Т.М. Микитин
О.Ю. Поліщук
Б.М. Берташ

Практикум з економетрії

Рівненський державний гуманітарний університет

Микитин Т.М., Поліщук О.Ю., Берташ Б.М.

Практикум з економетрії

Навчальний посібник

Рівне

2023

УДК 330.43 (075.8)
М 59

Рекомендовано Міністерством освіти і науки як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист №14/18-Г–1976 від 25.07.2008 р.)

Рецензенти:

Черчик Л.М., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри менеджменту та адміністрування Волинського національного університету ім. Лесі Українки,

Грицюк П.М., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Національного університету водного господарства та природокористування

Микитин Т.М.

Практикум з економетрії: Навч. посіб. Вид. 2-ге / Т.Микитин, О.Поліщук, Б.Берташ. - Рівне: видавець Олег Зень, 2023. – 130 с.

ISBN 978-617-601-491-1

У посібнику розглянуто основні методи оцінювання параметрів економетричних моделей з урахуванням особливостей економічної інформації. Подано основи економетричного моделювання й наведено численні приклади типових задач, вправ і запитань для самостійної роботи.

Навчальний посібник розрахований на студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Він буде корисний усім, хто має намір оволодіти економетричними методами та моделями.

УДК 330.43 (075.8)

ISBN 978-617-601-491-1

ЗМІСТ

ВСТУП

Термін „економетрія” вперше запровадив львівський учений П.Чомпа, опублікувавши у 1910 році книгу „Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка грунтується на політичній економії”. Однак термін не набув широкого поширення. Згодом вийшли праці Гукера, у яких за допомогою кореляційно-регресійного аналізу вивчались залежності між впливом банкрутства на товарній біржі та ціною на зерно. У роботах Мура (1914-1917 рр.) розглядались питання використання методів математичної статистики в економічному аналізі. Дослідження Ч.Кобба і П.Дугласа про виробничу функцію (1928) увійшли в економетрію як класичний приклад економетричного аналізу [23].

В 1930 році створено економетричне товариство, головною метою діяльності якого було „розвиток економічної теорії і її зв’язок з статистикою та математикою”.

Серед основоположників економетрії видатні вчені-економісти, відзначені Нобелівською премією:

- Р.Фріш, Я.Тінберген (1969) - за розробку економетричних моделей прийняття рішень;
- В.Леонтьєв (1973) - за розробку в галузі балансових моделей;
- Т.Купманс (1975) - за розробку лінійних економетричних моделей і розвиток статистичних методів в економетрії;
- Л.Клейн (1980) - за розробку складних економетричних моделей і їх застосування для аналізу економічної політики;
- Д.Хекман і Д.Макфеден (2000) - за розробку мікроеконометрії та методів статистичного аналізу.

На сьогодні методи економетрії - найсучасніші засоби аналізу та дослідження різних соціально-економічних систем. За їх допомогою можна перевірити економічні гіпотези, обгрунтовано прогнозувати розвиток економічних систем, розробляти шляхи ефективного керування ними.

Економетрія одна з базових дисциплін підготовки бакалаврів економічних спеціальностей. Її вивчення базується на основі математичних та економічних знань, тому студенти повинні мати відповідну математичну підготовку.

Мета вивчення курсу - отримання знань про методи оцінювання параметрів залежностей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами.

Основне завдання - ознайомлення з основними економетричними методами; вивчення основних економетричних моделей; набуття вмінь використовувати їх в практиці управління економічними процесами на різних ієрархічних рівнях національної економіки.

Предметом економетрії є залежності та взаємозв'язки між економічними величинами.

Студенти після вивчення дисципліни повинні знати основи теорії моделювання економіки, основні поняття економетричної моделі та етапи її побудови, застосування методів економетрії для моделювання та системного аналізу соціально-економічних процесів.

Практикум з економетрії підготовлений викладачами кафедри менеджменту на основі багаторічного викладання дисципліни студентам спеціальності „Менеджмент”.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

1.1. Загальний вигляд економетричної моделі та етапи її побудови

Головною задачею економіки є встановлення взаємозв'язків між певними економічними величинами. Приклад: залежність попиту на товар від ціни; прибутку від витрат на маркетинг. Для того, щоб управляти такими процесами, потрібно вимірювати ці величини кількісно. Дану проблему можна вирішити шляхом побудови економетричних моделей.

Економетрична модель – *це функція чи система функцій, яка описує кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками.*

В даній ситуації один чи кілька показників є залежними змінними, інші – незалежними. Таку модель можна представити у виді формули [27]:

$$y=f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.1)$$

де $\boldsymbol{y}$ – залежна змінна,

$\boldsymbol{x_1, x_2, x_n}$ – незалежні змінні.

Економетрична модель може бути побудована на основі системи рівнянь.

Виділяють такі етапи побудови економетричної моделі:

1. Знайомство з економічною теорією, висунення гіпотези про взаємозв'язок між певними величинами.

2. Специфікація моделі (встановлення типу залежності).

3. Формування масивів вихідної інформації згідно мети та завдання досліджень.

4. Оцінка параметрів економетричної моделі методом найменших квадратів (МНК, перший МНК, 1МНК), який дає можливість аналізувати залишки на предмет, чи не суперечить специфікація моделі її передумовам.

5. Аналіз залишків.

6. Визначення прогнозу за побудованою моделлю (верифікація моделі).

1.2. Способи побудови лінійної економетричної моделі

Лінійну економутричну модель можна побудувати наступним чином. **<u>Спосіб 1.</u>**

Лінійна економетрична модель з двома змінними може бути представлена у вигляді:

$$У = b + aX + u, \qquad (1.2)$$

де u – стохастична складова, яка має нульове математичне сподівання та постійну дисперсію.

Оцінимо параметри цієї моделі звичайним методом найменших квадратів (1 МНК).

Згідно методу найменших квадратів для рівняння 1.2 потрібно знайти такі коефіцієнти a і b, для яких сума квадратів відхилень експериментальних значень від теоретичних буде найменшою.

$$F(a;b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \longrightarrow \min \qquad (1.3)$$

Для того, щоб визначити невідомі ***a*** і ***b*** необхідно визначити похідну із функції ***F(a;b)*** і прирівняти її до нуля. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} b \cdot {x_i}^2 = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b = 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

Здійснивши деякі перетворення, отримаєм

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (1.5)$$

Для того, щоб розв'язати вказану вище систему, потрібно обчислити коефіцієнти при невідомих та вільні члени. Це зручно вести в табличній формі.

Таблиця 1.1

Обчислення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	…	…	…	…
$\sum$				

Дану систему можна записати в матричному вигляді наступним чином

$$A\,X=B, \tag{1.6}$$

Значення матриці ***X*** можна знайти з виразу

$$X=B * A^{-1}\,, \tag{1.7}$$

де $\mathbf{A^{-1}}$ – матриця, обернена до матриці А - коефіцієнтів при невідомих;

X – матриця – рядок невідомих;

B – матриця – стовпець вільних елементів.

Для обчислення невідомих потрібно:

1. сформувати матриці А і В;
2. обчислити матрицю A^{-1}, яка обернена до матриці А;
3. перемножити матрицю A^{-1} на матрицю В.

<u>Спосіб 2.</u>

Часто розрахунки методом найменших квадратів ведуть у наступній послідовності:

1. Знаходимо середнє значення **x** та **y** за формулами

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n} \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_1}{n} \tag{1.8}$$

2. Знаходимо середнє квадратичне відхилення:

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad S_y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} \tag{1.9}$$

3. Обчислюємо коваріацію:

$$q_{xy}=\frac{1}{n-1}\cdot\sum(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y}) \tag{1.10}$$

4. Обчислюємо коефіцієнт кореляції:

$$R = \frac{q_{xy}}{S_x \cdot S_y} \qquad (1.11)$$

5. Обчислюємо коефіцієнти рівняння:

$$a = \frac{S_y}{S_x} \cdot R \qquad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} \qquad (1.12)$$

7. Обчислюємо теоретичні значення залежної змінної:

$$y_i{*} = a \cdot x_i + b \qquad (1.13)$$

8. Обчислюємо кореляційне відношення:

$$S_y{}^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i{}^*)^2} \qquad (1.14)$$

Дані розрахунки зручно вести в табличній формі.

Таблиця 1.2

Xi	Yi	Xi-Xc	Yi-Yc	$(Xi-Xc)^2$	$(Yi-Yc)^2$	(Xi-Xc)*(Yi-Yc)	Yi*	Yi-Yi*	$(Yi-Yi^*)^2$
Σ	Σ	X	X	Σ	Σ	Σ	X	X	Σ

Спосіб 3.

Обчислити параметри лінійної економетричної моделі можна також за допомогою функції електронних таблиць Mikrosoft Excel

ЛИНЕЙН (відомі значення _ у; відомі значення _ х; конст; статистика).

„Відомі значення у” - множина значень у.

„Відомі значення х” - множина значень х, що враховує або одну (парна регресія), або кілька змінних (множинна регресія).

„Конст” – логічне значення. Якщо „конст” має значення „истина”, то **a** обчислюється традиційно (модель з вільним членом).

„Статистика”- логічне значення, яке вказує, чи потрібно обчислювати додаткову статистику за регресією. Якщо „статистика” має значення „истина”, то функція ЛИНЕЙН обчислює додаткову регресійну статистику у вигляді масиву (таблиця 1.3).

Таблиця 1.3

a k	a k-1	…	b	a
sa k	Sa k-1	…	sb	sa
R^2	σu			
F	Ступінь свободи n-m			
$\Sigma(Yi^*-Ys)^2$	$\Sigma\ (Yi-Yi^*)^2$			

де b – оцінка параметра bj , j =1, k;

a - оцінка вільного члена регресії;

sa k – стандартна похибка оцінки параметра;

R^2 – коефіцієнт детермінації;

σu – стандартна похибка залишків;

F - F-критерій.

Ступінь свободи дорівнює (n-m), де n – кількість спостережень, m - кількість змінних у моделі [16]. Це значення необхідне для визначення табличного значення F-критерію.

$\Sigma(Yi^*-Ys)^2$ – сума квадратів відхилень, що пояснюється регресією;

$\Sigma(Yi-Yi^*)^2$ – сума квадратів відхилень, що пояснюється похибкою u. Якщо статистика має значення „ ложь” чи її пропустили, то функція ЛИНЕЙН обчислює лише коефіцієнт b і константу a.

1.3. Приклад побудови лінійної економетричної моделі

1.3.1. Завдання роботи

На основі даних про прибутки торгового підприємства та витрати на маркетинг побудувати економетричну модель залежності.

Метою роботи є набуття практичних навичок побудови лінійної економетричної моделі.

Задачі роботи:

1. Виконати специфікацію економетричної моделі.
2. Оцінити параметри моделі методом найменших квадратів.
3. Побудова інтервалів довіри для параметрів моделі.
4. Прогнозування за моделлю парної лінійної регресії.
5. Аналіз.

1.3.2.Вихідні дані

Таблиця 1.4

№ з/п	Xi	Yi
1	25	18,9
2	8	11,0
3	9	1,9
4	11	8,9
5	2	1,0
6	2	8,0
7	1	-4,0
8	27	23,8
9	23	18,9
10	20	25,9
11	21	16,9
12	4	0,0
13	13	6,9
14	24	18,9
15	14	5,9
Σ	204	162,9

Ідентифікуємо змінні:

Y - прибуток підприємства (залежна змінна),

X - витрати на маркетинг (незалежна змінна).

1.3.3. Приклад розрахунку

<u>Спосіб 1</u>

1. Нехай економетрична модель специфікована у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1X + u,$$

де a_0, a_1 — параметри моделі; u — стохастична складова.

2. Оцінимо параметри моделі $Y^* = a_0 + a_1^*X$ за методом першим МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}, \qquad (1.4)$$

де n - кількість спостережень.

3. Обчислимо коефіцієнти при невідомих та вільні члени системи рівнянь (таблиця 1.5).

Тоді отримаємо

$$\begin{cases} 3956a + 204b = 3265{,}6. \\ 204a + 15b = 162{,}9. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему матричним способом. Для цього формуємо матрицю коефіцієнтів при невідомих та матрицю вільних членів:

A=

3956	204
204	15

B=

3265,6
162,9

За допомогою функції „МОБР” електронних таблиць Microsoft Excel обертаємо матрицю А. Перш, ніж вибрати майстер функцій, потрібно виділити область, де міститиметься результат обернення матриці. Ця область згідно з правилом обертання матриць матиме стільки ж рядків і стовпців, скільки й вихідна матриця А (2:2).

Таблиця 1.5

№ п/п	Xi	Yi	X^2	Xi*Yi
1	25	18,9	625	472,5
2	8	11,0	64	88,0
3	9	1,9	81	17,1
4	11	8,9	121	97,9
5	2	1,0	4	2,0
6	2	8,0	4	16,0
7	1	-4,0	1	-4,0
8	27	23,8	729	642,6
9	23	18,9	529	434,7
10	20	25,9	400	518,0
11	21	16,9	441	354,9
12	4	0,0	16	0,0
13	13	6,9	169	89,7
14	24	18,9	576	453,6
15	14	5,9	196	82,6
Σ	204	162,9	3956	3265,6

Далі командою „Функція” з меню „Вставка” з категорії „математичні” вибирається функція „МОБР”. Вказуємо ліву верхню та праву нижню клітинки матриці А, що обертається. Коли майстер функцій підготує функцію, то з’явиться перший елемент матриці-результату. Для появи інших елементів потрібно натиснути одночасно комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. Ці дії слід виконувати завжди при операціях з матрицями. В результаті перетворень отримаємо:

A^{-1} =

0,000846	-0,01151
-0,01151	0,2232

X= A^{-1}*B розраховуємо за допомогою функції „МУМНОЖ” електронних таблиць Microsoft Excel. Перед використанням майстра функцій, потрібно виділити область, де міститиметься результат множення. Ця область згідно з правилом множення матриць матиме стільки ж рядків, скільки й перша вихідна матриця $\mathbf{A^{-1}}$, і стільки ж стовпців, скільки матриця В (1:2).

Далі командою „Функція” з меню „Вставка” з категорії „математичні” вибирається функція „МУМНОЖ”. Вказується ліва верхня та права нижня клітинки матриці A^{-1} в розділі „масив 1” і ліва верхня та права нижня клітинки матриці В в розділі „масив 2”. Коли майстер функцій підготує функцію, то з’явиться перший елемент матриці-результату. Для появи інших елементів потрібно натиснути одночасно Ctrl+Shift+Enter. В результаті множення отримаємо:

0,000846	-0,01151	*	3265,6	=	0,888761
-0,01151	0,2232		162,9		-1,22715

Результат множення матриць - це невідомі коефіцієнти моделі. Тобто a=0,888761, b=-1,22715.

Отже економетрична модель буде мати вигляд:

$$Y^{*}=0,888761*X-1,22715.$$

Спосіб 2

1. Знаходимо середнє значення х та у за формулою

Xs= 204/15 = 13,6

Ys= 162,9/15 = 10,86

Будуємо таблицю (таблиця 1.6).

2. Знаходимо середні квадратичні відхилення:

$S_x = \sqrt{\frac{1}{15-1} \cdot 1181{,}6} = 9{,}19$ $\qquad$ $S_y = \sqrt{\frac{1}{15-1} \cdot 1192{,}64} = 9{,}23$

3. Обчислюємо коваріацію:

$$q_{xy} = \frac{1}{15-1} \cdot 1050{,}16 = 75{,}01$$

4. Обчислюємо коефіцієнт кореляції:

$$R = \frac{75{,}01}{9{,}19 \cdot 9{,}23} = 0{,}88$$

5. Обчислюємо коефіцієнти:

$$a = \frac{9{,}23}{9{,}19} * 0{,}88 = 0{,}88$$

$$b = 10{,}86 - 13{,}6 * 0{,}88 = -1{,}21$$

Таблиця 1.6

№ з/п	Xi	Yi	Xi-Xs	Yi-Ys	$(Xi\text{-}Xs)^2$	$(Yi\text{-}Ys)^2$	(Xi-Xs)*(Yi-Ys)	Yi*	Yi-Yi*	$(Yi\text{-}Y^*)^2$
1	25	18,9	11,4	8,04	129,96	64,6416	91,656	21,001	-2,101	4,4128
2	8	11,0	-5,6	0,14	31,36	0,0196	-0,784	5,9618	5,0382	25,383
3	9	1,9	-4,6	-8,96	21,16	80,2816	41,216	6,8465	-4,946	24,467
4	11	8,9	-2,6	-1,96	6,76	3,8416	5,096	8,6157	0,2843	0,0808
5	2	1,0	-11,6	-9,86	134,56	97,2196	114,376	0,654	0,346	0,1197
6	2	8,0	-11,6	-2,86	134,56	8,1796	33,176	0,654	7,346	53,964
7	1	-4,0	-12,6	-14,90	158,76	220,82	187,236	-0,231	-3,769	14,208
8	27	23,8	13,4	12,94	179,56	167,444	173,396	22,77	1,03	1,061
9	23	18,9	9,4	8,04	88,36	64,6416	75,576	19,231	-0,331	0,1098
10	20	25,9	6,4	15,04	40,96	226,202	96,256	16,577	9,3225	86,909
11	21	16,9	7,4	6,04	54,76	36,4816	44,696	17,462	-0,562	0,316
12	4	0,0	-9,6	-10,9	92,16	117,94	104,256	2,4233	-2,423	5,8722
13	13	6,9	-0,6	-3,96	0,36	15,6816	2,376	10,385	-3,485	12,145
14	24	18,9	10,4	8,04	108,16	64,6416	83,616	20,116	-1,216	1,4787
15	14	5,9	0,4	-4,96	0,16	24,6016	-1,984	11,27	-5,37	28,833
Σ	204	162,9	-	-	1181,6	1192,64	1050,16	-	-	259,36

6. Обчислюємо теоретичні значення залежної змінної. Отримані значення заносимо в таблицю.

7. Обчислюємо кореляційне відношення:

$$S_y^* = \sqrt{\frac{1}{15-1} \cdot 259{,}36} = 4{,}30$$

Будуємо графік (рис. 1.1).

<u>Спосіб 3</u>

Використовуєм функцію «ЛИНЕЙН». В результаті отримаємо

0,888761	-1,22715
0,129924	2,109951
0,782587	4,466066
46,79399	13
933,3413	259,2947

де:

a= 0,888761;

b=-1,22715;

стандартна похибка параметра a 0,129924;

стандартна похибка параметра b 2,109951;

коефіцієнт детермінації R^2=0,782587;

стандартна похибка залишків σu = 4,466066**;**

F-критерій - 46,79399;

ступінь свободи (n-m)=15-2=13;

сума квадратів відхилень, що пояснюють регресією, становить 933,3413;

сума квадратів відхилень, що пояснюються похибкою u, становить 259,2947.

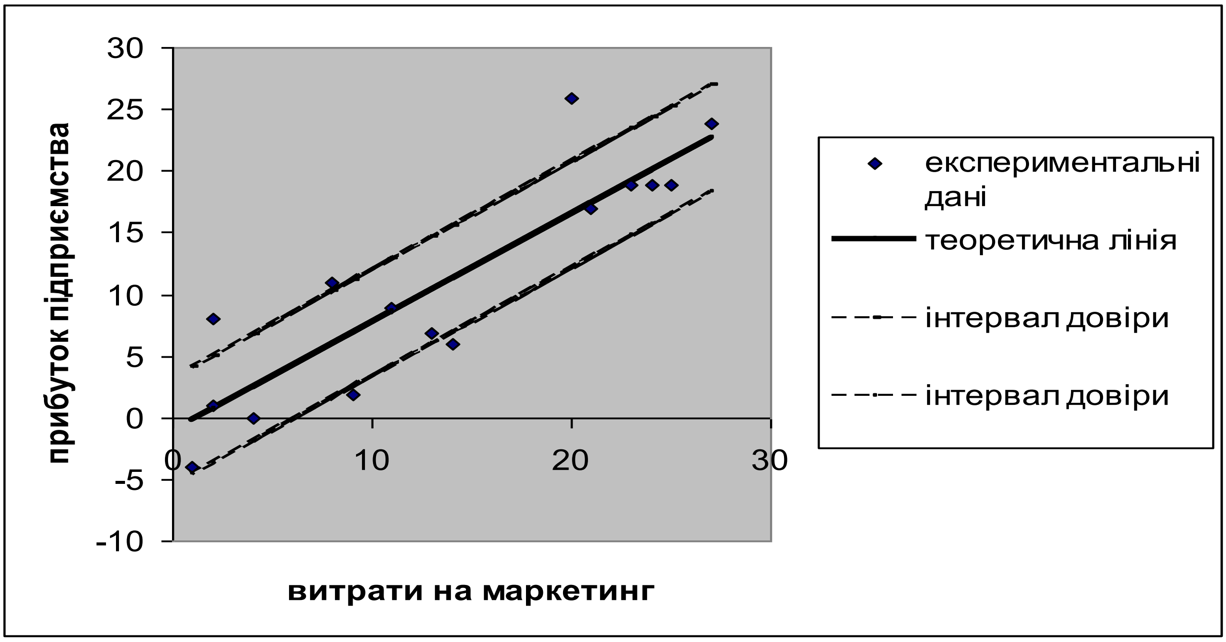


Рис. 1.1. Модель залежності прибутку підприємства від витрат на маркетинг

<u>Висновок</u>: отже економетрична модель залежності прибутку підприємства від витрат на маркетинг має вигляд $Y^{*}=0,888761*X-1,22715$. Модель достовірна, оскільки коефіцієнт кореляції рівний 0,88, що вказує на існування істотного зв'язку між досліджуваними параметрами.

Завдання для самостійної роботи

<u>Завдання:</u> на підставі вихідних даних побудувати економетричну модель залежності товарообороту підприємства від доходів споживачів. Дослідити статистичну значущість моделі та оцінити її параметри. Зробити економічні висновки. Вихідні дані наведено в таблиці 1.7

Таблиця 1.7

Вихідні дані

Варіант	змінні	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	X	25,0	8,0	9,0	11,0	2,0	2,0	1,0	27,0	23,0	20,0	21,0	4,0	13,0	24,0	14,0
	Y	18,9	11,0	1,9	8,9	1,0	8,0	-4,0	23,8	18,9	25,9	16,9	0,0	6,9	18,9	5,9
2	X	23,0	14,0	24,0	4,0	15,0	17,0	23,0	23,0	16,0	20,0	28,0	29,0	20,0	2,0	14,0
	Y	71,4	53,5	54,1	20,9	38,3	41,8	65,4	66,4	44,0	58,1	73,2	67,0	52,1	30,4	53,5

Продовження таблиці 1.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	X	28,0	10,0	21,0	23,0	5,0	27,0	17,0	20,0	2,0	8,0	4,0	16,0	5,0	8,0	17,0
	Y	89,1	28,9	76,8	77,0	17,8	88,5	64,3	60,1	20,0	40,7	18,2	63,7	18,8	26,7	56,3
4	X	18,0	22,0	2,0	3,0	24,0	18,0	22,0	10,0	24,0	2,0	1,0	20,0	17,0	10,0	9,0
	Y	35,7	28,2	0,9	16,2	37,0	29,7	36,2	26,8	32,0	0,9	1,5	28,5	25,4	26,8	15,4
5	X	27,0	14,0	23,0	16,0	12,0	17,0	20,0	14,0	3,0	16,0	2,0	25,0	27,0	21,0	14,0
	Y	92,8	53,1	88,9	68,0	52,1	74,0	67,9	56,1	16,3	67,0	30,4	93,8	91,8	82,9	61,1
6	X	28,0	3,0	9,0	3,0	16,0	3,0	0,0	27,0	9,0	27,0	10,0	2,0	22,0	27,0	3,0
	Y	45,5	17,7	9,3	15,7	32,4	11,7	0,0	46,9	16,3	42,9	18,9	14,1	31,9	45,9	15,7
7	X	24,0	3,0	27,0	9,0	6,0	20,0	18,0	16,0	22,0	6,0	21,0	29,0	1,0	0,0	11,0
	Y	47,6	16,6	51,2	21,8	12,2	49,5	40,5	25,4	35,6	26,2	40,1	47,2	4,6	7,1	23,8
8	X	15,0	20,0	17,0	11,0	26,0	7,0	16,0	10,0	18,0	13,0	20,0	22,0	5,0	8,0	21,0
	Y	35,0	53,3	35,5	27,9	62,9	20,9	45,2	21,7	47,8	25,5	53,3	59,8	18,4	15,1	48,5
9	X	0,0	26,0	25,0	28,0	11,0	0,0	1,0	12,0	4,0	9,0	16,0	4,0	2,0	9,0	19,0
	Y	18,1	58,2	65,7	60,1	46,2	18,1	25,6	31,7	34,0	34,3	42,6	25,0	31,0	42,3	52,9
10	X	7,0	20,0	4,0	12,0	4,0	15,0	17,0	25,0	14,0	11,0	6,0	15,0	1,0	4,0	1,0
	Y	36,2	31,7	19,3	32,0	16,3	41,9	32,8	37,5	26,9	36,0	36,2	34,9	32,4	16,3	15,4
11	X	3,0	22,0	14,0	17,0	27,0	19,0	23,0	26,0	21,0	0,0	9,0	23,0	25,0	1,0	27,0
	Y	25,4	111,9	62,8	90,1	121,7	100,6	110,6	126,9	104,1	17,1	45,0	101,6	122,	30,8	120,
12	X	12,0	20,0	18,0	29,0	29,0	18,0	15,0	24,0	28,0	14,0	7,0	13,0	22,0	18,0	13,0
	Y	45,6	53,9	53,8	68,2	66,2	50,8	49,7	68,0	73,2	54,7	24,5	46,7	52,0	59,8	36,7
13	X	28,0	26,0	0,0	17,0	1,0	27,0	25,0	29,0	4,0	24,0	0,0	16,0	13,0	23,0	2,0
	Y	52,3	43,1	9,9	42,0	16,0	53,2	48,0	42,5	23,4	35,8	21,9	32,9	22,5	48,7	19,1
14	X	14,0	15,0	23,0	1,0	8,0	13,0	2,0	25,0	9,0	27,0	12,0	24,0	1,0	26,0	13,0
	Y	39,7	47,3	51,7	23,5	23,4	34,2	26,1	54,8	32,9	65,9	29,6	52,2	17,5	67,3	35,2
15	X	19,0	19,0	24,0	16,0	9,0	12,0	19,0	28,0	9,0	14,0	26,0	12,0	4,0	14,0	9,0
	Y	46,7	53,7	57,7	44,6	22,6	38,6	41,7	56,7	35,6	38,6	65,7	35,6	27,6	31,6	30,6
16	X	4,0	4,0	19,0	25,0	5,0	8,0	7,0	27,0	2,0	0,0	17,0	5,0	24,0	14,0	22,0
	Y	28,8	25,8	71,1	72,2	36,2	35,2	26,9	86,9	28,1	22,4	65,4	39,2	78,8	58,3	65,1
17	X	15,0	21,0	17,0	10,0	12,0	27,0	22,0	10,0	12,0	27,0	11,0	15,0	16,0	5,0	29,0
	Y	70,7	80,4	62,9	42,6	53,9	110,1	98,0	36,6	47,9	101,0	40,2	63,7	61,3	25,5	114,3
18	X	11,0	27,0	17,0	27,0	0,0	14,0	6,0	2,0	1,0	11,0	25,0	11,0	8,0	5,0	12,0
	Y	41,6	71,8	48,7	62,8	23,5	51,6	32,5	16,5	25,5	40,6	70,8	39,6	37,6	21,5	29,6
19	X	5,0	1,0	8,0	3,0	12,0	15,0	28,0	28,0	23,0	12,0	8,0	10,0	12,0	10,0	21,0
	Y	20,8	27,1	37,5	30,0	34,2	29,9	45,8	44,8	52,3	35,2	35,5	31,4	44,2	34,4	42,4
20	X	12,0	10,0	1,0	29,0	13,0	24,0	12,0	25,0	8,0	26,0	18,0	14,0	26,0	29,0	21,0
	Y	25,9	22,1	-0,7	59,7	35,7	50,3	21,9	52,2	21,4	48,1	28,1	36,6	47,1	61,7	38,7
21	X	14,0	24,0	0,0	6,0	15,0	16,0	10,0	22,0	4,0	13,0	16,0	15,0	26,0	18,0	12,0
	Y	42,2	63,2	20,6	31,3	41,8	50,4	39,7	62,0	37,1	47,6	48,4	50,8	64,5	57,6	31,9
22	X	21,0	7,0	28,0	1,0	10,0	6,0	17,0	23,0	0,0	18,0	14,0	22,0	8,0	4,0	3,0
	Y	52,9	32,7	57,0	15,6	40,8	37,7	49,9	43,9	13,6	46,9	37,8	53,9	24,7	36,7	22,7
23	X	14,0	11,0	8,0	8,0	7,0	17,0	7,0	2,0	12,0	21,0	13,0	0,0	7,0	24,0	7,0
	Y	26,0	22,6	12,1	27,1	16,0	31,5	16,0	13,2	19,7	49,1	35,9	-5,1	19,0	57,6	25,0

Продовження таблиці 1.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
24	X	1,0	20,0	6,0	10,0	25,0	25,0	20,0	25,0	24,0	27,0	7,0	22,0	13,0	5,0	14,0
	Y	17,2	55,3	26,5	25,6	69,6	58,6	60,3	65,6	72,3	64,1	27,8	66,8	38,4	30,3	35,7
25	X	17,0	13,0	20,0	5,0	10,0	13,0	9,0	12,0	21,0	6,0	12,0	29,0	1,0	3,0	18,0
	Y	61,2	49,1	70,5	28,0	52,8	60,1	51,1	47,4	90,2	45,8	60,4	101,3	30,0	32,5	79,9
26	X	9,0	26,0	7,0	11,0	9,0	5,0	26,0	4,0	14,0	12,0	3,0	9,0	17,0	25,0	22,0
	Y	46,2	93,9	28,7	40,6	51,2	22,3	95,9	23,1	68,3	46,8	26,9	41,2	76,0	88,7	91,0
27	X	10,0	27,0	6,0	1,0	25,0	5,0	8,0	16,0	13,0	5,0	7,0	26,0	2,0	26,0	3,0
	Y	26,2	52,8	19,6	25,7	42,0	24,2	30,4	40,5	40,3	28,2	20,0	60,4	15,1	56,4	19,5
28	X	23,0	12,0	17,0	26,0	11,0	27,0	19,0	3,0	29,0	28,0	12,0	14,0	2,0	4,0	6,0
	Y	68,3	44,1	38,1	68,9	43,0	71,1	49,5	8,4	74,5	67,3	40,1	32,5	20,2	26,6	25,0
29	X	19,0	29,0	0,0	5,0	28,0	4,0	8,0	15,0	9,0	2,0	26,0	11,0	14,0	23,0	20,0
	Y	65,0	78,5	-1,0	26,7	86,7	14,9	27,9	41,1	33,6	12,4	65,2	42,1	40,3	58,0	65,8
30	X	27,0	2,0	28,0	25,0	28,0	0,0	21,0	12,0	20,0	19,0	21,0	16,0	20,0	11,0	11,0
	Y	47,9	3,6	40,1	44,3	35,1	2,1	28,1	14,5	22,8	40,5	37,1	23,7	33,8	17,2	12,2
31	X	16,0	0,0	15,0	8,0	6,0	27,0	19,0	17,0	6,0	19,0	17,0	13,0	15,0	21,0	12,0
	Y	59,8	10,3	52,5	34,5	27,0	93,8	64,6	67,0	26,0	65,6	63,0	41,9	61,5	70,2	55,6
32	X	12,0	27,0	14,0	16,0	2,0	19,0	0,0	26,0	1,0	25,0	28,0	3,0	8,0	0,0	1,0
	Y	48,7	108,6	64,3	78,0	16,4	75,0	22,8	111,2	14,1	91,9	101,9	37,7	54,4	9,8	16,1
33	X	11,0	22,0	10,0	6,0	10,0	8,0	28,0	8,0	8,0	26,0	25,0	6,0	22,0	22,0	23,0
	Y	48,9	87,3	44,7	35,9	47,7	30,3	97,5	31,3	37,3	91,1	78,9	25,9	71,3	83,3	84,5
34	X	8,0	7,0	12,0	13,0	7,0	7,0	22,0	22,0	27,0	4,0	4,0	28,0	3,0	24,0	7,0
	Y	36,0	31,1	55,6	48,5	40,1	37,1	86,5	89,5	100,0	26,4	21,4	88,8	32,5	93,3	28,1
35	X	24,0	1,0	15,0	1,0	12,0	10,0	29,0	11,0	27,0	29,0	11,0	3,0	0,0	10,0	10,0
	Y	104,4	25,1	64,0	24,1	48,5	55,5	118,9	50,0	110,9	116,9	51,0	19,0	20,6	53,5	45,5
36	X	21,0	16,0	9,0	9,0	29,0	17,0	11,0	10,0	8,0	12,0	22,0	3,0	17,0	24,0	5,0
	Y	38,3	15,7	23,5	17,5	32,9	31,0	25,1	17,8	4,2	19,4	22,6	14,6	27,0	42,3	19,2
37	X	18,0	2,0	4,0	4,0	17,0	12,0	26,0	27,0	25,0	13,0	6,0	26,0	11,0	2,0	1,0
	Y	53,0	13,6	16,3	19,3	41,2	27,0	80,7	77,5	65,9	38,8	14,0	73,7	36,2	-2,4	-4,2
38	X	5,0	20,0	0,0	3,0	7,0	16,0	19,0	11,0	13,0	22,0	10,0	27,0	12,0	7,0	12,0
	Y	21,9	94,3	3,5	14,5	41,3	74,5	78,6	61,1	58,4	97,6	50,4	119,1	55,7	33,3	55,7
39	X	28,0	8,0	20,0	6,0	12,0	1,0	29,0	4,0	26,0	29,0	15,0	11,0	4,0	25,0	0,0
	Y	119,4	38,5	78,8	29,1	59,3	11,6	125,1	23,7	103,0	117,1	58,4	45,6	30,7	102,	20,9
40	X	13,0	18,0	16,0	3,0	2,0	10,0	13,0	21,0	28,0	15,0	23,0	28,1	15,0	20,0	21,0
	Y	56,0	69,2	67,5	25,6	6,8	40,5	49,0	87,7	117,6	72,7	89,4	124,6	60,7	88,9	86,7
41	X	3,0	9,0	23,0	1,0	19,0	3,0	24,0	18,0	8,0	18,0	25,0	26,0	26,0	24,0	19,0
	Y	23,6	35,3	89,2	4,1	65,1	14,6	82,5	63,8	30,0	70,8	78,8	81,1	90,1	80,5	73,1
42	X	12,0	21,0	6,0	24,0	28,0	13,0	1,0	15,0	16,0	8,0	5,0	29,0	2,0	23,0	2,0
	Y	45,8	50,9	23,7	61,9	71,3	46,1	4,9	36,8	48,2	20,4	20,3	71,7	24,3	74,6	25,3
43	X	22,0	2,0	11,0	24,0	8,0	19,0	7,0	3,0	11,0	15,0	27,0	21,0	12,0	11,0	17,0
	Y	66,2	10,3	49,2	80,3	33,5	53,5	23,0	29,8	51,2	45,4	75,9	67,6	39,7	49,2	64,5
44	X	11,0	14,0	15,0	28,0	12,0	15,0	25,0	5,0	9,0	28,0	26,0	2,0	17,0	19,0	24,0
	Y	37,1	46,8	60,3	91,5	36,7	54,3	90,8	17,8	25,0	96,5	82,4	9,2	62,4	58,5	83,3

Продоження таблиці 1.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
45	X	19,0	23,0	19,0	24,0	17,0	0,0	10,0	18,0	26,0	5,0	20,0	19,0	23,0	3,0	21,0
	Y	59,8	87,6	72,8	82,8	53,4	10,9	49,9	68,6	82,2	28,9	65,0	74,8	77,6	10,5	77,2
46	X	22,0	20,0	10,0	15,0	12,0	15,0	17,0	11,0	15,0	18,0	16,0	17,0	20,0	15,0	11,0
	Y	85,7	70,6	47,3	59,0	48,4	60,0	62,0	41,9	53,0	69,6	55,5	57,0	83,6	56,0	42,9
47	X	28,0	23,0	29,0	22,0	1,0	22,0	13,0	14,0	19,0	11,0	12,0	17,0	10,0	28,0	5,0
	Y	60,0	56,4	61,7	44,7	16,7	41,7	40,3	28,0	38,6	23,9	26,6	42,1	22,1	62,0	25,6
48	X	9,0	13,0	20,0	23,0	0,0	20,0	5,0	29,0	20,0	17,0	29,0	29,0	9,0	25,0	18,0
	Y	47,3	50,7	61,6	69,9	24,2	66,6	36,8	89,6	56,6	50,2	92,6	75,6	36,3	71,2	63,3
49	X	28,0	24,0	3,0	13,0	12,0	19,0	4,0	4,0	26,0	2,0	18,0	20,0	18,0	0,0	11,0
	Y	42,7	31,6	13,8	27,6	12,3	29,2	10,1	18,1	33,2	3,5	35,0	36,5	32,0	13,0	14,0
50	X	29,0	29,0	24,0	5,0	19,0	11,0	27,0	5,0	17,0	15,0	10,0	4,0	20,0	14,0	14,0
	Y	92,6	91,6	78,1	32,1	72,6	40,5	86,8	37,1	74,8	56,0	39,6	37,2	81,5	63,2	54,2

Запитання для самоконтролю

1. Які моделі відносяться до категорії економетричних?

2. Що таке загальна модель?

3. Як записується модель вибіркової парної лінійної регресії у матричному вигляді?

4. Які змінні в моделі незалежні? Чому вони називаються пояснювальними?

5. Які змінні в моделі залежні?

6. Як знаходяться оцінки параметрів парної лінійної регресії методом найменших квадратів?

7. За яких умов можливе використання 1 МНК?

8. З якою метою і як визначається вибірковий коефіцієнт парної кореляції?

9. З якою метою і як визначається вибірковий коефіцієнт детермінації?

10. За яким критерієм і як здійснюється перевірка адекватності парної лінійної регресії?

11. Для чого і як будуються прогнози для моделі парної лінійної регресії?

РОЗДІЛ 2. ЛІНЕАРИЗАЦІЯ

2.1. Поняття оберненої моделі та етапи її побудови

Головне завдання економіки - встановлення взаємозв’язків між певними економічними величинами. Наприклад: залежність попиту на товар від ціни; прибутку від витрат на маркетинг. Для того, щоб управляти такими процесами, потрібно вимірювати ці величини кількісно. Дану проблему можна вирішити шляхом побудови економетричних моделей.

Специфікація моделі - *це аналітична форма економетричної моделі, що складається з певного виду функції чи декількох функцій, що використовуються для побудови моделі.*

Вона передбачає визначення типу функцій. Одними з моделей, що використовуються в економіці, є лінійні моделі, які можна описати формулою:

$$y=ax+b \qquad (2.1)$$

Крім лінійних використовують інші залежності. Практика вже накопичила певний досвід і певні типи кривих, які найчастіше використовуються в макро- та мікроекономічних дослідженнях. До таких кривих відносяться [3]:

експоненційна: $y=a*b^x$

степенева (мультиплікативна): $y=ax^b$

зворотна: $y=b+a*\frac{1}{x}$

квадратична: $y=a_0+a_1x+a_2x^2$

модифікована експонента: $y=ab^x+u$

крива Гомперця: $y=e^{ab^x}+u$

логістична крива: $y=\frac{1}{ab^x+u}$

У загальному випадку однофакторну економетричну модель можна подати у вигляді:

$$y = f(x) + u \qquad (2.2)$$

де f (x) - одна з функцій зростання; u– випадкова величина.

Як і у випадку з простою лінійною регресією, основне завдання полягає в розрахунку невідомих параметрів кривих і подальшому аналізі обраної моделі. Оцінку невідомих параметрів проводять по-різному: експоненційні функції шляхом логарифмічних перетворень зводять до лінійної регресії, квадратичні функції зводять до багатофакторної регресії, для інших використовують ітеративні методи, методи трьох точок, метод Тейлора тощо. Для таких функцій зберігається вся методологія досліджень, яку розглядали у випадку простої лінійної регресії.

2.2. Зворотні перетворення, приклади їх застосування на практиці

Спосіб 1

Узагальнена зворотна модель має вигляд:

$$y_i = b + a\left(\frac{1}{x_i}\right) + u_i \qquad (2.3)$$

Вона нелінійна за змінною *x*, але лінійна за параметрами *a* і *b*, і тому є лінійною регресійною моделлю.

Справді, позначивши $\frac{1}{x_i} = z_i$, отримаємо:

$$y_i = b + a * z_i + u_i, \qquad (2.4)$$

Вибіркова зворотна модель, враховуючи позначення попереднього розділу, може бути записана у вигляді:

$$y = b + a * \frac{1}{x} + u, \qquad (2.5)$$

де a та b – невідомі параметри, які необхідно знайти; *u* – помилка.

Модель 2.5 має свої особливості на відміну від простої лінійної регресії: коли *x* прямує до нескінченності, величина $a*\left(\frac{1}{x_i}\right)$ прямує до нуля, а ***y*** прямує до граничного значення.

Модель 2.5 значною мірою залежить від знака параметрів ***a*** і ***b*** (рис. 2.1).

Яскравим прикладом використання зворотних моделей в економіці (зокрема в макроекономіці) є відома крива Філіпса, який, базуючись на даних норми процента зміни заробітної плати і процента безробіття для Англії за період з 1861 по 1975 рр., побудував криву, яку в сучасній інтерпретації подано на рис. 2.3 [33].

Асимптота рис. 2.3 (границя зміни заробітної плати) пов’язана з параметром *b*. Точка U_N - значення природної норми безробіття; коли $x<U_N$, норма зміни заробітної плати додатна, а коли значення *x* стає більшим, ніж природна норма безробіття, ***y*** (норма зміни заробітної платні) буде від'ємною.

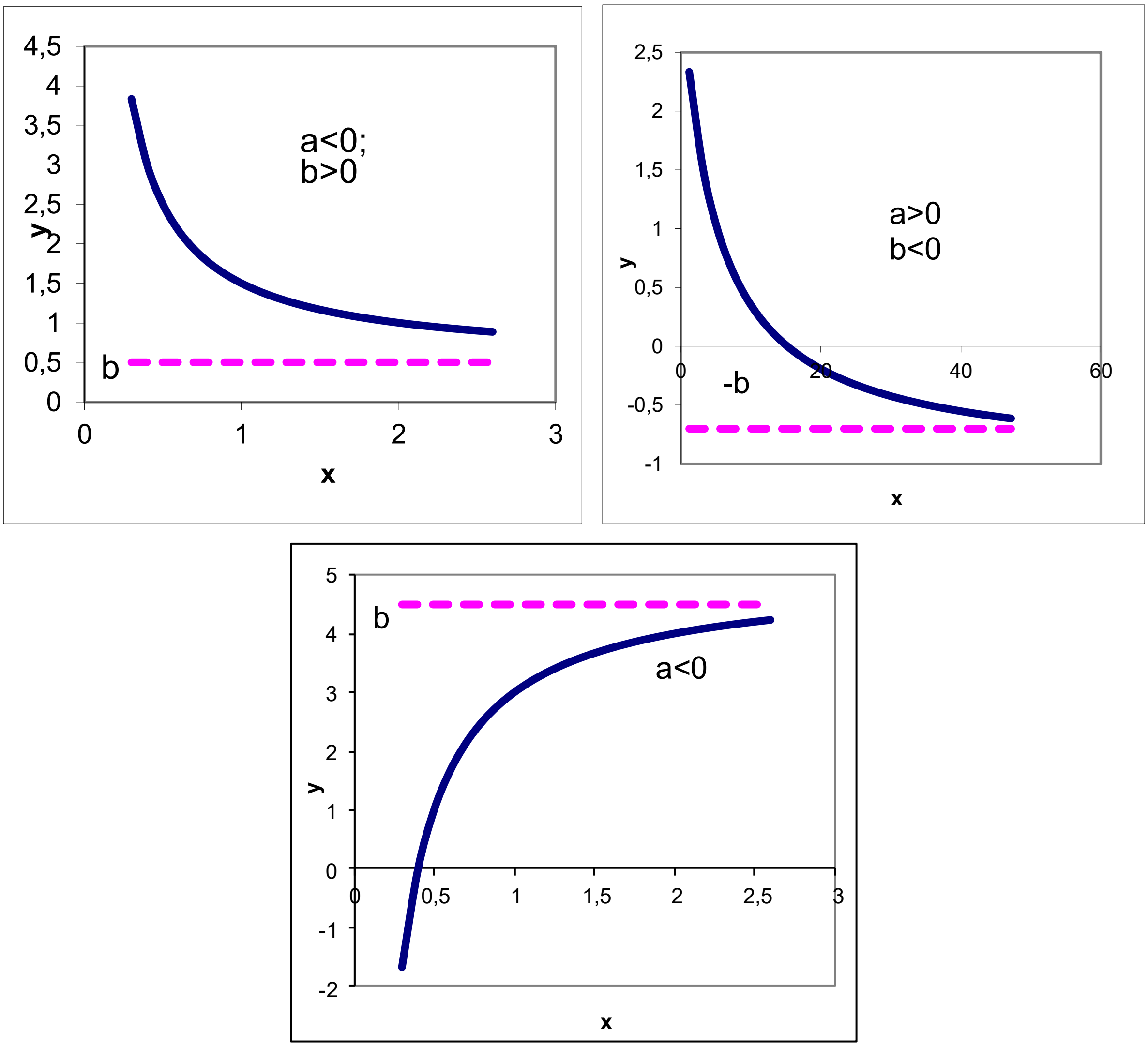
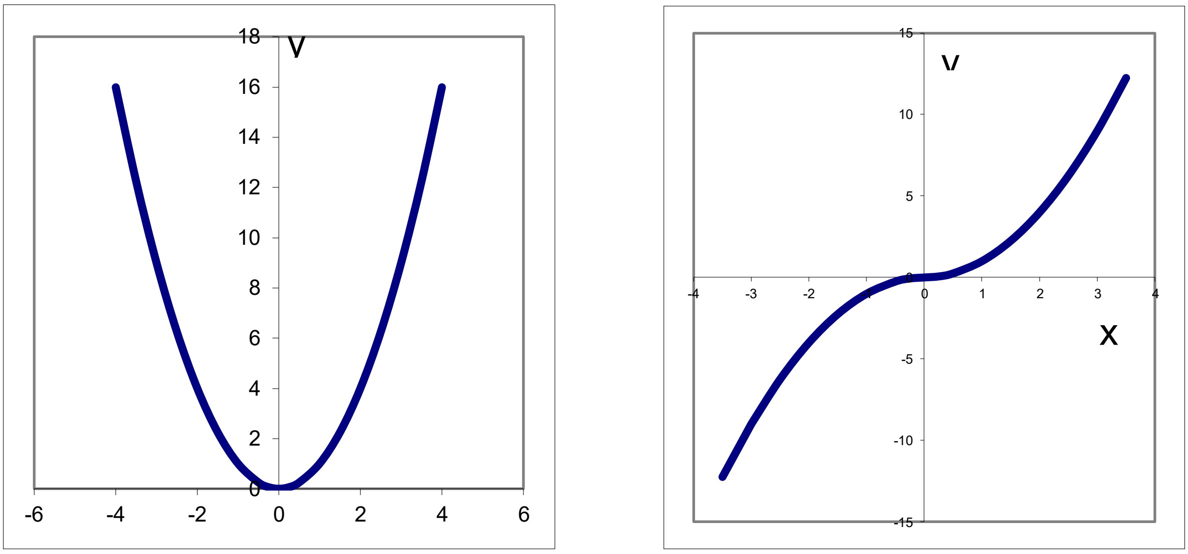


Рис.2.1. Узагальнена зворотна модель



а) b - парне *б) b - непарне*

Рис. 2.2 Графік степеневої функції, коли b – ціле число

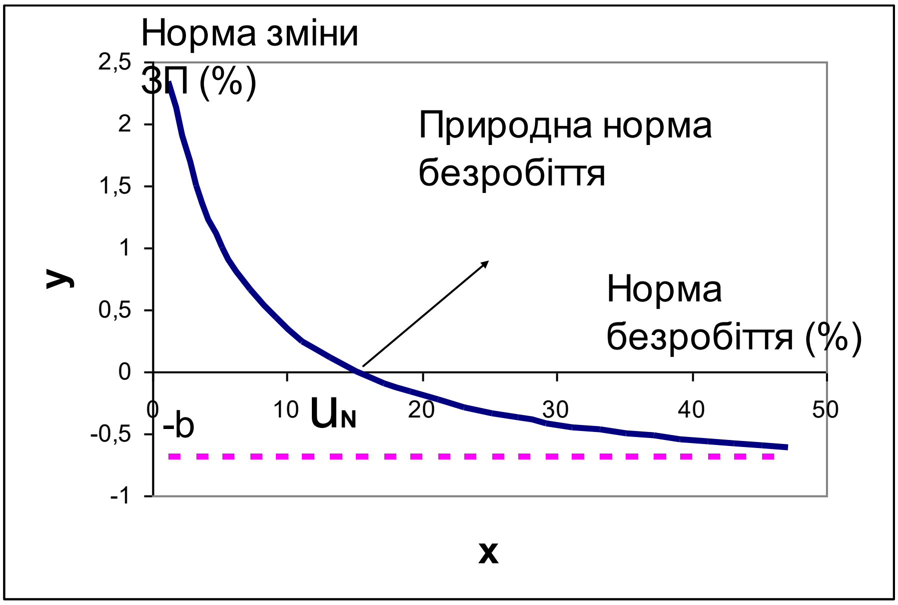


Рис. 2.3. Крива Філпса

Крива Філіпса дає змогу розрахувати мінімальну заробітну плату, компенсацію за безробіття тощо.

Інший, не менш важливий випадок використання зворотної кривої (рис.

2.4) – крива витрат Енгеля, яка пов'язує споживчі витрати на товари із загальними витратами або доходом [22].

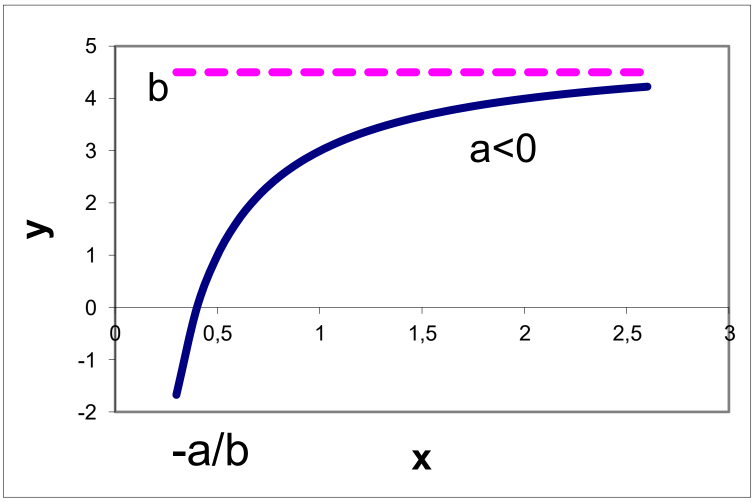


Рис. 2.4. Крива Енгеля

Якщо ми позначимо через $\boldsymbol{y}$ витрати на споживання, а через $\boldsymbol{x}$ – дохід, то крива Енгеля для певного товару виявить такі особливості:

а) критичний рівень доходу, нижче від якого товар не буде куплено, дорівнює $\dfrac{-a}{b}$ (рис. 2.4);

б) „стелю" (межу) насичення, яку не можна збільшити, як би не зростав дохід, дорівнює b (рис. 2.4).

<u>Спосіб 2</u>

Зважаючи на те, що зараз дуже широкого розповсюдження набули електронні таблиці, їх доцільно використовувати для проведення статистичного аналізу, наприклад Microsoft Excel.

Для цього необхідно за вихідними даними побудувати точкову діаграму за допомогою команди „Діаграма" меню „Вставка", вибравши точкову діаграму з вкладки „Стандартні". До точкової діаграми додається лінія тренда командою „Добавить линию тренда" з контекстного меню точок діаграми, вибравши на вкладці „Тип" необхідний тип регресійної лінії тренда (рис. 2.5).

На вкладці „Параметри" встановлюються прапорці „Показывать уравнение на диаграмме" та „Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)” як це показано на рис. 2.6.

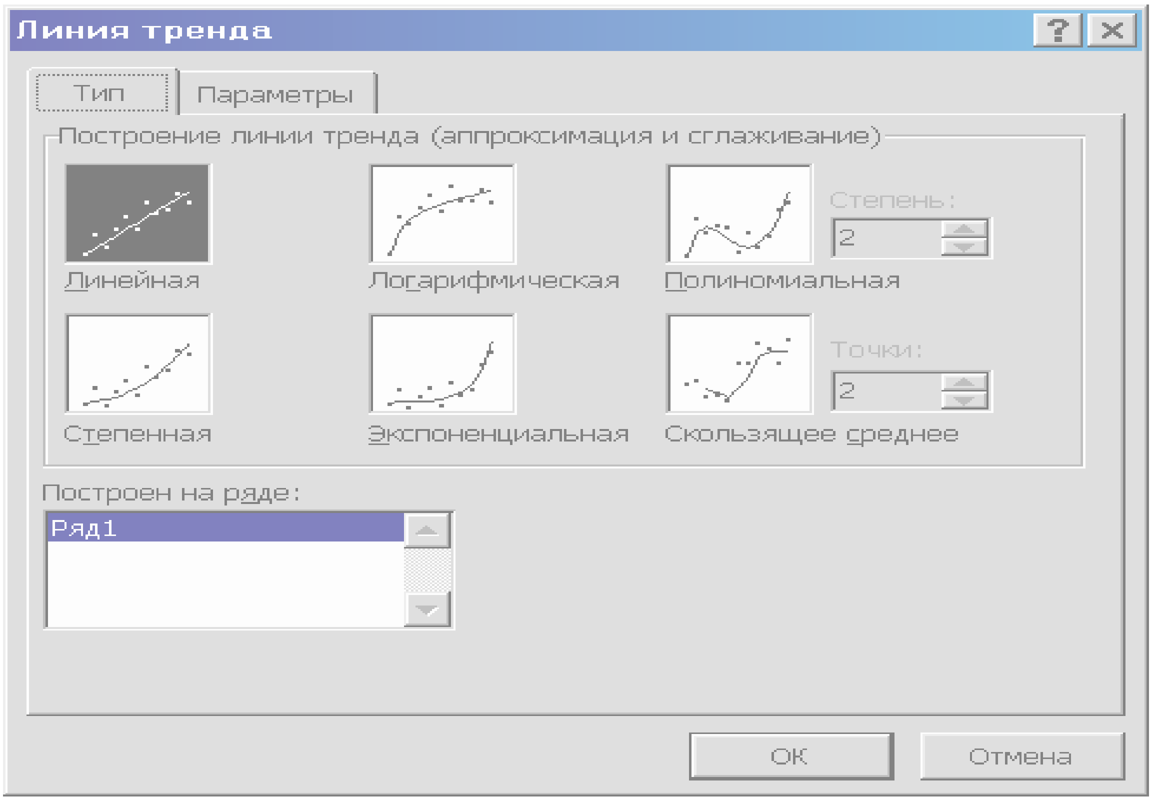


Рис 2.5. Діалогове вікно побудови лінії тренда

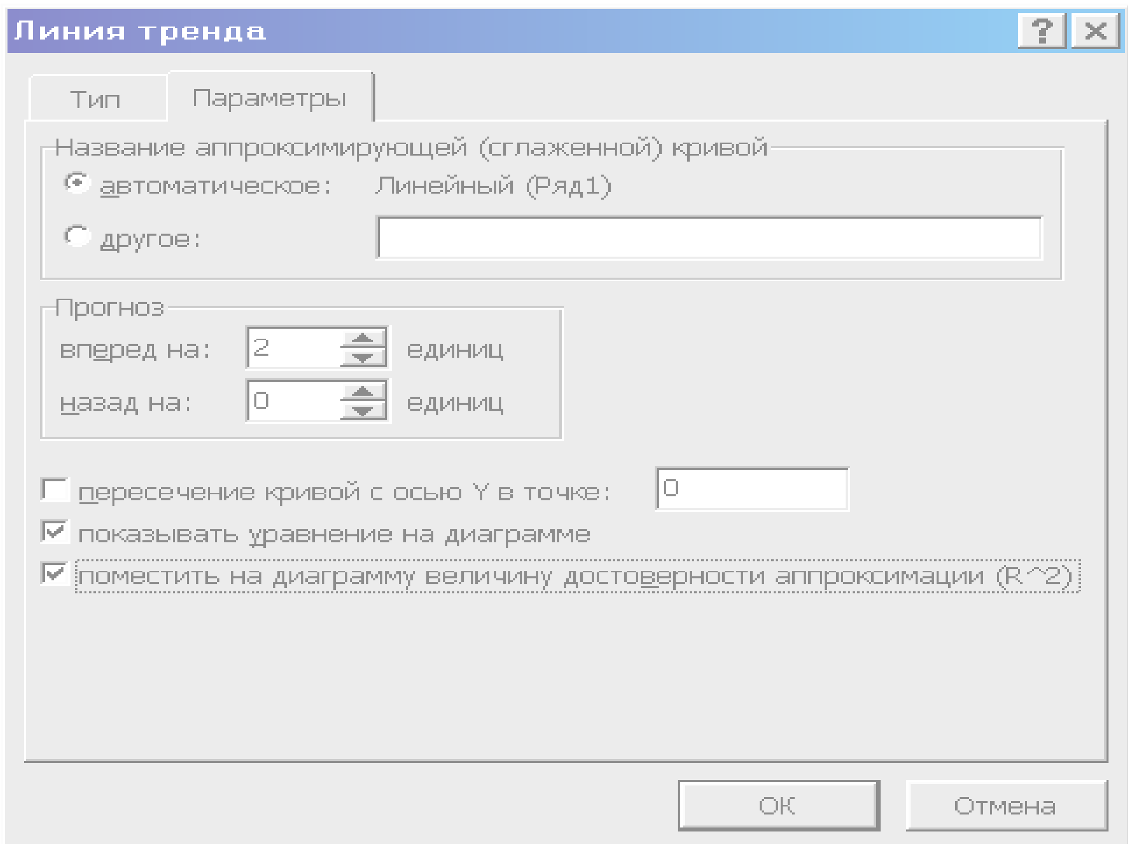


Рис 2.6. Побудова лінії тренда. Вкладка „Параметры”

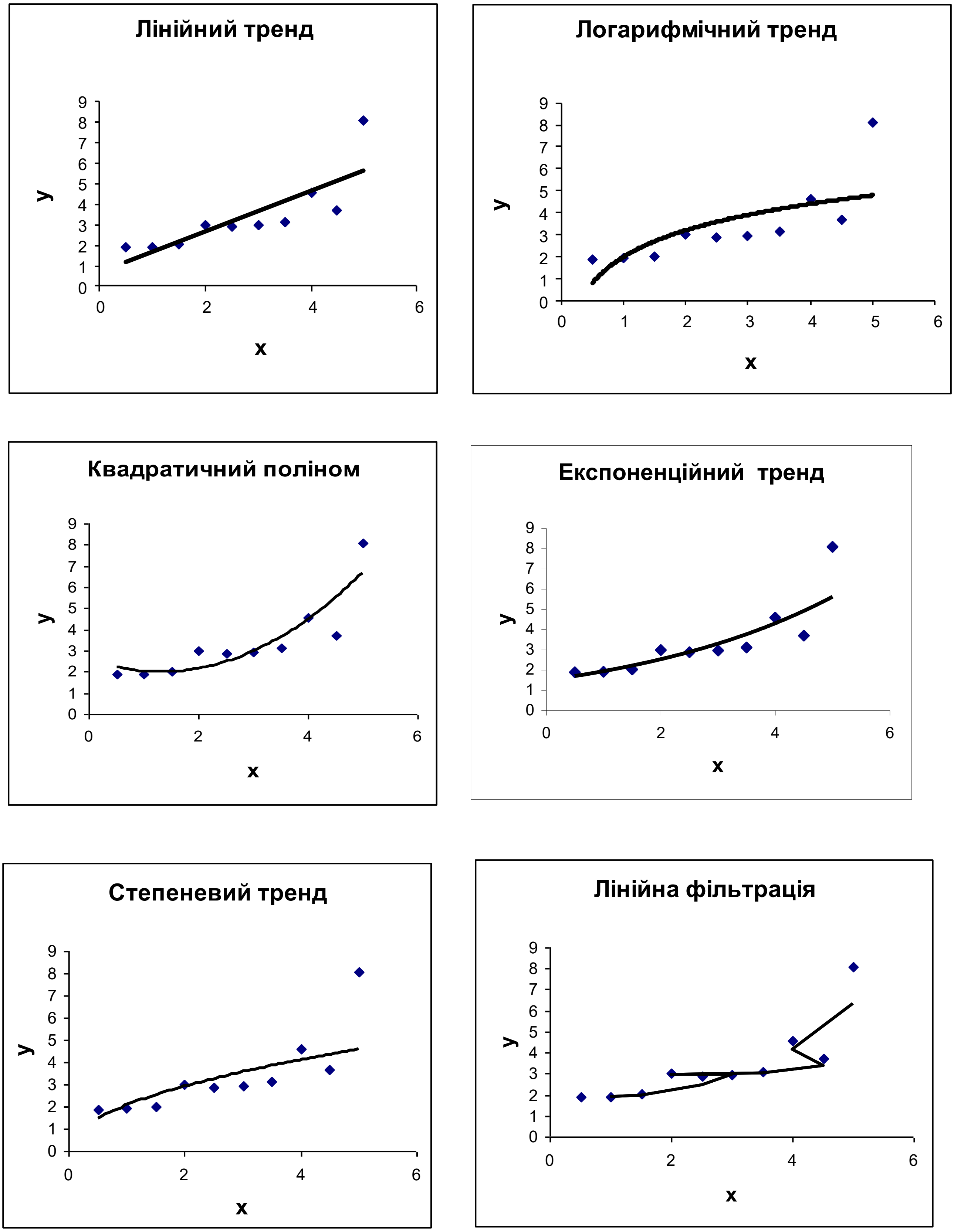


Рис. 2.7. Види трендових моделей

В результаті, можна показати зв'язок за допомогою різних видів трендових моделей (рис 2.7) [3].

Коефіцієнт кореляції $R = \dfrac{q_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ *(2.6)*

визначає тісноту зв'язку між досліджуваними величинами. Його використовують при виборі кривої залежності (яка із запропонованих кривих найбільш точно описує зв'язок). Для цього потрібно обчислити значення коефіцієнта кореляції для кожної кривої. Найкраще описуватиме зв'язок та лінія, у якої коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною найбільший.

2.3. Приклад побудови оберненої економетричної моделі

2.3.1. Завдання роботи

На основі даних про попит на товари окремого торгового підприємства та ціни на них побудувати економетричну модель залежності.

Мета роботи - набуття практичних навичок побудови оберненої економетричної моделі.

Задачі роботи:

1. Побудувати графік, на якому позначити всі експериментальні точки, та визначити, яка лінія може описувати даний зв'язок.
2. За допомогою методу найменших квадратів обчислити параметри лінійної економетричної моделі.
3. Обчислити параметри оберненої економетричної моделі.
4. Провести лінеаризацію моделі за допомогою лінії тренду.
5. Визначити із моделей, яка більш точно описує зв'язок.

2.3.2. Вихідні дані

Таблиця 2.1

Вихідні дані

№ з/п	Xi	Yi
1	0,5	8,09
2	1,0	4,59
3	1,5	3,7
4	2,0	2,96
5	2,5	3,11
6	3,0	2,99
7	3,5	2,88

Продовження таблиця 2.1

№ з/п	Xi	Yi
8	4,0	1,91
9	4,5	2,03
10	5,0	1,89
Σ	27,5	34,15

Ідентифікуємо змінні:

Y - попит на товар (залежна змінна);

X - ціна на товар (незалежна змінна).

2.3.3. Приклад розрахунку

<u>Спосіб 1</u>

1. За допомогою методу найменших квадратів обчислюються параметри лінійної економетричної моделі, заповнюючи таблицю 2.2.

Таблиця 2.2

№ з/п	Xi	Yi	Xi-Xs	Yi-Ys	$(Xi-Xs)^2$	$(Yi-Ys)^2$	(Xi-Xs)*(Yi-Ys)	Yi*
1	0,5	8,09	-2,25	4,675	5,063	21,856	-10,519	4,942
2	1,0	4,59	-1,75	1,175	3,063	1,381	-2,056	4,602
3	1,5	3,70	-1,25	0,285	1,563	0,081	-0,356	4,263
4	2,0	2,96	-0,75	-0,455	0,563	0,207	0,341	3,924
5	2,5	3,11	-0,25	-0,305	0,063	0,093	0,076	3,585
6	3,0	2,99	0,25	-0,425	0,063	0,181	-0,106	3,245
7	3,5	2,88	0,75	-0,535	0,563	0,286	-0,401	2,906
8	4,0	1,91	1,25	-1,505	1,563	2,265	-1,881	2,567
9	4,5	2,03	1,75	-1,385	3,063	1,918	-2,424	2,228
10	5,0	1,89	2,25	-1,525	5,063	2,326	-3,431	1,888
Σ	27,5	34,15	-	-	20,625	30,593	-20,758	-

2. Одночасно заповнюємо таблицю 2.3 відповідно методології розрахунку лінійної економетричної моделі.

Таблиця 2.3

Xs	Ys	Sx	Sy	Qxy	R	a	b
2,75	3,415	1,514	1,844	-2,306	-0,826	-1,006	6,183

3. Проводимо лінеаризацію за формулою Y*=a*(1/x)+b, заповнюючи таблицю 2.4.

Таблиця 2.4.

№ з/п	Xt	Yi	Xt-Xs	Yi-Ys	$(Xt\text{-}Xs)^2$	$(Yi\text{-}Ys)^2$	(Xt-Xs)*(Yi-Ys)	Yi*
1	2,000	8,09	1,414	4,675	2,000	21,856	6,611	3,835
2	1,000	4,59	0,414	1,175	0,172	1,381	0,487	3,538
3	0,666	3,70	0,081	0,285	0,007	0,081	0,023	3,439
4	0,500	2,96	-0,086	-0,455	0,007	0,207	0,039	3,390
5	0,400	3,11	-0,186	-0,305	0,035	0,093	0,057	3,360
6	0,333	2,99	-0,252	-0,425	0,064	0,181	0,107	3,340
7	0,285	2,88	-0,300	-0,535	0,090	0,286	0,161	3,326
8	0,250	1,91	-0,336	-1,505	0,113	2,265	0,505	3,315
9	0,222	2,03	-0,364	-1,385	0,132	1,918	0,504	3,307
10	0,200	1,89	-0,386	-1,525	0,149	2,326	0,588	3,300
Σ	5,857	34,15	-	-	2,768	30,593	9,082	-

4. Одночасно заповнюємо таблицю 2.5 відповідно методології розрахунку лінійної економетричної моделі.

Таблиця 2.5.

Xs	Ys	Sx	Sy	Qxy	R	a	b
0,586	3,415	0,555	1,844	1,009	0,987	3,282	1,493

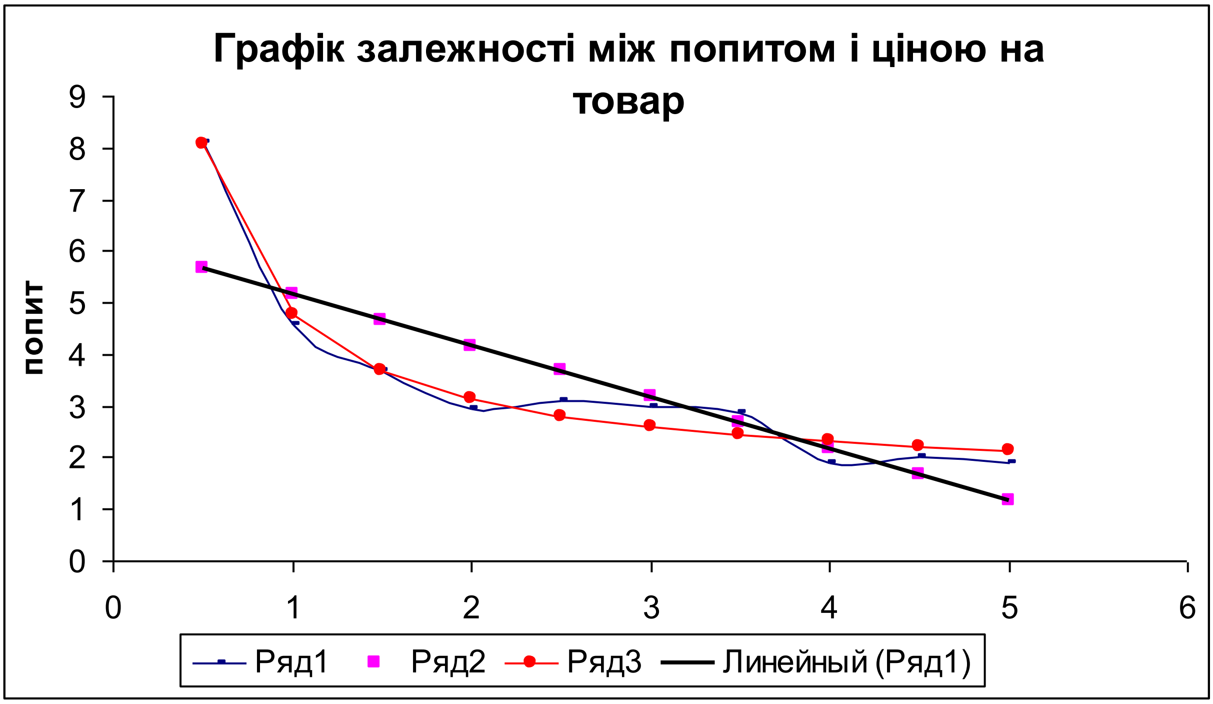


Рис 2.8 .Графік залежності між попитом і ціною на товар.

За допомогою майстра діаграм доповнюємо графік теоретичними розрахунковими лініями, використовуючи для ряду 1 вихідні дані Xi, Yi (таблиця 2.2), для ряду 2 - Xi, Yi* (таблиця 2.2), для ряду 3 –Xi (таблиця 2.2.), Yi* (таблиця 2.4). Лінійний ряд будується за допомогою лінії тренда.

Спосіб 2

За допомогою майстра діаграм, використовуючи вихідні дані Xi, Yi (таблиця 2.2), будуємо точкову діаграму. Лінійний ряд будується за допомогою лінії тренда, вибравши на вкладці „Тип” регресійні лінії тренда „Линейный” і „Степенной”.

На вкладці „Параметри” встановлюються прапорці „Показывать уравнение на диаграмме” та „Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)” (рис 2.9-2.10).

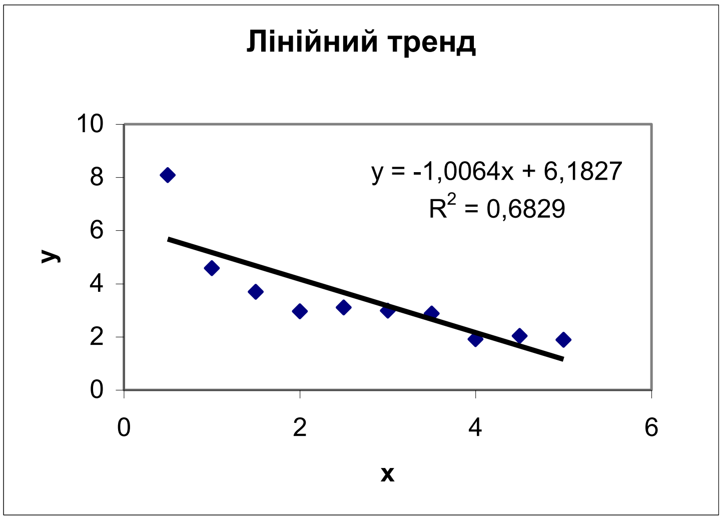


Рис 2.9. Лінійний тренд

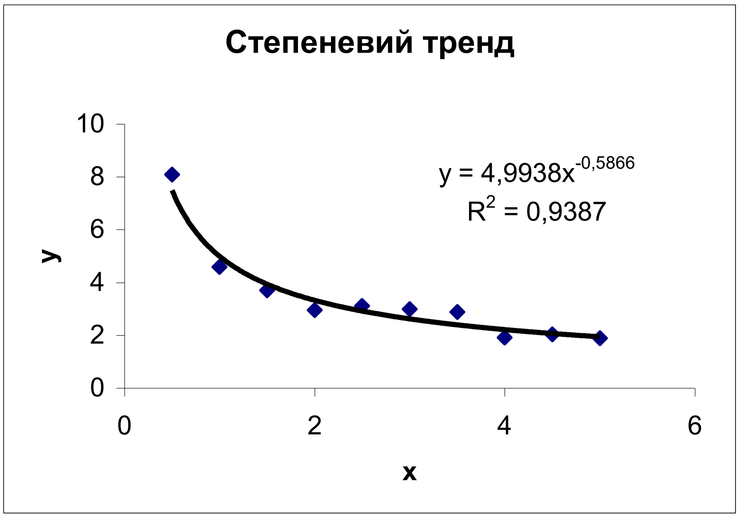


Рис. 2.10 Степеневий тренд

Висновок: зв’язок попиту і ціни на товар в даному випадку краще відображає обернена модель, яка має вигляд Y=a/x+b, тому що коефіцієнт кореляції в другому випадку вищий ніж у рівняння Y=a*x+b (0,987>0,826).

Завдання для самостійної роботи

<u>Завдання:</u> на підставі даних побудувати економетричну модель залежності попиту на товар від ціни на нього. Провести лінеаризацію моделі. Визначити, яка із запропонованих моделей більш точно описує зв’язок. Зробити економічні висновки. Вихідні дані наведено в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Вихідні дані

Варіанти	1	X	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
		Y	15,38	10,40	6,73	5,28	4,86	4,21	3,58	3,69	3,08	3,61
	2	X	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
		Y	6,15	1,84	2,14	1,66	1,58	1,13	1,15	1,56	1,91	1,78
	3	X	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
		Y	15,66	7,63	4,23	3,89	1,88	2,00	2,10	1,12	1,73	1,55
	4	X	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	11,0
		Y	17,97	8,72	5,01	3,97	3,01	2,60	1,50	1,00	0,59	1,01
	5	X	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0
		Y	8,16	3,79	3,05	2,41	1,91	1,25	1,86	1,28	1,03	1,63
	6	X	0,65	1,20	1,75	2,30	2,85	3,40	3,95	4,50	5,05	5,60
		Y	13,78	7,20	4,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,14	0,59
	7	X	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3	5,9
		Y	13,95	4,46	3,69	2,47	3,15	2,86	2,78	1,90	2,23	2,54
	8	X	0,4	0,9	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9
		Y	9,80	5,35	4,21	3,10	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,39
	9	X	0,3	1,0	1,7	2,4	3,1	3,8	4,5	5,2	5,9	6,6
		Y	25,73	6,54	3,68	2,75	1,01	0,87	0,75	1,12	0,55	0,76
	10	X	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8
		Y	23,15	8,09	5,10	2,81	2,53	1,56	0,94	1,62	0,74	0,75
	11	X	0,65	1,50	2,35	3,20	4,05	4,90	5,75	6,60	7,45	8,30
		Y	9,89	3,66	2,52	2,42	2,47	1,02	0,29	0,68	1,56	0,77
	12	X	0,3	1,2	2,1	3	3,9	4,8	5,7	6,6	7,5	8,4
		Y	29,55	7,08	3,45	1,62	1,73	0,49	0,32	0,74	0,21	0,41
	13	X	12,3	12,7	13,1	13,5	13,9	14,3	14,7	15,1	15,5	15,9
		Y	29,42	11,40	6,28	4,52	4,14	4,29	3,85	3,58	3,45	3,33
	14	X	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25	6,50	6,75	7,00	7,25	7,50
		Y	18,52	9,98	6,28	4,47	4,01	3,92	3,75	3,55	4,00	3,28
	15	X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
		Y	25,55	19,5	10,89	9,56	6,24	5,24	4,87	4,56	4,03	3,58
	16	X	14,0	14,2	14,4	14,6	14,8	15	15,2	15,4	15,6	15,8
		Y	9,57	6,73	6,01	4,89	4,21	3,05	2,82	2,56	2,93	2,44
	17	X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
		Y	15,56	9,56	7,82	6,65	5,48	4,95	4,28	4,46	4,03	4,12

Продовження таблиці 2.6

Варіанти	18	X	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
		Y	785	466	365	311	297	276	256	266	243	229
	19	X	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,3	10,5	10,7	10,9
		Y	187	94	46	39	52	26	29	24	21	25
	20	X	16,0	16,3	16,6	16,9	17,2	17,5	17,8	18,1	18,4	18,7
		Y	18,34	12,20	9,45	9,21	8,92	8,02	8,78	7,85	7,49	7,55
	21	X	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5	5,1
		Y	192	88	41	46	42	39	33	21	23	21
	22	X	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0
		Y	12,65	6,99	7,54	5,29	4,87	4,26	4,45	3,98	4,02	3,85
	23	X	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5
		Y	211	78	41	43	38	29	25	18	19	15
	24	X	4,45	4,60	4,75	4,90	5,05	5,20	5,35	5,50	5,65	5,80
		Y	12,80	6,30	4,21	3,18	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,39
	25	X	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1
		Y	17,61	8,63	4,23	3,89	2,88	2,32	2,10	1,12	1,73	1,55
	26	X	9,0	9,4	9,8	10,2	10,6	11,0	11,4	11,8	12,2	12,6
		Y	15,78	9,12	4,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,14	1,59
	27	X	10,0	10,4	10,7	11,1	11,4	11,75	12,1	12,5	12,8	13,2
		Y	9,15	3,84	2,14	1,66	1,58	1,13	1,15	1,56	1,91	1,23
	28	X	2,25	2,40	2,55	2,70	2,85	3,00	3,15	3,30	3,45	3,60
		Y	167	83	46	39	52	26	29	24	21	20
	29	X	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0	21,5
		Y	15,81	7,35	4,21	3,48	3,32	2,25	2,02	2,38	2,29	2,19
	30	X	5,05	5,10	5,15	5,20	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45	5,50
		Y	17,23	9,46	6,13	5,28	4,31	4,21	3,58	3,69	3,08	3,34
	31	X	15,0	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5
		Y	205	72	41	36	35	29	25	22	19	15
	32	X	4,45	4,70	4,95	5,20	5,45	5,70	5,95	6,20	6,45	6,70
		Y	13,82	6,35	5,21	4,51	3,37	2,25	2,07	2,38	2,24	2,39
	33	X	3,06	3,16	3,26	3,36	3,46	3,56	3,66	3,76	3,86	3,96
		Y	15,61	7,65	4,29	3,89	2,88	2,32	2,10	1,62	1,73	1,51
	34	X	11,3	11,7	12,1	12,5	12,9	13,3	13,7	14,1	14,5	14,9
		Y	17,72	9,52	4,73	3,32	2,94	3,12	2,68	2,56	2,54	2,51
	35	X	9,23	9,58	9,93	10,30	10,60	10,98	11,33	11,70	12,03	12,40
		Y	11,16	4,87	2,31	1,76	1,58	1,33	1,15	1,56	1,91	1,43
	36	X	1,94	2,09	2,24	2,39	2,54	2,69	2,84	2,99	3,14	3,29
		Y	182	73	43	34	31	29	25	24	21	20
	37	X	12,1	12,7	13,2	13,8	14,3	14,85	15,4	16	16,5	17,1
		Y	15,51	8,32	5,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,43	2,59
	38	X	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	24,6	25,2	25,8	26,4
		Y	15,12	5,72	3,69	3,41	3,15	2,86	2,78	2,19	2,23	2,54
	39	X	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
		Y	12,12	7,31	4,21	3,10	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,21
	40	X	21,0	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3
		Y	15,33	7,54	3,68	2,75	2,31	1,87	1,75	1,12	1,55	1,72
	41	X	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
		Y	16,12	8,21	5,41	2,81	2,53	1,56	1,94	1,62	1,54	1,75

Продовження таблиці 2.6

Варіанти	42	X	21,00	21,90	22,70	23,60	24,40	25,25	26,10	27,00	27,80	28,70
		Y	14,81	7,66	4,52	3,42	2,47	1,02	1,29	1,68	1,56	1,77
	43	X	17,0	17,9	18,8	19,7	20,6	21,5	22,4	23,3	24,2	25,1
		Y	19,35	7,48	4,45	2,62	2,73	2,49	2,32	2,74	2,21	2,41
	44	X	15,0	15,4	15,8	16,2	16,6	17,0	17,4	17,8	18,2	18,6
		Y	12,42	8,42	4,28	4,52	4,14	4,29	3,85	3,58	3,49	3,45
	45	X	9,80	10,10	10,30	10,60	10,80	11,05	11,30	11,60	11,80	12,10
		Y	15,25	9,32	6,21	4,47	4,01	3,92	3,75	3,55	4,32	3,21
	46	X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
		Y	21,32	14,20	12,82	8,56	6,24	5,24	4,87	4,56	4,23	3,58
	47	X	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8
		Y	12,52	8,73	6,01	4,89	4,21	3,05	3,82	3,56	2,91	3,48
	48	X	3,21	3,31	3,41	3,51	3,61	3,71	3,81	3,91	4,01	4,11
		Y	16,38	12,40	8,73	5,28	4,86	4,21	3,58	3,69	3,48	3,64
	49	X	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
		Y	17,56	11,60	8,82	6,65	5,48	4,95	4,28	4,16	4,83	4,32
	50	X	2,34	2,39	2,44	2,49	2,54	2,59	2,64	2,69	2,74	2,79
		Y	681	466	387	311	297	276	256	266	223	207

Завдання для самоконтролю

1. Які типи кривих найчастіше використовують для опису різних тенденцій економічних процесів?
2. Опишіть суть і особливості використання вибіркової оберненої моделі.
3. Охарактеризуйте криву Філіпса як приклад використання обернених моделей.
4. Назвіть випадки, в яких використовується крива Енгеля.
5. Опишіть етапи побудови лінії тренда оберненої економетричної моделі.
6. В чому полягає суть лінеаризації?
7. За допомогою якої величини остаточно приймають рішення про вибір типу залежності?

РОЗДІЛ 3. МНОЖИННА РЕГРЕСІЯ

3.1. Рівняння множинної регресії та визначення його параметрів

В практиці економетричних досліджень часто мають місце задачі, які базуються на встановленні залежності між багатьма параметрами. Явище, яке залежить від багатьох факторів, можна описати за допомогою множинної регресії.

Рівняння множинної регресії – *це рівняння в якому залежна змінна пов'язана з декількома видами незалежних змінних.*

Наприклад, нехай Y - деяка випадкова величина, яка є лінійною функцією деяких змінних. Коли припустити, що Y – річний попит на товари першої необхідності на душу населення, то факторами можуть бути: X_1 – м'ясо та м'ясні продукти; X_2 – молоко та молочні продукти; X_3 – зерно та продукти його переробки; X_4 – овочі та фрукти; X_5 – цукор, крохмаль, кондитерські вироби; X_6 – алкогольні та безалкогольні напої; X_7 – смакові товари; X_8 – тканини та швейні вироби; X_9 – галантерейні вироби; X_{10} – взуття.

Величини X (i=1, 10) виражають річну реалізацію товару в умовних грошових одиницях на душу населення. Для загальності припустимо, що i=1, m, тоді лінійна модель з m незалежними змінними матиме вигляд [8]:

$$Yi=a_0X_0+a_1X_{1i}+a_2X_{2i}+\ldots+a_mXm_i+U_i \,, \qquad (3.1)$$

де x_0=1 - фіктивна змінна, введена для зручності; X_{1i}, X_{2i}, …, Xm_i –відомі величини (наприклад X_{1i} - витрати на маркетинг в i-тому обліковому році на одиницю проданого товару); U_i - випадкова величина, що є відхиленням від передбачуваної функціональної залежності в i-тому році, відбиває вплив на Y інших факторів, помилки вимірів, помилки вибору моделі; a_i (i=0, m) невідомі параметри.

Нехай з метою дослідження лінійного зв'язку проведена вибірка обсягу n. Тоді для величин, що спостерігаються, можна записати

$$Y_i=a_0Xi_0+a_1Xi_1+\ldots+a_mXi_m+u_i \,; \quad i=1, 2, ..., n. \qquad (3.2)$$

У рівнянні 3.2 постійні коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_m невідомі і потребують оцінки.

Зазначимо, що модель 3.1 досить загальна. Математичну модель прибутку торгового підприємства можна записати у вигляді

$$Yi = a_0+a_1X_{1i} +a_2X_{2i}+a_3/X_{2i}+a_4/X_{3i}+a_5t_i+u_i \,, \qquad (3.3)$$

де Yi - індекси прибутку торгового підприємства; X_{1i} - індекси величин торгових площ магазинів; X_{2i} - індекси заробітних плат працівників; X_{3i} - індекси витрат на маркетинг; t - час. Істотною рисою цієї моделі є те, що вона лінійна відносно невідомих параметрів a_i. Вводячи заміни змінних

$$z_{1i}=x_{1i},\ z_{2i}=x^2_{1i},\ z_{3i}=1/x_{2i},\ z_{4i}=1/x_{3i},\ z_{5i}=t_i \qquad (3.4)$$

Залежність 3.3 зводимо до моделі 3.1.

Щодо вектора похибок $\vec{U}$, то введемо такі припущення:

1) Для кожного спостереження $i=\overline{1,n}$ U_i випадкова величина;

2) $M[U_i^2] = \sigma^2$ - похибки Ui мають однакову дисперсію σ^2;

3) $M[U_i] = 0$ - математичне сподівання похибки дорівнює нулю для кожного i-того спостереження;

4). U_i та U_j, некорельовані при $i\neq j$, тобто $K[u_i,u_j]=0$.

Для оцінки коефіцієнтів a_0, a_1, ..., a_m можна використати один із нижче наведених способів.

3.2. Способи визначення невідомих параметрів в системі рівнянь множинної регресії

<u>Спосіб 1</u>

Методом найменших квадратів, згідно якого:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_0+a_1x_{1i}+a_2x_{2_i}+\ldots+a_nx_{ni})^2)\xrightarrow{\quad}\min \qquad (3.5)$$

Для того, щоб розв'язати дане рівняння, візьмемо часткові похідні і прирівняємо їх значення до нуля.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + \ldots + a_nx_{ni})(-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + \ldots + a_nx_{ni})(-x_{1i}) \qquad (3.6)$$

Прирівняємо отримані значення похідних до нуля. Отримаємо систему n-рівнянь з n-невідомими.

У випадку, коли має місце залежність типу

$$y = a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} \qquad (3.7)$$

розраховується система рівнянь, із якої можна буде визначити невідомі $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$:

$$\sum_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i}))^2 \longrightarrow \min \qquad (3.8)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i}))(-1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i}))(-x_{1i}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}((y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i}))(-x_{2i}) \end{cases} \qquad (3.9)$$

Прирівняємо значення похідних до нуля:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n}a_1x_{1i} + \sum\limits_{i=1}^{n}a_2x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_0x_{1i} + \sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{1i}{}^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}a_2x_{1i}x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_{1i} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_0x_{2i} + \sum\limits_{i=1}^{n}a_1x_{1i}x_{2i} + \sum\limits_{i=1}^{n}a_2x_{2i}x_{2i}{}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_{2i} \end{cases} \qquad (3.10)$$

Винесемо постійні множники за знак суми

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i} + a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i} + a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}{}^2 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} = \sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_{1i} \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i} + a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i} + a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{2i}{}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_{2i} \end{cases} \qquad (3.11)$$

Для того, щоб розв’язати дану систему рівнянь, потрібно виконати деякі попередні підрахунки, а саме: визначити коефіцієнти при невідомих та вільні члени системи рівнянь. Ці розрахунки зручно вести в табличній формі:

Таблиця 3.1

	y_i	X_{1i}	x_{2i}	x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	Y_i^2
$\sum$									

Одним з основних показників щільності кореляційного зв'язку показника Y з факторами X_i (i=1, m), а також показника ступеня близькості математичної форми зв'язку до вибіркових даних є коефіцієнт множинної кореляції.

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y^*{}_i - Y_s\right)^2 / \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - Y_s\right)^2 \qquad (3.12)$$

$$R^2 = \left(Sy^2 - Sy^{*2}\right) / Sy^2$$

При цьому

$$Sy = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(Yi - Ys\right)^2} \qquad (3.13)$$

$$Sy^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(Yi - Y^*\right)^2}$$

Якщо всі вибіркові значення показника розміщені на лінії регресії, то коефіцієнт множинної детермінації дорівнює 1. Чим ближче вибіркові (експериментальні) значення наближаються до лінії регресії, тим ближче вибірковий коефіцієнт множинної детермінації наближається до 1.

Корінь квадратний із вибіркового коефіцієнта множинної детермінації є коефіцієнтом множинної кореляції [4]:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Y^*{}_i - Y_s\right)^2 / \sum_{i=\mathrm{n}}^{n}\left(Y_i - Y_s\right)^2} \qquad (3.14)$$

$$R = \sqrt{\left(Sy^2 - Sy^{*2}\right) / Sy^2}$$

Коефіцієнт множинної кореляції є оцінкою близькості математичної форми зв'язку до вибіркових даних. $R \in [-1;1]$. Якщо R>0,8, то зв'язок залежної змінної з кількома незалежними вважається тісним.

Розрахунки з визначення множинного коефіцієнта кореляції ведуться в табличній формі (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2

№ з/п	y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i-y_s	$(y_i$-$y_s)^2$	Y_i*	U_i=y_i-Y_i*	U_i^2
Σ								

Спосіб 2

Процес оцінювання регресійної моделі при m≥2 досить громіздкий, оскільки необхідно оцінювати велике число сум в системі рівнянь 3.11 і розв’язувати системи рівнянь з трьома і більше змінними. Для спрощення розрахунку використовують матричний спосіб оцінки параметрів моделі.

Регресійне співвідношення 3.2 для величин, що спостерігаються, записуємо в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} y_1 = a_0 x_{10} + a_1 x_{11} + ... + a_m x_{1m} + u_1, \\ y_2 = a_0 x_{20} + a_1 x_{21} + ... + a_m x_{2m} + u_2, \\ ...., \\ y_n = a_0 x_{n0} + a_1 x_{n1} + ... + a_m x_{nm} + u_n. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Тут X_{i0}=1 для всіх i=1, 2, ..., n. Матричний запис системи рівнянь 3.15:

$$\vec{Y} = [X]\vec{a} + \vec{U} \qquad (3.16)$$

де матриця [X] розмірності nx(m+1) називається регресійною.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & ... & X_{m1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & ... & X_{m2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & ... & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & ... & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & ... & \bullet \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & ... & X_{mn} \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ U_n \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

У лінійних регресійних моделях передбачається, що вибіркові спостереження повинні бути такими, щоб число ступенів волі l=n-m-1було більше 0, і щоб матриця X мала повний стовпцевий ранг m+1. В цьому випадку ранг транспонованої матриці також дорівнює m+1, а симетрична матриця розмірності (m+1)*(m+1)

$$X'X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i0}x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i0}x_{im} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i0} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{im} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{im}x_{i0} & \sum_{i=1}^{n} x_{im}x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 \end{pmatrix} \qquad (3.18)$$

має ранг, рівний m+1 і, отже, існує обернена матриця $(X`X)^{-1}$.

Отже система лінійних рівнянь (3.11), з якої визначаються a_0, a_1, …, a_m, може бути записана у вигляді

$$X'Xa = X'Y, \qquad (3.19)$$

звідки знаходимо вектор-стовпець шуканих МНК оцінок:

$$A = (X'X)^{-1}X'Y, \qquad (3.20)$$

де X – матриця спостережень, X'- транспонована матриця, Y – вектор спостережень за залежною змінною.

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{pmatrix} \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad (3.21)$$

Спосіб 3

Обчислення параметрів множинної регресії за допомогою функції ЛИНЕЙН електронних таблиць Microsoft Excel:

ЛИНЕЙН (відомі значення _ у; відомі значення _ х; конст; статистика), де „ Відомі значення у” - множина значень у;

„ Відомі значення х” - множина значень х, що враховує або одну (парна регресія), або кілька змінних (множдинна регресія).

„ Конст” – логічне значення. Якщо „ конст” має значення „истина”, то a обчислюється традиційно (модель з вільним членом);

„ Статистика” - логічне значення, яке вказує, чи потрібно обчислювати додаткову статистику за регресією. Якщо „ статистика” має значення „ истина”, то функція ЛИНЕЙН обчислює додаткову регресійну статистику у вигляді масиву (таблиця 3.5).

Таблиця 3.5

a k	a k-1	…	b	A
sa k	Sa k-1	…	sb	sa
R^2	σu			
F	Ступінь свободи n-m			
$\Sigma(Yi^*-Ys)^2$	$\Sigma(Yi-Yi^*)^2$			

де

b – оцінка параметра bj, j =1, k;

a - оцінка вільного члена регресії;

sa k – стандартна похибка оцінки параметра;

R^2 – коефіцієнт детермінації;

σu – стандартна похибка залишків;

F - F-критерій.

Ступінь свободи дорівнює n-m, де n – кількість спостережень, m - кількість змінних у моделі; це значення необхідне для визначення табличного значення F-критерію.

$\Sigma(Yi^*-Ys)^2$ – сума квадратів відхилень, що пояснюється регресією;

$\Sigma(Yi-Yi^*)^2$ – сума квадратів відхилень, що пояснюється похибкою u. Якщо статистика має значення „ ложь” чи її пропустили, то функція ЛИНЕЙН обчислює лише коефіцієнт b і константу a.

3.3. Приклад побудови множинної регресії

3.3.1.Завдання роботи

На основі даних про прибутки торгового підприємства та витратами на маркетинг і рівнем заробітної плати персоналу побудувати економетричну модель залежності.

Мета роботи - набуття практичних навичок побудови множинної регресії, яка встановлює залежність між прибутком торгового підприємства та витратами на маркетинг і рівнем заробітної плати персоналу.

Завдання роботи:

1. Виконати специфікацію економетричної моделі.
2. Оцінити параметри моделі за допомогою МНК.
3. Оцінити параметри моделі матричним способом.
4. Оцінити параметри моделі, використавши функцію електронних таблиць Microsoft Excel ЛИНЕЙН.
5. Зробити висновки.

3.3.2. Вихідні дані

Таблиця 3.6

Вихідні дані

№ з/п	Y_i	X_{1i}	X_{2i}
1	4,76	0,39	7,95
2	5,70	0,51	8,03
3	7,48	0,84	8,33
4	11,55	0,99	8,78
5	1,04	0,22	6,57
6	2,39	0,31	4,35
7	0,54	0,19	3,9
8	8,41	0,78	8,07
9	3,54	0,33	5,34
10	9,11	0,89	8,40
Σ	54,52	5,45	69,72

Ідентифікуємо змінні:

Y - прибуток підприємства (залежна змінна);

X_1 - витрати на маркетинг (незалежна змінна);

X_2 - заробітна плата працівників (незалежна змінна).

3.3.3. Приклад розрахунку

Спосіб 1

1. Виберемо в якості функції регресії лінійну функцію

$$Y=a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2, \qquad x_0=1.$$

2. Визначимо невідомі коефіцієнти в системі рівнянь, для чого заповнимо таблицю 3.7.

Таблиця 3.7

№ з/п	y_i	x_{1i}	x_{2i}	x_{1i}^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	x_{2i}^2	$x_{2i}y_i$	Y_i^2
1	4,76	0,39	7,95	0,1521	3,1005	1,8564	63,203	37,842	22,658
2	5,70	0,51	8,03	0,2601	4,0953	2,9070	64,481	45,771	32,490
3	7,48	0,84	8,33	0,7056	6,9972	6,2832	69,389	62,308	55,950
4	11,55	0,99	8,78	0,9801	8,6922	11,4350	77,088	101,410	133,400
5	1,04	0,22	6,57	0,0484	1,4454	0,2288	43,165	6,833	1,0816
6	2,39	0,31	4,35	0,0961	1,3485	0,7409	18,923	10,397	5,7121
7	0,54	0,19	3,90	0,0361	0,7410	0,1026	15,210	2,106	0,2916
8	8,41	0,78	8,07	0,6084	6,2946	6,5598	65,125	67,869	70,728
9	3,54	0,33	5,34	0,1089	1,7622	1,1682	28,516	18,904	12,532
10	9,11	0,89	8,40	0,7921	7,4760	8,1079	70,560	76,524	82,992
Σ	54,52	5,45	69,72	3,7879	41,9530	39,3890	515,660	429,960	417,840

3. Система нормальних рівнянь 3.11 для визначення МНК-оцінок a_0, a_1, a_2, що відповідає даним таблиці 3.1, набуде вигляду

$$\begin{cases} 10a_0 + 5{,}45a_1 + 69{,}72a_2 = 54{,}52 \\ 5{,}45a_0 + 3{,}7879a_1 + 41{,}953a_2 = 39{,}389 \\ 69{,}72a_0 + 41{,}953a_1 + 515{,}66a_2 = 429{,}96 \end{cases}$$

4. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо

$a_0=0{,}2913,\ a_1=10{,}4245,\ a_2=-2{,}2604.$

Отже оцінене рівняння регресії $Y=0{,}2913+10{,}4245x_1-2{,}2604x_2$

5. Обчислимо множинний коефіцієнт кореляції, заповнивши таблицю 3.8, попередньо провівши наступні розрахунки:

Ys= 5,452

Sy= 3,6605

Sy*= 0,7606

R^2= 0,9568

R= 0,9782

Таблиця 3.8

№ з/п	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	$Y-Y_s$	$(Y-Y_s)^2$	Y*	$U_i=Y_i-Y_i^*$	U_i^2
1	4,76	0,39	7,95	-0,692	0,4789	4,1211	0,6389	0,4082
2	5,70	0,51	8,03	0,248	0,0615	5,3954	0,3046	0,0928
3	7,48	0,84	8,33	2,028	4,1128	8,9228	-1,4430	2,0818
4	11,55	0,99	8,78	6,098	37,1860	10,618	0,9324	0,8694
5	1,04	0,22	6,57	-4,412	19,4660	1,9469	-0,9070	0,8225
6	2,39	0,31	4,35	-3,062	9,3758	2,2384	0,1516	0,023
7	0,54	0,19	3,90	-4,912	24,1280	0,8564	-0,3160	0,1001
8	8,41	0,78	8,07	2,958	8,7498	8,2216	0,1884	0,0355
9	3,54	0,33	5,34	-1,912	3,6557	2,7353	0,8047	0,6475
10	9,11	0,89	8,40	3,658	13,3810	9,4645	-0,3540	0,1256
Σ	54,52	5,45	69,72	-	120,5900	-	-	5,2064

<u>Спосіб 2</u>

1. Для знаходження невідомих a_0, a_1, a_2 матричним способом сформуємо матрицю X і Y:

X=

1	0,39	7,95
1	0,51	8,03
1	0,84	8,33
1	0,99	8,78
1	0,22	6,57
1	0,31	4,35
1	0,19	3,9
1	0,78	8,07
1	0,33	5,34
1	0,89	8,4

Y=

4,76
5,7
7,48
11,6
1,04
2,39
0,54
8,41
3,54
9,11

2. За допомогою функції ТРАНСП транспонуємо вихідну матрицю X. Транспонування полягає в тому, що перший рядок вихідного масиву стає першим стовпцем нового масиву, а другий рядок - другим стовпцем і т. д. Для завершення операції використовується комбінація клавіш Ctrl+Shift+Enter. Вона буде мати вигляд:

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X`=	0,39	0,51	0,84	0,99	0,22	0,31	0,19	0,78	0,33	0,89
	7,95	8,03	8,33	8,78	6,57	4,35	3,9	8,07	5,34	8,40

3. Перемножимо матрицю X' на X та обернемо результуючу матрицю, отримавши при цьому $(X'X)^{-1}$

X'X=

10	5,45	69,72
5,45	3,7879	41,953
69,72	41,953	515,66

$(X'X)^{-1}$=

2,2645	1,3433	-0,415
1,3433	3,4656	-0,464
-0,415	-0,4636	0,0958

4. Перемножуємо вихідну матрицю X' на транспоновану матрицю Y за допомогою функції МУМНОЖ. Результат - це масив з таким самим числом рядків, як в масиву 1 та таким самим числом стовпців, як в масиві 2. Для завершення операції використовується комбінація клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Отримана матриця розміром 1×3 матиме вигляд:

X`Y=

54,5
39,4
430

5. За формулою 1.18 знаходяться невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2.

2,3	1,34	-0,4		54,5		-2,3
1,3	3,47	-0,5	×	39,4	=	10,4
-0,4	-0,5	0,1		430		0,29

6. Отже оцінене рівняння регресії

$$Y=0,2913+10,4245x_1-2,2604x_2$$

Отриманий розв'язок збігається з попереднім, що свідчить про правильність обчислень.

<u>Спосіб 3</u>

1. За допомогою функції ЛИНЕЙН електронних таблиць Microsoft Excel:

0,2913	10,425	-2,26
0,267	1,6055	1,2978
0,9568	0,8624	#Н/Д
77,57	7	#Н/Д
115,39	5,2064	#Н/Д

де :

a_0=0,2913;

a_1=10,425;

a_2=-2,26;

стандартна похибка параметра a_0=0,267;

стандартна похибка параметра a_1=1,6055;

стандартна похибка параметра a_2=1,2978;

коефіцієнт детермінації R_2=0,9568;

стандартна похибка залишків σ_u =0,8624;

F-критерій =77,57;

ступінь свободи (n-m)=10-3=7;

сума квадратів відхилень, що пояснюються регресією, становить 115,39;

сума квадратів відхилень, що пояснюються похибкою u становить 5,2064.

Отриманий розв'язок збігається з попередніми, що свідчить про правильність обчислень.

Висновок: в результаті розрахунків побудовано економетричну модель, яка встановлює залежність між прибутком торгового підприємства та витратами на маркетинг і рівнем заробітної плати персоналу:

$$Y=0,2913+10,4245x_1-2,2604x_2$$

Множинний коефіцієнт кореляції R складає 0,9782, що вказує на тісний зв'язок між параметрами.

Завдання для самостійної роботи

Завдання: На основі даних про попит населення на товари розкоші, рівень заробітної плати населення і доходи від його самозайнятості (таблиця 3.9) побудувати економетричну модель залежності. Зробити економічні висновки.

Таблиця 3.9

Вихідні дані

Варі-ант	Змін-ні	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	y	4,76	5,7	7,48	11,55	1,04	2,39	0,54	8,41	3,54	9,11
	x_1	0,39	0,51	0,84	0,99	0,22	0,31	0,19	0,78	0,33	0,89
	x_2	7,95	8,03	80,33	8,78	6,57	4,35	3,90	8,07	5,34	8,40
2	y	3,24	9,09	1,27	5,34	6,51	7,82	2,25	5,51	3,98	5,03
	x_1	9,32	3,57	11,05	4,28	3,99	2,57	8,94	4,38	7,94	3,99
	x_2	5,78	3,56	4,28	7,94	5,34	8,94	1,57	5,05	4,21	3,98
3	y	2,27	9,74	8,04	5,27	7,84	1,21	3,94	6,65	3,03	5,99
	x_1	8,59	2,34	2,99	5,02	3,27	9,25	7,07	4,45	7,31	5,07
	x_2	3,40	11,12	10,72	6,79	8,27	2,34	4,59	7,29	5,00	6,06
4	y	11,29	3,03	7,72	9,49	3,95	2,15	5,64	8,09	4,24	1,54
	x_1	2,03	0,77	1,52	1,99	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,30
	x_2	5,72	1,69	5,02	5,37	2,12	1,39	3,03	4,13	2,4	0,87

Продовження таблиці 3.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	y	1,54	4,27	8,10	5,69	2,31	3,95	9,29	7,94	3,33	10,99
	x_1	2,93	2,77	1,52	1,99	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,30
	x_2	5,74	1,69	5,02	5,37	2,21	1,39	3,06	4,14	2,39	0,88
6	y	2,94	1,57	2,50	0,61	1,20	2,02	1,95	2,49	1,93	0,66
	x_1	2,84	5,57	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_2	10,15	7,58	9,93	13,45	7,84	9,45	8,25	11,49	8,24	14,02
7	y	9,37	2,37	4,51	9,03	6,27	5,09	3,89	1,05	11,57	7,54
	x_1	6,32	1,51	3,31	6,30	4,20	3,40	2,54	0,71	7,85	5,05
	x_2	0,92	0,25	0,44	1,01	0,64	0,48	0,42	0,12	1,24	0,77
8	y	3,98	5,72	8,92	1,54	3,02	7,87	9,34	4,27	3,54	1,91
	x_1	4,27	6,02	9,27	2,02	3,54	8,28	9,98	4,84	3,91	2,13
	x_2	3,42	5,24	8,11	1,08	2,78	7,40	8,79	4,01	2,92	1,52
9	y	1,22	4,35	8,54	9,92	7,57	2,52	4,99	6,54	3,94	5,05
	x_1	9,89	8,75	7,24	6,13	6,80	9,60	8,34	8,09	7,54	7,72
	x_2	8,54	7,94	6,87	5,28	6,42	9,38	7,98	7,62	6,76	7,39
10	y	6,76	9,89	3,48	1,59	4,81	8,72	2,54	5,94	11,54	7,27
	x_1	3,31	5,05	1,78	0,82	2,39	4,45	1,30	2,60	5,62	3,71
	x_2	1,75	2,70	0,82	0,39	1,21	2,30	0,66	1,21	2,91	1,92
11	y	5,84	9,34	2,03	4,57	7,87	8,09	1,56	6,55	3,94	12,53
	x_1	2,31	3,87	0,81	1,87	3,12	3,25	0,61	2,45	1,58	4,85
	x_2	4,56	5,95	2,93	3,99	5,22	5,51	2,74	4,51	3,71	6,92
12	y	7,89	1,07	3,49	5,08	9,81	6,45	11,54	8,21	5,85	4,15
	x_1	1,56	0,21	0,70	1,10	1,91	1,23	2,31	1,61	1,18	0,83
	x_2	5,62	4,34	4,84	5,18	6,02	5,33	6,51	5,77	5,25	4,92
13	y	3,56	1,07	8,41	5,54	2,84	4,09	7,39	6,65	2,52	5,09
	x_1	5,24	1,58	12,65	8,24	4,25	6,15	10,98	9,84	3,92	7,98
	x_2	4,07	0,63	11,72	7,33	3,30	5,21	9,90	8,71	2,99	7,01
14	y	1,84	4,27	8,32	5,94	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,92	3,14	5,27	4,02	2,31	4,67	4,09	2,91	1,28	1,64
	x_2	3,54	8,82	15,27	9,99	5,17	13,95	12,6	7,48	1,05	2,58
15	y	4,56	5,95	2,93	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	3,71	6,95
	x_1	12,53	3,94	6,55	1,56	8,09	7,84	4,57	2,03	9,34	5,84
	x_2	4,85	4,58	2,45	0,61	3,25	3,12	1,87	0,81	3,87	2,31
16	y	9,54	3,41	5,15	7,56	4,15	1,84	5,94	11,03	8,84	2,92
	x_1	3,54	1,05	1,79	2,61	1,24	0,66	1,87	3,59	3,84	1,05
	x_2	7,09	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,03	7,03	7,12	1,89
17	y	8,44	5,27	1,07	9,59	3,07	7,84	4,74	2,15	5,96	6,12
	x_1	1,35	1,87	2,95	1,27	2,45	1,45	2,03	2,68	1,94	2,02
	x_2	5,67	6,24	8,08	4,98	7,15	5,88	6,87	7,84	6,74	6,51
18	y	3,63	1,09	8,94	5,34	6,24	2,42	9,38	7,07	2,55	4,24
	x_1	4,89	1,35	10,94	7,15	8,54	2,95	12,55	9,15	3,15	6,54
	x_2	2,92	0,82	7,08	4,54	5,07	1,84	8,51	6,50	2,01	3,81

Продовження таблиці 3.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
19	y	2,84	5,57	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_1	0,62	1,99	2,49	1,95	2,02	1,20	0,61	2,54	1,54	2,94
	x_2	10,15	7,56	9,91	13,45	7,84	9,45	8,25	11,51	8,23	14,02
20	y	7,27	1,54	5,29	9,09	3,23	8,57	6,15	4,77	0,59	3,84
	x_1	5,44	0,83	3,89	7,62	2,81	6,01	4,81	3,54	0,41	3,01
	x_2	12,03	2,51	7,81	14,09	4,33	12,54	10,51	8,25	0,95	3,51
21	y	4,84	5,72	7,49	11,34	1,09	2,41	0,53	8,40	3,55	9,15
	x_1	0,39	0,53	0,84	0,95	0,22	0,32	0,19	0,76	0,33	0,89
	x_2	7,95	8,1	8,33	8,39	6,55	4,35	3,90	8,09	5,33	8,4
22	y	9,12	4,33	7,68	1,52	3,15	5,77	8,34	7,12	5,58	2,85
	x_1	2,83	1,62	2,49	0,65	1,24	2,21	1,83	2,52	1,92	0,71
	x_2	13,95	8,32	11,41	8,34	9,39	7,94	12,99	9,83	7,62	10,21
23	y	6,31	1,59	5,30	9,09	3,23	8,57	6,19	4,77	0,62	3,84
	x_1	4,92	0,91	3,90	7,64	2,81	6,12	4,95	3,59	0,43	3,12
	x_2	11,53	2,62	7,84	14,12	4,39	11,99	10,45	8,31	1,01	4,62
24	y	2,91	5,55	7,12	8,34	5,77	3,25	1,54	7,77	4,34	9,15
	x_1	0,66	2,01	2,49	1,95	2,04	1,21	0,72	2,58	1,56	2,98
	x_2	10,21	7,57	9,92	13,45	7,92	9,53	8,33	11,54	8,39	13,99
25	y	3,67	1,11	2,94	5,14	6,22	2,48	9,38	7,12	2,58	4,28
	x_1	4,92	1,39	10,97	7,17	8,52	2,92	12,72	9,09	3,17	6,55
	x_2	2,93	0,83	7,12	4,62	5,09	1,85	8,62	6,53	2,07	3,83
26	y	8,51	5,27	1,09	9,59	3,11	7,84	4,74	2,15	5,99	6,12
	x_1	1,36	1,89	2,98	1,27	2,41	1,45	2,03	2,78	1,98	2,10
	x_2	5,69	6,25	8,11	4,99	7,19	5,89	6,89	7,84	6,74	6,53
27	y	9,55	3,41	5,15	5,76	4,15	1,84	5,95	11,11	8,84	2,92
	x_1	3,55	1,05	1,79	2,61	1,24	0,67	1,88	3,61	3,84	1,05
	x_2	7,10	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,03	7,08	7,12	1,89
28	y	4,50	5,95	2,99	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	7,71	6,95
	x_1	12,48	3,94	6,59	1,56	8,09	7,84	4,57	2,03	9,34	5,84
	x_2	4,89	4,58	2,48	0,61	3,25	3,12	1,88	1,81	3,87	2,34
29	y	1,88	4,27	8,32	5,94	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,95	3,14	5,27	4,02	2,31	4,67	4,09	2,91	1,28	1,64
	x_2	3,57	8,82	15,27	9,99	5,17	13,95	12,6	7,48	1,05	2,58
30	y	3,65	1,07	8,41	5,54	2,84	4,09	7,39	6,65	2,52	5,10
	x_1	5,21	1,58	12,65	8,21	4,25	6,15	10,98	9,84	3,90	8,01
	x_2	4,12	1,63	11,75	7,33	3,30	5,21	9,90	8,71	3,01	6,99
31	y	8,01	1,07	3,49	5,01	9,81	6,57	6,45	11,54	8,21	4,15
	x_1	1,69	0,21	0,72	1,12	1,95	1,28	1,23	2,35	1,61	0,88
	x_2	5,78	4,34	4,84	5,12	6,03	5,33	5,39	6,57	5,77	5,01
32	y	6,03	9,34	2,03	4,57	7,87	8,09	1,56	6,66	3,94	12,09
	x_1	2,35	3,87	0,81	1,87	3,12	3,25	0,67	2,49	1,58	4,89
	x_2	4,65	5,95	2,93	3,99	5,22	5,59	2,74	4,50	3,71	7,03

Продовження таблиці 3.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	y	6,71	9,89	3,48	1,59	4,81	8,73	2,54	5,94	1,59	7,29
	x_1	3,29	5,08	1,78	0,84	2,39	4,51	1,30	2,61	5,63	3,74
	x_2	1,81	2,71	0,82	0,39	1,24	2,31	0,67	1,21	2,91	2,01
34	y	1,27	4,35	8,59	9,92	7,58	2,52	5,01	6,55	3,94	5,05
	x_1	9,91	8,75	7,27	6,13	6,81	9,60	8,34	8,12	7,54	7,72
	x_2	8,57	7,95	6,81	5,28	6,40	9,38	7,98	7,62	6,76	7,39
35	y	4,03	5,72	8,92	1,54	3,02	7,87	9,34	4,27	3,54	1,91
	x_1	4,27	6,06	9,27	2,12	3,54	8,28	9,98	4,84	3,91	2,13
	x_2	3,39	5,24	8,11	1,18	2,78	7,40	8,79	4,01	2,92	1,52
36	y	9,41	2,37	4,55	9,05	6,27	5,09	3,89	1,05	11,61	7,54
	x_1	6,34	1,51	3,39	6,31	4,21	3,40	2,60	0,71	7,85	5,05
	x_2	1,01	0,25	0,45	1,00	0,64	0,48	0,44	0,12	1,24	0,77
37	y	2,99	1,57	2,51	0,61	1,25	2,21	1,95	2,49	1,93	0,66
	x_1	2,80	5,59	7,21	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_2	10,12	7,59	9,99	13,45	7,84	9,45	8,25	11,5	8,24	14,00
38	y	1,49	4,27	8,10	5,69	2,31	3,95	9,31	7,94	3,35	11,01
	x_1	3,01	0,78	1,52	2,03	0,78	0,49	1,24	1,72	0,85	0,31
	x_2	5,74	1,71	5,12	5,34	2,21	1,41	3,07	4,14	2,71	0,88
39	y	11,31	3,24	7,72	9,49	3,95	2,15	5,64	8,10	4,21	1,54
	x_1	1,99	0,77	1,52	2,03	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,31
	x_2	5,72	1,69	5,07	5,37	2,12	1,39	2,99	4,13	2,41	0,87
40	y	2,31	9,74	8,04	5,27	7,84	1,24	3,94	6,65	3,03	6,01
	x_1	8,61	2,34	3,01	4,99	3,27	9,25	7,07	4,45	7,31	5,11
	x_2	3,39	11,12	10,72	6,79	8,29	2,34	4,59	7,29	5,04	6,09
41	y	3,33	9,10	1,27	5,34	6,51	7,84	2,25	5,51	4,01	5,03
	x_1	9,41	3,59	11,05	4,28	4,01	2,57	8,94	4,38	8,03	4,01
	x_2	5,81	3,56	4,28	7,94	5,32	8,94	1,57	5,05	4,21	4,03
42	y	4,76	5,69	7,48	11,55	1,04	2,41	0,54	8,41	3,54	9,11
	x_1	0,41	0,54	0,84	1,01	0,22	0,31	0,19	0,78	0,33	0,89
	x_2	8,03	8,07	8,33	8,78	6,57	4,35	3,91	8,07	5,34	8,40
43	y	9,24	4,33	7,68	1,52	3,15	5,77	8,34	7,12	5,58	2,85
	x_1	2,94	1,62	2,49	0,65	1,24	2,12	1,83	2,52	1,92	0,71
	x_2	14,01	8,32	11,41	8,34	9,39	7,94	13,01	9,83	7,62	10,21
44	y	4,84	5,72	7,51	11,34	1,12	2,41	0,53	8,41	3,51	9,15
	x_1	0,41	0,53	0,84	0,95	0,22	0,32	0,19	0,78	0,33	0,91
	x_2	8,01	8,10	8,33	8,41	6,55	4,35	3,90	8,09	5,33	8,41
45	y	7,35	1,54	5,29	9,11	3,23	8,57	6,15	4,77	0,62	3,84
	x_1	5,48	0,83	3,89	7,62	2,81	6,07	4,81	3,54	0,43	3,03
	x_2	12,12	2,51	7,81	13,99	4,33	12,54	10,54	8,25	0,95	4,51
46	y	2,87	5,61	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	8,68	9,12
	x_1	0,62	2,01	2,49	1,95	2,02	1,21	0,61	2,54	4,54	2,94
	x_2	10,27	7,57	9,91	13,45	7,84	9,45	8,25	11,51	10,09	13,15

Продовження таблиці 3.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
47	y	8,51	5,27	1,11	9,61	2,98	7,84	4,74	2,15	5,97	6,12
	x_1	1,31	1,87	3,01	1,27	2,45	1,45	1,99	2,67	2,01	2,02
	x_2	5,71	6,24	7,99	5,01	7,15	5,91	7,01	7,84	6,74	6,51
48	y	10,01	3,41	5,21	7,56	4,15	1,84	6,01	10,95	8,84	2,92
	x_1	3,65	1,05	1,84	2,61	1,24	0,66	1,91	3,61	3,84	1,12
	x_2	7,15	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,12	6,98	7,15	1,94
49	y	4,72	6,02	3,01	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	3,84	7,03
	x_1	11,99	4,01	6,62	1,56	8,11	7,84	4,57	2,03	9,41	5,84
	x_2	4,95	4,71	2,45	0,61	3,25	3,12	1,87	0,84	3,87	2,31
50	y	1,84	4,27	8,32	6,01	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,92	3,14	5,27	3,98	2,31	4,67	3,94	3,01	1,28	1,64
	x_2	3,54	9,02	14,07	10,03	5,17	13,45	12,14	7,48	1,05	2,58

Завдання для самоконтролю

1. Який вигляд має лінійна модель з декількома незалежними змінними?

2. Назвіть способи оцінки коефіцієнтів a_0, a_1, …, a_m множинної регресії.

3. Охарактеризуйте матричний спосіб оцінки параметрів лінійної множинної регресії.

4. Що таке транспонована матриця?

5. За допомогою чого оцінюють тісноту зв’язку множинної регресії?

6. За якою формулою розраховують вибірковий коефіцієнт множинної детермінації?

7. Опишіть, як використовується функція ЛИНЕЙН електронних таблиць Microsoft Ecel для обчислення параметрів лінійної множинної регресії.

8. Опишіть, як оцінити параметри лінійної множинної регресії за допомогою МНК.

9. Як здійснюється аналіз множинної регресійної моделі?

РОЗДІЛ 4. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

4.1. Визначення автокореляції залишків, її природа, причини виникнення і наслідки

Одним з основних припущень класичного лінійного регресійного аналізу є припущення про відсутність взаємозв'язку між значеннями стохастичної складової моделі **ε** у різних спостереженнях, тобто припущення, що

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j. \qquad (4.1)$$

Якщо це припущення порушується, а в економетричних дослідженнях часто зустрічаються такі випадки, коли дисперсія залишків є постійною, але спостерігається їх коваріація, тобто виникає явище, яке носить назву автокореляції залишків.

Автокореляція залишків - *це залежність між послідовними значеннями стохастичної складової моделі.*

Потрібно розрізняти поняття автокореляції і серійної кореляції.

Автокореляція - *це залежність між значеннями однієї вибірки з запізненням в один лаг. Або це взаємозв'язок послідовних елементів часового ряду даних.*

Наприклад, якщо між значеннями однієї вибірки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ та $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{p+1}$ є залежність, то маємо справу з автокореляцією, якщо така залежність є між значеннями двох різних вибірок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ та $w_2, w_3, \ldots, w_{p+1}$, то це свідчить про наявність серійної кореляції [37].

Найпростішим і найбільш поширеним випадком автокореляції залишків є випадок, коли залежність між послідовними значеннями стохастичної складової описується так званою авторегресійною схемою першого порядку, яка має наступний вигляд:

$$\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + u_i, \quad (-1 \leq \rho \leq 1). \qquad (4.2)$$

Якщо ρ додатне (ρ>0), то автокореляція залишків позитивна, якщо ρ від'ємне (ρ<0), то автокореляція залишків негативна. При ρ=0 автокореляція залишків відсутня.

Графічно випадки позитивної і негативної автокореляції залишків, а також її відсутності можна представити наступним чином (рис. 4.1).

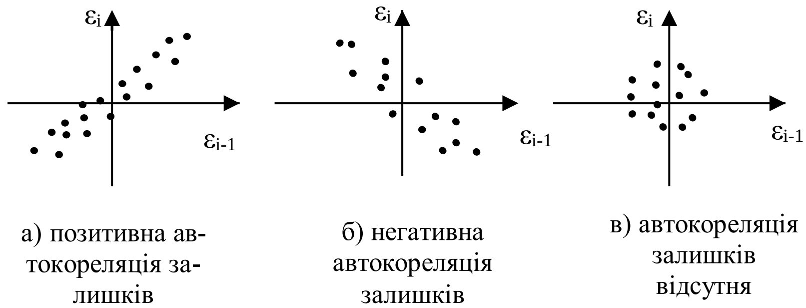


Рис. 4.1. Графічна ілюстрація автокореляції залишків

Важливо зрозуміти, що спричинює автокореляцію, які її практичні та теоретичні наслідки, чи є ефективні методи тестування наявності автокореляції, чи змінюються методи знаходження невідомих параметрів моделі в умовах автокореляції.

Автокореляція залишків виникає найчастіше тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної, то спостерігатиметься й кореляція послідовних значень залишків, так звані лагові затримки (запізнювання) в економічних процесах.

Автокореляція може виникати через інерційність і циклічність багатьох економічних процесів. Провокувати автокореляцію може також неправильно специфікована функціональна залежність у регресійних моделях.

При наявності автокореляції залишків в принципі можливо оцінити параметри узагальненої економетричної моделі звичайним однокроковим методом найменших квадратів. Але отримані при цьому оцінки параметрів моделі будуть неефективними. Негативними наслідками цього будуть:

1) завищені значення дисперсії параметрів моделі;

2) помилки при використанні t–тестів і F–тестів;

3) неефективність прогнозів, тобто отримання прогнозів з дуже великою дисперсією.

4.2. Тестування наявності автокореляції залишків

Оскільки автокореляція явище негативне, потрібно вміти його тестувати. На даний час найбільш розповсюджені тести, які використовуються для тестування автокореляції залишків, наступні статистичні тести:

1) тест Дарбіна-Уотсона;
2) тест фон Неймана;
3) тест на основі нециклічного коефіцієнта автокореляції;
4) тест на основі циклічного коефіцієнта автокореляції.

4.2.1. Тест Дарбіна-Уотсона

Найбільш відомим і поширеним тестом перевірки моделі на наявність кореляції між залишками є тест Дарбіна-Уотсона. На відміну від багатьох інших тестів, перевірка за тестом Дарбіна-Уотсона складається з декількох етапів і включає зони невизначеності. Цей тест використовується для авторегресійних схем 1-го порядку і має наступний алгоритм.

<u>Крок 1.</u> Виходячи з відсутності автокореляції залишків на основі 1МНК будується економетрична модель і обчислюються її залишки $e_i \left(i = \overline{1, n}\right)$.

<u>Крок 2.</u> Розраховується статистика (критерій) Дарбіна-Уотсона за наступною залежністю [21]:

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(U_i - U_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} U_i^{\,2}} \qquad (4.3)$$

<u>Крок 3.</u> За рівнем значимості α для числа факторів моделі m і числа спостережень n за статистичними таблицями DW-розподілу Дарбіна-Уотсона визначаються два значення d_L, і d_U.

<u>Крок 4.</u> Будуються зони автокореляціонного зв’язку, які схематично представляються у наступному вигляді:

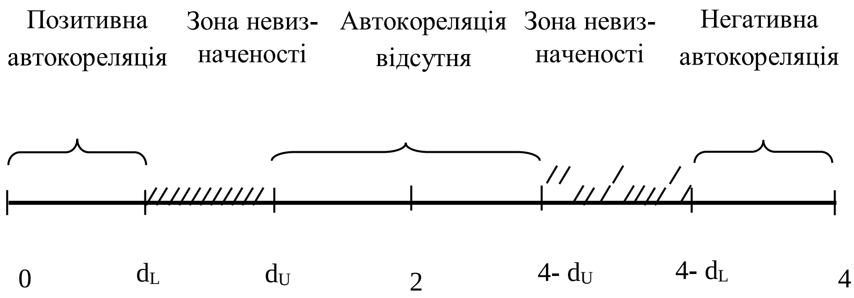


Рис. 4.2. Зони автокореляційного зв'язку

<u>Крок 5.</u> На основі розрахункового значення критерію DW робиться висновок про наявність або відсутність автокореляції залишків:

- якщо $0 < DW < d_L$ - наявна позитивна автокореляція залишків;
- якщо $4 - d_L < DW < 4$ - наявна негативна автокореляція залишків;
- якщо $d_L \le DW \le d_U$ та $4-d_U \le DW \le 4-d_L$ - зробити висновок про наявність чи відсутність автокореляції залишків неможливо;
- якщо $d_U < DW < 4 - d_U$ - автокореляція залишків відсутня.

4.2.2. Критерій фон Неймана

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}. \qquad (4.4)$$

Звідси $Q = DW \cdot \frac{n}{n-1}$, при $n \to \infty, Q = DW$. Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним при вибраному рівні довіри α і заданому числі спостережень. Якщо $Q_{факт.} < Q_{табл.}$, то існує додатна автокореляція.

4.2.3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції

$$r^{*}=\frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t-u_{t-1})-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n}u_t\right)\left(\sum_{t=2}^{n}u_{t-1}\right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=2}^{n}u_t^2-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n}u_y\right)^2\right]\left[\sum_{t=2}^{n}u_{t-1}^2-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n}u_{t-1}\right)^2\right]}}. \qquad (4.5)$$

r^* може приймати значення в інтервалі від -1 до +1. Від'ємні значення свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні — про додатну. Значення, що знаходяться в деякій критичній області біля нуля, свідчать про відсутність автокореляції [6].

4.2.4. Циклічний коефіцієнт автокореляції

$$r^{0}=\frac{\sum_{t=2}^{n}u_t\,u_{t-1}+u_n\,u_1-\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n}u_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}u_t^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n}u_t\right)^2}. \qquad (4.6)$$

Фактичне значення цього критерію порівнюється з табличним для вибраного рівня довіри і довжини ряду спостережень *n*. Якщо $r^0_{факт} \geq r^0_{табл}$, то існує автокореляція.

4.3. Оцінювання параметрів економетричних моделей у разі наявності автокореляції залишків

Для оцінювання параметрів економетричних моделей з автокорельованими залишками в основному використовуються наступні методи:

1) метод Ейткена (узагальнений МНК, УМНК);
2) метод перетворення вихідної інформації;
3) метод Кочрена–Оркатта;
4) метод Дарбіна.

Перші два методи доцільно застосовувати тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю першого ступеня:

$$u_t=\rho\,u_{t-1}+\varepsilon_t\,. \qquad (4.7)$$

Ітеративні методи Кочрена—Оркатта і Дарбіна можна застосовувати для оцінки параметрів економетричної моделі і тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю більш високого ступеня [22]:

$$u_t = p_1 u_{t-1} + p_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$u_t = p_1 u_{t-1} + p_2 u_{t-2} + p_3 u_{t-3} + \varepsilon_t \qquad (4.8)$$

4.4. Приклад тестування наявності автокореляції в економетричній моделі

4.4.1. Завдання роботи

Для деякого підприємства виконано економетричне дослідження залежності його прибутку (**y**) від витрат на маркетинг (**x**).

Мета роботи - набуття практичних навичок тестування наявності автокореляції в економетричній моделі.

Завдання роботи:

1.Перевірити модель залежності прибутку підприємства від витрат на маркетинг на наявність кореляції залишків тестом Дарбіна-Уотсона.

2.Перевірити модель залежності прибутку підприємства від витрат на маркетинг на наявність кореляції залишків за допомогою тесту фон Неймана.

4.4.2. Вихідні дані

Таблиця 4.1

№з/п	(Xi)	(Yi)
1	27,1	240
2	28,2	250
3	29,3	257
4	31,3	270
5	34,0	288
6	36,0	308
7	38,7	338
8	43,2	381
9	50,0	434
10	52,1	455

Ідентифікуємо змінні:

Y - прибуток підприємства (залежна змінна);

X - витрати на маркетинг (незалежна змінна).

4.4.3. Приклад розрахунку

1. Для даної економетричної моделі знаходяться невідомі коефіцієнти a і b за допомогою статистичної функції ЛИНЕЙН електронних таблиць Microsoft Excel.

8,686248	0,795676
0,1716	6,511347
0,996888	4,59032
2562,301	8
53990,33	168,5683

2. Обчислюються теоретичні значення Y_i* за формулою $Y_i^* = ax_i+b$.

3. Обчислюється різниця U_i між практичним значенням Y_i і теоретичним Y_i*, тобто $U_i=Y_i-Y_i^*$.

4. Визначаються різниці U_i-U_{i-1}, $(U_i-U_{i-1})^2$ і значення U_i^2.

5. Знаходяться суми $(U_i-U_{i-1})^2$ і U_i^2.

Всі розрахунки проводяться згідно таблиці 5.2.

6. Обчислюється критерій Дарбіна-Уотсона, порівнюється з табличним значенням і робиться висновок про наявність чи відсутність автокореляції.

Таблиця 5.2

Місяць	X_i	Y_i	Y_i^*	U_i	U_i-U_{i-1}	$(U_i-U_{i-1})^2$	Ui^2
1	27,1	240	236,19	3,81			14,49
2	28,2	250	245,75	4,25	0,45	0,20	18,08
3	29,3	257	255,30	1,70	-2,55	6,53	2,88
4	31,3	270	272,68	-2,68	-4,37	19,12	7,16
5	34,0	288	296,13	-8,13	-5,45	29,73	66,07
6	36,0	308	313,50	-5,50	2,63	6,90	30,26
7	38,7	338	336,95	1,05	6,55	42,86	1,10
8	43,2	381	376,04	4,96	3,91	15,30	24,59
9	50,0	434	435,11	-1,11	-6,07	36,80	1,23
10	52,1	455	453,35	1,65	2,76	7,61	2,73
Сума	369,9	3221	X	X	X	165,0632	168,5683

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(U_i - U_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} U_i^2} = \frac{165.06}{168.56} = 0.979$$

Значення критерію DW порівнюється з табличним при $\alpha = 0{,}05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому випадку:

d_u = 0,879 - нижня межа;

d_L=1,320 - верхня межа.

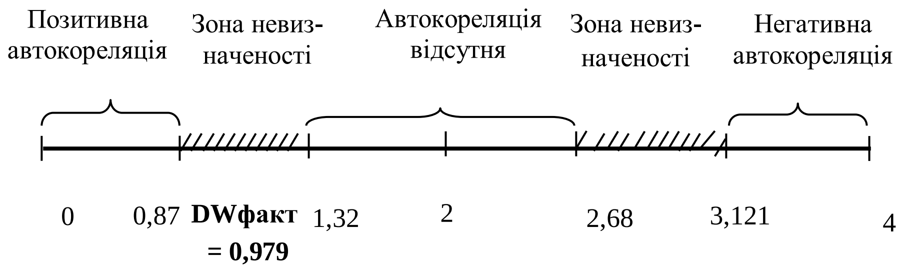


Рис. 4.2. Зони автокореляційного зв'язку

Оскільки d_u< DW факт < d_L , то з похибкою щонайбільше у 5% випадків можна стверджувати, що автокореляція залишків u_t невизначена, тобто потрібно змінити кількість спостережень та повторити дослідження.

2. Обчислюється критерій фон Неймана, порівнюється з табличними значеннями і робиться висновок про наявність чи відсутність автокореляції.

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot = \frac{165.06}{168.568} * \frac{10}{(10-1)} = 1.088.$$

Це значення порівнюється з табличним $Q_{табл..}$ = 1,18 при n=10 і $\alpha = 0{,}05$. Оскільки $Q_{факт.}$ < $Q_{табл..}$, то існує додатна автокореляція залишків.

Висновок: в моделі залежності прибутку від витрат на маркетинг при тестуванні наявності автокореляції з використанням тесту Дарбіна–Уотсона не вдалось зробити однозначного висновку, проте на основі критерію фон Неймана можна стверджувати, що в моделі наявна додатна автокореляція.

Завдання для самостійної роботи

<u>Завдання:</u> побудуйте модель залежності витрат обігу від вантажообігу, дайте оцінку параметрів методом Дарбіна-Уотсона та за критерієм фон Неймана. Вихідна інформація у вигляді двох часових рядів в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

Вихідні дані

Варіанти	1	X	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
		Y	15,38	10,40	6,73	5,28	4,86	4,21	3,58	3,69	3,08	3,61
	2	X	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
		Y	6,15	1,84	2,14	1,66	1,58	1,13	1,15	1,56	1,91	1,78
	3	X	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
		Y	15,66	7,63	4,23	3,89	1,88	2,00	2,10	1,12	1,73	1,55
	4	X	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	11,0
		Y	17,97	8,72	5,01	3,97	3,01	2,60	1,50	1,00	0,59	1,01
	5	X	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0
		Y	8,16	3,79	3,05	2,41	1,91	1,25	1,86	1,28	1,03	1,63
	6	X	0,65	1,20	1,75	2,30	2,85	3,40	3,95	4,50	5,05	5,60
		Y	13,78	7,20	4,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,14	0,59
	7	X	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3	5,9
		Y	13,95	4,46	3,69	2,47	3,15	2,86	2,78	1,90	2,23	2,54
	8	X	0,4	0,9	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9
		Y	9,80	5,35	4,21	3,10	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,39
	9	X	0,3	1,0	1,7	2,4	3,1	3,8	4,5	5,2	5,9	6,6
		Y	25,73	6,54	3,68	2,75	1,01	0,87	0,75	1,12	0,55	0,76
	10	X	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8
		Y	23,15	8,09	5,10	2,81	2,53	1,56	0,94	1,62	0,74	0,75
	11	X	0,65	1,50	2,35	3,20	4,05	4,90	5,75	6,60	7,45	8,30
		Y	9,89	3,66	2,52	2,42	2,47	1,02	0,29	0,68	1,56	0,77
	12	X	0,3	1,2	2,1	3	3,9	4,8	5,7	6,6	7,5	8,4
		Y	29,55	7,08	3,45	1,62	1,73	0,49	0,32	0,74	0,21	0,41
	13	X	12,3	12,7	13,1	13,5	13,9	14,3	14,7	15,1	15,5	15,9
		Y	29,42	11,40	6,28	4,52	4,14	4,29	3,85	3,58	3,45	3,33
	14	X	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25	6,50	6,75	7,00	7,25	7,50
		Y	18,52	9,98	6,28	4,47	4,01	3,92	3,75	3,55	4,00	3,28
	15	X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
		Y	25,55	19,5	10,89	9,56	6,24	5,24	4,87	4,56	4,03	3,58
	16	X	14,0	14,2	14,4	14,6	14,8	15	15,2	15,4	15,6	15,8
		Y	9,57	6,73	6,01	4,89	4,21	3,05	2,82	2,56	2,93	2,44
	17	X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
		Y	15,56	9,56	7,82	6,65	5,48	4,95	4,28	4,46	4,03	4,12
	18	X	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
		Y	785	466	365	311	297	276	256	266	243	229
	19	X	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,3	10,5	10,7	10,9
		Y	187	94	46	39	52	26	29	24	21	25
	20	X	16,0	16,3	16,6	16,9	17,2	17,5	17,8	18,1	18,4	18,7
		Y	18,34	12,20	9,45	9,21	8,92	8,02	8,78	7,85	7,49	7,55

Продовження таблиці 4.3

Варіанти	21	X	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5	5,1
		Y	192	88	41	46	42	39	33	21	23	21
	22	X	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0
		Y	12,65	6,99	7,54	5,29	4,87	4,26	4,45	3,98	4,02	3,85
	23	X	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5
		Y	211	78	41	43	38	29	25	18	19	15
	24	X	4,45	4,60	4,75	4,90	5,05	5,20	5,35	5,50	5,65	5,80
		Y	12,80	6,30	4,21	3,18	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,39
	25	X	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1
		Y	17,61	8,63	4,23	3,89	2,88	2,32	2,10	1,12	1,73	1,55
	26	X	9,0	9,4	9,8	10,2	10,6	11,0	11,4	11,8	12,2	12,6
		Y	15,78	9,12	4,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,14	1,59
	27	X	10,0	10,4	10,7	11,1	11,4	11,75	12,1	12,5	12,8	13,2
		Y	9,15	3,84	2,14	1,66	1,58	1,13	1,15	1,56	1,91	1,23
	28	X	2,25	2,40	2,55	2,70	2,85	3,00	3,15	3,30	3,45	3,60
		Y	167	83	46	39	52	26	29	24	21	20
	29	X	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0	21,5
		Y	15,81	7,35	4,21	3,48	3,32	2,25	2,02	2,38	2,29	2,19
	30	X	5,05	5,10	5,15	5,20	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45	5,50
		Y	17,23	9,46	6,13	5,28	4,31	4,21	3,58	3,69	3,08	3,34
	31	X	15,0	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5
		Y	205	72	41	36	35	29	25	22	19	15
	32	X	4,45	4,70	4,95	5,20	5,45	5,70	5,95	6,20	6,45	6,70
		Y	13,82	6,35	5,21	4,51	3,37	2,25	2,07	2,38	2,24	2,39
	33	X	3,06	3,16	3,26	3,36	3,46	3,56	3,66	3,76	3,86	3,96
		Y	15,61	7,65	4,29	3,89	2,88	2,32	2,10	1,62	1,73	1,51
	34	X	11,3	11,7	12,1	12,5	12,9	13,3	13,7	14,1	14,5	14,9
		Y	17,72	9,52	4,73	3,32	2,94	3,12	2,68	2,56	2,54	2,51
	35	X	9,23	9,58	9,93	10,30	10,60	10,98	11,33	11,70	12,03	12,40
		Y	11,16	4,87	2,31	1,76	1,58	1,33	1,15	1,56	1,91	1,43
	36	X	1,94	2,09	2,24	2,39	2,54	2,69	2,84	2,99	3,14	3,29
		Y	182	73	43	34	31	29	25	24	21	20
	37	X	12,1	12,7	13,2	13,8	14,3	14,85	15,4	16	16,5	17,1
		Y	15,51	8,32	5,23	3,38	2,94	3,02	2,68	2,56	2,43	2,59
	38	X	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	24,6	25,2	25,8	26,4
		Y	15,12	5,72	3,69	3,41	3,15	2,86	2,78	2,19	2,23	2,54
	39	X	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
		Y	12,12	7,31	4,21	3,10	3,32	2,25	2,07	2,38	2,20	2,21
	40	X	21,0	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3
		Y	15,33	7,54	3,68	2,75	2,31	1,87	1,75	1,12	1,55	1,72
	41	X	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
		Y	16,12	8,21	5,41	2,81	2,53	1,56	1,94	1,62	1,54	1,75
	42	X	21,00	21,90	22,70	23,60	24,40	25,25	26,10	27,00	27,80	28,70
		Y	14,81	7,66	4,52	3,42	2,47	1,02	1,29	1,68	1,56	1,77
	43	X	17,0	17,9	18,8	19,7	20,6	21,5	22,4	23,3	24,2	25,1
		Y	19,35	7,48	4,45	2,62	2,73	2,49	2,32	2,74	2,21	2,41
	44	X	15,0	15,4	15,8	16,2	16,6	17,0	17,4	17,8	18,2	18,6
		Y	12,42	8,42	4,28	4,52	4,14	4,29	3,85	3,58	3,49	3,45

Продовження таблиці 4.3

Варіанти	45	X	9,80	10,10	10,30	10,60	10,80	11,05	11,30	11,60	11,80	12,10
		Y	15,25	9,32	6,21	4,47	4,01	3,92	3,75	3,55	4,32	3,21
	46	X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
		Y	21,32	14,20	12,82	8,56	6,24	5,24	4,87	4,56	4,23	3,58
	47	X	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8
		Y	12,52	8,73	6,01	4,89	4,21	3,05	3,82	3,56	2,91	3,48
	48	X	3,21	3,31	3,41	3,51	3,61	3,71	3,81	3,91	4,01	4,11
		Y	16,38	12,40	8,73	5,28	4,86	4,21	3,58	3,69	3,48	3,64
	49	X	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
		Y	17,56	11,60	8,82	6,65	5,48	4,95	4,28	4,16	4,83	4,32
	50	X	2,34	2,39	2,44	2,49	2,54	2,59	2,64	2,69	2,74	2,79
		Y	681	466	387	311	297	276	256	266	223	207

Завдання для самоконтролю

1. Що таке автокореляція?
2. Коли вона виникає?
3. Які існують методики визначення наявності автокореляції?
4. Чи змінюються методи знаходження невідомих параметрів моделі в умовах автокореляції?
5. В чому полягає перевірка економетричної моделі за тестом Дарбіна-Уотсона?
6. Від чого залежить автокореляція?
7. Для економетричної моделі з якими змінними можна визначити наявність автокореляції?
8. Які її практичні та теоретичні наслідки автокореляції?

РОЗДІЛ 5. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

5.1. Визначення гетероскедастичності, її природа та наслідки

Одним з основних припущень, що стосується класичної багатофакторної моделі $Y = a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m+U,$ *(5.1)*
яке дозволяє коректно застосовувати для оцінювання її параметрів 1МНК, є припущення про сталість дисперсії стохастичної складової $\boldsymbol{\varepsilon_i}$, тобто припущення про гомоскедастичність її стохастичної складової.

Гомоскедастичність – *це явище, при якому дисперсія стохастичної складової економетричної моделі є сталою (незмінною) для кожного окремого спостереження або групи спостережень.*

Слід зазначити, що гомоскедастичність слід розглядати не тільки як явище, а і як властивість стохастичної складової моделі. Суть гомоскедастичності полягає в тому, що варіація кожної випадкової величини ε_i навколо її математичного сподівання не залежить від значення незалежних змінних **x**. Таким чином дисперсія випадкової величини ε_i залишається сталою незалежно від малих чи великих значень факторів [6], тобто:

$$\sigma_\varepsilon^2 \neq f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}\right), i = 1,2,\ldots,n\ . \qquad (5.2)$$

Графічно випадок гомоскедастичності для простої лінійної регресії можна представити наступним чином (рис. 5.1).

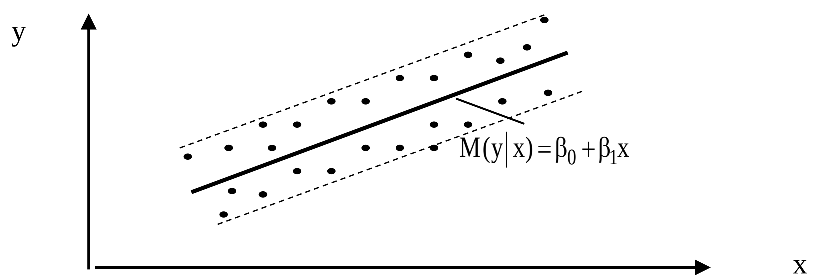


Рис. 5.1. Випадок гомоскедастичності

Як видно з рисунку, гомоскедастичність характеризується тим, що випадкові відхилення залежної змінної моделі **y** від прямої регресії, які характеризують дисперсію величини $\boldsymbol{\varepsilon_i}$, розташовані в межах деякого шару сталої ширини. Таким чином дисперсія стохастичної складової моделі **ε** не змінює свого значення при переході від малих значень пояснюючої змінної **x** до великих і залишається сталою в усьому діапазоні зміни значень пояснюючої змінної. Такий же ефект спостерігається і у випадку множинної регресії.

Часто у практичних дослідженнях явище гомоскедастичності порушується. Дослідження на наявність чи відсутність гомоскедастичності, як правило, не практикуються, але здебільшого можна висунути гіпотези про правдоподібність альтернативних припущень щодо пропорційності помилки до **X**. Так, наприклад, при побудові економетричної моделі, що характеризує залежність між заощадженнями і доходами населення на підставі теоретичної та практичної інформації, можна висунути гіпотезу, що дисперсія залишків за окремими групами населення змінюватиметься і буде пропорційною до середнього доходу цієї групи. Коли розглядати економетричну модель, що характеризує залежність між дивідендами і розміром прибутку або між витратами на харчування і доходом на одного члена сім'ї, витратами на харчування і загальними витратами, то також можна припустити, що дисперсія залишків для окремих груп спостережень змінюватиметься.

Гетероскедастичність – *це явище за якого дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень*

Суть гетероскедастичності полягає в тому, що значення дисперсії випадкової величини $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ залежить від значень незалежної змінної **x**, тобто у цьому випадку можна записати:

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}\right),\ i = 1,2,\ldots,n \qquad (5.3)$$

Графічно випадки гетероскедастичності для випадку простої лінійної регресії можна представити таким чином (рис. 5.2):

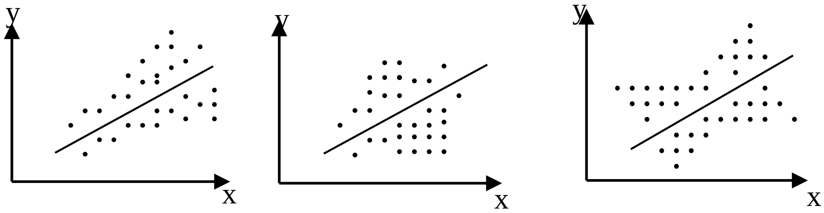


Рис. 5.2. Випадки гетероскедастичності

Якщо існує гетероскедастичність залишків, то це спричинює те, що оцінки параметрів моделі 1МНК будуть незміщеними, обгрунтованими, але неефективними [33]. При цьому формулу для стандартної помилки оцінки, строго кажучи, застосовувати не можна.

З явищем гетероскедастичності приходиться часто зустрічатися у багатьох економетричних дослідженнях. Наявність гетероскедастичності можна прогнозувати при відповідному досвіді і, виходячи з аналізу економічних показників, які включаються до економетричної моделі. Прикладом економетричні моделі, для якої скоріш за все буде існувати проблема гетероскедастичності, є наступна:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \qquad (5.4)$$

де: **y** – заощадження домогосподарства, **x** – його дохід.

У цьому випадку можна очікувати, що сім’ї з більшим доходом покажуть більшу варіацію у своїй діях з заощадженнями, ніж сім’ї з низьким доходом.

У випадку гетероскедастичності в принципі неможливо використовувати звичайні формули для знаходження оцінок $\hat{\sigma}^2_{b_j}, \left(j = \overline{0, m}\right)$ дисперсії параметрів моделі, оскільки дисперсія залишків $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ в умовах гетероскедастичності не стале число, а змінюється із зростанням значень незалежних змінних **x**. Внаслідок цього разом із зміною значення незалежних змінних **x** буде змінюватися і дисперсія оцінок параметрів $\hat{\sigma}^2_{b_j}$.

Наслідки порушення припущень про гомоскедастичність:

1) неможливо знайти середньоквадратичне відхилення параметрів регресії, а отже неможливо оцінити значущість параметрів;

2) неможливо побудувати довірчий інтервал для прогнозних значень;

3) отримані за 1МНК оцінки параметрів регресії неефективні (не мають найменшої дисперсії).

Зазначимо, що якщо, незважаючи на гетероскедастичність, використовувати звичайні процедури перевірки гіпотез, то висновки можуть бути неправильними.

Наявність гетероскедастичності спричиняє порушення властивостей оцінок параметрів моделі при розрахунку їх за 1МНК. Тому завжди виникає необхідність вивчати це явище і, якщо воно існує, для оцінки параметрів моделі використовувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена).

5.2. Тестування наявності гетероскедастичності

Для виявлення гетероскедастичності немає єдиних правил і методів, а є різноманітні тести. До основних з них належать наступні:

1) тест на основі графічного аналізу залишків;

2) тест на основі μ-критерію;

3) тест Глейсера;

4) тест на основі коефіцієнта рангової кореляції Спірмена;

5) параметричний тест Гольдфельда-Квандта;

6) непараметричний тест Гольдфельда-Квандта;

Можливість перевірки припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Розглянемо методи перевірки гетероскедастичності для різних вихідних даних.

5.2.1. Перевірка гетероскедастичності на основі критерію μ

Цей метод застосовується тоді, коли вихідна сукупність спостережень досить велика. Розглянемо відповідний алгоритм.

Крок 1. Вихідні дані залежної змінної *Y* розбиваються на *k* груп $\left(r=\overline{1,k}\right)$ відповідно до зміни рівня величини *Y*.

Крок 2. За кожною групою даних обчислюється сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{k}(y_{ir} - \bar{y}_r)^2.$$

Крок 3. Визначається сума квадратів відхилень в цілому по всій сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i=1}^{k}(y_{ir} - \bar{y}_r)^2.$$

Крок 4. Обчислюється параметр α:

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{n/2},$$

де n — загальна сукупність спостережень; n_r — кількість спостережень r-ї групи.

Крок 7. Обчислюється критерій:

$$\mu = -2\ln\alpha,$$

який наближено відповідатиме розподілу χ^2 при ступені свободи $k-1$, коли дисперсія всіх спостережень однорідна. Тобто, якщо значення μ не менше за табличне значення χ^2 при вибраному рівні довіри і ступені свободи $k-1$, то спостерігається гетероскедастичність.

5.2.2. Параметричний тест Гольдфельда-Квандта

Цей тест застосовується до великих вибірок. Тест припускає нормальний розподіл і незалежність випадкових величин u_i. Гольдфельд і Квандт запропонували розглянути випадок, коли $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних моделі:

$$Y = XA + u. \qquad (5.5)$$

Для виявлення наявності гетероскедастичності згадані вчені склали параметричний тест, в якому потрібно виконати такі кроки.

Крок 1. Упорядкувати спостереження відповідно до величини елементів вектора X_j.

Крок 2. Відкинути c спостережень, які містяться в центрі вектора. Згідно з експериментальними розрахунками автори знайшли оптимальні співвідношення між параметрами *c* і *n*, де *n* — кількість елементів вектора x_j :

$$\frac{c}{n}=\frac{4}{15}. \qquad (5.6)$$

Крок 3. Побудувати дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома утвореними сукупностями спостережень $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних *m*.

Крок 4. Знайти суму квадратів залишків за першою і другою моделями S_1 і S_2 :

$S_1 = u_1'u_1$, де u_1 — залишки за моделлю 1; *(5.7)*

$S_2 = u_2'u_2$, де u_2 — залишки за моделлю 2. *(5.8)*

Крок 7. Обчислити критерій

$$R^* = \frac{S_2}{S_1}, \qquad (5.9)$$

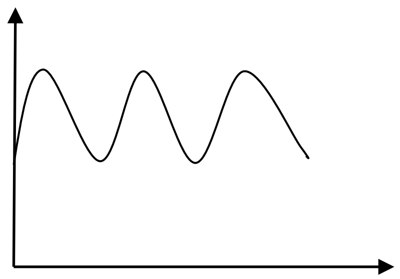
який в разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме *F*-розподілу з $(n-c-2m)/2$, $(n-c-2m)/2$ ступенями свободи. Це означає, що обчислене значення *R** порівнюється з табличним значенням *F*-критерію для ступенів свободи $(n-c-2m)/2$, $(n-c-2m)/2$ і вибраного рівня довіри. Якщо $R^* \le F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня. Чим більше значення R^*, тим більша гетероскедастичність залишків.

5.2.3. Непараметричний тест Гольдфельда – Квандта

Гольдфельд і Квандт для оцінювання наявності гетероскедастичності запропонували також непараметричний тест, який базується на встановлені кількості піків значень залишків після впорядкування (ранжування) спостережень за $\mathbf{x_{ij}}$. Якщо для всіх значень змінної $\mathbf{x_{ij}}$ залишки розподіляються наближено однаково, то їх дисперсія однорідна і гетероскедастичність відсутня [21]. Якщо вона змінюється, то є гетероскедастичність.

Закономірність зміни залишків, коли дисперсія однорідна, означає гомоскедастичність, що ілюструє рис. 5.3, а на рис. 5.4 зображене явище гетероскедастичності.

Цей тест, звичайно, не такий надійний, як параметричний, але він досить простий.



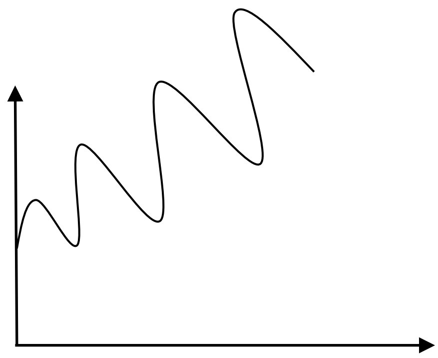


Рис.5.3. Явище гомоскедастичності *5.4. Явище гертероскедастичності*

Зазначимо, що цей тест не цілком надійний для перевірки на гетероскедастичність. Однак він дуже простий і часто використовується для першої оцінки наявності гетероскедастичності множини спостережень.

5.2.4. Тест Глейсера

Ще один тест для перевірки гетероскедастичності склав Глейсер. Він запропонував розглядати регресію абсолютних значень залишків $|u_i|$, що відповідають регресії найменших квадратів, як певну функцію від x_j, де x_j та незалежна змінна, яка відповідає зміні дисперсії σ_u^2. Для цього використовуються такі види функцій:

1) $|u| = a_0 + a_1 x_j$; *(5.10)*

2) $|u| = a_0 + a_1 x_j^{-1}$; *(5.11)*

3) $|u| = a_0 + a_1 x_j^{1/2}$ і т. ін. *(5.12)*

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на підставі статистичної значущості коефіцієнтів a_0 і a_1. Переваги цього тесту визначаються можливістю розрізняти випадок чистої і змішаної гетероскедастичності. Чистій гетероскедастичності відповідають значення параметрів $a_0 = 0,\ a_1 \neq 0$, а змішаній — $a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0$. Залежно від цього треба користуватись різними матрицями *S*.

Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця S у співвідношенні $M(uu')=\sigma_u^2 S$ має бути додатною, визначеною й діагональною.

Якщо при економетричному моделюванні для певних вихідних даних буде виявлено явище гетероскедастичності, то оцінку параметрів моделі треба виконувати на основі узагальненого методу найменших квадратів [9]. Оператор оцінювання цим методом запишеться:

$$A=(X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y, \tag{5.13}$$

де

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots\lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Щоб пояснити, чому саме такий вигляд має ця матриця, потрібно ще раз наголосити: за наявності гетероскедастичності для певних вихідних даних одна (або кілька) пояснювальних змінних можуть різко змінюватись від одного спостереження до іншого, тоді як залежна змінна має такі самі коливання, як і для попередніх спостережень.

Це означає, що дисперсія залишків, яка змінюватиметься від одного спостереження до іншого (чи для групи спостережень), може бути пропорційною до величини пояснювальної змінної ***X*** (або до її квадрата), яка зумовлює гетероскедастичність, або пропорційною до квадрата залишків.

Звідси в матриці *S* значення λ_i можна обчислити, користуючись гіпотезами:

а) $M(uu')=\sigma_u^2 x_{ij}$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснювальної змінної x_{ij};

б) $M(uu')=\sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто зміна дисперсії пропорційна до зміни квадрата пояснювальної змінної (x_{ij}^2);

в) $M(uu') = \sigma_u^2 \{|u|\}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрата залишків за модулем.

Для першої гіпотези: $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}$.

Для другої гіпотези: $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2}$.

Для третьої гіпотези: $\lambda_i = \{|u_i|\}^2$, або $\lambda_i = \left(a_0 - a_1 x_{ij}\right)^2$, або $\lambda_i = \left(a_0 + a_1 x_o^{-1}\right)^2$.

5.2.5. Тестування гетероскедастичності на основі графічного аналізу залишків

Цей тест найпростіший з усіх і достатньо наочний, оскільки дає можливість візуально визначити наявність гетероскедастичності. Тест умовно можна розбити на два етапи.

На першому етапі на основі статистичної вибірки і припущень про відсутність гетероскедастичності будується класична економетрична модель і обчислюються залишки $e_i, (i = \overline{1,n})$.

На другому етапі виконуються дослідження квадратів залишків $e_i^2, (i = \overline{1,n})$ і робиться висновок про наявність або відсутність гетероскедастичності. Для цього будуються графіки різних типів. Для парної лінійної моделі будується графік $e^2 = f(x)$. Для багатофакторної лінійної регресії найбільш розповсюдженими є графіки залежності $e^2 = f(y)$ або графіки $e^2 = f(x_j)$, де x_j – пояснююча змінна, яка гіпотетично може впливати на дисперсію залишків. Якщо неможливо однозначно визначитися з такою змінною, графіки $e^2 = f(x_j)$ будуються для всіх пояснюючих змінних моделі. Метою побудови таких графіків є встановлення наявності або відсутності систематичності у зміні квадратів залишків $\mathbf{e^2}$ при зміні значення залежної змінної моделі **y**, або пояснюючої змінної $\mathbf{x_j}$. Звичайно e_i^2 - це тільки оцінки невідомих ε_i^2, але вони можуть успішно використовуватися, особливо при великих вибірках.

5.3. Оцінювання параметрів моделі у разі гетероскедастичності

Економетрична модель, якій притаманна гетероскедастичність, є узагальненою моделлю, і для оцінювання її параметрів використовується так званий узагальнений метод найменших квадратів (УМНК), або метод Ейткена. Свою назву метод отримав внаслідок його застосування для оцінювання параметрів моделі, для якої дисперсійно-коваріаційна матриця стохастичної складової моделі приймається у найбільш загальному вигляді, тобто допускається одночасно і гетероскедастичність і автокореляція залишків.

В основу методу Ейткена покладено ідею трансформації економетричної моделі, якій притаманна гетероскедастичність у класичну гомоскедастичну з подальшим застосуванням до такої трансформованої моделі процедури 1МНК для оцінювання параметрів узагальненої моделі, якій притаманна гетероскедастичність [10]. Трансформація вихідної моделі у гомоскедастичну відбувається шляхом корегування вихідної статистичної інформації стосовно змінних моделі. Спосіб і форма корегування вихідних даних визначаються, при цьому формою залежності дисперсії стохастичної складової $\boldsymbol{\varepsilon}$ від тієї чи іншої пояснюючої змінної моделі.

Розглянемо більш докладно цей метод. Нехай є економетрична модель

$$\mathrm{Y} = \mathrm{XB} + \mathrm{e}, \qquad (5.15)$$

для якої $\mathrm{M}(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \cdot \mathrm{S}$, де σ^2 - як і раніше, деяка невідома константа, S – відома квадратна додатньо визначена матриця розмірністю n×n, яка у випадку гетероскедастичності, як показано раніше, є діагональною матрицею і має наступний вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}, \quad \dim P = n \times n, \qquad (5.16)$$

де $\lambda_i,\ i=1,2,\dots,n$ - власні значення цієї матриці.

Оскільки матриця S симетрична і додатньо визначена, то, використовуючи теорію матриць, її можна подати у наступному вигляді:

$$S = P' \cdot P, \tag{5.17}$$

де матриця P невироджена і має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

а обернена до неї відповідно:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Базуючись на особливостях матриць S і P, записуються деякі співвідношення між ними і оберненими до них:

$$P^{-1} \cdot S \cdot P^{-1'} = E \tag{5.20}$$

і

$$P^{-1'} P^{-1} = S^{-1}. \tag{5.21}$$

Помноживши рівняння на матрицю P^{-1}, дістанемо:

$$P^{-1}Y = P^{-1}XB + P^{-1}e \tag{5.22}$$

Ввівши наступні позначення: $Y^* = P^{-1}Y;\quad X^* = P^{-1}X;\quad e^* = P^{-1}e$, модель матиме вигляд:

$$Y^* = X^*B + e^*. \tag{5.23}$$

Можна показати, що для цієї перетвореної моделі гетероскедастичність відсутня, оскільки

$$M(\varepsilon^* \varepsilon^{*'}) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot E, \tag{5.24}$$

що дає змогу застосувати до трансформаційної моделі $Y^* = X^* B + e^*$ 1МНК, з якого отримаємо:

$$B = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y = (X' P^{-1'} P^{-1} X)^{-1} (X' P^{-1'} P^{-1} Y) \qquad (5.25)$$

або остаточно

$$B = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y. \qquad (5.26)$$

Таким чином, якщо матриця **S** відома, за формулою $B = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y$ можна завжди обчислити оцінки параметрів моделі у разі гетероскедастичності. Оскільки дійсні значення випадкової величини **ε**, як правило невідомі, значення λ_i у матриці **S** можна обчислити, користуючись різними гіпотезами відносно зв'язку дисперсії $\sigma^2_{\varepsilon,i}$ і деякої пояснюючої змінної x_j. В основному при цьому використовуються наступні 2 гіпотези.

Гіпотеза 1. Дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснюючої змінної x_j - $\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x_{ji}, (i = \overline{1,n})$. Тоді величини λ_i визначається як:

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}. \qquad .(5.27)$$

Гіпотеза 2. Дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрату пояснюючої змінної x_j - $\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x^2_{ji}, (i = \overline{1,n})$. Величини λ_i визначається для цієї гіпотези як:

$$\lambda_i = \frac{1}{x^2_{ji}}. \qquad (5.28)$$

5.4. Основні висновки щодо наявності гетероскедастичності в регресійній моделі

1. Якщо виявлено гетероскедастичність, а дисперсії невідомі, необхідно трансформувати початкову модель з метою усунення гетероскедастичності.

2. Якщо σ_{ui}^2 відомі (що взагалі рідкість), то невідомі параметри регресійної моделі розраховуються за 1МНК.

3. Якщо σ_{ui}^2 невідомі, але відомий вигляд залежності між σ_{ui}^2 та однією з незалежних змінних $\mathbf{x_i}$, то параметри регресійної моделі розраховуються за УМНК.

4. Важливе припущення про нормальний закон розподілу випадкової змінної **u**. Якщо це припущення порушується (або, як часто буває на практиці, ігнорується), то оцінки параметрів залишаються найкращими, однак ми не можемо визначити їх статистичну значущість (надійність) за допомогою класичних тестів значущості, оскільки ці тести базуються на нормальному законі розподілу.

5.5. Приклад тестування гетероскедастичності і оцінювання параметрів економетричної моделі

5.5.1. Завдання роботи

Для деякого регіону виконується економетричне дослідження залежності заощаджень **(y)** від доходу на душу населення **(x)**. Вважається, що економетрична модель лінійна.

Мета роботи - набуття практичних навичок тестування наявності гетероскедастичності і оцінювання параметрів економетричної моделі узагальненим методом найменших квадратів.

Завдання роботи:

1. Виходячи з ймовірності існування гетероскедастичності, перевірити її наявність за критерієм μ та параметричним тестом Гольдфельда–Квандта.

2. При наявності гетероскедастичності знайти оцінки параметрів моделі узагальненим методом найменших квадратів (методом Ейткена).

5.5.2. Вихідні дані

Таблиця 5.1.

№ з/п	Xi	Yi
1	15	2,30
2	15	2,20
3	16	2,08
4	17	2,20
5	17	2,10
6	18	2,32
7	19	2,45
8	20	2,50
9	20	2,20
10	22	2,50
11	64	3,10
12	68	2,50
13	72	2,82
14	80	3,04
15	85	2,70
16	90	3,94
17	95	3,10
18	100	3,99

Ідентифікуємо змінні: Y - заощадження (залежна), X - дохід (незалежна) змінні.

5.5.3. Приклад розрахунку

Завдання 1: Спосіб 1: *Перевіряємо наявність гетероскедастичності в моделі на основі критерію* μ.

А) Розбиваємо вихідні дані на рівну кількість груп таким чином, щоб в кожній була однакова кількість спостережень. В даному випадку ділимо на три групи (к=3), тобто по 6 спостережень в кожній (таблиця 5.2).

Таблиця 5.2

Рік	Дохід (Xi)	Заощад-ження (Yi)	Рік	Дохід (Xi)	Заощад-ження (Yi)	Рік	Дохід (Xi)	Заощад-ження (Yi)
1	15	2,30	7	19	2,45	13	72	2,82
2	15	2,20	8	20	2,50	14	80	3,04
3	16	2,08	9	20	2,20	15	85	2,70
4	17	2,20	10	22	2,50	16	90	3,94
5	17	2,10	11	64	3,10	17	95	3,10
6	18	2,32	12	68	2,50	18	100	3,99
Сума 1	98	13,2	Сума 2	213	15,25	Сума 3	522	19,59

Б) Для наступних розрахунків будується таблиця 5.3, відповідно визначивши Xs і Ys:

X_{s1}=	16,3	Y_{s1}=	2,2
X_{s2}=	35,5	Y_{s2}=	2,542
X_{s3}=	87	Y_{s3}=	3,265

Для кожної групи визначаємо суму квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{5} (y_{ri} - \bar{y}_r)^2 .$$

Відповідно

S_{r1}= 0,049

S_{r2}= 0,442

S_{r3}= 1,576

В) Визначаємо суму квадратів відхилень в цілому:

$$\sum_{r=1}^{3} S_r = S_1 + S_2 + S_3;$$

Sr= 2,0672

Таблиця 5.3

№ з/п	Xi	Yi	Xi-Xs	Yi-Ys	$(Xi-Xs)^2$	$(Yi-Ys)^2$	(Xi-Xs)(Yi-Ys)
1	15	2,30	-1,333	0,100	1,778	0,010	-0,133
2	15	2,20	-1,333	0,000	1,778	0,000	0,000
3	16	2,08	-0,333	-0,120	0,111	0,014	0,040
4	17	2,20	0,667	0,000	0,444	0,000	0,000
5	17	2,10	0,667	-0,100	0,444	0,010	-0,067
6	18	2,32	1,667	0,120	2,778	0,014	0,200
Сума 1	98	13,2	0,000	0,000	7,333	0,049	0,040
7	19	2,45	-16,500	-0,092	272,250	0,008	1,512
8	20	2,50	-15,500	-0,042	240,250	0,002	0,646
9	20	2,20	-15,500	-0,342	240,250	0,117	5,296
10	22	2,50	-13,500	-0,042	182,250	0,002	0,562
11	64	3,10	28,500	0,558	812,250	0,312	15,913
12	68	2,50	32,500	-0,042	1056,250	0,002	-1,354
Сума 2	213	15,25	0,000	0,000	2803,500	0,442	22,575
13	72	2,82	-15,000	-0,445	225,000	0,198	6,675
14	80	3,04	-7,000	-0,225	49,000	0,051	1,575
15	85	2,70	-2,000	-0,565	4,000	0,319	1,130
16	90	3,94	3,000	0,675	9,000	0,456	2,025
17	95	3,10	8,000	-0,165	64,000	0,027	-1,320
18	100	3,99	13,000	0,725	169,000	0,526	9,425
Сума 3	522	19,59	0,000	0,000	520,000	1,576	19,510

Г) Обчислюється параметр $$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{S_i}{n_i} \right)^{\frac{n_i}{2}}}{\sum_{r=1}^{3} \left(\frac{S_r}{n} \right)^{\frac{n}{2}}};$$

або

I) $$p_1 = \left(\frac{S_1}{n_1} \right)^{\frac{n_1}{2}}; \; p_2 = \left(\frac{S_2}{n_2} \right)^{\frac{n_2}{2}}; \; p_3 = \left(\frac{S_3}{n_3} \right)^{\frac{n_3}{2}}.$$

тобто

$p_1 = (0{,}049/3)^3 = 4{,}36 \cdot 10^{-6}$

$p_2 = (0{,}442/3)^3 = 3{,}20 \cdot 10^{-3}$

$P_3 = (1{,}576/3)^3 = 1{,}45 \cdot 10^{-1}$

II) $$t_1 = \left(\frac{S_1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}; \; t_2 = \left(\frac{S_2}{n} \right)^{\frac{n}{2}}; \; t_3 = \left(\frac{S_3}{n} \right)^{\frac{n}{2}};$$

тобто

$t_1 =$ (0,049/18)^18/2= $8{,}21 \cdot 10^{-24}$

$t_2 =$ (0,442/18)^18/2= $3{,}25 \cdot 10^{-15}$

$t_3 =$ (1,576/18)^18/2= $3{,}03 \cdot 10^{-10}$

III) $\alpha = L = (p_1 * p_2 * p_3)/(t_1 + t_2 + t_3)$.

тобто $\alpha = (4{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}20 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}45 \cdot 10^{-1})/(8{,}21 \cdot 10^{-24} + 3{,}25 \cdot 10^{-15} + 3{,}03 \cdot 10^{-10}) = 6{,}68$

Д) Обчислюється критерій $\mu = -2\ln\alpha = -2\ln(6{,}68) = 1{,}9$.

Ж) Критерій μ порівнюється із табличним значенням $X^2 = 9{,}21$.

Якщо $|\mu| > X^2$, то в економетричній моделі є місце гетероскедастичність. Оскільки $|1{,}9| < 9{,}21$, то в розглянутому випадку гетероскедастичність відсутня.

<u>Спосіб 2:</u> *Перевірка наявності гетероскедастичності в моделі на основі параметричного тесту Гольдфельда-Квандта.*

А) Значення незалежної змінної упорядковуються від меншого до більшого (таблиця 5.4) і відкидається c значень, які містяться в середині впорядкованого ряду ($c \approx 4$.)

Б) За цими двома моделями визначаються залишки:

$u_{\mathrm{I}} = Y_{\mathrm{I}} - \hat{Y}_{\mathrm{I}}$; $u_{\mathrm{II}} = Y_{\mathrm{II}} - \hat{Y}_{\mathrm{II}}$.

Для цього заповнюється таблиця 5.5. При цьому для розрахунку Yi* використовується формула Yi* = a*Xi+b, параметри рівняння a і b знаходяться за допомогою функції ЛИНЕЙН електронних таблиць Microsoft Excel.

Таблиця 5.4

№ з/п	Xi	Yi
1	15	2,30
2	15	2,20
3	16	2,08
4	17	2,20
5	17	2,10
6	18	2,32
7	19	2,45
8	20	2,50
9	20	2,20
10	22	2,50
11	64	3,10
12	68	2,50
13	72	2,82
14	80	3,04
15	85	2,70
16	90	3,94
17	95	3,10
18	100	3,99

Так, для першої моделі параметри відповідно рівні,

0,045531915	1,474680851
0,03331741	0,558785424
0,271946129	0,122091699
1,86762367	5
0,027839514	0,074531915

а рівняння має вигляд: Yi* = 0,0455*Xi+1,4746.

Відповідно для другої моделі параметри рівні,

0,038542887	-0,09290045
0,014281112	1,213690454
0,592963411	0,411293181
7,28390796	5
1,232161026	0,845810403

а рівняння має вигляд: Yi* = 0,0385*Xi - 0,0929.

Таблиця 5.5

№ з/п	Xi	Yi	Yi*	Ui	Ui^2
1	15	2,30	2,15766	0,14234	0,02026
2	15	2,20	2,15766	0,04234	0,00179
3	16	2,08	2,20319	-0,12319	0,01518
4	17	2,20	2,24872	-0,04872	0,00237
5	17	2,10	2,24872	-0,14872	0,02212
6	18	2,32	2,29426	0,02574	0,00066
7	19	2,45	2,33979	0,11021	0,01215
8	20	2,50			
9	20	2,20			
10	22	2,50			
11	64	3,10			
12	68	2,50	2,52802	-0,02802	0,00078
13	72	2,82	2,68219	0,13781	0,01899
14	80	3,04	2,99053	0,04947	0,00245
15	85	2,70	3,18324	-0,48324	0,23353
16	90	3,94	3,37596	0,56404	0,31814
17	95	3,10	3,56867	-0,46867	0,21966
18	100	3,99	3,76139	0,22861	0,05226

В) Обчислюємо залишкові дисперсії та знаходимо співвідношення їх сум:

	U^2
	0,02026
	0,00179
	0,01518
	0,00237
	0,02212
	0,00066
	0,01215
Сума S_1	**0,07453**

	U^2
	0,00078
	0,01899
	0,00245
	0,23353
	0,31814
	0,21966
	0,05226
Сума S_2	**0,845810403**

Тоді $$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{0,84581}{0,07453} = 11,348.$$

Г) Порівнюємо критерій R^* з критичним значенням F-критерію при $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$ ступенях свободи і рівні довіри $P = 0,99$ $F_{\alpha = 0,01} = 11$. Оскільки $R^* > F_{кр}$, то вихідні дані мають гетероскедастичність.

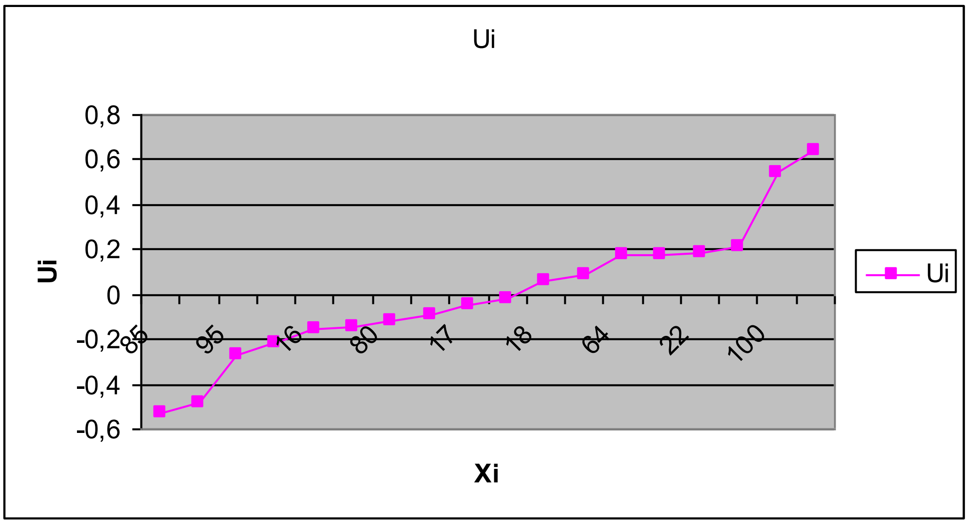
<u>Спосіб 3</u>: *Перевірка наявності гетероскедастичності в моделі на основі непараметричного тесту Гольдфельда-Квандта*

Будуємо графік залежності U_i=f (x_i), для чого продовжується таблиця 5.3 (таблиця 5.6).

Таблиця 5.6

№ з/п	Xi	Yi	Yi*=a*Xi+b	Ui=Yi-Yi*	Ui²
1	15	2,30	2,216	0,084	0,007
2	15	2,20	2,216	-0,016	0,000
3	16	2,08	2,231	-0,151	0,023
4	17	2,20	2,245	-0,045	0,002
5	17	2,10	2,245	-0,145	0,021
6	18	2,32	2,260	0,060	0,004
Сума 1	**98**	**13,2**			**0,057**
7	19	2,45	2,274	0,176	0,031
8	20	2,50	2,288	0,212	0,045
9	20	2,20	2,288	-0,088	0,008
10	22	2,50	2,317	0,183	0,033
11	64	3,10	2,925	0,175	0,030
12	68	2,50	2,983	-0,483	0,234
Сума 2	**213**	**15,25**			**0,381**
13	72	2,82	3,041	-0,221	0,049
14	80	3,04	3,157	-0,117	0,014
15	85	2,70	3,229	-0,529	0,280
16	90	3,94	3,302	0,638	0,407
17	95	3,10	3,374	-0,274	0,075
18	100	3,99	3,447	0,543	0,295
Сума 3	**522**	**19,59**			**1,121**

Для побудови графіку відсортовують стовпці Xi і Ui в порядку зростання, по яких і будується графік, з якого видно, що дисперсія залишків змінна для різних груп спостережень, а отже в моделі є гетероскедастичність.



Xi	Ui
85	-0,529
68	-0,483
95	-0,274
72	-0,221
16	-0,151
17	-0,145
80	-0,117
20	-0,088
17	-0,045
15	-0,016
18	0,06
15	0,084
64	0,175
19	0,176
22	0,183
20	0,212
100	0,543
90	0,638

Завдання 2: *Оцінка параметрів моделі узагальненим методом найменших квадратів (методом Ейткена)*

А) Згідно з даними таблиці 5.3 будується матриця *S*, яка використовується при визначенні дисперсій залишків $M(uu') = \sigma_u^2 S$, якщо побудова економетричної моделі пов'язана з явищем гетероскедастичності.

Згідно першої гіпотези $\lambda_i = \dfrac{1}{x_{ij}}$., а матриці X і λ_i мають вигляд:

X	
1	15
1	15
1	16
1	17
1	17
1	18
1	19
1	20
1	20
1	22
1	64
1	68
1	72
1	80
1	85
1	90
1	95
1	100

λ_i=1/Xij
0,067
0,067
0,063
0,059
0,059
0,056
0,053
0,050
0,050
0,045
0,016
0,015
0,014
0,013
0,012
0,011
0,011
0,010

Тоді матриця S^{-1} запишеться так:

0,067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	**0,067**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**0,063**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	**0,06**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**0,06**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**0,056**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	**0,053**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	**0,05**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	**0,05**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,045**	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,02**	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,02**	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,014**	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,013**	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,012**	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,01**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,011**	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,010**

Б) Окремо визначаємо матрицю X", яка є траспонованою до матриці X:

X"=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	15	15	16	17	17	18	19	20	20	22	64	68	72	80	85	90	95	100

В) Обчислюємо добуток матриць X" * S^{-1}:

0,06667	0,06667	0,06250	0,05882	0,05882	0,05556	0,05263	0,05000	0,05000	0,04545	0,01563	0,01471	0,01389	0,01250	0,01176	0,01111	0,01053	0,01000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Г) Отримана матриця перемножується на матрицю Y:

X"*S^{-1}*Y= 1,599856733
48,04

Д) Обчислюється добуток матриць (X"* S^{-1})*X:

0,6672	18,000
18,0000	833,00

Є) Обертається матриця (X"*S^{-1})*X:

$(X''* S^{-1})*X^{-1}$ =

3,593394557	-0,077648382
-0,07764838	0,002878356

Y
2,30
2,20
2,08
2,20
2,10
2,32
2,45
2,50
2,20
2,50
3,10
2,50
2,82
3,04
2,70
3,94
3,10
3,99

Ж) для оцінки параметрів моделі матриця $(X''* S^{-1})*X^{-1}$ множиться на матрицю $X''*S^{-1}* Y$:

$(X''* S^{-1})*X^{-1}$			$X''*S^{-1}* Y$	A
3,593394557	-0,077648382	*	1,599856733	2,018688214
-0,07764838	0,002878356		48,04	0,014049955

З) Отже економетрична модель заощаджень домогосподарств має вигляд: $Y^* = 2{,}01+0{,}014*Xi$

Висновок. Використовуючи критерій μ, параметричний та непараметричний тести Гольдфельда-Квандта, в моделі визначене явище гетероскедастичності, оцінки параметрів моделі 1МНК незміщені, обґрунтовані, але неефективні, тому для визначення параметрів моделі використано метод Ейткена, згідно якого економетрична модель має вигляд $\hat{Y}$ = 2,01 + 0,014*X.

При цьому коефіцієнт детермінації R^2 = 0,722, що означає, що на 72,2% варіація заощаджень залежить від доходів населення.

Коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2}$ = 0,85 свідчить про досить тісний зв’язок між заощадженнями та доходами.

Параметр моделі $\hat{a}_1$ свідчить про те, що збільшення доходу на одиницю сприятиме граничному зростанню заощаджень на 0,014 одиниць.

Так як залишкова дисперсія σ_u^2 = 0,097, можна стверджувати, що в даному разі оцінки ефективні.

Завдання для самостійної роботи

<u>Завдання:</u> побудуйте модель залежності прибутку підприємства від торгової площі, протестуйте модель на наявність гетероскедастичності. Вихідна інформація подана в таблиці 5.7.

Таблиця 5.7

Вихідні дані

Варіант	Показник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	X	8,8	9,4	10	10,6	11	11,9	12,7	13,5	14,3	15,5	16,7	17,7	18,6	19,7	21,1	22,8	23,9	25,2
	Y	0,36	0,2	0,08	0,2	0,1	0,12	0,41	0,5	0,43	0,59	0,9	0,95	0,82	1,04	1,53	1,94	1,75	1,99
2	X	17,6	18,8	20	21,2	22	23,8	25,4	27	28,6	31	33,4	35,4	37,2	39,4	42,2	45,6	47,8	50,4
	Y	3,6	2	0,8	2	1	1,2	4,1	5	4,3	5,9	9	9,5	8,2	10,4	15,3	19,4	17,5	19,9
3	X	26,4	28,2	30	31,8	33	35,7	38,1	40,5	42,9	46,5	50,1	53,1	55,8	59,1	63,3	68,4	71,7	75,6
	Y	7,2	4	1,6	4	2	2,4	8,2	10	8,6	11,8	18	19	16,4	20,8	30,6	38,8	35	39,8
4	X	35,2	37,6	40	42,4	44	47,6	50,8	54	57,2	62	66,8	70,8	74,4	78,8	84,4	91,2	95,6	100,8
	Y	10,8	6	2,4	6	3	3,6	12,3	15	12,9	17,7	27	28,5	24,6	31,2	45,9	58,2	52,5	59,7
5	X	44	47	50	53	55	59,5	63,5	67,5	71,5	77,5	83,5	88,5	93	98,5	105,5	114	119,5	126
	Y	14,4	8	3,2	8	4	4,8	16,4	20	17,2	23,6	36	38	32,8	41,6	61,2	77,6	70	79,6
6	X	4,4	4,7	5	5,3	5,5	5,95	6,35	6,75	7,15	7,75	8,35	8,85	9,3	9,85	10,55	11,4	11,95	12,6
	Y	0,6	0,3	0,1	0,3	0,2	0,2	0,7	0,8	0,7	1,0	1,5	1,6	1,4	1,7	2,6	3,2	2,9	3,3
7	X	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	4,0	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	5,9	6,2	6,6	7,0	7,6	8,0	8,4
	Y	0,14	0,08	0,03	0,08	0,04	0,05	0,16	0,20	0,17	0,24	0,36	0,38	0,33	0,42	0,61	0,78	0,70	0,80
8	X	12,6	13,4	14,3	15,1	15,7	17,0	18,1	19,3	20,4	22,1	23,9	25,3	26,6	28,1	30,1	32,6	34,1	36,0
	Y	0,25	0,14	0,06	0,14	0,07	0,08	0,29	0,35	0,30	0,41	0,63	0,67	0,57	0,73	1,07	1,36	1,23	1,39
9	X	7,04	7,52	8	8,48	8,8	9,52	10,16	10,8	11,44	12,4	13,36	14,16	14,88	15,76	16,88	18,24	19,12	20,16
	Y	0,45	0,25	0,10	0,25	0,13	0,15	0,51	0,63	0,54	0,74	1,13	1,19	1,03	1,30	1,91	2,43	2,19	2,49
10	X	9,68	10,34	11	11,66	12,1	13,09	13,97	14,85	15,73	17,05	18,37	19,47	20,46	21,67	23,21	25,08	26,29	27,72
	Y	0,432	0,24	0,096	0,24	0,12	0,144	0,492	0,6	0,516	0,708	1,08	1,14	0,984	1,248	1,836	2,328	2,1	2,388
11	X	11,44	12,22	13	13,78	14,3	15,47	16,51	17,55	18,59	20,15	21,71	23,01	24,18	25,61	27,43	29,64	31,07	32,76
	Y	0,50	0,28	0,11	0,28	0,14	0,17	0,57	0,70	0,60	0,83	1,26	1,33	1,15	1,46	2,14	2,72	2,45	2,79
12	X	13,2	14,1	15	15,9	16,5	17,85	19,05	20,25	21,45	23,25	25,05	26,55	27,9	29,55	31,65	34,2	35,85	37,8
	Y	0,54	0,30	0,12	0,30	0,15	0,18	0,62	0,75	0,65	0,89	1,35	1,43	1,23	1,56	2,30	2,91	2,63	2,99
13	X	14,08	15,04	16	16,96	17,6	19,04	20,32	21,6	22,88	24,8	26,72	28,32	29,76	31,52	33,76	36,48	38,24	40,32
	Y	0,23	0,13	0,05	0,13	0,06	0,08	0,26	0,31	0,27	0,37	0,56	0,59	0,51	0,65	0,96	1,21	1,09	1,24
14	X	15,84	16,92	18	19,08	19,8	21,42	22,86	24,3	25,74	27,9	30,06	31,86	33,48	35,46	37,98	41,04	43,02	45,36
	Y	0,65	0,36	0,14	0,36	0,18	0,22	0,74	0,90	0,77	1,06	1,62	1,71	1,48	1,87	2,75	3,49	3,15	3,58
15	X	20,2	21,6	23,0	24,4	25,3	27,4	29,2	31,1	32,9	35,7	38,4	40,7	42,8	45,3	48,5	52,4	55,0	58,0
	Y	1,2	0,6	0,3	0,6	0,3	0,4	1,3	1,6	1,4	1,9	2,9	3,0	2,6	3,3	4,9	6,2	5,6	6,4
16	X	44	47	50	53	55	59,5	63,5	67,5	71,5	77,5	83,5	88,5	93	98,5	105,5	114	119,5	126
	Y	0,72	0,4	0,16	0,4	0,2	0,24	0,82	1	0,86	1,18	1,8	1,9	1,64	2,08	3,06	3,88	3,5	3,98

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення гомоскедастичності і гетероскедастичності.
2. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?
3. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.

4. Який метод потрібно використати для побудови економетричної моделі, якщо має місце гетероскедастичність?

5. Як перевіряється гетероскедастичність згідно критерію μ?

6. Для чого застосовують тест Гольфельда–Кванта?

7. Як застосовується параметричний тест для визначення гетероскедастичності?

8. У чому сутність непараметричного тесту?

9. Як визначається гетероскедастичність з допомогою регресії залишків?

10. Якщо залишки U_i = const, яке явище буде спостерігатись?

11. Як використовується матриця S в методі Ейткена?

12. Як дістати незміщену оцінку дисперсії залишків за наявності гетероскедастичності?

РОЗДІЛ 6. МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

6.1. Визначення мультиколінеарності

Однією із умов застосування методу найменших квадратів для регресії є відсутність серед пояснювальних змінних лінійно залежних. Однак дуже часто пояснювальні змінні економетричної моделі на практиці тісно пов'язані між собою, що приводить до помилок при побудові таких моделей.

Якщо вони лінійно залежні, то говорять, що між ними спостерігається повна коленіарність. У цьому випадку один із стовпців матриці **X** є лінійна комбінація інших стовпців. Тоді матриця **X′X** системи нормальних рівнянь має неповний стовпцевий ранг, тобто rang (**X′X**) < m+1, де m+1 - порядок матриці **X′X**. Звідси випливає, що матриця **X′X** вироджена (її визначник дорівнює нулю), і отже неможливо розв'язати систему лінійних рівнянь, тобто знайти МНК-оцінки параметрів моделі. Наприклад в регресії

$$C = b_1 + b_2 S + b_3 N + b_4 T + U \qquad (6.1)$$

C – споживання, S - заробітна плата, N - прибуток, одержуваний поза основною роботою, T - повний прибуток. Очевидно,

$$T = S + N, \qquad (6.2)$$

тобто між пояснювальними змінними буде повна коленіарність. Отже, оцінка параметрів моделі 6.1 неможлива. Однак, підставивши 6.2 в 6.1, одержимо

$$C = b_1 + (b_2 + b_4)S + (b_3 + b_4)N + U \qquad (6.3)$$

і оцінка трьох параметрів b_1, b_2+b_4, b_3+b_4 стане можливою.

Проте при моделюванні реальних економічних процесів повна колінеарність зустрічається вкрай рідко. Однак часто між пояснювальними змінними спостерігається висока ступінь корельованості. Таке буває практично завжди, коли модель містить багато пояснювальних факторів. Ця проблема звичайна для регресії часових рядів. Як правило, ряди спостережень для двох і більше пояснювальних змінних мають яскраво виражений часовий тренд, і отже такі змінні будуть тісно корельовані. У подібних ситуаціях матриці **X** і

$\mathbf{X'X}$ мають повний стовпцевий ранг, але визначник матриці $\mathbf{X'X}$ близький до нуля. Таке явище називають мультиколінеарністю.

Мультиколінеарність – *це наявність тісної лінійної залежності між двома чи більше пояснювальними змінними.*

Мультиколінеарність негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі, або робить побудову її взагалі неможливою [7]. Приклад: залежність між споживанням та капіталом і доходами громадян.

Мультиколінеарність виникає з таких умов:

1. На макроекономічні показники впливають одинакові фактори. Це призводить до того, що вони відображають широкий спектр моделей однакової економічної ситуації.

2. Використовуються часові змінні (величини, що змінюються через певний проміжок часу).

3. Неправильно проведена специфікація економетричної моделі [1].

Основні наслідки мультиколінеарності:

1. Падає точність оцінки моделі, яка виражається в тому, що

а) помилки деяких величин стають занадто великими,

б) ці помилки дуже корельовані між собою,

в) дисперсії оцінок параметрів різко збільшуються.

Оцінки параметрів чутливі до об’ємів сукупності спостережень. Збільшення кількості спостережень може привести до істотних змін в економетричній моделі.

2. Коефіцієнти при невідомих в моделі можуть бути незначними через наявність взаємозв’язку з іншими змінними. Тому при побудові економетричних моделей, які включають декілька змінних, потрібно знати, чи існує між пояснювальними змінними мультиколінеарність.

6.2. Ознаки мультиколінеарності

Коли серед парних коефіцієнтів кореляції пояснювальних змінних є такі, рівень яких наближається або дорівнює множинному коефіцієнту кореляції, то це означає можливість існування мультиколінеарності. Інформацію про парну залежність може дати симетрична матриця коефіцієнтів парної кореляції або кореляції нульового порядку між пояснювальними змінними [36]:

$$r = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1}, r_{x_1x_2}, \ldots, r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1}, r_{x_2x_2}, \ldots, r_{x_2x_k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{x_kx_1}, r_{x_kx_2}, \ldots, r_{x_kx_k} \end{pmatrix} \qquad (6.4)$$

Проте, коли до моделі входить більше, ніж дві пояснювальні змінні, то вивчення питання про мультиколінеарність не може обмежуватися інформацією, що надає дана матриця. Явище мультиколінеарності не зводиться лише до існування парної кореляції між незалежними змінними.

Більш загальна перевірка передбачає знаходження визначника матриці *r*, який називається детермінантом кореляції і позначається $|r|$. Числові значення детермінанта кореляції задовольняють умову: $|r| \in [0;1]$.

1. Якщо $|r| = 0$, то існує повна мультиколінеарність, а коли $|r| = 1$, мультиколінеарність відсутня. Чим ближче $|r|$ до нуля, тим точніше можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність.

2. Якщо в економетричній моделі знайдено мале значення параметра $\hat{a}_k$ при високому рівні часткового коефіцієнта детермінації R_j^2 і при цьому F-критерій істотно відрізняється від нуля, то це також свідчить про наявність мультиколінеарності.

3. Коли коефіцієнт частинної детермінації R_j^2, який обчислений для регресійних залежностей між однією пояснювальною змінною та іншими, має

значення, яке близьке до одиниці, то можна говорити про наявність мультиколінеарності.

Нехай при побудові економетричної моделі на основі покрокової регресії введення нової пояснювальної змінної істотно змінює оцінку параметрів моделі при незначному підвищенні (або зниженні) коефіцієнтів кореляції чи детермінації. Тоді ця зміна перебуває, очевидно, у лінійній залежності від інших, які було введено до моделі раніше.

Усі ці ознаки мультиколінеарності мають один спільний недолік: ні одна з них чітко не розмежовує випадки, коли мультиколінеарність істотна і коли нею можна знехтувати.

6.3 Шляхи вилучення мультиколінеарності

Оскільки мультиколінеарність є прикладною проблемою, то безпомилкових і абсолютно правильних шляхів вилучення мультиколінеарності не існує. Все залежить від ступеня мультиколінеарності.

Найпростіший спосіб боротьби з мультиколінеарністю - зменшення числа пояснювальних змінних шляхом виключення з моделі одного з двох факторів, що сильно між собою корелюють (для них є значущим вибірковий частковий коефіцієнт кореляції) [11]. Таким чином можна дійсно зм’якшити мультиколінеарність, і так роблять багато дослідників. Однак тут можуть виникнути інші проблеми. Справа в тім, що при відсутності в моделі змінної, яка впливає на досліджуваний показник, оцінки можуть втрачати свої бажані властивості, і тоді стандартні помилки і відповідні t-тести стають некоректними. Розглянемо декілька інших методів вилучення мультиколінеарності.

1. Використання первинної інформації.

Розглянемо це на прикладі залежності між споживанням, доходами та багатством. Її можна описати такою моделлю:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad (6.5)$$

де y – споживання, x_1- дохід, x_2- багатство. Між доходом і багатством існує зв'язок $\beta_2 = 0{,}2\beta_1$.

Тоді 6.5 можна переписати як

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + 0{,}2\beta_1 x_{2i} + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i., \qquad (6.6)$$

де $x_i = x_{1i} + 0{,}2x_{2i}$. При подальшому спостереженні бачимо колінеарність між факторами x_1 - праця, x_2 - капітал, тоді заміна змінних може зменшити або усунути мультиколінеарність.

2. Об'єднання міжгалузевої та динамічної інформації.

3. Вилучення змінної та помилки специфікації.

При високій колінеарності найкраще та найлегше відкинути одну із залежних змінних. Але при цьому можемо прийти до помилки специфікації. Відмітимо, що якщо правильною моделлю є: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, яку ми помилково звели до вигляду: $y_i = \beta_0 + \beta_{12} x_{2i} + \varepsilon_i$, тоді

$$E(b_{12}) = \beta_1 + \beta_2 b_{21} \neq \beta_1, \qquad (6.7)$$

де b_{21} - нахил у регресії $\mathbf{x_2}$ відносно $\mathbf{x_1}$, як зрозуміло з 6.6 b_{12} є зміщеною оцінкою β_1, коли b_{21} відмінне від нуля (тоді існує залежність між $\mathbf{x_1}$ і $\mathbf{x_2}$). Звичайно, якщо b_{21} дорівнює нулю, то мультиколінеарності не існує. Вилучення змінної з моделі з метою зниження мультиколінеарності може призвести до зміщення оцінок. Наслідки від цього можуть бути гіршими, ніж сама проблема колінеарності.

4. Перетворення змінних.

Застосовують у випадку, коли однією з причин мультиколінеарності є схильність даних змінюватись в одному напрямку, а один із шляхів зменшення такої залежності є використання перших різниць. Якщо,

$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$, то $y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1} + \varepsilon_{t-1}$,

тоді $y_t - y_{t-1} = \beta_1(x_{1t} - x_{1t-1}) + \beta_2(x_{2t} - x_{2t-1}) + v_t$, де $v_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ - *(6.8)*

рівняння перших різниць. Випадкова величина v_t може не задовольняти припущенням моделі класичної лінійної регресії про незалежність. Коли початкове значення ε_t послідовно незалежне або некорельоване, то випадкова величина v_t буде в багатьох випадках послідовно корельованою. Знову ж таки намагання поліпшити ситуацію призводить до гіршого стану, ніж був спочатку. У роботі з малими вибірками цей фактор потрібно брати до уваги.

5. Збільшення спостережень.

Іноді просте збільшення спостережень у моделі пом'якшує проблему мультиколінеарності. Наприклад, у моделі з двома змінними видно, що

$$\operatorname{var}(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{2i}^2 \left(1 - r_{12}^2\right)}, \text{ де } \tilde{x}_{2i}^2 = \left(x_{2i} - \tilde{x}_2\right) \qquad (6.9)$$

Якщо збільшувати кількість спостережень, то сума $\tilde{x}_{2i}^2$ завжди буде збільшуватися. Тому для кожного даного r_{12} дисперсія буде зменшуватися, зменшуючи таким чином стандартну помилку, що допомагає оцінити β_2 точніше. Крім того, потрібно впевнитись, що економічна структура, пов'язана з новим спостереженням, буде подібна до початкової структури.

Статистичні методи, такі як факторний аналіз, метод головних компонент, гребенева регресія часто використовуються для виправлення мультиколінеарності. Вони потребують ретельного математичного обґрунтування, тому аналітичне їх дослідження проводять використовуючи спеціальне програмне забезпечення.

6.4 Алгоритм Фаррара–Глобера

Найповніше дослідити мультиколінеарність можна з допомогою алгоритму Фаррара–Глобера. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється мультиколінеарність з усього масиву незалежних змінних (χ^2); кожної незалежної змінної з рештою змінних (F-критерій); кожної пари незалежних змінних (t- критерій) [18].

Алгоритм Фаррара–Глобера:

Крок 1. Стандартизація (нормалізація) змінних. Позначимо вектори незалежних змінних економетричної моделі через x_1, x_2, ..., x_m. Елементи стандартизованих векторів обчислюються за формулами [25]:

$$x_{ik}^{*} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sigma_{x_k}}; \quad x_{ik}^{*} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 n}}, \qquad (6.10)$$

де n - число спостережень $(i = \overline{1,n})$; m - число пояснювальних змінних, $(k = \overline{1,m})$; $\bar{x}_k$ - середнє арифметичне к-ї пояснювальної змінної; $\sigma_{x_k}^2$ - дисперсія к-ї пояснювальної змінної.

Із формули видно, що спочатку потрібно обчислити середні арифметичні для кожної пояснювальної змінної:

$$\bar{x}_к = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}{n}; \qquad (6.11)$$

Дисперсії незалежних змінних розраховуються за формулою:

$$\sigma_{xk}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_k)}{n}; \qquad (6.12)$$

Тоді знаменник для стандартизації кожної незалежної змінної буде:

$$x_k = \sqrt{n\sigma_{xk}^2} \qquad (6.13)$$

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці, виходячи з двох методів нормалізації змінних:

$$1) r = \frac{1}{n} X'^{*} X^{*}; 2) r = X'^{*} X^{*}, \qquad (6.14)$$

де X^{*} - матриця стандартизованих незалежних змінних,

X'^{*} - матриця, транспонована до матриці X^{*}.

Крок 3. Визначення критерію χ^2:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right]\ln|r|, \qquad (6.15)$$

де $|r|$ - визначник кореляційної матриці r. Значення цього критерію порівнюються з табличними при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $\chi^2_{fakt} \rangle \chi^2_{tabl}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

Крок 4. Визначення оберненої матриці:

$$C = r^{-1}\left(X'^{*}X\right)^{-1}. \qquad (6.16)$$

Крок 5. Обчислення F-критерію:

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n-m}{m-1}, \qquad (6.17)$$

де c_{kk} - діагональні елементи матриці С. Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличними при n-m і m-1 ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $F_{kfakt} \rangle Ftabl$, то відповідна незалежна змінна мультиколінеарна з ін.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної [33]:

$$k^2_{x_k} = 1 - \frac{1}{c_{kk}} \qquad (6.18)$$

Крок 6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}} \qquad (6.19)$$

де c_{kj} - елемент матриці С, що міститься в к-му рядку і в j-стовпці; $c_{kk} і c_{jj}$ - діагональні елементи матриці С.

Крок 7. Обчислення t-критеріїв:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r^2_{kj}}} \qquad (6.20)$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при m-n ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $t_{kj(f)} \rangle t_{tabl}$, то між незалежними змінними $x_k i x_j$ існує мільтиколінеарність.

6.5. Алгоритм визначення мультиколінеарності

Даний алгоритм має три види статистичних критеріїв, за якими перевіряється:

1. Мультиколінеарність всього масиву незалежних змінних (критерій χ^2),
2. Кожної незалежної змінної з іншими змінними (F-критерій),
3. Кожної пари незалежних змінних (t-критерій),

Обчислені значення критеріїв порівнюють з критичними значеннями і роблять відповідні висновки.

Алгоритм розрахунку:

1. Незалежні змінні стандартизуються:

$$x^*_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{n \cdot G_{xj}}} \qquad (6.21)$$

де ***n*** - кількість спостережень,

$\bar{x}_j$ - середнє значення незалежної змінної ***j***,

G_{xj} - дисперсія змінної ***x***$_{j}$.

Розрахунки ведуться в табличній формі.

Таблиця 6.1

№ з/п	Yi	Xi_1	Xi_2	Xi_3	Xi_1-Xc_1	Xi_2-Xc_2	Xi_3-Xc_3
Σ					-	-	-

Продовження таблиці 6.1

$(Xi_1-Xc_1)^2$	$(Xi_2-Xc_2)^2$	$(Xi_3-Xc_3)^2$	Xi_1*	Xi_2*	Xi_3*
			-	-	-

$$G_2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (6.22)$$

2. Знаходиться кореляційна матриця r.

3. Визначається критерій χ^2.

$$X^2 = -\left(n - 1 - \frac{1}{G}(2m+5)\right) \cdot \ell n\,|\,r\,| \qquad (6.23)$$

4. Отримане значення критерію χ^2 порівнюється із табличним. Якщо отримане значення критерію більше за табличне (критичне), то має місце мультиколінеарність.

5. Знаходиться обернена матриця до матриці r.

$$C = t^{-1} \qquad (6.24)$$

6. Обчислюється значення F-критерію.

$$F_i = (C_{ii} - 1) \cdot \frac{n-m}{m-1} \qquad (6.25)$$

Порівнюється фактичне значення з критичними (табличними), якщо отримане значення критерію більше за табличне, то між і-тою змінною і іншими змінними існує мультиколінеарність.

7. Обчислюємо часткові коефіцієнти кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-C_{kj}}{\sqrt{C_{kk} \cdot C_{jj}}} \qquad (6.26)$$

8. Обчислюємо значення t-критерію

$$t_{kj} = \frac{r_{kj} \cdot \sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r^2{}_{kj}}} \qquad (6.27)$$

Табличне значення порівнюється із отриманим. Якщо отримане значення більше за табличне, то між незалежними змінними існує мультиколінеарність.

6.6. Приклад визначення наявності мультиколінеарності в моделі

6.6.1. Завдання роботи

Для деякого регіону виконується економетричне дослідження залежності споживання деяких товарів (Y) в залежності від рівня доходів (X_1), збережень (X_2) і заробітної плати (X_3) для відповідної категорії споживачів. Вважається, що ця залежність може бути описана економетричною моделлю у вигляді багатофакторної лінійної регресії.

Мета роботи - перевірка наявності мультиколінеарності, яка встановлює зв’язок між прибутком підприємства, рівнем доходів, збережень і заробітною платою відповідної категорії персоналу.

Завдання роботи:

1. Виконати нормалізацію змінних.
2. Розрахувати кореляційну матрицю r.
3. Визначити критерій χ^2.
4. Розрахувати обернену матрицю C
5. Обчислити значення F-критерію.
6. Порівняти значення фактичного F-критерію з табличним і зробити висновки про наявність мультиколінеарності.
7. Обчислити частинні коефіцієнти кореляції r_{kj}.
8. Обчислити t-критерій.
9. Порівняти значення фактичного t –критерію з табличним.
10. Зробити висновки, між якими пояснювальними змінними існує мультиколінеарність.

6.6.2. Вихідні дані

Таблиця 6.2

Вихідні дані

№ з/п	Yi	Xi_1	Xi_2	Xi_3
1	4,76	0,39	7,95	2,69
2	5,7	0,51	8,03	1,88
3	7,48	0,84	8,33	2,06
4	11,55	0,99	8,78	2,81
5	1,04	0,22	6,57	0,51
6	2,39	0,31	4,35	0,41
7	0,54	0,19	3,9	0,78
8	8,41	0,78	8,07	2,66
9	3,54	0,33	5,34	3,26
10	9,11	0,89	8,4	3,05
Σ	54,52	5,45	69,7	20,11

Ідентифікуємо змінні:

Yi - прибуток підприємства (залежна змінна),

Xi_1 - рівень доходів відповідної категорії населення (незалежна змінна),

Xi_2 - рівень заощаджень відповідної категорії населення (незалежна змінна),

Xi_3 - заробітна плата відповідної категорії населення (незалежна змінна).

6.6.3. Приклад розрахунку

Алгоритм Фаррара-Глобера має три види статистичних критеріїв, згідно з яким перевіряється мультиколінеарність усього масиву незалежних змінних (χ^2 – „ксі”-квадрат); кожної незалежної змінної з рештою змінних (F–критерій); кожної пари незалежних змінних (***t***-критерій).

1. Стандартизуємо незалежні змінні в табличній формі (таблиця 6.3).

$$Xc_1= \ 0{,}545$$
$$Xc_2= \ 6{,}972$$
$$Xc_3= \ 2{,}011$$

2. Транспонуємо матрицю ***X**** в матрицю X'^{*} за допомогою функції ТРАНСП електронних таблиць Microsoft Excel. Транспонуємо вихідну матрицю **X**. Для завершення операції використовуємо комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Таблиця 6.3

№ з/п	Yi	Xi_1	Xi_2	Xi_3	Xi_1-Xc_1	Xi_2-Xc_2	Xi_3-Xc_3
1	4,76	0,39	7,95	2,69	-0,155	0,978	0,679
2	5,70	0,51	8,03	1,88	-0,035	1,058	-0,131
3	7,48	0,84	8,33	2,06	0,295	1,358	0,049
4	11,55	0,99	8,78	2,81	0,445	1,808	0,799
5	1,04	0,22	6,57	0,51	-0,325	-0,402	-1,501
6	2,39	0,31	4,35	0,41	-0,235	-2,622	-1,601
7	0,54	0,19	3,90	0,78	-0,355	-3,072	-1,231
8	8,41	0,78	8,07	2,66	0,235	1,098	0,649
9	3,54	0,33	5,34	3,26	-0,215	-1,632	1,249
10	9,11	0,89	8,40	3,05	0,345	1,428	1,039
Σ	54,52	5,45	69,70	20,11	-	-	-

Продовження таблиці 6.3

$(Xi_1\text{-}Xc_1)^2$	$(Xi_2\text{-}Xc_2)^2$	$(Xi_3\text{-}Xc_3)^2$	Xi_1*	Xi_2*	Xi_3*
0,024025	0,956484	0,461041	-0,1896	0,0331	0,0646
0,001225	1,119364	0,017161	-0,0428	0,0358	-0,0120
0,087025	1,844164	0,002401	0,3608	0,0459	0,0047
0,198025	3,268864	0,638401	0,5442	0,0611	0,0760
0,105625	0,161604	2,253001	-0,3975	-0,0140	-0,1430
0,055225	6,874884	2,563201	-0,2874	-0,0890	-0,1520
0,126025	9,437184	1,515361	-0,4342	-0,1040	-0,1170
0,055225	1,205604	0,421201	0,2874	0,0371	0,0617
0,046225	2,663424	1,560001	-0,2629	-0,0550	0,1188
0,119025	2,039184	1,079521	0,4219	0,0483	0,0988
0,817650	29,57076	10,51129	-	-	-

Вона буде мати вигляд:

	-0,1896	-0,043	0,3608	0,5442	-0,3975	-0,287	-0,434	0,28741	-0,26290	0,42194
X*'=	0,0331	0,036	0,0459	0,0611	-0,0136	-0,089	-0,104	0,03713	-0,05520	0,04829
	0,0646	-0,012	0,0047	0,0760	-0,1428	-0,153	-0,117	0,06174	0,11882	0,09885

Перемножимо матриці X'^{*} та X* за допомогою функції МУМНОЖ електронних таблиць Microsoft Excel, завершивши операції комбінацією клавіш Ctrl+Shift+Enter. Отримана матриця r розміром (3×3) матиме вигляд:

	0,0412	0,008	-0,067
r=X'*×X*=	0,0085	0,003	-0,014
	-0,0666	-0,014	0,1323

3. Знаходимо визначник кореляційної матриці [r] за допомогою функції МОПРЕД електронних таблиць Microsoft Excel, завершивши операцію комбінацією клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Визначник [r]= 1,5452E-06

4. Визначається розрахункове значення критерію χ^2. (Для ззнаходження Ln [r] використовуємо вбудовану функцію **Ln** електронних таблиць Microsoft Excel).

$$\chi^2 = [n-1-\frac{1}{6}(2m+5)]\ln[r]$$

$$\chi^2 = 15{,}5306$$

5. Для рівня значимості **α=0,05** і ступеня вільності $\frac{1}{2}m(m-1)$ за статистичними таблицями χ^2 розподілу знаходиться табличне значення $\chi^2_{табл.}$. і порівнюється з фактичним (розрахунковим). Якщо $\chi^2 < \chi^2_{табл.}$, то загальна мультиколінеарність відсутня, в іншому випадку говорять про присутність мультиколінеарності в масиві змінних. Незалежно від висновків необхідно переходити до наступних етапів роботи.

6. Визначається матриця С, обернена до кореляційної матриці, розміром 3х3 за допомогою функції МОБР електронних таблиць Microsoft Excel.

$$c = r^{-1}$$

c=

155,48	-130,1	64,617
-130,05	659,4	3,6357
64,617	3,636	40,455

7. Використовуючи діагональні елементи матриці С, розраховуються F-критерій Фішера для кожної незалежної змінної за наступними формулами:

$$F_1 = (c_{11} - 1)\frac{n-\mathrm{m}}{m-1}, \qquad F_2 = (c_{22} - 1)\frac{n-\mathrm{m}}{m-1}, \qquad F_3 = (c_{33} - 1)\frac{n-\mathrm{m}}{m-1}$$

$$F_1 = (155{,}48 - 1)\frac{10-3}{3-1}, \quad F_2 = (659{,}4 - 1)\frac{10-3}{3-1}, \quad F_3 = (40{,}455 - 1)\frac{10-3}{3-1}$$

F_1=	44,138
F_2=	188,13
F_3=	11,273

8. Для рівня значимості **α=0,05** і ступеня вільності $\mathbf{v_1=n-m}$ і $\mathbf{v_2=m-1}$ за статистичними таблицями F-розподілу знаходиться критичне значення

критерію Фішера $F_{кр}$. Табличне значення $F_{кр.}$ попарно порівнюється з розрахунковими значеннями $F_к$. При $F_{к(фактич.)} > F_{кр}$ відповідна к-та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими. Незалежно від висновків необхідно перейти до наступних етапів роботи.

9. Використовуючи матрицю С, обчислюються частинні коефіцієнти кореляції:

$$r_{12} = \frac{-C_{12}}{\sqrt{C_{11} * C_{22}}}, \quad r_{13} = \frac{-C_{13}}{\sqrt{C_{11} * C_{33}}}, \quad r_{23} = \frac{-C_{23}}{\sqrt{C_{22} * C_{33}}},$$

де C_{12} - елемент матриці С, що міститься в 1–му рядку і 2-ому стовпці; C_{11}, C_{22} і C_{33} - діагональні елементи матриці С.

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв’язку між двома змінними за умови, що третя не впливає на цей зв’язок.

$$r_{12} = \frac{-(-130{,}1)}{\sqrt{155{,}48 * 659{,}4}}, \; r_{13} = \frac{-64{,}617}{\sqrt{155{,}48 * 40{,}455}}, \; r_{23} = \frac{-3{,}6357}{\sqrt{659{,}4 * 40{,}455}}$$

r_{12}=	0,4062
r_{13}=	-0,8147
r_{23}=	-0,0223

10. На основі знайдених частинних коефіцієнтів кореляції знаходяться розрахункові значення t-критерію Стю’дента:

$$t_{12} = \frac{r_{12}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1 - r^2_{12}}}, \quad t_{13} = \frac{r_{13}\sqrt{n-\mathrm{m}}}{\sqrt{1 - r^2_{13}}}, \quad t_{23} = \frac{r_{23}\sqrt{n-\mathrm{m}}}{\sqrt{1 - r^2_{23}}}$$

t_{12}=	1,17593
t_{13}=	-3,7176
T_{23}=	-2,6687

11. Для рівня значимості **α=0,05** при **n-m** ступенях вільності за статистичними таблицями t-розроділу Стю’дента або вбудованої функції

СТЬЮДРАСПОБР електронних таблиць Microsoft Excel знаходиться критичне значення t-критерію Стю'дента. Якщо $t_{kj} > t_{кр.}$, то між парами факторів існує мультиколінеарність.

$$t_{кр.} = 2,36462$$

12. У разі виявлення мультиколінеарності необхідно запропонувати шляхи її усунення.

Висновок: так як χ^2=15,5306 > $\chi^2_{т.}$=7,81, в масиві даних існує мультиколінеарність.

Так як t_{12}=1,17593 менше за $t_{кр.}$=2,36462, між першою і другою змінними мультиколінеарність відсутня.

Так як t_{13}=-3,7176 менше за $t_{кр.}$=2,36462, між першою і третьою змінними мультиколінеарність відсутня.

Так як t_{23}=-2,6687 менше за $t_{кр.}$=2,36462, між другою і третьою змінними мультиколінеарність відсутня.

Завдання для самостійної роботи

Завдання: нехай на прибуток підприємства впливає фондовіддача, продуктивність праці та питомі інвестиції. Розрахувати модель залежності між цими параметрами та переконатись у відсутності мультиколінеарності між пояснювальними змінними. Вихідні дані в таблиці 6.4.

Таблиця 6.4

Вихідні дані

Варі-ант	Змін-ні	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	y	4,76	5,7	7,48	11,55	1,04	2,39	0,54	8,41	3,54	9,11
	x_1	0,39	0,51	0,84	0,99	0,22	0,31	0,19	0,78	0,33	0,89
	x_2	7,95	8,03	80,33	8,78	6,57	4,35	3,9	8,07	5,34	8,4
	x_3	2,47	3,57	2,03	3,58	2,20	0,39	2,93	3,65	2,12	3,37
2	y	3,24	9,09	1,27	5,34	6,51	7,82	2,25	5,51	3,98	5,03
	x_1	9,32	3,57	11,05	4,28	3,99	2,57	8,94	4,38	7,94	3,99
	x_2	5,78	3,56	4,28	7,94	5,34	8,94	1,57	5,05	4,21	3,98
	x_3	14,78	8,00	10,69	18,96	12,77	21,39	5,01	11,32	10,54	8,85
3	y	2,27	9,74	8,04	5,27	7,84	1,21	3,94	6,65	3,03	5,99
	x_1	8,59	2,34	2,99	5,02	3,27	9,25	7,07	4,45	7,31	5,07
	x_2	3,4	11,12	10,72	6,79	8,27	2,34	4,59	7,29	5	6,06
	x_3	16,12	4,72	6,04	9,90	6,65	16,77	12,86	8,23	13,66	9,86

Продовження таблиці 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	y	11,29	3,03	7,72	9,49	3,95	2,15	5,64	8,09	4,24	1,54
	x_1	2,03	0,77	1,52	1,99	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,30
	x_2	5,72	1,69	5,02	5,37	2,12	1,39	3,03	4,13	2,4	0,87
	x_3	25,53	8,19	22,92	24,27	9,48	5,94	13,36	18,64	11,69	5,43
5	y	1,54	4,27	8,1	5,69	2,31	3,95	9,29	7,94	3,33	10,99
	x_1	2,93	2,77	1,52	1,99	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,30
	x_2	5,74	1,69	5,02	5,37	2,21	1,39	3,06	4,14	2,39	0,88
	x_3	4,35	4,81	2,96	3,08	1,18	1,38	1,86	3,40	1,51	0,65
6	y	2,94	1,57	2,5	0,61	1,2	2,02	1,95	2,49	1,93	0,66
	x_1	2,84	5,57	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_2	10,15	7,58	9,93	13,45	7,84	9,45	8,25	11,49	8,24	14,02
	x_3	33,93	25,16	33,01	45,16	26,39	31,90	27,51	38,95	27,12	47,66
7	y	9,37	2,37	4,51	9,03	6,27	5,09	3,89	1,05	11,57	7,54
	x_1	6,32	1,51	3,31	6,3	4,2	3,4	2,54	0,71	7,85	5,05
	x_2	0,92	0,25	0,44	1,01	0,64	0,48	0,42	0,12	1,24	0,77
	x_3	39,55	9,74	20,86	39,13	25,77	21,49	15,78	5,25	48,18	31,41
8	y	3,98	5,72	8,92	1,54	3,02	7,87	9,34	4,27	3,54	1,91
	x_1	4,27	6,02	9,27	2,02	3,54	8,28	9,98	4,84	3,91	2,13
	x_2	3,42	5,24	8,11	1,08	2,78	7,40	8,79	4,01	2,92	1,52
	x_3	4,39	7,07	10,15	1,56	3,61	9,21	11,33	5,60	3,66	2,49
9	y	1,22	4,35	8,54	9,92	7,57	2,52	4,99	6,54	3,94	5,05
	x_1	9,89	8,75	7,24	6,13	6,80	9,6	8,34	8,09	7,54	7,72
	x_2	8,54	7,94	6,87	5,28	6,42	9,38	7,98	7,62	6,76	7,39
	x_3	2,88	2,16	2,26	1,64	2,40	2,59	2,23	2,08	2,24	2,35
10	y	6,76	9,89	3,48	1,59	4,81	8,72	2,54	5,94	11,54	7,27
	x_1	3,31	5,05	1,78	0,82	2,39	4,45	1,30	2,60	5,62	3,71
	x_2	1,75	2,70	0,82	0,39	1,21	2,30	0,66	1,21	2,91	1,92
	x_3	5,22	7,16	1,10	0,16	2,96	5,89	1,89	3,09	8,15	5,48
11	y	5,84	9,34	2,03	4,57	7,87	8,09	1,56	6,55	3,94	12,53
	x_1	2,31	3,87	0,81	1,87	3,12	3,25	0,61	2,45	1,58	4,85
	x_2	4,56	5,95	2,93	3,99	5,22	5,51	2,74	4,51	3,71	6,92
	x_3	15,15	27,45	5,59	12,75	19,71	21,67	4,30	15,02	9,86	33,52
12	y	7,89	1,07	3,49	5,08	9,81	6,45	11,54	8,21	5,85	4,15
	x_1	1,56	0,21	0,70	1,10	1,91	1,23	2,31	1,61	1,18	0,83
	x_2	5,62	4,34	4,84	5,18	6,02	5,33	6,51	5,77	5,25	4,92
	x_3	3,28	2,05	2,98	3,04	3,32	2,99	3,94	3,57	2,65	2,99
13	y	3,56	1,07	8,41	5,54	2,84	4,09	7,39	6,65	2,52	5,09
	x_1	5,24	1,58	12,65	8,24	4,25	6,15	10,98	9,84	3,92	7,98
	x_2	4,07	0,63	11,72	7,33	3,30	5,21	9,90	8,71	2,99	7,01
	x_3	2,71	0,82	4,59	3,79	3,10	2,76	3,54	3,62	2,63	3,85
14	y	1,84	4,27	8,32	5,94	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,92	3,14	5,27	4,02	2,31	4,67	4,09	2,91	1,28	1,64
	x_2	3,54	8,82	15,27	9,99	5,17	13,95	12,6	7,48	1,05	2,58
	x_3	1,54	2,05	3,05	2,56	0,95	3,11	3,11	1,56	1,16	1,32

Продовження таблиці 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	y	4,56	5,95	2,93	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	3,71	6,95
	x_1	12,53	3,94	6,55	1,56	8,09	7,84	4,57	2,03	9,34	5,84
	x_2	4,85	4,58	2,45	0,61	3,25	3,12	1,87	0,81	3,87	2,31
	x_3	5,55	3,84	4,05	0,65	3,97	2,29	4,03	1,74	5,05	2,10
16	y	9,54	3,41	5,15	7,56	4,15	1,84	5,94	11,03	8,84	2,92
	x_1	3,54	1,05	1,79	2,61	1,24	0,66	1,87	3,59	3,84	1,05
	x_2	7,09	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,03	7,03	7,12	1,89
	x_3	5,56	1,90	3,13	3,94	2,33	1,80	3,46	5,75	5,49	2,15
17	y	8,44	5,27	1,07	9,59	3,07	7,84	4,74	2,15	5,96	6,12
	x_1	1,35	1,87	2,95	1,27	2,45	1,45	2,03	2,68	1,94	2,02
	x_2	5,67	6,24	8,08	4,98	7,15	5,88	6,87	7,84	6,74	6,51
	x_3	4,80	4,92	7,49	5,84	6,46	6,38	5,79	8,08	4,72	6,39
18	y	3,63	1,09	8,94	5,34	6,24	2,42	9,38	7,07	2,55	4,24
	x_1	4,89	1,35	10,94	7,15	8,54	2,95	12,55	9,15	3,15	6,54
	x_2	2,92	0,82	7,08	4,54	5,07	1,84	8,51	6,5	2,01	3,81
	x_3	5,22	1,91	12,05	7,55	9,04	3,15	13,81	10,47	3,81	6,46
19	y	2,84	5,57	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_1	0,62	1,99	2,49	1,95	2,02	1,20	0,61	2,54	1,54	2,94
	x_2	10,15	7,56	9,91	13,45	7,84	9,45	8,25	11,51	8,23	14,02
	x_3	2,35	8,80	10,48	7,71	7,88	5,79	3,00	9,94	7,60	12,00
20	y	7,27	1,54	5,29	9,09	3,23	8,57	6,15	4,77	0,59	3,84
	x_1	5,44	0,83	3,89	7,62	2,81	6,01	4,81	3,54	0,41	3,01
	x_2	12,03	2,51	7,81	14,09	4,33	12,54	10,51	8,25	0,95	3,51
	x_3	6,62	1,96	5,39	8,28	2,70	6,66	7,59	4,60	3,26	4,21
21	y	4,84	5,72	7,49	11,34	1,09	2,41	0,53	8,40	3,55	9,15
	x_1	0,39	0,53	0,84	0,95	0,22	0,32	0,19	0,76	0,33	0,89
	x_2	7,95	8,1	8,33	8,39	6,55	4,35	3,90	8,09	5,33	8,40
	x_3	4,31	3,31	5,30	5,75	1,23	4,08	0,94	3,68	2,11	5,57
22	y	9,12	4,33	7,68	1,52	3,15	5,77	8,34	7,12	5,58	2,85
	x_1	2,83	1,62	2,49	0,65	1,24	2,21	1,83	2,52	1,92	0,71
	x_2	13,95	8,32	11,41	8,34	9,39	7,94	12,99	9,83	7,62	10,21
	x_3	4,62	2,76	2,48	2,00	5,28	2,57	4,97	4,67	5,25	6,04
23	y	6,31	1,59	5,30	9,09	3,23	8,57	6,19	4,77	0,62	3,84
	x_1	4,92	0,91	3,9	7,64	2,81	6,12	4,95	3,59	0,43	3,12
	x_2	11,53	2,62	7,84	14,12	4,39	11,99	10,45	8,31	1,01	4,62
	x_3	8,40	3,96	7,53	13,45	3,68	8,03	8,53	8,37	3,11	4,81
24	y	2,91	5,55	7,12	8,34	5,77	3,25	1,54	7,77	4,34	9,15
	x_1	0,66	2,01	2,49	1,95	2,04	1,21	0,72	2,58	1,56	2,98
	x_2	10,21	7,57	9,92	13,45	7,92	9,53	8,33	11,54	8,39	13,99
	x_3	2,51	1,67	2,10	3,31	2,06	2,79	2,37	3,49	2,01	4,02

Продовження таблиці 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	y	3,67	1,11	2,94	5,14	6,22	2,48	9,38	7,12	2,58	4,28
	x_1	4,92	1,39	10,97	7,17	8,52	2,92	12,72	9,09	3,17	6,55
	x_2	2,93	0,83	7,12	4,62	5,09	1,85	8,62	6,53	2,07	3,83
	x_3	3,19	0,57	11,35	7,45	7,60	1,74	12,27	7,66	1,82	5,70
26	y	8,51	5,27	1,09	9,59	3,11	7,84	4,74	2,15	5,99	6,12
	x_1	1,36	1,89	2,98	1,27	2,41	1,45	2,03	2,78	1,98	2,10
	x_2	5,69	6,25	8,11	4,99	7,19	5,89	6,89	7,84	6,74	6,53
	x_3	1,13	1,20	0,87	0,62	0,66	0,84	0,94	1,31	1,41	1,41
27	y	9,55	3,41	5,15	5,76	4,15	1,84	5,95	11,11	8,84	2,92
	x_1	3,55	1,05	1,79	2,61	1,24	0,67	1,88	3,61	3,84	1,05
	x_2	7,10	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,03	7,08	7,12	1,89
	x_3	9,42	1,72	3,16	5,38	2,36	-0,09	4,05	9,60	10,58	2,17
28	y	4,5	5,95	2,99	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	7,71	6,95
	x_1	12,48	3,94	6,59	1,56	8,09	7,84	4,57	2,03	9,34	5,84
	x_2	4,89	4,58	2,48	0,61	3,25	3,12	1,88	1,81	3,87	2,34
	x_3	6,68	6,21	3,41	1,39	4,72	4,54	3,31	3,03	5,32	3,62
29	y	1,88	4,27	8,32	5,94	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,95	3,14	5,27	4,02	2,31	4,67	4,09	2,91	1,28	1,64
	x_2	3,57	8,82	15,27	9,99	5,17	13,95	12,6	7,48	1,05	2,58
	x_3	3,09	3,93	6,31	4,55	2,70	5,77	4,80	3,22	2,30	1,97
30	y	3,65	1,07	8,41	5,54	2,84	4,09	7,39	6,65	2,52	5,1
	x_1	5,21	1,58	12,65	8,21	4,25	6,15	10,98	9,84	3,90	8,01
	x_2	4,12	1,63	11,75	7,33	3,3	5,21	9,9	8,71	3,01	6,99
	x_3	5,55	2,41	13,54	8,63	4,16	6,08	11,78	10,10	3,59	8,70
31	y	8,01	1,07	3,49	5,01	9,81	6,57	6,45	11,54	8,21	4,15
	x_1	1,69	0,21	0,72	1,12	1,95	1,28	1,23	2,35	1,61	0,88
	x_2	5,78	4,34	4,84	5,12	6,03	5,33	5,39	6,57	5,77	5,01
	x_3	1,21	-0,22	0,03	0,62	1,49	0,41	0,91	1,74	1,16	0,81
32	y	6,03	9,34	2,03	4,57	7,87	8,09	1,56	6,66	3,94	12,09
	x_1	2,35	3,87	0,81	1,87	3,12	3,25	0,67	2,49	1,58	4,89
	x_2	4,65	5,95	2,93	3,99	5,22	5,59	2,74	4,50	3,71	7,03
	x_3	4,30	5,39	2,35	3,22	4,93	5,53	2,46	4,18	3,37	6,56
33	y	6,71	9,89	3,48	1,59	4,81	8,73	2,54	5,94	1,59	7,29
	x_1	3,29	5,08	1,78	0,84	2,39	4,51	1,30	2,61	5,63	3,74
	x_2	1,81	2,71	0,82	0,39	1,24	2,31	0,67	1,21	2,91	2,01
	x_3	2,37	3,90	1,14	0,08	1,94	3,69	0,44	1,99	4,89	3,18
34	y	1,27	4,35	8,59	9,92	7,58	2,52	5,01	6,55	3,94	5,05
	x_1	9,91	8,75	7,27	6,13	6,81	9,60	8,34	8,12	7,54	7,72
	x_2	8,57	7,95	6,81	5,28	6,4	9,38	7,98	7,62	6,76	7,39
	x_3	10,61	10,58	9,02	7,08	8,56	12,07	10,22	9,84	8,98	9,61
35	y	4,03	5,72	8,92	1,54	3,02	7,87	9,34	4,27	3,54	1,91
	x_1	4,27	6,06	9,27	2,12	3,54	8,28	9,98	4,84	3,91	2,13
	x_2	3,39	5,24	8,11	1,18	2,78	7,40	8,79	4,01	2,92	1,52
	x_3	4,17	6,65	9,34	2,29	3,69	8,71	9,91	5,63	3,88	2,33

Продовження таблиці 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36	y	9,41	2,37	4,55	9,05	6,27	5,09	3,89	1,05	11,61	7,54
	x_1	6,34	1,51	3,39	6,31	4,21	3,40	2,60	0,71	7,85	5,05
	x_2	1,01	0,25	0,45	1,00	0,64	0,48	0,44	0,12	1,24	0,77
	x_3	0,57	-0,61	-0,33	0,90	0,21	0,40	-0,24	-0,23	1,36	0,69
37	y	2,99	1,57	2,51	0,61	1,25	2,21	1,95	2,49	1,93	0,66
	x_1	2,80	5,59	7,21	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	4,33	9,12
	x_2	10,12	7,59	9,99	13,45	7,84	9,45	8,25	11,5	8,24	14,00
	x_3	3,63	7,65	9,96	11,72	7,59	3,85	1,96	10,63	5,17	12,50
38	y	1,49	4,27	8,10	5,69	2,31	3,95	9,31	7,94	3,35	11,01
	x_1	3,01	0,78	1,52	2,03	0,78	0,49	1,24	1,72	0,85	0,31
	x_2	5,74	1,71	5,12	5,34	2,21	1,41	3,07	4,14	2,71	0,88
	x_3	9,13	2,08	8,13	8,66	3,83	1,82	5,15	6,94	4,19	0,68
39	y	11,31	3,24	7,72	9,49	3,95	2,15	5,64	8,10	4,21	1,54
	x_1	1,99	0,77	1,52	2,03	0,78	0,45	1,24	1,72	0,85	0,31
	x_2	5,72	1,69	5,07	5,37	2,12	1,39	2,99	4,13	2,41	0,87
	x_3	4,89	1,99	3,44	4,42	2,54	1,06	2,77	3,63	2,44	1,36
40	y	2,31	9,74	8,04	5,27	7,84	1,24	3,94	6,65	3,03	6,01
	x_1	8,61	2,34	3,01	4,99	3,27	9,25	7,07	4,45	7,31	5,11
	x_2	3,39	11,12	10,72	6,79	8,29	2,34	4,59	7,29	5,04	6,09
	x_3	1,92	8,50	8,20	4,75	5,61	1,58	2,97	4,95	3,23	3,85
41	y	3,33	9,10	1,27	5,34	6,51	7,84	2,25	5,51	4,01	5,03
	x_1	9,41	3,59	11,05	4,28	4,01	2,57	8,94	4,38	8,03	4,01
	x_2	5,81	3,56	4,28	7,94	5,32	8,94	1,57	5,05	4,21	4,03
	x_3	6,04	1,76	6,85	2,12	2,18	1,04	5,47	2,58	5,20	2,28
42	y	4,76	5,69	7,48	11,55	1,04	2,41	0,54	8,41	3,54	9,11
	x_1	0,41	0,54	0,84	1,01	0,22	0,31	0,19	0,78	0,33	0,89
	x_2	8,03	8,07	8,33	8,78	6,57	4,35	3,91	8,07	5,34	8,40
	x_3	4,84	4,79	5,26	4,79	3,92	2,59	2,27	4,79	2,75	4,57
43	y	9,24	4,33	7,68	1,52	3,15	5,77	8,34	7,12	5,58	2,85
	x_1	2,94	1,62	2,49	0,65	1,24	2,12	1,83	2,52	1,92	0,71
	x_2	14,01	8,32	11,41	8,34	9,39	7,94	13,01	9,83	7,62	10,21
	x_3	5,23	2,61	4,50	1,24	2,02	3,63	3,65	3,88	3,27	1,13
44	y	4,84	5,72	7,51	11,34	1,12	2,41	0,53	8,41	3,51	9,15
	x_1	0,41	0,53	0,84	0,95	0,22	0,32	0,19	0,78	0,33	0,91
	x_2	8,01	8,1	8,33	8,41	6,55	4,35	3,90	8,09	5,33	8,41
	x_3	6,25	6,27	5,86	6,42	4,37	3,30	2,82	6,29	3,43	5,99
45	y	7,35	1,54	5,29	9,11	3,23	8,57	6,15	4,77	0,62	3,84
	x_1	5,48	0,83	3,89	7,62	2,81	6,07	4,81	3,54	0,43	3,03
	x_2	12,12	2,51	7,81	13,99	4,33	12,54	10,54	8,25	0,95	4,51
	x_3	6,76	1,86	4,67	9,75	3,88	7,57	6,03	4,31	1,12	3,94
46	y	2,87	5,61	7,12	8,34	5,77	3,15	1,52	7,68	8,68	9,12
	x_1	0,62	2,01	2,49	1,95	2,02	1,21	0,61	2,54	4,54	2,94
	x_2	10,27	7,57	9,91	13,45	7,84	9,45	8,25	11,51	10,09	13,15
	x_3	6,28	4,47	5,27	7,57	4,17	5,72	4,32	6,74	5,58	7,57

Продовження таблиці 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
47	y	8,51	5,27	1,11	9,61	2,98	7,84	4,74	2,15	5,97	6,12
	x_1	1,31	1,87	3,01	1,27	2,45	1,45	1,99	2,67	2,01	2,02
	x_2	5,71	6,24	7,99	5,01	7,15	5,91	7,01	7,84	6,74	6,51
	x_3	2,77	3,84	6,13	2,46	5,04	3,24	3,99	5,12	3,99	4,46
48	y	10,01	3,41	5,21	7,56	4,15	1,84	6,01	10,95	8,84	2,92
	x_1	3,65	1,05	1,84	2,61	1,24	0,66	1,91	3,61	3,84	1,12
	x_2	7,15	2,15	3,72	5,12	2,51	1,38	4,12	6,98	7,15	1,94
	x_3	8,71	3,05	5,20	6,07	3,74	2,41	5,55	8,58	8,89	2,86
49	y	4,72	6,02	3,01	3,84	5,27	5,51	2,74	4,51	3,84	7,03
	x_1	11,99	4,01	6,62	1,56	8,11	7,84	4,57	2,03	9,41	5,84
	x_2	4,95	4,71	2,45	0,61	3,25	3,12	1,87	0,84	3,87	2,31
	x_3	9,47	3,35	5,16	1,29	6,62	6,46	3,54	1,35	7,56	4,34
50	y	1,84	4,27	8,32	6,01	2,54	7,24	6,15	3,74	0,54	1,24
	x_1	1,92	3,14	5,27	3,98	2,31	4,67	3,94	3,01	1,28	1,64
	x_2	3,54	9,02	14,07	10,03	5,17	13,45	12,14	7,48	1,05	2,58
	x_3	1,27	5,52	8,65	5,54	2,86	7,83	7,21	4,60	0,61	0,75

Завдання для самоконтролю

1. Що означає мультиколінеарність змінних?
2. Ознаки мультиколінеарності.
3. Основні наслідки мультиколінеарності.
4. Шляхи вилучення мультиколінеарності.
5. Які статистичні критерії використовуються для виявлення мультиколінеарності?
6. Дайте коротку характеристику алгоритму Фаррара-Глобера.
7. На підставі чого можна зробити висновок про наявність мультиколінеарності в масиві незалежних змінних? (відповідь обґрунтуйте)
8. Виходячи з чого можна зробити висновок, яка незалежна змінна мультиколінеарна з іншими?
9. Як визначається пара незалежних мультиколінеарних змінних?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бегун С., Сахарук М. Мультиколінеарність та її вплив на оцінку параметрів моделі. Молодий вчений, 4 (80), 272-276. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-4-80-56
2. Бегун С., Воронюк А. Місце кореляційно-регресійного аналізу в управлінні підприємством. Молодий вчений, 4 (80), 277-281. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-4-80-57
3. Бобровнича Н.С., Борисевич Є.Г. Економетрія: навч. посіб. — Одеса: ОНАЗ ім.О.С.Попова, 2010. – 180 с.
4. Боднар Р.Д., Єлейко В.І., Демчишин М.Я. Економетричний аналіз діяльності підприємств. Навчальний посібник. – Видавництво „Навчальна книга Богдан", 2019. - 368 с.
5. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посібник. - К.: КНЕУ, 2003. - 408 с.
6. Волошин О.Р. Економетрія. Ч. 1: навчальний посібник. – Львів: Львівський державний університет внутрішніх справ, 2012. – 192 с.
7. Глушак О.М. Передумови побудови багатофакторної економетричної моделі: дослідження на мультиколінеарність / О.М.Глушак, С.О.Семеняка // Фізико-математична освіта. - 2018. - Вип. 1. - С. 171-175. - [Електронний ресурс]: режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2018_1_33.
8. Грубер Й. Економетрія. Том 1. Вступ до множинної регресії та економетрії. – Київ: «Нічлава», 1998. - 384 с.
9. Грубер Й. Економетрія. Том 2. Економетричні прогнози та оптимізаційні моделі. - Київ: «Нічлава», 1999. - 296 с.
10. Диха М.В., Мороз В.С. Економетрія: навчальний посібник. – Центр навчальної літератури, 2019. – 206 с.
11. Доля В.Т. Економетрія: навч. посібник. Харків: ХНАМГ, 2010. 171 с.
12. Єлейно В. Основи економетрії. – Львів: Марка Лтд, 1995. – 191 с.

13. Здрок В.В. Економетрія: підручник / В.В.Здрок, Т.Я.Лагоцький. - К.: Знання, 2010. - 541 с. + компакт-диск.

14. Козьменко О.В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика): навчальний посібник. - Суми : Університетська книга, 2014. - 406 с.

15. Корольов О.А. Економетрія: навч. посібникю - К.: Європейський ун–т, 2002. – 660 с.

16. Корольов О.А., Рязанцева В.В. Практикум з економетрії: завдання з практичними рекомендаціями, алгоритмами та прикладом їх наскрізного виконання. Ч. 1. Регресійний аналіз: навч. посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2002. - 250 с.

17. Кулинич О.І. Економетрія: навч. посібник. - Хмельницький: Поділля, 1997. - 115 с.

18. Кулинич О.І. Економетрія: практикум. - Хмельницький: Поділля, 1998. - 157 с.

19. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М. та ін. Теоретико–ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій статистиці. – К.: Інформтехнім, 1995. 380 с.

20. Леонтюк-Мельник О.В., Захарчук Д.В. Економетричне моделювання для аналізу та прогнозування основної діяльності підприємства. Галицький економічний вісник. 2016. №2 (3). С. 164–171. - [Електронний ресурс]: режим доступу: http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/20619

21. Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Л.: МАУП, 2003. - 208 с.

22. Лук’яненко І.Г., Краснікова Л.І., Економетрика: підручник. - К: товариство „Знання”, КОО, 1998. - 494 с.

23. Лук’яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах: навчальний посібник. - К.: Літера ЛТД, 2002. - 352 с.

24. Лугинин О.Е., Белоусова С.В., Львов М.С. Экономико–математические методы и модели: учебн. пособие. – Херсон: МИБ, 1998. 212 с.

25. Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М. Економетрія: навч. посібник. – К.: ЦНЛ, 2005. 252 с.
26. Ковальова І.Л. і ін. Економетрія: навч.посіб.- Одеса: ОДАБА, 2019. 423 с.
27. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: підручник. - К.: КНЕУ, 2000. - 296 с.
28. Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Економетрія: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. - К.: КНЕУ, 2001. - 192 с.
29. Руська Р.В. Економетрика: навч. посібник. - Тернопіль: Тайп, 2012. 224 с.
30. Рязанцева В.В. Економетрія. Моделювання макроекономічних процесів: навч. посіб. – Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. – с.
31. Толбатов Ю.А. Економетрика: підручник для студентів екон. спеціальностей вищого навчального закладу.– К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
32. Харченко Ю.А. Кореляційно-регресійний аналіз обсягів збуту продукції промислового підприємства. Економічний простір. 2014. №86 (23). С.214–223. - [Електронний ресурс]: режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ecpros20148623.
33. Черняк О.І.; Комашко О.В.; Ставицький А.В.; Баженова О.В. Економетрика: підручник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2010. - 359 с.
34. Askin R, Standridge CR. Modeling and Analysis of Manufacturing Systems. European Journal of Engineering Education. 1994. Vol. 19. No. 1. P. 122–125.
35. Jeffrey M. Wooldridge. Introductory Econometrics. A modern Approach. 5th Edition. 2012. – 910 p. - [Електронний ресурс]: режим доступу: http://economics.ut.ac.ir/documents/3030266/14100645/Jeffrey_M._Wooldridge_Introductory_Econometrics_A_Modern_Approach__2012.pdf.
36. Paul R.K. Multicollinearity: causes, effects and remedies. IASRI. 2006. No35. P. 58–65.
37. Tshepo Chris Nokeri (english) Econometrics and Data Science. 1st Ed. Apress, 2022. - 228 p.
38. Using Econometrics A Practical Guide A.H. Studenmund Sixth Edition. 2014 – 565 p. - [Електронний ресурс]: режим доступу:

https://www.researchgate.net/profile/Ayseguel_Coskun2/post/How_to_solve_autocorrelation_but_homoscedastic_on_balanced_panel_data/attachment/59d6343079197b8077991e0e/AS%3A378302645719042%401467205787854/download/A.H.+Studenmund-Using+Econometrics_+A+Practical+Guide-Pearson+%282013%29.pdf.

39. Venables W.N. and Smith D.M. - 2010. An Introduction to R. - [Електронний ресурс]: режим доступу: https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-intro.pdf.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Функції електронних таблиць Microsoft Excel

Функції для роботи з матрицями: (категорія „Математические”):

МУМНОЖ (масив1; масив2) – розраховує добуток матриць, які знаходяться у масивах.

ТРАНСП (масив) – розраховує транспоновану до матриці у масиві матрицю.

МОБР (масив) – розраховує обернену до матриці у масиві матрицю.

Статистичні функції (категорія „Статистические”):

СРЗНАЧ (масив) – обчислює середнє арифметичне значення ряду даних.

СТАНДОТКЛОНП (масив) – обчислює середньоквадратичне відхилення (стандартну похибку) деякої випадкової величини, заданою масивом своїх значень.

КОРРЕЛ (масив1; масив2) – обчислює коефіцієнт парної кореляції для двох масивів випадкових даних.

FРАСПОБР (вероятность; степени_свободы1; степени_свободы2) – розраховує обернене значення для F–розподілу для рівня значимості α (вероятность) і ступенів вільності ν_1 (степени_свободы1) і ν_2 (степени_свободы2) Функція може використовуватися для визначення критичних значень F–розподілу Fкр.

СТЬЮДРАСПОБР (вероятность; степени_свободы) – визначає значення t-розподілу Ст’юдента для рівня значимості α (вероятность) і ступеню вільності ν (степени_свободы). Функція може використовуватися для визначення критичних значень t-розподілу $t_{кр.}$

Математичні функції (категорія „Математические”):

СУММ (масив) – обчислює суму елементів масиву (блоку) клітинок.

СУММПРОИЗВ (масив1; масив2; масив3; ....) – обчислює суму добутків масивів чисел. Функція перемножує відповідні елементи кожного з масивів, сумує ці добутки і потім визначає суму цих добутків.

СУММКВ (масив) – обчислює суму квадратів елементів деякого масиву (блоку) клітинок. Функція спочатку розраховує квадрати всіх елементів масиву, а потім визначає суму цих квадратів.

КОРЕНЬ (число) – обчислює корінь квадратний з числа. Замість числа може бути посилання на клітинку.

СТЕПЕНЬ (число; степень) – розраховує задану степінь числа. Замість числа може бути посилання на клітинку.

LN (число) – обчислює натуральний логарифм додатного числа. Замість числа може бути посилання на клітинку.

EXP (число) – обчислює значення константи е, підведеної до степені, заданої значенням **числа**. Замість числа може бути посилання на клітинку.

ДОДАТОК Б

Нормальний розподіл. Ординати Y для ±z і площа A між –z і +z під кривою нормального розподілу

z	*X*	*Y*	*A*	1–*A*		*z*	*X*	*Y*	*A*	1–*A*
	μ	0,399	0,0000	1		±1,50	μ±1,50σ	0,1295	0,8664	0,1336
±0,05	μ±0,05σ	0,398	0,0399	0,9601		±1,55	μ±1,55σ	0,1200	0,8789	0,1211
±0,10	μ±0,10σ	0,397	0,0797	0,9203		±1,60	μ±1,60σ	0,1109	0,8904	0,1096
±0,15	μ±0,15σ	0,394	0,1192	0,8808		±1,65	μ±1,65σ	0,1023	0,9011	0,0989
±0,20	μ±0,20σ	0,391	0,1585	0,8415		±1,70	μ±1,70σ	0,0940	0,9109	0,0891
±0,25	μ±0,25σ	0,387	0,1974	0,8026		±1,75	μ±1,75σ	0,0863	0,9199	0,0801
±0,30	μ±0,30σ	0,381	0,2358	0,7642		±1,80	μ±1,80σ	0,0790	0,9281	0,0719
±0,35	μ±0,35σ	0,375	0,2737	0,7263		±1,85	μ±1,85σ	0,0721	0,9357	0,0643
±0,40	μ±0,40σ	0,368	0,3108	0,6892		±1,90	μ±1,90σ	0,0656	0,9426	0,0574
±0,45	μ±0,45σ	0,361	0,3473	0,6527		±1,95	μ±1,95σ	0,0596	0,9488	0,0512
±0,50	μ±0,50σ	0,352	0,3829	0,6171		±2,00	μ±2,00σ	0,0540	0,9545	0,0455
±0,55	μ±0,55σ	0,343	0,4177	0,5823		±2,05	μ±2,05σ	0,0488	0,9596	0,0404
±0,60	μ±0,60σ	0,333	0,4515	0,5485		±2,10	μ±2,10σ	0,0440	0,9643	0,0357
±0,65	μ±0,65σ	0,323	0,4843	0,5157		±2,15	μ±2,15σ	0,0396	0,9684	0,0316
±0,70	μ±0,70σ	0,312	0,5161	0,4839		±2,20	μ±2,20σ	0,0355	0,9722	0,0278
±0,75	μ±0,75σ	0,301	0,5467	0,4533		±2,25	μ±2,25σ	0,0317	0,9756	0,0244
±0,80	μ±0,80σ	0,290	0,5763	0,4237		±2,30	μ±2,30σ	0,0283	0,9784	0,0214
±0,85	μ±0,85σ	0,278	0,6047	0,3953		±2,35	μ±2,35σ	0,0252	0,9812	0,0188
±0,90	μ±0,90σ	0,266	0,6319	0,3681		±2,40	μ±2,40σ	0,0224	0,9836	0,0164
±0,95	μ±0,95σ	0,254	0,6579	0,3421		±2,45	μ±2,45σ	0,0198	0,9857	0,0143
±1,00	μ±1,00σ	0,242	0,6827	0,3173		±2,50	μ±2,50σ	0,0175	0,9876	0,0124
±1,05	μ±1,05σ	0,230	0,7063	0,2937		±2,55	μ±2,55σ	0,0154	0,9892	0,0108
±1,10	μ±1,10σ	0,218	0,7287	0,2713		±2,60	μ±2,60σ	0,0136	0,9907	0,0093
±1,15	μ±1,15σ	0,206	0,7499	0,2501		±2,65	μ±2,65σ	0,0119	0,9920	0,0080
±1,20	μ±1,20σ	0,194	0,7699	0,2301		±2,70	μ±2,70σ	0,0104	0,9931	0,069
±1,25	μ±1,25σ	0,183	0,7887	0,2113		±2,75	μ±2,75σ	0,0091	0,9940	0,0060
±1,30	μ±1,30σ	0,171	0,8064	0,1936		±2,80	μ±2,80σ	0,0079	0,9949	0,0051
±1,35	μ±1,35σ	0,160	0,8230	0,1177		±2,85	μ±2,85σ	0,0069	0,9956	0,0044
±1,40	μ±1,40σ	0,150	0,8385	0,1615		±2,90	μ±2,90σ	0,0060	0,9963	0,0037
±1,45	μ±1,45σ	0,139	0,8529	0,1471		±2,95	μ±2,95σ	0,0051	0,9968	0,0032
±1,50	μ±1,50σ	0,130	0,8664	0,1336		±3,00	μ±3,00σ	0,0044	0,9973	0,0027
						±4,00	μ±4,00σ	0,0001	0,99994	0,00006
						±5,00	μ±5,00σ	0,000001	0,9999994	0,0000006
±0,000	μ	0,3989	0,0000	1,0000		±1,036	μ±1,036σ	0,02331	0,7000	0,3000
±0,126	μ±0,126σ	0,3958	019000	0,9000		±1,282	μ±1,282σ	0,1755	0,8000	0,2000
±0,253	μ±0,253σ	0,3863	0,2000	0,8000		±1,645	μ±1,645σ	0,1031	0,9000	0,1000
±0,385	μ±0,385σ	0,3704	0,3000	0,7000		±1,960	μ±1,960σ	0,0584	0,9500	0,0500
±0,524	μ±0,524σ	0,3477	0,4000	0,6000		±2,257	μ±2,257σ	0,0145	0,9900	0,0100
±0,674	μ±0,674σ	0,3178	0,5000	0,5000		±3,291	μ±3,291σ	0,0018	0,9990	0,0010
±0,842	μ±0,842σ	0,2600	0,6000	0,4000		±3,891	μ±3,891σ	0,0002	0,9999	0,0001

ДОДАТОК В

Процентилі t-розподілу

df	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	3,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,253	0,524	0,842	2,282	1,645	1,960	2,326	2,576
df	$-t_{0,40}$	$-t_{0,30}$	$-t_{0,20}$	$-t_{0,10}$	$-t_{0,05}$	$-t_{0,025}$	$-t_{0,01}$	$-t_{0,005}$

Примітка. Таблицю взято з книги Джонстона «Економетричні методи»

ДОДАТОК Г

Процентилі x^2-розподілу

df	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0.2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,61
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,646	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	10,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,6	140,2	146,6	152,21	158,95	163,64

ДОДАТОК Д

Критичні значення для відношення фон Неймана $P(\frac{\delta^2}{s^2}<k)=\int_0^k \omega(\frac{\delta^2}{s^2})d(\frac{\delta^2}{s^2})$

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0,00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0,00065	0,00047	0,00031	0,00019	0,00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0,00116	0,00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0,01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0,00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0,00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0,02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1,00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241
1,05	0,05186	0,05364	0,04728	0,04325	0,03849	0,03384	0,02959	0,02578	0,02852
1,10	0,06184	0,06140	0,05500	0,05137	0,04618	0,04120	0,03655	0,03232	0,03577
1,15	0,07194	0,06963	0,06361	0,06036	0,05482	0,04957	0,04458	0,03997	0,04425
1,20			0,07323	0,07020	0,06445	0,05901	0,05375	0,04882	0,05407
1,25						0,06956	0,06412	0,05894	0,06531
1,30								0,07040	

ДОДАТОК Е

F-розподіл, 5%-ві точки ($F_{0,95}$)

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	3,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	254	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

ДОДАТОК Ж

F-розподіл, 1%-ві точки ($F_{0,99}$)

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	72,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	4,64
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Навчальне видання

МИКИТИН Тарас Миронович
ПОЛІЩУК Олена Юріївна
БЕРТАШ Борис Миколайович

ПРАКТИКУМ З ЕКОНОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск
Микитин Тарас Миронович

Формат 60x84 1/16
Папір офсет.
Гарнітура Times
Друк офсет.
Ум. друк. арк. 7,8.
Наклад 100 пр.

Коректор *Б.М.Берташ*
Комп'ютерний набір *О.Ю.Поліщук*
Комп'ютерна верстка *О.Ю.Поліщук, Б.М.Берташ*

Видавець Олег Зень
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
Серія №26 від 06 квітня 2004 р.
вул.Кн.Романа, 9/24, м.Рівне, 33022
olegzen@ukr.net
т. +380680250674

Видруковано: ФОП Лецкалюк Ю.О.
вул.В.Чорновола, 17, м.Рівне, 33028
т. +380673826532
Зам. №2023/11/01. Дата випуску 01.12.2023