МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ІНФОРМАТИКИ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Алеся СІНЧУК, Сергій ЯРОЩАК

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

для студентів спеціальностей:
1 1 3 - Прикладна математика, 122 - Комп'ютерні науки.

Рівне - 2020

С 58 **УДК 519.72[075.8]**
ББК 32.811я73

Рекомендовано до друку навчально-методичною комісією факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 3 від 22 вересня 2020 р.).

Рецензенти:
Сафоник А.П., д.т.н., професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного господарства та природокористування;
Гладка О.М., к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного водного господарства та природокористування.

Сінчук А. М., Ярощак С.В.
С 58 Математичні методи дослідження операцій: [Курс лекцій| / А. М. Сінчук, С.В.Ярощак. - Рівне: РДГУ, 2020. - 72 с.

Курс лекцій вміщує теоретичні основи математичних методів дослідження операцій. Представлено приклади задач математичного програмування та фундаментальні методи розв'язування задач лінійного програмування: графічний, симплекс-метод, методи відшукання початого плану транспортної задачі та метод потенціалів. Розглянуто питання двоїстості у лінійному програмуванні. Описано графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування та метод множників Лагранжа.

Навчально-методичні матеріали орієнтовані для студентів спеціальностей 113 - Прикладна математика, 122 - Комп'ютерні науки.

С 58
УДК 519.72[075.8]
ББК 32.811я 73

ЗМІСТ

Вступ

В даний час лінійне програмування є одним з найбільш популярних апаратів математичної теорії оптимального управління рішень, у тому числі і у фінансовій математиці. Для вирішення завдань лінійного програмування розроблено складне програмне забезпечення, що дає можливість ефективно і надійно вирішувати практичні завдання великих об'ємів. Ці програми і системи забезпечені розвиненими системами підготовки початкових даних, засобами їх аналізу і представленням отриманих результатів. У розвиток і вдосконалення цих систем вкладена праця і талант багатьох математиків, досвід вирішення тисяч завдань. Знання системи лінійного програмування необхідні кожному спеціалісту в області прикладної математики.

У класичній математиці методи пошуку оптимальних рішень розглядають у розділах класичної математики, зв'язаних з вивченням екстремумів функцій, у математичному програмуванні.

Існує багато розділів в математичному програмуванні, серед них лінійне і нелінійне програмування, опукле і квадратичне, і багато інших. Але всі вони зводяться до отримання оптимального рішення у великій кількості задач різних промислових і виробничих гілках суспільства. Розглянемо лінійне програмування та визначимо основні принципи і алгоритми даного розділу математичного програмування.

Лінійне програмування є найбільш часто використовуваним методом оптимізації. До завдань лінійного програмування можна віднести:

– раціональне використання сировини і матеріалів;
– завдання оптимального розкрою;
– оптимізації виробничої програми підприємств;
– оптимального розміщення і концентрації виробництва;
– складання оптимального плану перевезень, роботи транспорту;

– управління виробничими запасами і ін.

Для великої кількості практично цікавих завдань цільова функція виражається лінійно – через характеристики плану, причому допустимі значення параметрів підпорядковані лінійній рівності або нерівностям. Знаходження за даних умов абсолютного екстремуму цільової функції носить назву лінійного програмування. Головна мета лінійного програмування є математичне формулювання проблеми складання такого плану використання різних способів виробництва, який дозволяє отримати максимальну кількість однорідного продукту при ресурсах, що є в наявності.

Оскільки курс “Математична методи дослідження операцій” є одним з провідних курсів професійної підготовки зі спеціальностей “Прикладна математика” та “Комп’ютерні науки”, то виникає потреба зацікавити студентів до його вивчення.

Основним завдання вивчення дисципліни “Математична методи дослідження операцій” є засвоєння основних засад щодо суті та етапів дослідження операцій, основних принципів та прийомів математичного моделювання операцій, принципів підбору математичного та програмного забезпечення для практичної реалізації задач.

ТЕМА 1. Вступ. Приклади задач математичного програмування.

На сучасному етапі розвитку економіки та становленні технічного прогресу, як і раніше, стоїть гостра потреба в побудові методів прийняття оптимальних рішень з метою вирішення тих чи інших практичних завдань, що ставить сьогодення перед людством. Як показує практика для математичної постановки існуючих задач та побудови ефективних методів їх вирішення необхідним є аналіз та синтез накопленого досвіду, з метою розширення області існуючих знань та встановленням додаткової інформації про досліджувані об’єкти.

Важливою складовою частиною наукового дослідження є застосування принципів системного підходу, згідно з яким досліджуваний об’єкт (процес, явище) повинен розглядатися як сукупність деякої кількості взаємопов’язаних і взаємодіючих елементів, підсистем, останні з яких являють собою також окрему систему. Безумовно методи системного підходу повинні бути направлені на пошук і визначення оптимуму цільових функцій складних систем за окремими показниками і, в першу чергу, в напрям досягнення мети. Якість функціонування таких систем оцінюють залежно від її особливостей різноманітними критеріями, серед яких є: ефективність, собівартість, надійність, продуктивність, точність тощо.

Для більшого розуміння, сказаного вище, розглянемо приклад конкретної задачі:

Задача 1. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у визначенні такого плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою. Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в табл.

Норми витрат на одиницю продукції	Вид продукції		Загальний запас ресурсу на місяць
	Морозильна камера	Електрична плита	
робочого часу (год.)	9,2	4	520
листового заліза, $м^2$	3	6	240
скла, $м^2$	0	2	40
Ціна одиниці продукції, ум. од.	300	200	

Перша виробнича програма.

Припустимо, що виготовляються лише морозильні камери. Ресурс робочого часу (520 люд.-год.) дає змогу виготовляти 520 : 9,2 = 56 морозильних камер. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення 240 : 3 = 80 морозильних камер. Скло для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, щомісяця можна випускати 56 морозильних камер, що дасть виручку 56·300=16 800 ум. од. (Зазначимо, що загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі).

Друга виробнича програма.

Визначимо кількість електроплит, які можна виготовити за даних обсягів ресурсів:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час}: & 520:4=130 \\ \textit{листове залізо}: & 240:6=40 \\ \textit{скло}: & 40:2=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 \quad \textit{електроплит.}$$

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів:

	буде використано	*залишок*
робочий час:	20*4 = 80 (год.)	520 – 80 = 440 (год.)
листове залізо:	20* 6 = 120 ($м^2$)	240 – 120 = 120 ($м^2$)
скло:	20* 2 = 40 ($м^2$)	Немає

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий} \quad \textit{час}: & 440:9{,}2=47 \\ \textit{листове залізо}: & 120:3=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 \ \textit{морозильних камер.}$$

Отже, друга виробнича програма уможливлює виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер. Виручка становитиме:

20*200 + 40 *300 = 16 000 ум. од.

Зіставляючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою виручка є більшою, отже, вона краща, ніж друга. Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Наприклад, доцільно було б розглянути програму виробництва 41 морозильної камери та можливої кількості електроплит; 42 морозильних камер та можливої кількості електроплит; 43 морозильних камер та можливої кількості електроплит і т. д.

Для розв'язання задачі побудуємо її математичну модель. Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 електроплит. Умови задачі, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2 \,,$$

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520 \,;$$

$$3x_1 + 6x_2 \le 240 \,;$$

$$2x_2 \le 40 \,;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \,.$$

Розв'язавши задачу відповідним методом математичного програмування, дістаємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер - 50 штук, електроплит - 15 ($x_1 = 50$, $x_2 = 15$). Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520 \,;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240 \,;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40 \,.$$

Виручка становитиме: F = 300·50+ 200·15 =18 000 ум. од.

Приклади задач математичного програмування.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

ТЕМА 2. Загальна задача лінійного програмування. Властивості допустимої області та розв'язків ЗЛП.

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином. Знайти вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, що мінімізує (максимізує) лінійну функцію

$$L(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 +, \ldots, c_n x_n \tag{1.1}$$

і задовольняє систему лінійних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{1.3}$$

Зауваження: обмеження (3) називають прямими і зазвичай їх не включають до непрямих обмежень (2)

Означення 1. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2) та умови невід'ємності змінних (3), називається **допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування**.

Означення 2. Множина допустимих розв'язків ЗЛП називається **допустимою областю** ЗЛП.

Означення 3. Допустимий план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **опорним планом** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3) щодо невід'ємності змінних.

Означення 4. Опорний план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, називається **невиродженим**, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він **вироджений**.

Означення 5. Опорний план $X^* = (x_1^* x_2^*, \dots, x_n^*)$, за якого функція (1) досягає мінімального (максимального) значення, називається **оптимальним розв'язком (планом)** ЗЛП.

Означення 6. Лінійну функцію (1) називають цільовою функцією ЗЛП, а величину $L(x^*)$– **її оптимальним значенням**.

Щоб показати що цільова функція повинна бути мінімізована (максимізована) використовуватимемо наступний запис:

$$L(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \rightarrow \min(max).$$

Форми запису задач лінійного програмування

1. *За допомогою знака суми «∑».*

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(max), \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i, (i = 1,2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 (j = 1,2, \dots , n).$$

2. *У векторно-матричному вигляді:*

$$L(x) = Cx \to \min(\max), Ax = B, x \geq 0,$$

Де $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}, \dots , a_{1n} \\ a_{21}a_{22}, \dots , a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}, \dots , a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, C = (c_1, \dots , c_n).$

3. *У векторній формі:*

$$L(x) = Cx \to \min(\max), A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = B, x \geq 0$$

де $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots , A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ є векторами коефіцієнтів.

Властивості допустимої області

Нехай $x^i = \left(x_1^i, \dots , x_n^i\right) \in E^n, i = 1, \dots , r, r \geq 2.$

Означення 7. **Опуклою лінійною оболонкою** точок $x^1, \dots , x^r$ називається сукупність точок виду

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i, \text{де } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

Означення 8. Будь-яка точка опуклої лінійної оболонки називається **опуклою лінійною комбінацією** точок $x^1, \dots , x^r$.

Означення 9. При $r = 2$ опукла лінійна оболонка називається **відрізком**, що з'єднує точки x^1, x^2, і позначається $\left[x^1, x^2\right]$, тобто

$$\left[x^1, x^2\right] = \left\{x: x = ax^1 + (1 - a)x^2, 0 \leq a \leq 1\right\}.$$

Означення 10. Множина W називається **опуклою**, якщо для довільних $x^1, x^2 \in W$ виконується $\left[x^1, x^2\right] \subseteq W$.

Нагадаємо що півпростором та гіперплощиною називаються множини

$$P = \left\{ x \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le (\ge) b \right\}, G = \left\{ x \in E^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \right\}$$

відповідно.

Лема 1. Перетин опуклих множин є опуклою множиною.

Лема 2. Півпростір є опуклою множиною.

Лема 3. Гіперплощина є опуклою множиною.

Означення 11. Многогранною множиною називається перетин скінченного числа півпросторів. Обмежена многогранна множина називається многогранником.

Теорема 1. Допустима множина розв'язків ЗЛП є опуклою множиною. Отже, ЗЛП полягає у знаходженні мінімуму (максимуму) лінійної функції (1) на опуклій многогранній множині.

ТЕМА 3. Геометричне тлумачення ЗЛП. Графічний метод. Випадок довільної розмірності.

Як слідує із **теореми 1** та **означення 11** допустиму множину розв'язків ЗЛП можна представити графічно у вигляді опуклого многогранника (у двовимірному випадку – многокутника) грані якого є гіперплощинами, що відповідають рівностям в системі обмежень (2). Для кращого розуміння особливостей розв'язання загальної задачі лінійного програмування здійснимо її геометричну інтерпретацію для двохвимірного випадку.

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min), \qquad (1.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m ; \end{cases} \qquad (1.5)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \qquad (1.6)$$

та прослідкуємо поведінку цільової функції в залежності від вигляду многокутника розв'язків:

1) **Множина розв'язків обмежена**

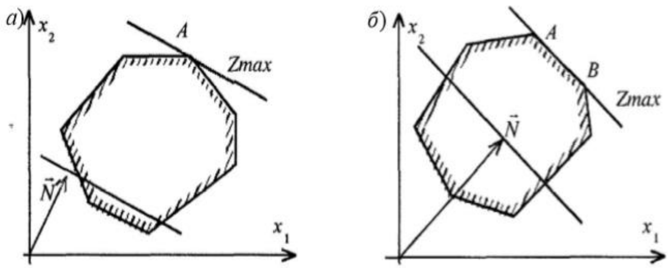


Рис. 1.1

На рисунку 1 допустима множина розв'язків є обмеженою і представлена у вигляді многокутника, а цільова функція у вигляді своїх ліній рівня (при фіксованому значенні цільової функції отримуємо рівняння прямої). У випадку (а) задача лінійного програмування має єдиний розв'язок (цільова функція має максимум в точці **А**), у випадку ж (б), коли сторона многогранника **АВ** паралельна лініям рівня розв'язків буде безліч. Якщо многогранник лежить за межами першої четверті, або ж його множина точок порожня, то розв'язку ЗЛП не існує.

2) **Множина розв'язків не обмежена**

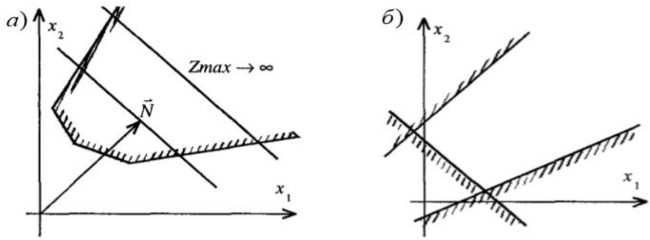


Рис. 1.2

В розглянутому на рис. 2 випадку многокутник не обмежений і цільова функція теж не обмежена, проте існують випадки, коли в необмеженому многокутнику цільова функція може все ж таки приймати свій максимум чи мінімум, як це показано на рис. 3

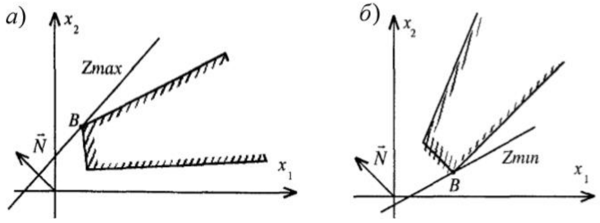


Рис. 1.3

Як можна помітити із наведених прикладів якщо цільова функція обмежена в многокутнику розв'язків то вона має оптимальне значення яке приймає в одній із його вершин, про що і говорить наступна теорема.

Теорема 2. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин багатогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Отже, можна зробити висновок: якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то

1) існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;

2) кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків. Тому для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

Із наведених вище міркувань випливає наступний метод розв'язання задач лінійного програмування:

1.2.1 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо задачу 1.4–1.6 та припустимо, що система (1.5) за умов (1.6) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (1.5) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1c_2 + c_2c_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Рухаючи пряму $c_1c_2 + c_2c_2 = const$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Випадок довільної розмірності

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування при $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних n на дві більша, ніж число обмежень m, тобто $n - m = 2$. Тоді дві довільні змінні, наприклад x_1 та x_2, можемо вибрати як вільні, а інші m зробити базисними і виразити через ці вільні. Отримаємо $m = n - 2$ рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3; \\ x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n. \end{cases}$$

Оскільки всі значення $x_i \geq 0$ $(i = \overline{1, n})$, то мають виконуватись умови:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases}$$

Підставивши вирази для x_3, x_4 , x_5 , ...; n x в цільову функцію та звівши подібні додатки отримаємо її запис відносно x_1 та x_2 . Таким чином процедура відшукання оптимального плану ЗЛП при $n > 3$ зводиться до двовимірного випадку.

Приклад 1

Знайти мінімальне і максимальне значення функції $F = x_1 + 3x_2$ при заданих обмеженнях:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Розв’язання

1) Кожному з нерівностей (1.1) відповідає напівплощина, границею якої є пряма. Для побудови прямих, заміняємо знаки нерівностей на знаки рівностей і знаходимо для кожної прямої координати двох точок.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 12 & (1) \\ -x_1 + 3x_2 = 6 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \qquad (4), (5)$$

2) Будуємо прямі.

3) Знаходимо напівплощини, що задані кожною нерівністю.

4) Знаходимо багатокутник розв’язків (трикутник *ABC*).

5) Будуємо вектор $\vec{c}\,\{1; 3\}$.

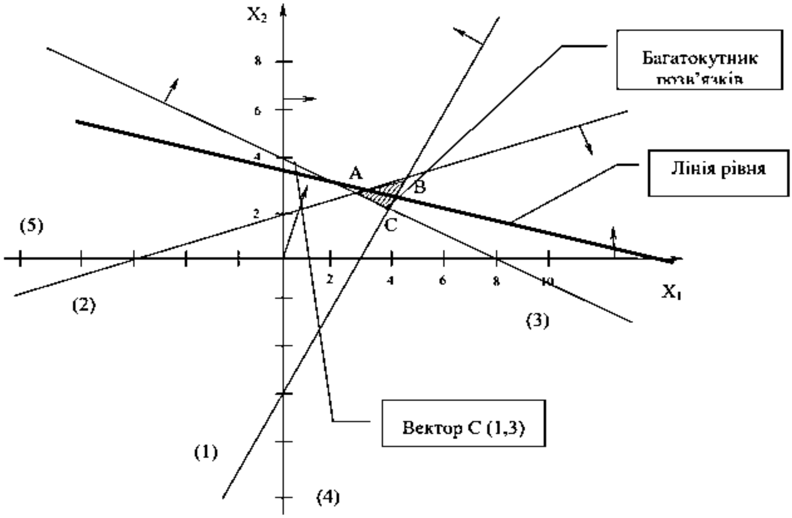


Рис. 1.4

6) Будуємо пряму $x_1 + 3x_2 = h$. h підбираємо так, щоб пряма проходила через багатокутник рішень.

7) Пересуваємо пряму $x_1 + 3x_2 = h$ в напрямку вектора $\vec{c}$. Остання загальна точка з багатокутником рішень (точка B) є точкою, в якій цільова функція приймає максимальне значення.

8) Пересуваємо пряму $x_1 + 3x_2 = h$ в напрямку протилежному вектору $\vec{c}$. Остання загальна точка з багатокутником рішень (точка C) є точкою, в якій цільова функція приймає мінімальне значення.

9) Знаходимо координати точок B і C.

$$B: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 12 \\ -4x_1 - 12x_2 = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_2 = 36 \\ -x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4.8 \\ x_2 = 3.6 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 24 \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_1 = 40 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

10) Підставляючи значення координат у цільову функцію, одержуємо максимальне значення, яке дорівнює 13,2 і мінімальне значення, яке дорівнює 10.

Відповідь: Цільова функція F приймає максимальне значення, яке дорівнює 13,2 при $x_1 = 3.6$; $x_2 = 3.2$, а мінімальне значення, яке дорівнює 10 при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

Приклад 2

Знайти мінімальне значення функції $F = 4x_1 - 7x_2 - 2x_3$ при заданих обмеженнях:

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 + x_3 \le 9, \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 \ge 6, \\ -7x_1 + 14x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'язання:

1. Виражаємо з рівняння $3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$ одну із змінних (наприклад x_3) $x_3 = 3x_1 - 5x_2$ підставляємо її в цільову функцію і в усі нерівності.

$$F = 4x_1 - 7x_2 - 2 \cdot (3x_1 - 5x_2);$$

$$-2x_1 + 6x_2 + (3x_1 - 5x_2) \le 9;$$

$$6x_1 - 7x_2 - (3x_1 - 5x_2) \ge 6;$$

$$-7x_1 + 14x_2 + 2 \cdot (3x_1 - 5x_2) \ge 4;$$

Тому що за умовою $x_3 \ge 0$, те $x_3 = 3x_1 - 5x_2$ заміняємо на $3x_1 - 5x_2 \ge 0$ У підсумку після приведення подібних, маємо задачу лінійного програмування: Знайти мінімальне значення функції $F = -2x_1 + 3x_2$ при заданих обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Далі розв'язуємо цю задачу графічним методом.

Кожній з нерівностей відповідає напівплощина, границею якої є пряма. Для побудови прямих, заміняємо знаки нерівностей на знаки рівностей і знаходимо для кожної прямої координати двох точок.

Таблиця 2 – Координати точок прямих (1) - (6)

Рівняння прямих	Координати 1-й точки		Координати 2-й точки	
	x_1	x_2	x_1	x_2
$x_1 + x_2 = 9$ (1)	0	9	9	0
$3x_1 - 2x_2 = 6$ (2)	0	-3	2	0
$-x_1 + 4x_2 = 4$ (3)	0	1	-4	0
$3x_1 - 5x_2 = 0$ (4)	0	0	5	3
$x_1 = 0$ (5)	0	0	0	4
$x_2 = 0$ (6)	0	0	4	0

3. Будуємо прямі (1)-(6).

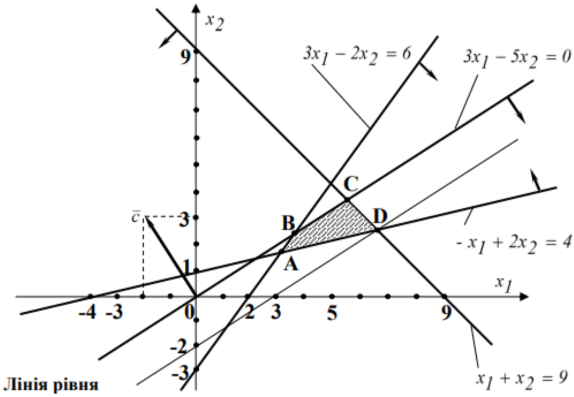
4. Знаходимо напівплощини, що задані кожною нерівністю.

5. Знаходимо багатокутник розв’язків (трикутник АВС).

6. Будуємо вектор $\vec{c}\,\{-2; 3\}$..

7. Будуємо пряму $-2x_1 + 3x_2 = h$. Підбираємо h так, щоб пряма проходила через багатокутник рішень.

8. Пересуваємо пряму $-2x_1 + 3x_2 = h$ в напрямку протилежному напрямку вектора $\vec{c}$. Остання загальна точка з багатокутником рішень (точка С) є точкою, у якій цільова функція приймає мінімальне значення.



9. Знаходимо координати точки D, розв'язуючи відповідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ -x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 5x_2 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6{,}4 \\ x_2 = 2{,}6 \end{cases}$$

10. Підставляючи x_1 та x_2 у $x_3 = 3x_1 - 5x_2$, одержуємо $x_3 = 6{,}2$.

11. Підставляючи значення координат у цільову функцію, одержуємо мінімальне значення цільової функції, яке дорівнює -5.

$$F_{min} = F(6{,}4; 2{,}6; 6{,}2) = -5$$

Відповідь: Цільова функція F приймає мінімальне значення, яке дорівнює -5 при x_1 = 6,4, x_2 = 2,6 і x_3 = 6,2.

Завдання для самоперевірки:

1) $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow min/max$

$$\begin{cases} x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow min/max$

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $F = 2x_1 + x_2 \to min/max$

$$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $F = x_1 + x_2 \to min/max$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 \le 4} \\ \boldsymbol{2x_1 - x_2 \le 2} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 \ge 1} \\ \boldsymbol{2x_1 - 2x_2 \le 0} \\ \boldsymbol{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0} \end{cases}$$

ТЕМА 4. Стандартна ЗЛП. Базисні розв'язки. Теорема про вершину допустимої області.

Розглянутий вище графічний метод розв'язання ЗЛП доцільно застосовувати лише в оговорених випадках. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інші методи які б дозволяли за скінченну кількість кроків відшукати оптимальне рішення задачі, яке як відомо (згідно теореми 2) має досягатися в одній з кутових точок багатогранника розв'язків. Відразу ж напрошується ідея перебору всіх можливих вершин багатогранника розв'язків.

Кількість можливих варіантів такого перебору становить $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ і в залежності від значень n та m може бути дуже великою і становити непосильну задачу навіть для сучасних комп'ютерів. Проте при здійсненні спрямованого перебору вершин (допустимих планів) у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Одним із методів що реалізує такий підхід є **симплекс-метод**. Однак щоб його можна було застосувати до розглянутих задач лінійного програмування їх необхідно записати у так званій стандартній формі:

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Зауважимо, що СЗЛП є частинним випадком ЗЗЛП. У свою чергу будь-яка ЗЗЛП зводиться до стандартної форми:

а) задача максимізації $L(x)$ еквівалентна задачі мінімізації $-L(x)$;

б) обмеження нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leq, \geq\} b_i, (i = 1,2, \dots, m).$$

перетворюються в обмеження-рівності введенням додаткових (балансних) невід'ємних змінних x_{n+i}таким чином

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{+, -\} x_{n+i} = b_i, (i = 1,2, \dots, m).$$

Для того щоб система обмежень була сумісною і мала безліч розв'язків, як відомо, необхідно щоб ранг матриці співпадав з рангом її розширеної матриці і виконувалося співвідношення

$$rang\ A = rang\bar{A} = m < n. \tag{1.7}$$

Означення 12. Ненульовий допустимий розв'язок x ЗЛП називається базисним, якщо система векторів умов A_j(запису ЗЛП у векторній формі), що відповідають додатним компонентам x_j цього розв'язку, є лінійно незалежною. Нульовий допустимий розв'язок завжди будемо вважати базисним.

Зауваження. Як слідує із співвідношення (1.7) максимальне число лінійно незалежних векторів A_j рівне m, а отже максимальна кількість додатних компонент базисного розв'язка x ЗЛП теж рівне m.

Означення 13. Базисний розв'язок називається не виродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент, в протилежному випадку його називають виродженим.

Теорема 3. Допустимий розв'язок x ЗЛП є вершиною многогранника розв'язків тоді і лише тоді, коли він є базисним.

Доведення. Необхідність. Якщо точка x є вершиною многогранника розв'язків то покажемо, що вона є також базисним розв'язком. Тобто згідно означення 12 необхідно показати, що вектори $A_1, \dots, A_k$ є лінійно незалежними. Не порушуючи загальності, можна вважати нерівними нулю перші $k < n$ елементів вектора $x = (x_1, \dots, x_k, \dots 0 \dots 0)$, отже,

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x_i = B.$$

Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що система векторів $A_1, A_2, \dots, A_k$ лінійно залежна. Тоді існують такі числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, не всі рівні нулю, за яких виконується співвідношення:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots + \beta_k A_k = 0.$$

За умовою

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_k A_k = B.$$

Задамо деяке число $\varepsilon > 0$, помножимо на нього першу рівність, далі результат спочатку додамо до другого, а потім віднімемо від другого рівняння:

$$(x_1 + \varepsilon\beta_1)A_1 + (x_2 + \varepsilon\beta_2)A_2 + \cdots + (x_k + \varepsilon\beta_k)A_k = B$$

$$(x_1 - \varepsilon\beta_1)A_1 + (x_2 - \varepsilon\beta_2)A_2 + \cdots + (x_k - \varepsilon\beta_k)A_k = B$$

Отже, система рівнянь задачі лінійного програмування $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = B.$ має два розв'язки, які можуть і не бути планами.

$$x^1 = (x_1 + \varepsilon\beta_1; x_2 + \varepsilon\beta_2; \dots; x_k + \varepsilon\beta_k, 0, \dots, 0)$$

$$x^2 = (x_1 - \varepsilon\beta_1; x_2 - \varepsilon\beta_2; \dots; x_k - \varepsilon\beta_k, 0, \dots, 0).$$

Всі $x_i > 0$, тому число $\varepsilon > 0$ можна вибрати настільки малим, що всі перші компоненти 1 х та 2 х набуватимуть додатних значень, тоді x^1та x^2– плани. При цьому $\frac{1}{2x^1} + \frac{1}{2x^2} = x$, , тобто x — опукла лінійна комбінація точок x^1та x^2 , проте, як відомо з означення кутової точки її не можна представити у вигляді лінійної комбінації двох різних точок які належать многограннику розв'язків, а це в свою чергу свідчить про те, що x не є кутовою точкою тобто ми прийшли до суперечності умові теореми згідно якої x – кутова точка.

Припущення стосовно лінійної залежності векторів $A_1, A_2, \dots, A_k$ привело до суперечності. Отже, воно є неправильним, а система векторів — лінійно незалежна.

Достатність. Припустимо, що точка х не є кутовою. Тоді вона може бути виражена опуклою лінійною комбінацією двох інших точок x^1та x^2 багатокутника розв'язків, тобто:

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2;\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Компоненти векторів x^1 та x^2, значення λ_1 і λ_2 невід'ємні і останні $n - k$ компонентів вектора x дорівнюють нулю, тому відповідні n – k компонент векторів x^1та x^2, також мають дорівнювати нулю, тобто

$$x^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1, 0, \dots, 0\right),$$

$$x^2 = \left(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2, 0, \dots, 0\right).$$

Оскільки x^1 та x^2– плани, то

$$A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1 + \cdots + A_k x_k^1 = B,$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_k x_k^2 = B.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, отримаємо:

$$(x_1^1 - x_1^2)A_1 + (x_2^1 - x_2^2)A_2 + \cdots + \left(x_k^1 - x_k^2\right)A_k = 0$$

За припущенням вектори $A_1, A_2, \dots, A_k$ лінійно незалежні, тому останнє співвідношення виконується, якщо

$$(x_1^1 - x_1^2) = 0;\ (x_2^1 - x_2^2) = 0; \dots \left(x_k^1 - x_k^2\right) = 0.$$

Звідси: $x_1^1 = x_1^2;\ x_2^1 - x_2^2; \dots, x_k^1 = x_k^2$.

Отже, x неможливо подати як опуклу лінійну комбінацію двох інших точок багатокутника розв’язків. Значить, x – кутова точка.

ТЕМА 5. Канонічна ЗЛП. Перебір вершин області методом виключення Жордана-Гауса.

*Означення 14***.** Стандартна ЗЛП

$$\mathrm{F} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ (j = 1,2, \dots, n).$$

називається канонічною (КЗЛП), якщо в матриці A існує одинична підматриця і вектор умов b — невід'ємний. Без обмеження загальності будемо вважати, що перші m стовпців матриці A утворюють одиничну підматрицю. Тоді КЗЛП можна записати у вигляді:

$$\mathrm{F} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max, \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + c_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases} \tag{1.9}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2, \dots, n). \tag{1.10}$$

Система обмежень (1.8) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \cdots + x_nA_n, \tag{1.11}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m-1} \end{pmatrix}, \dots ,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, \dots, A_m$ – лінійно незалежні одиничні вектори -вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в розкладі (11) базисними змінними будуть $x_1, x_2, \dots, x_m$, а інші змінні — вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0$.

Оскільки $b_1 \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$, а вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$ – одиничні, то отримаємо один із розв’язків системи обмежень (1.8):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n), \tag{1.12}$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m = B, \qquad (1.13)$$

де $A_1, A_2, \dots, A_m$ – лінійно незалежні вектори отже план x_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

Перебір вершин області

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (1.12), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2, \dots, A_m$ є базисом -вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (11) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i, j = 1,2, \dots, n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + \cdots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1} \qquad (1.14)$$

Припустимо, що у виразі (14) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$.

Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (14) і віднімемо результат з рівності (13). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = B, \quad (1.15)$$

Отже, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots x_m - \ \theta x_{m,m+1}; \theta; 0, \dots, 0)$$

є планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід'ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1, в які входять , $x_{i,m+1} \leq 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні ,$x_{i,m+1} (i = 1,2, \dots, m)$. Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх, $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - x_{i,m+1} \geq 0\ . \tag{1.16}$$

З (16) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \leq \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$.

Отже, вектор x_1 буде планом задачі для будь-якого θ , що задовольняє умову:

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}.$$

де мінімум знаходимо для тих i, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більше ніж m додатних компонент, тому в плані x_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що

$$\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}.$$

для деякого значення і, тоді відповідна компонента плану x_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (1.15):

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}\right) A_2 + \cdots + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right) A_m + + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = B,$$

якщо позначити

$$x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x_i' \quad \left(i = \overline{2, m}\right), \frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x_{m+1}',$$

то рівняння можна подати у вигляді:

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + \cdots + x_m' A_{m+1} + x_{m+1}' A_{m+1} = B,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0;\ x_2';x_3';\ldots;x_m';x_{m+1}';0;\ldots;0).$$

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* >0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо зробити висновок, що визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана–Гаусса.

Необхідно зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (14) всі , $x_{i,m+1} \leq 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta >0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить $m+1$ додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв’язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв’язків.

ТЕМА 6. Критерій оптимальності. Ознака необмеженості цільової функції. Алгоритм симплекс методу. Симплекс таблиці.

Окремим питанням реалізації симплекс методу стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (1.8)–(1.10). Допустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (1.12):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m = B \qquad (1.17)$$

та значення цільової функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = F(X_0), \qquad (1.18)$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, \dots, A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \dots + x_{mj}A_m = A_j \ \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (1.19)$$

тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення цільової функції:

$$F_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_mx_{mj} \left(j = \overline{1,n}\right), \ (1.20)$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Тоді справедливим є таке твердження (умова оптимальності плану задачі лінійного програмування): якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. даному базисі задовольняє умову:

$$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0, \qquad (1.21)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування на максимум (на мінімум відповідна умова має вигляд $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$).

Теорема 4. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна відшукати такий план X, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (1.19) і (1.20) на θ >0 і віднімемо результати відповідно з (1.17) та (1.18). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \cdots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = B; \ (1.22)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + \cdots + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = F(X_0) - \theta F_j + \theta c_j. \qquad (1.23)$$

У співвідношенні (1.23) до обох частин додається величина θc_j для $\left(j = \overline{1, n}\right)$. У (22) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ додатні, тому завжди можна знайти таке θ >0, що всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ були б невід'ємними, інакше кажучи, отримати новий план задачі виду: $X = (x_1 - \theta x_{1j};\ x_2 - \theta x_{2j}; \ldots; x_m - \ \theta x_{mj}; \theta; 0; \ldots; 0)$, якому згідно з (1.23) відповідає таке значення цільової функції:

$$F(X) = F(X_0) - \theta\left(F_j - c_j\right). \qquad (1.24)$$

Оскільки за умовою теореми $F_j - c_j \ < 0$ і θ >0, то $F(X) > F(X_0)$, що й потрібно було довести. Аналогічна теорема має місце для задачі на мінімум.

Всі обчислення з використанням симплекс методу зручно проводити в симплексній таблиці. У стовпці «Базис» якої записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «$С_{баз}$» — коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» —

початковий опорний план X_0 , в цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j(j=\overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного j-го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі обмежень. У $(m+1)$-му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j– значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають оцінковим. Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним. Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів j, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Ознака необмеженості цільової функції.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для k-го вектора$m \leq k \leq n$. Тоді до базису включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають напрямним.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести з базису, розраховують останній стовпчик таблиці – значенняθ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, i = 1,2, \dots, m, a_{ik} > 0.$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = min\theta_i, i = 1,2, \dots, m, a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають i-ий вектор, якому відповідає θ^*. Допустимо, що $\theta_i = min\frac{b_i}{a_{ik}}$ відповідає вектору, що знаходиться в l-му рядку. Відповідний рядок симплексної таблиці називають напрямним. Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиціa_{lk}, який називають розв'язувальним елементом. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана–Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k}A_1 + \dots + a_{1k}A_1 + \cdots + a_{mk}A_m. \qquad (1.25)$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (1.25):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \cdots - a_{mk}A_m). \qquad (1.26)$$

Розклад вектора B за початковим базисом має вигляд:

$$B = b_1A_1 + \cdots + b_lA_l + \cdots + b_mA_m. \qquad (1.27)$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (1.26) у рівняння (1.27), маємо:

$$B = b_1A_1 + \cdots + b_l\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \cdots - a_{mk}A_m)\right] + \cdots + b_mA_m =$$

$$= \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \cdots + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + \cdots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_{m.}$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\left\{b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\ \ (i \neq j); \quad b_k' = \frac{b_l}{a_{lk}}\ (i = j);\right\} \tag{1.28}$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j}A_1 + \cdots + a_{ij}A_i + \cdots + a_{mj}A_m. \tag{1.29}$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (1.26) у (1.29):

$$A_j = a_{1j}A_1 + \cdots + a_{lj}\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \cdots - a_{mk}A_m)\right] + \cdots + a_{mj}A_m =$$

$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \cdots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m = a_{1j}'A_1 +$$

$$+ \cdots + a_{kj}'A_k + \cdots + a_{mj}'A_m.$$

Новий план: $X_1 = \left(x_1 = a_{1j}'; \ldots; x_k = a_{kj}'; \ldots; x_m = a_{mj}'\right)$, де

$$\left\{a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{lk}(i \neq j);\ a_{kj}' = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}(i = j)\right\}. \tag{1.30}$$

Формули (1.28) та (1.30) є формулами повних виключень Жордана–Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, \ldots, A_n$ за векторами нового базису, необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв’язувальний елемент;

2) розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана— Гаусса (правило прямокутника).

Потім необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі$F_j - c_j \geq 0$, то план X_1— оптимальний, інакше переходять до відшукання наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

ТЕМА 7. Методи пошуку початкового базисного розв'язку ЗЛП: метод штучного базису, М-метод.

На попередніх лекціях нами розглянуто випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\mathrm{F} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max, \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n \ = b_1; \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n \ = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 \ + \ a_{m2}x_2 + \cdots + \ a_{mn}x_n \ = b_m. \end{cases} \tag{1.32}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2, \dots, n). \tag{1.33}$$

Задача подана в стандартному вигляді і система обмежень (1.32) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі (яке не розв'язане відносно базисної змінної) додати одну штучну змінну $x_{n+1} \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$. Тобто кількість штучних змінних не обов'язково має дорівнювати m. Допустимо, що система рівнянь (1.32) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (1.34)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\dots,n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (1.32) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (1.34) називають **розширеною**, або **М-задачею**. Розв'язок розширеної задачі збігатиметься з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (1.34) набуде вигляду (1.32) (не міститиме штучних змінних), а розв'язок розширеної задачі буде розв'язком і задачі (1.31)–(1.33).

Як було раніше відзначено в описі основної ідеї симплекс методу: до базису повинні входити змінні які покращують (не погіршують) значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати (на мінімум зменшувати). Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами (у випадку мінімуму з додатними). Тобто цільові функції для відповідних задач набуватимуть вигляду:

$$\mathrm{F}^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m} \to max$$

$$\mathrm{F}^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + Mx_{n+m} \to min$$

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв'язку, тобто система обмежень несумісна.

Таким чином, щоб відшукати розв'язок задачі лінійного програмування (1.31)– (1.33) необхідно знайти розв'язок розширеної задачі, взаємозв'язок між якими дає наступна теорема:

Теорема 5. Якщо в оптимальному плані $\hat{X}_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0$, $(i = 1,2, \dots, m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Зазначимо, що коли план $\hat{X}_{opt}$ є оптимальним планом розширеної задачі, то план X_{opt}– план початкової задачі. При цьому

$$F\left(X_{opt}\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - M * 0 - \dots - -M * 0 = F^*\left(\hat{X}_{opt}\right).$$

Доведемо, що план X_{opt} – оптимальний план початкової задачі. Допустимо, що X_{opt} не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для якого$F(X^*) > F(X_{opt})$. Звідси для вектора $\hat{X}_{opt}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, що є планом розширеної задачі, маємо:

$$F^*\left(\hat{X}_{opt}^*\right) = F\left(X_{opt}^*\right) > F\left(X_{opt}\right) = F^*(\hat{X}_{opt}),$$

тобто

$$F^*\left(\hat{X}_{opt}^*\right) > F^*\left(\hat{X}_{opt}\right).$$

Отже, план $\hat{X}_{opt}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми, а тому зроблене допущення щодо неоптимальності плану X_{opt} є неправильним.

Отже, загалом **алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом** складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j.

Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3. (ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі)

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному

стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $\Delta_j \ (j = \overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Ідея побудови розв'язку задачі лінійного програмування за симплекс методом полягає у переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції збільшується. Перехід до іншого опорного плану можливий лише в тому випадку, якщо відомо, деякий, початковий план.

Розглянемо задачу лінійного програмування виду:

$$L(x) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n \tag{1.35}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + x_{m+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + x_{m+2} = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3m}x_m + x_{m+3} = b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m + x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.36}$$

Дану задачу запишемо у векторній формі:

$$L(x) = Cx$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_mx_m + p_{m+1}x_{m+1} + p_nx_n = p_0$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ p_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \dots \\ a_{m3} \end{pmatrix}; \dots;\ p_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ a_{3m} \\ \dots \\ a_{mm} \end{pmatrix};\ p_{m+1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots;\ p_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix};$$

Далі, виходячи з того, що $p_{\mathrm{m}+1}b_1 + p_{\mathrm{m}+2}b_2 + p_{\mathrm{m}+3}b_3 + \dots + p_n b_m = p_0$

можна зробити висновок, що план $X = (0, \dots, 0, b_1, \dots b_m)$ є опорним планом задачі лінійного програмування. Цей план задається системою одиничних векторів $p_{\mathrm{m}+1}; p_{\mathrm{m}+2}; p_{\mathrm{m}+3}; \dots; p_n$, які утворюють базис. Введемо позначення:

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{bi} a_{ij} - c_j,\ \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (1.37)$$

Означення 1: Опорний план $X = (0, \dots, 0, b_1, \dots b_m)$ є оптимальним, якщо усі $\Delta_j \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Означення 2: Якщо для деякого $j = k$ існує $\Delta_k < 0$ і в k-му стовпці, що відповідає Δ_k немає додатніх елементів, то цільова функція є необмеженою на множині її планів.

Означення 3: Якщо для деякого $j = k$ існує $\Delta_k < 0$ і в k-му стовпці, що відповідає Δ_k є хоча б один додатній елемент, то існує деякий опорний план X^*, для даної задачі, в якому значення цільової функції є більше за $F(X)$, тобто $F(X^*) > F(X)$.

Весь хід роботи за симплекс методом доцільно оформляти у вигляді таблиці наступного виду:

№	Базис	C_b	P_0	c_1	c_2	c_3	...	c_k	...	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_n
				p_1	p_2	p_3	...	p_k	...	p_m	p_{m+1}	p_{m+2}	...	p_n
1	p_{m+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1k}	...	a_{1m}	1	0	...	0
2	p_{m+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2k}	...	a_{2m}	0	1	...	0
3	p_{m+3}	0	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3k}	...	a_{3m}	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
r	p_r	0	b_r	a_{r1}	a_{r2}	a_{r3}	...	a_{rk}	...	a_{rm}	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	p_n	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mk}	...	a_{mm}	0	0	...	1
$m+1$			F_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	...	Δ_k	...	Δ_m	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	...	Δ_n

Симплекс таблиця

де значення F_0 дорівнює скалярному добутку вектора P_0 на вектор C_b:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{bi} b_i \qquad (1.38)$$

Після заповнення таблиці, вихідний опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього переглядають елементи *(m+1)*-го рядка таблиці. В результаті може мати місце один з наступних трьох випадків

Усі $\Delta_j \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Існує j, для якого $\Delta_j < 0$ і для кожного такого j симплекс таблиці, міститься принаймні одне додатнє число $a_{ij} (a_{ij} > 0)$.

Існує j, для якого $\Delta_j < 0$ і всі відповідні цьому індексом величини

$$a_{ij} \leq 0, \left(i = \overline{1,m}\right).$$

В першому випадку ми отримали оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування. Значення F_0 останньої симплекс таблиці буде містити максимальне значенням цільової функції. В другому випадку є можливість покращити значення цільової функції за допомогою переходу до іншого опорного плану (перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється заміною базису, тобто виключення з нього якоїсь змінної та включення замість неї нової, з числа вільних змінних). Третій випадок свідчить про необмеженість цільової функції на множині розв'язків.

Далі розглянемо, яким чином здійснюється перехід до іншого опорного плану. Для цього серед елементів оцінкового рядка останньої симплекс таблиці вибираємо те значення Δ_j, яке по абсолютній величині приймає максимальне значення. Якщо їх є декілька, то вибираємо те, якому відповідає найбільше c_j. Після того, як ми вибрали k-й стовпець ($\Delta_k < 0$), вектор p_k потрібно ввести в базис.

Для того, щоб визначити на місце якого вектора базису вводити вектор p_k, визначаємо $\min_{i=1,m}(b_i/a_{ik})$, для усіх $a_{ik} > 0$. Нехай це буде елемент, який міститься в r-му рядку, тобто елемент a_{rk}. Надалі даний елемент будемо називати розв'язуючим елементом. Стовпець k і рядок r, напрямляючими стовбцем і рядком відповідно. Наступний крок полягає у побудові нової симплекс таблиці, тобто визначення усіх її коефіцієнтів згідно нового базису, які обчислюються за наступними формулами:

$$b'_i = \begin{cases} b_i - \left(\dfrac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik}, i \neq r \\ \dfrac{b_r}{a_{rk}}, i + r \end{cases} ; \; a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \left(\dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) a_{ik}, i \neq r \\ \left(\dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}\right), i = r \end{cases}$$

Розв'язок задачі лінійного програмування за симплекс методом — приклад:

Для виготовлення товару А, В і С підприємство використовує три види сировини І, ІІ, ІІІ. Норми витрат сировини на виробництво одного товару кожного виду, ціна одиниці товару А, В і С а також загальна кількість сировини наведені в наступній таблиці:

Види сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції			Запаси сировини
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одиниці продукції	9	10	16	

Норми витрат сировини на виробництво одного товару

Складемо такий план випуску даної продукції, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Позначемо через x_1 — кількість товару А; x_2 — кількість товару В; x_3 — кількість товару С. Тоді математична модель даної задачі буде наступна: знайти максимум функції $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow 0\ max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо в систему рівнянь, шляхом введення додаткових змінних x_4, x_5, x_6 (іншими словами запишемо систему обмежень у канонічній формі). У цільову функцію ці змінні увійдуть з нульовими коефіцієнтами:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow 0\ max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \end{cases}$$

Запишемо дану задачу у векторній формі і побудуємо першу симплекс таблицю:

$$p_1=\begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};\quad p_2=\begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};\quad p_3=\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};\quad p_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad p_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad p_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

№	*Базис*	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	p_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	p_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	p_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	−9	−10	−16	0	0	0

$F_0 = C_b \cdot P_0 = 0\cdot 360+0\cdot 192+0\cdot 180=0;$
$\Delta_1= C_b \cdot p_1 - C_1 = 0\cdot 18+0\cdot 6+0\cdot 5-9=-9;$
$\Delta_2= C_b \cdot p_2 - C_2 = 0\cdot 15+0\cdot 4+0\cdot 3-10=-10;$
$\Delta_3= C_b \cdot p_3 - C_3 = 0\cdot 12+0\cdot 8+0\cdot 3-16=-16;$
$\Delta_4= C_b \cdot p_4 - C_4 = 0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0-0=0;$
$\Delta_5= C_b \cdot p_5 - C_5 = 0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0-0=0;$
$\Delta_6= C_b \cdot p_6 - C_6 = 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1-0=0;$

Побудова першого опрного плану задачі лінійного програмування де елементи F_0 та $\Delta_j \geq 0, \left(i=\overline{1,n}\right)$ четвертого, оцінкового, рядка, обчислюються за формулами (1.3), (1.4) відповідно.

Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіримо на оптимальність. Для цього, як уже зазначалься вище, переглядаємо елементи оцінкового рядка, бачимо, що у даному прикладі перший опорний план не є оптимальним (серед елементів Δ_j є такі, що мають від'ємне значення). Тому слідуючи вище розглянутому алгоритму симплекс методу, переходимо до іншого опорного плану.

Для цього серед усіх Δ_j вибираємо те, яке по абсолютній величині приймає максимальне значення. В нашому випадку таким буде $\Delta_3=-16$. Тобто вектор p_3 потрібно ввести в базис.

Далі, визначаємо на місце якого вектора базису вводимо p_3. Для цього визначаємо $\min_{i=1,3}\left(\frac{b_i}{a_{i3}}\right)=\min\left(\frac{360}{12},\frac{192}{8},\frac{180}{3}\right)=\min(30{,}24{,}60)=24$. Таким чином розв'язуючим буде елемент $a_{23}=8$, який вказує на те, що виводити з базису необхідно вектор p_3.

Наступним кроком буде побудова другої симплекс таблиці і визначення всіх її коефіцієнтів згідно нового базису:

$$b'_1 = b_1 - \left(\frac{b_2}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 360 - \left(\frac{192}{8}\right) \cdot 12 = 72; \quad b'_2 = \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{192}{8} = 24; \quad b'_3 = b_3 - \left(\frac{b_2}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 180 - \left(\frac{192}{8}\right) \cdot 3 = 108;$$

$$a'_{11} = a_{11} - \left(\frac{a_{21}}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 18 - \left(\frac{6}{8}\right) \cdot 12 = 9; \quad a'_{21} = \frac{a_{21}}{a_{23}} = \frac{6}{8} = 0.75; \quad a'_{31} = a_{31} - \left(\frac{a_{21}}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 5 - \left(\frac{6}{8}\right) \cdot 3 = 2.75;$$

$$a'_{12} = a_{12} - \left(\frac{a_{22}}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 15 - \left(\frac{4}{8}\right) \cdot 12 = 9; \quad a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{23}} = \frac{4}{8} = 0.5; \quad a'_{32} = a_{32} - \left(\frac{a_{22}}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 3 - \left(\frac{4}{8}\right) \cdot 3 = 1.5;$$

$$a'_{13} = 0; \quad a'_{23} = 1; \quad a'_{33} = 0;$$

$$a'_{14} = a_{14} - \left(\frac{a_{24}}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 1 - \left(\frac{0}{8}\right) \cdot 12 = 1; \quad a'_{24} = \frac{a_{24}}{a_{23}} = \frac{0}{8} = 0; \quad a'_{34} = a_{34} - \left(\frac{a_{24}}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 0 - \left(\frac{0}{8}\right) \cdot 3 = 0;$$

$$a'_{15} = a_{15} - \left(\frac{a_{25}}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 0 - \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 12 = -1.5; \quad a'_{25} = \frac{a_{25}}{a_{23}} = \frac{1}{8} = 0.125; \quad a'_{35} = a_{35} - \left(\frac{a_{25}}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 0 - \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 3 = -0.375;$$

$$a'_{16} = a_{16} - \left(\frac{a_{26}}{a_{23}}\right) \cdot a_{13} = 0 - \left(\frac{0}{8}\right) \cdot 12 = 0; \quad a'_{26} = \frac{a_{26}}{a_{23}} = \frac{0}{8} = 0; \quad a'_{36} = a_{36} - \left(\frac{a_{26}}{a_{23}}\right) \cdot a_{33} = 1 - \left(\frac{0}{8}\right) \cdot 3 = 1;$$

№	*Базис*	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	p_4	0	72	9	9	0	1	−1.5	0
2	p_3	16	24	0.75	0.5	1	0	0.125	0
3	p_6	0	108	2.75	1.5	0	0	−0.375	1
4			384	3	−2	0	0	2	0

$$F_0 = C_b \cdot P_0 = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384;$$
$$\Delta_1 = C_b \cdot p_1 - C_1 = 0 \cdot 9 + 16 \cdot 0.75 + 0 \cdot 2.75 - 9 = 3;$$
$$\Delta_2 = C_b \cdot p_2 - C_2 = 0 \cdot 9 + 16 \cdot 0.5 + 0 \cdot 1.5 - 10 = -2;$$
$$\Delta_3 = C_b \cdot p_3 - C_3 = 0 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 16 = 0;$$
$$\Delta_4 = C_b \cdot p_4 - C_4 = 0 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$
$$\Delta_5 = C_b \cdot p_5 - C_5 = 0 \cdot (-1.5) + 16 \cdot 0.125 + 0 \cdot (-0.375) - 0 = 2;$$
$$\Delta_6 = C_b \cdot p_6 - C_6 = 0 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0;$$

Після того, як ми заповнили останній (оцінковий) рядок другої симплекс таблиці, робимо висновок, що другий опорний план також не є оптимальним (серед елементів Δ_j містяться від'ємні значення). Тому, переходимо до третього опорного плану, для якого, як можна побачити нижче, умова оптимальності виконується, і який приймаємо в якості оптимального розв'язку заданої задачі лінійного програмування:

№	*Базис*	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	p_2	10	8	1	1	0	0.111	−0.167	0
2	p_3	16	20	0.25	0	1	−0.05	0.2	0
3	p_6	0	96	1.25	0	0	−0.167	−0.125	1
4			400	5	0	0	0.222	1.667	0

$$X^* = (0, 8, 20, 0, 0, 96);$$
$$F_{max} = 9 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 20 \cdot 16 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 96 = 400;$$

Завдання для самоперевірки:

Приклад 1. Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в таблиці 1.1. У ній же вказаний загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 1.1

Тип обладнання	Затрати часу (верстато-год.) на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год.)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Вимагається визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Приклад 2. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна одержувати не менше 60 одиниць поживної речовини *A,* не менше 50 одиниць речовини *B* і не менше 12 одиниць речовини *C*. Вказані поживні речовини містяться в трьох видах корму. Склад одиниць поживних речовин в 1кг кожного з видів корму наведений у таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1кг корму I виду складає 9 коп., корму II виду — 12 коп. і корму III виду — 10 коп.

Приклад 3. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 1.3. У ній же вказаний прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством.

Таблиця 1.3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Враховуючи, що вироби A і B можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), вимагається встановити такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

ТЕМА 8. Двоїста задача лінійного програмування. Теорема двоїстості. Двоїстий критерій оптимальності.

Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою, так званою **двоїстою** задачею. Так, наприклад, якщо розв'язок ЗЛП (1)-(3) визначає, яку кількість продукції кожного виду $x_j(j = \overline{1,n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства за відомими вхідними даними, то розв'язок двоїстої до неї задачі визначає, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного і-го виду ресурсу y_i, $i = \overline{1,m},$ щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Оскільки на виготовлення одиниці j-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (1)–(3) m видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj}$, а ціна одиниці i-го виду ресурсу дорівнює y_i, $(i = \overline{1,m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці j-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб: $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \dots + a_{mj}y_m$. Таким чином, можна встановити, що продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від їх продажу перевищить суму, яку можна було б отримати від реалізації готової продукції, тобто:$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j$. Загальна вартість ресурсів визначається за формулою: $Z = b_1y_1 + b_2y_2 +$

$+b_3y_3 + \cdots + b_m y_m$.

Отже, в результаті **маємо двоїсту задачу**:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + +b_3y_3 + \cdots + b_my_m \rightarrow min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 \ + \ a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \cdots + \ a_{m1}y_m \ \geq c_1; \\ a_{12}y_1 \ + \ a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \cdots + \ a_{m2}y_m \ \geq c_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n}y_1 \ + \ a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \cdots + \ a_{mn}y_m \ \geq c_n; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1,2, \ldots, m).$$

Зауважимо, що поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних поглядів.

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до певного вигляду, згідно з яким в задачі на максимум всі нерівності повинні бути приведені до виду «≤», а для задачі на відшукання мінімального значення – до виду «≥», тоді двоїста задача **утворюється за такими правилами**:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі. 2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі. 3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця *A* що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень

двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У **симетричних задачах** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень. У **несиметричних задачах** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої — лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості.

Лема 4. Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = Z(Y)$$

Доведення. Помножимо кожне рівняння системи (2) на відповідну змінну двоїстої задачі, маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + \dots + a_{1n}x_ny_1 \le b_1y_1; \\ a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_ny_2 \le b_2y_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1y_m + a_{m2}x_2y_m + \dots + a_{mn}x_ny_m \le b_my_m; \end{cases}$$

Підсумувавши праві і ліві частини нерівностей, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \qquad (1.39)$$

Аналогічно перетворимо систему обмежень (1.36) двоїстої задачі, після чого отримуємо нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \right) \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \qquad (1.40)$$

Ліві частини нерівностей (39) та (40) збігаються, отже:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Лема 5. (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$, – допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*) \qquad (1.41)$$

то X^*, Y^*– оптимальні розв’язки відповідних задач.

Теорема 6. (перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв’язок, причому для оптимальних розв’язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто $max\, F \;=\; min\, Z$.

Між розв’язками спряжених задач крім рівності значень цільових функцій існує тісніший взаємозв’язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування, пряму (1)–(3) та двоїсту до неї (1.35)–(1.37).

Для розв’язування задач симплексним методом необхідно звести їх до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач необхідно ввести відповідно m та n невід’ємних змінних.

Теорема 7. (друга теорема двоїстості для симетричних задач). Для того, щоб плани $X*$ та $Y*$ відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \qquad j = \overline{1,n} \tag{1.42}$$

$$y_j^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* - b_i\right) = 0, \qquad i = \overline{1,m} \tag{1.43}$$

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічне тлумачення другої теореми двоїстості щодо оптимального плану Y^* двоїстої задачі: у разі, коли деяке j-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j , то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$. .

Теорема 8. (третя теорема двоїстості) Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_j^* $i = \overline{1,m}$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, \dots, b_m)$за відповідними аргументамиb_i, $(i = \overline{1,m}\,)$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу

$$y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}.$$

Отже, за умови незначних змін b_i замість поставленої задачі маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X'оптимальний план нової задачі. Для визначення $\mathrm{F}(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $\mathrm{F}(X') - \mathrm{F}(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* — оптимальний план початкової задачі.

ТЕМА 9. Майже канонічна ЗЛП. Двоїстий симплекс метод та його алгоритм.

Як відомо з попередньої лекції, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту задачу. Теоремами двоїстості встановлено зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач. Для знаходження розв'язку однієї зі спряжених задач можна перейти до двоїстої і, використовуючи її оптимальний план, визначити оптимальний план початкової. Перехід до двоїстої задачі не обов'язковий. Легко помітити, що звичайна симплексна таблиця в стовпчиках містить початкову задачу, а в рядках – двоїсту.

Оцінками плану прямої задачі є рядок $\Delta_j = F_j - c_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ а оцінками плану двоїстої – стовпчик «План» з компонентами вектора вільних членів системи обмежень B. Отже, розв'язуючи пряму задачу, симплексний метод дає змогу одночасно знаходити і розв'язок двоїстої задачі. Однак двоїсту задачу можна також розв'язати за таблицею, в якій записана пряма, а відшукавши оптимальний план двоїстої задачі, разом з тим отримати розв'язок початкової задачі. Такий спосіб розв'язання задачі лінійного програмування має назву **двоїстого симплексного методу**. Прямий та двоїстий симплексні методи пов'язані між собою.

Нехай необхідно розв'язати задачу лінійного програмування, подану в канонічному виді:

$$F = CX \to min, \tag{1.44}$$

$$AX = B, \tag{1.45}$$

$$X \geq 0. \tag{1.46}$$

Тоді двоїстою до неї буде така задача:

$$Z = BY \to \max \tag{1.47}$$

$$YA \leq C. \tag{1.48}$$

За алгоритмом двоїстого симплексного методу як перший опорний план вибирається деякий допустимий розв'язок двоїстої задачі (іноді в літературі його називають «псевдопланом») і зберігається його допустимість для двоїстої задачі упродовж всіх кроків.

Допустимо, що початковий базис складається з m векторів

$D = (A_1, A_2, \dots, A_l, \dots, A_m)$, причому хоча б одна з компонент вектора $X == D^{-1}B = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n)$, від'ємна.

Нехай $x_l < 0$, однак справджується критерій оптимальності плану, тобто всі оцінки векторів

$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$. На підставі першої теореми двоїстості план двоїстої задачі відшукуємо у вигляді: $Y = C_{\text{баз}} D^{-1}$. Цей план не є оптимальним для прямої задачі, оскільки він не задовольняє умову невід'ємності змінних і не є оптимальним для двоїстої задачі, бо всі оцінки векторів оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід'ємними. Отже, вектор, що відповідає компоненті $x_l < 0$, потрібно виключити з базису початкової задачі, а вектор двоїстої задачі, що відповідає від'ємній оцінці, включити до базису двоїстої.

У прямому симплекс-методі спочатку виявляють змінну, яку слід ввести у базис, а в двоїстому симплекс-методі навпаки – спочатку визначають змінну, яку виключають з базису, а потім змінну, яку вводять у базис. У літературі зустрічаються різні варіанти двоїстого симплексного методу, які не мають принципових відмінностей. Розглянемо такий **алгоритм двоїстого симплексного методу**:

1. Необхідно звести всі обмеження задачі до виду «≤», ввести додаткові невід'ємні змінні, визначити початковий базис та перший опорний план

$$X = (b_1, b_2, \dots, b_m)\,.$$

2. Якщо всі оцінки векторів $\Delta_j = F_j - c_j \leq 0$ і компоненти вектора-стовпчика «План» $(b_1, b_2, \dots, b_m) \geq 0$ для всіх $\left(i = \overline{1,m}\right)$, то задача розв'язана. Інакше необхідно вибрати найбільшу за модулем компоненту $b_l < 0$ і відповідну змінну x_lвиключити з базису.

3. Якщо в l-му рядку, що відповідає змінній x_l, не міститься жодного $a_{lj} < 0$, то цільова функція двоїстої задачі необмежена на багатограннику розв'язків, а початкова задача розв'язку не має. Інакше

існують деякі $a_{lj} < 0$ і тоді для відповідних стовпчиків визначають аналогічно прямому симплекс-методу оцінки $\theta: \theta_j = \underset{j}{min} \left|\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right|$ $(a_{ij} < 0)$, що дає змогу вибрати вектор, який буде включено в базис.

4. Виконавши крок методу повних виключень Жордана–Гаусса, переходять до наступної симплексної таблиці (Переходять до пункту 2). Зазначимо, що для задачі знаходження максимального значення цільової функції за наведеним алгоритмом необхідно перейти до цільової функції $F' = -F$, або дещо змінити сам алгоритм.

Зауважимо, що здебільшого двоїстий симплексний метод за кількістю ітерацій не кращий, ніж звичайний. Однак, в окремих задачах він дає змогу спростити розрахунки.

Крім того, двоїстий симплексний метод буває вигіднішим для розв’язування задач, що випливають з уже розв’язаних, наприклад, якщо введенням кількох нових обмежень уточнюють задачу або ж пристосовують її до змінених реальних умов.

Приклад: переведення двоїстої задачі в пряму

$$L(X) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 < 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 < 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 < 180 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Переводимо пряму задачу в двоїсту задачу

$$Z(y) = 360y_1 + 192y_2 + 180y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 > 9 \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 > 10 \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 > 16 \end{cases}$$

ТЕМА 10. Транспортна ЗЛП та її властивості. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв’язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукання оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах a_1 ,a_2 ,..., a_m одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах b_1, b_2 ,...,b_n одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdot & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за критерієм вартості перевезень. Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача (i =1,m; j = 1, n) . Тоді умови задачі зручно подати у вигляді такої таблиці:

Споживачі / Постачальники		$B1$ / b_1	$B2$ / b_2	… / …	Bn / b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Мають виконуватися такі умови:

1) сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}} + \boldsymbol{x_{12}} + \cdots + \boldsymbol{x_{1n}} = a_{\boldsymbol{1}}; \\ \boldsymbol{x_{21}} + \boldsymbol{x_{22}} + \cdots + \boldsymbol{x_{2n}} = a_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{\boldsymbol{m1}} + x_{\boldsymbol{m2}} + \cdots + x_{\boldsymbol{mn}} = a_m. \end{cases}$$

2) сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j-му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}} + \boldsymbol{x}_{21} + \cdots + \boldsymbol{x}_{m1} = b_{\boldsymbol{1}}; \\ \boldsymbol{x}_{12} + \boldsymbol{x}_{22} + \cdots + \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}2} = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{\boldsymbol{1n}} + x_{\boldsymbol{2}n} + \cdots + x_{\boldsymbol{mn}} = b_n. \end{cases}$$

3) сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною**:**

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_{ij} x_{ij}} \rightarrow \boldsymbol{min}$$

Транспортну задачу називають збалансованою, або закритою, якщо виконується умова $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Якщо при перевірці збалансованості виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$ із ресурсом обсягом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} (i =1,…,m; j = 1,…,n). Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m + n - 1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв’язати відносно $m + n - 1$ базисних змінних. Назвемо опорним планом транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є невиродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то маємо вироджений опорний план.

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їх кількість дорівнює m + n – 1. Назвемо циклом таку послідовність заповнених клітин таблиці, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема. Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Теорема. Будь-яка сукупність з m + n утворює цикл. клітин матриці транспортної задачі

Теорема. Якщо всі запаси ai (i =1,m) і всі потреби bj , (j =1,n) є невід'ємними цілими числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати методом, який було розглянуто в попередніх лекціях, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану.

Нехай умови конкретної транспортної задачі подані в табл. 1.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Ідея **методу північно-західного кута** полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північнозахідного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a1 та b1. Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Отже, в таблиці 1 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях – обсягам потреб відповідних споживачів. Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним.

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.)}.$$

Теорема. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північнозахідного кута, завжди ациклічний.

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх постачань може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 70	4	2	5 80
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2
$a_3 = 90$	2 40	1 50	4	2

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги. Згідно з процедурою цього методу перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім – у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4	V 2	5 40
$a_2 = 60$	5	3	VV 1 60	V 2
$a_3 = 90$	V 2	VV 1 50	4	V 2 40

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу уможливлює отримання найменшого у зіставленні з розглянутими вище значення цільової функції. Отже, такий план є найближчим до оптимального.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці – знизу та справа у кілька рядків та стовпчиків, що відповідають крокам заповнення таблиці. З-поміж усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості. Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки, може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю. Метод апроксимації Фогеля дає змогу особливо для задач великих розмірностей скласти найкращий опорний план.

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	Різниці по рядках		
$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5	2	2	0
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2	1	2	
$a_3 = 90$	2	1 10	4	2 80	1	1	1
Різниці по стовпцях	2	2	1	3			
	2	2	1				
	2	3					

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 80 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Результат збігся із значенням цільової функції для опорного плану, що складений за попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля, як вже згадувалось, є очевидною для задач більшої розмірності..

ТЕМА 11. Двоїстість у транспортній задачі. Метод потенціалів

Один із способів розв'язування транспортної задачі ґрунтується на переході від неї до відповідної двоїстої задачі з невідомими векторами $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ та

$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ елементи яких відповідають рівнянням систем 50 та 51 відповідно:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m; \end{cases} \left| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{matrix} \right. \qquad (1.47)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{m1} = b_1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n; \end{cases} \left| \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{matrix} \right. \qquad (1.48)$$

Оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, то пара спряжених задач є несиметричною і ніякі обмеження на знаки змінних двоїстої задачі не накладаються.

Згідно з загальними правилами побудови двоїстих задач маємо:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to max \qquad (1.49)$$

за умов:

$$u_i + v_j \le c_{ij}, i = 1,2, \dots, m; \ j = 1,2, \dots, n \qquad (1.50)$$

Змінні u_i та v_j задачі (1.58), (1.59) двоїстої до транспортної мають назву потенціалів.

Сформулюємо другу теорему двоїстості для задач (1.49)–(1.55) та

(1.58)–(1.59). Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості

1) $x_{ij}^*\left(u_i^* + v_j^* - c_{ij}\right) = 0, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};$ (1.51)

$$\begin{cases} u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* - a_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}; \\ v_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* - b_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}; \end{cases} \quad (1.52)$$

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

а) якщо $x_{ij}^* = 0$. Другий співмножник $(u_i^* + v_j^* - c_{ij})$, бо за умовою

$u_i + v_j \le c_{ij}\ (i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n);$

b) якщо$x_{ij}^* \neq 0$, то за умовою транспортної задачі

$x_{ij}^* > 0$, $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0 \Rightarrow u_i^* + v_j^* = c_{ij}\ (i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n).$

Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі мим отримали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

Теорема 14. (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = x_{ij}^*$ існують числа u_i та v_j, для яких виконуються умови:

1) $u_i + v_j = c_{ij}$, $\qquad x_{ij} > 0,$

2) $u_i + v_j \le c_{ij}$, $\qquad x_{ij} = 0$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв’язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита). За необхідності слід звести задачу до закритого типу.

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.

3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.

4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4.1. Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m + n - 1$, а кількість невідомих $-(m + n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

4.2. Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності

$u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

4.3. Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці.

Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів. Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\{\Delta_{ij}= (u_i + v_j) - c_{ij}\}$.

4.4. Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить $m + n$, отже, з цих клітин обов'язково утвориться цикл. У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак «+», а всім іншим – за черговістю знаки «–» та «+». У клітинках зі знаком «–» вибирають значення $\theta = \min x_{ij}$, і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «–». Якщо значенню θ відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невиродженість опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору θ дістаємо новий опорний план, який не містить від'ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число θ додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною. Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальною величиною xij вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується – маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану (тобто повернутися до пункту 3 даного алгоритму).

Зауважимо, що аналогічно з розв'язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність $u_i + v_j = c_{ij}$, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

У класичній постановці транспортної задачі допускається, що вантаж перевозиться безпосередньо від постачальників до споживачів. Але на практиці досить часто зустрічається випадок, коли певна частина продукції спочатку перевозиться до посередницьких фірм (сховищ), а потім споживачам. У такому разі розв'язання задачі поділяють на два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до посередників, а потім — від посередників до споживачів. Така задача має назву двохетапної транспортної задачі.

Нехай в m пунктах постачання $A_1, A_2, \dots, A_m$ є відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку необхідно перевезти до l посередницьких фірм $D_1, D_2, \dots, D_l$, місткості сховищ яких становлять $d_1, d_2, \dots, d_l$, а потім доставити її споживачам

$B_1, B_2, \dots, B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, \dots, b_n$. Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до посередницьких фірм — c_{ik} та від посередників до споживачів – c_{kj} . Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами.

Якщо обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника до k-ої фірми, позначити через x_{ik}, а обсяг вантажу, що перевозиться від k-ої фірми j-му споживачеві — через x_{kj}, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_{kj} \to min$$

за умов:

$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, i = \overline{1,m};\ \ \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k,\ k = \overline{1,l};$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{kj} = b_i, j = \overline{1,n}; \sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le d_k,\ k = \overline{1,l};$$

$$x_{ik} \ge 0, x_{kj} \ge 0, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,l}.$$

Зазначимо, що коли загальний обсяг вантажу дорівнює місткості всіх складів і баз $\sum_{k=1}^{l} d_k$, а також сумарній потребі всіх споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j$,

тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{l} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то така двохетапна транспортна задача може бути розв'язана як дві одноетапні. В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв'язування двохетапної транспортної задачі, розроблений Орденом-Маршем, полягає у врахуванні місткостей посередників двічі – як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці. У клітинах, які розміщені на перетині рядків-постачальників та стовпців-споживачів, фіксують реальні затрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, ставлять нульові величини затрат. Решту клітин таблиці блокують, тобто вартості перевезень прирівнюють до деякого досить великого числа M. У процесі розв'язування задачі в цих клітинах не будуть передбачатися перевезення продукції, що відповідає умовам двохетапної транспортної задачі.

Список літератури

1. Бейко Й. В. Методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації. / Й. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зінько. – Київ: Вища школа, 2006. – 511 с.
2. Братіш М. І. Дослідження операцій / М. І. Братіш. – Львів, 2007.
3. Васильєв Ф. П. Чисельні методи розв'язування екстремальних задач / Ф. П. Васильєв. – Миколаїв: Наука, 2002. – 312 с.
4. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування / В. Д. Гетманцев. – Київ: Либідь, 2001. – 253 с.
5. Жалдак М. І. Елементи лінійного, цілочислового лінійного, нелінійного програмування / М. І. . Жалдак, Ю. В. Гриус. – Черкаси: Брама-Україна., 2005. – 608 с.
6. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації / М. І. Жалдак, Ю. В. Гриус. – Черкаси: Брама-Україна., 2005. – 352 с.
7. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко., 2000.
8. Катренко А. В. Дослідження операцій / А. В. Катренко. – Львів: Магнолія Плюс, 2009.
9. Кігель В. Р. Елементи лінійного, цілочислового лінійного, нелінійного програмування / В. Р. Кігель. – Київ: ІСДО, 1995. – 504 с.
10. Лавров Є. А. Математичні методи дослідження операцій / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик. – Суми: Сумський державний університет, 2017. – 217 с.
11. Ланде Д. В. Методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни “ММДО” / Д. В. Ланде. – Київ, 2013. – 472 с.
12. Федоренко К. І. Дослідження операцій в економіці / К. І. Федоренко, І. О. Черняка. – Київ: Знання, 2013. – 558 с.

Сінчук Алеся Михайлівна, Ярощак Сергій Вікторович

Математичні методи дослідження операцій

Курс лекцій

Підписано до друку 28.03.2023 р. Формат 60*84 1/16
Папір друкарський №1. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Умовн.-друк.арк. 2,56. Обл.-вид. арк. 2,68.
Тираж 300 прим. Зам. №3.
Віддруковано засобами оперативної поліграфії
редакційно-видавничого відділу
Рівненського державного гуманітарного університету