

**Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет документальних комунікацій, менеджменту,
технологій та фізики
Кафедра економіки та управління бізнесом**

**Конспект лекцій з дисципліни
«АктUARні розрахунки»**

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за спеціальністю 051 «Економіка» ОПП «Економічна кібернетика»

Рівне 2021 р.

Актуарні розрахунки. Конспект лекцій для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за спеціальністю 051 «Економіка», освітньо-професійною програмою «Економічна кібернетика» \ Пляшко О.С .– Рівне: РДГУ, 2021. – 50 с.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри економіки та управління бізнесом

Протокол № 7 від 31 серпня 2021 р.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри економіки та управління бізнесом професор, доктор економічних наук Дейнега І.О.

Рецензент:

Дейнега І.О., завідувач кафедри економіки та управління бізнесом професор, доктор економічних наук

© О.С. Пляшко, 2021
© РДГУ, 2021

Зміст

Тема 1. Суть та інструментарій актуарних розрахунків	
1. Ринок страхових послуг. Сутність страхування.....	4
2. Суть та завдання актуарних розрахунків.....	7
3. Використання імовірнісних методів у актуарних розрахунках.....	7
4. Структура та методи розрахунку тарифної ставки.....	8
Тема 2. Індивідуальні і колективні моделі ризиків	
1. Індивідуальні моделі ризиків.....	11
2. Колективні моделі ризиків.....	12
Тема 3. Моделі і методи визначення ризикової премії та ризикової надбавки.	
1. Сутність ризикової премії та ризикової надбавки.....	13
2. Методи визначення ризикової премії.....	13
3. Методи визначення ризикової надбавки.....	14
Тема 4. Методи визначення тарифних ставок.	
1. Методи визначення тарифних нетто-премій для діючих видів страхування.....	15
2. Методи визначення тарифних нетто-премій для нових видів страхування.....	19
3. Визначення нетто-премій на основі статистичних даних.....	20
Тема 5. Визначення страхового тарифу у страхуванні життя.	
1. Сутність та основні положення страхування життя.....	22
2. Таблиці смертності. Страхові ймовірності.....	22
3. Комутаційні функції.....	24
4. Страхування на чисте дожиття.....	25
5. Страхування ануїтетів.....	27
а. Довічна рента	
б. Авансова річна рента	
с. Відкладена довічна рента	
6. По життєве страхування.....	28
7. Страхові пенсійні схеми.....	30
Тема 6: Моделі позовів.	
1. Пуассонівський стаціонарний (найпростіший) потік подій.....	31
2. Пуассонівський нестаціонарний потік подій.....	32
3. Найпростіша динамічна модель числа запитів за фіксований проміжок часу.....	34
Тема 7. Моделі управління ризиком за допомогою перестраховання.	
1. Сутність перестраховання та співстрахування.	35
2. Оцінка обсягу ризику, який передається на перестраховання.....	36
3. Перестраховання для індивідуального ризику.....	37
Тема 8. Система страхових резервів	
1. Страхові резерви.....	40
2. Інвестиційна політика страховика.	41
3. Страхові резерви в ризиковому страхуванні.....	43
4. Формування страхових резервів.	45
Тема 9. Моделі банкрутства страхової компанії.	
1. Поняття фінансової надійності страхової компанії.	46
2. Оцінка платоспроможності страховика.....	48
3. Статичні моделі банкрутства страхових компаній.....	49
4. Динамічні моделі банкрутства страхових компаній.....	50

Тема 1. Суть та інструментарій актуарних розрахунків

1. Ринок страхових послуг. Сутність страхування.
2. Суть та завдання актуарних розрахунків.
3. Використання імовірнісних методів у актуарних розрахунках.
4. Структура та методи розрахунку тарифної ставки.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 4-32
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 9-12, 24-30

-1-

Діяльність страхового ринку в Україні регламентується ЗУ „Про страхування” від 07.03.96р.

Страхування - це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів громадян та юридичних осіб у разі настання певних подій, визначених договором страхування чи чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати громадянами та юридичними особами (страхувальниками) страхових платежів та доходів від розміщення коштів цих фондів.

По суті, страхування – це сукупність замкнутих перерозподільних відносин між учасниками страхового процесу стосовно формування за рахунок цільових внесків коштів страхового фонду і його використання, для відшкодування збитків, у разі настання передбачених договором або законом подій.

Ринок страхових послуг - це сукупність економічних відносин щодо купівлі-продажу цих послуг. Суб'єктами ринку страхування є страховики, страхувальники і держава як контролюючий орган.

Страховики – це фінансові установи – юридичні особи, які мають ліцензію на здійснення страхової діяльності.

Страхувальники – це фізичні та юридичні особи, які уклали із страховиками договори страхування або є страхувальниками відповідно до законодавства України.

Страховий випадок – подія, передбачена договором страхування або законодавством, яка відбулась, і з настанням якої у страховика виникає обов'язок здійснити виплату страхової суми (страхового відшкодування).

Страхова сума – розмір максимальної відповідальності страховика за одним договором страхування.

Страховий платіж (страховий внесок, страхова премія)– плата за страхування, яку страхувальник повинен внести страховику.

ПРИНЦИПИ СТРАХУВАННЯ

- конкурентність;
- страховий ризик;
- страховий інтерес;
- максимальна сумлінність;
- відшкодування в межах реально завданих збитків;
- франшиза;
- суброгація;
- контрибуція;
- співстрахування і перестрахування;
- диверсифікація.

Конкурентність — усім страхувальникам і страховикам держава гарантує вільний вибір видів страхування та рівні можливості у здійсненні діяльності, водночас створюються сприятливі умови для розвитку страхування, щоб забезпечити реалізацію права на ефективний страховий захист юридичних і фізичних осіб. Держава проводить активну антимонопольну політику, яка є важливим чинником у формуванні цивілізованого страхового ринку. Цей принцип поки що повною мірою стосується лише добровільних видів страхування.

Страховий ризик — це ймовірна подія або сукупність подій, на випадок яких здійснюється страхування. У міжнародній практиці ризиком вважають також: конкретний

об'єкт страхування або вид відповідальності. Нерідко страховий ризик тлумачать як розподіл між страховиком і страхувальником несприятливих економічних наслідків у разі настання страхового випадку. З огляду на такі розбіжності у тлумаченні терміна «ризик» нерідко виникають непорозуміння між страховиками і страхувальниками. Тому під час укладання страхових угод та оформлення іншої страхової документації потрібно особливу увагу приділяти змісту, який вкладається у слово «ризик».

Загально визнаним є положення, згідно з яким не може бути предмета для страхової угоди, якщо її сторони не несуть жодного ризику матеріальних чи фінансових втрат за несприятливого перебігу подій.

Страховий інтерес впливає з права власності або володіння тим чи іншим об'єктом. Кожний індивідуальний або асоційований власник будинку, автомашини, а тим більш складного виробничо-технічного комплексу, зацікавлений у тому, щоб вкладені в цей об'єкт кошти не були втрачені через стихійне лихо, нещасний випадок, пограбування тощо.

Ще більший страховий інтерес мають фізичні (а нерідко й юридичні) особи щодо організації захисту матеріальних інтересів на випадок втрати свого (або своїх працівників) життя чи здоров'я. Це гарантує отримання певних доходів у разі втрати годувальника, тривалої або постійної втрати працездатності застрахованого, а також на випадок настання інших, спеціально обумовлених подій.

У свою чергу, організації, які беруть на себе ризики, як і будь-яка інша комерційна структура, мають інтерес отримати прибуток. Ідеться про загальну масу прибутку, тобто з урахуванням і наслідків інвестиційної діяльності.

Максимальна сумлінність. Надійне страхування можливе лише за умов високої довіри між сторонами. Ні страхувальник, ні страховик не мають права приховувати один від одного ту чи іншу інформацію, що стосується об'єкта страхування. На практиці особливо важливо, щоб цього принципу дотримувалася страхувальник. Адже саме він володіє найповнішою інформацією про властивості, зокрема дефекти, майна, про стан здоров'я чи інші особливості об'єкта страхування.

Страхові відшкодування не повинні приносити страхувальникові прибутку. Щоб уникнути спроб скористатися страхуванням зі спекулятивною метою страховики дотримуються принципу, згідно з яким матеріальний і фінансовий стан страхувальника після відшкодування завданих збитків має бути таким самим, як і до страхового випадку. Відхилення, як правило, бувають у бік заниження рівня відшкодування.

Страхові відшкодування можуть здійснюватися в одній із чотирьох форм:

- 1) перерахуванням належних коштів на рахунок страхувальника (застрахованого) або вигодонабувача;
- 2) оплатою витрат на ремонт пошкодженого страхового об'єкта;
- 3) відновленням об'єкта;
- 4) заміною знищеного, пошкодженого або викраденого предмета на новий відповідник.

В Україні переважає найпростіша форма відшкодування — кошти перераховують на рахунок страхувальника або видають йому чек на отримання готівки.

Цей принцип повною мірою поширюється тільки на ризикові види страхування. Накопичувальне страхування за своєю ідеєю передбачає можливість отримання застрахованим (вигодонабувачем), крім сплачених внесків, частини інвестиційного прибутку.

Франшиза — це визначена договором страхування частина збитків, яка в разі страхового випадку не підлягає відшкодуванню страховиком. Вона може бути визначена у вигляді певної грошової суми або у відсотках до всієї страхової суми. Завдяки застосуванню франшизи досягається поєднання самострахування зі страхуванням. Підприємства, щоб забезпечити самострахування дрібних (а іноді й середніх) ризиків, створюють власні фонди ризику (резервні фонди). З огляду на наявність такого фонду страхувальники можуть звертатися до страховиків із проханням узяти ризик на страхування частково. Застосовувати франшизу зацікавлені й страховики. Оскільки при цьому частина ризику утримується на відповідальності страхувальника, він стає більш заінтересованим вжити превентивних заходів, щоб зберегти здоров'я, майно або знизити ризик відповідальності перед третіми особами.

Суброгація - це передання страхувальником страховикові права на стягнення заподіяної шкоди з третіх (винних) осіб у межах виплаченої суми.

У тих випадках, коли страхувальник отримує кошти на відшкодування збитків з іншого джерела, він має повідомити про це страховика, який візьме їх до уваги, коли розраховуватиме страхове відшкодування й оформлятиме регрес.

Контрибуція. Обставини іноді складаються так, що один і той самий предмет стає об'єктом страхування більш як один раз. Наприклад, одяг може бути об'єктом страхування у складі полісу на домашнє майно, багаж — у складі автомобільного полісу чи полісу зі страхування туристських подорожей і т. ін. **Контрибуція** — це право страховика звернутися до інших страховиків, які за проданими полісами несуть відповідальність перед одним і тим самим конкретним страхувальником, з пропозицією розділити витрати з відшкодування збитків.

Співстрахування — це страхування об'єкта за одним спільним договором кількома страховиками. При цьому в договорі мають міститись умови, що визначають права й обов'язки кожного страховика. Одному зі співстраховиків за його згодою може бути доручено представництво всіх інших у взаємовідносинах зі страхувальником, але залишено відповідальність перед останнім лише в розмірі відповідної частки. Співстрахування має свої переваги і недоліки. Позитивним є те, що компанії мають змогу об'єднати свої зусилля зі страхування великих ризиків, не поступаючись ні перед ким страховою премією. Недоліки співстрахування полягають в ускладненні процедури оформлення страхування і виплати відшкодування.

Перестраховання — це страхування одним страховиком (цедентом, перестраховальником) на визначених договором умовах ризику виконання частини своїх обов'язків перед страхувальником у іншого страховика або професійного перестраховика.

Страховик, який уклав договір на перестраховання, лишається відповідальним перед страхувальником у повному обсязі згідно з договором страхування.

Отже, різниця між співстрахуванням і перестрахованням полягає в тому, що в першому випадку поділяється відповідальність за ризик між страховиками, а при перестрахованні вся відповідальність перед страхувальником зберігається за страховиком, так званім цедентом, який, у свою чергу, перестраховує частину цієї відповідальності в іншого страховика або професійного перестраховика. Страхувальник може й не знати про наявність договору на перестраховання.

Диверсифікація. Закон України «Про страхування» передбачає, що предметом безпосередньої діяльності страховика може бути лише страхування, перестраховання і фінансова діяльність, пов'язана з формуванням і розміщенням страхових резервів та управлінням ними. Водночас принцип диверсифікації має істотне значення всередині окресленої щойно діяльності. Ідеться про територіальне та галузеве розосередження взятих на страхування ризиків. Чим вони відчутніші, тим імовірність одночасного настання страхових подій, що можуть мати критичні наслідки для страховика, менша.

Схеми участі страхувальника у відшкодуванні збитку:

- **франшиза** (умовна і безумовна)

якщо франшиза $L=1000$ грн, розмір збитку $X=3000$ грн, то при безумовній франшизі страховик відшкодує тільки різницю $V=3000-1000=2000$ грн, а при умовній – всю суму $V=X=3000$, оскільки сума збитку перевищує розмір франшизи.

- **сумісний платіж** – в договорі страхування може бути обумовлено, що сумісний платіж складає 20% збитків, а решту 80% покриває страховик.

- пропорційне відшкодування – для об'єкта реальною вартістю C , застрахованого на суму $S < C$, при настанні страхового випадку, який призвів до збитку величиною X , страховик виплачує відшкодування $V=XS \setminus C$

- за правилом першого ризику – для величини збитку $X < S$ передбачене повне його повне відшкодування. Якщо $X > S$, то страховик виплачує суму S .

Визначення витрат, необхідних для страхування даного об'єкта, називається **актуарними розрахунками**.

За допомогою актуарних розрахунків визначається частка участі кожного страхувальника в створенні страхового фонду, тобто розмір тарифних ставок. Форма, за якою ведеться обрахунок витрат на ведення певного об'єкта страхування, називається актуарною калькуляцією. За її допомогою можна визначити собівартість послуги страховика, страхові платежі, розмір страхового ризику, суму та питому вагу витрат на ведення справи з обслуговування договору страхування.

Завдання актуарних розрахунків:

- дослідження та групування ризиків у межах страхової сукупності;
- визначення математичної імовірності настання страхового випадку, обчислення частоти і міри складності наслідків спричинених збитків як за групами ризику, так і за всією страховою сукупністю;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення страхової справи та прогнозування тенденцій їх розвитку;
- математичне обґрунтування необхідних резервних фондів страховика, а також джерел та способів їх формування;
- дослідження норми доходності капіталу при інвестуванні страховиком зібраних страхових внесків, а також тенденцій її зміни протягом певного часового інтервалу;
- визначення залежності між величинами процентної ставки та бруто-ставки.

Актуарними розрахунками можуть займатися відповідальні особи, які називаються актуаріями. **Актуарій** — офіційно вповноважена особа, яка має відповідну фахову підготовку згідно з вимогами, встановленими "Кваліфікаційними вимогами до осіб, які можуть займатися актуарними розрахунками", затвердженими розпорядженням Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг України № 3519 від 8 лютого 2005 р., що підтверджується відповідним свідоцтвом. На актуарія покладається розробка наукових методів обчислення страхових тарифів та відповідальність за те, щоб страхові резерви були достатніми на той момент, коли страховику доведеться виконувати свої зобов'язання за договорами страхування.

На організацію актуарних розрахунків впливають такі чинники: форми проведення страхування, вид страхування, обрана система інформаційного забезпечення тощо.

Класифікація актуарних розрахунків:

<i>Критерії класифікації</i>	<i>Види АР</i>
За галузями страхування	Розрахунки з особистого страхування
	Розрахунки з майнового страхування
	Розрахунки зі страхування відповідальності
За часом проведення	Планові розрахунки
	Звітні розрахунки
За ієрархією (територіальною ознакою)	Загальнонаціональні розрахунки
	Регіональні
	На рівні конкретного страховика

Основним інструментарієм актуарних розрахунків є теорія ймовірності, оскільки застраховані ризики є випадковими величинами.

Під випадковою величиною у страхуванні розуміють страховий випадок, що може відбутись чи не відбутись. *Ймовірністю* $p(A)$ розуміють число, навколо якого коливається відносна частота настання події A в довгих серіях експерименту. *Відносна частота* при цьому – відношення числа випробувань, у яких подія A з'явилася, до загального числа проведених випробувань.

Розглядають дискретні та неперервні випадкові величини.

До дискретних величин належать кількість укладених договорів із певних видів страхування, кількість страхових випадків та поданих згідно з ними запитів про виплату

відшкодування. До *неперервних* – загальний обсяг відповідальності згідно з укладеними договорами, а також часові показники: проміжок часу між укладанням договорів страхування та виплатою страхового відшкодування за окремо взятим договором.

Для моделювання страхових процесів застосовують нормальний та біноміальний розподіли, розподіл Пуассона та розподіл Паретто.

Випадкові величини описуються законами або функціями розподілу ймовірностей та певними числовими характеристиками.

Серед числових характеристик випадкових величин розглядають переважно чотири:

- математичне сподівання ($M\eta$),
- дисперсія (D),
- середньоквадратичне відхилення (σ),
- коефіцієнт варіації ($W\eta$).

Математичне сподівання $M\eta$ - використовується для розрахунку страхової премії і є показником очікуваного числа страхових випадків у загальній сукупності підписаних страхових договорів.

Дисперсія показує міру розсіювання (розкиду) певних числових даних (наприклад, збитку, сум відшкодування) у загальній сукупності страхових подій.

Середньо квадратичне відхилення показує розсіювання (розкид) значень випадкової величини (наприклад, страхових випадків, страхових сум) відносно її математичного сподівання.

Коефіцієнт варіації $W\eta$ показує наскільки близько знаходяться значення очікуваних виплат до їх середнього значення ($W\eta = \sigma / M\eta$). Таким чином коефіцієнт варіації вважається показником ризикованості даного страхового портфеля. Коефіцієнт варіації сумарних виплат даного портфеля обернено пропорційний його об'єму. Зокрема, якщо він не більший одиниці, то страхова компанія може прийняти даний ризик. Крім того, завдяки даній вимозі можна знайти кількість договорів, які потрібно укласти для прийняття даного виду ризику. За допомогою коефіцієнта варіації вирішується питання про доцільність об'єднання двох страхових портфелів А і Б. Якщо сумарний коефіцієнт варіації менший, ніж коефіцієнт варіації портфеля А, то приєднання портфелю Б є доцільним.

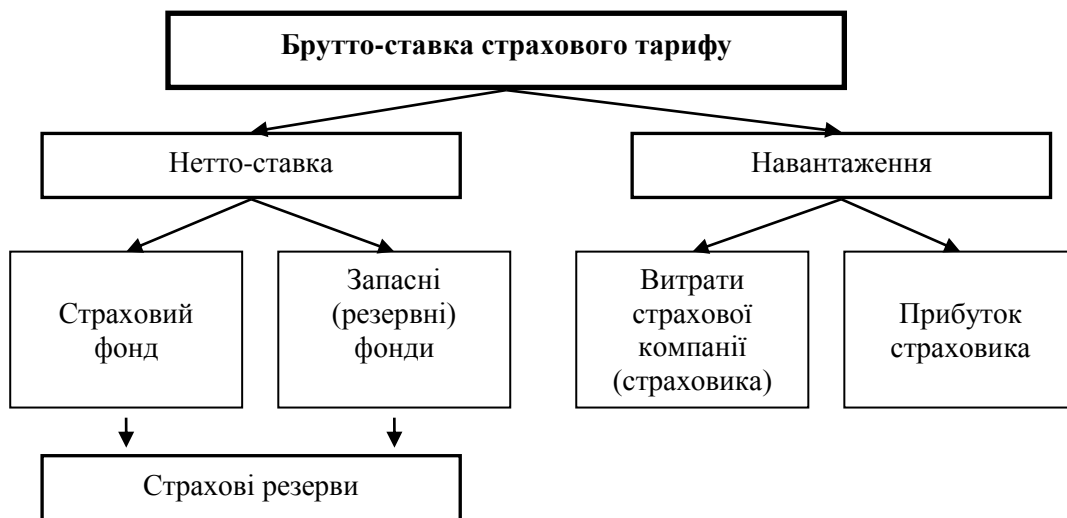
-4-

Актuarні розрахунки є основою визначення страхових тарифів.

Страховий тариф визначається як ставка страхового внеску з одиниці страхової суми за визначений період страхування, яка забезпечує страховику формування страхових резервів, достатніх для виплати страхових відшкодувань і страхових сум, та коштів, необхідних для розвитку страхової компанії.

Страховий тариф, за яким укладається договір страхування, називається **тарифом-брутто**. Він складається з двох частин:

- 1) нетто-ставки;
- 2) навантаження (надбавки).



Нетто-ставка виражає ціну страхового ризику (пожежі, повені, вибуху тощо) і є основною частиною страхового тарифу, що призначена для виплати страхового відшкодування та страхових сум і яка формує страхові резерви.

Навантаження призначене для відшкодування витрат страховика, пов'язаних з проведенням страхування (по-іншому їх називають витратами страхових компаній на ведення справи), а також для забезпечення одержання страховиком прибутку. Така структура страхового тарифу є характерною для тарифів зі всіх видів страхування

Конкретний розмір страхового тарифу вказується у договорі страхування. Розмір страхової премії (страхового платежу, страхового внеску) встановлюється під час укладання договору страхування і залишається незмінним упродовж строку його дії, якщо інше не визначено умовами договору страхування.

За добровільними видами страхування структуру тарифної ставки визначає сам страховик (як правило, норма витрат на ведення справи складає не більш 50 %), а при проведенні обов'язкових видів страхування існують певні обмеження. Кабінетом Міністрів України (як правило, не вище 20%).

Для розрахунку тарифів можуть бути використані кілька методів:

- на основі теорії імовірності та методів математичної статистики з використанням часових рядів;
- на базі експертних оцінок;
- за аналогією до інших об'єктів, або компаній;
- з використанням математичної статистики і розрахунку доходності.

Методика розрахунків тарифної ставки на основі теорії імовірності включає:

- визначення вірогідності настання страхового випадку;
- розрахунок нетто-ставки із 100 грн;
- розрахунок ризикової надбавки з використанням стійких статистичних рядів;
- визначення можливого інтервалу змін показника з певною мірою вірогідності;
- розрахунок брутто-ставки виходячи із планової рентабельності;
- визначення структури брутто-ставки та питомої ваги кожного елемента в ній.

1. *Нетто-ставка визначається за формулою:*

$$T_n = P * K * 100 \quad (1)$$

де T_n — тарифна нетто-ставка, грн.;

P — імовірність страхової події;

K — коефіцієнт відношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір;

100 — одиниця страхової суми (100 грн.).

$$P = K_v / K_d$$

де K_v — кількість виплат за певний період (рік);

Кд — кількість підписаних за рік договорів;

$$K = C_v / C_c$$

де Св — середня виплата на один договір;

Сс — середня страхова сума на один договір.

Тоді формула (1) матиме вигляд:

$$T_n = (K_v * C_v) / (K_d * C_c) * 100$$

або

$$T_n = (B / C) * 100$$

де В — загальна сума виплат страхового відшкодування;

С — загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

2. Після розрахунку нетто-ставки визначають розмір сукупної тарифної ставки, або брутто-ставки.

Для обчислення брутто-ставки до нетто-ставки додають навантаження.

Витрати на ведення справи, зазвичай, розраховують на 100 гри страхової суми (аналогічно до нетто-ставки), інші складові навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки. Загальна методика розрахунку брутто-ставки має такий вигляд:

$$T_{бр} = T_n + H = T_n + H_c + H_o * T_{бр} \quad (2)$$

Де Тбр – брутто – ставка,

Тн – нетто-ставка,

Н – навантаження,

Нс – статті навантаження, що встановлюються у абсолютній сумі,

Но – статті навантаження, закладені в тариф у відсотках до брутто ставки

Якщо всі елементи навантаження визначено в абсолютній сумі, то:

$$T_{бр} = ((T_n + H_c) / (100 - H_o)) * 100$$

Якщо ж усі елементи навантаження визначено у відсотках до брутто-ставки, то величину брутто-ставки вираховують за такою формулою:

$$T_{бр} = (100 * T_n) / (100 - H_o)$$

Розрахунки конкретних розмірів тарифів додаються до правил страхування.

Головний елемент навантаження — витрати на ведення справи. До них належать витрати, пов'язані з укладанням та обслуговуванням договору страхування.

У страховій практиці розрізняють *витрати на ведення справи внутрішньою службою страхової організації та витрати на ведення справи відокремленими підрозділами страхової організації*. Виділяють також постійні та змінні витрати на ведення справи страховиком.

Змінні витрати на ведення справи відносять на окремий вид страхування (окремий страховий поліс). Постійні витрати розподіляють на весь портфель укладених договорів страхування.

Визначаючи страхові тарифи, доцільно брати до уваги той факт, що страховими внесками треба покривати не тільки страхові суми та відшкодування, а й витрати на утримання страхової організації. З огляду на це, витрати на ведення справи можна класифікувати таким чином: аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні, управлінські.

Аквізиційні витрати — виробничі витрати страхової організації, по в'язані зі залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництвом страхових агентів.

Інкасаційні витрати — витрати, пов'язані з обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів. Це витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийом страхових платежів та облікових реєстрів (відомостей, довідок тощо).

Ліквідаційні витрати — витрати з ліквідації збитків, нанесених страховою подією (заробітна плата осіб, які займаються ліквідацією збитків, судові витрати, поштово-телеграфні витрати та витрати, пов'язані з виплатою страхового відшкодування).

Організаційні витрати пов'язані зі заснуванням страхового товариства, їх відносять до активів страховика, бо вони є Інвестиціями.

Управлінські витрати поділяють на загальні витрати управління та витрати управління майном.

Складовою частиною навантаження є *прибуток від страхових операцій*. З метою зниження вартості страхової послуги та розширення страхового поля страховик може не закладати прибуток у вартість тарифу. Цс, насамперед, стосується тарифів з обов'язкових видів страхування.

Тема 2. Індивідуальні і колективні моделі ризиків

1. Індивідуальні моделі ризиків.

2. Колективні моделі ризиків.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 48-58

-1-

Основною складовою фінансового ризику страхової компанії є *індивідуальний* запит, величина якого X вимірюється в грошових одиницях і є випадковою величиною.

Моделі індивідуального ризику ґрунтуються на таких припущеннях:

- страховий портфель передбачає договори страхування, укладені на один і той самий термін одночасно,

- ризики всіх договорів однакові, а страховий випадок для кожного з договорів портфеля може реалізуватися за час дії договору не більше одного разу,

- договір страхування діє протягом фіксованого проміжку часу, достатньо малого, щоб можна було знехтувати депозитними та інфляційними процентами,

- кількість договорів фіксована і не випадкова,

- плата за страхування вноситься на початку періоду і ніяких додаткових надходжень немає,

- страхова сума виплачується повністю після надходження запиту.

Суть моделі зводиться до того, що при заданих параметрах необхідно розрахувати величину *ризикової премії*. Такими заданими параметрами є:

n – кількість договорів страхування у портфелі. За час існування по договору може відбутися не більше однієї страхової події.

S – страхова сума договору (сума виплати),

A – страхова подія, яка відбувається відповідно до умов договору,

q – ймовірність настання страхової події.

Основною характеристикою портфеля є число укладених договорів n .

$$N_j = \begin{cases} 1, q_j \\ 0, 1 - q_j \end{cases}, \text{ яку}$$

Нехай число запитів на один договір описує випадкова величина називають *індикатором страхового випадку* для договору j .

Відшкодування за таким договором j описує випадкова величина $X_j = N_j Y_j$, де Y_j – розмір оплачуваного збитку за одним договором.

Тоді ризикова премія

$$T_0 = M X_j$$

З іншого боку,

$$M X_j = M N_j \cdot M Y_j = q_j M Y_j,$$

$$D X_j = M N_j \cdot D Y_j + D N_j (M Y_j)^2 = q D Y_j + q (1 - q) (M Y_j)^2, \text{ де}$$

MY_j – математичне сподівання збитку події j , DX_j – дисперсія відшкодування (виплат) по договору j , DY_j – дисперсія величини збитку події j .

З теорії ймовірності для рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ випадкової величини Y_j

$$MY_j = \frac{b+a}{2} \quad \text{та} \quad DY_j = \frac{(b-a)^2}{12}$$

виконуються рівності . Коефіцієнт варіації виплат за одним

договором $W = \sqrt{\frac{1-q}{q}}$ або ж $\frac{\sqrt{DX_j}}{MX_j}$

Для випадкової величини Y_j показниково розподіленої з параметром λ значення $MY_j = \sqrt{DY_j} = 1/\lambda$. Загальна сума відшкодування становить суму окремих виплат.

-2-

Як і для моделі індивідуального ризику, в моделі колективного ризику аналізується відносно короткий проміжок часу та припускається, що страхова премія повністю вноситься на початку періоду. Але на відміну від індивідуальної моделі ризику, в колективній моделі весь портфель укладених договорів страхування розглядається як єдине ціле без розчленування окремих складових. Відповідно, страхові випадки не пов'язуються з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Тобто, основною характеристикою портфеля є не число укладених договорів, а загальне число N запитів на відшкодування.

Іншою важливою відмінністю є те, що випадкові величини $X_i = \{\text{розмір } i\text{-го відшкодування}\}$ мають ідентичні розподіли. Це припущення означає певну рівноцінність страхових випадків, пов'язану з тим, що вони розглядаються як наслідок загального ризику компанії, а не індивідуальних договорів. Випадкові величини N та X_i є взаємнонезалежними.

Загальна сума відшкодування у колективній моделі становить суму окремих виплат (як і в індивідуальній моделі)

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

Розподіл випадкової величини Z залежить від випадкової величини N і розподілів випадкових величин X . тому для застосування колективної моделі ризику спочатку визначають розподіли X та N і на підставі формул, які описують ці розподіли, визначають величину сукупного збитку та його середньоквадратичне відхилення.

В загальному відмінність між індивідуальними та колективними моделями полягає і в тому, що в індивідуальних моделях спочатку обчислюються середні значення виплат за кожним договором, а потім ці значення сумуються, а в колективних – моделюється число запитів, тому множаться математичні сподівання MX та MN .

$$MZ = MN \cdot MX, \quad DZ = MN \cdot DX + [MX]^2 DN$$

Для розподілу Пуассона з параметром λ $MN = DN = \lambda$, а

$$MZ = \lambda MX, \quad DZ = \lambda DX + \lambda [MX]^2 = \lambda MX^2$$

Для складного розподілу Пуассона $\lambda = \sum \lambda_i$, а частка $w_i = \lambda_i / \lambda$

Тема 4. Сутність та методи визначення ризикової премії та ризикової надбавки.

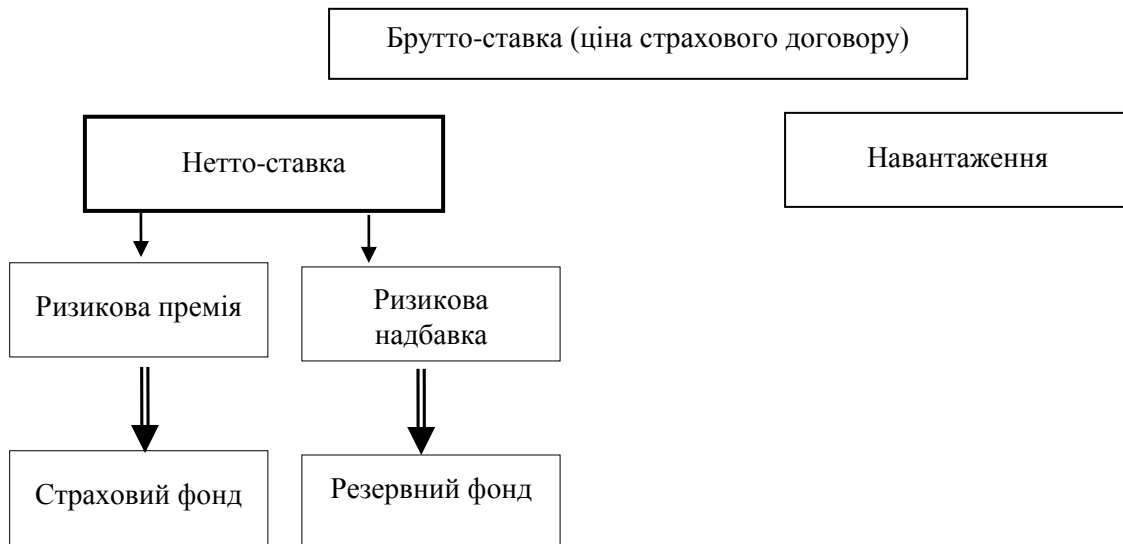
1. Сутність ризикової премії та ризикової надбавки.
2. Методи визначення ризикової премії.
3. Методи визначення ризикової надбавки.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 32-48

-1-

Ризикова премія та надбавка є складовими нетто-ставки страхування



Ризикова (страхова) премія враховує середню ймовірність настання страхового випадку і призначена покрити витрати страховика при настанні кількості страхових випадків, що не перевищують середнє граничне значення ймовірності.

Ризикова надбавка враховує можливість настання більшої кількості страхових випадків і, по суті, формує резерв страховика на випадок не передбачуваних подій. З одного боку, вона збільшує ціну для страхувальника (страховий тариф), але з іншого - є додатковою гарантією погашення зобов'язань страховиком.

-2-

Основними методами, що застосовуються при розрахунку ризикової премії є:

1) - принцип еквівалентності фінансових зобов'язань. Ризикова премія розраховується як добуток ймовірності настання страхової події p та величини збитку X .

$$T_o = pX \quad (1)$$

2) - для випадкових величин з відомим законом розподілу спочатку визначають математичне сподівання величини збитку, а ризикову премію визначають як добуток математичного сподівання величини збитку і ймовірності настання страхової події.

$$T_o = p M(X|A) \quad (2)$$

Для неперервної випадкової величини X математичне сподівання

$$M(X|A) = \int_0^a x \cdot f(x) dx$$

Ризикова премія

$$T_o = p \int_0^a x \cdot f(x) dx. \quad (3)$$

Якщо збиток відшкодовується не у повному обсязі, то

$$MV = pM(V|A) = p \int_0^a f(x) \cdot g(x) dx, \quad 0 < g(x) < X$$

3)- якщо величина збитку розподілена за рівномірним законом. Майно вартістю C страхується на суму S , а ймовірність настання страхового випадку A становить p .

Якщо майно страхується на повну вартість

$$T_0 = pC/2 \quad (4)$$

При відшкодуванні за правилом першого ризику

$$T_0 = p(S - (S^2/2C)) \quad (5)$$

Для умовної франшизи

$$T_0 = p \frac{C^2 - L^2}{2C}, \quad (6)$$

Для безумовної франшизи

$$T_0 = p \frac{(C - L)^2}{2C} \quad (7)$$

4)- якщо величина збитку розподілена за показниковим законом розподілу з функцією густини

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda C)) p \quad (8)$$

При пропорційному відшкодуванні збитку

$$T_0 = \frac{S}{\lambda C} (1 - e^{-\lambda C}) p \quad (9)$$

При відшкодуванні за правилом першого ризику

$$T_0 = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda S}) \quad (10)$$

Для безумовної франшизи

$$T_0 = \frac{P}{\lambda} (e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}) \quad (11)$$

Для умовної франшизи

$$T_0 = p \left(L e^{-\lambda L} + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda L} - e^{-\lambda C}) \right) \quad (12)$$

-3-

При проведенні страхування сума виплачуваного відшкодування, як правило, відхиляється від страхової суми за ними. Причому за окремим договором виплата може бути тільки меншою або дорівнювати страховій сумі, то середня по групі договорів виплата на один договір може і перевищувати середню страхову суму. В цьому випадку при побудові нетто-премії вводять ризикову надбавку.

Нехай страховик володіє однорідним портфелем з n договорів з однаковими страховими сумами S і ймовірностями настання страхових випадків p . Його цікавить не тільки значення

середнього числа настання страхових випадків і відносної частоти, але й величини можливого перевищення цих значень (d_1 і d_2) з надійністю γ що може призвести до розорення страхової компанії.

Врахування таких параметрів передбачає ризикова надбавка, визначення якої починається з побудови довірчого інтервалу для числа страхових випадків, як правило, симетричного відносно середнього значення. При цьому страховика цікавить найнесприятливіша ситуація: вихід за праву границю і, відповідно, ймовірність цього.

Відповідно величина можливого перевищення середнього значення розраховується за формулою:

$$d_1 = t\sqrt{npq} \quad (13)$$

$$d_2 = t\sqrt{pq/n} \quad (14), \text{ де } t \text{ є розв'язком рівняння}$$

$$\Phi(t) = \gamma/2 \quad (15) \text{ і знаходиться з таблиці значень}$$

Якщо γ – це надійність того, що число страхових випадків не вийде за праву границю, то ймовірність виходу за неї $= (1 - \gamma)/2$ і становить **ймовірність розорення ε** .

Ймовірність не розорення

$$1 - \varepsilon = \gamma + \frac{1 - \gamma}{2} = 1 - \frac{1 - \gamma}{2} = \frac{1 + \gamma}{2} \quad (16)$$

При розрахунку ризикової надбавки враховують, що математичне сподівання $M\eta = np$, а дисперсія $D\eta = npq$.

Сумарно зібрана ризикова премія $M\eta = Snp$, а сумарна ризикова надбавка $\sqrt{npq} \cdot S$, то

Відносна ризикова надбавка:

$$\theta = t\sqrt{npq} \cdot S / npS = t\sqrt{q/p} \cdot 1/\sqrt{n} \quad (17)$$

Якщо відшкодовується лише передбачена договором величина відшкодування V , то для розрахунку ризикової премії необхідно знайти дисперсію, яка розраховується через умовну дисперсію

$$DV = pD(V|A) + p(1-p)(M(V|A))^2 .$$

Тема 4. Методи визначення тарифних ставок.

1. Методи визначення тарифних нетто-премій для діючих видів страхування.
2. Методи визначення тарифних нетто-премій для нових видів страхування.
3. Визначення нетто-премій на основі статистичних даних.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 58-69

-1-

основною побудови нетто-премій для діючих видів страхування є збитковість зі 100 грн за ряд років. При цьому враховують тенденції такої збитковості: стійкість чи збільшення (зменшення).

1. При стійкості тимчасового ряду показників збитковості зі 100 грн страхової суми

Для страхової події A з ймовірністю настання страхового випадку $p(A)$ та коефіцієнтом співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір K ймовірність збитку $= p(A) \cdot K$.

Ймовірність збитку на одиницю страхової суми (100 грн): $g = p(A) \cdot K \cdot 100$ грн
У розгорнутому вигляді

$$g = \frac{K_B \cdot C_B}{K_D \cdot C_C} \cdot 100 = \frac{B}{C} \cdot 100 \text{ грн}$$

K_B – кількість виплат за період (рік), K_D – кількість укладених договорів за період (рік),
 C_B – середня виплата на один договір, C_C – середня страхова сума на один договір.

При стійкості тимчасового ряду показників збитковості за останні 5 років ризикова премія розраховується як середньо п'ятирічна збитковість і забезпечує виплати в звичайному за останні 5 років розмірі. Ряд показників збитковості вважається стійким, якщо в ньому відсутня виражена тенденція до збільшення (зменшення) збитковості.

Необхідність включення ризикової надбавки у тарифну нетто ставку пояснюється тим, що в несприятливі роки ризикової премії буде недостатньо для виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Визначення ризикової надбавки проводиться на основі ряду показників збитковості зі 100 грн страхової суми за останні 5 років.

Статистичним аналогом ризикової надбавки є виправлене середнє квадратичне відхилення

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad \text{де} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

середня арифметична збитковість за останні 5 років, y_i – показник збитковості у конкретному році, n – число років у тимчасовому ряду показників збитковості (у нашому випадку 5).

Приклад 1 За останні 5 років за даним видом страхування рівень збитковості становить по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми y_i : 0,25; 0,3; 0,22; 0,27; 0,31. Визначити величину ризикової надбавки, сукупної нетто-премії.

Розв'язок. Розв'язок подамо у вигляді таблиці, обчисливши попередньо середню збитковість за 5 років: $\bar{y} = \frac{0,25 + 0,3 + 0,22 + 0,27 + 0,31}{5} = 0,27$ грн.

Роки	Збитковість із 100 грн. страхової суми (y_i) грн.	Середня збитковість (\bar{y}) грн.	Відхилення ($y_i - \bar{y}$)	Квадрати відхилення ($(y_i - \bar{y})^2$)
1	0,25	0,27	-0,02	0,0004
2	0,3	0,27	0,03	0,0009
3	0,22	0,27	-0,05	0,0025
4	0,27	0,27	0	0
5	0,31	0,27	0,04	0,0016
Сума	1,35		0	0,0054

Далі, $S = \sqrt{\frac{0,0054}{(5-1)}} = \sqrt{0,00135} \approx 0,036$ грн., а нетто-премія визначається

як сума середньо п'ятирічної збитковості (0,27 грн.) та ризикової надбавки (0,036 грн.) і становить у нашому прикладі 0,306 грн.

2. При наявності вираженої тенденції до збільшення (зниження) збитковості зі 100 грн страхової суми

При наявності вираженої тенденції збільшення (зниження) збитковості приходять до встановлення свідомо збиткового чи зайво рентабельного тарифу. У цьому випадку розрахунок ризикової премії базується на побудові прогнозу збитковості на майбутні 3 роки методом екстраполяції лінійного тренду, в основі якого лежить продовження лінії знайденого тренду в області майбутніх значень даного показника.

Спочатку оцінюють параметри b_0 і b_1 шуканого рівняння лінійного тренду $y = b_0 + b_1 \cdot t$, де y – збитковість зі 100 грн страхової суми, t – час у роках.

Оцінки параметрів є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^n t_i + b_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n t_i \end{cases},$$

де

n – число років у тимчасовому ряді показників збитковості, y_i – показник збитковості у конкретному році, t_i – номер року, якому відповідає значення збитковості, що дорівнює y_i

Приклад 2 За 5 років за даним видом страхування рівень збитковості по роках у гривнях із 100 грн. страхової суми задається у вигляді ряду y_i : 0,29; 0,3; 0,37; 0,5; 0,54. Обчислити ризикову надбавку та нетто-премію.

Розв'язок. Складемо таблицю для розрахунку показників, необхідних для визначення значень параметрів b_0 і b_1 :

Номер рядка t_i	Фактична збитковість по роках (y_i)	$t_i \cdot y_i$	t_i^2
1	0,28	0,28	1
2	0,3	0,6	4
3	0,37	1,11	9
4	0,5	2	16
5	0,54	2,7	25
Сума	1,99	6,69	55

На основі останнього рядка таблиці записуємо наступну систему рівнянь $\begin{cases} 1,99 = 5b_0 + 15b_1 \\ 6,69 = 15b_0 + 55b_2 \end{cases}$, розв'язки якої $b_0 = 0,182$ і $b_1 \approx 0,072$, а відповідне

рівняння лінійного тренду має вигляд: $\hat{y} = 0,182 + 0,072t$.

Підставляючи в отримане рівняння лінійного тренду послідовно значення $t_i = 1, 2, 3, 4, 5$, визначаємо теоретичні (вирівняні) значення збитковості зі 100грн. страхової суми для кожного наступного року \hat{y}_i :

$$\hat{y}_1 = 0,182 + 0,072 \cdot 1 = 0,254 \text{ грн.}; \quad \hat{y}_2 = 0,182 + 0,072 \cdot 2 = 0,326 \text{ грн.};$$

$$\hat{y}_3 = 0,182 + 0,072 \cdot 3 = 0,398 \text{ грн.}; \quad \hat{y}_4 = 0,182 + 0,072 \cdot 4 = 0,47 \text{ грн.};$$

$$\hat{y}_5 = 0,182 + 0,072 \cdot 5 = 0,542 \text{ грн.}$$

Знайдений тренд екстраполюється ще на 3 роки, для чого в його рівняння підставляються значення $t = 6, 7, 8$.

$$\hat{y}_6 = 0,182 + 0,072 \cdot 6 = 0,614 \text{ грн.}; \quad \hat{y}_7 = 0,182 + 0,072 \cdot 7 = 0,686 \text{ грн.};$$

$$\hat{y}_8 = 0,182 + 0,072 \cdot 8 = 0,758 \text{ грн.}$$

Отримана оцінка $\left(\hat{y}_8 = 0,758 \right)$ може бути прийнята за ризикову премію.

Для розрахунку ризикової надбавки складемо таблицю

Номер рядку t_i	Фактична збитковість по роках (y_i)	Теоретична збитковість \hat{y}_i	Відхилення $\left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)$	Квадрати відхилення
1	0,28	0,254	- 0,026	0,000676
2	0,3	0,326	0,026	0,000676
3	0,37	0,398	0,028	0,000784
4	0,5	0,47	- 0,03	0,0009
5	0,54	0,542	0,002	0,000004
				0,003040

Користуючись результатами останнього рядка, отримаємо

$$\frac{\sum_{i=1}^5 \left(\hat{y}_i - y_i \right)^2}{5-1} = \frac{(0,000676 + 0,000676 + 0,000784 + 0,0009 + 0,000004)1}{4} = 0,00076.$$

Звідси ризикова надбавка $S = \sqrt{0,00076} \approx 0,03$ грн., а нетто-премія становить $0,76 + 0,03 = 0,79$ грн. із 100 грн. страхової суми.

-2-

Нетто-премія за новими видами страхування має таку ж структуру, як і для діючих видів.

Ризикова премія розраховується, виходячи з частоти страхового випадку і відношення середньої виплати до середньої очікуваної страхової суми, а *ризикова надбавка* – з використанням коефіцієнта вибірковості.

Пропонована частота страхового випадку за новим видом страхування – це відношення числа потенційних об'єктів страхування, які піддаються певному ризику (фактично – кількість випадків виплат страхового відшкодування), до загального числа потенційних об'єктів страхування.

$$\text{Чпр} = K_c / K_o, \text{ де}$$

K_c – кількість потенційних страхових випадків, K_o – загальне число потенційних об'єктів страхування

При побудові ризикової премії за новим видом страхування враховується відшкодування середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми - коригуючий коефіцієнт

$$K_{пр} = C_o / C_c, \text{ де}$$

C_o – передбачувана середня виплата на один договір страхування, C_c – передбачувана страхова сума на один договір страхування.

Величина ризикової надбавки розраховується із застосуванням коефіцієнта вибірковості, що дозволяє врахувати вплив рівня розвитку на рівень збитковості страхової суми. Цей вплив полягає в тому, що із збільшенням рівня розвитку рівень збитковості відносно знижується, оскільки в страхування входять нові категорії страхувальників, які менше підпадають під страховий ризик.

Коефіцієнт вибірковості розраховується за формулою:

$$K_{виб} = \frac{1 - K_o (1 - K_p)}{K_p} \quad \text{де}$$

K_p – коефіцієнт передбачуваного рівня страхування, знаходиться в межах від 0 до 1.

K_o – коефіцієнт відставання відносного зниження (збільшення) суми виплат порівняно із зниженням (збільшенням) рівня розвитку страхування, також знаходиться в межах від 0 до 1. Він показує, на скільки приблизно зменшаться виплати страхувальникам при зменшенні рівня розвитку на певний %.

Тарифна нетто-премія за новим видом страхування розраховується множенням трьох вище наведених показників:

$$T_n = Ч_{пр} \cdot K_{пр} \cdot K_{виб} \cdot 100 \text{ грн.}$$

Приклад 3 Розробляється індивідуальне добровільне страхування спортсменів від нещасних випадків. За даними статистики в країні близько 500 тис. спортсменів, а в середньому щорічно травмуються 32,5 тис. Передбачуване відношення середньої майбутньої виплати до середньої очікуваної страхової суми $K_{np} = 0,3$. Передбачається, що страхуванням буде охоплено 40% спортсменів, причому коефіцієнт відставання $K_0 = 0,8$. Обчислити тарифну нетто-премію, ризикову премію та ризикову надбавку.

Розв'язок. Маємо $Ч_{np} = K_c / K_0 = 32,5 / 500 = 0,065$, $K_{np} = 0,3$, $K_0 = 0,8$, $K_p = 0,4$. Тоді за формулою (2.15) $T_n = Ч_{np} \cdot K_{np} \cdot K_{сум} \cdot 100 = 0,065 \cdot 0,3 \cdot 1,3 \cdot 100 = 2,55$ грн. При цьому ризикова премія $T_o = Ч_{np} \cdot K_{np} \cdot 100 = 1,95$ грн., а ризикова надбавка $T_p = T_n - T_o = 0,6$ грн.

-3-

Як і при індивідуальних моделях ризику N_j – індикатор страхового випадку для j -го договору. Відшкодування за цим договором описує випадкова величина $X_j = N_j \cdot Y_j$, де Y_j – розмір оплачуваного збитку за одним договором, а загальне відшкодування за всіма запитами дорівнює сумарному розміру відшкодування. При цьому розподіли випадкових величин Y_j невідомі.

В цьому році очікується укладення n договорів страхування. У минулому році було укладено n^* договорів зі страховими сумами за ними $V_1^*, V_2^* \dots V_{n^*}^*$ і за якими протягом року надійшло N^* запитів з виплатами за ними $Y_{k1}^*, Y_{k2}^* \dots Y_{kn^*}^*$, де k_1, k_2, \dots, k_{n^*} – їх номери. Тоді **середнє відшкодування на один запит**

$$\bar{Y}^* = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} Y_{ki}^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n MY_j \approx \bar{Y}^*; \\ \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} MY_j \approx \bar{Y}^*, \end{array} \right. \quad \sum_{j=1}^n (MY_j)^2 \approx n(\bar{Y}^*)^2$$

Для справедлива оцінка

Середнє відхилення $(\bar{R}^*)^2$ виплат за запитами Y_{ki}^* від їх середнього значення визначається за формулою:

$$(\bar{R}^*)^2 = \frac{1}{N^* - 1} \sum_{i=1}^{N^*} (Y_{ki}^* - \bar{Y}^*)^2, \quad \text{середня дисперсія}$$

$$(\bar{R}^*)^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n DY_j$$

Відповідні характеристики X

$$DX = D \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n DX_j = \sum_{j=1}^n (MX_j^2 - (MX_j)^2)$$

$$MX = M \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n MX_j = \sum_{j=1}^n MY_j N_j = \sum_{j=1}^n MY_j \cdot MN_j = qn\bar{Y}^*$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_X = \sqrt{qn(\bar{R}^*)^2 + q(1-q)n(\bar{Y}^*)^2}$$

Для випадкової величини $Z = (X - MX) / \sigma_X$ розподіленої за нормальним законом розподілу

$$P(Z < t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dt.$$

$$X \leq nq\bar{Y}^* + t_\gamma \sqrt{qn(\bar{R}^*)^2 + q(1-q)n(\bar{Y}^*)^2} = T_O + T_P = T_H$$

справедлива нерівність

Приклад 4 Статистика відшкодувань за деяким портфелем

наступна: на $n^* = 300$ укладених договорів страхування надійшло $N^* = 10$ запитів з відшкодуваннями Y_{ki}^* : 10; 15; 10; 5; 15; 10; 8; 8; 9; 10. Очікується укладення $n = 400$ подібних договорів. Визначити розмір нетто-премії, яка б з надійністю $\gamma = 0,95$ ($\varepsilon = 0,025$) забезпечила виплати за всіма запитами.

Розв'язок. Середнє відшкодування (вплата) за одним запитом

$$\bar{Y}^* = \frac{1}{10}(10 + 15 + 10 + 5 + 15 + 10 + 8 + 8 + 9 + 10) = 10, \text{ а середнє відхилення}$$

$$\text{виплат } (\bar{R}^*)^2 = \frac{1}{9}((10-10)^2 + (15-5)^2 + \dots + (9-10)^2(10-10)^2) = 28/3.$$

Оскільки за статистикою в портфелі з 300 договорів надійшло 10 запитів, то $q = 10/300 = 1/30$, а за таблицею 2 у додатку знаходимо, що $t_\gamma = 1,96$.

Для того, щоб з надійністю $\gamma = 0,95$ ($\varepsilon = 0,025$) забезпечити виплати за всіма запитами, які можуть надійти для страхового портфеля з $n = 400$

договорами, нетто-премія T_H для всього портфеля повинна дорівнювати

$$T_H = 400 \cdot \frac{1}{30} \cdot 10 + 1,96 \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 400 \cdot \frac{28}{3} + \frac{1}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot 400 \cdot 100} = \frac{400}{3} + \frac{221,1}{3} = 207,023.$$

Відповідно, ризикова премія $T_o = 133,3$, а ризикова надбавка $T_p = 73,7$, що становить 55,3% ризикової премії.

Тема 6. Визначення страхового тарифу у страхуванні життя.

1. Сутність та основні положення страхування життя.
2. Таблиці смертності. Страхові ймовірності.
3. Комутаційні функції.
4. Страхування на чисте дожиття.
5. Страхування анuitетів
 - а. Довічна рента
 - б. Авансова річна рента
 - с. Відкладена довічна рента
6. По життєве страхування.
7. Страхові пенсійні схеми.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 143-175
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 144-164

-1-

Умови страхування життя передбачають виплати у зв'язку з різними подіями: дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування або у випадку його смерті протягом цього терміну; втратою здоров'я внаслідок травм чи хвороб та ін.

Страхування життя, як правило, здійснюється у двох видах (напрямках) страхування сум (капіталу) і страхування рент (анuitетів). У першому випадку при настанні страхової події виплачується одночасно певна сума грошей, у другому – страхова компанія здійснює застрахованому регулярні платежі. Такі фінансові зобов'язання страхових компаній відносять до умовних (страхових) рент (анuitетів). Умовні ренти складають також основу пенсійних схем, оскільки пенсії є регулярними платежами, початок і кінець яких безпосередньо пов'язаний з подіями в житті учасника пенсійної схеми (хвороба, інвалідність ...).

Фінансовий аспект договору страхування життя полягає у взаємних фінансових зобов'язаннях: з боку страхувальника – сплатення премії, з боку страховика – виплата застрахованої суми або ренти. Фінансове забезпечення таких договорів страхування визначається в основному двома факторами: можливістю отримання прибутку на інвестований капітал, утворений резервами страхової компанії (премії страхувальників, власний капітал, прибуток) та статистичною оцінкою страхових подій (демографічні події).

-2-

При проведенні фінансових операцій у страхуванні життя необхідно володіти даними про те, скільки осіб із застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів і скільки може померти кожного року.

Тривалість життя окремих людей є випадковою величиною і коливається у досить широких межах. Демографічною статистикою визначена залежність смертності від віку людей. Ця залежність представлена у *таблицях смертності*. Таблиці смертності є числовою моделлю процесу вимирання абстрактної кількості людей з віком. Вони містять розрахункові показники, які характеризують смертність людей в окремих вікових групах і дожиття до певного віку при переході в іншу вікову групу, показують, як послідовно зі збільшенням віку зменшується ця сукупність, досягаючи 0 зразу після граничного віку ω .

Основні показники таблиць смертності:

l_x – число людей у віці x , які дожили до цього віку із початкової сукупності l_0 (як правило, 100 000 чол). Число початкової сукупності l_0 називають *коренем таблиці смертності*. Останній рядок таблиці демонструє граничний вік ω (100 років). Кількість людей, які дожили до віку більшого, ніж ω рівне 0.

d_x - число померлих у віці x . $d_x = l_x - l_{x+1}$

q_x – ймовірність померти протягом року, доживши до віку x . $q_x = d_x : l_x$. Тоді ймовірність прожити ще один рік = $1 - q_x = l_{x+1} : l_x$. Аналогічно *ймовірність дожити до віку $x+n$* = ${}_n p_x = l_{x+n} : l_x$

Приклад 1. визначити для чоловіка у віці 30 років ймовірність: а) померти протягом року; б) прожити ще 3 роки; в) дожити до 98 років.

а) $q_{30} = d_{30} : l_{30} = 597 : 91419 = 0,00653$

б) ${}_3 p_{30} = l_{33} : l_{30} = 89\,488 : 91419 = 0,9789$

в) $n = 98 - 30 = 68$, тоді ${}_{68} p_{30} = l_{98} : l_{30} = 95 : 91419 = 0,0010$

За даними таблиць смертності знаходять і ймовірність смерті у певному віці.

Наприклад, *ймовірність померти у віці від x до $x+n$* :

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=x}^{x+n-1} d_j$$

Вік x	Чоловіки		
	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047
1	97953	200	0,002042
2	97753	113	0,001156
3	97640	85	0,000871
...
30	91419	597	0,00653
31	90822	639	0,007036
32	90183	695	0,007707
33	89488	757	0,008459
...
50	70354	2001	0,028442
...
60	50246	2127	0,042332
...
98	95	32	0,336842
99	63	22	0,349206
100	41	41	1

- ймовірність померти через m років (протягом $m+1$) для чоловіка у віці x років:

$${}_{m+1} q_x = {}_m p_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

- ймовірність для чоловіка у віці x років померти у віковому інтервалі від $x + m$ до $x + m + n$ років:

$${}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} = {}_mP_x \cdot {}_nq_{x+m}$$

- ймовірність, що подружжя проживе ще n років:

$${}_n P_{xy} = {}_n P_x \cdot {}_n P_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}$$

- ймовірність того, що чоловік, який уклав договір страхування у віці x років (дружині в цей час було y років), не доживе до віку $x + n$ років, а дружина – навпаки – доживе до віку $x + n$:

$${}_n P_{x|y} = {}_n q_x \cdot {}_n P_y = (1 - {}_n P_x) \cdot {}_n P_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}$$

-3-

З метою спрощення страхових розрахунків застосовують так звані комутаційні функції (числа), для яких складені спеціальні таблиці. Комутаційні функції умовно поділяються на 2 групи:

- 1 – визначається числом осіб, які доживають до конкретного віку,
- 2 – визначається числом осіб, які померли.

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$$

Основними в першій групі є функції

В страхуванні на чисте дожиття функція D_x інтерпретується так: якщо кількість новонароджених l_0 застрахована на чисте дожиття терміном на x років з умовою виплати одиначної суми кожному, хто дожив до віку x , то величина D_x є очікуваною поточною вартістю суми всіх страхових виплат, тобто сумарною страховою премією. Для функції N_x – якщо кількість новонароджених l_0 застрахована на таких умовах: починаючи з віку x , по життєво на початку кожного року виплачується одна грошова одиниця кожному страхувальнику. Тоді величина N_x – є очікуваною поточною вартістю суми всіх страхових

$$a_k = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

виплат, тобто є сумою всіх страхових внесків. Оскільки застосовується у страхуванні анuitетів.

$$N_x = N_{x+1} + D_x, \quad N_{\omega} = D_{\omega}$$

За означенням

Якщо платежі проводяться m разів у році, то

$$N_x^{(m)} \approx N_x + \frac{m-1}{2m} D_x$$

для платежів постнумерандо

$$\tilde{N}_x^{(m)} \approx N_x - \frac{m-1}{2m} D_x$$

для платежів пренумерандо

Комутаційними числами другої групи (функції визначаються числом померлих осіб) є функції

$$C_x = d_x v^{x+1}, \quad M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j$$

між комутаційними функціями обох груп існують залежності:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}$$

Аналогічно, $M_x = N_x v - N_{x+1}$

Використовуючи таблиці смертності, для заданої процентної ставки (заданої норми доходності страхової компанії) складають таблиці комутаційних функцій:

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397
...
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283

при страхуванні подружніх пар використовують такі комутаційні функції:

$$D_{xy} = l_{xy} v^{\frac{(x+y)}{2}} = l_{xy} \left(\frac{1}{1+i} \right)^{\frac{(x+y)}{2}} \quad D_{xy+n} = l_{xy+n} v^{n+\frac{(x+y)}{2}} = l_{xy+n} \left(\frac{1}{1+i} \right)^{n+\frac{(x+y)}{2}}$$

$$N_{xy} = \sum_{i=0}^{\omega-y} D_{x+i, y+i}$$

-4-

Страхування на чисте дожиття полягає в страхуванні певної суми грошей на певний термін. Страхова подія, при настанні якої відбувається виплата, полягає в дожитті застрахованого до кінця вказаного терміну. У випадку смерті страхувальника в період дії договору сума не виплачується, а премія не повертається.

Це означає, що страхувальник, який у віці x укладає договір на чисте дожиття терміном на n років, доживши до віку $x+n$, отримає обумовлену страхову суму S .

Якщо страхувальники у кількості l_x (всі, хто дожили віку x) уклали такі договори страхування. Тоді страховик після закінчення договору страхування повинен виплатити суму S кожному, хто дожив віку $x+n$, тобто $l_{x+n} \cdot S$. Для отримання такої суми страховик повинен отримати від страхувальників страхову премію ${}_n T_x$. Загальна сума становитиме $l_x \cdot {}_n T_x$ і може бути інвестована, наприклад, за ставкою i складних процентів. Тоді відповідна нарощена сума відсотків за n років становитиме $l_x \cdot {}_n T_x (1+i)^n$.

$$l_{x+n} \cdot S = l_x \cdot {}_n T_x (1+i)^n \quad \text{а} \quad {}_n T_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot S = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot S$$

Отже,

З позицій теорії ймовірності величина ${}_n T_x$ є математичним сподіванням величини страхової суми S , дисконтованої на момент укладення договору. Тому величину ${}_n T_x$ також називають очікуваною поточною вартістю.

$$T_{x:\frac{1}{n}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

Величина називається актуарних множником дисконтування за n років і є величиною нетто-премії для одиничної суми при страхуванні на дожиття.

Страхування на чисте дожиття рідко використовується ізольовано, оскільки є відносно дорогим. Смертність за умовами такого договору призводить до того, що частка премій померлих перерозподіляється між тими, що залишилися живими на момент закінчення терміну дії договору, створюючи для них додатковий прибуток, крім того, що забезпечується процентами. Цей факт дозволяє говорити про річну норму доходності з врахуванням прибутку від смертності.

Річна норма доходності для віку x

$$i_x = \frac{\frac{l_x p(1+i)}{l_{x+1}} - p}{p} = \frac{l_x + l_x i - l_{x+1}}{l_{x+1}} = \frac{d_x + l_x i}{l_{x+1}} = \frac{l_x}{l_{x+1}} \left(\frac{d_x}{l_x} + i \right) = \frac{q_x + i}{p_x}$$

Величину i_x називають ще актуарною нормою доходності. Оскільки $p_x < 1$, то $i_x > q_x + i$, а величина i_x може значно перевищувати ставку i , особливо якщо ця ставка є невеликою.

Річний актуарних коефіцієнт нарощення S

$$S_x = 1 + i_x = 1 + \frac{q_x + i}{p_x} = \frac{p_x + q_x + i}{p_x} = \frac{1+i}{p_x} = (1+i) \frac{l_x}{l_{x+1}}$$

$$v_x = \frac{1}{S_x} = v \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Актуарний коефіцієнт дисконтування

При страхуванні подружньої пари на дожиття у віці x і y на даний момент нетто-премія залежить від умов настання страхової події:

- страхова подія – дожиття одного із членів подружжя до обумовленого віку. Нетто-премія визначається

$${}_n T_{xy} = {}_n P_x \cdot {}_n P_y \cdot v^n \cdot S = \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}} \cdot S$$

${}_n P_x, {}_n P_y$ – ймовірність прожити ще n років для кожного з подружжя.

- страхова подія – дожиття одного із членів подружжя до обумовленого віку. Виплата здійснюється дружині при дожитті нею до віку $y+n$:

$${}_n T_{x|y} = {}_n P_{x|y} \cdot v^n \cdot S = \left(\frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \right) S \cdot v^n$$

${}_n P_{x|y}$ ймовірність того, що чоловік із подружжя не доживе до віку $y+n$.

При страхуванні анuitетів розрізняють такі умови:

- *довічна рента* – якщо страхувальники отримують регулярні виплати протягом життя (рента постнумерандо)
- *авансова довічна рента* – виплата здійснюється регулярно протягом всього життя на початку кожного року (рента пренумерандо),
- *відкладена довічна рента* – регулярні щорічні платежі здійснюються через указаний у договорі страхування термін.

а) Довічна рента

Передбачає отримання страхувальником регулярних виплат протягом всього життя страхувальника. Якщо рента купується особою у віці x років в момент укладання контракту, то вона виплачується в кінці кожного року дожиття, тобто в момент $x+1$, $x+2$, $x+3$ і.т.д., тобто в кінці $x+k$ року, якщо страхувальник досяг віку $x+k$, в іншому випадку (у випадку смерті) виплата ренти припиняється.

Для розрахунку нетто-премії враховуємо такі припущення:

- l_x чоловіків укладають довічну ренту з річними виплатами S ,
- в момент укладення договорів сумарні надходження у страхову компанію $l_x T_{x1}$,
- за рік після укладання договору l_{x+1} чоловіків, які залишилися в живих, отримають загальну суму $l_{x+1} S$, поточна вартість якої $(l_{x+1} * S) : 1+i$,
- за два роки - l_{x+2} чоловіків, які залишилися в живих, отримають загальну суму $l_{x+2} * S$, поточна вартість якої $(l_{x+2} * S) : (1+i)^2$,
- міркуючи аналогічно, поточна вартість всіх виплат дорівнюватиме

$$S \left(\frac{1}{1+i} l_{x+1} + \frac{1}{(1+i)^2} l_{x+2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^k} l_{x+k} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{\omega-x}} l_{\omega} \right)$$

, де ω – граничний вік в таблиці смертності.

Нетто-премія
$$T_{x1} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k} / (1+i)^k = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{S}{(1+i)^k} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Враховуючи, що $\frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_k P_x$, $v^k = 1/(1+i)^k$ маємо
$$T_{x1} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_k P_x \cdot S$$

Враховуючи комутаційні функції, помножимо чисельник і знаменник у правій частині отриманої формули на v^k :

$$T_{x1} = S \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \cdot S, \text{ при цьому } D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\omega} = N_{x+1}$$

б) Авансова довічна рента

Відмінність цієї ренти від довічної полягає у тому, що перші виплати будуть повернуті одразу після укладання договору страхування і загальна їх величина складе $l_x \cdot S$, що дорівнюватиме поточній вартості.

Поточна вартість всіх виплат $S(l_x + vl_{x+1} + v^2l_{x+2} + \dots + v^{\omega-x}l_{\omega})$,

$$T_{x_2} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k l_{x+k} \quad \text{або ж} \quad T_{x_2} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} \cdot S = \frac{N_x}{D_x} \cdot S.$$

для нетто-премій T_{x_1} та T_{x_2} двох типів довічних рент справедливе співвідношення $T_{x_1} = T_{x_2} - S$

в) Відкладена довічна рента

Цей вид ренти відрізняється від попередніх тим, що виплати здійснюються не у рік укладення договору, а через вказану у договорі кількість років. Тобто, якщо договір укладається у x років, то перша виплата буде зроблена у $x+m+1$ років для звичайної довічної ренти і у $x+m$ років для авансової ренти.

Нетто-премія для звичайної відкладеної довічної ренти

$${}^m T_{x_1} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k l_{x+k} = S \sum_{k=m+1}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \cdot S$$

Для авансованої довічної ренти

$${}^m T_{x_2} = \frac{S}{l_x} \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k l_{x+k} = S \sum_{k=m}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x} \cdot S$$

-6-

По життєве страхування передбачає виплату страхової суми у випадку смерті застрахованого.

Якщо кількість страхувальників l_x застраховані на суму S , то в кінці першого року страховик повинен буде виплати суму $d_x S$ (бо до віку $x+1$ не доживе d_x осіб). У кінці другого року виплата становитиме $S d_{x+1}$, і т.д. остання сума, яка дорівнює $S d_{\omega}$ буде виплачена через $\omega-x+1$ років.

Зведена вартість всіх виплат становитиме

$$S(vd_x + v^2d_{x+1} + \dots + v^{\omega-x+1}d_{\omega}) = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} d_{x+k} \cdot S$$

$$T_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} d_{x+k} \cdot S$$

Відповідно нетто-премія

$$\text{Для} \quad \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_k p_x \cdot q_{x+k} \quad , \text{тому} \quad T_x = \frac{S}{l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x, \quad M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k, \quad \text{для яких}$$

Ввівши комутаційні функції

$$M_x = M_{x+1} + C_x$$

$$T_x = \frac{M_x}{D_x} \cdot S$$

Нетто-премія

На практиці по життєве страхування трапляється досить рідко. Як правило, укладаються договори страхування на термін і страхова сума виплачується лише у випадку смерті страхувальника до терміну закінчення договору. Якщо цей термін дорівнює n , і $n \leq \omega - x$, то нетто-премія обчислюється за формулою

$$T_{x;n}^1 = \frac{S}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot l_{x+k} \quad \text{або} \quad T_{x;n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \cdot S$$

Якщо премії виплачуються з відтермінуванням, наприклад, шляхом платежів

пренумерандо протягом t років, то розмір щорічної премії $a_{x:t|} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$, а сума

$$R = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} S$$

щорічних зобов'язань

Якщо страхування на термін і страхування на дожиття на той же термін об'єднуються в один договір, то такий варіант страхування називається *змішаним*. Страхова сума виплачується або страхувальнику у випадку його дожиття до закінчення терміну дії договору, або нащадкам страхувальника у випадку його смерті.

$$T_{x;n} = T_{x;n}^1 + T_{x;n}^{\text{ж}}, \quad \text{де } T_{x;n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \quad T_{x;n}^{\text{ж}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \text{або}$$

Одноразова нетто-премія

$$T_{x;n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

ж

$$R = \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \cdot S$$

Для відтермінування платежів протягом t років:

Пенсійне страхування є, по суті, послідовним повторюванням страхування на дожиття. Якщо пенсія виплачується з 60 років, то вартість страхування разової виплати пенсії S' визначається вартість страхування на дожиття до 60 років. Аналогічно визначається вартість страхування на дожиття і до іншого віку. Тоді вартість страхування складає

$${}_1T_x + {}_2T_x + \dots + {}_{w-x-1}T_x$$

необхідність у розрахунку нетто-тарифів виникає при використанні схеми, в якій за величину приймається величина пенсії. Тариф може бути визначений для одноразового внеску або при умові, що премія виплачується з відтер мінуванням.

При одноразовому внеску нетто-тариф дорівнює вартості ренти, яка відповідає умовам пенсії, а нетто-премія – добутку нетто-тарифу на розмір пенсії

$$T_x = R \cdot D_x = R \frac{N_x}{D_x}, \quad \ddot{a}_x = N_x / D_x.$$

для відкладеної на n років пенсії:

$$T_x = R \cdot {}_{n|}D_x = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Якщо пенсія страхується не пожиттєво, а на термін t років, то її величина в момент виходу на пенсію

$$T_x = R \cdot D_{x|t-1} = R \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$$

А за n років до виходу на пенсію

$$T_x = R \cdot {}_{n|}D_{x|t-1} = R \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$$

Якщо премії виплачуються у виді ряду послідовних платежів з відтер мінуванням, то річна сума внесків за умов річних виплат предумерандо

$$P = R \frac{{}_nD_x}{D_{x|t-1}} = R \cdot \frac{N_L}{N_x - N_{x+t}}, \quad \text{де } L - \text{рік виходу на пенсію}$$

Якщо внески проводяться послідовно протягом певного періоду часу і змінюються в часі, а виплата здійснюється з 60 років на початку року

$$R_1 = P_1 \frac{N_{60}}{D_x}, \quad R_2 = P_2 \frac{N_{60}}{D_{x+1}}, \dots, R_k = P_k \frac{N_{60}}{D_{x+k-1}}, \quad \text{, загальна сума пенсії}$$

$$P = \sum_{j=1}^k P_j = \frac{\sum_{j=1}^k R_j \cdot D_{x+j-1}}{N_{60}}$$

Тема 7: Моделі числа позовів.

1. Пуассонівський стаціонарний (найпростіший) потік подій
2. Пуассонівський нестаціонарний потік подій
3. Найпростіша динамічна модель числа запитів за фіксований проміжок часу

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 73-90
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 92-115

-1-

Послідовність випадкових подій A , які можуть настати одна за одною в будь-які випадкові моменти часу називають *потоком подій*. Якщо події в потоці розрізняють за моментами їх надходження, то вони називаються однорідними, а в іншому разі – неоднорідними.

Потік подій називається *регулярним*, якщо події в ньому настають послідовно, через строго визначені проміжки часу.

Потік подій називається *потоком без післядії*, якщо для будь-якої пари взаємно неперетинаючих проміжків часу число подій, які настали за один з них, не залежить від числа подій, які настали за інший.

Регулярний потік властивістю відсутності післядії не володіє, оскільки післядія в ньому породжується його регулярністю.

Потік подій називається *ординарним*, якщо ймовірністю настання за малий проміжок часу більше однієї події можна знехтувати порівняно з ймовірністю настання за цей проміжок не більше однієї події. Ординарність потоку означає, що в ньому за досить малий проміжок часу або не настають, або настає лише одна подія.

Потік подій називається *стаціонарним*, якщо для будь-якого проміжку часу ймовірність настання певного числа подій в ньому залежить лише від його довжини і не залежить від того, де на осі часу він розміщений.

Потік подій, який володіє властивостями відсутності післядії, ординарності та стаціонарності, називається *найпростішим потоком*, а який володіє властивостями відсутності післядії та ординарності – *пуассонівським*.

Середнє число подій потоку, які настають за одиницю часу, називається *інтенсивністю* або *ж середньою густиною потоку*. Інтенсивність найпростішого потоку не змінюється з часом.

Декілька потоків називаються *порівнювальними за інтенсивністю*, якщо інтенсивність жодного з них не перевищує суми інтенсивностей решти.

В найпростішому потоці з інтенсивністю λ число подій $\eta(t)$, які настали на проміжку часу $[0;t]$, розподілене за законом Пуассона:

$$P(\eta(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad M\eta(t) = D\eta(t) = \lambda t, \sigma\eta(t) = \sqrt{\lambda t}$$

Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ характерні такі твердження:

- 1) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ не настане жодної події:

$$P(\eta(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

- 2) ймовірність того, що за проміжок часу $[0;t]$ настане менше k подій, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$P(\eta(t) < k) = e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

3) ймовірність того, що за проміжок часу $[0; t]$ *настане не менше k подій*, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$P(\eta(t) \geq k) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

4) ймовірність того, що за проміжок часу $[0; t]$ *настане принаймні одна подія*:

$$P(\eta(t) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$$

5) інтенсивність потоку λ дорівнює математичному сподіванню $M\eta(t)$ випадкової величини $\eta(t)$.

Іншою важливою характеристикою найпростішого потоку є неперервна випадкова величина $\tau = \{\text{проміжок часу між будь-якими двома сусідніми подіями потоку}\}$.

У найпростішому потоці з інтенсивністю λ для випадкової величини τ :

$$F(t) = P(\tau < t)$$

1) інтегральна функція розподілу

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t}, (t \geq 0)$$

2) диференціальна функція розподілу

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t \geq 0)$$

3) математичне сподівання M , дисперсія D , середньоквадратичне відхилення σ :

$$M\tau = \lambda^{-1}, \quad D\tau = \lambda^{-2}, \quad \sigma(\tau) = \lambda^{-1}.$$

4) ймовірність того, що проміжок часу τ між будь-якими двома сусідніми подіями в найпростішому потоці *буде не меншим за t* :

$$P(\tau \geq t) = e^{-\lambda t}, (t \geq 0)$$

-2-

Потік подій називають *нестационарним*, якщо ймовірність появи певного числа подій за будь-який проміжок часу залежить не тільки від довжини цього проміжку, але й від моменту його початку.

Нестационарність потоку означає, що його імовірнісні характеристики, зокрема, інтенсивність $\lambda(t)$, залежить від часу t .

Для дискретної випадкової величини $\eta(t_0, \tau) = \{\text{число подій, які настають в потоці за проміжок часу } [t_0, t_0 + \tau], \tau > 0\}$, розподіленої за законом Пуассона, справедливі такі твердження:

1) ймовірність того, що за проміжок часу *настане рівно m подій*:

$$P_m(t_0, \tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (m = 0, 1, 2, \dots)$$

2) параметр a є математичним сподіванням $M \eta(t_0, \tau)$ випадкової величини $\eta(t_0, \tau)$, яке залежить не тільки від τ , але і від t_0 , тобто

$$a = a(t_0, \tau) = M\eta(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$$

3) дисперсія

$$D\eta(t_0, \tau) = a \text{ і } \sigma_\eta(t_0, \tau) = \sqrt{a}$$

У нестационарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ ймовірність того, що за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \tau$ ($[t_0, t_0 + \tau]$):

1) не настане жодної події:

$$P(\eta(t_0; \tau) = 0) = e^{-a}$$

2) настане менше k ($k=1, 2, \dots$) подій:

$$P(\eta(t_0; \tau) < k) = e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

3) настане не менше k ($k=1, 2, \dots$) подій:

$$P(\eta(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

4) настане принаймні одна подія:

$$P(\eta(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$$

Для неперервної випадкової величини $T(t_0) = \{\text{проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настала в момент часу } t_0\}$, вид закону розподілу якої залежатиме і від t_0 і від функції $\lambda(t_0)$ справедливі такі формули:

1) ймовірність того, що проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0 , буде менший τ :

$$F_{T(t_0)}(\tau) = F(\tau) = P(T(t_0) < \tau) = 1 - e^{-a}$$

2) ймовірність того, що проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0 , буде не менший τ :

$$P(T(t_0) \geq \tau) = 1 - F_{T(t_0)}(\tau) = e^{-a}$$

3) диференціальна функція розподілу випадкової величини $T(t_0)$:

$$f_{T(t_0)}(\tau) = f(\tau) = \frac{d}{d\tau} F(\tau) = \frac{d}{d\tau} (1 - e^{-a}) = e^{-a} \lambda(t_0 + \tau)$$

- 4) математичне сподівання випадкової величини $T(t_0)$, тобто середній проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перша з яких настане в момент t_0 :

$$MT(t_0) = \int_0^{\infty} \tau f_{T(t_0)}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau e^{-a} \lambda(t_0 + \tau) d\tau$$

- 5) дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини $T(t_0)$:

$$DT(t_0) = \int_0^{\infty} \tau^2 f_{T(t_0)}(\tau) d\tau - \left(\int_0^{\infty} \tau e^{-a} \lambda(t_0 + \tau) d\tau \right)^2, \sigma(T(t_0)) = \sqrt{DT(t_0)}$$

-3-

Страхові події, які призводять до появи запитів, відбуваються в не передбачувані моменти часу. Невизначеність цих моментів є такою ж важливою компонентою ризику в діяльності компанії, як і невизначеність величини самих запитів. Одне з центральних припущень теорії запитів полягає в тому, що процес настання страхових випадків і пов'язані з цим величини запитів можуть і повинні вивчатися окремо.

Загалом процес запитів – це довільний точковий (дискретний процес), тобто довільна випадкова послідовність точок t_1, t_2, \dots на осі часу. Проте реальні статистичні дані вказують на те, що цей процес володіє певними властивостями і може бути достатньо повно описаний за допомогою відносно простих моделей. Найчастіше при цьому використовується пуассонівська модель запитів.

Розглянемо взаємонеperетинаючі проміжки часу (t_i, t_{i+1}) , а через $N(t_i, t_{i+1})$ позначимо число запитів, які надійшли за проміжок часу (t_i, t_{i+1}) . Якщо процес надходження запитів є найпростішим потоком подій, то ймовірність висунення запитів у будь-який момент часу не чинить впливу на висунення запиту у будь-який інший момент часу.

Для найпростішого потоку надходження запитів їх число за фіксований проміжок часу Δt розподілене за законом Пуассона з параметром $\lambda \cdot \Delta t$ для деякого $\lambda > 0$:

- 1) ймовірність того, що за час Δt буде висунуто рівно k запитів:

$$P_k(\Delta t) = P(N(t, t + \Delta t) = k) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

- 2) ймовірність того, що за час Δt буде висунуто не більше k запитів

$$P_{0 \leq i \leq k}(\Delta(t)) = \sum_{i=0}^k P_i(\Delta t)$$

Параметр λ розподілу числа запитів є середнім значенням кількості запитів за одиничний період часу або ж показник запитів. Математичне сподівання:

$$MN(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Тема 7. Моделі управління ризиком за допомогою перестраховування.

1. Сутність перестраховування та співстраховування.
2. Оцінка обсягу ризику, який передається на перестраховування.
3. Перестраховування для індивідуального ризику.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 108-143
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 191-202

-1-

Перестраховування – це система економічних страхових відносин між страховиками (страховими організаціями) з приводу укладених із страхувальниками договорів страхування, у відповідності з якими страховик, приймаючи на страхування ризику, частину відповідальності за ними передає на узгоджених умовах іншим страховикам з метою створення збалансованого страхового портфеля, забезпечення фінансової стійкості та рентабельності.

Учасниками процесу перестраховування є:

- *перестраховальник (цедент)* - страхувальник, який частину прийнятих ризиків (і страхової премії) передає на перестраховування іншому страховику, а взамін отримує зобов'язання на відшкодування частини витрат, пов'язаних з ризиками страхових випадків, які настали;

- *перестраховик (цесіонарій, цесіонер)* – страховик, який прийняв на перестраховування ризик.

Поряд з перестраховуванням існує *співстраховування*, яке **не є різновидом перестраховування**. Суть співстраховування полягає в тому, що великий ризик ділиться між кількома страховиками, тобто один об'єкт страхується сумарно. При співстрахованні підписується один договір страхування всіма співстраховиками. Відповідно страховик несе відповідальність тільки за відшкодування своєї частки вимоги.

Класифікація форм перестраховування:

1. за типом зобов'язань:

- *факультативне* – на кожен ризик, який передається на перестраховування, складається окремий договір;

- *облігаторне* – відноситься до страхового портфеля в цілому і передбачає обов'язкову віддачу цементам раніше узгодженої частини ризику.

2. за типом наданих відшкодувань:

- *пропорційне* – передбачає, що частка кожного перестраховика в кожному переданому йому ризику визначається за раніше обумовленим співвідношенням до частки власного утримання перестраховальника.

Основними видами таких договорів є: квотні, есцедентні, квотно-ексцедентні.

Квотне перестраховування – цедент передає, а перестраховик приймає на перестраховування всі ризику за обумовленим процентом. Можливе встановлення ліміту відповідальності страховика – максимальної суми, яку він відшкодує за певним договором.

Ексцедентне – перестраховування на базі ексцедента сум. Передбачає передачу страхувальником обумовленої частини ризиків **понад власне** утримання.

- *непропорційне* - договір ексцедента збитку, договір ексцедента збитковості, договір перестраховування найбільшого збитку.

Договір ексцедента збитку – відповідальність перестраховика настає тоді, коли розмір збитку перевищить обумовлену договором перестраховування суму, тобто *пріоритет цедента*. При цьому встановлюється і верхня межа відповідальності перестраховика (Наприклад, верхня границя відповідальності перестраховика – 1 о.с.с, участь цедент в пріоритеті – 0, 5 о.с.с Якщо збиток менше 0, 5 о.с.с.- то він повністю відшкодується

цементом. Весь збиток більше 0, 5 о.с.с, але сумарно не більший 1 о.с.с. – відшкодує перестраховик).

Договір ексцедента збитковості – перестраховик оплачує до певної границі суму всіх страхових відшкодувань, яка перевищує певний процент від вихідного обсягу премій. Ексцедент збитковості – це перевищення розміру сумарних виплат страховика за будь-яким видом страхування за узгоджений проміжок часу. (Наприклад, збитковість – 105% - якщо за встановлений у договорі термін збитковість перевищила 105%, то сума перевищення покривається пере страховиком).

Договір перестрашування найбільшого збитку – передбачає виплату певної кількості найбільших відшкодувань за рік.

-2-

Потреба у перестрашуванні виникає в тому разі, коли ризикова надбавка не здатна забезпечити високий рівень надійності. При перестрашуванні доцільною є оцінка відхилення ризику перестраховика від середнього значення з метою визначення ризикової надбавки перестраховика.

Математичне сподівання ризику перестраховика залежить від типу розподілу збитку.

1. якщо задана функція густини розподілу збитку $f(x)$ та μ і σ - його параметри, a та b – граничні суми збитку відповідно страховика та перестраховика, то

$$MZ = \frac{(b-a)^2}{3} \left[f\left(\frac{(a-\mu)}{\sigma}\right) + f\left(\frac{(b-\mu)}{\sigma}\right) \right]$$

2. якщо величина фактичного сумарного збитку X розподілена рівномірно від нуля до повної вартості майна, то

$$MZ = \int_a^b (x-a)f(x)dx = \frac{1}{nC} \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$DZ = \frac{(nC)^2}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{(nC)^3} \left(4 - 3 \frac{(b-a)}{nC} \right).$$

3. якщо величина збитку розподілена за показниковим законом:

$$DZ = \frac{1}{\lambda^2 e^{\lambda b}} \left(e^{\lambda(b-a)} - \lambda(b-a) - 1 \right) \left(2 - \frac{1}{e^{\lambda b}} \left(e^{\lambda(b-a)} - \lambda(b-a) - 1 \right) \right) - (b-a)^2 e^{\lambda b}$$

4. якщо величина сумарного збитку розподілена за нормальним законом розподілу:

$$DZ = \frac{(a-\mu)^2 + \sigma^2}{2} \left(\Phi\left(\frac{(b-\mu)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\mu)}{\sigma}\right) \right) - \frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{\sigma(a-\mu)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) - MZ^2.$$

Розглянемо, як визначається величина власного утримання для різних типів договорів перестраховування:

1) *квотний договір з утриманням* a , $0 < a < 1$.

Застосування квотного перестраховування передбачає, що від кожного ризику в перестраховування віддається однаковий процент $1-a$, якщо величина збитку за договором складає Y , то величина збитку, яку оплачує cedent – aY . *Власне відшкодування* у такому

разі описує величина $\bar{X}_j = N_j \cdot Y_j^\alpha = \alpha N_j \cdot Y_j = \alpha N_j$,

а *сумарне власне відшкодування за портфелем*:

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^n \bar{X}_j = \alpha \sum_{j=1}^n N_j Y_j = \alpha X$$

Нетто премія за одним договором:

$$T_{Hj} = MX_j + T_{pj} = \left(1 + \frac{T_{pj}}{MX_j} \right) MX_j = (1 + \theta_j) MX_j$$

де MX_j – середньоочікувані виплати на один договір,

θ_j – відносна ризикова надбавка

T_{pj} – ризикова надбавка.

Величина власного утримання

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n MX_j (\theta_j - \theta'_j + \alpha(1 + \theta'_j)) = \frac{U_0}{\alpha} = t_\gamma \sigma X + MX$$

2) *ексцедентний договір з однією лінією* U

В цьому випадку компанія залишається відповідальною за частину ризику, яка не перевищує величини однієї лінії, тобто якщо величина збитку за договором не перевищує U , то його оплачує cedent, а у випадку перевищення збитком величини U , сума перевищення оплачується пере страховиком.

Середнє значення для величини оплачуваного збитку розраховується:

$$\begin{aligned} M\bar{Y}_j &= \int_0^Y x f_{Y_j}(x) dx + \bar{Y} \cdot P(Y_j > \bar{Y}) = \\ &= MY_j - \int_{\bar{Y}}^{\infty} (x - \bar{Y}) f_{Y_j}(x) dx = MY_j - \int_0^{\infty} x f_{Y_j}(x) (x + \bar{Y}) dx = MY_j - B. \end{aligned}$$

B – сума, на яку зменшується оплачуваний збиток при ексцедентному перестрахованні.

$$\begin{aligned} M\bar{Y}_j^2 &= \int_0^{\bar{Y}} x^2 f_{Y_j}(x) dx + \bar{Y}^2 \cdot P(Y_j > \bar{Y}) = MY_j^2 - \int_{\bar{Y}}^{\infty} (x^2 - \bar{Y}^2) f_{Y_j}(x) dx = \\ &= MY_j^2 - \int_0^{\infty} x(x - 2\bar{Y}) f_{Y_j}(x) (x + \bar{Y}) dx = MY_j^2 - C. \end{aligned}$$

$$DY_j^{\square} = MY_j^{\square 2} - (MY_j)^2 = MY_j^2 - C - (MY_j - B)^2 = DY_j - (C + B^2) + 2BY_j$$

Власне відшкодування, яке виплачується на один договір, описує випадкова величина

$$\tilde{X}_j = N_j \cdot \tilde{Y}_j, \quad \tilde{X} = \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j$$

, а сумарне власне відшкодування

Числові характеристики власного відшкодування:

$$M\tilde{X}_j = MN_j \cdot (M\tilde{Y}_j - B) = qMY_j - qB = MX_j - qB;$$

$$M\tilde{X} = \sum_{j=1}^n MX_j - qB;$$

$$D\tilde{X}_j = q(DY_j - (C + B^2) + 2BMY_j) + q(1 - q)(MY_j - B)^2 = q(MY_j^2 + q(MY_j - B)^2)$$

$$D\tilde{X} = qMY^2 - q^2 \sum_{j=1}^n (MY_j - B)^2.$$

Якщо величина збитку Y розподілена від 0 до повної вартості C :

$$M\tilde{Y}_j = MY_j - \int_{\bar{Y}}^C (x - \bar{Y}) f_{Y_j}(x) dx = MY_j - \frac{1}{C} \int_{\bar{Y}}^C (x - \bar{Y}) dx = \frac{C}{2} - \frac{(C - \bar{Y})^2}{2C},$$

$$M\tilde{Y}_j^2 = MY_j^2 - \int_{\bar{Y}}^C (x^2 - \bar{Y}^2) \frac{1}{C} dx = \frac{C^2}{3} - \frac{1}{C} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{\bar{Y}}^C - \bar{Y}^2 x \Big|_{\bar{Y}}^C \right) = \bar{Y}^2 - 2 \frac{\bar{Y}^3}{3C},$$

$$D\tilde{Y}_j = \bar{Y}^2 - \frac{2\bar{Y}^3}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{(C - \bar{Y})^2}{2C} \right)^2.$$

$$M\tilde{X}_j = p \left(\frac{C}{2} - \frac{(C - \bar{Y})^2}{2C} \right), \quad M\tilde{X} = pn \left(\frac{C}{2} - \frac{(C - \bar{Y})^2}{2C} \right),$$

$$D\tilde{X}_j = p \left(\bar{Y}^2 - \frac{2\bar{Y}^3}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{(C-\bar{Y})^2}{2C} \right)^2 \right) + p(1-p) \left(\frac{C}{2} - \frac{(C-\bar{Y})^2}{2C} \right)^2,$$

$$D\tilde{X} = n \left(p \left(\bar{Y}^2 - \frac{2\bar{Y}^3}{3C} - \left(\frac{C}{2} - \frac{(C-\bar{Y})^2}{2C} \right)^2 \right) + p(1-p) \left(\frac{C}{2} - \frac{(C-\bar{Y})^2}{2C} \right)^2 \right).$$

Якщо величина збитку розподілена за показниковим розподілом з параметром λ :

$$M\tilde{X}_j = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\bar{Y}}), \quad M\tilde{X} = \frac{Pn}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\bar{Y}}),$$

$$D\tilde{X}_j = \frac{P}{\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda\bar{Y}} - 2\bar{Y}\lambda e^{-\lambda\bar{Y}}) + p(1-p) \left(\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\bar{Y}}) \right)^2$$

$$D\tilde{X} = n \left(\frac{P}{\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda\bar{Y}} - 2\bar{Y}\lambda e^{-\lambda\bar{Y}}) + p(1-p) \left(\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\bar{Y}}) \right)^2 \right).$$

Якщо величина збитку розподілена за нормальним розподілом:

$$M\bar{Y}_j = \int_0^{\bar{Y}} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx + \int_{\bar{Y}}^{\infty} \bar{Y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-\mu}{\sigma}}^{\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}} (t\sigma + \mu) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \sigma dt + \frac{\bar{Y}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \sigma dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\bar{Y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right) + \frac{\mu}{2} \left(\Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) + \frac{\bar{Y}}{2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right) \right).$$

$$M\bar{Y}_j^2 = \int_0^{\bar{Y}} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx + \int_{\bar{Y}}^{\infty} \bar{Y}^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\bar{Y}^2}{2} + \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \bar{Y}^2}{2} \Phi\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\sigma^2 + \bar{Y}^2}{2} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) -$$

$$- \frac{\sigma(\mu + \bar{Y})}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{Y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$D\tilde{Y}_j = M\tilde{Y}_j^2 - (M\tilde{Y}_j)^2$$

Тема 8. Система страхових резервів

1. Страхові резерви.
2. Інвестиційна політика страховика.
3. Страхові резерви в ризиковому страхуванні.
4. Формування страхових резервів.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 101-108
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 168-187

-1-

У діяльності страхової компанії завжди існує певна ймовірність того, що страхове відшкодування протягом певного періоду перевищить середній рівень, закладений в тарифах. У зв'язку з цим страховим компаніям доцільно передбачати певні заходи (чи ресурси) на випадок таких збитків. До них відносяться страхові резерви.

Страховий резерв (фонд) – виражений у грошовій формі розмір майбутніх зобов'язань, на які страхова компанія повинна мати активи.

Тобто необхідно оцінити наскільки створюваний страховий фонд (резерв) достатній для виплати страхового відшкодування, які фінансові можливості страхової компанії виконати свої зобов'язання перед страхувальником.

Оскільки страхові резерви передбачаються для забезпечення майбутніх виплат страхових сум, то вони утворюються у тих випадках, у яких страхові компанії несуть відповідальність згідно з договорами страхування. Створення страхових резервів впливає на зниження показників ймовірності розорення страхових компаній.

Важливе місце у формуванні страхових резервів відводиться ризиковій надбавці. Можливість знизити ймовірність розорення компанії простим збільшенням цієї надбавки обмежена конкуренцією на страховому ринку. Тому для підвищення надійності страхових компаній велике значення має об'єм страхового портфеля: чим він більший, тим вища надійність страхової компанії. У такому разі страхова компанія може зменшувати ризикову надбавку без збитку для надійності.

Таким чином, найбільша частка ризику страхової компанії покривається зібраними ризиковими преміями (біля 60%) і ризиковою надбавкою (10-20%). Далі починається зона відповідальності початкового капіталу. Створення досить великого резерву є недоцільним, оскільки кошти, відведені у резерв, є мало ліквідними і приносять незначний дохід порівняно з тим, який би приносили в інвестуванні.

Виникає проблема у пошуку розумного компромісу між величиною надійності та величиною резерву. Першою причиною збільшення резерву (що не є достатньо вигідним для страховика) є необхідність зменшення ризикової надбавки, іншою – висока плата за перестраховання.

На практиці початковий резерв формують таким чином, щоб він разом з ризиковою премією і надбавкою забезпечував ймовірність не розорення в межах 90-95%, а решта передають на перестраховання.

Через неоднаковий розподіл ризику та різну структуру тарифної ставки як джерела формування страхових резервів страхові резерви у ризикових видах страхування і страхуванні життя мають відмінності у складі та методах визначення. *При страхуванні життя* згідно з особливостями його проведення формуються *резерви зі страхування життя*. *За видами страхування*, відмінними від страхування життя, формуються технічні резерви.

Формування резервів зі страхування життя здійснюється відрахуванням частини страхової премії, яка передбачена для забезпечення страхових виплат (нетто-премії), та частини інвестиційного доходу від розміщення тимчасово вільних коштів страховика.

Технічні резерви — це показник, який виражає грошову оцінку обов'язків страховика за страховими зобов'язаннями, і одночасно — сума коштів, що є гарантією виконання зобов'язань перед страхувальниками з огляду на наявні у портфелі страховика договори страхування.

Технічні резерви дають змогу страховику бачити загальний обсяг відповідальності за діючими договорами їх страхування. Обсяг технічних резервів має бути достатній для покриття відшкодування всіх збитків за діючими договорами страхування, навіть у випадках припинення надходження премій за договорами.

Резерви зі страхування життя мають у своєму складі резерви довгострокових зобов'язань (математичні резерви); резерви належних виплат страхових сум. **Величина резервів довгострокових зобов'язань обчислюється актуарно, окремо за кожним договором за методикою формування резервів зі страхування життя.**

Призначення кожного виду технічних резервів різне. *Спільним є те, що протягом певного часу в період дії договору страхування вони являють собою кошти страхувальників, а не страховиків, і призначені для виплати страхових відшкодувань за договорами страхування, які не минули на звітну дату.*

-2-

Світовий досвід показує, що страховики є важливим джерелом інвестиційного капіталу. *По-перше*, це пов'язано з інверсією циклу (оскільки отримання страхової премії передедує наданням страхової послуги), *а по-друге*, із розподілом ризику в часі. Тому страховик протягом часу дії договору страхування тимчасово розпоряджається коштами страхувальника, які акумульовані у страхові резерви.

Крім коштів страхових резервів, страховик має у своєму розпорядженні власні кошти у вигляді вкладів засновників, а також спеціальних фондів, які сформовані за рахунок прибутку та суми нерозподіленого прибутку.

Тому кошти страховика, які перебувають у його розпорядженні, є **сукупністю ресурсів**, за рахунок яких він (страховик) виконує свої зобов'язання при настанні страхового випадку та забезпечує нормальне функціонування компанії. Ці кошти представлені, по-перше, надходженнями страхових премій, по-друге, власними коштами, які можуть використовуватися протягом кількох років.

З огляду на це при інвестуванні таких коштів необхідно враховувати їх структуру, а також оптимальний термін інвестування. Потрібно виходити з того, що резерви є коштами страхувальників і в разі настання страхового випадку мають своєчасно повертатися їм у вигляді страхового відшкодування, яке може бути й більшим порівняно з внесками за надання страхової послуги. Активи страхової компанії мають бути розміщені з урахуванням безпечності, прибутковості, ліквідності, диверсифікованості. Зазначимо, що це й є основні вимоги до управління активами.

Безпечність вкладень активів страхової компанії свідчить про мінімальний інвестиційний ризик, вона може досягатися шляхом диверсифікованості коштів.

Що ж до **прибутковості активів страховика**, то вона істотна при визначенні загального фінансового результату. Адже іноді в кінці звітної періоду страховик компенсує збитки, пов'язані зі страховою діяльністю, за рахунок прибутку від інвестиційної діяльності. Тому в цілому по компанії може досягатися позитивний фінансовий результат.

Говорячи про **ліквідність активів** страхових компаній, *мають на увазі можливість оперативної конвертації їх у готівкові платіжні кошти, за рахунок яких страховик дістає змогу виконати свої зобов'язання.* Особливістю використання принципу ліквідності у страхуванні є те, що вимоги до ліквідності залежать від ризиків страховому портфелю страховика. Якщо страховик здійснює страхування високо ризикованих (авіаційне, страхування і т. ін.) видів страхування, йому в короткий термін необхідно буде

перетворити свої активи на готівкові кошти. Отже, страховиків з ризикових видів страхування доцільно мати високоліквідні активи.

Але безпечність, прибутковість, ліквідність активів не є взаємозамінюваними характеристиками. Так, за надійними активами (державні цінні папери) маємо низьку прибутковість. Збалансований портфель інвестування досягається за допомогою диверсифікації вкладень. Диверсифікованість — це розподіл інвестиційних коштів між категоріями активів інвестування.

Кошти, які надходять від ризикових видів страхування, перебувають у розпорядженні страховика протягом терміну дії договору страхування, тобто, як правило, до одного року. Максимальний період часу між датою акумулювання коштів у страхові резерви та датою їх використання для страхових виплат становить рік. Але частина коштів може знадобитися в будь-який час для відшкодування збитків за цими договорами страхування. Тому кошти страхових резервів за договорами ризикових видів страхування мають бути інвестовані у високоліквідні, короткострокові активи.

Кошти, акумульовані в резерви коливань збитковості та катастроф, призначаються для забезпечення виконання страховиком своїх зобов'язань за договорами страхування у випадках, коли поточних надходжень страхових премій буде недостатньо. Кошти цих резервів можуть використовуватися не щороку, тому вони мають бути інвестовані в довгострокові активи. Але вони мають бути високоліквідними, коли постане потреба використати їх за призначенням.

Що ж до резервів зі страхування життя, то з огляду на більші терміни дії договорів і виконання зобов'язань здебільшого по закінченні строку дії договору або в обумовлений строк страховики мають можливість інвестувати кошти на триваліший термін та знизити вимоги до ліквідності таких інвестиційних вкладень.

Власні кошти страховика, вільні від зобов'язань, можуть бути вкладені переважно в довгострокові та менш ліквідні види активів.

При інвестуванні коштів слід враховувати їх розмір. Від самого початку діяльності страховика значну частку інвестицій становлять власні кошти, насамперед статутний фонд. У ході діяльності головним джерелом інвестицій стають страхові резерви.

Отже, страховик обирає власну інвестиційну політику, виходячи з видів страхування, терміну та розміру акумульованих коштів. Компанії, які здійснюють страхування життя, на відміну від страховиків, що проводять ризиковані види страхування, довше володіють коштами і можуть інвестувати їх у нерухомість, державні цінні папери та інші довгострокові активи. Для компаній, які здійснюють ризикові види страхування, слід робити акцент на більш ліквідних інвестиційних коштах.

Згідно із Законом України «Про страхування» **страхові резерви мають бути представлені активами таких категорій:**

1. грошові кошти на розрахунковому рахунку;
2. банківські вклади (депозити);
3. нерухоме майно;
4. цінні папери, що передбачають одержання доходу;
5. цінні папери, що емітуються державою;
6. права вимог до перестраховиків;
7. довгострокові інвестиційні кредити (для резервів зі страхування життя, банківські метали, інвестиції в економіку України).

З метою захисту страхувальників від невиконання страховиком своїх зобов'язань установлюється державний контроль за інвестиційною діяльністю. Директивами ЄС установлені розміри обсягів інвестицій страхових резервів, а саме: вкладення в нерухомість — не більш як 10 % загального обсягу резервів за кожним об'єктом; вкладення в акції, які котируються, та гарантовані кредити — не більш як 10 % розміру резервів за кожним із видів зазначених вкладів; інвестиції в незабезпечені кредити — не

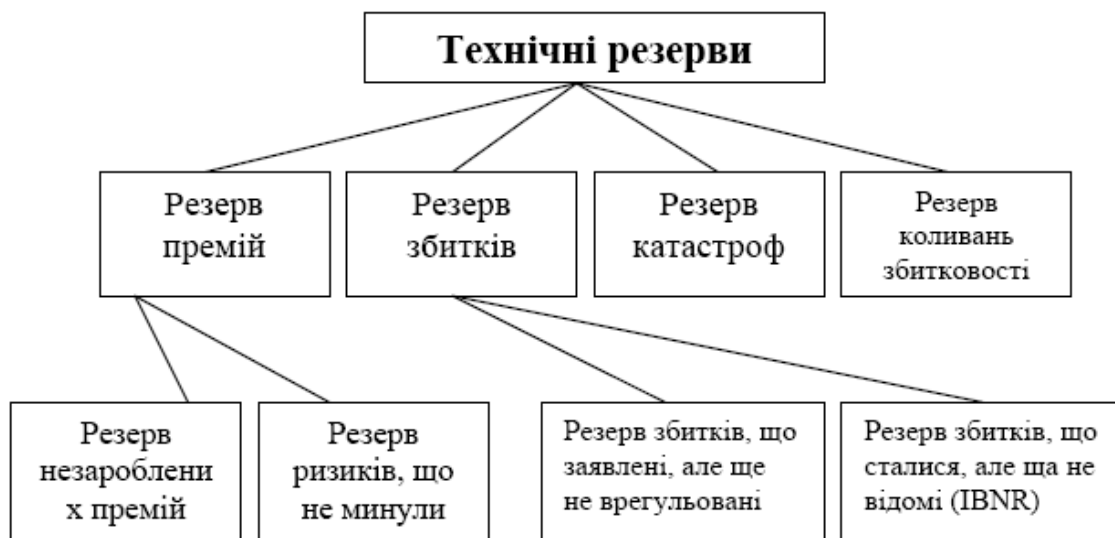
більш як 5 % за кожним їх видом; в акції, що не котируються, — не більш як 10 % у сукупності вкладень; у готівку — не більш як 3 % загальної суми резервів.

З розвитком страхового ринку, збільшенням обсягів страхових операцій, насамперед зі страхування життя, збільшенням розміру страхових резервів та власних коштів страховика зростає роль страхової системи в інвестиційному процесі нашої країни. Але обсяг коштів, акумульованих страховиками, на відміну від банківських, ще малий. Це тому, що розмір статутних фондів страхових компаній значно менший, ніж розмір таких самих фондів банків.

-3-

Страховики країн ЄС, які здійснюють ризикові види страхування, формують резерви премій та резерви збитків. При цьому майже 2/3 обсягу річної премії припадає на резерв збитків і 1/3 — на резерв премій. Систему технічних резервів ілюструє рис 1.

Резерв незароблених премій складається з частини страхових премій, які надійшли за договорами страхування, що укладені у звітному періоді, але стосується терміну дії договору страхування, що припадає на наступний звітний період. Отже, *резерв незароблених премій за своїм змістом є не резервом, а статтею розмежування обліку отриманих страхових премій між суміжними звітними періодами*. Це обумовлено тим, що страхові премії, як правило, сплачуються наперед — авансом за весь термін дії договору страхування, який не завжди збігається зі звітним періодом. **Резерв незаробленої премії** — це страховий резерв, призначений для виплат страхового відшкодування в майбутньому. Отже, він являє собою витрати майбутніх періодів.



Для визначення справжнього розміру резерву незаробленої премії існують різні методи. При виборі тієї чи іншої методики розрахунку резерву незаробленої премії необхідно враховувати такі чинники: вид страхування, термін дії договору страхування, рівень збалансованості страхового портфеля, рівномірність розподілу ризику. Береться до уваги також періодичність сплати премій за укладеними договорами страхування.

Методи визначення резерву незаробленої премії:

метод 1/365 — «*pro rata temporis*»;

метод 1/4; 1/8; 1/12; 1/24 — «паушальні» методи;

метод 40 %; 36 %.

При застосуванні методу «*pro rata temporis*» розрахунок незаробленої премії виконується за кожним договором страхування окремо. Незароблена страхова премія за *i*-м договором страхування визначається як добуток страхової премії та частки від ділення строку дії договору страхування, який ще не закінчився (у днях) до всього строку дії договору страхування (у днях) за такою формулою:

$$\text{НЗП} = \Pi_i \cdot (365 - n_i) : m_i$$

де Π_i — страхова премія за i -м договором страхування;

m_i — строк дії i -го договору страхування;

n_i — число днів, що минули з моменту, коли i -й договір страхування набрав чинності до звітної дати.

На підставі визначеної величини незаробленої премії за кожним договором страхування обчислюється сумарна величина резерву. Перевага цього методу в тому, що він дає змогу страховику на будь-яку дату визначати розмір резерву незароблених премій.

Метод 1/365 є найбільш точним, проте він дуже трудомісткий. Його використання потребує чіткої організації роботи страховика. Необхідне своєчасне відображення: надходження страхової премії по кожному договору страхування; дати укладення договору страхування; дати, коли договір страхування набирає чинності; дати його закінчення; строку дії договору страхування.

Принцип методу 1/24 полягає ось у чому: за всіма договорами страхування, що укладаються протягом місяця терміном на один рік, припускається, що страхова премія надходить в середині місяця. Отже, на кінець місяця заробленою страховою премією вважається половина страхової премії певного місяця або $1/24$, а розмір резерву становить відповідно $23/24$ страхової премії. Наприкінці наступного місяця дії договору страхування, укладеного в попередньому місяці, вважається, що договір діє половину попереднього місяця і повний місяць, наприкінці якого здійснюється розрахунок резерву незароблених премій. Тому страхова премія є заробленою і дорівнює половині розміру належної страхової премії попереднього місяця і належної страхової премії місяця, наприкінці якого здійснюється розрахунок резерву. Отже, зароблена страхова премія становить $3/24$ ($1/24 + 2/24$), а резерв незароблених премій — $21/24$ ($24/24 - 3/24$) страхової премії.

При використанні **методу 1/8** з огляду на організацію роботи страховика припускають, що договори страхування, строк дії яких рік, укладені протягом одного кварталу і набирають чинності у середині кварталу.

Страховики застосовують іноді простіші, але не такі точні методи розрахунку незаробленої премії — **метод 40 %; 36 %**. Метод цей ґрунтується на тому, що дата укладення договору страхування не має конкретного значення і вважається, що всі договори страхування укладені у середині року, тобто 1 липня. Отже, резерв незароблених премій на кінець року має відповідати половині нетто-премії. Водночас для спрощення розрахунок виконується на основі не нетто-, а брутто-премії. Проте береться до уваги, що витрати на ведення справи становлять 20 %; 18 %. Звідси половина брутто-ставки дорівнює 40 %; 36 %. Метод 40 %; 36 % придатний тоді, коли страховик здійснює масові види страхування на основі уніфікованих договорів, тобто коли договори страхування укладені на один строк, страхові премії надходять рівномірно, а компанія має надійний страховий портфель.

Резерв ризиків, які ще не минули, формується як додаток до резерву незароблених премій, щоб компенсувати можливість зниження тарифу.

Резерв катастроф формується з метою забезпечення страхових виплат у разі настання природних катастроф або значних промислових аварій, у результаті яких буде завдано збитків численним страховим об'єктам і коли постає потреба здійснювати виплати страхового відшкодування в сумах, що значно перевищують середні розміри збитків, які взято до уваги при розрахунку страхових тарифів. Резерв катастроф формується з урахуванням можливості великомасштабних аварій, від яких одночасно постраждає багато страхових об'єктів, і виявиться брак страхових резервів, сформованих з огляду на рівномірне настання випадків. Резерв катастроф особливо необхідний при страхуванні ризиків стихійних лих, а також при формуванні страхового портфеля на території підвищеної небезпеки. Відрахування до резерву катастроф мають надходити протягом

тривалого періоду і формуватися страховиками в разі, якщо діючими договорами страхування передбачена відповідальність при настанні такого роду подій.

Резерв коливань збитковості дозволяє страховикам компенсувати перевищення своїх витрат, що пов'язані з відшкодуванням збитків, у випадках, коли фактична збитковість страхової суми за видом страхування на звітний період перевищує очікуваний рівень збитковості, який узятю за основу при розрахунку тарифної ставки за цим видом страхування. У роки успішної діяльності страховика цей резерв поповнюється за рахунок отриманих у результаті страхової діяльності надлишків, у збиткові з нього вилучаються кошти для покриття збитків, що пов'язані зі здійсненням страхових операцій.

Що ж до **резерву збитків**, то фіксуються суми виплат, які передбачаються за страховими випадками, що настануть до закінчення фінансового року.

Резерв збитків, що сталися, але ще не відомі (IBNR), формується у зв'язку з випадками, які сталися, але про факт настання яких страховикові не було повідомлено на звітну дату і зобов'язання за якими будуть виконані в наступному звітному періоді. Зауважимо, що достатнього розміру резерву збитків (на відміну від резерву премій), на практиці домогтися неможливо. Важко оцінити майбутні збитки навіть за збитками, що заявлені, а тим більше за збитками, які сталися, але ще не відомі.

-4-

Нехай страховий портфель налічує n однотипних договорів страхування з однаковою для всіх ймовірністю настання страхових випадків p і страховою сумою S . N_j – індикатор страхового випадку для j -го договору, відшкодування за цим договором описує випадкова величина $X_j = N_j S$.

$$N = \sum_{j=1}^n N_j$$

Загальне число запитів описує випадкова величина відшкодування за всіма запитами $X = NS$. Ймовірність того, що до страхової компанії

надійде рівно k запитів - $P_k = P(N = k)$. Оскільки N_j незалежні, то

$$\begin{aligned} P(N = k) &= P(N_1 = 1, \dots, N_k = 1, N_{k+1} = 0, \dots, N_n = 0) + \\ &+ P(N_1 = 0, \dots, N_k = 1, N_{k+1} = 1, N_{k+2} = 0, \dots, N_n = 0) + \dots + \\ &+ P(N_1 = 0, \dots, N_{n-k-1} = 0, N_{n-k} = 1, \dots, N_n = 1) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Для числа запитів портфеля незалежних договорів страхування індивідуального ризику з біноміальним законом розподілу справедливі такі рівності:

$$MN = np, \quad DN = np(1-p), \quad W_N = \sqrt{(1-p)np},$$

$$MX = Spn, \quad DX = S^2 np(1-p), \quad \sigma_X = S\sqrt{np(1-p)}.$$

ймовірність того, що число запитів N не перевищить деякого числа m обчислюється за

формулою $1 - \varepsilon_m = P(N \leq m) = \sum_{l=1}^m p_l$, а $P(N > m) = \varepsilon_m$.

$$m^* = \min_m \left\{ 1 - \varepsilon_m, \frac{1 + \gamma}{2} \right\}$$

Позначимо через

Тоді резервний фонд в розмірі $U = m^* S$ забезпечує з ймовірністю $(1 + \gamma)/2$ виплату всіх запитів, що надійшли до страхової компанії. Ймовірність розорення ε_m .

Інший спосіб розрахунку величини резервного фонду – за центральною граничною теоремою

$$N^* = np + t_{\gamma} \sqrt{np(1-p)} \quad U = N^* \cdot S.$$

Величина початкового резерву (власний капітал компанії):

$$U_0 = U - T_H = \left(npS + t_{\gamma_2} \sqrt{npqS} - npS - t_{\gamma_1} \sqrt{npqS} \right) = (t_{\gamma_2} - t_{\gamma_1}) \sqrt{npqS}.$$

Тема 9. Моделі банкрутства страхової компанії.

1. Поняття фінансової надійності страхової компанії.
2. Оцінка платоспроможності страховика.
3. Статичні моделі банкрутства страхових компаній.
4. Динамічні моделі банкрутства страхових компаній.

Рекомендована література:

1. Кінаш О.М., Сороківський В.М. Основи актуарних розрахунків – с. 90-101
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки – ст 134-141

-1-

Фінансова надійність страховика — це спроможність страховика виконати страхові зобов'язання, прийняті за договорами страхування та перестраховування у випадку впливу несприятливих чинників. Тому стійка фінансова надійність страхових операцій дає змогу страховикові виконати усі зобов'язання за будь-яких несприятливих обставин.

Існують законодавчі вимоги до власних коштів страховика, які мають бути сформовані за рахунок вкладів засновників і прибутку. **Статутний фонд** — головний елемент функціонування будь-якого суб'єкта господарської діяльності незалежно від форми власності. Він є сумою вкладів засновників для забезпечення життєдіяльності компанії. Порядок формування статутного фонду регулюється чинним законодавством та статутними документами. **Основними вимогами до створення українських страхових компаній, як уже зазначалось, є наявність мінімального розміру статутного фонду — 1 млн. євро для страховика, який займається видами страхування іншими, ніж страхування життя, а страховика, який займається страхуванням життя, — 1,5 млн. євро за валютним обмінним курсом валюти України.** Важливо, що 100 відсотків статутного фонду має бути внесено у грошовій формі, тобто являти собою ліквідні кошти для виконання зобов'язань перед страхувальниками у разі нестачі спеціальних коштів — страхових резервів.

Страховик у ході діяльності повинен мати не тільки статутний фонд, а й значний обсяг власних коштів, вільних від зобов'язань. Такими коштами є гарантійний фонд та вільні резерви. До гарантійного фонду страховика належать спеціальні та резервні фонди, а також сума нерозподіленого прибутку. Вільні резерви — це частка власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення фінансової надійності.

Фінансова надійність страховика залежить від правильного *розрахунку тарифних ставок*, які є ціною за страхову послугу. Цей розрахунок не може бути зроблений без урахування збитковості страхової суми страховиком. Виходячи з обсягу та рівномірності розподілу ризику, частоти настання страхових випадків, обсягу доходу компанії на основі статистичних даних за кілька років страховиком розраховується тарифна ставка. Але не завжди об'єктивні виміри доступні страховику хоча б з тієї причини, що він не володіє потрібною інформацією. Тоді йому не залишається нічого іншого, як тільки покладатися

на свій суб'єктивний погляд щодо вірогідності настання негативних подій і можливих збитків. За добровільними видами страхування страховик самостійно розраховує страхові тарифи і затверджує їх в уповноваженому органі зі страхової діяльності. Крім того, існує розвинута система знижок до базових тарифів, яка застосовується для поновлення договору страхування при закінченні його дії, та для корпоративних клієнтів. Також страховий ринок України характеризується демпінговими тенденціями та необґрунтованими низькими цінами на деякі види страхування. Відхилення страхового тарифу від об'єктивних обґрунтувань може призвести до зниження фінансової надійності страховика та невиконання страховиком своїх зобов'язань перед страхувальниками.

Ще один критерій фінансової надійності страховика — **достатність страхових резервів**, які відображають обсяг страхових зобов'язань за укладеними договорами страхування. Розмір страхових резервів має бути адекватний прийнятим страховим зобов'язанням. Виконання страхових зобов'язань в першу чергу має здійснюватися за рахунок коштів страхових резервів, а їх достатність обумовлено правильно визначеною тарифною ставкою. Акумуляовані у страхові резерви премії деякий час перебувають у розпорядженні страховика і можуть бути інвестовані з метою одержання додаткового доходу. Проте тимчасово вільні кошти страхових резервів, інвестовані страховиком, підлягають регулюванню з боку держави, бо вони є коштами страхувальників і мають бути повернуті їм при настанні страхової події. Активи страховика, сформовані за рахунок страхових резервів, є гарантією виконання його зобов'язань та повинні розміщуватися з метою забезпечення ліквідності, диверсифікації, надійності та прибутковості. Такі вимоги дають змогу забезпечити своєчасні і в повному обсязі страхові виплати. Крім того, при розміщенні тимчасово вільних коштів страхових резервів необхідно враховувати характер розподілу ризику; термін страхування; обсяг акумуляованих коштів; необхідність у інвестиційному доході.

Фінансова надійність страховика забезпечується і таким інструментом, як перестраховання. Висока вартість об'єктів, які можуть бути прийняті на страхування, незбалансований страховий портфель, коливання результатів діяльності страховика можуть негативно вплинути на його фінансову надійність. Проте при перестрахованні страховик, приймаючи на страхування крупний ризик, не тільки передає його частку перестраховику, а й продовжує нести відповідальність перед страхувальником у повному обсязі. Тому страховик має правильно визначити розмір власного утримання зобов'язань. Справді, якщо розмір зобов'язань буде надто високим, то в разі настання страхового випадку в страховика може бути недостатньо коштів для покриття збитків страхувальників.

Розмір власного утримання має бути залежним від галузі страхування, а також від характеру та ймовірності ризику, ступеня схильності до нього, можливого максимального розміру збитку, обсягу власних коштів страхової компанії. *Одним із найважливіших моментів визначення розміру власного утримання є залежність від обсягу власних коштів: чим більше розмір власних коштів страховика, тим надійніше виконання його страхових зобов'язань.* З метою захисту виконання зобов'язань страховика перед страхувальниками Законом України «Про страхування» передбачається в обов'язковому порядку укладання угоди перестраховання у випадку, коли страхова сума за окремою угодою страхування перевищує 10 відсотків суми сплаченого статутного фонду і сформованих вільних резервів та страхових резервів. Страховики, які взяли на себе страхові зобов'язання в обсягах, що перевищують можливість їх виконання за рахунок власних активів, повинні застрахувати ризик виконання зазначених зобов'язань у перестраховиків.

Зобов'язання страховика складаються з двох груп:

1. **зовнішні зобов'язання**, тобто зобов'язання перед страхувальниками, фінансовими установами, перестраховиками, бюджетом і т. ін.;

2. **внутрішні зобов'язання** — це зобов'язання перед засновниками, представництвами та філіями, співробітниками.

За обсягом перевагу мають зовнішні зобов'язання, які можна поділити на страхові та інші. Обсяг зовнішніх зобов'язань є основним показником для визначення платоспроможності.

Страхові зобов'язання — основна складова зовнішніх зобов'язань. Страхова платоспроможність забезпечується за рахунок двох основних джерел — коштів страхових резервів, які мають бути адекватними взятим зобов'язанням, і власних вільних коштів. З огляду на характер страхової послуги, в основі якої лежить категорія страхового ризику та випадковість його настання, розрахунковий розмір страхових резервів може бути недостатнім для виконання всіх зобов'язань за страховими виплатами. Тому страховик повинен мати вільні від зобов'язань кошти, які може використати для виплат у разі, коли страхові резерви будуть вичерпані.

Коли бракуватиме страхових резервів, страховик повинен буде виконати страхові зобов'язання за рахунок власних коштів. Західний досвід показує, що страховика можна вважати платоспроможним у разі, коли власні кошти перевищують зовнішні зобов'язання.

До власних коштів страховика належить статутний фонд, а також резерви, які формуються за рахунок прибутку, та резерви, які не пов'язані із зобов'язаннями. Сюди слід також віднести нерозподілений прибуток. Наявність значного обсягу власних коштів має важливе значення із самого початку діяльності. Коли страховик не має збалансованого страхового портфеля, а страхові резерви малі й не можуть дати значного інвестиційного прибутку, страховик за рахунок власних коштів може виконати свої зобов'язання. Власні кошти страховика утворюють запас (маржу) платоспроможності.

У Європейському союзі у зв'язку зі специфікою проведення кожного виду страхування та різним розподілом ризику запас платоспроможності визначається окремо за ризиковими видами страхування і зі страхування життя.

До статистичних показників надійності страхових компаній належать:

1. **Коефіцієнт ліквідності K_L** — характеризує можливість швидкого перетворення активів страхової компанії в грошову форму, а отже — швидкість можливого виконання нею своїх зобов'язань.

$K_L = \text{Поточні активи} : \text{Зобов'язання страхової компанії}$

2. **Коефіцієнт платоспроможності K_P** характеризує достатність власних коштів для виконання своїх зобов'язань.

$K_P = \text{Фактичний запас платоспроможності} : \text{Нормативний запас платоспроможності}$

Фактичний коефіцієнт платоспроможності — це власний капітал підприємства., тобто його чисті активи.

3. **Коефіцієнт рентабельності K_R** — характеризує прибутковість страхової компанії, тобто ступінь перевищення доходів над витратами.

$K_R = \text{Річний прибуток страхової компанії} : \text{Річна сума витрат страхової компанії}$

4. **Коефіцієнт надійності K_N** характеризує сукупний рівень ліквідності, платоспроможності і рентабельності страхової компанії

$$K_N = \sqrt[3]{K_L \cdot K_P \cdot K_R}$$

Принциповим моментом в українському законодавстві є введення маржі платоспроможності, тобто перевищення фактичного запасу платоспроможності над розрахунковим, де розрахунковий нормативний запас встановлюється на рівні двох коефіцієнтів: 0,25 та 0,30, відповідно взятих від надходжень страхових премій за звітний період та від страхових відшкодувань за той самий період.

Зміст методики визначення платоспроможності страховика полягає в порівнянні обсягу зобов'язань страховика перед страхувальниками з обсягом власних коштів, які можуть бути використані на покриття зобов'язань. Порівняння фактичного запасу платоспроможності над нормативним запасом відображає частку власних коштів страховика в загальних зобов'язаннях.

Згідно з українським законодавством фактичний запас платоспроможності страховика визначається відніманням від вартості майна страховика суми нематеріальних активів і загальної суми зобов'язань, зокрема страхових, які беруться в розмірі технічних резервів. Фактичний запас платоспроможності страховика має перевищувати розрахунковий нормативний запас платоспроможності.

Нормативний запас платоспроможності страховика дорівнює більшій з двох визначених величин. Першої, яка визначається множенням суми надходжень страхових премій протягом звітного періоду на 0,18. При цьому сума надходжень страхових премій зменшується на 50 % страхових премій, сплачених перестраховикам. Другої, яка визначається множенням суми здійснених страхових виплат протягом звітного періоду за договорами страхування на 0,26. При цьому сума здійснених страхових виплат зменшується на 50 % страхових виплат, компенсованих пере-страховикам згідно з укладеними договорами перестраховування.

Платоспроможність залежить також від розміру ресурсів страховика і зобов'язань, які бере на себе страховик. Якщо страховик бере страхові зобов'язання, які не відповідають його фінансовим можливостям, то частина зобов'язань лишається не покритою ресурсами, за рахунок яких страховик мав би змогу їх виконати. З урахуванням забезпечення виконання зобов'язань перед страхувальниками Законом України «Про страхування» передбачено обов'язкове укладання договору перестраховування в разі, коли страхова сума за окремим об'єктом страхування перевищує 10% суми сплаченого статутного фонду і сформованих страхових резервів.

-3-

З метою своєчасного виявлення тенденцій формування незадовільної структури балансу у прибутково працюючого суб'єкта господарювання експрес-діагностика банкрутства в Україні здійснюється за допомогою коефіцієнта Бівера

$$K = \frac{ЧП + А}{З}$$

де К – коефіцієнт Бівера;

ЧП – чистий прибуток;

А – амортизація;

З – довгострокові і поточні зобов'язання.

Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище компанії, у якого протягом тривалого часу (1,5–2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2.

Систему базових показників для визначення ймовірності банкрутства страхових компаній формують такі:

- частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;
- співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;
- частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;
- частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;
- коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії;
- коефіцієнт фінансової стійкості.

Індивідуальні запити становлять інтерес не самі по собі, а з точки зору їх наслідків для фінансового положення страхової компанії.

Якщо в деякий момент часу t надходить запит величиною X і капітал в цей момент U менший, ніж X , то компанія успішно виконує свої зобов'язання. Якщо ж $X > U$, то компанія не

зможе оплатити запит. В цьому випадку можна говорити про її розорення. Ймовірність розорення служить основою для прийняття рішень.

Якщо величина сумарного запиту до страхової компанії $S=X_1 + X_2 + \dots + X_n$, і ця величина більша, ніж капітал компанії, то компанія не зможе виконувати свої зобов'язання і розориться. Ймовірність розорення

$$\varepsilon = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > U_t)$$

-4-

Динамічні моделі відрізняються від статичних тим, що в них події розгортаються в часі. Найпростіша модель включає тільки 2 процеси: процес надходження страхових премій і процес страхових виплат, які протікають в різних масштабах часу і мають різні масштаби виміру.

Оскільки N_t страхових виплат на відрізку $[0; t]$ є пуассонівським процесом з інтенсивністю α , то $MN_t = \alpha t$. Розміри виплат, що їх проводить страхова компанія, утворюють послідовність

незалежних випадкових величин $\{Y_k, k \geq 1\}$, однаково розподілених з функцією розподілу

$F(x)$. Якщо $F(0)=0$, то математичне сподівання і дисперсія існують і відповідно $MY_k = \mu$ та

$$DY_k = \sigma^2 \quad MS_t = MN_t \cdot MY_k = \alpha \mu$$

Страхові премії надходять частіше, ніж проводяться виплати, при цьому величина премії є меншою за величину страхової виплати. Якщо за основний брати процес страхових виплат, то в масштабах цього процесу надходження премій можна вважати неперервним детермінованим процесом.

В найпростішому випадку надходження страхових премій характеризується одним параметром c – швидкістю надходження страхових премій. Це означає, що якщо в початковий момент часу t_0 компанія мала капітал U_0 і до моменту $0+ t$ запити не надходили, то капітал компанії в момент t буде $U = U_0 + c t$. При цьому нехтуються проценти на капітал і інфляцію, оскільки проміжки часу незначні. Тоді прибуток компанії за цей час

$$Q_t = ct - S_t, \quad MQ_t = ct - \alpha \mu t$$

Відносна ризикова надбавка

$$\rho = \frac{MQ_t}{MS_t} = \frac{c - \alpha \mu}{\alpha \mu} = \frac{c}{\alpha \mu} - 1$$

Якщо розміри виплат розподілені за показниковим законом з математичним сподіванням μ , то ймовірність розорення (банкрутства) ε при початковому капіталі U_0 обчислюється за формулою

$$\varepsilon(U_0) = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho U_0}{\mu(1+\rho)}\right\}, & c > \mu\alpha \\ 1, & c \leq \mu\alpha \end{cases}$$

Якщо ж розглянути модель часу, в якій відбувається розорення компанії, тобто за один проміжок часу відбувається і надходження страхової премії, і виплата за запитом. Тобто в початковий момент часу t_0 компанія мала капітал U_0 і до моменту $0+ t$ надійшов запит на відшкодування розміром Y , то капітал компанії в момент t буде $U = U_0 + c t - Y$. На момент t_2 надходження другого запиту капітал збільшиться на суму $c(t_2 - t_1)$ і складе $U_0 + c t_1 - Y_1 + c(t_2 - t_1) = U_0 + c t_2 - Y_1$. У момент t_2 надходить запит величиною Y_2 і капітал зменшується до величини

$U_0 + c t_2 - Y_1 - Y_2$. Цей процес продовжується до тих пір, поки в компанії вистачає грошей на оплату запитів. В цьому випадку говорять про розорення компанії.

$$\varphi(U) = 1 - \varepsilon(U)$$

Функція виражає ймовірність того що компанія не розориться.