

Редактор
Ростислав Мартиняк

КОНТАКТНА МЕХАНІКА

ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ
І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

**КОНТАКТНА МЕХАНІКА
ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ
І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ**

Колективна монографія

*За загальною редакцією
Р.М. Мартиняка*

Видавець Вікторія Кундельська
Львів 2022

УДК 539.3

М 29

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода

д-р фіз.-мат. наук, доц. Й.З. Піскозуб

д-р техн. наук, ст. дослідник М.М. Ткачук

Мартиняк Р.М.

М 29 Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова, В.І. Острик, М.С. Слободян, В.І. Кузьменко, О.В. Приходько, Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова, В.П. Силованюк, Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко, О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк, О.В. Максимук, Ю.В. Сачук, А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека, Т.С. Нагірний, К.А. Червінка, А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків; за заг. ред. Р.М. Мартиняка // Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/366177313>

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

Монографія присвячена математичному моделюванню та розробленню аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Для наукових та інженерних працівників, які спеціалізуються в галузі механіки деформівного твердого тіла, контактної механіки і трибології.

Лл. 224. Табл. 23. Бібліогр. 395 назв.

УДК 539.3

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

© Мартиняк Р.М., 2022

© Автори розділів, 2022

© Видавець Вікторія Кундельська, 2022

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	9
ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ	12
РОЗДІЛ 1. Відшарування і руйнування гнучкого підсилення півплощини за сталого й циклічного навантажень	
<i>М.М. Кундрат</i>	14
1.1. Гранична рівновага півбезмежної пластини з підсиленням	14
1.1.1. Формулювання задачі та її розв’язок	15
1.1.2. Відшарування за деформаційним критерієм	18
1.1.3. Автономність зон біля кінців підсилення	21
1.1.4. Розрив підсилення	21
1.2. Матеріал контактної межі крихкий.....	26
1.3. Термопружна задача для півплощини з підсиленням	29
1.4. Пластина з періодичною системою підсилень.....	31
1.4.1. Формулювання задачі та її розв’язування	31
1.4.2. Відшарування підсилень	34
1.4.3. Контактні напруження.....	36
1.4.4. Розривання підсилення.....	38
1.5. Відшарування підсилення за циклічного навантаження.....	39
1.5.1. Формулювання задачі	39
1.5.2. Статичне навантаження.....	40
1.5.3. Циклічне навантаження.....	45
Список використаних джерел	46
РОЗДІЛ 2. Прямі та обернені плоскі контактні задачі за односторонньої взаємодії пружних тіл	
<i>Н.А. Гук, Н.Л. Козакова</i>	48
2.1. Моделювання контакту тіл за наявності односторонніх зв’язків та тертя з використанням варіаційних принципів	48
2.2. Числовий метод розв’язання контактної задачі та ітераційний алгоритм	58
2.3. Дослідження поведінки двошарової системи за наявності односторонніх зв’язків та тертя під дією нормального навантаження	63
2.4. Задача ідентифікації додаткового зовнішнього навантаження для запобігання відшарування шарів.....	70
2.4.1. Математична модель оберненої задачі.....	71
2.4.2. Метод і алгоритм розв’язання задачі ідентифікації	72
2.4.3. Числовий аналіз задачі ідентифікації.....	74
Список використаних джерел	77

РОЗДІЛ 3. Фрикційний контакт берегів тріщини у пружному тілі

<i>В.І. Острик</i>	79
3.1. Контакт берегів прямолінійної тріщини у пружній площині за складного навантаження і різних умов контакту	80
3.2. Міжфазна тріщина у кусково-однорідній площині	86
3.2.1. Напівнескінченна тріщина	86
3.2.2. Скінченна тріщина	91
3.2.3. Взаємодія двох напівнескінчених тріщин	94
3.3. Міжфазна кругова тріщина у кусково-однорідному просторі	97
3.4. Міжфазна напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній смугі	99
3.4.1. Закрита тріщина	99
3.4.2. Часткове розкриття тріщини	103
3.4.3. Необмежена область розкриття тріщини	105
3.5. Тріщина на межі поділу кругового включення і матриці	106
Список використаних джерел	109

РОЗДІЛ 4. Згин та розтяг пластини з круговим отвором та системою прямолінійних тріщин за смугового контакту їх берегів

<i>М.С. Слободян</i>	115
4.1. Формулювання задачі	115
4.2. Побудова розв'язку задачі про згин пластини	117
4.3. Побудова розв'язку плоскої задачі	124
4.4. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі	130
4.5. Числовий аналіз задачі	131
4.5.1. Згин і розтяг пластини з отвором та однією прямолінійною тріщиною	131
4.5.2. Згин пластини з отвором та двома прямолінійними тріщинами	134
Список використаних джерел	137

РОЗДІЛ 5. Контактні задачі для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні

<i>В.І. Кузьменко</i>	140
5.1. Формулювання контактних задач теорії пластичності за складного навантаження	140
5.2. Квазіваріаційна нерівність	142
5.3. Числове розв'язання квазіваріаційної нерівності	145
5.4. Обкочування роликком мікронерівностей на поверхні смуги	147
5.5. Активне навантаження та розвантаження. Залишкова форма поверхні	154
5.6. Обернені задачі утворення мікрорельєфу заданого профілю	159
Список використаних джерел	166

РОЗДІЛ 6. Математичне моделювання фрикційного і безфрикційного контакту пружних шорстких тіл

<i>О.В. Приходько</i>	168
6.1. Моделювання нормальної і тангенціальної контактної податливості шорстких поверхонь.....	169
6.2. Крайові умови контактних задач для шорстких тіл	176
6.2.1. Контактні задачі без урахування тертя	179
6.2.2. Контактні задачі з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування	180
6.3. Зведення контактних задач до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь	183
6.4. Дискретизація інтегральних рівнянь контактної задачі.....	187
6.4.1. Контактні задачі без урахування тертя	187
6.4.2. Контактні задачі з урахуванням тертя.....	188
6.5. Ітераційні процеси для розв'язування дискретизованих рівнянь.....	191
6.5.1. Контактні задачі без урахування тертя	191
6.5.2. Контактні задачі з урахуванням тертя.....	191
Список використаних джерел	193

РОЗДІЛ 7. Задачі про контакт пружних шорстких тіл без тертя та зі зчепленням і проковзуванням

<i>О.В. Приходько</i>	194
7.1. Розв'язування контактних задач без урахування тертя.....	194
7.1.1. Задача про вдавлення циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір	194
7.1.2. Задача про контакт пружних куль зі шорсткими поверхнями ..	195
7.1.3. Задача про стискування пружних циліндрів.....	198
7.2. Розв'язування контактних задач з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування	199
7.2.1. Задача про вдавлення пружної кулі в шорсткий пружний півпростір.....	199
7.2.2. Задача про вдавлення циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування.....	203
7.2.3. Задача про вдавлення прямокутного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування.....	206
Список використаних джерел	209

РОЗДІЛ 8. Деякі просторові контактні задачі з урахуванням тертя і шорсткості

<i>Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова</i>	211
8.1. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору з лінійним законом деформування шорсткості	211
8.1.1. Формулювання задачі	211
8.1.2. Метод розв'язання	214
8.1.3. Аналіз результатів числових досліджень	218
8.2. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору за степеневого закону деформування шорсткості	220
8.2.1. Метод розв'язання	221
8.2.2. Числові результати	224
8.3. Статична задача про контакт в умовах часткового проковзування	226
8.3.1. Формулювання задачі	226
8.3.2. Метод розв'язання	228
8.3.3. Аналіз числових результатів	230
Список використаних джерел	233

РОЗДІЛ 9. Нелінійні моделі контактної взаємодії в транстропних тілах із залікованими тріщинами

<i>В.П. Силованюк</i>	235
9.1. Основні співвідношення теорії пружності транстропного тіла	235
9.2. Задача про поверхню розриву переміщень і напружень в транстропному тілі	237
9.3. Нелінійна модель заповненої тріщини в транстропному тілі	243
9.4. Плоска деформація транстропного тіла із залікованою тріщиною	245
9.5. Заліковування еліпсоїдальної тонкої порожнини-тріщини в транстропному тілі	249
9.6. Ефект розклинювання, що супроводжує заліковування тріщини ін'єктуванням	252
Список використаних джерел	256

РОЗДІЛ 10. Втискування кругового штампа у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі

<i>Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко</i>	257
10.1. Формулювання задачі	258
10.2. Зведення задачі до одновимірної та її розв'язання	260
10.3. Виведення сингулярного інтегрального рівняння	263
10.4. Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння	265
10.5. Встановлення моменту сили та осадки штампку	278
Список використаних джерел	279

РОЗДІЛ 11. Локальне зношування пружних півпросторів із виступами

<i>О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк</i>	281
11.1. Метод дослідження локального зношування тіл з поодиноким виступом на основі моделі фрикційно-втомного руйнування.....	282
11.2. Аналітичні розв'язки задач про зношування тіл із виступами різної форми.....	285
11.3. Зносо-контактна задача для тіл із регулярною системою виступів ...	291
11.4. Зносо-контактна задача для тіл з хвилястою поверхнею.....	296
Список використаних джерел	300

РОЗДІЛ 12. Контактні задачі з урахуванням зношування матеріалу

<i>О.В. Максимук, Ю.В. Сачук</i>	303
12.1. Зношування півплощини штампами канонічної форми	303
12.2. Зношування півплощини, захищеної шаром Вінклера	313
Список використаних джерел	319

РОЗДІЛ 13. Міжфазні розрізи між пластинкою з отвором і ребром жорсткості

<i>А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека</i>	322
13.1. Моделювання контактної взаємодії для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра..	323
13.2. Напружена посадка замкненого пружного ребра в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки	329
13.3. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності симетричного міжфазного розрізу.....	337
13.4. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності двох симетричних міжфазних розрізів.....	344
Список використаних джерел	351

РОЗДІЛ 14. Приповерхнева неоднорідність густини та шорсткість поверхні у моделі локально неоднорідного пружного тіла

<i>Т.С. Нагірний, К.А. Червінка</i>	354
14.1. Густина та шорсткість поверхні тіла	354
14.1.1. Геометрична неоднорідність профілю реальної поверхні.....	354
14.1.2. Густина на поверхні тіла	356
14.2. Базові положення модельного опису.....	357
14.2.1. Балансові рівняння	357
14.2.2. Визначальні співвідношення.....	358
14.2.3. Ключова система рівнянь	360
14.3. Приповерхнева неоднорідність густини у півпросторі.....	361

ЗМІСТ

14.4. Шорсткість поверхні та стан гетерогенного пружного шару	363
Список використаних джерел	368
РОЗДІЛ 15. Модель Комніоу міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів	
<i>А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків</i>	370
15.1. Розподіл напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактом берегів, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу	371
15.2. Наслідки контактної моделі міжфазної тріщини та межі її застосовності	376
15.3. Параметри маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу	380
Список використаних джерел	386
Додаток	389

РОЗДІЛ 13

МІЖФАЗНІ РОЗРІЗИ МІЖ ПЛАСТИНКОЮ З ОТВОРОМ І РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека

Складовими елементами багатьох сучасних машин, споруд та конструкцій є тонкі ізотропні чи анізотропні пластинки, які послаблені конструктивними або технологічними отворами. З метою зменшення концентрації напружень контури отворів підсилюють пружними елементами у вигляді криволінійних ребер жорсткості. Ці ребра, складаючи, як правило, незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність та жорсткість.

Напружено-деформований стан (НДС) пластинки з криволінійним ребром жорсткості, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, суттєво залежить від вибору математичної моделі, що описує деформацію ребра. Найбільш поширеними в науковій літературі є три моделі замкненого або розімкненого криволінійного пружного ребра:

– *модель стрингера* – гнучка пружна плоска лінія, яка наділена сталою або змінною жорсткістю на розтяг (стиск) і збігається з віссю ребра. Така модель не враховує поперечні розміри підсилення і придатна для вивчення гнучких, але жорстких відносно розтягу (стиску) ребер. Відповідно до цієї моделі при переході через вісь ребра виникають стрибки нормальних та дотичних зусиль, а компоненти вектора переміщення залишаються неперервними;

– *балкова модель* – штивна пружна плоска лінія, наділена сталими або змінними жорсткостями на розтяг (стиск) і згин в її площині. Ця модель придатна для відносно жорстких і штивних ребер. Вона породжує стрибки нормальних та дотичних зусиль. Поле переміщень при переході через вісь ребра залишається неперервним;

– *криволінійний стрижень сталого прямокутного поперечного перерізу*, серединна поверхня якого не збігається з нейтральною поверхнею для чистого згину.

Найбільш повний огляд досліджень, які стосуються розробки, модифікацій та застосування таких моделей, наведено в монографії [16].

У цьому розділі підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем великої кривини, для розрахунку НДС якого використано метод сил [7, 21]. Розглянуто мішані контактні задачі для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра. При їх з'єднанні методом пресової посадки [6, 22] досліджено процес розмикання контакту в одній або декількох точках. У випадку зварного (клеєвого) з'єднання пластинки та ребра [5, 23, 24, 28, 29] досліджено

наявність одного або двох міжфазних розривів, які виникли на межі поділу матеріалів внаслідок руйнування (розшарування) з'єднувального шва.

13.1. Моделювання контактної взаємодії для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкнутого пружного ребра

Формулювання задачі. Розглянемо кусково-однорідну пружну систему, що містить пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого підсилено пружним ребром у вигляді замкненої моментної циліндричної оболонки товщиною 2η і висотою $2h_0$ ($h_0 > h$), симетричним відносно серединної площини пластинки. З'єднання пластинки і підсилювального ребра здійснено методом пресової посадки з натягом Δ , який має порядок пружних переміщень, або зварюванням (склеюванням) (рис. 13.1). Тут θ – кут нахилу поперечного перерізу ребра до осі симетрії отвору.

Розглядувана конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного однорідним силовим навантаженням на зовнішньому контурі пластинки, тому всі компоненти НДС віднесені до спільної серединної площини. Розв'язання задачі передбачає визначення напружень і деформацій на контурі отвору в пластинці та підсилювальному ребрі.

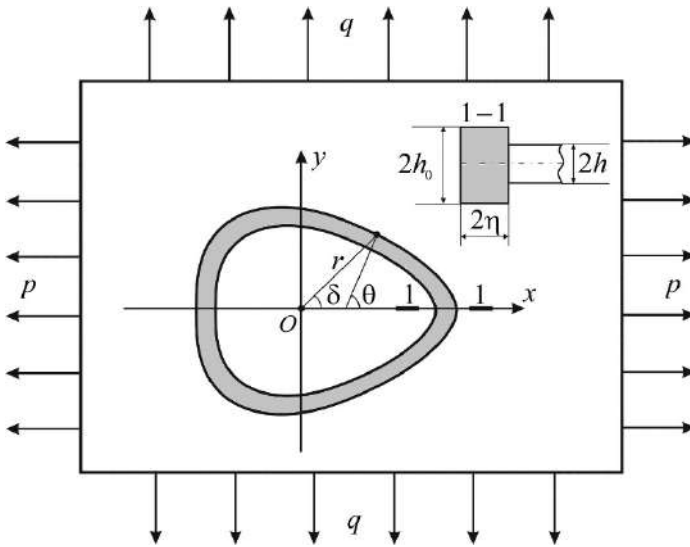


Рис. 13.1

Умовно розділяючи двокомпонентну конструкцію на окремі елементи (пластинку з криволінійним отвором і підсилювальне ребро), замінюючи дію

одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі теорії пружності для пластинки з криволінійним отвором і пружного ребра.

Оскільки характерний розмір отвору значно менший від зовнішніх розмірів пластинки, її будемо моделювати нескінченною пластинкою, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, а на контурі отвору діють контактні зусилля, що передаються до нього від ребра. Її НДС будемо описувати основними рівняннями плоскої задачі теорії пружності [12, 15]. Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем великої кривини, який перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль, що передаються до нього від пластинки [13, 26, 27].

Ізотропна пластинка з криволінійним отвором. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену симетричним криволінійним отвором, обмеженим гладкою циліндричною поверхнею. Середина площина пластинки віднесена до декартової (x, y) та полярної (r, δ) систем координат з полюсом у центрі отвору. Лінію її перетину з поверхнею отвору позначимо Γ і будемо називати контуром отвору.

Вважаємо, що пластинка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями p і q , які діють вздовж координатних осей, та нормальних T_ρ і дотичних $S_{\rho\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра (рис. 13.2).

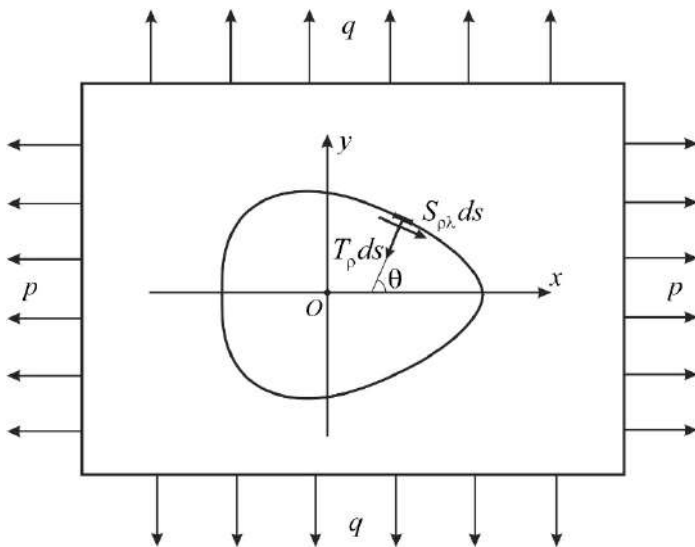


Рис. 13.2

Нехай форма отвору в пластинці визначається функцією [12, 15, 25]

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3} \right), \quad (13.1)$$

яка здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \tilde{\rho} e^{i\lambda}$ ($i = \sqrt{-1}$) на область, яку займає серединна площина пластинки в площині $z = x + iy$. Тут R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, надалі приймаємо $R_0 = 1$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, які характеризують відхилення форми контуру Γ від кола. За умови $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 3|\varepsilon_3| < 1$ функція (13.1) визначає контур Γ як комбінацію кола, еліпса, правильних трикутника і квадрата із закругленими кутами.

Компоненти тензора напружень і тензора деформацій пластинки в точках контуру Γ визначаються за формулами [10, 17, 20]

$$T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \varepsilon_\lambda = \frac{\alpha \varepsilon_\lambda^* + \beta \tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \tilde{V} = \frac{\alpha \tilde{V}^* - \beta \varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (13.2)$$

де

$$\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \omega'(\sigma); \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \quad \varepsilon_\lambda^* + i\tilde{V}^* = (\varepsilon_\lambda + i\tilde{V})\omega'(\sigma);$$

$$\sigma = e^{i\lambda}; \quad \varepsilon_\lambda, \tilde{V} - \text{відносне видовження в точках контуру та кут повороту нормалі до нього.}$$

У випадку зрівноваженого контурного навантаження величини $\varepsilon_\lambda^*, \tilde{V}^*$ на Γ знаходимо зі співвідношень [1, 18, 25]

$$\varepsilon_\lambda^* = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_\lambda^0 \right];$$

$$\tilde{V}^* = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right], \quad (13.3)$$

в яких позначено

$$(1-\varepsilon_3)\alpha_1 = -\frac{1}{2\pi} \oint_\gamma [T_\rho^*(t) \cos 2t - S_{\rho\lambda}^* \sin 2t] dt - \frac{1}{2}(q-p) - \frac{p+q}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3);$$

$$\varepsilon_\lambda^0 = (p+q)(2-\alpha(\lambda)) + [2(q-p) + \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) - 4\alpha_1\varepsilon_3] \cos 2\lambda;$$

$$V^0 = -(p+q)\beta(\lambda) + [2(p-q) - \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) + 4\alpha_1\varepsilon_3] \sin 2\lambda; \quad (13.4)$$

ν, E – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу пластинки.

Крім величин ε_λ та \tilde{V} до параметрів деформації контуру Γ відноситься і його кривина $\tilde{k}(\lambda)$. Для її визначення в працях [6, 22] отримана формула

$$\tilde{k}(\lambda) = \frac{1}{\rho} \left[1 - \varepsilon_\lambda + \frac{d\tilde{V}}{d\theta} \right], \quad (13.5)$$

де $\rho(\lambda)$ – радіус кривини недеформованого контуру; $e^{i\theta} = \sigma\omega'(\sigma) / |\omega'(\sigma)|$.

Ця формула має просту структуру. Перший доданок у її правій частині визначає кривину недеформованого контуру Γ , другий – зміну кривини за рахунок розтягу (стиску) контуру, а третій – зміну кривини за рахунок згину.

Якщо за фіктивні параметрами деформації контуру Γ обрати функції ε_λ^* ; \tilde{V}^* , то на підставі (13.2) формула (13.5) набуває вигляду

$$\tilde{k}(\lambda) = \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta\tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\alpha\tilde{V}^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right]. \quad (13.6)$$

Кільцеві зусилля на контурі Γ в пластинці визначаються зі співвідношення [4, 15]

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (13.7)$$

За умови $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ з (13.3)–(13.7) одержимо відповідні залежності для пластинки з круговим отвором.

Криволінійне підсилювальне ребро. Замкнене підсилювальне ребро перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої бічної поверхні від пластинки (рис.13.3). Його моделюємо криволінійним стрижнем великої кривини і сталого прямокутного поперечного перерізу, серединна поверхня якого не збігається з поверхнею отвору в пластинці [13, 21, 26, 27].

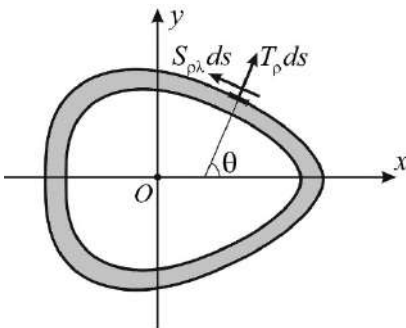


Рис. 13.3

Позначимо через $\rho^{(c)}$ радіус кривини крайнього зовнішнього недеформованого волокна ребра, яке контактує з пластинкою. Будемо вважати, що $\rho \approx \rho^{(c)}$; $\rho^{(c)} - \rho = \Delta > 0$.

Відповідно до прийнятої моделі, напружений стан підсилення визначають внутрішні поздовжня N і поперечна Q сили та згинальний момент L_b , що діють у поперечних перерізах стрижня і віднесені до його осі.

Деформації поздовжніх волокон підсилювального ребра характеризуються відносним видовженням $\varepsilon_\lambda^{(c)}$, кутом повороту нормалі θ_b і кривиною $k^{(c)}$, які визначають за формулами [13, 21]

$$\varepsilon_{\lambda}^{(c)}(\theta) = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\theta) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho \eta_c} L_b(\theta) \right]; \quad \frac{d\theta_b(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\theta) + \frac{L_b(\theta)}{\eta_c} \right];$$

$$k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\rho^{(c)}} \left[1 - \varepsilon_{\lambda}^{(c)} + \frac{d\theta_b}{d\theta} \right], \quad (13.8)$$

в яких введено такі позначення: $2h_0, 2\eta$ – висота і ширина підсилювального ребра; E_0, ν_0 – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу ребра; $E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$ – площа поперечного перерізу ребра; η_c – відстань від осі ребра до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна.

З урахуванням двох перших співвідношень (13.8) останнє набуває вигляду

$$k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\rho^{(c)}} \left[1 + \frac{r_0 L_b(\theta)}{\rho \eta_c E_0 F_0} \right], \quad (13.9)$$

де r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна ребра; $r_0 = \rho - \eta - \eta_c$.

Для замкненого стрижня задача розрахунку внутрішніх сил і моментів N, Q, L_b двічі статично невизначена, тому початкові параметри N_0 і L_b^0 будемо визначати методом сил [7, 21]. З цією метою обираємо основну розрахункову схему стрижня (статично визначену і геометрично незмінну) вилученням зайвих в'язей та заміною їх невідомими внутрішніми реакціями N_0, L_b^0 (рис. 13.4). Зображений розімкнений стрижень працює в таких же умовах, що й верхня частина суцільного стрижня.

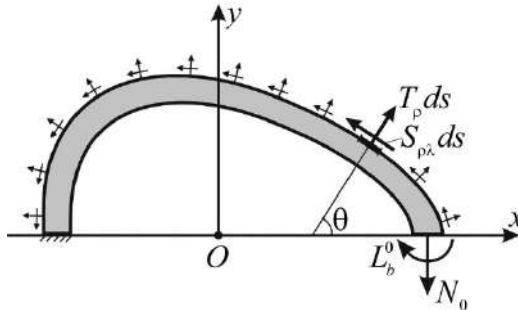


Рис. 13.4

Розглянемо одночасно дію на нього зовнішнього навантаження і невідомих реакцій. Почергово завантажуючи стрижень одиничною парою сил з моментом $L_b^0 = 1$ і одиничною силою $N_0 = 1$, прикладеними в центрі вільного кінця, та зовнішнім навантаженням, запишемо вирази для внутрішніх силових факторів у довільному перерізі, що визначається кутом θ :

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= 1; \quad \bar{N}_1 = 0; \quad \bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{L}_2 = (x_0 - \eta - x + \eta \cos \theta); \quad \bar{N}_2 = \cos \theta; \quad \bar{Q}_2 = \sin \theta, \\ N_p &= \int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt; \\ Q_p &= -\int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t)] dt; \\ L_p &= \eta N_p + \int_0^\lambda [x(\lambda) - x(t)] [T_\rho^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t)] dt - \\ &\quad - \int_0^\lambda [y(\lambda) - y(t)] \int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t)] dt, \\ &\quad \lambda \in [0; \pi] \quad (\theta \in [0; \pi]). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Систему канонічних рівнянь методу сил для стрижня сталої жорсткості запишемо у вигляді [7]

$$\delta_{11} I_b^0 + \delta_{12} N_0 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{21} L_b^0 + \delta_{22} N_0 + \Delta_{2p} = 0, \tag{13.11}$$

де

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \int_0^\pi \left[\bar{L}_i \left(\bar{N}_j + \frac{\bar{L}_j}{\eta_c} \right) + \bar{N}_i (R \bar{N}_j + \bar{L}_j) + 2(1 + \nu_0) \mu R \bar{Q}_i \bar{Q}_j \right] d\theta; \\ \Delta_{ip} &= \int_0^\pi \left[\bar{L}_i \left(N_p + \frac{L_p}{\eta_c} \right) + \bar{N}_i (R N_p + L_p) + 2(1 + \nu_0) \mu R \bar{Q}_i Q_p \right] d\theta; \end{aligned} \tag{13.12}$$

$i, j = 1, 2$; μ – стала (для прямокутного перерізу $\mu = 1.2$).

Співвідношення (13.11), (13.12) забезпечують відсутність повороту і вертикального переміщення вільного кінця стрижня.

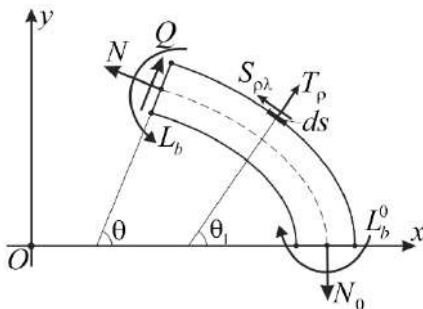


Рис. 13.5

Для визначення внутрішніх силових факторів N, Q, L_b , які виникають у довільному поперечному перерізі та віднесені до осі стрижня, розглянемо рівновагу його частини між перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$ (рис. 13.5). З умов рівноваги плоскої системи сил для виділеної частини стрижня знаходимо

$$N(\lambda) = N_0 \cos \theta + \int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt;$$

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda) &= N_0 \sin \theta - \int_0^\lambda \left[T_\rho^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t) \right] dt; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)] N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^\lambda [x(\lambda) - x(t)] \times \\
 &\times \left[T_\rho^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t) \right] dt - \int_0^\lambda [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t) \right] dt, \\
 \lambda &\in [0; \pi] \quad (\theta \in [0; \pi]).
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

Якщо величини N , Q , L_b стануть відомі, то нормальні напруження в поздовжньому волокні стрижня з радіусом кривини ρ^* визначимо за законом Гука в його одновимірній формі [2, 21]

$$\sigma^{(c)}(\theta) = \frac{1}{F_0} \left[N(\theta) + \frac{\rho^* - r_0}{\rho^*} \cdot \frac{L_b(\theta)}{\eta_c} \right], \tag{13.14}$$

а максимальні дотичні напруження в осьовому волокні – за формулою Журавського [13]

$$\tau_{\max} = 1.5 \frac{Q(\theta)}{F_0}. \tag{13.15}$$

Співвідношення (13.8)–(13.15) визначають повну систему рівнянь для розрахунку НДС замкненого пружного стрижня великої кривини. Приймаючи в них $\eta_c = \eta = L_b(\lambda) = 0$, отримуємо відповідну систему для моделі стрингера, а при $\eta_c = A_0 / (RE_0 F_0)$ (A_0 – жорсткість стрижня на згин) – для балкової моделі.

13.2. Напружена посадка замкненого пружного ребра в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки

У машинобудуванні широко використовуються пресові з'єднання, в яких відносна нерухомість циліндричних тіл досягається за рахунок натягу. Концентрація напружень у таких з'єднаннях є визначальним фактором їх міцності та жорсткості.

Формулювання задачі. Припустимо, що в криволінійний отвір вигляду (13.1) нескінченної ізотропної пластинки з гарантованим натягом $\Delta = \text{const}$ ($\Delta > \Delta_{\min}$) запресоване симетричне відносно осі Ox пружне ребро сталого прямокутного поперечного перерізу $2h_0 \times 2\eta$. Пластинка і ребро мають спільну серединну площину, яка віднесена до прямокутної Oxy і полярної (r, δ) систем координат з полюсом в центрі отвору. Вважаємо, що полярна вісь збігається з віссю Ox і віссю симетрії отвору (рис. 13.6).

Пружна система пластинка–ребро перебуває в умовах узагальненого

плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , які діють на нескінченності в напрямках координатних осей. Зовнішнє навантаження на ребро відсутнє. Його розрахункова схема наведена на рис.13.4.

Розв'язання задачі передбачає: визначення компонент напруженого стану в пластинці та підсилювальному ребрі; встановлення мінімального натягу Δ_{\min} , за якого на ділянці $\lambda \in [0; \pi]$ розпочинається розмикання контакту між пластинкою і ребром лише в одній точці $\lambda = \lambda_*$, і положення цієї точки на контурі Γ .

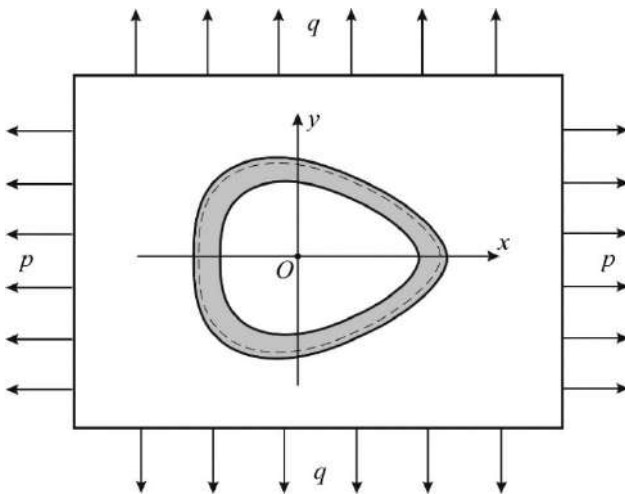


Рис. 13.6

Математична модель задачі. Крайові умови гладкого контактування пластинки і ребра формулюємо у вигляді рівності їх кривин на ділянці контакту

$$k^{(c)}(\lambda) = k(\lambda); \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in [0; 2\pi]. \quad (13.16)$$

На підставі (13.6), (13.8) ці умови можна перетворити до вигляду

$$\frac{\alpha \varepsilon_{\lambda}^* + \beta \tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\alpha \tilde{V}^* - \beta \varepsilon_{\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \varepsilon_{\lambda}^{(c)} + \frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{\Delta}{\rho};$$

$$\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_{\rho}^* = 0, \quad \lambda, \theta \in [0; 2\pi]. \quad (13.17)$$

Величини ε_{λ}^* , \tilde{V}^* і $\varepsilon_{\lambda}^{(c)}$, $\frac{d\theta_b}{d\theta}$ визначаються за формулами (13.3), (13.4) і

(13.8) відповідно, а внутрішні силові фактори N , Q , L_b – зі співвідношень (13.13). Їх підставлення з урахуванням (13.9) в умови (13.17) після певних перетворень призводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР)

з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ^* , $S_{\rho\lambda}^*$:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha + \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\beta \frac{d}{d\lambda} + \beta' - \frac{2\beta(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right] \times \\ & \times \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_\lambda^0 \right] + \\ & + \left[\beta - \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\alpha \frac{d}{d\lambda} + \alpha' - \frac{2\alpha(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right] \times \\ & \times \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right] + \\ & + \frac{2Eh}{E_0 F_0} (\alpha^2 + \beta^2) \frac{r_0 L_b}{\rho \eta_c} = \frac{2Eh\Delta}{\rho} (\alpha^2 + \beta^2); \quad \alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^* = 0, \quad (13.18) \end{aligned}$$

де $R = \rho - \eta$ – радіус кривини осевого волокна підсилювального ребра.

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12), в яких слід прийняти

$$N_p = N(\lambda) - N_0 \cos \theta; \quad Q_p = Q(\lambda) - N_0 \sin \theta;$$

$$L_p = L_b(\lambda) - L_b^0 - [x_0 - \eta - x(\lambda) + \eta \cos \theta] N_0.$$

Співвідношення (13.18), (13.11), (13.12) разом з (13.13) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання використаємо метод скінченних тригонометричних сум.

Оскільки контакт між пластинкою та кільцем неперервний, а задача симетрична відносно осі Ox , то функції T_ρ^* , $S_{\rho\lambda}^*$ обираємо у вигляді

$$T_\rho^*(\lambda) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \lambda + \sum_{n=2}^{M_0} A_n \cos n\lambda; \quad S_{\rho\lambda}^*(\lambda) = B_1 \sin \lambda + \sum_{n=2}^{M_0} B_n \sin n\lambda. \quad (13.19)$$

На підставі співвідношень [3]

$$\oint_\gamma ctg \frac{\lambda-t}{2} dt = 0; \quad \frac{1}{\pi} \oint_\gamma \left\{ \begin{array}{l} \cos mt \\ \sin mt \end{array} \right\} ctg \frac{\lambda-t}{2} dt = 2 \left\{ \begin{array}{l} \sin m\lambda \\ -\cos m\lambda \end{array} \right\}, \quad m \in 1, 2, 3... \quad (13.20)$$

квадратурні формули для обчислення виразів, що входять до (13.18), після певних перетворень набувають вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^* &= \frac{1}{2Eh} \left[-(1+\nu) \frac{A_0}{2} - (1+\nu) A_1 \cos \lambda + \sum_{n=2}^{M_0} [(1-\nu) A_n - 2B_n] \cos n\lambda + \varepsilon_\lambda^0 \right]; \\ V^* &= \frac{1}{2Eh} \left[-(1+\nu) A_1 \sin \lambda + \sum_{n=2}^{M_0} [-2A_n + (1-\nu) B_n] \sin n\lambda + V^0 \right]. \quad (13.21) \end{aligned}$$

Тут врахована умова $A_1 - B_1 = 0$, яка еквівалентна горизонтальній умові рівноваги підсилювального ребра.

Підстановка (13.21) в співвідношення (13.18) з урахуванням (13.20) призводить до системи функціональних рівнянь для визначення сталих A_0, A_1, A_n, B_n ($n = \overline{2, M_0}$):

$$\begin{aligned} & \frac{A_0}{2} a_0(\lambda) + A_1 a_1(\lambda) + B_1 b_1(\lambda) + \sum_{n=2}^{M_0} [A_n a_n(\lambda) + B_n b_n(\lambda)] = \\ & + \frac{2Eh}{E_0 F_0} (\alpha^2 + \beta^2) \frac{r_0 L_b}{\rho \eta_c} = \frac{2Eh\Delta(\alpha^2 + \beta^2)}{\rho} - \alpha \varepsilon_\lambda^0 - \beta V^0 + \\ & + \frac{d\lambda}{d\theta} \left[\alpha \cdot (V^0)' - \beta \cdot (\varepsilon_\lambda^0)' + \alpha' V^0 - \beta' \varepsilon_\lambda^0 - \frac{2(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha V^0 - \beta \varepsilon_\lambda^0) \right], \quad (13.22) \end{aligned}$$

де введено позначення

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= -(1+\nu) \left[\alpha + \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\beta' - \frac{2\beta(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right]; \\ a_n(\lambda) &= (1-\nu)\alpha \cos n\lambda - 2\beta \sin n\lambda - \\ & - \frac{d\lambda}{d\theta} \left[(1-\nu)n\beta \sin n\lambda - 2n\alpha \cos n\lambda - 2\alpha' \sin n\lambda - (1-\nu)\beta' \cos n\lambda + \right. \\ & \left. + \frac{2(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} (2\alpha \sin n\lambda + (1-\nu)\beta \cos n\lambda) \right]; \\ b_n(\lambda) &= (1-\nu)\beta \sin n\lambda - 2\alpha \cos n\lambda - \\ & - \frac{d\lambda}{d\theta} \left[(1-\nu)n\alpha \cos n\lambda - 2n\beta \sin n\lambda + (1-\nu)\alpha' \sin n\lambda + 2\beta' \cos n\lambda - \right. \\ & \left. - \frac{2(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\alpha^2 + \beta^2} ((1-\nu)\alpha \sin n\lambda + 2\beta \cos n\lambda) \right], \quad \lambda \in [0; \pi]. \quad (13.23) \end{aligned}$$

Систему (13.22), (13.23) доповнюємо умовами (13.11), (13.12).

Порівнюючи в (13.22), (13.23) ліві і праві частини при $\lambda_k = \pi(2k-1)/(2M_0)$, $\theta_k = \theta(\lambda_k)$, $k = 1, \dots, M_0$, одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), розв'язок якої можна знайти одним із числових методів, наприклад, методом Гауса.

Якщо сталі A_0, A_1, A_n, B_n ($n = 2, 3, 4, \dots, M_0$), N_0 і L_b^0 стануть відомі, то компоненти напруженого стану на контурі Γ в пластинці визначаються за формулами (13.2), (13.7), а нормальні напруження в крайніх поздовжніх волокнах ребра і дотичні напруження в осьовому волокні ребра, на підставі (13.14), (13.15), зі співвідношень

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta + \eta_c}{\eta_c} \cdot \frac{L_b}{\rho} \right]; \quad \sigma^{(2)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta_c - \eta}{\eta_c} \cdot \frac{L_b}{\rho - 2\eta} \right]; \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F_0}. \quad (13.24)$$

Зауважимо, що метод скінченних тригонометричних сум можна застосовувати лише при виконанні умови $\Delta \geq \Delta_{\min}$. Тут Δ_{\min} – мінімальний натяг, за якого забезпечується повний контакт між пластинкою і підсилювальним ребром, а розмикання контакту можливе лише в одній або декількох точках. Для його встановлення до системи (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) необхідно долучити умови

$$T_\rho(\lambda_k) = 0, \quad T_\rho(\lambda) < 0 \quad (\lambda \neq \lambda_k). \quad (13.25)$$

На практиці точне визначення кута λ_k пов'язане зі значними математичними труднощами, тому для наближеного розв'язання цієї проблеми використаємо метод дихотомії, запропонований в праці [19].

Довільно обираємо інтервал $[\Delta_1, \Delta_2]$ зміни натягу Δ , для якого $\Delta_1 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta_2$. На першому кроці розв'язуємо систему рівнянь (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) для натягу $\Delta^{(0)} = (\Delta_1 + \Delta_2) / 2$ і визначаємо знак контактних зусиль T_ρ на проміжку $\lambda \in [0; \pi]$. Якщо виявиться, що всі значення $T_\rho(\lambda_k)$ від'ємні, то за наступне значення натягу $\Delta^{(1)} = (\Delta_1 + \Delta^{(0)}) / 2$ обираємо середину проміжку $[\Delta_1, \Delta^{(0)}]$. У випадку, коли серед значень $T_\rho(\lambda_k)$ є додатні та від'ємні або тільки додатні, то $\Delta^{(1)} = (\Delta^{(0)} + \Delta_2) / 2$ визначається серединою проміжку $[\Delta^{(0)}, \Delta_2]$. Процес поділу проміжків навпіл продовжують доти, поки інтервал зміни Δ не звузиться в точку і визначить Δ_{\min} . Місце дотику епюри T_ρ при $\Delta = \Delta_{\min}$ до контуру Γ визначає точку та відповідний їй кут розмикання контакту λ_k .

Результати числового розрахунку. Для пластинки ($\nu = 0.3$) з криволінійним ($\varepsilon_1 = -0.08$; $\varepsilon_2 = 0.05$; $\varepsilon_3 = 0$) отвором і пружного ребра з параметрами $h_0/h = 4/3$; $\eta = 0.05R_0$; $E_0/E = 2$; $\nu_0 = 0.3$ запропонованим методом досліджено вплив зовнішнього навантаження та натягу Δ на розподіл зусиль T_ρ і T_λ по контуру Γ в пластинці та нормальних напружень $\sigma^{(c)}$ в крайніх поздовжніх волокнах ребра.

Результати числового розрахунку при $M_0 = 125$ наведені на рис. 13.7–13.8 ($p \neq 0$; $q = 0$) і рис. 13.9–13.10 ($p = 0$; $q \neq 0$). Суцільні лінії відповідають випадку $\Delta = \Delta_{\min}$, штрихові – $\Delta = 1.5\Delta_{\min}$, штрихпунктирні – $\Delta = 2\Delta_{\min}$.

У наведеному прикладі збільшення величини натягу призводить до суттєвого збільшення контактних зусиль між пластинкою і ребром та нормальних напружень у поздовжніх волокнах підсилення, які при перевищенні натягом значення $\Delta = 1.5\Delta_{\min}$ стають стискальними. Кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки для всіх видів навантаження практично

не залежать від величини натягу.

Збіжність методу оцінювалася співставленням результатів розрахунку для різних значень M_0 до $M_0 = 125$. Зауважимо, що починаючи з $M_0 = 75$, всі результати розрахунку повністю співпадають, що свідчить про його добру збіжність.

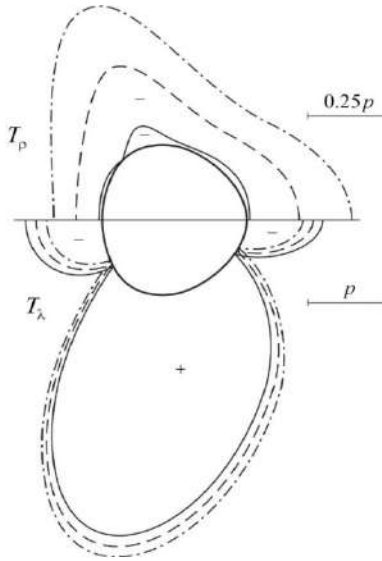


Рис. 13.7

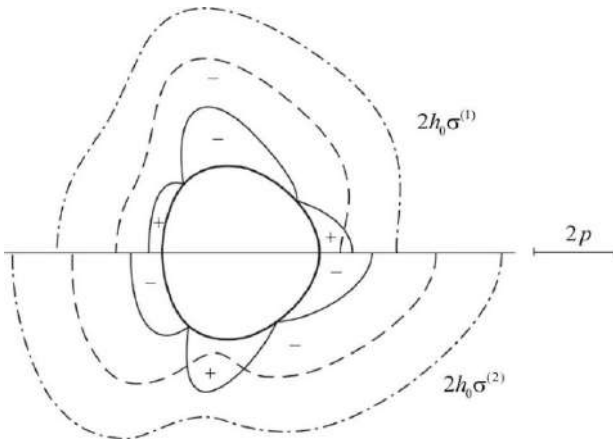


Рис. 13.8

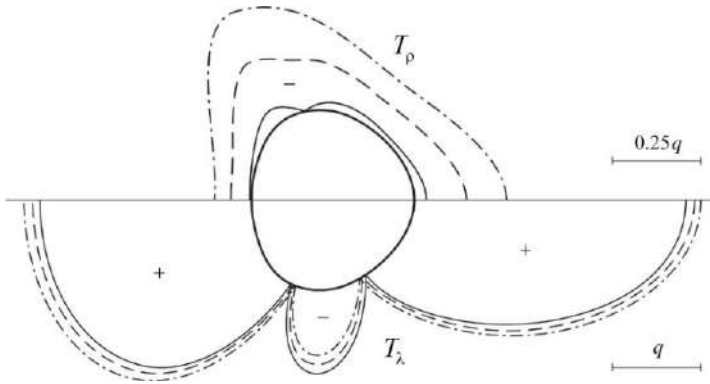


Рис. 13.9

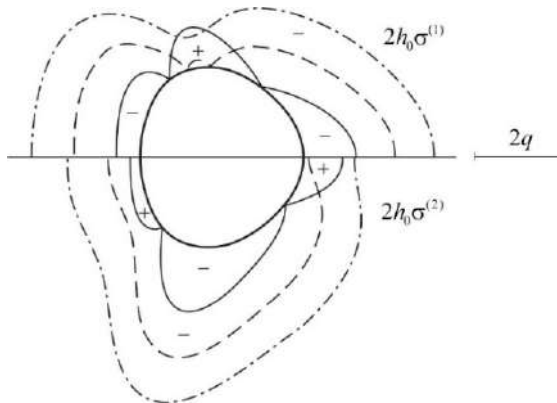


Рис. 13.10

Для пластинки ($\nu = 0.3$) з еліптичним ($\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_3 = 0$) отвором і пружного ребра з параметрами $h_0/h = 4/3$; $\eta = 0.05R_0$; $E_0/E = 2$; $\nu_0 = 0.3$ запропонованим методом досліджено вплив величини натягу та зовнішнього навантаження на положення точок розмикання контакту в системі відліку $(\tilde{\rho}, \lambda)$ та максимальні значення величин $T_\lambda(0)$, $2h_0\sigma^{(1)}(0)$, $2h_0\sigma^{(2)}(\pi/2)$. Результати розрахунку наведені в таблиці, де позначено $\Delta^* = 2Eh\Delta$; $\Delta_{\min}^* = 2Eh\Delta_{\min}$. Числові значення в знаменнику відповідають навантаженню $p = 1$; $q = 0$, а в чисельнику – $p = 0$; $q = 1$.

λ_* (град)	Δ_{\min}^*	Δ^*	$T_\lambda(0)$	$2h_0\sigma^{(1)}(0)$	$2h_0\sigma^{(2)}(\pi/2)$
$\frac{0.000}{42.47}$	$\frac{0.7844}{1.2571}$	Δ_{\min}^*	$\frac{3.4349}{2.6463}$	$\frac{-1.2504}{-0.6995}$	$\frac{-0.7787}{-1.3658}$
		$1.25\Delta_{\min}^*$	$\frac{3.5102}{2.6850}$	$\frac{-1.8511}{-1.1151}$	$\frac{-1.4628}{-1.8398}$
		$1.5\Delta_{\min}^*$	$\frac{3.5856}{2.7238}$	$\frac{-2.4519}{-1.5307}$	$\frac{-2.1469}{-2.3138}$

Розглянемо аналітичний метод визначення кількості точок, в яких розпочинається розмикання контакту між пластинкою і запресованим ребром. Як відомо, розв'язок такої задачі визначає рівняння

$$T_\rho(\lambda) = 0, \quad (13.26)$$

яке з урахуванням умови $\alpha S_{\rho\lambda}^* = \beta T_\rho^*$ і (13.19) можна записати у вигляді

$$T_\rho^*(\lambda) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \lambda + \dots + A_n \cos n\lambda = 0. \quad (13.27)$$

Точку (точки) екстремуму функції $T_\rho^*(\lambda)$ визначаємо з рівняння

$$A_1 \sin \lambda + 2A_2 \sin 2\lambda + \dots + nA_n \sin n\lambda = 0, \quad (13.28)$$

яке після певних перетворень можна записати так:

$$\sin \lambda \cdot (0.5 \cdot a_0 + a_1 \cos \lambda + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)\lambda) = 0, \quad (13.29)$$

де a_0, a_1, \dots, a_{n-1} – коефіцієнти, що залежать від A_1, A_2, \dots, A_n .

Рівняння (13.29) еквівалентне двом рівнянням

$$\sin \lambda = 0 \quad \text{або} \quad 0.5 \cdot a_0 + a_1 \cos \lambda + \dots + a_{n-1} \cos(n-1)\lambda = 0. \quad (13.30)$$

Перше з них на проміжку $[0; 2\pi]$ має два різних корені $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \pi$, а друге – або не має коренів, або має пару (декілька пар) симетричних відносно осі Ox коренів $\lambda_3 = \lambda_*$; $\lambda_4 = -\lambda_*$.

У випадку подвійної симетрії задачі рівняння (13.30) набувають вигляду

$$\sin 2\lambda = 0 \quad \text{або} \quad 0.5 \cdot a_0 + a_1 \cos 2\lambda + \dots + a_{2(n-1)} \cos 2(n-1)\lambda = 0. \quad (13.31)$$

Корені першого рівняння $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \pi/2$; $\lambda_3 = \pi$; $\lambda_4 = 3\pi/2$ попарно належать кожній з двох осей симетрії. Друге рівняння або не має коренів, або має четвірку (декілька четвірок) попарно симетричних відносно двох осей симетрії коренів $\lambda_5 = \lambda^*$; $\lambda_6 = \pi - \lambda^*$; $\lambda_7 = \pi + \lambda^*$; $\lambda_8 = 2\pi - \lambda^*$, які не належать цим осям.

Оскільки точку (точки) розмикання контакту визначає абсолютний максимум функції $T_\rho^*(\lambda)$, то на підставі зазначеного вище можна зробити такий висновок: якщо контур отвору має одну вісь симетрії, то розмикання

контакту між пластинкою і ребром розпочнеться або в одній з точок на осі симетрії, або в двох симетричних точках, що не належать осі симетрії; якщо контур отвору має дві осі симетрії, то розмикання контакту між пластинкою і ребром розпочнеться або в двох діаметрально протилежних точках на одній з осей симетрії, або в чотирьох попарно симетричних точках, які не належать осям симетрії.

Якщо умова $\Delta \geq \Delta_{\min}$ не виконується, то на ділянці суцільного контакту в околі точок його розмикання при плавному зменшенні натягу з'являються зони відставання, на яких контактні зусилля між пластинкою і підсилювальним ребром дорівнюють нулю. При цьому крайові умови задачі стають мішаними, внаслідок чого змінюється структура розв'язку задачі і застосування методу скінченних тригонометричних сум стає неможливим.

Дещо інший підхід до розв'язання розглянутих у цьому підрозділі задач з використанням третьої моделі підсилювального ребра і особливих граничних умов запропоновано в працях [2, 9, 11].

13.3. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності симетричного міжфазного розриву

У процесі виготовлення чи експлуатації кусково-однорідних пластин на криволінійній межі поділу матеріалів можуть виникати дефекти, зокрема, тріщини або розриви нульової ширини, які зумовляють високу концентрацію напружень і подальше міжфазне руйнування за дії силового навантаження. Такі ж дефекти можуть виникнути і на ділянках руйнування з'єднувального шва.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну пластинку з криволінійним отвором, контур якого Γ підсилений замкненим пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу. З'єднання пластинки та ребра здійснено методом зварювання (склеювання).

Припустимо, що зовні симетричної ділянки $\Gamma_1 = [-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ контуру Γ між пластинкою і підсилювальним ребром, відбулося руйнування (розшарування) з'єднувального шва внаслідок чого виник міжфазний розрив, береги якого в процесі деформації не контактують. Схема навантаження пластинчастої конструкції наведена на рис. 13.11.

Розв'язання задачі передбачає визначення компонент напруженого стану на контурі Γ в пластинці, підсилювальному ребрі та дослідження впливу на ці величини міжфазного розриву, форми отвору, відносної жорсткості ребра та виду зовнішнього навантаження.

Математична модель задачі. НДС пластинки визначають контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, прикладені до ділянки $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ контуру Γ з боку підсилювального ребра, і зовнішнє навантаження на нескінченності. При заданому навантаженні деформації контуру Γ в нескінченній пластинці, на

підставі (13.3), (13.4), визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda}^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_{\rho}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_{\rho}^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_{\lambda}^0 \right]; \\ \tilde{V}^* &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_{\rho}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right], \end{aligned} \quad (13.32)$$

де $[-\alpha_0; \alpha_0]$ – прообраз ділянки $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ при відображенні (13.1).

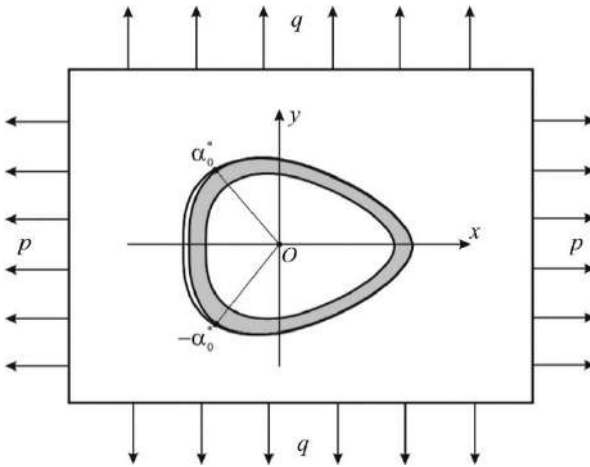


Рис. 13.11

Підсилювальне ребро деформується контактними зусиллями T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої поверхні від пластинки. Її розрахункова схема наведена на рис. 13.12.

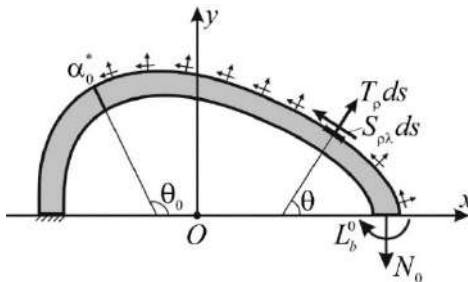


Рис. 13.12

Записуючи умови рівноваги для частинки ребра між поперечними

перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$, знаходимо

$$\begin{aligned}
 N(\lambda) &= N_0 \cos \theta + \int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt; \\
 Q(\lambda) &= N_0 \sin \theta - \int_0^\lambda [T_\rho^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t)] dt; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^\lambda [x(\lambda) - x(t)] \times \\
 &\times [T_\rho^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t)] dt - \int_0^\lambda [y(\lambda) - y(t)] [T_\rho^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t)] dt, \\
 \lambda &\in [0; \lambda_0] \quad (\theta \in [0; \theta_0]). \tag{13.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(\lambda) &= N_0 \cos \theta + \int_0^{\alpha_0} [T_\rho^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt; \\
 Q(\lambda) &= N_0 \sin \theta - \int_0^{\alpha_0} [T_\rho^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t)] dt; \\
 L_b(\lambda) &= L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^{\alpha_0} [x(\lambda) - x(t)] \times \\
 &\times [T_\rho^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t)] dt - \int_0^{\alpha_0} [y(\lambda) - y(t)] [T_\rho^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t)] dt, \\
 \lambda &\in [\alpha_0; \pi] \quad (\theta \in [\theta_0; \pi]). \tag{13.34}
 \end{aligned}$$

Фізичні залежності для зовнішнього поздовжнього волокна ребра, яке контактує з пластинкою, мають вигляд (13.8), (13.33). Максимальні нормальні напруження в крайніх волокнах ребра і найбільші дотичні напруження в осьовому волокні ребра визначаються за формулами (13.24).

З'єднувальний елемент моделюємо пружною лінією жорсткість якої на розтяг (стиск) значно менша ніж відповідна жорсткість підсилювального ребра.

Математична модель задачі. Нехтуючи впливом зварювального шва (клеювого прошарку) [5, 24, 28, 29], крайові умови задачі на ділянці з'єднання формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту між пластинкою і підсилювальним ребром в диференціальній формі $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_\lambda^{(c)}$; $\tilde{V}(\lambda) = \theta_b(\lambda)$, $\lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]$. З урахуванням (13.2) і (13.8) їх можна перетворити до вигляду

$$\frac{\alpha(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda) + \beta(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\frac{\alpha(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda) - \beta(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0} \int_0^\lambda \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \quad (13.35)$$

Підставляючи (13.32), (13.33) в (13.35), одержимо ССІР з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ^* , $S_{\rho\lambda}^*$

$$\begin{aligned} & \alpha(\lambda) \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_\lambda^0 \right] + \\ & + \beta(\lambda) \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^* dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right] = \\ & = \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right]; \\ & \alpha(\lambda) \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^* dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + V^0 \right] - \\ & - \beta(\lambda) \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \varepsilon_\lambda^0 \right] = \\ & = \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0 F_0} \int_0^\lambda \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \quad (13.36) \end{aligned}$$

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12), в яких слід прийняти

$$N_p = N(\lambda) - N_0 \cos \theta; \quad Q_p = Q(\lambda) - N_0 \sin \theta;$$

$$L_p = L_b(\lambda) - L_b^0 - [x_0 - \eta - x(\lambda) + \eta \cos \theta] N_0. \quad (13.37)$$

Разом з (13.11), (13.12), (13.37), (13.33) співвідношення (13.36) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.37), (13.33), (13.36) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки з'єднання пластинки та ребра.

Оскільки розглядувана задача відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [4, 12, 14] контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda = \pm\alpha_0$ ділянки з'єднання пластинки і ребра мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Нехтуючи її впливом, наближений розв'язок задачі побудуємо комбінованим методом механічних квадратур і колокації [1, 8, 10, 17, 18, 20].

З цією метою в системі (13.11), (13.12), (13.37), (13.33), (13.36) перейдемо до стандартного проміжку інтегрування $[-1; 1]$. Це можна зробити

заміною змінних

$$tg \frac{\lambda}{2} = a_0 X ; \quad tg \frac{t}{2} = a_0 S , \quad (13.38)$$

де

$$a_0 = tg \frac{\alpha_0}{2} ; \quad dt = \frac{2a_0 dS}{1+a_0^2 S^2} ; \quad ctg \frac{\lambda-t}{2} dt = \frac{2dS}{X-S} + \frac{2a_0^2 S dS}{1+a_0^2 S^2} .$$

Відповідно до структури розв'язку шукані функції обираємо у вигляді

$$\{T_{\rho}^*(X), S_{\rho\lambda}^*(X)\} = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} \{\Psi_1(X), \Psi_2(X)\} . \quad (13.39)$$

Тут $\Psi_1(X), \Psi_2(X)$ – обмежені та неперервні на $[-1;1]$ функції.

Побудуємо для них інтерполяційні поліноми Лагранжа, вибравши за вузли інтерполяції $\phi_n = \frac{2n-1}{2K_0} \pi \left(n = \overline{1, K_0} \right)$ корені многочлена Чебишева першого роду порядку K_0

$$\{\Psi_1(X), \Psi_2(X)\} = \sum_{n=1}^{K_0} \{A_n, B_n\} \Phi(\phi, \phi_n) , \quad (13.40)$$

у яких введено позначення: A_n, B_n – довільні сталі; $X = \cos \phi$;

$$\Phi(\phi, \phi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos(K_0 \phi) \sin \phi_n}{K_0 (\cos \phi - \cos \phi_n)} , \quad \phi \in [0; \pi] . \quad (13.41)$$

Використовуючи рівність $\Phi(\phi_n, \phi_n) = 1$, знаходимо у вузлах інтерполяції

$$\{T_{\rho}^*(\lambda_k), S_{\rho\lambda}^*(\lambda_k)\} = \left\{ \frac{A_k}{\sin \phi_k}, \frac{B_k}{\sin \phi_k} \right\} , \quad k = 1, 2, \dots, K_0 . \quad (13.42)$$

Регулярні інтеграли від функцій $T_{\rho}^*(\lambda), S_{\rho\lambda}^*(\lambda)$ визначаються за квадратурними формулами Гауса

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} dt = \frac{2}{K_0} \sum_{n=1}^{K_0} \left\{ \frac{A_n}{\sin \phi_n}, \frac{B_n}{\sin \phi_n} \right\} q_n . \quad (13.43)$$

Тут $F(\lambda, t)$ – регулярна на $[-1;1]$ функція; $q_n = \frac{a_0 \sin \phi_n}{1+a_0^2 \cos^2 \phi_n}$.

Для обчислення сингулярних інтегралів з ядрами Гільберта у вузлах інтерполяції $\lambda = \lambda_k$ використовуємо квадратурну формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} ctg \frac{\lambda_k - t}{2} dt =$$

$$= \frac{2}{K_0} \sum_{n=1}^{K_0} \left\{ \frac{A_n}{\sin \phi_n}, \frac{B_n}{\sin \phi_n} \right\} \left(q_n a_0 \cos \phi_n - \frac{\sin \phi_n}{\sin \phi_k} \operatorname{ctg} \frac{\phi_k + (-1)^{n+k} \phi_n}{2} \right). \quad (13.44)$$

З урахуванням (13.43), (13.44) та умов $T_\rho(-\lambda) = T_\rho(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(-\lambda) = -S_{\rho\lambda}(\lambda)$ квадратурні формули для регулярних і сингулярних інтегралів, які входять до системи (13.36), можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) dt &= \frac{2}{M_0} \sum_{n=1}^{M_0} \frac{A_n}{\sin \phi_n} q_n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt &= -\frac{2}{M_0} \sum_{n=1}^{M_0} \frac{A_n}{\sin \phi_n} \frac{\operatorname{ctg} \phi_k \sin \phi_n}{\sin \phi_k + (-1)^{k+n} \sin \phi_n}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt &= \frac{2}{M_0} \sum_{n=1}^{M_0} \frac{B_n}{\sin \phi_n} \left[-\frac{\sin \phi_n}{\sin \phi_k} \frac{\cos \phi_n}{\sin \phi_k + (-1)^{k+n} \sin \phi_n} + a_0 q_n \cos \phi_n \right], \\ \lambda_k &\in [0; \alpha_0]. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Тут $2M_0 = K_0$; M_0 – число вузлів інтерполяції на проміжку $[0; \pi/2]$.

Підставляючи співвідношення (13.42), (13.45) в систему (13.36) та порівнюючи ліві і праві частини рівнянь у вузлах колокації $\lambda = \lambda_k$ ($\phi = \phi_k$), одержимо СЛАР для визначення сталих A_n , B_n , N_0 , L_b^0 . Якщо ці сталі стануть відомі, то шукані функції у вузлах колокації визначаються за формулами (13.42). При цьому компоненти напруженого стану в пластинці та ребрі знаходимо зі співвідношень (13.2), (13.7), (13.33), (13.34).

Результати числового розрахунку. Для ізотропної ($\nu = 0.3$) пластинки з криволінійним ($\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.1$; $\varepsilon_3 = 0$) отвором і підсилювального ребра з фізико-геометричними параметрами $\alpha_0 = 2\pi/3$; $h_0/h = 4/3$; $\eta/R_0 = 0.5$; $\nu_0 = 0.3$ досліджено вплив на їх напружений стан форми отвору та відносної жорсткості підсилення E_0/E . Результати числового розрахунку величин T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$, $F_0\tau_{\max}$ при $p=0$, $q=1$ наведені на рис.13.13–13.15. Суцільні лінії побудовані для випадку $E_0/E=1$, штрихові – $E_0/E=5$, штрихпунктирні – $E_0/E=10$. Пунктирна лінія побудована для непідкріпленого контуру ($E_0/E=0$).

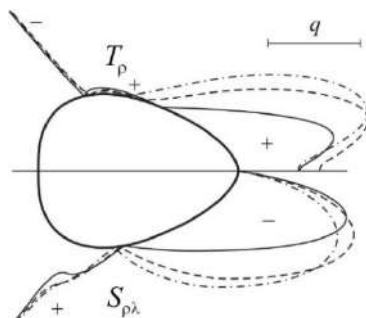


Рис. 13.13

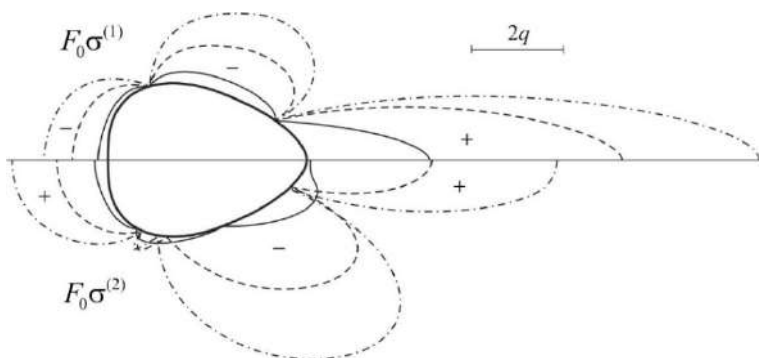


Рис. 13.14

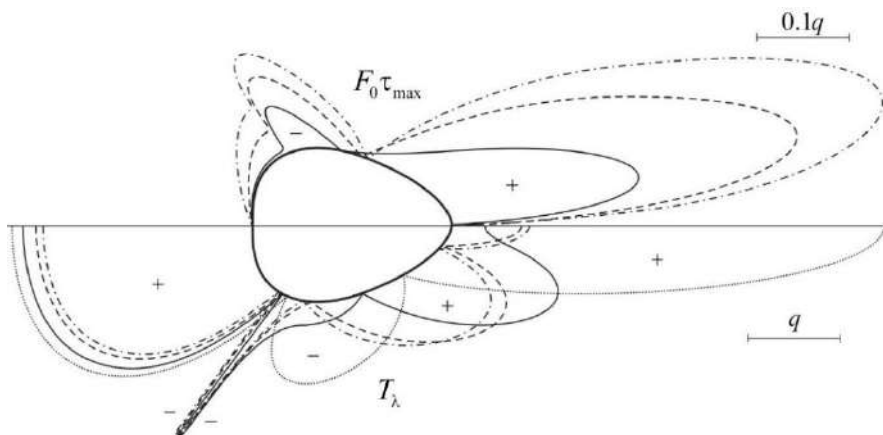


Рис. 13.15

Аналізуючи графіки, наведені на рис. 13.13–13.15, приходимо до висновку, що наявність міжфазного розрізу вносить значний вклад у перерозподіл усіх компонент напруженого стану пластинки і підсилювального ребра. Відзначимо, що при віддаленні від кінців розрізу на ділянці сполучення пластинки та ребра компоненти напруженого стану практично не відрізняються від відповідних компонент за відсутності розрізу.

Зі збільшенням відносної жорсткості підсилювального ребра максимальні значення контактних зусиль у пластинці та нормальних і дотичних напружень у ребрі суттєво зростають. У той же час кільцеві зусилля на ділянці сполучення пластинки і ребра різко зменшуються, залишаючись практично незмінними на ділянці розрізу.

13.4. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності двох симетричних міжфазних розрізів

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з криволінійним отвором вигляду (13.1), контур якого Γ підсилений замкненим пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу.

Припустимо, що в процесі виготовлення конструкції чи її експлуатації на лінії сполучення пластинки і ребра зовні ділянок $[-\beta_0^*, -\alpha_0^*]$, $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$, де α_0^* , β_0^* – полярні кути, виникли два симетричних відносно осі Ox міжфазні розрізи, береги яких у процесі деформації не контактують. Розрахункова схема пластинчастої конструкції наведена на рис.13.16.

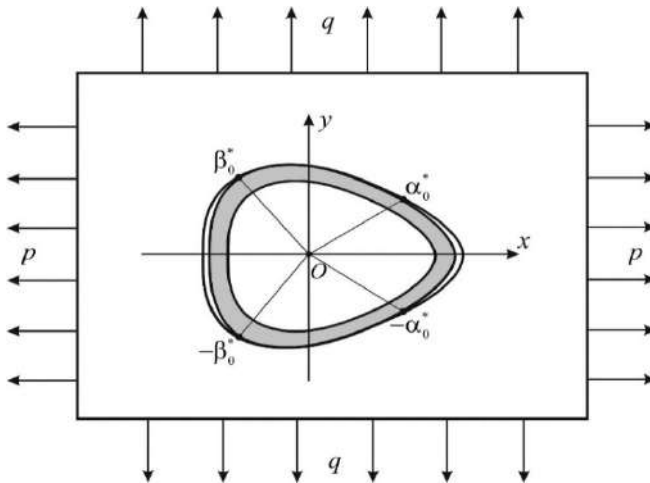


Рис. 13.16

Як і в попередньому підрозділі розв'язання задачі передбачає визначення компонент напруженого стану на контурі Γ в пластинці, підсилювальному ребрі та дослідження впливу на ці величини розмірів міжфазних розривів, відносної жорсткості ребра та виду зовнішнього навантаження.

Основні рівняння задачі. Умовно відділимо підсилювальне ребро від пластинки, замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями T_ρ , $S_{\rho\lambda}$.

Нескінченна ізотропна пластинка перебуває у рівновазі під дією навантаження на нескінченності і контактних зусиль, які на ділянках $[-\beta_0^*, -\alpha_0^*]$, $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ передаються від підсилювального ребра.

Оскільки ділянки підсилення симетричні відносно осі Ox , то з урахуванням умов $T_\rho(-\lambda) = T_\rho(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(-\lambda) = -S_{\rho\lambda}(\lambda)$ співвідношення (13.3) для визначення деформацій контуру Γ після певних перетворень набувають вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^*(\lambda) &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + \varepsilon_\lambda^0 \right]; \\ V^*(\lambda) &= \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_\rho^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + V^0 \right], \\ &\lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Тут $[\alpha_0; \beta_0]$ – прообраз ділянки $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ при відображенні (13.1).

Підсилювальне ребро деформується контактними зусиллями T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої бічної поверхні на ділянці $[\alpha_0; \beta_0]$ від пластинки. Його розрахункова схема наведена на рис. 13.17.

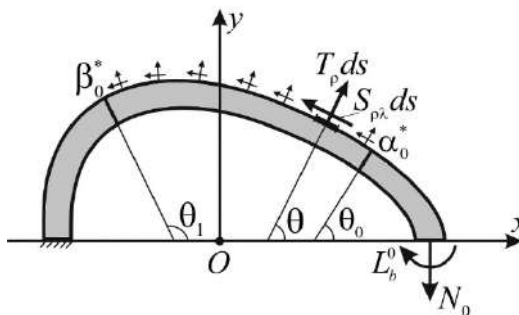


Рис. 13.17

При заданому навантаженні компоненти напруженого стану в поперечних перерізах стрижня визначаються співвідношеннями

$$N(\lambda) = N_0 \cos \theta; \quad Q(\lambda) = N_0 \sin \theta; \quad L_b(\lambda) = L_b^0 + (x_0 - \eta - x(\lambda))N_0 + \eta N(\lambda),$$

$$\lambda \in [0; \alpha_0] \quad (\theta \in [0; \theta_0]). \quad (13.47)$$

$$N(\lambda) = N_0 \cos \theta + \int_{\alpha_0}^{\lambda} [T_{\rho}^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin \theta - \int_{\alpha_0}^{\lambda} [T_{\rho}^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t)] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_{\alpha_0}^{\lambda} [x(\lambda) - x(t)] \times$$

$$\times [T_{\rho}^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t)] dt - \int_{\alpha_0}^{\lambda} [y(\lambda) - y(t)] [T_{\rho}^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t)] dt,$$

$$\lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \quad (\theta \in [\theta_0; \theta_1]). \quad (13.48)$$

$$N(\lambda) = N_0 \cos \theta + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [T_{\rho}^*(t) \sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(\theta - t)] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin \theta - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [T_{\rho}^*(t) \cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(\theta - t)] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [x(\lambda) - x(t)] \times$$

$$\times [T_{\rho}^*(t) \sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t) \cos(t)] dt - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [y(\lambda) - y(t)] [T_{\rho}^*(t) \cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \sin(t)] dt,$$

$$\lambda \in [\beta_0; \pi] \quad (\theta \in [\theta_1; \pi]). \quad (13.49)$$

Математична модель задачі. Як і у випадку одного міжфазного розрізу крайові умови задачі формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту між пластинкою і підсилювальним ребра в диференціальній формі на ділянці їх з'єднання. На підставі (13.35) ці умови можна записати у вигляді

$$\frac{\alpha(\lambda)\varepsilon_{\lambda}^*(\lambda) + \beta(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\frac{\alpha(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda) - \beta(\lambda)\varepsilon_{\lambda}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0} \int_0^{\lambda} \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \quad (13.50)$$

Підставляючи (13.46), (13.48) в крайові умови (13.50) з урахуванням (13.8), одержимо ССІР з ядрами Гільберта для визначення функцій T_{ρ}^* , $S_{\rho\lambda}^*$

$$\begin{aligned} & \alpha(\lambda) \left[(1-\nu)T_{\rho}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_{\rho}^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + \varepsilon_{\lambda}^0 \right] + \\ & + \beta(\lambda) \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^* dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_{\rho}^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + V^0 \right] = \\ & = \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right]; \\ & \alpha(\lambda) \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^* dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_{\rho}^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + V^0 \right] - \\ & - \beta(\lambda) \left[(1-\nu)T_{\rho}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} T_{\rho}^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} S_{\rho\lambda}^*(t) \left(\operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda+t}{2} \right) dt + \varepsilon_{\lambda}^0 \right] = \\ & = \frac{2Eh(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))}{E_0 F_0} \int_0^{\lambda} \left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \quad (13.51) \end{aligned}$$

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12) для визначення сталих N_0 , L_b^0 , в яких слід прийняти

$$\begin{aligned} N_p &= N(\lambda) - N_0 \cos \theta; \quad Q_p = Q(\lambda) - N_0 \sin \theta; \\ L_p &= L_b(\lambda) - L_b^0 - [x_0 - \eta - x(\lambda) + \eta \cos \theta] N_0. \end{aligned} \quad (13.52)$$

Разом з (13.11), (13.12), (13.52) і (13.48) співвідношення (13.51) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Система (13.11), (13.12), (13.51), (13.52) і (13.48) має таку ж структуру, як і відповідна система для ізотропної пластинки з одним міжфазним розрізом. Тому для визначення її наближеного розв'язку використаємо метод механічних квадратур і колокації, апробований в підрозділі 13.3.

Заміною змінних

$$\lambda = 2 \operatorname{arctg}(a_0 X + b_0); \quad t = 2 \operatorname{arctg}(a_0 S + b_0),$$

де

$$a_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{2}; \quad b_0 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}}{2}; \quad dt = \frac{2a_0 dS}{1 + (a_0 S + b_0)^2};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt = \frac{2dS}{X - S} + \frac{2a_0(a_0 S + b_0)dS}{1 + (a_0 S + b_0)^2}, \quad (13.53)$$

в цій системі перейдемо до проміжку інтегрування $[-1; 1]$. Тоді

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \{T_{\rho}^*(S), S_{\rho\lambda}^*(S)\} \left[\frac{dS}{X - S} + \frac{a_0(a_0 S + b_0)dS}{1 + (a_0 S + b_0)^2} \right];$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \{T_{\rho}^*(S), S_{\rho\lambda}^*(S)\} \frac{a_0 dS}{1 + (a_0 S + b_0)^2},$$

$$S, X \in [-1; 1]; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \quad (13.54)$$

Провівши заміну змінних $X = \cos \phi$ при $\phi \in [0; \pi]$, необмежений на кінцях ділянок з'єднання, розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.51), (13.52) і (13.48) обираємо у вигляді (13.39). При цьому квадратурні формули для сингулярних і регулярних інтегралів на ділянці $[\alpha_0; \beta_0]$ набувають вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt =$$

$$= \frac{2}{K_0} \sum_{n=1}^{K_0} \left\{ \frac{A_n}{\sin \phi_n}, \frac{B_n}{\sin \phi_n} \right\} \left(\tilde{q}_n (a_0 \cos \phi_n + b_0) - \operatorname{ctg} \psi \frac{\sin \phi_n}{\sin \phi_k} \right);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \{T_{\rho}^*(t), S_{\rho\lambda}^*(t)\} dt = \sum_{n=1}^{K_0} \left\{ \frac{A_n}{\sin \phi_n}, \frac{B_n}{\sin \phi_n} \right\} \tilde{q}_n, \quad (13.55)$$

де

$$\tilde{q}_n = \frac{a_0 \sin \phi_n}{1 + (a_0 \cos \phi_n + b_0)^2}; \quad \psi = \frac{\phi_k + (-1)^{n+k} \phi_n}{2};$$

$$t_n = 2 \operatorname{arctg} (a_0 \cos \phi_n + b_0); \quad \lambda_k = 2 \operatorname{arctg} (a_0 \cos \phi_k + b_0), \quad k = \overline{1, K_0}.$$

Підставляючи (13.55) з урахуванням (13.48) в систему (13.51) та порівнюючи ліві та праві частини рівнянь у вузлах колокації $\lambda = \lambda_k$ ($\phi = \phi_k$), одержимо СЛАР для визначення сталей A_n , B_n , N_0 , L_b^0 .

Якщо ці сталі стануть відомі, то значення шуканих функцій у вузлах колокації визначаємо за формулами (13.42).

Аналіз числових розрахунків. Для нескінченної пластинки ($\nu = 0.3$) з

яйцевидним криволінійним отвором ($\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = -0.1$; $\varepsilon_3 = 0$) і підсилювального ребра з параметрами $h_0/h = 4/3$; $\eta/R_0 = 0.1$; $\alpha_0 = 30^\circ$; $\beta_0 = 150^\circ$; $\nu_0 = 0.3$ досліджено вплив відносної жорсткості підсилення та виду зовнішнього навантаження на напружений стан пластинки і ребра.

Результати числового розрахунку величин T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ на контурі Γ в пластинці та $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$, $F_0\tau_{\max}$ в ребрі наведені на рис. 13.18–13.20 ($p=0$, $q=1$) і рис. 13.21–13.23 ($p=1$, $q=0$). Штрихові лінії побудовані для випадку $E_0/E = 1$; суцільні для $E_0/E = 5$; штрихпунктирні – для $E_0/E = 10$.

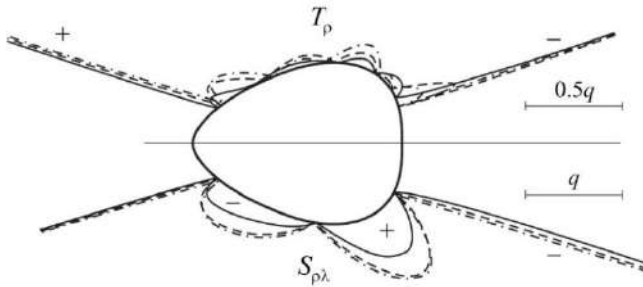


Рис. 13.18

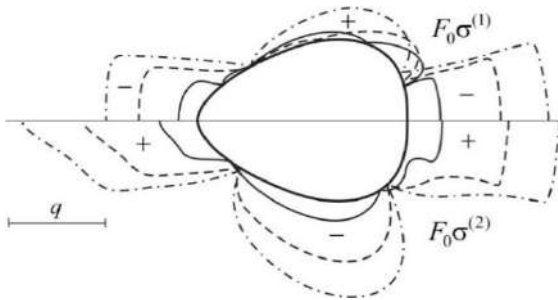


Рис. 13.19

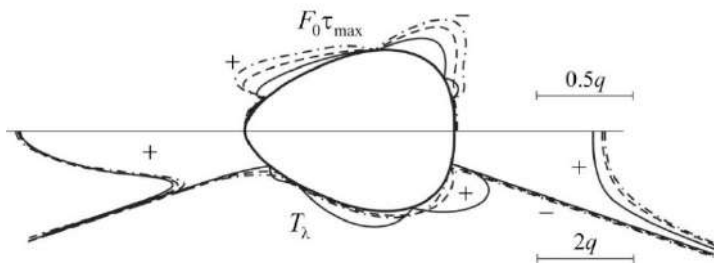


Рис. 13.20

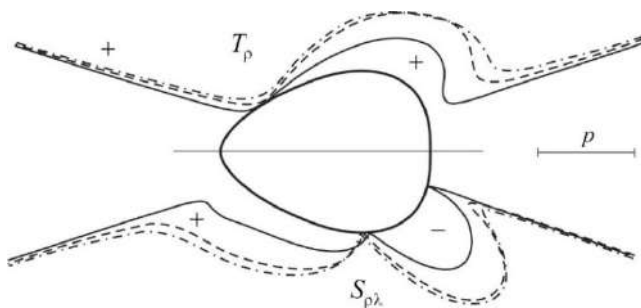


Рис. 13.21

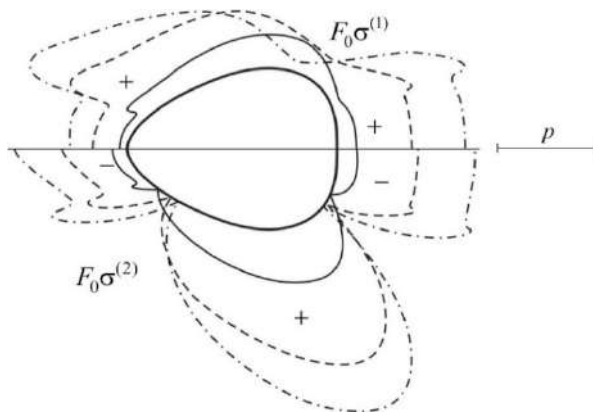


Рис. 13.22

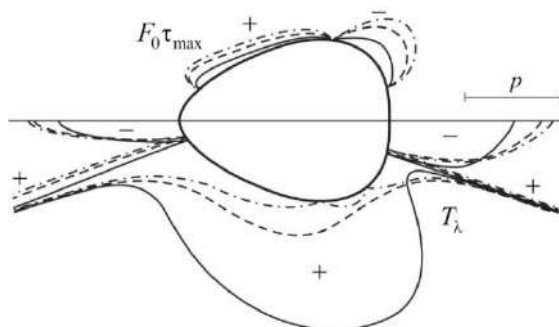


Рис. 13.23

Аналіз наведених результатів дозволяє стверджувати, що наявність двох симетричних міжфазних розрізів призводить до значного перерозподілу компонент напруженого стану пластинки і підсилювального ребра, особливо в околі кінців розрізів. Характер цього перерозподілу на ділянках з'єднання пластинки і ребра та міжфазних розрізів такий самий, як у випадку одного розрізу.

При розтягу пластинки перпендикулярно до осі симетрії отвору жорсткість підсилення суттєво збільшує максимальні значення нормальних і дотичних зусиль у підсилювальному ребрі та практично не впливає на контактні і кільцеві зусилля в пластинці. Якщо пластинка розтягується в напрямку осі симетрії отвору, то при збільшенні відносної жорсткості ребра максимальні значення всіх компонент напруженого стану пластинки і ребра (крім кільцевих зусиль) суттєво збільшуються, особливо нормальні напруження в поздовжніх волокнах ребра. Для кільцевих зусиль спостерігається обернена залежність.

Відзначимо, що максимальні дотичні напруження в осьовому волоknі ребра значно менші від решти компонент напруженого стану, тому ними можна знехтувати в інженерних розрахунках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Батишкіна Ю. Часткове підкріплення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стержнями змінної жорсткості // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: – 2003. – С. 316–318.
2. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: у 2-ох т. – Т.2. Математичні методи в задачах механіки руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – 424 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.
4. Грилицький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією

- розмежування граничних умов. – Львів: Вищ. шк., 1975. – 116 с.
5. Дейнека О.Ю. Міжфазний розріз на межі зварювання ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра. // Міжвуз. зб. «Наукові нотатки» (Луцьк). – 2019. – Вип. 67. – С. 41–47.
 6. Дейнека О.Ю., Сяський В.А. Напружена посадка замкненого кругового стрижня в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки // Вісник НУВГП. Технічні науки (Рівне). – 2016. – Вип. 3 (74). – С. 349–356.
 7. Иванов Г.М. Статика сооружений. – Л.: Стройиздат, 1968. – 206 с.
 8. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
 9. Мартынович Т.Л., Зварич М.К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 9. – С. 46–52.
 10. Мартынович Т.Л., Сяський В.А. Определение напряженного состояния пластинки с разомкнутым ребром жесткости // Изв. вузов. Строительство и архитектура (Новосибирск). – 1985, № 8. – С. 32–34.
 11. Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вищ. шк., 1984. – 160 с.
 12. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
 13. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вищ. шк., 2004. – 656 с.
 14. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – К.: Наук. думка, 1977. – 236 с.
 15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
 16. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
 17. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, № 2. – С. 247–254.
 18. Сяський А., Батишкіна Ю. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // Вісник ТНТУ. – 2015. – **9**, № 2. – С. 5–12.
 19. Сяський А., Комбель С. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки // Машинознавство. – 2003. – № 4 (70). – С. 27–33.
 20. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 5. – С. 94–99.

21. *Сяський А., Шевцова Н.* Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів // Вісник ТНТУ. – 2015. – № 3(79). – С. 24–30.
22. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Напружена посадка замкненого пружного стрижня в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки // Вісник Хмельницьк. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2017, № 5. – С. 32–38.
23. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Міжфазна тріщина в ізотропній нескінченній пластинці з підсиленням круговим контуром // Вісник НУВГП. Технічні науки (Рівне). – 2017. – Вип. 4 (80). – С. 168–177.
24. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Міжфазний розріз в ізотропній пластинці з криволінійним контуром, підсиленням замкненим пружним ребром // Вісник Хмельницьк. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2019, № 3. – С. 18–23.
25. *Сяський А., Шинкарчук Н.* Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска // Вісник ТНТУ. – 2011. – **16**, № 1. – С. 16–21.
26. *Филлин А.П., Тананайко О.Д., Чернева И.М., Шварц М.А.* Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
27. *Шваб'юк В.І., Маткова А.В., Садівський В.М.* Про уточнення рівнянь кривих брусків і кілець // Наук. нотатки Луцьк. індустр. ін-ту. – 1994. – Вип. 25. – С. 51–59.
28. *Syasky A., Dejneka O., Shevtsova N.* Interphase gross – sections in the infinity plate with curvilinear contour reinforced by closed rib // Sci. J. of TNTU. – 2019. – **96**, №4. – P. 23–31.
29. *Siaskyi A., Siaskyi V., Shevtsova N.* The flow of concentrated force through open elastic rod to the contour of the curved hole in infinite plate // Sci. J. of TNTU. – 2017. – **87**, №3. – P. 16–25.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**Кундрат Микола Михайлович, Гук Наталія Анатоліївна,
Козакова Наталія Леонідівна, Острик Володимир Іванович,
Слободян Микола Степанович, Кузьменко Василь Іванович,
Приходько Олена Валеріївна, Д'яченко Наталія Миколаївна,
Шашкова Євгенія Віталіївна, Силованюк Віктор Петрович,
Вайсфельд Наталія Данилівна, Фесенко Ганна Олександрівна,
Козачок Олег Петрович, Мартиняк Ростислав Михайлович,
Максимук Олександр Васильович, Сачук Юрій Володимирович,
Сяський Андрій Олексійович, Шевцова Наталія Вікторівна,
Сяський Володимир Андрійович, Дейнека Олег Юрійович,
Нагірний Тарас Семенович, Червінка Костянтин Андрійович,
Камінський Анатолій Олексійович, Дудик Михайло Володимирович,
Феньків Володимир Михайлович**

**КОНТАКТНА МЕХАНІКА
ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ
І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ**

Колективна монографія

*За загальною редакцією
Р. М. Мартиняка*

Літературне редагування *Д. С. Бриняк*
Комп'ютерне макетування *О. П. Козачок*

Підписано до друку 12.12.2022
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 22,79

Видавець Вікторія Кундельська
*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців ДК № 7454 від 21.09.2021 р.*

79037, Львів, вул. Студинського, 4
тел. +380 98 44 92 543, +380 50 73 42 330
e-mail: kundelskaviktoria6859@gmail.com