теоретичного матеріалу, оволодіння практичними уміннями і навичками розв'язування задач і вправ характеризується досить високим рівнем обгрунтованості і пояснення. Учні, які претендують на оцінку «відмінно» з математики, повинні вміти розв'язувати практично весь задачний матеріал, що поданий у підручнику або навчальному посібнику, крім тих, які відносять до додаткових розділів або є завданнями з зірочками. [33]

Навчальна програма з математики профільного рівня для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл була затверджена від 23 жовтня 2017 року Наказом Міністерства освіти і науки № 1407. [26,27]

Дана програма призначена для організації процесу навчання математики на профільному рівні. Вона розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти та враховує особливості відповідних профілів навчання.

Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які необхідні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, є достатніми для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, де необхідна значна математична підготовка. Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, який спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, та дає змогу обґрунтовано робити висновки про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в соціумі.

Показникові й логарифмічні рівняння та нерівності вивчаються в 11 класі загальноосвітньої школі у розділі «Показникова і логарифмічна функції». Згідно чинної навчальної програми в курсі алгебри (профільний рівень) вивчення розділу «Показникова та логарифмічна функція» відбувається в 11 класі. Навчальною програмою передбачено опрацювання учнями таких тем з даного розділу: Степінь із дійсним показником, Показникова функція, Логарифми та їх властивості, Логарифмічна функція, Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами, Похідні показникової та логарифмічної функцій.

Після вивчення теми учні повинні:

- ✓ формулювати означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;
- ✓ формулювати означення логарифма та властивості логарифмів;
- ✓ будувати графіки показникових і логарифмічних функцій;
- ✓ перетворювати вирази, які містять логарифми;
- ✓ знаходити похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовувати їх до дослідження цих класів функцій;
- ✓ розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- ✓ застосовувати показникову та логарифмічну функції до розв’язування прикладних задачах. [25,26,27]

За підручником для 11 класу під редакцією Є.П.Нелін, О. Є. Долгова "Алгебра і початки аналізу (профільний рівень, 2019 рік) показникова і логарифмічна функції вивчаються в школі у таких темах:

- Узагальнення поняття степеня. Степінь із дійсним показником.
- Показникова функція, її властивості та графік.
- Розв'язування показникових рівнянь та нерівностей.
- Логарифм числа. Властивості логарифмів. Логарифмічна функція, її властивості і графік.
- Розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.
- Похідні показникової та логарифмічної функцій.
- Розв'язування показниково-степеневих рівнянь та нерівностей. Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності .[29]

До очікуваних результатів додається формулювання означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивостей, означення логарифма та властивості логарифмів, перетворення виразів, які містять логарифми, знаходження похідних показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосування їх до дослідження класів цих функцій, вміння розв'язувати системи показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей, а також показникові та логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи з параметрами, вміння застосовувати показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задач. [26,27]

В процесі вивчення теми в учнів можуть виникати труднощі через:

1) Недостатньо сформовані навички побудови графіків функцій.
2) Припускання помилок під час виконання тотожних перетворень.
3) Недостатньо розвинені обчислювальні навички.
4) Слабкі знання та невідпрацьовані навички про способи розв'язування цілих раціональних, дробових раціональних, ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Тому вчителеві варто приділити увагу повторенню основного матеріалу (пропедевтична робота). Для цього достатньо буде за декілька уроків до початку вивчення показникових рівнянь і нерівностей надіслати учням презентацію чи документ, в якій систематизовано раніше набуті знання. Крім того учень під час навчання повинен розуміти, де він зможе потім застосувати отримані знання та власне отримувати задоволення від освітнього процесу.

Для цього вчителю доцільно наголошувати на взаємозв'язках з іншими предметами шкільного курсу (фізикою, біологією, хімією тощо), пропонувати розв'язування задач прикладного змісту, встановлювати взаємозв'язки між поняттями на основі власного досвіду учнів, використовувати на уроках різноманітні інформаційно-комунікаційні технології, проєктні технології навчання, інтерактивні методи роботи (наприклад метод сторітелінгу). Власне останній не лише привертає увагу учнів, а й стимулює їх до подальшого поглиблення знань. Виокремлюють пасивний (це коли розповідає вчитель) та активний (розповідають учні) сторітелінг. На уроках введення нових понять використовують саме пасивний сторітелінг, адже така організація навчальної діяльності учнів допоможе не лише кращому засвоєнню знань, умінь та навичок з теми, а й формуванню математичної компетентності.

Зміст і структуру освіти визначають навчальні цілі (зараз їх прийнято називати компетентностями, що формуються). Своє вираження вони завжди приймають у вигляді переліку певних вимог, які характеризують кінцевий результат освітнього процесу.

У програмі з математики для середньої школи, зокрема в розділі «Тематичне планування навчального матеріалу», зміст освіти по кожному із курсів (математика, геометрія, алгебра, алгебра і початки аналізу) розбито на навчальні теми. Вивчаючи кожну з них, вчитель і учні ставлять перед собою певні цілі. Саме їх ми і будемо називати навчальними.

Навчальні цілі - ідеальне уявлення результату, який має бути досягнутий в ході вивчення певної навчальної теми.

Слід відмітити, що навчальна ціль як ідеальний результат майбутньої діяльності проектується при вивченні математики за такими п’ятьма напрямками:

1) формування світогляду і особистості учня;

2) формування мислення і мовної культури учня;

3) розвиток прикладних і політехнічних вмінь;

4) розвиток загально-трудових і навчальних вмінь;

5) вимоги до математичної підготовки учнів.

Кожний із цих напрямків, очевидно, теж визначає цілі, які будуть похідними від навчальних. Їх у дидактиці прийнято поділяти на три групи, відповідно називаючи кожну з груп: дидактична або освітня мета, виховна мета і розвиваюча. Формуються навчальні цілі завжди свідомо і мають бути науково обґрунтованими та практично досяжними. Зараз перед початком планування кожного заняття формулюють не навчальну, освітню та виховну мету, а компетентності, які формуються під час даного заняття: предметні та ключові.

Визначимо навчальні цілі (математичні компетентності), які повинні бути поставленні перед вчителем і учнями в процесі вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції»:

1. Учні повинні вміти зображати графік показникової і логарифмічної функцій, повинні знати основні показникові та логарифмічні тотожності.

2. Учні повинні вміти розв’язувати типові вправи на використання основних показникових та логарифмічних тотожностей, розв’язувати основні показникові та логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи.

В залежності від цілей визначають певний рівень навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення даної теми. Це так званий рівень вмінь і навичок. У дидактиці виділяють кілька таких рівнів. Будемо дотримуватись класифікації рівнів, яка дана в посібнику:

Рівень I – знайомство;

Рівень II - відтворення,

Рівнеь III - формування умінь і навичок,

Рівень IV – творче застосування.

Учень, який опанував I-й рівень навчально-пізнавальної діяльності, здатен впізнати предмет, об’єкти, процеси, властивості, але тільки за їх виглядом, описом, зображенням, характеристикою. Кажуть, що він володіє знаннями-знайомствами. Іноді ці знання умовно поділяють на знання про об’єкти, що вивчаються і оперативні знання (про зв’язки між об’єктами).

Учень, який досягнув II-го рівня, вміє відтворювати інформацію, операції, дії засвоєні під час навчання. В цьому випадку кажуть, що він володіє знаннями-копіями. Виділяють буквальне і реконструктивне відтворення.

На III-му рівні учень повинен уміти виконувати дії, загальна методика і послідовність (алгоритм) яких вивчені на заняттях, але зміст і умови їх виконання нові.

Успішно навчаючись, учень може досягнути IV-го рівня. Після цього він може застосовувати отримані знання в нових, нестандартних ситуаціях, складати програму дій і виконувати їх, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв’язання. Його діяльність носить пошуковий характер.

Визначені цілі, очевидно, будуть цілями III-го рівня, саме того, який повинен бути досягнутий всіма учнями в процесі вивчення теми «Показникова і логарифмічна функція». Проте процес засвоєння підпорядкований ієрархії рівнів діяльності: учень не може перейти на III-й рівень, минувши рівні I і II. Тому, крім визначених цілей III-го рівня, повинні бути сформульовані цілі I-го і II-го рівнів. Вони безпосердньо проєктуються вже виділеними цілями III-го рівня. Так, в нашому випадку ще дві цілі: «Учні повинні знати означення показникової і логарифмічної функцій», «Учні повинні знати і вміти доводити властивості логарифмічної та показникової функцій».

Адаптуємо формулювання цих чотирьох визначених цілей та встановивши відповідно до принципу ієрархії порядок їх досягнення, будемо мати такий порядок вивчення теми: «Показникова та логарифмічна функції».

Мета: Після вивчення теми учні повинні знати означення показникової та логарифмічної функцій; вміти доводити їх властивості, будувати графіки даних функцій, розв'язувати вправи на використання основних властивостей даних функцій з достатнім обгрунтуванням в ході розв'язання.

Теоретичний матеріал теми не весь час вивчається на одному й тому ж рівні. Певна його частина вивчається на рівні знайомства, інша на рівні формування знань чи умінь і навичок. Для того, щоб знати на якому рівні яка частина матеріалу вивчається слід попередньо виділити головне і знати другорядне. Після цього здійснюють розбиття всього матеріалу на окремі елементи знань, тобто зробити логіко-дидактичний аналіз (це розбиття навчального матеріалу на елементи знань і побудова графічної схеми взаємозв'язку між ними).

Під елементом знань розуміють логічно завершену частину інформації. В математиці кожному елементу знань встановлюють його статус: поняття - П; факт- Ф; твердження - Т; ознака - О; метод - М; спосіб дії - СД. [5,39]

Розділ II. Методична система вивчення показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей у профільних класах

2.1. Впровадження компетентнісного підходу в профільних класах на уроках математики

На сучасному етапі розбудови української державності потреби розвитку народного господарства висувають нові вимоги до підготовки кваліфікованих та конкурентоспроможних робітників, які мають високий рівень загальноосвітньої підготовки. Одним із шляхів розв’язання даної проблеми є впровадження компетентнісного підходу в освітній процес, адже сформованість відповідних компетентностей визначає готовність учня, випускника до дорослого життя, його подальшого особистого розвитку, активної участі в житті суспільства та подальшої трудової діяльності. Математика посідає особливе місце в загальнолюдській системі знань, адже виконує роль мови науки, мови наукових досліджень. Важливу роль у цьому відіграють саме навички розв’язування рівнянь і нерівностей різних видів. Тому набуття старшокласниками математичних компетентностей є однією з важливих складових формування галузевих та ключових компетентностей випускника школи.

Модернізація національної школи нашої держави вимагає від шкільної математичної освіти переносу акцентів зі збільшення обсягу інформації, яку школярі повинні засвоїти чи «завчити», на оволодіння учнями прийомами розумової діяльності, формування вмінь засвоювати та використовувати цю інформацію у реальних життєвих ситуаціях, стимулювання до активності та самостійності в навчанні, завдяки чому їхні знання набувають дієвості та виникає можливість для їхнього творчого застосування. Тобто, потрібно не просто дати учню базовий рівень освіти, а сформувати компетентності, яких потребує сьогодні суспільство.

Сутність поняття "компетентність" будемо розглядати у такому трактуванні: компетентність – це інтегрована якість (характеристика) особистості, яка визначає її здатність розв'язувати проблеми та вирішувати різноманітні завдання, що виникають у реальних життєвих ситуаціях, у різних сферах діяльності, на основі використання знань та умінь з навчального й життєвого досвіду відповідно до сформованої системи загальнокультурних та професійних цінностей.

У Державному стандарті базової та повної загальної середньої освіти визначено компетентнісний підхід як спрямованість освітнього процесу на досягнення результатів навчання, що передбачає реалізацію предметних та ключових компетентностей.

Вітчизняні та зарубіжні дослідники приділяють велику увагу проблемі класифікації компетенцій випускника вищої школи, обов'язкову складову якою складають ключові компетенції. Ключові компетентності становлять основний набір найзагальніших понять, які мають бути деталізовані в комплекс знань, умінь, навичок, цінностей та відносин за навчальними галузями та життєвими сферами. Навчальною програмою передбачено формування на уроках математики таких десяти основних компетентностей: математичної, уміння вчитися впродовж життя, спілкуватися державною, рідною та іноземними мовами, компетентностей у галузях природознавства і техніки, інформаційно-комунікаційної, соціальної, громадянської, здоров'язбережувальної, обізнаності та самовираження у сфері культури та екологічної грамотності. Математична компетентність має дуалістичний характер, тобто для математики вона є предметною, а для решти предметів – ключовою [23,24].

Однією з основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу в старших класах є лінія рівнянь і нерівностей, яка тісно пов'язана з іншими лініями курсу та має розгалужену систему внутрішньопредметних зв'язків. Зупинимося більш детально на впровадженні компетентнісного підходу під час вивчення показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Формування математичної компетентності під час вивчення тем «Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності» передбачає розуміння учнями означень показникової та логарифмічної функцій та їх властивостей, формування вмінь оперувати числовою інформацією, зокрема виконувати основні операції з логарифмами та числами, піднесеними до певного показника степеня, перетворювати вирази, розв'язувати рівняння і нерівності, які їх містять; будувати і досліджувати графіки даних функцій, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати власної діяльності, встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо), використовувати отримані знання у життєвих ситуаціях.

Результатом компетентності «спілкування державною, рідною та іноземною мовами» є уміння учнів грамотно спілкуватися рідною мовою, ставити запитання і розпізнавати проблему, міркувати, робити висновки, розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних завдань, доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність тверджень. Словниковий запас школярів поповнюється такими термінами як «показник степеня», «показникове рівняння», «показникова нерівність», «логарифм», «основа логарифма», «десятковий логарифм», «натуральний логарифм», «логарифмування», «потенціювання» тощо.

Основними компетентностями у природничих науках і технологіях є уміння школярів розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі і визначати з них ті, які можна розв'язати засобами математики, будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів. Наприклад, під час знайомства з логарифмічною функцією, рівняннями і нерівностями, дітям варто донести, що ці знання потрібні не лише для розв'язування вправ з підручника, їх використовували багато років назад і використовують сьогодні у різних сферах діяльності.

Логарифми широко використовуються у повсякденному житті. Логарифми проникають і в галузь психології. Досліди показали, що організм людини ніби “логарифмує” отримані ним подразнення, тобто величина відчуття приблизно пропорційна десятковому логарифму величини подразнення.

В астрономії гучність шуму й яскравість зірок оцінюється однаковим чином за логарифмічною шкалою. «Величина» зірки являє собою логарифм її фізичної яскравості. Гучність виражена в белах дорівнює десятковому логарифму відповідної фізичної величини. За логарифмічною спіраллю закручено багато галактик, у тому числі і Сонячна система.

К. Ціолковський вивів формулу для розрахунку абсолютної швидкості, якої досягає ракета, коли з неї витече все паливо. Будова слухового апарату людини відповідає властивостям цієї функції. Тому діапазон, що сприймає вухо, низький – від шелесту листя до гуркоту грому. Під час наповнення ставків необхідно враховувати кількість води, що прибуватиме в період повені. Розрахунки проводяться саме за допомогою цієї функції. Якщо вас цікавить закон зміни роботи газу і закон зміни сили відчуття від сили збудження (психофізичний закон Вебера); закон зміни тиску від зміни висоти; тривалість хімічної реакції, зверніться до логарифмічної функції.

Раковини багатьох молюсків, равликів, а також роги таких ссавців як архари (гірські кози), закручені за логарифмічною спіраллю. Можна сказати, що ця спіраль є математичним символом відношення форм росту.

Великий німецький поет Іоганн Вольфганг Гете вважав її математичним символом життя й духовного розвитку. У соняшника зернята розташовані також за дугами, близькими до логарифмічної спіралі. Один з найбільш поширених павуків, епейра, сплітаючи павутину, закручує нитки навколо центра за логарифмічною спіраллю. І таких прикладів з повсякденного життя можна навести безліч.

Інформаційно-цифрова компетентність як ніколи важлива у сучасному суспільстві, адже вона передбачає формування навичок роботи з інформацією, зокрема структурування даних, вибору з усього потоку даних основного, оцінювати його достовірність та істинність, складання алгоритмів для розв'язання поставлених завдань та їх реалізація.

Під час вивчення показникових рівнянь дітям можна пропонувати складати алгоритми розв'язання рівнянь певних видів.

Наприклад, складемо алгоритм розв'язування для рівняння вигляду k_1 $^{g1(x)} + k_2\,^{g2\,(x)} + \ldots + k_n\,^{gn(x)} = m$, які можна за допомогою властивостей степеня та тотожних перетворень, зокрема, винесенням спільного множника за дужки, звести до виду $a^{\,f(x)} = a^{\,b}$. Тобто записати ліву частину рівняння як степеневу функцію, а праву як степінь з однаковими основами. В такому випадку можна скористатися правилом: степені з однаковими основами рівні тоді і тільки тоді, коли їх показники однакові, тобто $f(x) = b$. Сформулюємо це у вигляді поетапного алгоритму:

№	Етап алгоритму	Практичне застосування. Розв'язати рівняння: $5^x - 2 \cdot 5^{x-4} = 623$
1.	Виконати за необхідності тотожні перетворення та винести спільний множник (степеневу функцію) в лівій частині рівняння за дужки, знайти числове значення в дужках.	Винесемо найменший степінь за основою 5, тобто 5^{x-4} , за дужки: $5^{x-4}\,(5^4 - 2) = 623$ $5^{\,x-4} \cdot 623 = 623$ (2).
2.	Поділити ліву і праву частини рівняння на значення, отримане в дужках та представити праву частину у вигляді степеня з основою, що співпадає з основою степеневої функції у лівій частині.	Поділимо обидві частини рівняння на число 623: $5^{\,x-4} = 1$ $5^{\,x-4} = 5^{\,0}$.

3	Прирівняти показники степенів лівої і правої частин рівняння, отриманого на другому етапі.	Скористаємося раніше сформульованим правилом: $x - 4 = 0$.
4	Розв'язати отримане на третьому кроці не показникове рівняння відносно змінної.	Знайдемо корінь отриманого лінійного рівняння: $x = 4$ Відповідь: 4.

Діти повинні вміти застосовувати отримані знання на практиці при розв'язуванні різноманітних прикладних задач, планувати власну освітню траєкторію, прагнути завжди реалізовувати поставлені цілі. Для цього необхідно розуміти основні властивості логарифмічних та показникових функцій, вміти виконувати операції з логарифмами та степенями, знати алгоритми розв'язання рівнянь і нерівностей запропонованих видів, обирати з усіх можливих варіантів найбільш раціональні. Лише маючи гарну теоретичну базу і її розуміння, можна досягти значних успіхів при вивченні даної теми. Ці навички передбачають реалізацію компетентностей уміння вчитися впродовж життя та ініціативності та підприємливості.

Формуванню соціальних, комунікативних, інформаційних компетенцій чи не найбільше сприяють дидактичні ігри та нетрадиційні уроки. Для цього можна використовувати різноманітгі ігрові моменти, такі як: «Хто швидше?», «Віриш-не віриш» , «Хрестики-нулики», «Математичне доміно» тощо. Працюючи в колективі діти вчаться доводити та відстоювати свою позицію, ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях, співпрацювати в команді, вносити свою частку в роботу групи для вирішення проблеми, нести відповідальність за спільну справу.

Однак належну увагу слід приділяти організації самостійної роботи учнів як одного із найбільш доступних і перевірених на практиці шляхів підвищення ефективності уроку. За формою організації навчальної самостійної роботи можна використовувати індивідуальні, фронтальні і групові, а в залежності від рівня самостійної продуктивної діяльності -

відновлювальні, реконструктивно-варіативні, евристичні і творчі роботи. Із метою розвитку життєвої, соціальної, інформаційної та предметної компетентностей учнів можна використовувати різні прийоми роботи з підручником (читання, переказ, складання плану відповіді, короткий конспект, пошук відповіді на поставлене запитання, аналіз, порівняння, тощо), складання задач, рецензування відповідей однокласників, виконання вправ на практичне застосування вмінь і навичок, підготовка рефератів, виконання індивідуальних і групових завдань, перевірочних, закріплюючих, узагальнюючих самостійних та контрольних робіт, створення і захист проектів тощо.[1,5]

2.2. Формування компетентностей учнів на різних етапах уроку під час вивчення показникових рівнянь

Очевидно, що формувати компетентності можна не лише за допомогою завдань, тому, взявши за основу виділені прийоми реалізації ключових компетентностей на уроках математики, було розроблено таблицю, що містить приклади формування ключових і предметних компетентностей на різних етапах уроку на прикладі конкретної теми.

Тема: Показникові рівняння. Розв’язування задач.

(Навчальний підручник: Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с.: іл.)

Етап уроку	Види діяльності, дії вчителя	Компетентності, що формуються
Організаційний момент.	Привітання з учнями. Перевірка готовності до уроку.	Формування позитивної мотивації до навчання, налаштування старшокласників до продуктивної і

	Робота з епіграфом.	плідної роботи.
Перевірка домашнього завдання. (п. 2 ст. 16 (вивчити), виконати завдання № 2.2).	Колективне обговорення домашнього завдання; Рецензування відповідей окремих учнів;	Формування комунікативної компетентності: грамотно висловлюватися рідною мовою; чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; робити висновки на основі інформації , поданої в різних формах. Розвивати самостійність мислення, формувати гнучкість і точність думки, розвивати увагу і пам'ять.
Актуалізація опорних знань.	Бесіда по темі минулого уроку. (Які рівняння називають показниковими ?)	Формування навчально-пізнавальної, соціальної та комунікативної компетентностей: активувати розумову діяльність учнів, розвивати критичне мислення, вчити оцінювати знання учнів, вчити оперувати знаннями, розвивати гнучкість використання знань . Уміння вчитися вродовж життя: аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість під час виконання перевірочної тестової роботи.
	Інтерактивна вправа «Коло ідей». Вкажіть серед записаних рівнянь показникові. Поясніть свій вибір.	
	Інтерактивна вправа «Продовжи рівність». Продовжити рівності: $5^{x+3} =$ $\sqrt[3]{5^2} =$ $\left(5^x\right)^3 =$ $5^{1-x} =$	
	Написання тестової роботи з подальшою взаємоперевіркою.	

Мотивація навчальної діяльності. Оголошення теми і мети уроку.	Розповідь про важливість вивчення даної теми, її практичне застосування у сучасному світі.	основні компетентності у природничих науках і технологіях: розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв’язати засобами математики; усвідомлення значущості даної теми для практичної діяльності.
Вивчення нового матеріалу.	Лекція. Знайомство з новими видами показникових рівнянь: • Зведення до спільної основи; • Винесення спільного множника за дужки; • Зведення до квадратного; • Розв’язування однорідних рівнянь; • Графічний спосіб. Виведення алгоритмів їх розв’язування.	Формування предметної компетентності: працювати над засвоєнням учнями схеми рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь та рівнянь, що до них зводяться, формувати вміння розв’язувати показникові рівняння різних видів; вчити короткої форми та раціональної запису, робити опорні конспекти, використовуючи різноманітні скорочення та знакові системи, відпрацьовувати вміння робити висновки і узагальнення, структурувати інформацію; діяти за певним планом; знаходити інформацію та використовувати її у

	Самостійна робота з роздатковим матеріалом. Складання опорного конспекту.	власній роботі (формування інформаційно-комунікаційної, загальнокультурної компетентностей).
Узагальнення і систематизація знань, формування вмінь і навичок.	Робота з підручником. Колективне виконання вправ 2.3, 2.5, 2.7.	Формування навчально-пізнавальної, загальнокультурної та комунікативної компетентностей: закріпити знання учнів, формувати вміння перевіряти, слухати, думати Формування соціальної та громадянської компетентостей: співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі, бути мобільним, стійким перед труднощами, створювати ситуацію успіху для формування позитивного ставлення до себе ”я можу, у мене все вийде ”.
	Робота в парах. Виконання завдання на картках.	

Підведення підсумків уроку. Рефлексія.	Інтерактивна вправа «Мікрофон». Бесіда по матеріалу, що розглядали на уроці. Які методи розв'язування рівнянь ми вивчали? Яким способом слід розв'язати запропоновані рівняння? Чи було досягнуто поставленої мети?	Уміння вчитися впродовж життя: аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість. Визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; організовувати та планувати свою подальшу самостійну навчальну діяльність.
Домашнє завдання.	Повторити параграф 2 (с.16), опрацювати опорний конспект. Розв'язати рівняння даних типів. № 2.4, 2.6, 2.8 (1).	Формування соціальної, предметної компетентностей, зокрема перевірити знання учнів згідно їх рівню підготовки .

До основних принципів відбору змісту навчального матеріалу для реалізації компетентнісно-зорієнтованого підходу, пов'язаного з розв'язуванням показникових та логарифміних рівнянь та нерівностей, доцільно віднести: уточнення загальних методів розв'язування рівнянь та нерівностей; формування орієнтовних основ діяльності з розв'язування рівнянь та нерівностей основними методами; використання усних завдань, які будуть спрямовані на розвиток логічного мислення учнів; організацію навчальних досліджень (аналітичних та графічних), використання задач прикладного характеру.

Методика для реалізації вище зазначених принципів повинна ґрунтуватися на створенні умов для максимальної зацікавленості школярів, зокрема, шляхом відповідності життєвій практиці учнів, наочності, евристичності, а також відповідності методів дослідження математичному апарату, що є в розпорядженні учнів; комплексного і доцільно виправданого поєднання традиційних та сучасних засобів навчання та ІКТ; врахування можливостей кожного школяра та забезпечення до їх відповідності рівневої диференціації.

Для підвищення успішності освітньої діяльності доцільно використовувати різноманітні спеціальні засоби формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь та нерівностей. До них варто віднести: систему прикладних задач, добірку усних вправ та завдань, які сприятимуть підвищенню мотивації старшокласників, активізації їхньої навчальної діяльності, формуванню вмінь аналізувати важливість отриманих знань та використовувати їх у різних навчальних та життєвих ситуаціях; навчальні дослідження учнів, які сприяють формуванню в них здатностей планувати свою навчальну діяльність, розвитку логічного і критичного мислення, дослідницьких здібностей.

Зацікавити предметом школярів, показати необхідність його вивчення для подальшого практичного використання в житті – це щоденний обов’язок кожного вчителя. Тому, починаючи знайомство учнів з новою темою, що вивчається, слід формувати в них потребу в нових знаннях. Тому що не завжди мотивація навчальної діяльності повинна складати окремий етап уроку. Цю роботу по можливості варто проводити впродовж всього уроку, показуючи учням прикладну спрямованість даної теми та важливість цих знань. Діти повинні усвідомлювати, що математика – не просто один із навчальних предметів, а універсальна мова будь-якої науки, техніки та технологій.

2.3. Особливості навчання учнів профільних класів розв'язуванню показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей

Засвоєння учнями нових знань при вивченні розділу базується на раніше вивченному матеріалі про степені й корені, розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь і нерівностей тощо. Бажано, щоб актуальні питання раніше вивченного матеріалу грунтовно систематизувалися за рахунок часу, виділеного на повторення. При плануванні узагальнюючого повторювання це слід урахувати, і до повтореного матеріалу без потреби можна не повертатися.

Оскільки програмою передбачено ознайомити учнів з найпоширенішими видами показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей, не приділяючи занадто багато уваги спеціальним методам, варто будувати виклад матеріалу шляхом відпрацювання стандартних методів на великій кількості вправ з відповідним теоретичним обґрунтуванням і поясненнями, застосовувати диференційований підхід до навчання та пов'язувати вивчення матеріалу з властивостями показникової і логарифмічної функції.

Приступаючи до розв'язування найпростійших показникових рівнянь, доцільно на дошці написати основні формули дій із степенями. Спочатку доцільно розглянути найпростіші рівняння виду $2^{x-5}=\sqrt[5]{8}$. Записуючи праву частину рівняння як степінь числа 2, дістаємо $2^{x-5}=2^{\frac{3}{5}}$. Оскільки основи даних степенів рівні і самі степені рівні, то маємо змогу прирівняти показники: $x-5=\frac{3}{5}$. Тоді дістаємо: $x=5\frac{3}{5}$.

Звертаємо увагу учнів на те, що записані вище формули, якщо їх застосовувати зліва направо, дають змогу замість двох степенів записати один степінь. Отже, якщо в лівій і правій частинах даного показникового рівняння тільки добутки, частки, степені або корені, то можна це рівняння завжди звести до найпростійшого рівняння виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, $(a>0)$. Цей орієнтир бажано занотувати учням в зошитах, щоб вони в подальшому вільно пізнавали такі показникові рівняння, які безпосередньо зводяться до найпростійших.

При введенні поняття логарифму і властивостей логарифмічної функції необхідно значну увагу приділити вмінню застосовувати основну логарифмічну тотожність, а також формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Починаючи роботу над розв'язуванням логарифмічних рівнянь, треба враховувати, що всі властивості логарифмічної функції були доведені за умови, що вирази, які стоять під знаком логарифма, додатні.

Наприклад, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ тільки при $x > 0$ і $y > 0$. Якщо ж у рівнянні або нерівності знаходиться вираз-добуток xy, то він буде додатнім не тільки тоді, коли x і y додатні, але й тоді, коли x та y будуть одночасно від'ємні. У цьому випадку формулу «логарифм добутку» не використовують, бо можлива втрата коренів.

Структура рівносильних перетворень рівнянь:

- Область визначення;
- Обмеження, які необхідні для гарантування прямих і обернених перетворень;
- Відповідні властивості числових рівностей або властивості відповідних функцій.

Як бачимо, щоб виконувані перетворення були рівносильні, необхідно, щоб виконувалися і обернені перетворення на області визначення даного рівняння.

Бажано по можливості не використовувати формули логарифмування добутку, частки і парного степеня, якщо це призводить до звуження області визначення рівняння, а користуватися цими формулами тільки справа наліво, що приводить до розширення області визначення (в цьому випадку можлива хіба що поява сторонніх коренів, але їх можна відсіяти перевіркою).

Приклад: Розв'язати рівняння $2\lg x(x-1) = \lg(x-1)^2 + 4$ (1).

Розв’язання: На області визначення рівняння $\begin{cases} x(x-1) > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$ це рівняння рівносильне рівнянню $\lg(x(x-1))^2 - \lg(x-1)^2 = 4$ (2),

яке в свою чергу рівносильне рівнянню $\lg\frac{x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4$ (3)

Усі перетворення рівносильні, бо на області визначення даного рівняння можна виконувати перетворення (1) - (2) - (3) і обернені перетворення (3) - (2) - (1). Скоротивши в рівнянні (3) дріб на $(x-1)^2$ (на області визначення $(x-1)^2 \neq 0$), дістанемо рівносильне рівняння: $\lg x^2 = 4$. Це рівняння за означенням логарифма рівносильне рівнянню $x^2 = 10^4$.

Звідси $x = \pm 100$. Оскільки ці значення входять в область визначення рівняння і ніяких додаткових обмежень у нас не було, то $x = \pm 100$ - корені даного рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що при розв’язуванні логарифмічних рівнянь можна користуватися не тільки рівносильними перетвореннями, але й діставати рівняння-наслідки (коли ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені). Учні повинні розуміти, що при використанні рівнянь-наслідків можлива поява стороніх коренів і тому в цьому випадку перевірка є складовою частиною розв’язування рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що певної акуратності потребує використання формули переходу від однієї основи до іншої:

$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, де $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Якщо a і b -числа, що недорівнюють одиниці, то цю формулу можна застосовувати і зліва направо і справа наліво (при $N > 0$), тобто використання цієї формули при розв’язуванні рівнянь або нерівностей приводить до рівняння (нерівності), рівносильного даному. Якщо ж новою основою логарифма є вираз із змінною, то може виявитися, що цей вираз на області визначення початкового рівняння дорівнюватиме одиниці, а після застосування формули переходу від однієї основи до іншої вираз, що стоїть в основі логарифма, вже не дорівнюватиме одиниці. В цьому випадку застосування формули переходу від однієї основи до іншої може привести до втрати тих коренів початкового рівняння, для яких нова основа логарифма дорівнює одиниці.

Підсумовуючи ці міркування, робимо висновки: якщо при переході від однієї основи логарифмів до іншої нова основа - число (звичайно більше від нуля і не дорівнює одиниці), то дістанемо рівняння, рівносильне даному на його області визначення.

Якщо доводиться використовувати вираз із змінною як нову основу логарифма, то щоб не втратити корені рівняння, необхідно розглядати два випадки:

- вираз, який береться як нова основа, дорівнює одиниці (якщо це можливо на області визначення розглядуваного рівняння), і перевіряємо, чи будуть ці значення змінної, при яких вираз дорівнює одиниці, коренями даного рівняння;
- нова основа не дорівнює одиниці - в цьому випадку користуємося формулою переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Бажано звернути увагу учнів на те, що деякі логарифмічні рівняння, які зведені до вигляду $f(x)=0$ можна розв’язати за допомогою розкладання лівої частини рівняння на множники.

Досить часто зустрічаються рівняння, члени яких є степенями, в яких основа і показник степеня - функції від змінної величини.

Приклад: Розв’язати рівняння $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

Розв’язання: Область визначення: $x>0$. Тоді ліва і права частини цього рівняння додатні на області визначення. Прологарифмуємо обидві частини за основою 4: $\log_4\left(x^{\log_4 x-2}\right)=\log_4\left(2^{3(\log_4 x-1)}\right)$.

Дістаємо рівняння, рівносильне даному на області визначення:
$(\log_4 x-2)\cdot\log_4 x=3(\log_4 x-1)\cdot\log_4 2$.

Позначимо $\log_4 x=y$ і, врахувавши, що $\log_4 2=\frac{1}{2}$, маємо: $(y-2)y=3(y-1)\cdot\frac{1}{2}$

Звідки $y=3$ або $y=\frac{1}{2}$. Тоді $\log_4 x=3$ або $\log_4 x=\frac{1}{2}$. Отже, $x=4^3=64$ або $x=4^{\frac{1}{2}}=2$. Оскільки ці значення входять до області визначення, то $x=64$ і $x=2$- корені даного рівняння.

Підводячи підсумки розв'язування цього рівняння, бажано звернути увагу учнів на те, що в цьому рівнянні (в його лівій частині) змінна входить і в основу, і в показник степеня. Доцільно зафіксувати в зошитах учнів, що рівняння, в якому змінна входить і в основу, і в показник степеня, найчастіше розв'язується логарифмуванням обох частин рівняння.

Слово «найчастіше» присутнє в наведеному правилі в зв'язку з рівняннями типу: $x^{2\log_x(x+1)}=4x+4$.

На його області визначення $(x>0, x\neq 1)$ це рівняння рівносильне рівнянню: $x^{\log_x(x+1)^2}=4x+4$, яке за основною логарифмічною тотожністю рівносильне (на області визначення) рівнянню $(x+1)^2=4x+4$. Звідси $x=-1$ (не входить до області визначення) або $x=3$ (входить до області визначення і є коренем).

Після відпрацювання цього правила на прикладах доцільно запропонувати учням більш загальний підхід (він, як правило, використовується тоді, коли немає можливості взяти логарифм від обох частин рівняння) - перехід від степеня, в основі якого стоїть вираз із змінною, до степеня з числовою основою a за формулою $(f(x))^{\varphi(x)}=a^{\varphi(x)\log_a f(x)}$, де $a>0$, $a\neq 1$.

Зауваження. Очевидно, що при $f(x) > 0$ цю формулу можна застосовувати як зліва направо, так справа наліво. Якщо ми використаємо цю формулу при розв'язуванні рівняння, на області визначення якого $f(x) > 0$, то ми гарантуємо і прямі, і обернені перетворення, тобто гарантуємо рівносильність утвореного рівняння на області визначення даного.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що ідея логарифмування обох частин рівняння (або нерівності) є досить плідною і може використовуватись для розв'язування різних типів рівнянь (нерівностей), починаючи з найпростіших показникових типу $2^{x+3} = 5$ (за означенням логарифма або прологарифмувавши обидві частини за основою 2, маємо: $x + 3 = \log_2 5$, тобто $x = \log_2 5 - 3$). [39].

При вивченні даної теми виникає досить багато труднощів, які пов‘язані з особливостями самого матеріалу:

- у більшості випадків відсутній чіткий алгоритм розв‘язання ірраціональних рівнянь та нерівностей;
- при розв‘язанні рівнянь та нерівностей даного виду слід виконувати перетворення, що призводять до рівнянь (нерівностей), не рівносильних даним. Тому досить часто виникають помилки, які зазвичай пов‘язані з втратою чи отриманням сторонніх коренів у процесі розв‘язування.

Однією з типових помилок є те, що школярі без додаткових пояснень використовують перетворення, що порушують рівносильність, що призводить до втрати коренів або появі сторонніх, також учні не враховують область допустимих значень. Тому необхідно навчати учнів знаходити спочатку область допустимих значень, так як в деяких випадках уже по ній можна зробити висновок про існування розв‘язків рівняння.

У процесі розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та їх систем корисно систематизувати знання учнів про рівносильність рівнянь, нерівностей і їх систем та виділити операції, які можуть порушувати рівносильність. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв’язуванні рівнянь і в зв’язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв’язків, а також на причини втрати коренів. Тому учителю слід вимагати від учнів обґрунтування всіх виконаних ними дій при розв‘язанні тих чи інших рівнянь і нерівностей, а також показати школярам раціональні способи та методи їх розв‘язання.[5,39]

Отже, методика навчання розв‘язання показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей повинна бути спрямована на формування в школярів загального прийому розв‘язання рівняння або нерівності. Для учнів це можна подати у вигляді певного алгоритму. Наприклад:

Етапи загального прийому розв‘язання рівняння, нерівності:

- визначити вид рівняння, нерівності;
- встановити стандартне воно чи ні; якщо стандартне, то розв‘язання відповідно до відомих правил, алгоритмів; якщо нестандартне, то з'ясування, які перетворення необхідно виконати, щоб звести його до стандартного, або перейти до використання штучних прийомів розв‘язання;
- виконати рівносильні перетворення;
- виконати перевірку;
- записати відповідь. [44]

2.4. Формування практичних вмінь і навичок при розв’язуванні показникових рівнянь і нерівностей різними способами

Способи розв’язування показникових рівнянь

Показникові рівняння відносяться до трансцендентних рівнянь. Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме входить тільки до показників степенів при сталих основах.

Рівняння називають показниковим, якщо його невідомі входять лише до показників степенів.

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв’язування. Основними методами розв’язування показникових рівнянь є:

1) Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами.
2) Логарифмування рівнянння.
3) Метод уведення нової змінної.
4) Розклад рівняння на множники.
5) Розв’язування однорідних рівнянь.
6) Функціонально-графічний метод.

Розглянемо кожен із цих методів докладніше. [4,10,23,41]

1) Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами застосовують у рівняннях, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Такі рівняння розв’язують на основі монотонності показникової функції. Якщо a > 0, a ≠1, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ і $f(x) = g(x)$— рівносильні.

Теорема: Нехай $a > 0$ и $a \neq 1$. Рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Доведення: Доведемо, що якщо $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$. Дійсно, так як показникова функція строго монотонна, то з рівності її значень $a^c = a^d$ слідує рівність показників $c = d$. Навпаки: якщо $f(x) = g(x)$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами можна здійснити за допомогою таких рівностей (властивостей степеня):

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Приклад: Розв’язати рівняння $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

Розв’язання: Записавши рівняння у вигляді $2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{2x}{2\cdot 3}} \cdot 2^{-\frac{3}{x\cdot 2\cdot 3}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$, прирівняємо показники при основі 2:

$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{3}.$

Далі маємо: $5x^2-14x-3=0, \quad x_1=3, \quad x_2=-\frac{1}{5}.$

Відповідь: 3; $-\frac{1}{5}$.

Приклад: Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{5}\right)^{\lg x}=5^{\lg 2}(25)^{\lg\left(\sqrt{x}-1\right)}$.

Розв'язання: Прирівнюємо показники при основі 5:

$\frac{1}{2}\lg x=\lg 2+2\lg\left(\sqrt{x}-1\right)$, або $\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Позначивши $\sqrt{x}=t$, дістанемо:

$t=2(t-1)^2, \quad t_1=2, \quad t_2=\frac{1}{2};$

$\sqrt{x}=2, \quad x_1=4;$.

$\sqrt{x}=\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{1}{4}.$

Корінь x_2 не задовольняє рівняння.

Відповідь: 4; $\frac{1}{4}$.

Приклад: Розв'язати рівняння .

Розв'язання:

;

$10^x=10^{-1}\cdot 10^{3x-3}$;

$10^x=10^{3x-4}$; x=2.

Відповідь: 2.

Приклад: Розв’яжіть рівняння

$2^{x-1}+2^{x-2}-3\cdot 2^{x-3}=3\cdot 4^{\frac{2}{x}}$

;

Розв’язання:

$2^{x-1}+2^{x-2}-3\cdot 2^{x-3}=3\cdot 4^{\frac{2}{x}}$

;

;

;

;

$x-3=\frac{4}{x}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\x=-1,\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{cases}$

Відповідь: -1;4.

2) Логарифмування рівняння. Використовуючи властивості степенів, рівняння $a^x=b$, де $a>0, a\neq 0, b>0$, можна розв’язувати так: $a^x=b \Leftrightarrow a^x=a^{\log_a b} \Leftrightarrow x=\log_a b$.

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція f(x), тобто рівняння має вигляд $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0,$ то за допомогою логарифмування обох частин цього рівняння (це можливо, тому що обидві частини рівняння додатні), приходимо до еквівалентного рівняння $f(x) = \log_a b$.

Приклад: Розв'язати рівняння $5^{x-1} = 3^{x^2-3x+2}$.

Розв'язання: Логарифмуємо обидві частини рівняння при основі 3:

$2(x-1)\log_3 5 = (x-1)(x-2);\ x-1=0,\ x_1 = 1,$

$\log_3 5 = x-2,\quad x_2 = 2 + \log_3 5 = \log_3 45.$

Відповідь: 1; $\log_3 45$.

Приклад: Розв'язати рівняння $|x|^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання: Оскільки $|x| > 0$, то можна логарифмувати рівняння.

$(x^2-2x)\lg|x| = 0;$

$x^2 - 2x = 0;$

$x_1 = 2;\ |x| = 1;\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Відповідь: 2; 1; -1.

3) Метод уведення нової змінної. Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування позбутися числових доданків у показниках степенів, використовуючи формули зведення степенів. Потім намагаємося всі степені (зі змінною в показнику) звести до однієї основи і виконати заміну змінної. Якщо у рівнянні, нерівності або тотожності кілька разів присутній один і той самий вираз зі змінною, то зручно цей вираз позначити однією буквою (новою змінною).

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни змінної та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного заданому на його ОДЗ, через те, що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожний корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, — аналогічно обґрунтуванню рівносильного переходу для найпростіших показникових рівнянь). У тих випадках, коли всі степені (зі змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння.

Приклад: Розв’язати рівняння $27^{\lg x} - 7 \cdot 9^{\lg x} - 21 \cdot 3^{\lg x} + 27 = 0.$

Розв’язання: Позначивши $3^{\lg x} = t$, дістанемо:

$t^3 - 7t^2 - 21t + 27 = 0;$

$t_1 = 1, \ \ t_2 = 9, \ \ t_3 = -3$

$3^{\lg x} = 1, \quad x_1 = 1; \ \ 3^{\lg x} = 9, \quad x_2 = 100; \ \ 3^{\lg x} = -3, \quad x \in \varnothing$.

Відповідь: 1; 100.

Приклад: Розв’язати рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Розв’язання: Позначивши $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$, дістанемо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$; $t + \frac{1}{t} = 4, \ t_{1,2} 2 \pm \sqrt{3};$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}, \quad x_1 = 2;$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}, \ x_2 = -2.$

Відповідь: 2; -2.

Приклад: Розв’язати рівняння $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Розв’язання: Позначивши $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t,$ дістанемо:

$t^2 - 5t \cdot 2^{-1} - 6 = 0,$

$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0$;

$t_1 = 4, \ x + \sqrt{x^2 - 2} = 2, \ x = 1{,}5;$

$t_2 = -1{,}5; \ t_2 = -1{,}5,$

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -1{,}5; \ x \in \varnothing$.

Відповідь: 1,5.

Приклад: Розв’язати рівняння $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

Розв’язання:

$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$;

; ;

Нехай , тоді $t^2 - 8t + 7 = 0$;

t_1 = t_2 =

; ;

Отже, 1) ; x=1;

2); x=0.

Відповідь: 0; 1.

4) Розклад рівняння на множники.

Рівняння $f(x)=0$ намагаємося подати у вигляді $f_1(x)f_2(x)=0$ і прирівнюємо до нуля кожний множник.

Приклад: Розв’язати рівняння $3 \cdot 4^x + (3x-10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$.

Розв’язання: Введемо заміну $2^x = t$. Розкладемо рівняння $3 \cdot t^2 - 10 \cdot t \cdot +3 + x(3t-1) = 0$ на множники: $(3t-1)(t-3) + x(3t-1) = 0$.

Далі маємо:

$$3t-1=0, \ \ t=\frac{1}{3}, \ \ 2^x = \frac{1}{3}, \ \ x_1 = -\log_2 3;$$

$$t-3+x=0, \ \ 2^x = 3-x.$$

Розв’язавши останнє рівняння графічно, знаходимо корінь $x_2 = 1$.

Відповідь: $-\log_2 3$; 1.

Приклад: Розв’язати рівняння $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4$.

Розв'язання: Узявши $2^x = t$, згрупуємо члени з множниками $\sqrt{x}$:

$\sqrt{x}\left(2t^2 - 5t + 2\right) = 2t^2 - 10t + 4,\quad \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(2t^2 - 5t + 2\right) = 0$.

Прирівняємо кожний множник до нуля:

а) $\sqrt{x} - 2 = 0,\ \ x_1 = 4;$

б) $2t^2 - 5t + 2 = 0$, $t_1 - 2,\ t_2 = \dfrac{1}{2};\quad 2^x = 2,\ x_2 = 1,\ 2^x = \dfrac{1}{2},\ x_3 = -1$. Корінь $x_3 = -1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: 4; 1.

5) Однорідні рівняння. Показникові рівняння виду $A \cdot a^{2x} + B(a \cdot b)^x + C \cdot b^{2x} = 0$ називаються однорідними.

Розв'язуються такі рівняння почленним діленням або на $a^{2x} \neq 0$, або на $b^{2x} \neq 0$ ($a^{2x} > 0$, $b^{2x} > 0$).

Рівняння $Aa^x \cdot a^x + Ba^x \cdot b^x + Cb^x \cdot b^x = 0$ можна переписати у вигляді $A\dfrac{a^x a^x}{b^x b^x} + B\dfrac{a^x}{b^x} + C = 0$. Виконавши заміну, $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = t$, дістанемо рівняння $At^2 + Bt + C = 0$.

Приклад: Розв'язати рівняння $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Розв'язання: Запишемо рівняння так:

$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot (4 \cdot 9)^x = 0;$

Поділимо обидві частини рівняння на $4^{2x} \neq 0$. Отримаємо:

$3 + 2 \cdot (9/4)^{2x} - 5 \cdot (9/4)^x = 0;$

Зробимо заміну: $(9/4)^x = t;\ \ t > 0$.

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння:

$2t^2 - 5t + 3 = 0;$

$t_1 = 1,\ t_2 = 3/2$.

Повернемось до заміни і розв'яжемо показникові рівняння:

А) $(9/4)^x = 1;\ (9/4)^x = (9/4)^0;\ x = 0$.

Б) $(9/4)^x = 3/2;\ (3/2)^{2x} = (3/2)^1;\ x = ?$.

Відповідь: 0; ?.

Приклад: Розв’язати рівняння $4\cdot 3^x - 9\cdot 2^x = 5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$.

Розв’язання: Перепишемо рівняння у вигляді:

$$4\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{2}} - 9\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}} = 5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

Виконаємо заміну $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$.

$4t^2 - 9 = 5t$;

$t_1 = \frac{9}{4},\ t_2 = -1;$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{9}{4};\quad x_1 = 4;\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = -1,\quad x\in\varnothing$.

Відповідь: 4.

Приклад: Розв’язати рівняння $6^x + 4^x = 9^x.$

Розв’язання: $3^x\cdot 2^x + 2^x\cdot 2^x = 3^x\cdot 3^x;\ t = \left(\frac{3}{2}\right)^x;$

$t_{1,\,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad x\in\varnothing;$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$

x ≈ 1,18681439.

Відповідь: x ≈ 1,18681439.

Приклад: Розв’язати рівняння $6^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0.$

Розв’язання: Запишемо рівняння у вигляді:

$3^{x^2}\cdot 3^{x^2} - 2\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{x+6} + 3^{x+6}\cdot 3^{x+6} = 0.$

Позначивши $t = \frac{3^{x^2}}{3^{x+6}} = 3^{x^2-x-6}$, дістанемо:

$t^2 - 2t + 1 = 0,\ t = 1;$

$x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = 3,\ x_2 = -2$.

Відповідь: 3; -2.

Приклад: Розв’язати рівняння $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

Розв’язання: Зведемо всі степені до двох основ 4 і 9:

.

Маємо однорідне рівняння (у всіх членів однаковий сумарний степінь – 2x). Для його розв’язування поділимо обидві частини на .

.

Заміна дає рівняння:

;

$t_2 = 2$

$t_1 =$

; ;

Обернена заміна: ; ; x=0.

; ; 2x=1; .

Відповідь: 0; .

6) Функціонально-графічний спосіб.

Функціонально-графічний метод полягає в тому, що, знаходять корені рівняння за допомогою побудови графіків або шляхом добору доводять, що інших коренів рівняння не має.

Даний спосіб базується на вмінні учнів будувати графіки елементарних функцій та показникових функцій і застосовується лише в тих випадках, коли показникові рівняння можна звести до виду $a^{f(x)} = g(x)$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$. Загалом алгоритм вимагає побудови графіків лівої і правої частини. У випадку показникових рівнянь після їх побудови знаходять точки перетину, координати яких по вісі абсцис, які і будуть коренями рівняння.

Приклад: Розв’язати рівняння $7^{6-x} = x + 2.$

Розв'язання: Корінь x=5 може бути знайденим методом підбору. Інших розв'язків рівняння не має, так як функція $f(x)=7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x)=x+2$ монотонно зростає, тобто графіки цих функцій можуть перетинатися не більше ніж один раз.

Тобто графічним способом не важко знайти наближенні розв'язки рівнянь такого виду $a^{f(x)}=\varphi(x)$. Знання графіків функції $y=a^{f(x)}$ та $y=\varphi(x)$ не рідко дозволяє визначити число розв'язків рівняння та їх наближені, а іноді і точні значення.

Приклад: Розв'язати графічно рівняння

Розв'язання: Побудуємо графіки функцій , $y = x + 1$ в одній

системі координат. Графіки і $y = x + 1$ перетинаються в точці, абсциса якої x=0 (Рис.1)

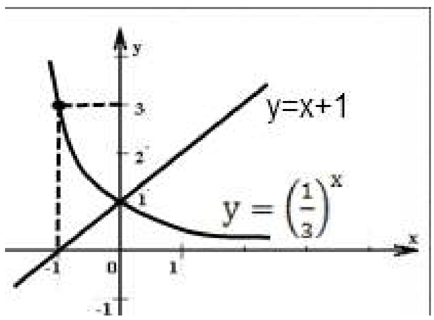


Рис. 1. Графіки функцій і $y = x + 1$

Відповідь: 0.

Способи розв'язування показникових нерівностей

Як і рівняння, нерівність називають показниковою, якщо вона містить змінну лише в показнику степеня. Наприклад, показниковими нерівностями є

нерівності , тощо.

Нерівності виду $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ називаються показниковими.

Найпростішими показниковими нерівностями є нерівності виду $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} \leq b$, $a^{f(x)} < b$, $a^{f(x)} > b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. У показнику степеня в загальному випадку може міститись не «просто» x, а деяка функція, залежна від x (лінійна, квадратна і т.д.). Тоді показникові нерівності набувають виду

або .

Під час їх розв'язування використовують властивість монотонності показникової функції. Функція y = a^x, якщо $a > 1$ – зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає.

Для a$>$1 більшому значенню функції відповідає більший показник. Отже, для a>1 розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування нерівності $f(x) > g(x)$. Якщо $0 < a < 1$, показникова функція спадає, тобто більшому значенню функції відповідає менший показник і для $0 < a < 1$ розв'язування нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ зводиться до розв'язування нерівності $f(x) < g(x)$.

Сформулюємо це у вигляді теореми.

Теорема. При a >1 нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$, то нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.

Наслідок. Якщо a >1, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових нерівностей, запишемо схему рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей у вигляді таблиці.

$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $f(x) \leq g(x)$	Знак нерівності не змінюється $f(x) \geq g(x)$

Аналогічно розв'язується нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Щоб знайти розв'язки, наприклад, нерівності $a^x > b$ при $b > 0$ досить подати b у вигляді степеня з основою a, а саме $b = a^c$. Одержуємо нерівність $a^x > a^c$.

При $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тому з даної нерівності одержуємо $x > c$.

При $0 < a < 1$ показникова функція $y = a^x$ спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тому з нерівності одержуємо $x < c$.

Слід звернути увагу на те, що знак нерівності збігається із знаком нерівності. У випадку нестрогих нерівностей знаки > і < в розв'язаннях замінюються відповідно на $\leq$ і $\geq$.

Висновки про існування розв'язків базуються на тому, що областю значень показникової функції $y = a^x$ є множина додатних чисел, $a^x > 0$! Показникові нерівності завжди мають розв'язки, крім випадку $a^x < b$, коли $b < 0$.

Приклад. Нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а розв'язком нерівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Способи розв'язування показникових нерівностей:

1. Зведення до однієї основи.
2. Винесення спільного множника за дужки.
3. Зведення до квадратної шляхом заміни.
4. Ділення обох частин нерівності на степінь.
5. Однорідні нерівності.
6. Графічний спосіб.

При розв'язуванні більш складних показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й при розв'язуванні рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючись зводити нерівності до найпростіших. [10,29,38,40]

Приклади розв'язання показникових нерівностей різними способами.

Приклад: Розв'язати показникову нерівність $5^x > 25$.

Розв'язання:

Щоб розв'язати дану нерівність потрібно подати число 25 у вигляді степеня з основою 5, тоді нерівність набуває вигляду $5^x > 5^2$. Враховуємо, що показникова функція $y = 5^x$ є зростаючою, тоді при переході до порівняння аргументів знак нерівності не змінюється, одержуємо $x > 2$. Розв'язки показникової нерівності зображуємо на числовій вісі (Рис. 5) і відповідь записуємо у вигляді проміжку.

Рис 2. Розв'язок нерівності $5^x > 25$.

Відповідь: $x \in (2;+\infty)$.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $3^x \le 27$.

Розв'язання:

$3^x \le 3^{3;}$;

3>1, тому показникова функція $y = 3^x$ - зростаюча. Маємо: $x \le 2$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 2]$.

Приклад: Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Розв'язання:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

$0 < \frac{1}{2} < 1$, тому показникова функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - спадна. Маємо: $x < -\frac{3}{2}$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \le 0$.

Розв'язання:

$7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 \le 0$;

Нехай $7^x = t$, тоді $7^{2x} = t^2$

Маємо $t^2 - 8t + 7 \le 0$ - квадратну нерівність.

$t^2 - 8t + 7 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 7$.

а) $7^x = 1$; x=0. б) $7^x = 7$; x=1.

$1 \le t \le 7$,

7>1, тому показникова функція $y = 7^x$ зростаюча. Маємо: $0 \le x \le 1$

Відповідь: [0; 1].

Приклад: Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} + 5^x > 150$.

Розв'язання:

$5 \cdot 5^x + 5^x > 150$;

$5^x(5+1) > 150$;

$5^x > 25$; 5>1, тому показникова функція $y = 5^x$ - зростаюча. Маємо: $x > 2$.

Відповідь: $x \in (2; +\infty)$.

Приклад: Розв'язати показникову нерівність $3^{2x-6} > 9^{5-x}$.

Розв'язання:

$3^{2x-6} > 9^{5-x}$,

$3^{2x-6} > 3^{2(5-x)}$,

$3^{2x-6} > 3^{10-2x}$

2x-6>10-2x,

4x>16,

x>4 .

Відповідь: x >4.

Приклад: Розв'язати нерівність:

. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

Розв'язання:

$3^{1} \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + 3^{2} : 3^{\sqrt{x+1}} \geq 28$;

Нехай . Маємо:

;

;

$t_1 = 1$

$t_2 =$

Нулі функції , $\left[\begin{array}{l} t_1 \leq \frac{1}{3} \\ t_2 \geq 9 \end{array}\right.$.

Рис 3. Розв'язок нерівності .

Повертаємося до заміни:

$3 \quad \leq 3^{-1}$

А) або , тобто

$\sqrt{x+1} \leq -1$ немає розв’язків;

Б) 3 Ъ$\sqrt{(x+1)} \geq 9$; $\sqrt{x+1} \geq 2$; $x \geq 3$.

Відповідь: Найменший цілий розв’язок: $x = 3$.

Приклад: Розв’язати нерівність

Розв’язання:

Використаємо спосіб заміни при розв’язуванні нерівностей:

Введемо нову змінну: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t;$

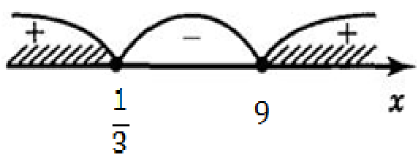


Рис 4. Розв’язок нерівності

Звідси

- функція спадна

Отже, $-2 < x < 1$.

Відповідь: $x \in (-2; \; 1)$.

Приклад: Розв’язати нерівність .

Розв'язання:

Використаємо метод заміни змінної. Уведемо змінну , тоді одержимо

;

$$\frac{t+15-2(t-5)}{(t-5)(t+15)} \le 0$$;

$$\frac{-t+25}{(t-5)(t+15)} \le 0$$ домножимо на (-1)

$$\frac{t-25}{(t-5)(t+15)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (t-25)(t-5)(t+15) \ge 0 \\ t \ne 5 \ \text{ і } \ t \ne 15 \end{cases}$$

Розв’язуємо методом інтервалів.

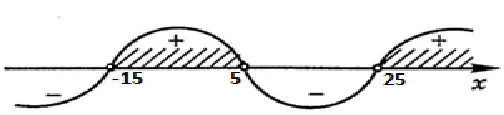


Рис 5. Розв’язок нерівності $t-25$ ≥ 0 .

$t \in (-15;5) \cup [25;+\infty)$

Повертаємось до заміни $\begin{cases} -15 < 5^x < 5 \\ 5^x \ge 25 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} 5^x < 5^1 \\ 5^x \ge 5^2 \end{array}\right.$$

$\left[\begin{matrix} x < 1 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$

Приклад: Розв'язати показникову нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$.

Розв'язання:

Щоб розв'язати цю нерівність потрібно подати число $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою $\frac{1}{4}$, тоді нерівність набуває вигляду $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Враховуємо, що показникова функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ є спадною, тоді при переході до порівняння аргументів знак нерівності змінюється на протилежний, одержуємо $x < 2$. Розв'язки показникової нерівності зображуємо на числовій вісі і відповідь записуємо у вигляді проміжку

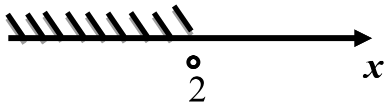


Рис 6. Розв'язок нерівності .

Відповідь: $x \in (-\infty; 2)$.

Приклад: Розв'язати показникову нерівність $6^{x^2+2x} > 6^3$.

Розв'язання:

Показникова функція y = 6^t зростає, тому дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 + 2x > 3$. Розв'язуємо нерівність $x^2 + 2x - 3 > 0$ методом інтервалів (рис. 10).

Маємо: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

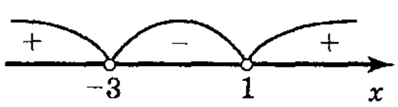


Рис 7. Розв'язок нерівності .

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Приклад: Розв'язати показникову нерівність $25^x + 25 \cdot 5^x - 1250 > 0$.

Розв'язання:

Зробимо заміну $5^x = t$, тоді дана нерівність запишеться так: $t^2 + 25t - 1250 > 0$.

Розв'яжемо одержану нерівність методом інтервалів (рис.8).

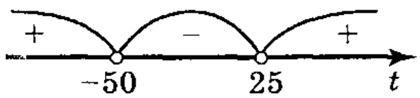


Рис 8. Розв’язок нерівності

Тоді $t < -50$ або $t > 25$. Отже, маємо дві нерівності:

$5^x < -50$ або $5^x > 25$.

Розв'яжемо їх:

а) $5^x < -50$ — розв'язків немає;

б) $5^x > 25$; $5^x > 5^2$; $x > 2$.

Відповідь: $x > 2$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$.

Розв’язання:

Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то маємо $x^2 - 2x \ge x + 4$,

$x^2 - 3x - 4 \ge 0$.

Розв’язавши цю нерівність, маємо $x \le -1$ або $x \ge 4$.

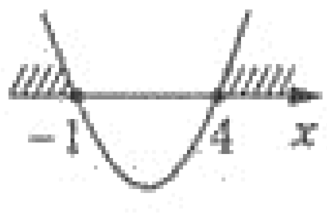


Рис 9. Розв’язок нерівності $x^2 - 3x - 4 \ge 0$

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > \frac{3}{16}$.

Розв’язання:

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > \left(\frac{4^2}{3}\right)^{-1}$;

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>\left(\frac{4^2}{3}\right)^{-1};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>\frac{3}{16};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\left(\left(\frac{4}{3}\right)-1\right)>\frac{3}{16};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\frac{1}{3}>\frac{3}{16};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>\frac{9}{16};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>\left(\frac{4}{3}\right)^{-2};$$

$$x>-2.$$

Відповідь: (-2; $+\infty$).

Приклад: Розв'язати нерівність $3^{x+2}+3^{x-1}<28$.

Розв'язання:

$$3^{x+2}+3^{x-1}<28;$$

$$3^{x+2}+3^{x-1}<27+1;$$

$$3^{x+2}+3^{x-1}<3^3+3^0;$$

$$3^{x-1}(3^3+1)<3^3+3^0;$$

$$3^{x-1}<1;$$

$$x-1<0;$$

$$x<1.$$

Відповідь: (-∞; 1).

Приклад: Розв'язати нерівність $4^x-2^{x+1}-8>0$.

Розв'язання:

$$4^x-2^{x+1}-8>0;$$

$$2^{2x}-2^{x+1}-2^3>0;$$

$$2^x(2^2-2^1)>8;$$

$$2^x\cdot 2>8;$$

$$2^x>4;$$

$$x>2.$$

Відповідь: (2; $+\infty$);

Приклад: Розв'язати нерівність $(4^x-16)(x^2+2x-3)\le 0.$

Розв'язання:

Оскільки метод інтервалів є універсальним методом для розв’язування нерівностей, то його можна застосовувати і для розв’язування показникових нерівностей.

Областю допустимих значень змінної у даній нерівності є множина всіх дійсних чисел. Знайдемо нулі функції $f(x) = (4^x - 16)(x^2 + 2x - 3)$.

Для цього слід розв’язати сукупність рівнянь:

[EMBED Equation.3 ,

[EMBED Equation.3 .

Нулями функції є $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1.$

Позначимо на їх числовій осі та знайдемо знак функції $f(x) = (4^x - 16)(x^2 + 2x - 3)$ на кожному з інтервалів.

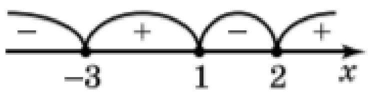


Рис 10. Розв’язок нерівності $(4^x - 16)(x^2 + 2x - 3) \le 0.$

Відповідь: [-3; 1] ∪ [2; +∞).

Приклад: Розв’язати графічно нерівність $2^x \le 3 - x.$

Розв’язання:

Для того, щоб розв’язати показникові нерівності виду $a^{f(x)} > g(x)$, $g(x) > a^{f(x)}$, $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ графічним способом, необхідно:

1) Побудувати графіки лівої і правої частини нерівності на координатній площині.

2) Знайти значення тих абсцис, за яких графік лівої частини нерівності знаходиться вище графіка правої частини нерівності.

3) Розв’язком нерівності буде проміжок, який міститиме абсциси знайдених точок. Для нерівностей виду $a^{f(x)} < g(x)$, $g(x) < a^{f(x)}$, $a^{f(x)} < b^{g(x)}$ застосовується подібний алгоритм, але на другому кроці необхідно знайти значення тих абсцис, за яких графік лівої частини нерівності знаходиться нижче графіка правої частини нерівності.

Побудуємо графіки функцій $y = 2^x$ та $y = 3 - x$ (рис. 11). Із рисунка видно, що $2^x \le 3 - x$ при $x \le 1$. Розв'язком нерівності $2^x \le 3 - x$ є проміжок [-∞;1].

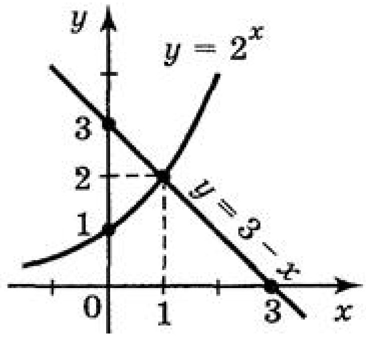


Рис 11. Графіки функцій $y = 2^x$ та $y = 3 - x$.

Відповідь: (-∞;1].

2.5. Формування практичних вмінь і навичок при розв'язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей різними способами

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, що містять невідому величину під знаком логарифма або в основі логарифма (або те і друге одночасно). Розв'язати логарифмічне рівняння – це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь використовуються означення логарифма та його властивості, дії логарифмування та потенціювання, різні логарифмічні тотожності.

Способи розв'язання логарифмічних рівнянь [3,10,18,30].

1) Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд log x = b, де a > 0, a ≠ 1, x > 0. За означенням логарифма випливає, що x = a^b.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння такий: $\log_a x = \log_a b$, де a > 0, a ≠ 1, x > 0, b > 0. Із цього рівняння випливає, що x = b. Дійсно із рівності $\log_a x = \log_a b$ на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо: x = $a^{\log_a b}$ = b.

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння $\log_x a = b$, де $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$. За означенням логарифма маємо: $x^b = a$, звідси $x = a^{\frac{1}{b}}$. Слід враховувати, що:

а) при $a \neq 1$ і $b \neq 0$ має єдиний корінь $x = a^{\frac{1}{b}}$;

б) при $a = 1$ і $b = 0$ має розв'язком будь-яке додатне, відмінне від одиниці число;

в) при $a = 1$ і $b \neq 0$ коренів не має;

г) при $a \neq 1$ і $b = 0$ коренів не має .

Приклад : Розв'язати рівняння $0{,}2\log_x \frac{1}{32} = -0.5$.

Розв'язання: Оскільки $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$, то $\log_x \frac{1}{32} = 5\log_x \frac{1}{2}$, тобто початкове рівняння рівносильно рівнянню $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, звідки $x = (1/2)^{-2} = 4$. Число 4 - єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: 4.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $\log_3 (2x + 1) = 2$.

Розв'язання: За означенням логарифма маємо:

$2x + 1 = 3^2$,

$2x = 8$,

$x = 4$.

Перевірка: $\log_3(2?4 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад : Розв'яжіть рівняння $\log_3 x = \log_3(6 - x^2)$.

Розв'язання: Із рівності логарифмів чисел випливає:

$x = 6 - x^2$;

$x^2 + x - 6 = 0$;

$x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $\log_3(-3)$ — не визначений;

2) $\log_3 x = \log_3 2$; $\log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = \log_3 2$.

Відповідь: 2.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання: За означенням логарифма маємо:

$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$;

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$;

$x^2 - 2x = 0$;

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x+1$ не повинна дорівнювати 1.

2) $\log_{x+1}(2\cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 2.

2) Рівняння, що розв'язуються за допомогою означення логарифма:

Теорема: Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильно рівнянню $f(x) = g(x)$ при обмеженнях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Доведення: Нехай x - розв'язок рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Тоді визначені логарифми чисел $f(x)$ та $g(x)$, тобто ці числа повинні бути більше нуля. Потенціюючи рівність $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, отримуємо рівність $f(x) = g(x)$. Навпаки, нехай x - розв'язок рівняння $f(x) = g(x)$, причому $g(x) > 0$ та $f(x) > 0$. Тоді рівність $f(x) = g(x)$ можно прологарифмувати, і ми отримаємо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) рівносильне кожній з наступних систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Для розв'язку рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходять тільки до одної з цих систем (та, яка легше) або розв'язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корні лишні для початкового рівняння , і перевіряють кожне з них підстановкою в початкове рівняння.

Для розв’язування рівнянь

$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x)$,

$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x)$,

$p \log_a f(x) = \log_a u(x)$,

використовують властивості логарифма , їх приводять відповідно до виду:

$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a u(x)$,

$\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x)$,

$\log_a (f(x))^p = \log_a u(x)$

і далі розв’язуються так, як вказано попередньо. Із знайдених коренів слідує включити до відповіді ті, для яких $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $u(x) > 0$, або перевірити кожен з них підстановкою до початкового рівняння.

Якщо при розв’язуванні за допомогою формул виконуються перетворення виду $\log_a (f(x) \cdot g(x))$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a (f(x))^p$, де p - парне число, то виникає можливість втрати коренів заданого рівняння. Для того щоб уникнути можливої втрати коренів, треба користуватися вказаними формулами у такому вигляді:

$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$

$\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$

$\log_a (f(x))^p = p \log |f(x)|$, p - парне число.

Приклад: Розв’язати рівняння $\log_8 \log_2 \log_2 \log_2 \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Розв’язання: За означенням логарифма отримуємо :

$\log_2 \log_2 \log_2 \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 8^0 = 1$;

$\log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$;

$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 2^2 = 4$;

$$\begin{cases} -\frac{1}{x} = 16 \\ -\frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{16}.$$

Перевірка:

$\log_8 \log_2 \log_2 \log_2 16 = 0;$

$\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1;$

$\log_2 \log_2 16 = 2;$

$\log_2 16 = 4;$

$16 = 2^4;$

$16 = 16.$

Відповідь: $-\frac{1}{16}$

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$.

Розв'язання: Рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$ рівносильно змішаній системі

$$\begin{cases} \frac{5+x}{3} > 0, \\ \frac{5+x}{3} \neq 1, \\ \frac{5+x}{3} = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

Рівняння системи має два корені: $x_1 = -4, x_2 = -2$. Число $x_1 = -4$ задовольняє всім співвідношенням системи , а для числа $x_2 = -2$ не виконується умова $\frac{5+x}{3} \neq 1$. Таким чином рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$ має один корінь - число $x_1 = -4$.

Відповідь: -4.

3) Зведення до спільної основи. Якщо в рівнянні маємо логарифми з різними основами, то переходимо до спільної основи.

Приклад: Розв’язати рівняння $(3\log_x 5+1)\log_5^2 x = 4$.

Розв’язання: $\left(\dfrac{3}{\log_5 x}+1\right)\log_5^2 x = 4,$

$\log_5 x = t, \quad \left(\dfrac{3}{t}+1\right)t^2 = 4,$

$t^2+3t-4=0, \quad t_1=1, \; t_2=-4;$

$\log_5 x = 1, \quad x_1 = 5, \quad \log_5 x = -4, \quad x = 5^{-4}.$

Відповідь: 5; 5^{-4}.

Приклад: Розв’язати рівняння $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$.

Розв’язання: Переходимо до основи 5:

$$\frac{\log_5(125x)}{\log_5 x}\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 25}\right)^2 = 1.$$

Позначивши $\log_5 x = t,$ дістанемо $\dfrac{3+t}{t}\dfrac{t^2}{4} = 1,$ звідки

$t^2+3t-4=0, \; t_1=1, \; t_2=-4;$

$\log_5 x = 1, \; x_1=5, \; \log_5 x = -4, \; x_2 = 5^{-4}.$

Відповідь: 5; 5^{-4}.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$.

Розв'язання:

$\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3;$

$\log_3 x - 2\,\dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3;$

$\log_3 x - 2\,\dfrac{\log_3 x}{-1} = 3;$

$\log_3 x + 2\log_3 x = 3;$

$3\log_3 x = 3;$

$\log_3 x = 1;$

$x = 3.$

Перевірка: $\log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, x = 3 — корінь.

Відповідь: 3.

Приклад: Розв’язати рівняння: $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$.

Розв’язання: ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - x > 0 \\ \log_9 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 12 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;12)$

$$\frac{1+2\log_{3^2} 2}{\log_{3^2} x} - 1 = 2\frac{1}{\log_3 x} \cdot \log_{3^2}(12-x)$$

$$\frac{1+2\cdot\frac{1}{2}\log_3 2}{\frac{1}{2}\log_3 x} - 1 = \frac{2}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{2}\log_3(12-x)$$

$$\frac{1+\log_3 2}{\frac{1}{2}\log_3 x} - 1 = \frac{4}{\log_3 x} \cdot \log_3(12-x)$$

$$2(1+\log_3 2) - \log_3 x = \log_3(12-x)$$

$$2(\log_3 3 + \log_3 2) = \log_3 x + \log_3(12-x)$$

$$2\log_3(3\cdot 2) = \log_3 x(12-x)$$

$$\log_3(3\cdot 2)^2 = \log_3 x(12-x)$$

$$x(12-x) = 36$$

$$12x - x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Відповідь: $x = 6$.

4) Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного (або метод заміни змінної).

Логарифмічне рівняння зводиться до алгебраїчного рівняння.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_{0,5}^2 x + 6 = 5\log_{0,5} x$.

Розв'язання: Позначимо $\log_5 x = t,$

$t^2 - 5t + 6 = 0,\ t_1 = 2;\ t_2 = 3;$

$\log_5 x = 2,\ x_1 = 25,$

$\log_5 x = 3,\ x_2 = 125$

Відповідь: 25; 125.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$.

Розв'язання: ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty);$

$(\log_x 125 + \log_x x)\log_{5^2}^2 x = 1,$

$(\log_x 5^3 + 1)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2 = 1,$

$\left(\frac{3}{\log_5 x} + 1\right) \cdot \frac{1}{4}\log_5^2 x = 1,$

$\frac{3}{4}\log_5 x + \frac{1}{4}\log_5^2 x = 1,$

$\log_5^2 x + 3\log_5 x - 4 = 0,$

$\log_5 x = t,\ t \in R,$

$t^2 + 3t - 4 = 0,$

$t_1 = 1;\ t_2 = -4,$

$\log_5 x = 1;\ \log_5 x = -4,$

$$x = 5^1 = 5;\ x = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}.$$

Відповідь: $x_1 = 5;\ x_2 = \frac{1}{625}.$

Приклад: Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$

Розв'язання: Позначимо $\sqrt[3]{\log_2 x} = t$.

Тоді $\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} = \sqrt[3]{\dfrac{2(\log_2 x)^2}{(\log_2 16)^2}} = \dfrac{1}{2}t^2$,

$t^2 - t - 6 = 0,\ t_1 = 3,\ t_2 = -2;$

$\sqrt[3]{\log_2 x} = 3,\ \log_2 x = 27,\ x_1 = 2^{27};$

$\sqrt[3]{\log_2 x} = -2,\ \log_2 x = -8,\ x_2 = 2^{-8}.$

Відповідь: 2^{27}; 2^{-8}.

Приклад**:** Розв'яжіть рівняння $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4$.

Розв'язання:

Позначимо $\log_2 x$ через y. Дане рівняння набере вигляду:

$y^2 - 3y = 4;$

$y^2 - 3y - 4 = 0;$

$y_1 = 4;\ y_2 = -1.$

Звідси $\log_2 x = 4$, $\log_2 x = -1$;

$x = 2^4$; $x = 2^{-1}$;

$x = 16$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Перевірка: а) $\log_2^2 16 - 3\log_2 16 = 16 - 12 = 4$;

б) $\log_2^2 \dfrac{1}{2} - 3\log_2 \dfrac{1}{2} = -1 + 3 = 4$.

Відповідь: 16; $\dfrac{1}{2}$.

5) Потенціювання.

Якщо під знак логарифма входить сума або різниця, то рівняння потенціюють. Розв'язок неодмінно перевіряють.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1$

Розв'язання: Перейдемо до основи 2:

$$\frac{\log_4(x+12)}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 1,$$

$$\log_4(x+12) = 2\log_2 x.$$

Далі виконуємо потенціювання: $x + 12 = x^2;\ x_1 = 4,\ x_2 = -3$.

Корінь $x_2 = -3$ не задовольняє рівняння.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_x\left(x^2 - 5x + 5\right) = 1.$

Розв'язок: За умовою маємо: $x^2 - 5x + 5 = x,$ звідки $x_1 = 5,\ x_2 = 1$.

Корінь $x_2 = 1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: 5.

Приклад**:** Розв'яжіть рівняння $\log_5(x – 1) + \log_5(x – 2) = \log_5(x + 2)$.

Розв'язання:

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$\log_5((x – 1)(x – 2)) = \log_5(x + 2)$;

$(x – 1)(x – 2) = x + 2$;

$x^2 – 2x – x + 2 = x + 2$;

$x^2 – 4x = 0$;

$x(x – 4) = 0$;

$x = 0$ або $x = 4$.

Перевірка:

1) Значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $\log_5(x – 1)$ і $\log_5(x – 2)$ не мають смислу при $x = 0$.

2) $\log_5(x–1) + \log_5(x–2) = \log_5(4–1) + \log_5(4–2) = \log_5 3 + \log_5 2 = \log_5(2\cdot 3) = \log_5 6$.

$\log_5(x + 2) = \log_5(4 + 2) = \log_5 6$.

Отже, $x = 4$ — корінь.

Відповідь: 4.

6) Логарифмування. Якщо в показник при невідомому входять логарифми невідомого, то звичайно обидві частини рівняння логарифмують.

Приклад: Розв'язати рівняння $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$

Розв'язання:

$\left(10^{\lg_{10} x}\right)^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$,

$x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20,\ x^{\lg x} = 10$

Логарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $\lg x^{\lg x} = \lg 10,\ (\lg x)^2 = 1,\ \lg x = \pm 1,\ x = 10^{\pm 1}$.

Відповідь: 10;0,1.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

Розв'язання:

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо:

$\lg x^{\lg x} = \lg(100x)$;

$\lg x \lg x = \lg 100 + \lg x$;

$\lg^2 x – \lg x – 2 = 0$.

Замінимо $\lg x = y$. Рівняння прийме вигляд:

$y^2 – y – 2 = 0$;

$y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Тоді: 1) $\lg x = 2$; $x = 10^2$; $x = 100$.

2) $\lg x = -1$; $x = 10^{-1}$; $x = 0,1$.

Перевірка:

а) $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2$; $100x = 100 \cdot 100 = 100^2$. Отже, $x = 100$ — корінь.

б) $x^{\lg x} = 0,1^{\lg 0,1} = 0,1^{-1} = \frac{1}{0,1} = 10$; $100x = 100 \cdot 0,1 = 10$.

Отже, $x = 0,1$ — корінь.

Відповідь: 100; 0,1.

7) Розклад на множники.

Рівняння подається у вигляді $f_1(x)f_2(x) = 0,$ і кожний множник прирівнюється до нуля.

Приклад: Розв’язати рівняння $\log_2 x \log_3 x = \log_2 x^4 + \log_3 x^4 - 16.$

Розв’язання:

$\log_2 x \log_3 x - 4\log_2 x - 4\log_3 x + 16 = 0,$

$(\log_2 x - 4)(\log_3 x - 4) = 0.$

Далі маємо:

$\log_2 x = 4,\ \ x_1 = 2^4 = 16;$

$\log_3 x = 4,\ x_2 = 3^4 = 81$.

Відповідь: 16; 81.

Приклад: Розв’язати рівняння

$$\frac{4}{3}\left(\log_3 (5x-6)^3\right)^2 - \log_3 (5x-6)\cdot \log_3 x^6 + 6\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)^2 = 0.$$

Розв’язання: Позначивши $\log_3 (5x-6)^3 = y$, $\log_3 x = z,$ дістанемо рівняння $\frac{4}{3}y^2 - 6yz + 6z^2 = 0$, або $2y^2 - 9yz + 9z^2 = 0$, звідки маємо $(y-3z)(2y-3z) = 0.$ Прирівнюємо до нуля кожний множник:

1) $y = 3z,\ \log_3 (5x-6)^3 = \log_3 x,\ 5x - 6 = x,\ x_1 = \frac{2}{3};$

2) $2y = 3z,\ \log_3 (5x-6)^2 = \log_3 x,\ (5x-6)^2 = x,\ x_2 = \frac{36}{25},\ x_3 = 1.$

Корінь $x_3 = 1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: $\frac{2}{3}; \frac{36}{25}.$

8) Графічний спосіб розв’язування. Рівняння записують у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Далі будують графіки функцій $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x)$ і відшукують точки їх перетину, які визначають розв’язок рівняння.

Приклад: Розв’язати графічно рівняння $\log_2 x = 3 - x$.

Розв’язання: Графіки функцій $y = \log_2 x,\ y = 3 - x$ перетинаються в точці $x = 2,\ y = 1$. Маємо розв’язок $x = 2$.

Відповідь: 2.

9) Поєднання кількох способів (комбінований). Розв’язуючи логарифмічні рівняння, здебільшого застосовують кілька способів їх перетворення.

Приклад: Розв’язати рівняння $2\log_3 x = \log_x \left(x^{\log_3 x} + 2\right)$.

Розв’язання: Переходимо до основи 3:

$$2\log_3 x = \frac{\log_3\left(x^{\log_3 x} + 2\right)}{\log_3 x},\ \log_3 x^{2\log_3 x} = \log_3\left(x^{\log_3 x} + 2\right).$$

Потенціюємо рівняння:

$x^{2\log_3 x} = x^{2\log_3 x} + 2,\ x^{\log_3 x} = t$;

$t^2 - t - 2 = 0,\ t_1 = -1,\ t_2 = 2,\ x^{\log_3 x} = -1,\ x \in \varnothing$; $x^{\log_3 x} = 2$.

Логарифмуємо рівняння за основою 3:

$(\log_3 x)^2 = \log_3 2;\ \log_3 x = \pm\sqrt{\log_3 2},\ x = 3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}.$

Відповідь: $3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}$.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_3\left(\sqrt{x} + \left|\sqrt{x} - 1\right|\right) = \log_9\left(4\sqrt{x} - 3 + 4\left|\sqrt{x} - 1\right|\right)$.

Розв'язання: Розглядаємо два випадки:

1) $\sqrt{x} - 1 \le 0$, тоді рівняння перетворюється на тотожність

$\log_3 1 = \log_9 1,$ звідки $\sqrt{x} \le 1,\ x \ge 0,\ x \le 1,\ x \in [0;\, 1]$;

2) $\sqrt{x} - 1 \ge 0$, тоді $\log_3\left(2\sqrt{x} - 1\right) = \log_9\left(8\sqrt{x} - 7\right)$.

Потенціюємо рівняння:

$\left(2\sqrt{x} - 1\right)^2 = 8\sqrt{x} - 7;$

$4\left(\sqrt{x}\right)^2 - 12\sqrt{x} + 8 = 0;$

$\sqrt{x} = 1,\ x = 1;$

$\sqrt{x} = 2,\ x = 4.$

Відповідь: 1; 4.

Способи розв'язування логарифмічних нерівностей

Якщо в логарифмічному рівнянні знак рівняння замінити на знак нерівності, то отримаємо логарифмічну нерівність.

Нерівність називається логарифмічною, якщо її змінні входять тільки під знак логарифмів. Наприклад:

$\log_2(x^2 + 9) < \log_5(x - 18),$

$\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 \le 0,$

$$\frac{2}{2 - \lg x} + \frac{6}{2 + \lg x} > 10.$$

Як відомо, логарифмічна функція $y = \log_a x$ зростає при $a > 1$, спадає — при $0 < a < 1$. Із зростання функції $y = \log_a x$ у першому випадку і спадання — у другому випадку випливає:

а) При $a > 1$ нерівність $\log_a x_2 > \log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 > x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

б) При $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_2 > \log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 < x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

При розв'язуванні найпростіших логарифмічних нерівностей $\log_a f(x) > b$ або $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$ використовують монотонність логарифмічної функції:

Якщо $a>1$, то нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0< a<1$, то нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Таким чином, основними методами розв'язування логарифмічних нерівностей є:

- Метод рівносильних перетворень;
- Метод заміни;
- Узагальнений метод інтервалів;
- Нестандартні способи (метод раціоналізації, метод оцінок)[16].

Основні методи розв'язування логарифмічних нерівностей можна подати у вигляді наступних схем:

{ EMBED Equation.3
{ EMBED Equation.3 $\Leftrightarrow f(x) > a^b$;

{ EMBED Equation.3 } $\begin{cases} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^b$;

$$\begin{cases} \log_a f(x) < b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^b;$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) < b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > a^b;$$

$$\log_{g(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x)^b \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g(x)^b \\ 0 < g(x) < 1 \end{cases} \end{array} \right. ;$$

$$\log_{g(x)} f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x)^b \\ f(x) > 0 \\ 0 < g(x) < 1 \end{cases} \\ \begin{array}{l} f(x) > g(x)^b \\ g(x) > 1 \end{array} \end{array} \right. ;$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a h(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{c} \log_a f(x) > \log_a h(x) \\ 0 < a < 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x) < h(x) \\ f(x) > 0 \end{array} ;$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) < \log_a h(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x) < h(x) \\ f(x) > 0 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{c} \log_a f(x) < \log_a h(x) \\ 0 < a < 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \end{array} ;$$

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > h(x) \\ g(x) > 1 \\ h(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < h(x) \\ 0 < g(x) < 1 \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right. ;$$

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < h(x) \\ g(x) > 1 \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > h(x) \\ 0 < g(x) < 1 \\ h(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Ще одним із цікавих методів розв'язування логарифмічних нерівностей є метод раціоналізації логарифмічних нерівностей, що передбачає зведення

до раціональної нерівності виду , де – многочлени. При розв'язуванні нерівностей таким методом використовують перехід, описаних вище до рівносильних систем та теорем, яких немає у шкільному підручнику. [35]

Приклади розв'язання логарифмічних нерівностей різними способами.[10,16,19,35]

Приклад: Розв'язати нерівність $\log_2 x > 3;$

Розв'язання:

Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то $\log_2 x > \log_2 2^3$.

Основа 2>1, тому логарифмічна функція $y = \log_2 x$ - зростаюча.

Маємо: звідси x>8.

Відповідь: x∈(8;+∞).

Приклад: Розв'язати нерівність $\log_{0,3} x \geq 1.$

Розв'язання: Маємо: $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} 0,3$.

Оскільки 0<0,3<1, то ця нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq 0,3; \end{cases}$$

Звідси маємо, що $x \in (0; 0,3]$.

Відповідь: $x \in (0; 0,3]$.

Приклад: Розв'язати нерівність $\log_{0,3}(x+32) \geq \log_{0,3}(1-x) + \log_{0,3}(8-x).$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 32 > 0, \\ 1 - x > 0, \\ 8 - x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -32, \\ x < 1, \\ x < 8; \end{cases} \qquad x \in (-32; 1).$$

За властивістю логарифмів маємо: $\log_{0,3}(x+32) \ge \log_{0,3}((1-x)(8-x))$,

Оскільки 0<0,3<1, то ця нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x > -32, \\ x < 1, \\ x + 32 \le (1-x)(8-x); \end{cases}$$

$x + 32 \le x^2 - 9x + 8$,

$x^2 - 10x - 24 \ge 0$,

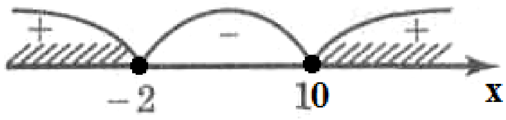


Рис. 12. Розв’язання нерівності $x^2 - 10x - 24 \ge 0$.

Врахуємо ОДЗ та запишемо відповідь: $x \in (-32; -2]$.

Відповідь: $x \in (-32; -2]$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\lg^2 x \le 3\lg x - 2$.

Розв’язання: ОДЗ: $x > 0$.

Нехай $\lg x = t$, тоді $t^2 - 3t + 2 \le 0$.

Маємо: $1 \le t \le 2$.

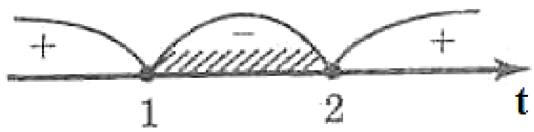


Рис. 13. Розв’язання нерівності $t^2 - 3t + 2 \le 0$.

Враховуючи заміну матимемо: $1 \le \lg x \le 2$, $\lg 10 \le \lg x \le \lg 100$.

Оскільки 10>1, то логарифмічна функція $y = \lg x$ є зростаючою, тому $10 \le x \le 100$.

Відповідь: $x \in [10; 100]$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\log_3 x \le 4 - x$ графічно.

Розв’язання: Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = 4 - x$. Графіки перетинаються в точці А з абсцисою $x = 3$.

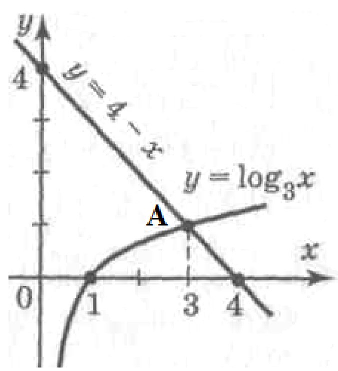


Рис. 14. Графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = 4 - x$.

Із рисунка 14 ми бачимо, що множиною розв'язків нерівності $\log_3 x \le x - 4$ є проміжок (0; 3].

Відповідь: $x \in (0; 3]$.

Приклад: Розв'язати нерівність $\log_2 x < 3$.

Розв'язання: Оскільки $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, то слід записати дану нерівність у вигляді $\log_2 x < \log_2 8$. Функція $y = \log_2 x$ зростаюча при $x > 0$, то маємо: $\begin{cases} x < 8, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $0 < x < 8$ (рис. 15).

Рис. 15. Розв'язання нерівності $\log_2 x < \log_2 8$.

Відповідь: $x \in (0; 8)$.

Приклад: Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$.

Розв'язання: Запишемо дану нерівність у вигляді:

$\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9$. Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ – спадна, то при $x > 0$, маємо: $\begin{cases} x \ge 9, \\ x > 0; \end{cases}$ Отже, $x \ge 9$ (рис. 16).

Рис. 16. Розв'язання нерівності $\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Відповідь: $x \in [9; +\infty)$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$.

Розв’язання:

Так як $-1 = \log_{0,5}0,5^{-1} = \log_{0,5}2$, то $\log_{0,5}(x^2 + x) > \log_{0,5}2$.

Одержана нерівність рівносильна системі

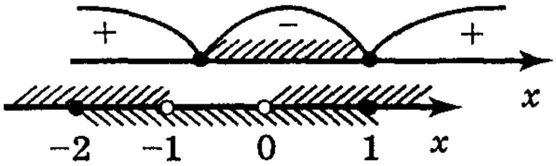
$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \le 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 2 \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1) > 0, \\ (x+2)(x-1) \le 0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності (рис. 17) є $(-\infty; -1)\cup(0; +\infty)$.

Розв'язком другої нерівності (рис. 18) є [-2; 1].



Тоді маємо (рис. 19) $x \in [-2;-1)\cup(0;1]$.

Рис. 19. Розв’язання нерівності $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$.

Відповідь: $x \in [-2; -1)\cup(0; 1]$.

Приклад: Розв’язати нерівність $\log_2\left(x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right) \ge 3.$

Розв’язання Дана нерівність еквівалентна нерівності

Звідси отримаємо наступну нерівність.

$$\left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x-1} - 8 \geq 0;$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x-1} - 8 \geq 0;$$

Нехай Отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - 8 \geq 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t \geq 4; \\ t \leq -2; \end{array}\right.$$

Початкова нерівність еквівалентна системі нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x-1} \geq 4; \\ \frac{x^2}{x-1} \leq -2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x > 1; \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} \leq x < 1 \end{array}\right.; \end{array}\right.$$

Об'єднавши отримані проміжки, отримаємо таку відповідь:

$(-\infty; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; 1) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\log^1\left(x^3 + x\right) > -1.$$

Приклад: Розв'язати нерівність

Розв'язання: Оскільки основа логарифма лежить в межах , то дана нерівність еквівалентна наступній подвійній нерівності $0 < x^3 + x < 2$ або системі нерівностей

$$\begin{cases} x^3 + x > 0 \\ x^3 + x - 2 < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\left(x^2 + 1\right) > 0 \\ (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) < 0 \end{cases};$$

Оскільки при $x \in R$ і $x^2 + x + 2 > 0$ ($D<0$), то отримали, що:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases};$$

Відповідь: $x \in (0;1)$.

2.6. Дидактичне забезпечення освітнього процесу при вивченні показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей під час дистанційного навчання

Взаємодія між всіма учасникиками освітнього процесу — один з найважливіших факторів успішного функціонування будь-якої шкільної спільноти. В умовах дистанційного навчання, коли вчителі й учні не можуть бути поруч один з одним, взаємодія між усіма учасниками освітнього процесу: адміністрацією школи, вчителями, учнями і батьками — набуває особливої важливості, адже комунікація для будь-якого навчання є невід'ємним складником педагогічного процесу. Саме від рівня комунікації і залежить її ефективність. Взаємодія між учнями та вчителями в дистанційному навчанні відбувається в рамках штучно створеного комунікативного простору, який передбачає сформовану ситуацію взаємодії, в якій є місце, час та взаємне бажання для спілкування та спрямовані на досягнення цілей навчального процесу.

Дистанційне навчання передбачає кілька видів взаємодій, які спрямовані реалізовувати різні цілі: оперативне інформування; повідомлення нового навчального матеріалу; уточнювальні запитання по темі; коментарі до виконаних робіт тощо.

Простір для організації дистанційного навчання має забезпечувати реалізацію таких функції: проведення онлайн-уроків; доступ до різноманітних електронних навчальних матеріалів; отримання робіт школярів (тести чи виконані практичні завдання в зошитах); оцінювання та зворотний зв’язок щодо виконаних робіт; можливість поставити питання та отримати відповідь поза межами онлайн-уроку.

Основними формами онлайн-комунікації є: відеоконференції, форуми, чати, блоги, електронна пошта, інтерактивні дошки, анкетування, соціальні мережі та месенджери. Зупинимося на деяких з них більш детально. [34]

Для того, щоб забезпечити таку безпосередню онлайн-взаємодію, мережа Інтернет пропонує безліч веб ресурсів для дистанційного навчання, зокрема:

Відеоконференція — це конференція в режимі реального часу онлайн.

Zoom (zoom.us/download) – це один із найпопулярніших у світі сервісів для проведення відеоконференцій. Безкоштовна версія має дещо обмежений функціонал, проте, його цілком вистачає для організації ефективної роботи та здійснення навчання. Значною перевагою Zoom є можливість записувати конференції.

Skype – це безкоштовна для завантаження та проста у використанні програма, яка дає змогу спілкуватися користувачам з усього світу. Безліч компаній та окремих користувачів за допомогою Skype безкоштовно здійснюють відео- і голосові дзвінки, проводять конференції, надсилають миттєві повідомлення та обмінюються файлами з іншими користувачами Skype.

Google Meet є безкоштовним додатком. Для того, щоб почати користування достатньо мати обліковий запис. До зустрічі в Google Meet можуть додатися одночасно до 100 учасників, а в розширеному варіанті G Suite можна організувати зустріч для 250 користувачів.

Дані сервіси зручно використовувати при поясненні нового навчального матеріалу, фронтального опитування, пояснення ходу виконання завдань, оскільки вони дозволяють залучити до роботи всіх учнів класу, за умови наявності у них можливості доступу до мережі Інтернет та необхідних девайсів.

Якщо немає можливості організувати таку форму роботи з школярами, то можна підготувати власний відеоурок до теми або запропонувати вже готовий. Багато викладачів за період дистанційного навчання створили велику кількість дидактичних матеріалів, які можна запропонувати учням для вивчення нової теми чи повторного пояснення, якщо в рамках онлайн-уроку було щось не зрозумілим. Наприклад, можна використати такі відео-ресурси, як:

- Модуль 9. Показникова та логарифмічна функції. (Платформа Be Smart / Будь розумним; Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=pJq1N0RTgZU);
- Показникові та логарифмічні рівняння (Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=X42ngX-ztYw);
- Показникові та логарифмічні нерівності (Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=v1Utjo5dG_8);
- Логарифмічні нерівності. Що це? Приклади. (Автор – Сергій Ткаченко; Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=O6mAA0NjczU).

Весною 2020 року в Україні для учнів 5-11 класів стартував проєкт "Всеукраїнська школа онлайн". Так, на час карантину уроки з 11 предметів (зокрема з алгебри і початків аналізу) за чітким розкладом транслювалися на українських телеканалах, на сайті ТСН.ua та YouTube-каналі Міністерства освіти і науки. Вони є у вільному доступі і всі бажаючі можуть у будь-який час долучитися до їх перегляду (Режим доступу: https://tsn.ua/ukrayina/uroki-matematiki-onlayn-dlya-11-klasu-vsi-video-1522410.html)

В Інтернеті доступні досить багато відеороликів, які розкривають теми шкільної програми, зокрема канал Міністерства освіти України https://www.youtube.com/c/MONUKRAINE, курси платформ Prometheus https://prometheus.org.ua/, EdEra https://www.ed-era.com/ та інші джерела.

Оптимальною видається організація віртуальних просторів як своєрідних точок входу для учнів певного класу (“класних кімнат”), звідки посилання ведуть до індивідуальних учительських кабінетів, де відбувається безпосередня навчальна взаємодія. Залежно від розміру класу, кількості класів та інших особливостей організації освітнього процесу в закладі, можна обмежитись цими “класними кімнатами”, не виокремлюючи окремих ресурсів за предметами навчання. Таку структуру можна реалізовувати різними технічними інструментами, наприклад Padlet, Google Classroom, Moodle, Мій Клас тощо. Зупинимося більш детально на порталі Мій клас (Режим доступу: https://miyklas.com.ua/p/algebra/11/pokaznikova-i-logarifmichna-funktciyi-15299/pokaznikovi-rivniannia-15302).

«МійКлас» – електронна освітня платформа, розроблена з метою забезпечення організації та контролю навчального процесу дистанційно. Є хорошим тренажером як для дітей, так і для вчителів у напрямку застосування інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні. Ресурс схвалений МОН України як інноваційна платформа для «Нової української школи». Наразі сервіс активно використовують близько 13 тис. українських шкіл.

Теоретичні навчальні матеріали, завдання та методичні рекомендації для вчителів адаптовані до стандартів та вимог шкільної програми. Кожне завдання супроводжується кроками розв’язання, відтак школярі отримують можливість вчитися на своїх помилках.

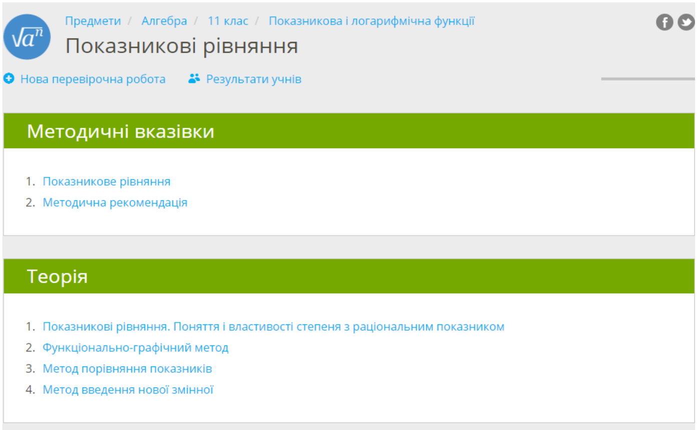


Рис. 20. Платформа «Мій клас». Методичні вказівки і теорія до теми «Показникові рівняння».

Вчитель може використовувати готові практичні та теоретичні матеріали з бази сайту, а також додавати власні завдання та предмети, вносити корективи у запропоновану сайтом теоретичну інформацію, завантажувати відео- та аудіозразки.

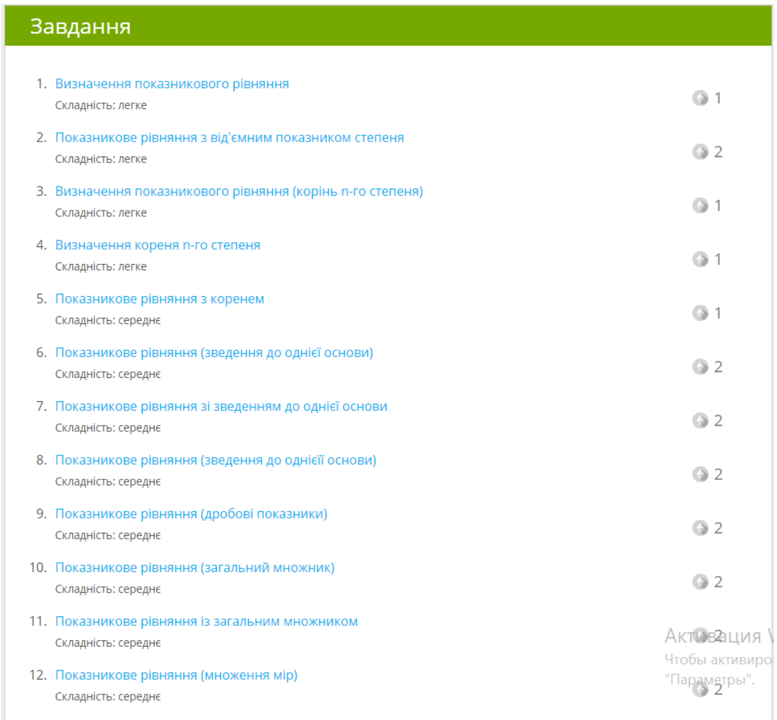


Рис. 21. Платформа «Мій клас». Список завдань до теми «Показникові рівняння».

Для перевірки рівня засвоєння знань можна використовувати вже готові перевірочні роботи чи тести. Платформа забезпечить гарантію самостійної роботи учнів й виключення можливості списування. Здійснюється автоматична перевірка відповідей учнів та виставлення оцінок.

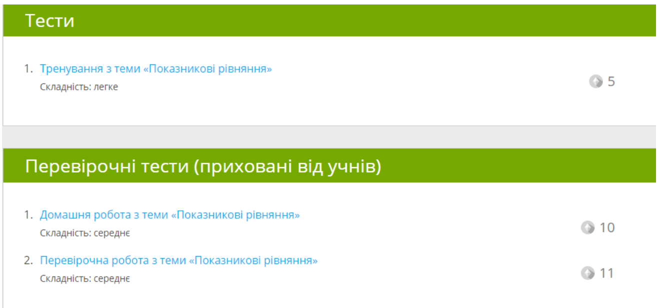


Рис. 22. Платформа «Мій клас». Тести та перевірочні роботи до теми «Показникові рівняння».

Під час звичайного уроку в класі вчителі часто користуються таким базовим інструментом навчання, як класна дошка. Онлайновий аналог шкільної дошки дозволяє забезпечити практично такий же функціонал, навіть більший.

Padlet.com — це віртуальна дошка, на якій можна розміщувати окремі плитки-дописи з текстовою інформацією, гіперпосиланнями, зображеннями, прикріплювати файли, аудіо-, відеозаписи. Можна ввімкнути режим коментування, у якому учні зможуть навіть додавати виконані роботи. Варто зазначити, що така організація взаємодії може бути доцільною в межах уроків одного класу або кількох класів на нетривалий період, оскільки доступний простір швидко захаращується. Крім того, у безкоштовному обліковому записі доступні лише три віртуальні дошки. Водночас, це може бути зручною точкою для інформування та оперативних оголошень.

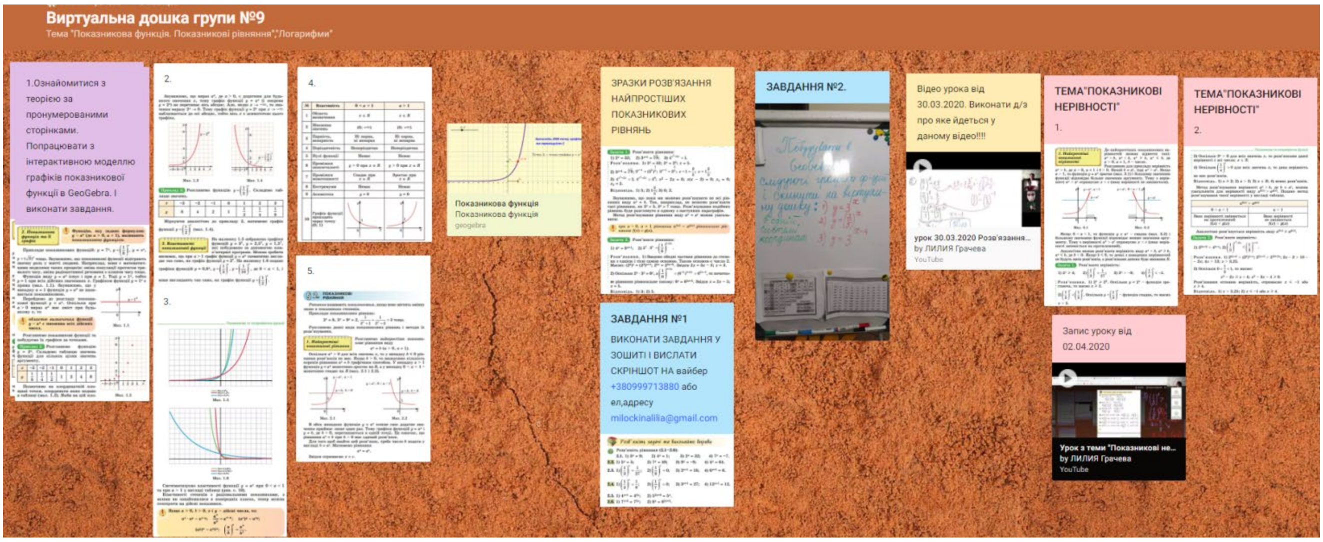


Рис. 23. Інтерактивна дошка Padlet до теми «Показникова функція. Показникові рівняння. Логарифми».

Для перевірки рівня знань школярів можна використовувати різноманітні тести та інтерактивні вправи. Існує велика кількість сервісів, які можна використати для створення різнопланових перевірочних робіт, зокрема: Майстер-Тест, LearningApps, Online Test Pad, ClassMarker, Classroom, Quizizz, Kahoot, Мій клас, Тести «На урок» тощо.

Однією з найдоступніших платформ для створення практичних вправ є https://learningapps.org/, а для надання формувального зворотного зв’язку існує спеціалізований сервіс https://goformative.com/.

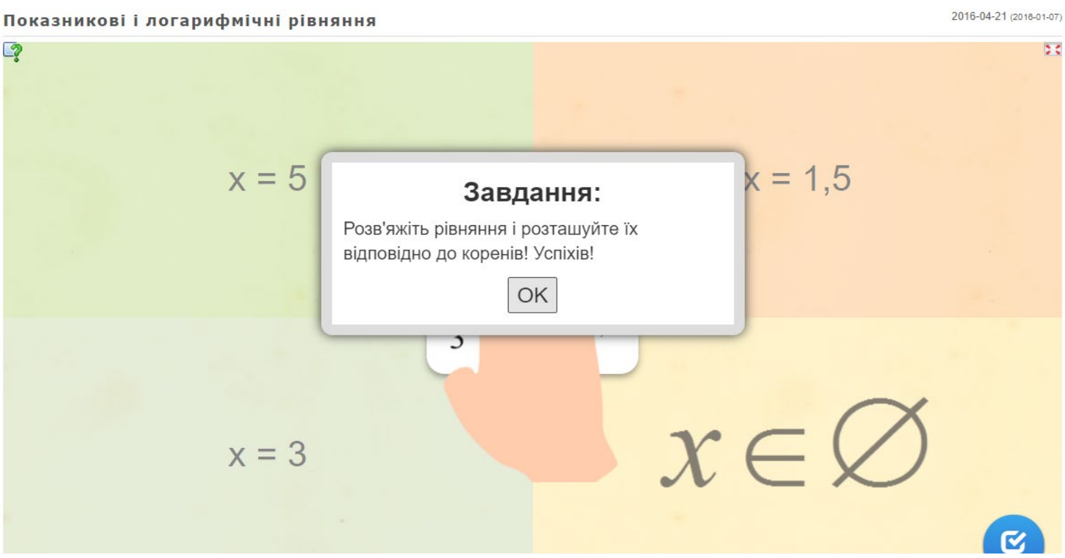


Рис.24. Інтерактивна вправа Learningapps «Показникові і логарифмічні рівняння».

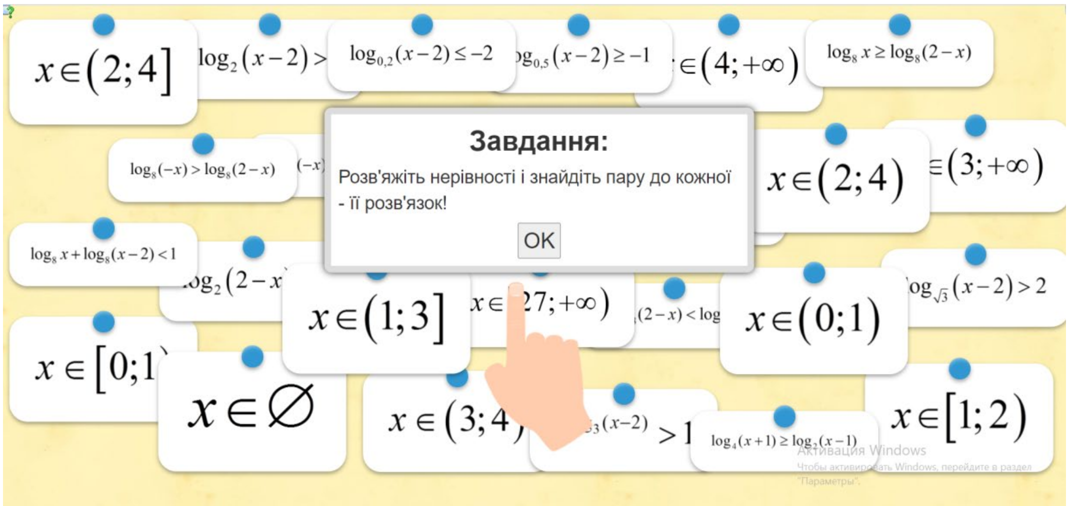


Рис. 25. Інтерактивна вправа Learningapps встановіть відповідність «Логарифмічні нерівності».

Завдання, які пропонуються учням, можуть мати вигляд тестових (множинний вибір, установлення відповідності, впорядкування, позначення ділянки на зображенні тощо) або ігрових (пройти лабіринтом, відповідаючи на запитання, розв’язати кросворд, відгадати слово за буквами, скласти пазл тощо). Такі сервіси не стільки оцінюють правильність відповіді з першої спроби, скільки допомагають учневі/учениці з’ясувати власні прогалини та зосередитись на корекції. Подібні вправи можна пропонувати для закріплення певних навичок, а також вибірково — для учнів, які потребують додаткової практики. (Наприклад, тест на сайті «На Урок» для перевірки рівня знань школярів з теми «Показникові рівняння і нерівності». Режим доступу: https://naurok.com.ua/test/pokaznikovi-rivnyannya-ta-nerivnosti-277697.html).

«На Урок»

Показникові рівняння та нерівності

ПІБ: ....

Клас: ....

Дата: ....

1. Розв'яжіть показникове рівняння $2^x=64$

☐ а) 5 ☐ б) 6

☐ в) 7 ☐ г) 8

2. Розв'яжіть показникове рівняння $3^{2x-1}=81$

☐ а) 1 ☐ б) 1,5

☐ в) 2 ☐ г) 2,5

3. Розв'яжіть показникове рівняння $a^{(x-1)(x+2)}=1$

☐ а) -2 ; 1 ☐ б) 0 ; 1

☐ в) 1 ; 2 ☐ г) -1 ; 2

4. Розв'яжіть показникове рівняння $2^x \cdot 5^x = 0{,}01$

☐ а) 2 ☐ б) -3

☐ в) -2 ☐ г) 3

5. Розв'яжіть показникове рівняння $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$

☐ а) 0 ☐ б) 1

☐ в) 2 ☐ г) 3

6. Розв'яжіть показникове рівняння $4^x + 2^x = 72$

☐ а) 1 ☐ б) 2

☐ в) 3 ☐ г) 4

7. Розв'яжіть показникову нерівність $10^{3x+2}>100$

☐ а) $x \in (0 ; +\infty)$ ☐ б) $x \in (-\infty ; +\infty)$

☐ в) $x \in (-\infty ; 0)$ ☐ г) $x \in (0 ; 10)$

8. Розв'яжіть показникову нерівність $(0{,}3)^x > 0{,}09$

☐ а) $x \in (2 ; +\infty)$ ☐ б) $x \in (- 2; 2)$

☐ в) $x \in (- 2; +\infty)$ ☐ г) $x \in (- \infty ; 2)$

9. Розв'яжіть показникову нерівність $0{,}5^{2x} < 1$

☐ а) $x \in (-\infty\,;\,0)$ ☐ б) $x \in (0\,;\,+\infty)$

☐ в) $x \in (0\,;\,0{,}5)$ ☐ г) $x \in (-\infty\,;\,1)$

10. Розв'яжіть показникову нерівність $4^{5-2x} \leq 0{,}25$

☐ а) $x \in [\,3\,;\,+\infty)$ ☐ б) $x \in (\,3\,;\,+\infty)$

☐ в) $x \in [\,4\,;\,+\infty)$ ☐ г) $x \in (\,-\infty\,;\,4)$

11. Розв'яжіть показникову нерівність $(\sqrt{3})^x \leq 1/9$

☐ а) $x \in (-4\,;\,+\infty\,)$ ☐ б) $x \in [-4\,;\,+\infty\,)$

☐ в) $x \in (-\infty\,;\,4)$ ☐ г) $x \in (-\infty\,;\,-4]$

12. Розв'яжіть показникову нерівність $0{,}7^{5-2x} < 0{,}49$

☐ а) $x \in (-\infty\,;\,1{,}5)$ ☐ б) $x \in (-\infty\,;\,2)$

☐ в) $x \in (1{,}5\,;\,+\infty\,)$ ☐ г) $x \in (2\,;\,+\infty\,)$

Рис. 26. Тест «Показникові рівняння і нерівності» на сайті «На Урок».

Дистанційне навчання покликане допомогти в глобальному освітньому просторі, воно виступає як ефективне доповнення традиційних форм освіти, як засіб часткового вирішення її нагальних проблем, зокрема, надає можливість одночасно з гнучким за часом і високопрофесійним за змістом вивченням різних предметних розділів знань, формуванням умінь і навичок роботи з багатьох навчальних дисциплін забезпечити інтенсивне практичне застосування тими, хто навчаються, методами і засобами інформаційно-комунікаційних технологій, розвиває уміння і навички у сучасній науці і практиці. Впровадження елементів дистанційної форми навчання в школі є необхідною умовою для досягнення сучасного рівня якості освіти. Зважаючи на ситуацію у суспільсті, це є непогана альтернатива очному навчанню. Однак вона не зможе повною мірою замінити традиційну систему навчання, але є гарним доповненням до неї [11,31,34,43].

2.7. Практична перевірка результатів дослідження

Проаналізувавши різні види джерел інформації, наукову, педагогічну, методичну літературу та Інтернет-ресурси, були розглянуті особливості впровадження компетентнісного підходу у профільних класах старшої школи при вивченні показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Головним завданням даного дослідження було з'ясувати, як можна забезпечити реалізацію предметних та ключових компетентностей в ході вивчення даної теми, а саме як створити такі умови організації освітнього процесу, які сприяли б підвищенню його ефективності, порівняти вплив різних факторів, вибір методів і засобів навчання, виявити основні закономірності та специфіку протікання педагогічного процесу в конкретних умовах. Основною метою було дослідити рівень знань школярів при розв'язуванні завдань з даної теми.

Експерементальна перевірка відбувалася на базі Туменського навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад» з учнями 11 класу, які мають різний рівень навчальних досягнень.

Згідно розпорядження Міністерства освіти і науки України №1/9-154 на території України були введені карантинні заходи. У зв'язку з цим усі форми роботи та перевірки знань проводилися з школярами в режимі онлайн з використанням дистанційних технологій навчання (приклади використання висвітлені у Розділі 2.6). Формування практичних вмінь і навичок здійснювалося за допомогою української електронної інформаційно-освітньої системи «Мій клас», яка дозволила підбирати різні види завдань з врахуванням рівня досягнень школярів, організувати успішне оволодіння теоретичним матеріалом та відпрацювання навичок розв'язування завдань на великій кількості практичних завдань. (Додаток А). А підсумковий контроль було проведено у вигляді перевірочних онлайн-робіт, що дало змогу перевірити ефективність даного дослідження (приклад однієї з таких робіт наведено у розділі 2.6. Тест «Показникові рівняння і нерівності», створений на сайті «На Урок»).

Використання дистанційних засобів навчання позитивно впливає на школярів, адже дозволяє врахувати індивідуальні особливості кожної дитини, підібрати матеріал посильний для її рівня знань, забезпечуючи при цьому рівневу індивідуалізацію та диференціацію освітнього процесу. Учні працюють в зручному для себе темпі, удосконалюють навички саморозвитку та самоосвіти, розвивають творчі здібності. А це і є одним із завдань, які ставить перед собою сучасна школа - формування всебічно розвиненої особистості. Тому актуальність даного дослідження не викликає сумнівів.

ВИСНОВКИ

Робота на тему: «Методичні особливості навчання учнів профільних класів розв’язуванню показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей» мала на меті систематизувати відомості про показникову та логарифмічну функції, розкрити роль і місце вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи та ознайомитися з методикою їх викладання.

В ході виконання даної роботи було проаналізовано велику кількість джерел інформації для реалізації поставлених завдань, а саме:

– Систематизовано відомості про особливості розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи. Розглянуто основні способи їх розв’язання, подано алгорими та конкретні приклади їх застосування

– Показано місце показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в діючій програмі з математики, конкретизувано вимоги до уявлень, знань, умінь та навичок учнів.

– Проаналізовано методику вивчення даної теми в сучасній школі, зокрема у профільних класах та запропоновано методичні рекомендації щодо викладання тем «Показникова і логарифмічна функція» в профільних класах.

– Розроблено дидактичні матеріали, які можна використовувати на уроках алгебри і початків аналізу в 11 класі, а саме конспекти уроків засвоєння нових знань на тему «Показникові рівняння» та закріплення знань, умінь і навичок на тему «Розв’язування логарифмічних рівнянь»; самостійні роботи на теми: «Показникові рівняння», «Логарифмічні рівняння»; контрольну роботу на тему: «Логарифмічна функція», тестові завдання для підготовки до ЗНО.

– Описано дидактичні засоби, які можна використати під час дистанційного навчання та приклади їх застосуванняв в ході вивчення тем «Показникова і логарифмічна функції, рівняння і нерівності».

– Обґрунтувано психолого-педагогічні та методичні вимоги щодо формування математичних та ключових компетентностей старшокласників у процесі вивчення показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені, корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функцій та їх властивості і графіки, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової і логарифмічної функції, розв’язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності та їх системи, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами і степенями. Бажано ознайомити учнів на факультативних чи гурткових заняттях із схематичним зображенням графіків показникових та логарифмічних функцій з модулями.

Оскільки програмою передбачено ознайомити учнів з найпоширенішими видами показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей, варто будувати виклад матеріалу шляхом відпрацювання стандартних методів на великій кількості вправ з відповідним теоретичним обґрунтуванням і поясненнями, застосовувати диференційований підхід до навчання та пов’язувати вивчення матеріалу з властивостями показникової і логарифмічної функції. За рахунок збільшеної кількості годин слід приділити увагу спеціальним методам розв’язування рівнянь і нерівностей (наприклад з модулями та параметрами).

У процесі розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь та їх систем корисно систематизувати знання школярів про особливості перетворення рівнянь і нерівностей та їх рівносильність, виділити операції, які можуть їх порушувати. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв’язуванні рівнянь і в зв’язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв’язків, а також на причини їх втрати.

Для набуття учнями математичних компетентностей при вивченні змістової лінії рівнянь і нерівностей доцільно вдосконалити наявну методику навчання алгебри та початків аналізу в напрямку, яка зазвичай відбувається за таким планом: формування узагальнених способів розв'язування рівнянь та нерівностей; виділення в явному вигляді загальних орієнтовних основ діяльності з розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем; включення в зміст навчання алгебри і початків аналізу формування орієнтовних основ діяльності з розв'язування відповідних алгебраїчних завдань; організація діяльності учнів зі складання планів чи алгоритмів розв'язування рівнянь та нерівностей і подальшої їх реалізації; аналіз отриманих результатів; посилення прикладної спрямованості навчання розв'язуванню рівнянь та нерівностей, зв'язок з життям.

Розроблені методичні рекомендації можуть використовуватися як для учнів класів універсального та природничого, так і для учнів класів фізико-математичного профілю і класів з поглибленим вивченням математики. У залежності від профілю навчання варіюється рівень допомоги з боку вчителя, а деякі види роботи (наприклад, навчальні дослідження учнів) виносяться на індивідуальну роботу з учнями. Їх використання сприяє формуванню в учнів умінь аналізувати об'єкти, ситуації та взаємозв'язки, застосовувати знання у новій ситуації, використовувати та оцінювати власні стратегії розв'язування пізнавальних проблем, складати та реалізовувати план своєї діяльності, висловлювати власну думку, підвищенню інформаційної грамотності, і, як наслідок, набуття школярами не лише математичних, а й певних галузевих та ключових компетентностей.

Мережа Інтернет пропонує велику кількість дидактичних засобів, які дозволяють значно покращити та осучаснити освітній процес, зокрема і при вивченні логарифмічних та показникових рівнянь і нерівностей. Однак вони не зможуть повністю замінити традиційну систему освіти, а лише дозволяють урізноманітнити навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ачкан В. В. Набуття учнями математичних компетентностей при вивченні рівнянь та нерівностей у старшій школі. Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). № 2. Бердянськ : БДПУ, 2017. С. 46-52.

2. Барановська Г. Г., Ясінський В.В. Практикум з математики: Показникова та логарифмічна функції: навч. посібник для вступників до вузів. Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т». Факультет довузівської підготовки. Київ: [б.в.], 1998. 124 с.

3. Барановська С. О. Нестандартні логарифмічні рівняння. Математика в школах України. 2018. №29. С.12-15.

4. Бевз Г. П., Бевз В.Г., Владіміров В.М., Владімірова Н.Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта, 2019.

5. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Київ: Вища школа, 1989 .

6. Бондар С.М. Формування ключових компетентностей на уроках математики. Математика в школах України. 2019. № 10. С.3-6.

7. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: Навч. Посібник. 2-ге вид., доп. Київ: Либідь, 1993. 344 с.

8. Гусак Г. М., Капуцкая Д. А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие. Минск.: Высш. шк., 1989. 495 с.

9. Закон України про освіту [Електронний ресурс] / Офіційний веб-портал Верховної Ради України. Відомості Верховної Ради (ВВР), 2017, №38-39, ст. 380. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19 (дата звернення: 15.10.2020).

10. Іваненко Т.І. Систематизація методів розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. Математика в школах України. 2007. № 7. С. 16-21.

11. Інтерактивні технології на уроках математики: Навч. - метод. посібник / Упоряд. І.С. Маркова. Харків: Основа, 2007. 126 с.

12. Істер О. С., Єргіна О. Алгебра і початки аналізу (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. К.: Генеза, 219. 416 с.: іл.

13. Колмагорова А. Н. Алгебра и початки анализу: Учебн. для 10—11 кл. общ. учредж. 12-е изд. Москва: Просвещение, 2002. 384 с.

14. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики. Харків: Основа, 2006. 140 с.

15. Кларин М.В. Интерактивное обучение – инструмент освоения нового опыта. Педагогика. 2000. № 7. С. 12–18.

16. Корянов А.Г. Методы решения логарифмических неравенств. Часть I. Математика в школе. 2012. №7. С.3-11

17. Кушнір І. У світі логарифмів. Київ: Факт, 2004. 136 с.

18. Логарифмічні рівняння. Математика. 2004. №14. С. 7-10.

19. Логарифмічні та показникові нерівності. Математика в школі. 2004. № 1. С.20-22.

20. Лурьве М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений: Учеб. рук-во. 3-е изд., перераб. Москва: Наука, 1990. 96 с.

21. Маслай Г. С., Щоголева Л. О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами. Математика . 2000. № 21—22.

22. Маслова Т. Н., Суходений А. М. Ваш домашний репетитор. Москва: ООО «Изд. дом “ОНИКС 21 век”», 2003. 672 с.

23. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 352 с. : іл.

24. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебраїчний тренажер : посібник для школярів та абітурієнтів. 2-ге вид., перероб. і доп. Харків: Гімназія, 2010. 272 с. : іл.

25. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та

геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Освітні програми для 10-11 класів. – 15 с. – URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx (дата звернення: 15.10.2020).

26. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. Освітні програми для 10-11 класів. – 23 с. – URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx (дата звернення: 15.10.2020).

27. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Освітні програми для 10-11 класів. 25 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx 19 (дата звернення: 15.10.2020).

28. Нелін Є.П., Дольова О.Є. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Світ дитинства, 2006.

29. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2019. 240 с.

30. Орел Т.В. Показникова та логарифмічна функції, їхні властивості. Показникові та логарифмічні рівняння та способи їх розв’язання. Математика в школах України. 2018. № 11. С.14-17.

31. Пометун О.І, Пироженко Л.В. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Київ, 2002.

32. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. пос. Київ: А.С.К., 2003. 192 с.

33. Про затвердження профільного навчання в старшій школі. Наказ №1456 від 21 жовтня 2013 року. URL: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/37784 (дата звернення: 15.10.2020).

34. Пасічник О. Лотоцька А. Організація дистанційного навчання в школі. Методичні рекомедації. 71 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/metodichni%20recomendazii/2020/metodichni%20recomendazii-dustanciyna%20osvita-2020.pdf (дата звернення: 15.06.2020).

35. Петров В.А. О решении логарифмических неравенств. Математика в школе. 2012. №12. С.17-20.

36. Саушкін О. Ф. Розв’язування алгебраїчних рівнянь. Київ: КНЕУ.

37. Севрюков П. Ф., Смоляков А.Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Москва: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. 352 с.

38. Сергеев И. Н., Панферов В.С.Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства. Москва: МЦНМО, 2011. 72 с.

39. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000.

40. Собкович Р.І., Мазуренко Н.І. Шкільна алгебра в задачах: навчальний посібник. Частина I. Івано-Франківськ, Голіней О.М., 2019. 315с.

41. Сторчай Володимир Федорович. Показникові і логарифмічні рівняння: навч. посібник; Дніпропетровський держ. ун-т. Київ: [б.в.], 1995. 100 с.

42. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Метод проектів. Комп’ютерні технології. Розвивальне навчання / Упоряд. І.С.Маркова. Харків: Тріада, 2007 – 171с.

43. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Розвиток критичного мислення: Навч. – метод. посібник / Упоряд. І.С. Маркова. Харків: Основа, 2007. 125с.

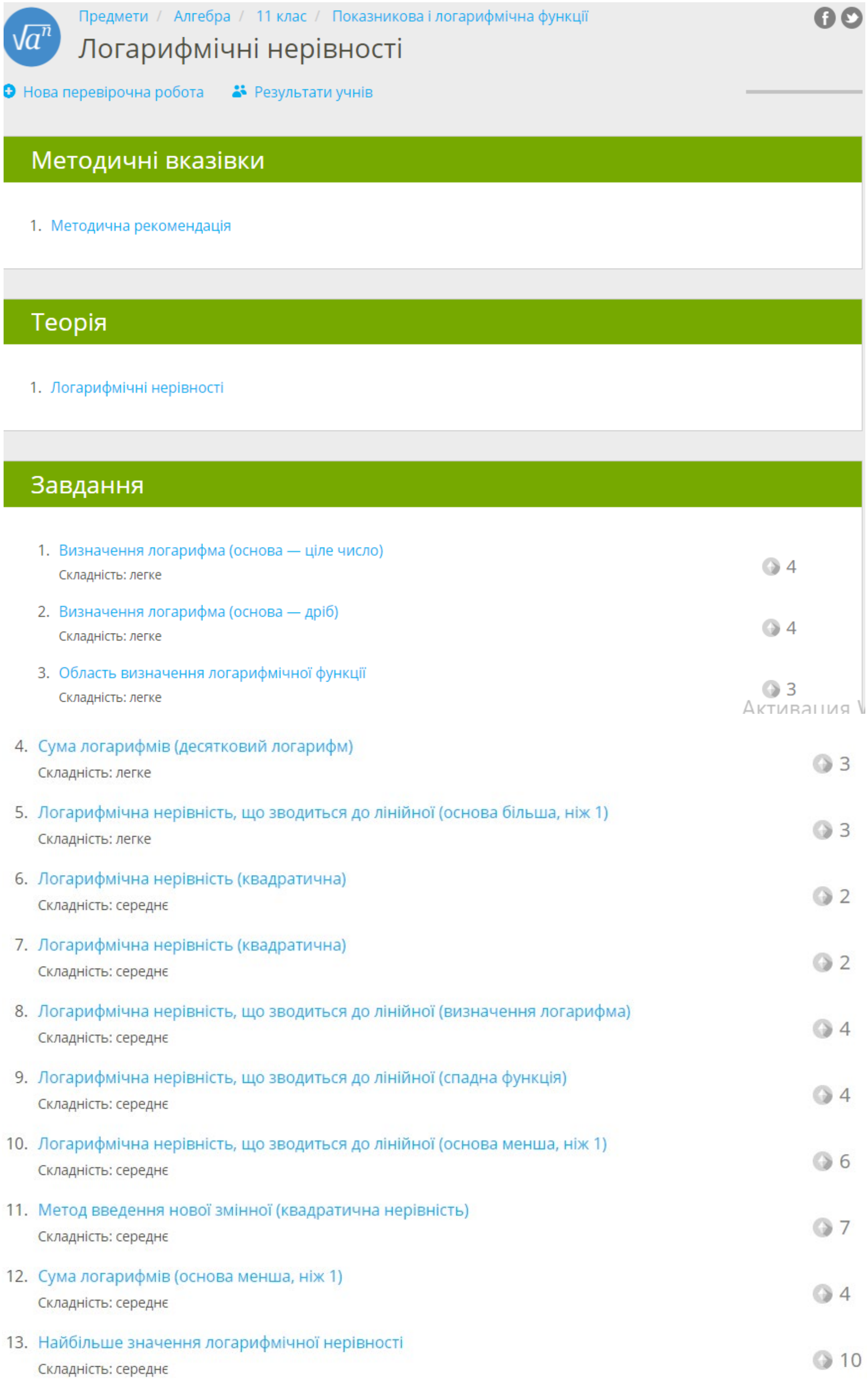
44. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності. Навчальний посібник. Тернопіль: Тайп, 2018. 72с.

45. Шкіль М.Г., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 11-го класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти. Київ: Освіта, 2000.

1)

ДОДАТОК А

Формування практичних вмінь і навичок з використанням освітньої платформи «Мій клас» при вивченні «Логарифмічних нерівностей»



Предмети / Алгебра / 11 клас / Показникова і логарифмічна функції

Логарифмічні нерівності

Нова перевірочна робота   Результати учнів

Методичні вказівки

1. Методична рекомендація

Теорія

1. Логарифмічні нерівності

Завдання

1.	Визначення логарифма (основа — ціле число) Складність: легке	4
2.	Визначення логарифма (основа — дріб) Складність: легке	4
3.	Область визначення логарифмічної функції Складність: легке	3
4.	Сума логарифмів (десятковий логарифм) Складність: легке	3
5.	Логарифмічна нерівність, що зводиться до лінійної (основа більша, ніж 1) Складність: легке	3
6.	Логарифмічна нерівність (квадратична) Складність: середнє	2
7.	Логарифмічна нерівність (квадратична) Складність: середнє	2
8.	Логарифмічна нерівність, що зводиться до лінійної (визначення логарифма) Складність: середнє	4
9.	Логарифмічна нерівність, що зводиться до лінійної (спадна функція) Складність: середнє	4
10.	Логарифмічна нерівність, що зводиться до лінійної (основа менша, ніж 1) Складність: середнє	6
11.	Метод введення нової змінної (квадратична нерівність) Складність: середнє	7
12.	Сума логарифмів (основа менша, ніж 1) Складність: середнє	4
13.	Найбільше значення логарифмічної нерівності Складність: середнє	10

14. Логарифмічна нерівність, що зводиться до квадратичної (зростаюча функція) 9
Складність: важке

15. Невідома основа 13
Складність: важке

Тести

1. Тренування з теми «Логарифмічні нерівності» 15
Складність: легке

Перевірочні тести (приховані від учнів)

1. Домашня робота з теми «Логарифмічні нерівності» 21
Складність: середнє

2. Перевірочна робота з теми «Логарифмічні нерівності» 35
Складність: середнє

Додаток Б

Конспект уроку на тему «Розв'язування логарифмічних рівнянь»

Формування компетентностей:

- **предметна компетентність:**

сприяти узагальненню і систематизації матеріалу з теми «Логарифмічна функція, рівняння», розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку, відтворити вміння розв'язувати завдання із даної теми;

- **ключові компетентності:**

- математична компетентність – перевірити рівень засвоєння попереднього навчального матеріалу, систематизувати методи розв'язування логарифмічних рівнянь, удосконалити вміння і навички розв'язування логарифмічних рівнянь, попередити появу типових помилок, яких допускаються учні при розв'язуванні рівнянь, дати можливість кожному перевірити свої знання та підвищити їх рівень, показати важливість даної теми, активізувати роботу групи через різні форми та методи роботи, інтерпретувати та оцінювати результати;

- спілкування державною мовою – доречно та коректно вживати математичну термінологію, поповнювати свій словниковий запас, робити висновки на основі отриманої інформації, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

- інформаційно – цифрова компетентність – структурувати дані, визначати достатність даних для розв'язування завдань;

- основні компетентності у природничих науках і технологіях – розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв'язати засобами математики;

- соціальна та громадянська компетентності – співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі, бути мобільним, стійким перед труднощами, створювати ситуацію успіху для формування позитивного ставлення до себе ”я можу, у мене все вийде ”;

- уміння вчитися впродовж життя – визначати мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети;

- ініціативність і підприємливість – генерувати нові шляхи розв’язання поставлених проблем, ухвалювати оптимальні рішення, аргументувати свою позицію.

Тип заняття: удосконалення компетентностей.

Форма проведення заняття: класно-урочна.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби: роздатковий матеріал, таблиці, презентації, мультимедійне обладнання.

Підручник: Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.

Хід уроку

І. Організаційна частина.

Перевірка наявності учнів та їх підготовки до заняття.

Сьогодні ми з вами поринемо в світ чудовий та прекрасний – в світ математичних рівнянь.

Розпочнемо наше заняття словами Ч. Дарвіна:

> Люди, що засвоїли великі
> принципи математики,
> мають на один орган чуття
> більше.

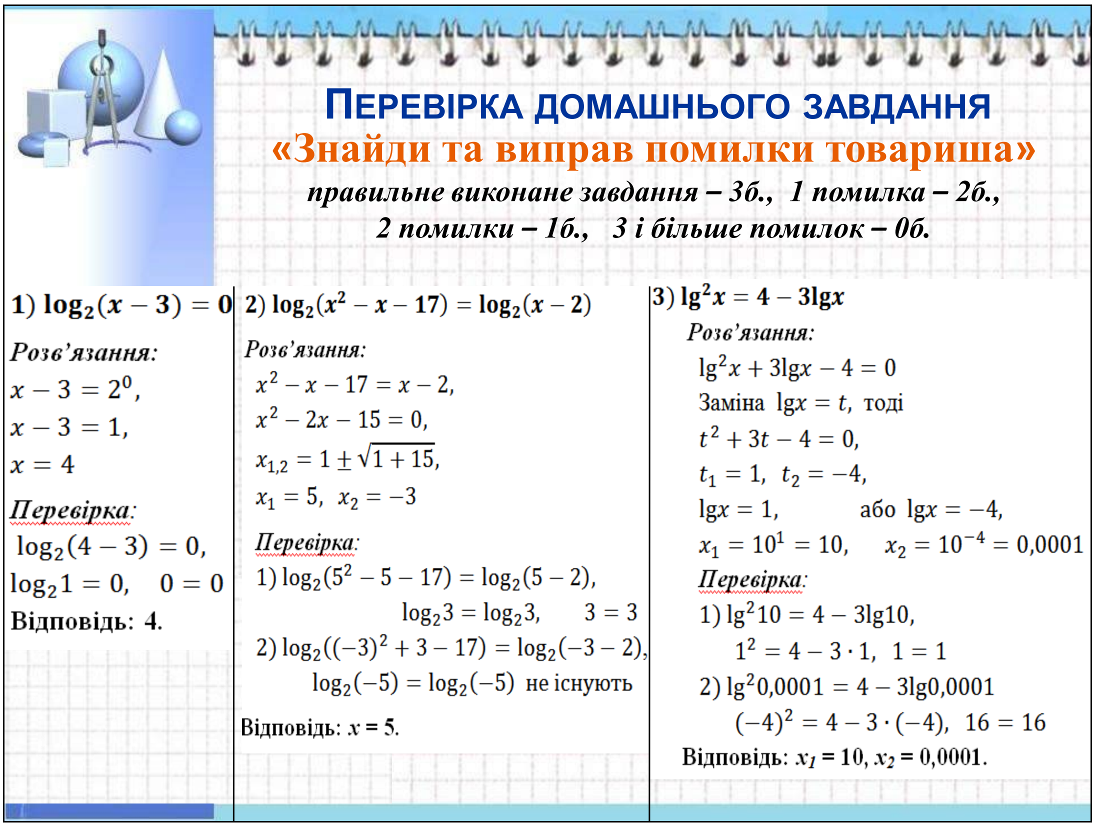
ІІ. Перевірка домашнього завдання

Відкрийте ваші робочі зошити та запишіть число. Зараз ми перевіримо як ви виконали домашнє завдання.

Яке було домашнє завдання? (повторити теми: Логарифм числа. Логарифмічні рівняння. Розв'язати рівняння.)

1. Інтерактивна вправа «Знайди та виправ помилки товариша».

Обміняйтеся зошитами. Перед вами на слайді виконані рівняння. Знайдіть та виправте помилки у роботі свого товариша та оцініть дану роботу.



Учні обмінюються зошитами і звіряють домашнє завдання свого сусіда з виконаними завданнями на слайді і оцінюють свого товариша: правильно виконане завдання – 3 б., 1 помилка – 2 б., 2 помилки – 1 б., 3 і більше помилок – 0 б.

Перед вами на парті лежать картки обліку знань учня, підпишіть їх. В цих аркушах на кожному етапі заняття ви будете записувати отримані бали. В кінці уроку, відповідно до набраних балів, ви отримаєте оцінку.

А зараз перенесіть в картку кількість балів, які ви отримали за виконане домашнє завдання. (Отримані бали виставляються в картку обліку знань.)

III. Актуалізація опорних знань

Французький письменник Анатоль Франс (1844-1924) помітив, що: «Навчатися можна весело, з гарним настроєм, посміхаючись… Щоб переварити знання, потрібно поглинати їх з апетитом».

Прислухаємося до поради письменника: будемо на занятті активними, уважними і «поглинати» знання будемо з великим бажанням, адже вони скоро нам знадобляться для успішного виконання контрольної роботи, а в подальшому і успішної здачі зовнішнього незалежного оцінювання.

1. Рефлексія настрою та емоційного стану «Смайлик»

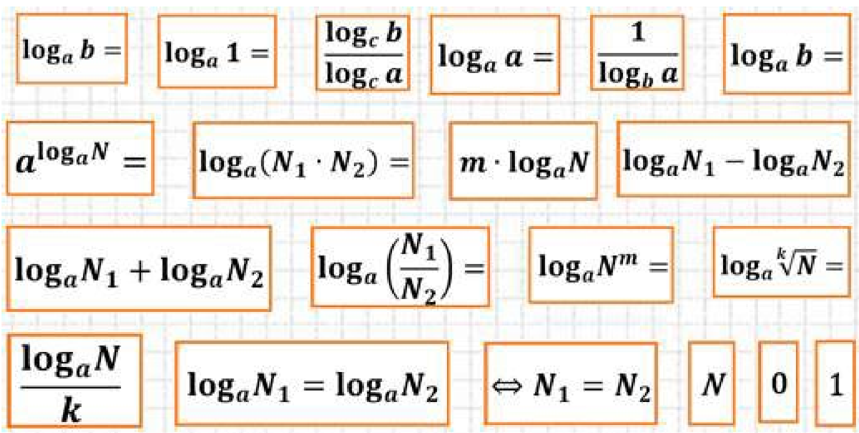
Оберіть смайлик, який відповідає на даний момент вашому настрою. Надіюсь ваш настрій чудовий, позитивний, сповнений бадьорості та активності. Адже лише гарний настрій підвищує працездатність, впливає на самопочуття, надає впевненості в собі, допомагає впоратися з складними ситуаціями.

2. Інтерактивна вправа «Знайди пару».

Робота в малих групах.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь нам не обійтись без властивостей логарифмів та деяких логарифмічних тотожностей. Дітям роздають конверти з завданнями. Учням, які отримають конверт, потрібно об'єднатися в пари та за 5хв. виконати таке завдання:

Завдання. Скласти формули, які відображують властивості логарифмів та логарифмічні тотожності.



Два учні працюють на закритій магнітній дошці

3. Усний рахунок (проводиться одночасно з вправою «Знайди пару»)**.**

В цей час ми пригадаємо, що називається логарифмом числа. Проведемо усний рахунок. За кожну правильну відповідь нараховується 1бал.

4. Хвилинка ерудита (фронтальне опитування)

Перевіримо, чи виконали завдання учні, які працювали в парах, та пригадаємо властивості логарифмів.

– Чому дорівнює логарифм одиниці? (0).

– Чому дорівнює логарифм основи? (1).

– Назвіть основну логарифмічну тотожність. ($a^{\log_a N} = N$)

– Чому дорівнює логарифм добутку двох додатних чисел? (…дорівнює сумі логарифмів)

– Чому дорівнює логарифм частки двох додатних чисел? (…різниці логарифмів діленого і дільника)

– Чому дорівнює логарифм степеня додатного числа? (…показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня)

– Чому дорівнює логарифм кореня з додатного числа? (…логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня)

– Якими є додатні числа, якщо логарифми таких чисел за тією самою основою рівня? (…рівні)

4. Інтерактивна вправа «Асоціативний кущ».

Назвіть властивості, які асоціюються з кожним виразом.

Слайд з виразами: $\log_4(-36)$, $\log_{-2}5$, $\log_5(-x)$, $\log_x 2$.

– Чи існує логарифм від'ємного числа? (Ні)

– Логарифм ще якого числа не існує? (0)

– Якою може бути основа логарифма? (тільки додатною, і $\neq 1$)

Не забувайте записувати отримані бали за кожний етап заняття!

IV. Мотивація навчальної діяльності

Відомі вчені так висловлювалися про логарифми:

«Винахід логарифмів, скорочуючи обчислення декількох місяців в працю кількох днів, немов подвоює життя астрономів»**.** П'єр Симон Лаплас

Альберт Енштейн казав: «Мені доводиться ділити свій час між політикою та рівняннями. Проте рівняння, як на мене, набагато важливіше, тому що політика існує тільки для даного моменту, а рівняння будуть існувати вічно».

Область застосування логарифмів дуже різноманітна. Як виявилося, і в сільському господарстві, і в медицині не обійшлося без логарифмів.

Наприклад,

- час, за який тварини набувають заданої ваги, можна обчислити за

$$t = \frac{\ln m - \ln m_0}{k}$$

допомогою логарифма , де m – задана вага, m_0 - вага при народженні, k – коефіцієнт відносної швидкості росту, t – період часу;

- закон, що описує швидкість зміни кількості ліків в організмі; швидкість руйнування адреналіну в крові;

- час виведення з крові радіоактивних ізотопів містить натуральний

логарифм , де A_t – кількість речовини в тілі через час t, A_0 – початкова кількість речовини в тілі, k – коефіцієнт пропорційності.

Розв'язування багатьох практичних задач зводиться до складання та розв'язування рівнянь.

А «Рівняння – це золотий ключ, що відкриває усі математичні сезами»

(польський математик С.Коваль)

V. Повідомлення теми, мети та завдань заняття

Отже, тема заняття : Розв'язування логарифмічних рівнянь.

Мета та основні завдання уроку:

- систематизувати методи розв'язування логарифмічних рівнянь,
- удосконалити вміння і навички розв'язування логарифмічних рівнянь,
- перевірити свої знання та підвищити їх рівень,
- з'ясувати важливість даної теми.

Тема та мета озвучуються викладачем, демонструються на слайдах, записуються в зошити.

VI. Удосконалення вмінь і навичок

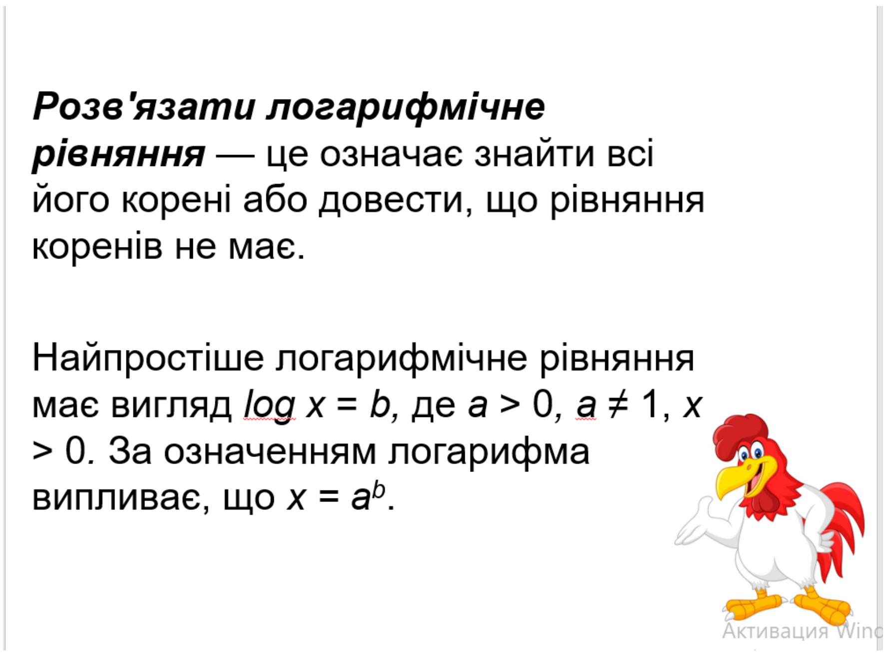
1. Фронтальна бесіда.

– Які рівняння називаються логарифмічними? (які містять невідоме або під знаком логарифма, або в основі логарифма)

– Які з даних рівнянь є логарифмічними?

– Що означає розв'язати рівняння?

– Вкажіть найпростіше логарифмічне рівняння. .



– Назвіть основні методи розв’язування логарифмічних рівнянь.

(за означенням логарифма, потенціювання, введення нової змінної, зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи, логарифмування)

- Найпростіші логарифмічні рівняння;
- Розв'язування логарифмічних рівняннь методом заміни змінної
- Розв’язування логарифмічних рівняннь методом потенціюння;
- Розв’язування рівяннь зведенням логарифмів до однієї і тієї основи;
- Розв’язування логарифмічних рівнянь методом логарифмування;
- Розв’язування логарифмічних рівнянь функціонувально- графічним методом;

2.Встановлення відповідності «Рівняння – метод»

Встановіть відповідність:

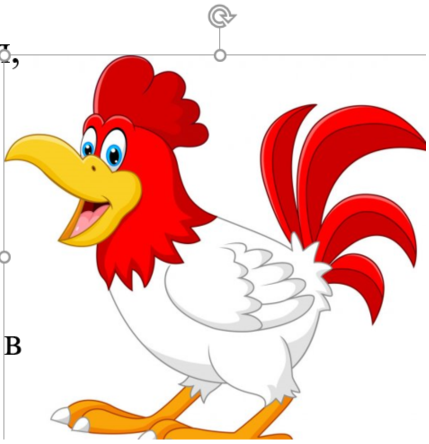
1	$\log_3(5+4\log_3(x-1))=2$	*введення нової змінної*
2	$\log_9(x+1)+\log_9(x+9)=1$	*логарифмування*
3	$\log_2 x+\log_2^2 x-5=9$	*за означенням логарифма*
4	$x^{\log_2 x}=4$	*потенціювання*
5	$\log_4 x+\dfrac{5}{\log_x 4}=6$	*зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи*

Пам’ятайте!

При розв’язуванні логарифмічних рівнянь досить часто доводиться виконувати не рівносильні перетворення, які можуть призвести до появи сторонніх коренів. Тому обов’язково виконуємо перевірку.

Зверніть увагу!

Іноді при розв’язуванні логарифмічних рівнянь виконують перетворення, які можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного із одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості в рівносильності рівнянь.



Виконання письмових вправ

Колективне виконання завдань під керівництвом вчителя.

Розв’язати рівняння:

Розв'язати рівняння

1) $\log_5 x^2 = 0;$	1) $x = \pm 1$
2) $\log_3 3^x = 4;$	2) $x = 4$
3) $\log_3 x - 1 = 0;$	3) $x = 3$
4) $\log_2(2x-1) = 3;$	4) $x = 4{,}5$
5) $\log_3(2x-3) - 1 = 0;$	5) $x = 3$
6) $\log_5(2x - x^2) = 0;$	6) $x = 1$
7) $\log_{0,7}(2x+1) = \log_{0,7}(x-1).$	7) $x = -2$

Коментоване розв’язування рівнянь 1-7 на дошці.

VII. Застосування знань, умінь і навичок

Скажи мені – і я забуду,

Покажи мені – і я запам'ятаю,

Дай мені діяти самому – і я навчуся.

Давньокитайська мудрість

Самостійна робота «Аукціон логарифмічних рівнянь»

Завдання: Розв'язати рівняння та назвати метод.

Проведемо «Аукціон логарифмічних рівнянь».

У мене смужки різних кольорів, на кожній з них записано рівняння. Кожний колір смужки відповідає рівню складності:

Червоний колір – високий рівень (3б.)

Зелений колір – достатній рівень (2б.)

Синій колір – початковий та середній рівні (1б.)

Розв'язавши рівняння високого рівня ви отримаєте 3б., достатнього – 2б., середнього – 1б. Час на виконання 10хв.

Прошу самостійно обрати рівняння, яке б відповідало вашому рівню засвоєння даної теми. Допоможе мені черговий.

Кожен учень обирає й розв'язує 1 рівняння, за що отримує відповідну кількість балів.

Синій колір

2)

3) $\log_3(x^2 - 5x + 7) = 1$

4) $\log_5(3x - 4) = \log_5(12 - 5x)$

Зелений колір

1) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = \lg(9x - 9)$

2) $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 = 0$

Червоний колір

1)

2)

Перевірка виконання самостійної роботи на екрані висвітлено відповіді або учні розв'язують рівняння на дошці. Занесіть отримані бали до картки обліку знань та підрахуйте загальну кількість.

VIII. Підведення підсумків уроку. Рефлексія.

Отже, на занятті ви добре попрацювали, продемонстрували свої знання, вміння та навички, були активними.

1. Чи є існує універсальний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь.
2. Який спосіб використовувався найчастіше?
3. Який спосіб найбільше вам подобається?
4. Як уникнути втрату коренів та появу сторонніх коренів логарифмічних рівнянь?
5. З якими труднощами ви зустрілися? Що допомогло подолати ці труднощі (конспект, допомога товариша, типові приклади в зошиті …)?
6. Що на занятті було цікавим? Не цікавим?

Учні по списку групи називають отримані бали, викладач оцінює учнів. Оголошення оцінок.

IX. Домашнє завдання

«Домашня пошта»: Зараз прошу картки з домашнім завданням. Черговий мені допоможе.

Домашнє завдання

Варіант 1

1. Повторити відомості про логарифмічні рівняння та методи їх розв'язування.

2. Розв'язати рівняння:

1) $\log_2(3-6x)=3$

3) $\log_3^2(x-1)+2\log_3(x-1)=8$

2) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_{4x} 2$

4)

3* Знайти значення виразу:

Варіант 2

1. Повторити відомості про логарифмічні рівняння та методи їх розв'язування.

2. Розв’язати рівняння:

3)

1)

2) $\log_3^2 x + 2\log_3 x = 3$ 4)

3* Створити презентацію на тему «Логарифмічні рівняння».

Додатки

КАРТКА УСПІШНОСТІ

Прізвище,ім’я ____

Вид завдання	**Отримані бали**	**Кількість балів на етапі**
«Знайди та виправ помилки товариша»		Правильно виконане завдання – 3 б., 1 помилка – 2 б., 2 помилки – 1 б., 3 і більше помилок – 0 б.
«Знайди пару»		Правильно виконане завдання – 3б., 1-2помилки – 2б., 3- 4 помилки –1б., 5і більше помилок – 0 б.
Усний рахунок		За кожну вірну відповідь – 1б.
«Асоціативний кущ»		1б.
Усна відповідь		За кожну вірну відповідь – 1б.
Робота біля дошки		1б.
Самостійна робота		Від1б. – до 3б.
Сума балів		

ДОДАТОК В

Конспект уроку на тему «Показникові рівняння».

Формування компетентностей:

- **предметна компетентність:**

сприяти усвідомленню матеріалу з теми «Показникові рівняння», розумінню алгоритмів їх розв’язання, розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку, відтворити вміння розв’язувати завдання із даної теми;

- **ключові компетентності:**

- математична компетентність – ознайомити з означенням показникових рівнянь та алгоритмом розв’язування цих рівнянь; формувати вміння розв’язувати показникові рівняння;

- спілкування державною мовою – доречно та коректно вживати математичну термінологію, поповнювати свій словниковий запас, робити висновки на основі отриманої інформації, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

- інформаційно – цифрова компетентність – структурувати дані, визначати достатність даних для розв’язування завдань;

- основні компетентності у природничих науках і технологіях – розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв’язати засобами математики;

- соціальна та громадянська компетентності – співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі, бути мобільним, стійким перед труднощами, створювати ситуацію успіху для формування позитивного ставлення до себе ”я можу, у мене все вийде ”.;

- уміння вчитися впродовж життя – визначати мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети;

- ініціативність і підприємливість – генерувати нові шляхи розв’язання поставлених проблем, ухвалювати оптимальні рішення, аргументувати свою позицію.

Тип заняття: формування компетентностей.

Форма проведення заняття: класно-урочна.

Основні методи та прийоми: словесні, фронтальна бесіда, розповідь, колективне обговорення, самостійна робота, робота з підручником, робота в парах.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби: набір завдань для «мозкового штурму», картки із завданнями, плакат для гри «Впізнай мене».

Підручник: Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.

Епіграф уроку:

Недостатньо мати лише добрий розум,
Головне - це раціонально застосовувати його.

Рене Декарт

Хід уроку:

І. Організаційний момент.

Перевірка наявності учнів

Привітання учнів

Видатний французький математик, філософ, фізик Блез Паскаль стверджував: «Величність людини в її здатності думати». Сьогодні ви спробуєте відчути себе великими людьми, відкриваючи знання для себе.

Девізом до уроку будуть слова давньогрецького філософа, математика, астронома Фалеса Мілетського:

Що є найбільше у світі? – Простір.

Що найшвидше? – Розум.

Що наймудріше? – Час.

Що приємніше всього? – Досягнути бажаного.

Хочеться, щоб кожен з вас на сьогоднішньому уроці досяг бажаного результату і поповнив скарбничку своїх знань.

II. Актуалізація опорних знань.

Два учні працюють з завданнями на картках.

Прийом «Мозковий штурм».

1. Бліц-опитування (Слайд 2-3).

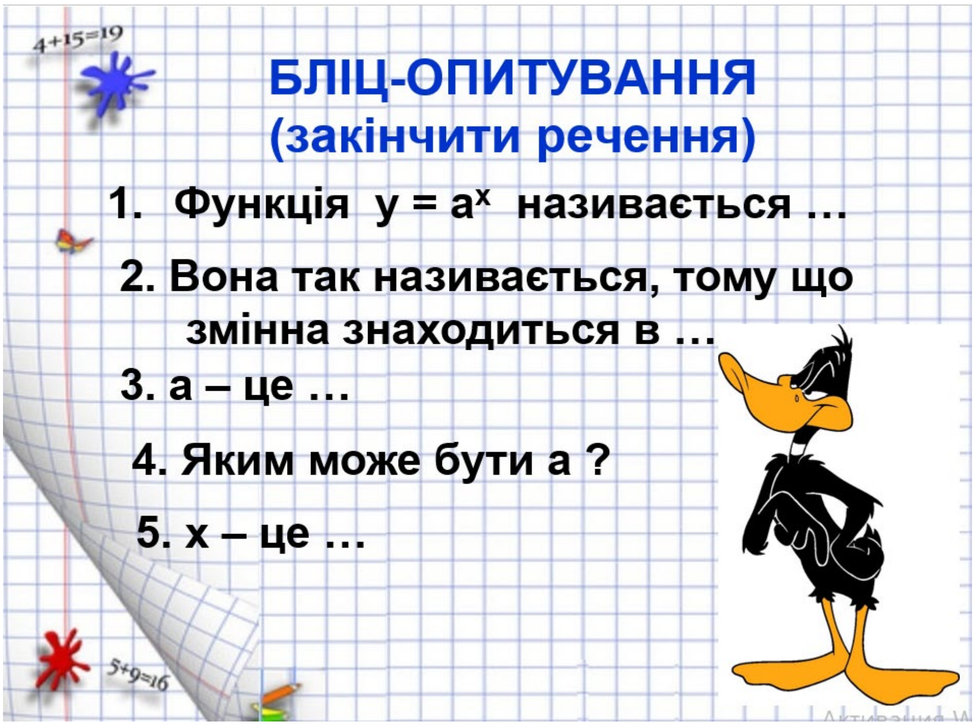
Яка з даних функцій є показниковою? (Слайд 3):

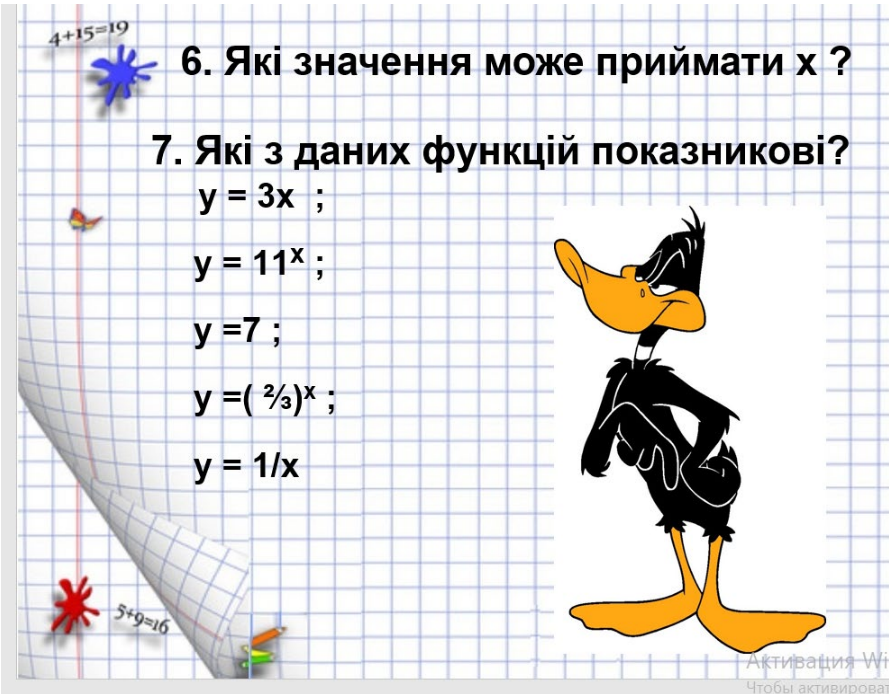
Чому? Яка функція називається показниковою?

Назвіть відомі вам властивості показникової функції.

$y=2^x$, $y=0{,}2^x$. Яка з цих функцій зростаюча, а яка спадна?

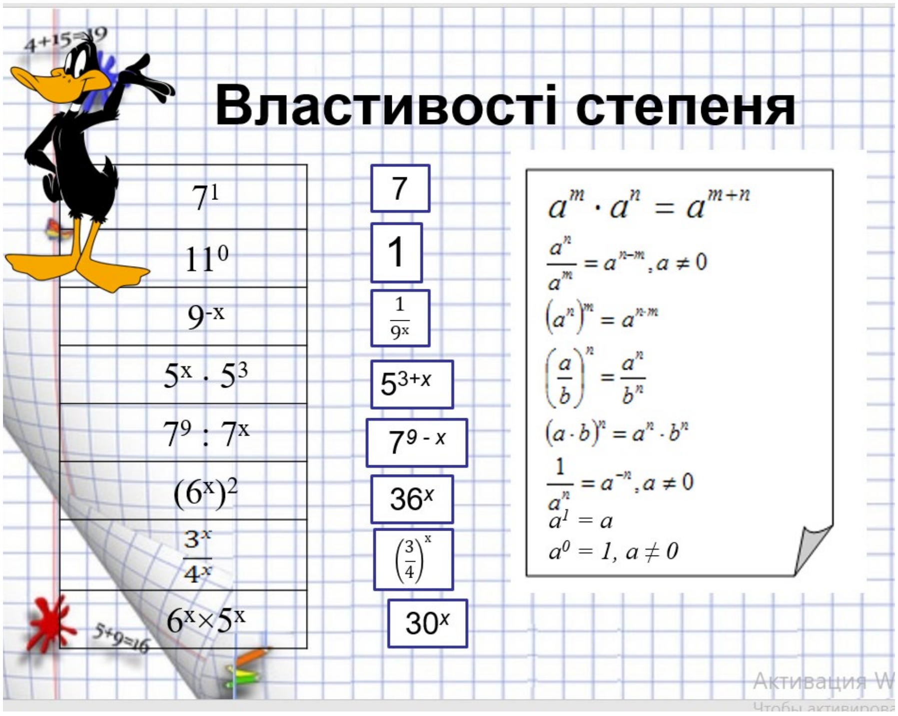
$y=2^x$ на відрізку $[-2;5]$. При якому значенні змінної х функція набуває найменшого (найбільшого) значення?





2. Встановіть відповідність.

Гра «Встановіть відповідність». Повторюємо властивості степенів.



III. Мотивація навчання.

Як бачите, вміння використовувати властивості степеня з довільним дійсним показником, практично полегшує роботу під час розв’язання завдань, спрощення виразів, побудови та читання графіків показникових функцій . Ці властивості застосовуються досить часто. Сьогодні ми ознайомимось з означенням та алгоритмом розв'язування показникових рівнянь.

IV. Вивчення нового матеріалу (слайд 5-6).

1. Робота з підручником. (п.2 ст. 16)**.**

2. Вивчення нової теми за планом:
   - ✓ Приклади показникових рівнянь. ($2^{x} = 8$; $3^{x} * 3^{x-1} = 4$; $0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x2}$)
   - ✓ Означення показникового рівняння.
   - ✓ Дослідження коренів показникового рівняння
   - ✓ Теорема(необхідна і достатня умова виконання рівності $a^{x}{}_{1} = a^{x}{}_{2}$) і наслідок.
   - ✓ Методи розв`язування показникових рівнянь.
   - ✓ Приклади розв`язування показникових рівнянь методом зведення обох частин до спільної основи.

3. Виклад матеріалу.

Розглянемо рівняння: $2^{x}=8$; $3^{x} \cdot 3^{x-1}=4$; $0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}$

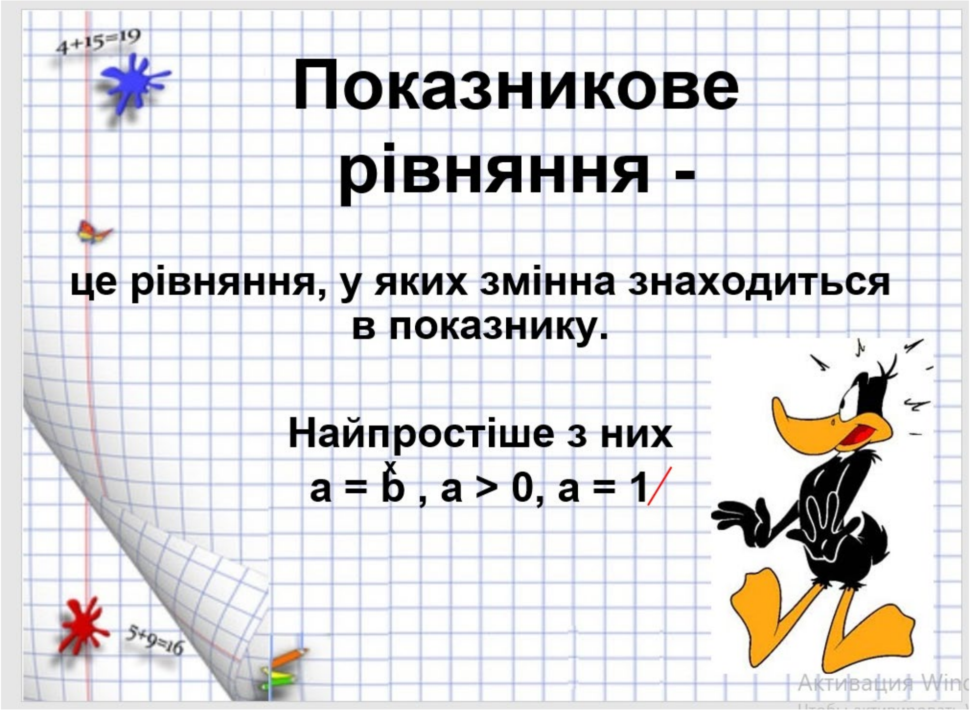
У всіх цих рівняннях зміна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

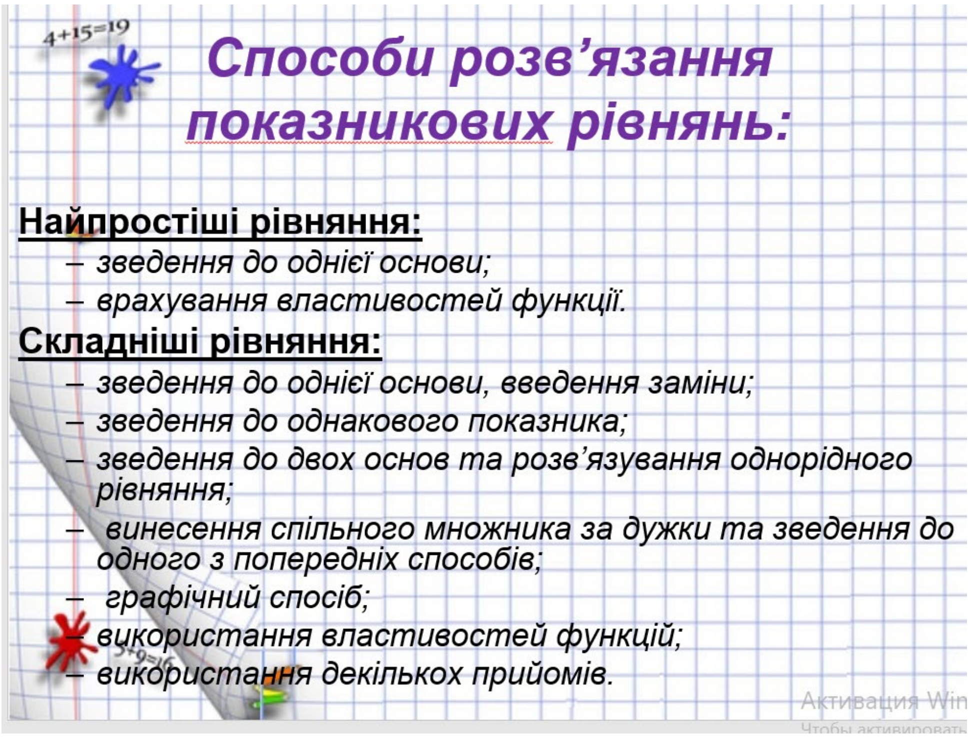
Теорема 17.1. При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.(З доведенням та наслідком учні знайомляться самостійно)

Наприклад. 1) $2^x=8$, $2^x=2^3$, x=3.

2) Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^x=$?

$(-6; -4)$, $(-4; -2)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$





V. Закріплення знань та вмінь.

1. <u>Усно. Розв’яжіть рівняння.</u> (робота з презентацією, слайд 5)

1) $4^x = 64$; 2) $3^x = \frac{1}{81}$; 6) $8^x = 16$; 8) $\sqrt{5^x} = 25$.

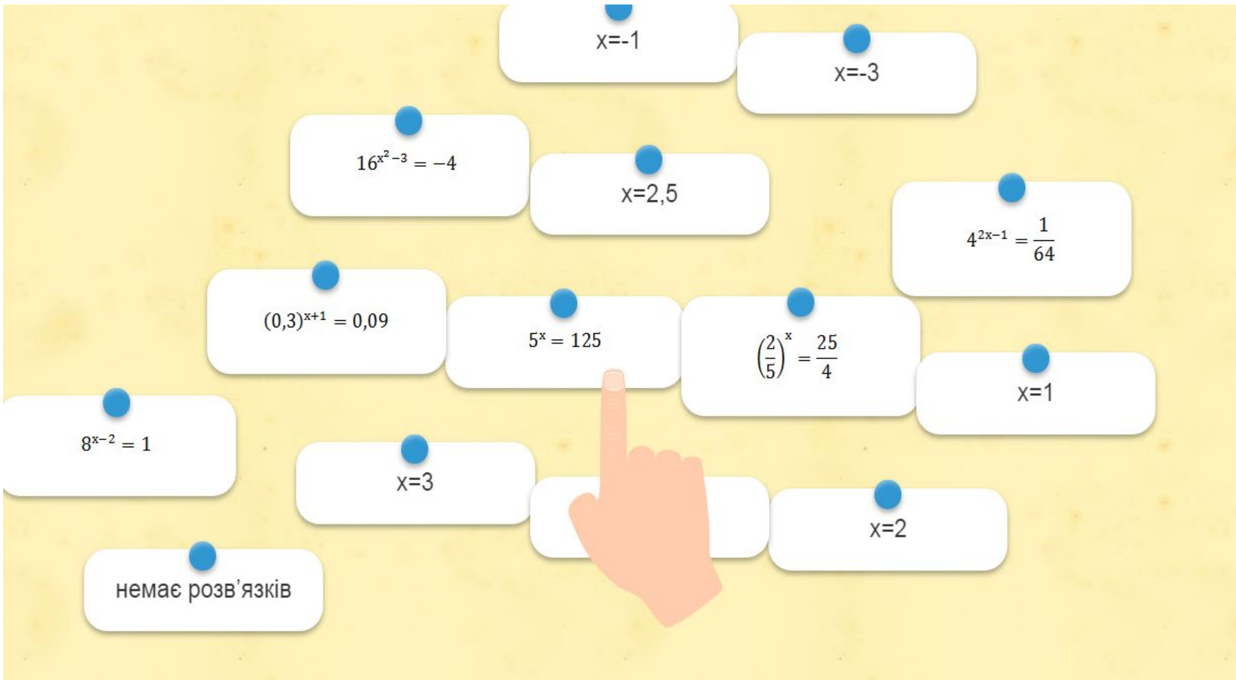
2. <u>Розв’язування завдань.</u> (Слайд 6)

1) Робота біля дошки. Розв'язати рівняння:

а) $3^x=$; б) $5^{x+3}=($ $)^x$; 3) $3^{x+2} + 3^x = 90$.

2) робота в парах: хлопці – $2^{x+6}=($ $)^x$; дівчата – $5^x+5^{x+1}=30$.

3) Виконання інтерактивної вправи за посиланням: https://learningapps.org/display?v=pn4b3jh2t17



IV. Підсумок уроку

1) Сьогодні на уроці я:

вивчив …

пригадав …

запам'ятав…

зрозумів …

мені важко давалося …

тепер буду намагатись …

VII. Домашнє завдання

п. 2 ст. 16 (вивчити), виконати № 2.2.

ДОДАТОК Г

Розробка самостійної роботи на тему: «Показникові рівняння»

Варіант 1.

Розв’язати рівняння:

Початковий та середній рівень

1) $3^x = \frac{1}{81}$; 2) $5^{x-1} - 1 = 0$; 3) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 4) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) $4^{x+1} - 4^x - 4^{x-1} = 44$; 2) $2^{x+1} + 4^x = 80$.
2. $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$.
3. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3^{2x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$.

Високий рівень

1. 1) $2 \cdot 4^{x+1} - 3^x = 3^{x+2} - 2 \cdot 4^x$; 2) $4 \cdot 9^x + 12^x = 3 \cdot 16^x$.
2. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$.
3. Розв’язати рівняння $\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 21 = 0$.

Варіант 2.

Розв’язати рівняння:

Початковий та середній рівень

1. 1) $2^{4x} = 64$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} - 1 = 0$; 3) $5^{x+2} + 5^x = 130$; 4) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) $5^{x+1} - 5^x + 5^{x-1} = 105$; 2) $3^{x+1} + 9^x = 108$.
2. $\sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[4]{5^x} = 1000$.

3. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=1, \\ 2^{3x}\cdot 2^{y}=64. \end{cases}$.

Високий рівень

1. 1) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 2) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$.

2. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x}\cdot 5^{y}=75, \\ 3^{y}\cdot 5^{x}=45. \end{cases}$.

3. Розв’язати рівняння $6^2\sqrt[x]{2}-\sqrt[x]{2}=8$.

ДОДАТОК Д

№ 1	№ 2
Розв'язати рівняння: 1) $\log_{0,2}(x+4)=-2$; (1б) 2) $\log_8(x^2-7x+4)=\log_8(x-3)$; (2б) 3) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$; (2б) 4) $\log_3^2 x - 4\log_3 x+3=0$; (2б) 5) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$; (3б) 6)	Розв'язати рівняння: 1) $\lg(x+1)=1$; (1б) 2) $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$; (2б) 3) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=1$; (2б) 4) $\lg^2 x-7\lg x+6=0$; (2б) 5) $\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1$; (3б) 6) $x^{\log_2 x+2}=256$. (2б)

Розробка самостійної роботи на тему: «Логарифмічні рівняння»

№ 3	№ 4
Розв'язати рівняння: 1) $\lg(10 - x) = 4$; (1б) 2) $=\log_{0.7}(7 - 3x)$; (2б) 3) $\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1$; (2б) 4) $\lg^2 x + 7\lg x + 6 = 0$; (2б) 5) $\frac{1}{\lg x + 3} + \frac{2}{3 - \lg x} = 1$; (3б) 6) $= 98 - x^{\lg 7}$. (2б)	Розв'язати рівняння: 1) $\log_{0,1}(x - 7) = -1$; (1б) 2) $\lg(2x - 1) + \lg(x - 9) = 2$; (2б) 3) $\log_7(2x^2 + 4x - 7) = \log_7(x+2)$; (2б) 4) $\log_3^2 x + \log_3 x = 2$; (2б) 5) $\frac{1}{5 - 4\lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3$; (3б) 6) . (2б)

ДОДАТОК Е

Розробка тестових робіт для перевірки знань до теми

ТЕСТ 1

Показникові рівняння

(серед 5-ти варіантів відповіді вибрати одну правильну)

№ 1. Розв'язати рівняння $2^{2x} = 512$.

А	Б	В	Г	Д
3	-5	4,5	$\log_2 512$	$\sqrt{512}$

№ 2. Розв'язати рівняння та знайти суму їх коренів: $3^{2x-1} = 81$ і .

А	Б	В	Г	Д
-2	9	7	5,6	-3,5

№ 3. Розв'язати рівняння та вказати інтервал, який містить їх корені

та .

А	Б	В	Г	Д
(-3; -2)	(-2; -1)	(0; 1)	(1; 2)	(-1; 0)

№ 4. Розв'язати рівняння: .

А	Б	В	Г	Д

1	-2	-3	0,1	0,01

№ 5. Розв’язати рівняння та вказати їх спільні корені:

та .

А	Б	В	Г	Д
1	-2 і 2	0 і 1	1; -1; 0	1; -1

№ 6. Розв’язати рівняння: .

А	Б	В	Г	Д
0	-1	4	3	2

№ 7. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д

№ 8. Розв’язати рівняння: . У відповідь записати суму коренів.

А	Б	В	Г	Д
-3	6	5	0	8

№ 9. Встановити відповідність між рівняннями (1-4) та їх коренями (А-Д).

1) ; **А)** -5

2) ; **Б)** 4

3) ;

В) 5

4) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$. **Г)** 9

Д) 1

№ 10. Встановити відповідність між рівняннями (1-4) та сумою їх коренів (А-Д).

1) ; **А)** 3

2) =0; **Б)** 4

3) $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$; **В)** 5

4) **Г)** 2

Д) 7

ТЕСТ 2

Показникові нерівності

(Розв’яжіть нерівність, а потім оберіть правильну відповідь)

№ 1. Розв’язати нерівність: $10^{3x+2} > 100$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
(-∞; 10)	(0; 10)	(10; +∞)	(0; +∞)	(-∞; 10)

№ 2. Розв’язати нерівність: $0{,}3^{x} > 0{,}09$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$x < -2$			$x \le 2$	$x > \frac{1}{2}$

№ 3. Розв’язати нерівність: .

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$[-2;\ 3]$	(-3; 2)	$[-2; 3)$	(-2; 3)	$[-3;\ 2]$

№ 4. Яка з наведених нерівностей має розв’язки?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**

№ 5. Знайти множину розв’язків нерівності: .

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**

R	$(-\infty;\ \log_4 3)$	$(-\infty;\ \log_3 4)$		

№ 6. Розв'язати нерівність: .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right]$	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$	R	$[-1/4;\ +\infty)$	$[-1/4;\ +\infty)$

№ 7. Розв'язати нерівність: .

А	Б	В	Г	Д
	R	$-2 \le x < 2$	$-2 < x < 2$	$x < -2$

№ 8. Запишіть множину розв'язків нерівності: $25^{-x} + 5^{-x+1} \ge 50$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty;\ -1)$		$[-1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -1]$

№ 9. Встановити відповідність між нерівностями (1-4) та їх коренями (А-Д).

1) ; **А)**

2) ; **Б)** (-1; 1)

3) ; **В)** $(-\infty; -1) \cup (1;\ +\infty)$

4) . **Г)** $\varnothing$

Д) $(-\infty;\ +\infty)$

№ 10. Встановити відповідність між нерівностями (1-4) та множиною їх розв'язків (А-Д)

1. $1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 16$; **А)** $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

2. $1 \le 2^x \le 16$; **Б)** $[-4; 0]$

3. $1 \le 16^x \le 2$; **В)**

4. $1 \le \left(\frac{1}{16}\right)^x \le 2$; **Г)**

Д) $[0; 4]$

ТЕСТ 3

Логарифмічні рівняння

$\log^1 \left(5x - 7\right) = -3$

№ 1 Розв'язати рівняння: .

А	Б	В	Г	Д
-3	4	3	2	ø

№ 2 Розв'язати рівняння: $\log_2(2x+1) = \log_2\left(9x+17\right) - \log_2\left(x+5\right)$

А	Б	В	Г	Д
-3	2	2; -3	$-1\frac{5}{6}$	-2

№ 3. Розв'язати рівняння: $\lg\lg\lg x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1000	1	10^{10}	10	100

№ 4. Розв'язати рівняння: $\log_3^2 x - \log_3 x = \log_3 9$.

А	Б	В	Г	Д
-3; $-\frac{1}{9}$	-3;		9	; 9

№ 5 Знайти суму коренів рівняння: $x^{\lg x} = 10000$.

А	Б	В	Г	Д
1000	110	100,1	100,01	101

№ 6. Розв'язати рівняння: .

А **Б** **В** **Г** **Д**

1; 4	0; 1	0; 1; 4	-2; 1	1; -3; 4

№ 7. Указати рівняння рівносильне рівнянню: .

А. ;

Б. ;

В.

Г.

Д.

№ 8 Розв’язати рівняння: $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	4	0,1	

№ 9. Встановити відповідність між рівняннями (1-4) та множинами їх розв’язків (А-Д).

1. ; **А)**
2. $3^{2-\log_3 x} = 81x$; **Б)**
3. $2 \cdot 3^x = -9$; **В)**
4. $3 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 3^{2x}$. **Г)** $\varnothing$

Д) $\{-2; 1\}$

№ 10. Встановити відповідність:

1. $\log_3(-x) = 4$; **А)** -64

2. $\log_4 x = -3$; **Б)**

3. $\log_3 x = -4$; **В)**

4. $\log_4(-x) = 3$. **Г)**

Д) -81

ТЕСТ 4

Логарифмічні нерівності

№ 1. Знайти множину розв'язків нерівності: $\lg(2x+3) < \lg(x-1)$.

А	Б	В	Г	Д
2	-1	3	$\varnothing$	4

№ 2. Розв'язати нерівність: .

А	Б	В	Г	Д
$(2{,}5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$	$(2{,}5; 5)$

№ 3. Розв'язати нерівність: .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 7)$	$(0; +\infty)$	$(0; 7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; -3)$

№ 4 Розв'язати нерівність: $\log_2(x^2 - 9x + 8) < 3$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(8; 9)	$[0; 1]$	$(0; 1) \cup (8; 9)$	$[8; 9]$

№ 5 Розв'язати нерівність: $\log_x(x+2) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	$(0; 2]$	(-1; 2)	$[1; 2]$	$(1; 2]$

№ 6. Розв'язати нерівність: .

А	Б	В	Г	Д
$[1; 2]$	(0; 2)	$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$	$(0; 1] \cup [2; +\infty)$	$(0; 1) \cup (2; +\infty)$

№ 7. Розв'язати нерівність: $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
		$(0;\ 1/2]$		$[2;\ +\infty)$

№ 8. Розв’язати нерівність: $|\log_3 x| \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
	$[3;\ +\infty)$	$(-\infty;\ -1/3) \cup [3;\ +\infty)$	$\left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$	$[-1/3; 0) \cup [3;\ +\infty)$

№ 9. Встановити відповідність між нерівностями (1-4) та множинами їх розв’язків:

1. **А)** $(-\infty;\ -1)$
2. **Б)** $(-\infty;\ 1)$
3. **В)** $(1;\ +\infty)$
4. **Г)** (-1; 0)

Д) (0; 1)

№ 10. Встановити відповідність між нерівностями (1-4) та відповідями (А-Д)

38. $\log_9 x < \frac{1}{2}$; **А)** (0; 9)

39. $\log^1 x > -2$; **Б)** $(9;\ +\infty)$

40. $\log^1 x < -\frac{1}{2}$; **В)**

41. $\log^1 x < \frac{1}{2}$. **Г)** (0; 3)

Д) (3; $+\infty$)