Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

За редакцією В. В. Білецького

Рівне 2024

МАТЕМАТИЧНА МУДРІСТЬ

У кожній науці приховано стільки істини, стільки в ній є математики

І. Кант

Математика – сама надійна форма передбачування

В. Швебель

Мало мати добрий розум, головне – добре його застосовувати

Р. Декарт

Математику необхідно знати лиш за те, що вона розум до ладу приводить

М. Ломоносов

Якщо ми дійсно щось знаємо, то ми знаємо це завдяки вивченню математики

П. Гасенді

В математиці не має символів для неясних думок

А. Пуанкаре

Математика схожа на млин: якщо ви засипаєте в неї зерно пшениці, то отримуєте муку, якщо ж засипаєте полову, полову і отримуєте

А. Ханкім

Математика – це те, за рахунок чого люди керують природою і собою

М. Колмогоров

МАТЕМАТИЧНА МУДРІСТЬ

Вивчення математики наближає нас до безсмертних богів

Платон

Ніякої достовірності немає в науках, якщо в ній неможна застосувати ні однієї із математичних наук, в тому числі пов'язаної з математикою

Леонардо да Вінчі

Тільки та наука досягає досконалості, яка використовує математику

Х

Архітектура великих пірамідних храмів є мовчазна математика

Освальд Шпенглер

Математика – цариця наук

Гаусс

Математика життя: колектив складається легше, якщо людям не має що ділити

О. Ратнер

Рівність можлива тільки в математиці

В. Колечицкій

Математику необхідно знати лише за те, щоб приміняти її там, де потрібно, і не приміняти її там, де без неї можна обійтись

Х

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

За редакцією В. В. Білецького

Рівне 2024

Упорядник:
Білецький В.В, – к. п. н., доцент кафедри вищої математики РДГУ

Рецензенти:
Петрівський Я.Б. – д. т. н., професор РДГУ
Присяжнюк І.М. – к. т. н., доцент РДГУ

Навчальний посібник написано відповідно до вимог програми навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей 014 Середня освіта, 015 Професійна освіта. Посібник має 7 розділів, де наведено елементи лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди. Подано основні теоретичні відомості та вправи для самостійного розв'язку.

Розглянуто і схвалено на засіданні навчально-методичної комісії факультету математики та інформатики РДГУ
Протокол № 8 від 30 жовтня 20024 року

ЗМІСТ

Перелік навчально-методичної літератури

1. Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика (Ч. 1).- К.: Діал, 2004.-192 с.
2. Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика (Ч.2).- К.: Діал, 2004.-200 с.
3. Бугір М. К. Математика для економістів. - Т. : Підручники, 1998.- 192 с.
4. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. –К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.
5. Богомолов М. Б. Практичні заняття з математики. - К. : Вища математика, 1979. - 476 с.
6. Валєєв К.В. Вища математика: Навч. посібник / К.В. Валєєв, І.А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001.
7. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закладів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
8. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі/ Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова – К.: Видавничий центр "Академія", 2002.
9. Лейфура В. М. Математика. - К.: Техніка, 2003.- 640 с.
10. Рудавський Ю. К. Математика для інженерів. - Л.: Бескид - Бід, 2002. - 262 с.
11. Хомченко Л. М. Вища математика. К. : Центр. Методика - інформатика, 2002.-199 с.
12. Овчинников П. П. Вища математика. - К. : Техніка, 2000, Ч.1-2. - 1380 с.
13. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Котлова. – Т. 1,2,3. – К.: Либідь, 1994.
14. Ю. К. Рудавський. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.- Л.:Бескид Біт,2002.- 262 с.

ВСТУП

Успішна реалізація досягнень науково-технічного прогресу та вирішення завдань, які ставить ринкова економіка, тісно пов’язані з використанням математичних методів та моделей. Особливо важливого значення набуває використання математичних методів і засобів обчислювальної техніки в умовах ринкової економіки при розв’язанні економічних задач. У зв’язку з цим для студентів спеціальності 014 Середня освіта і 015 Професійна освіта необхідні як знання можливостей застосування математичних методів та моделей у практичній діяльності, так і розуміння необхідності їх використання.

Завдання для практичних занять розроблено відповідно до освітньо професійної програми рекомендованої Міністерством освіти і науки України для студентів вищих навчальних закладів освіти і включають практичні завдання по таких темах: « Елементи лінійної алгебри», « Аналітична геометрія. Векторна алгебра»,» Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Диференціальне числення функції багатьох змінних», «Інтегральне числення та диференціальні рівняння», «Числові та степеневі ряди».

Запропоновані завдання допоможуть сформувати у студентів такі вміння та навички :

1. Розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера, методом Гаусса та матричним способом;
2. Обчислювати визначники n –го порядку;
3. Знаходити кут між векторами, довжину вектора, скалярний добуток векторів;
4. Знаходити кут між прямими, розрізняти рівняння та будувати пряму, коло, еліпс, параболу, гіперболу за їх рівняннями;
5. Знаходити границі послідовностей та функцій;
6. Виконувати диференціювання функцій;
7. Проводити повне дослідження функцій та будувати їх графіки;
8. Знаходити частинні похідні та градієнти функцій багатьох змінних;
9. Знаходити екстремуми функцій багатьох змінних;
10. Знаходити невизначений та обчислювати визначений інтеграли;
11. Обчислювати площі криволінійних трапецій та криволінійних фігур;
12. Досліджувати ряди на збіжність та знаходити суму числових рядів;
13. Розкладати елементарні функції у ряд Маклорена;
14. Будувати економіко-математичні моделі задач.

ТЕМА1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.1

Т е м а: **Матриці, дії над ними**

М е т а: Засвоїти поняття: матриця, елементи матриці, розмір матриці, протилежні матриці, транспоновані матриці. Ознайомитись з різновидами матриць, із сферами їх застосування. Сформувати вміння та навички виконувати найпростіші дії з матрицями: множення на число, додавання та віднімання, множення матриць.

Література:[1]§§1.1-1.6, [3]§§2.6-2.24, [4] §§4.1-4.5.

Зміст практичного завдання.

Завдання 1.Знайти добуток матриць A·B та B·A.

а) A= (4 3 -2), B= $\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$. б) A= $\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$, B= (4 -4 -1).

в) A= $\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$. г) A= $\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\4 & -5 & 2\end{pmatrix}$,

B= $\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$. д) A= $\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 1\\-2 & 0 & 3 & -1\\1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 1\\4 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}$.

Завдання 2. Виконати дії над матрицями:

а) $A\cdot B - C\cdot Д^T$; б) $A\cdot P^T + 5Д\cdot C^T$.

A= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix}2 & -7\\-1 & -3\\1 & 0\end{pmatrix}$; C= $\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\0{,}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

D= $\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 1/7\\0{,}1 & 2 & 11\end{pmatrix}$; P= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

48. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень.
49. Поняття екстремуму функцій двох змінних. Екстремуми функції багатьох змінних.
50. Знаходження умовного екстремуму функції двох змінних методом множників Лагранжа.

ТЕМА 6: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

51. Первісна функції. Невизначений інтеграл.
52. Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування виразів.
53. Метод підстановки та інтегрування за частинами.
54. Інтегрування раціональних дробів.
55. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.
56. Означення визначеного інтегралу. Інтегральні суми.
57. Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца.
58. Застосування визначених інтегралів для обчислення площ плоских фігур
59. Застосування визначених інтегралів для обчислення об′ємів тіл обертання.
60. Основні поняття та означення диференціальних рівнянь. Задача Коші.
61. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
62. Диференціальні рівняння першого порядку.
63. Лінійні та однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
64. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

ТЕМА 7. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

65. Числові ряди. Основні поняття та означення. Збіжність рядів.
66. Властивості збіжних рядів. Гармонійний ряд. Необхідна умова збіжності рядів.
67. Достатні ознаки збіжності рядів: ознаки порівняння, Д'Аламбера, Коші.
68. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність.
69. Поняття функціонального ряду. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область збіжності степеневого ряду.
70. Розклад функції в ряд Тейлора та Маклорена.
71. Застосування рядів до наближених обчислень.

21. Лінії другого порядку. Канонічне рівняння кола та еліпса.
22. Лінії другого порядку. Коночне рівняння гіперболи.
23. Лінії другого порядку. Канонічне рівняння параболи.
24. Прямокутня декартова система координат в просторі. Рівняння площини та його окремі випадки.
25. Загальне рівняння площини у просторі. Відстань від точки до площини.
26. Кут між площинами. Відстань від точки до площини.
27. Взаємне розташування прямої і площини у просторі.
28. Рівняння прямої у просторі. Кут між двома прямими.

ТЕМА 3: ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.

29. Поняття множини, функції, послідовності. Означення функції.
30. Способи задання функції. Основні елементарні функції.
31. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв′язок між ними. Властивості нескінченно малих величин.
32. Границя послідовності. Основні теореми про границі. Обчислення границь.
33. Границя функції. Визначені границі. Розкриття невизначеностей.
34. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій. Точки розриву функцій та їх класифікація.

ТЕМА 4: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

35. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної. Її геометричний та механічний зміст.
36. Залежність між неперервністю та диференційованістю функцій. Правила диференціювання.
37. Похідні основних елементарних функцій. Приклади застосування похідної до розв′язування задач з економіки.
38. Означення диференціалу функції. Правила знаходження диференціалу.
39. Диференціал складної функції. Застосування диференціалу до наближених обчислень.
40. Зростання та спадання функції. Опуклість функцій.
41. Монотонність функції. Екстремуми функції.
42. Дослідження функції та побудова графіка функції.

ТЕМА 5: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

43. Основні поняття та означення функції багатьох змінних.
44. Границя та неперервність функції двох змінних.
45. Частинні похідні.
46. Повний приріст функції багатьох змінних, повний диференціал.
47. Похідна за напрямком. Градієнт.

Завдання 3. За допомогою елементарних перетворень матриці знайти ранги матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&3&5\\2&1&-1&4\\2&-2&6&3\end{pmatrix};$$

$$Д=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\3&6&-3&-1\\3&6&-3&10\end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Виконати дії над матрицями, якщо це можливо.

$$а)\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\\4&-3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&-2&0\\-3&0&1\end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix}1&3\\-1&5\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Знайти обернені матриці двома способами:

а) за допомогою формули алгебраїчних доповнень;

б) за допомогою елементарних перетворень матриць:

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\2&1&-1\end{pmatrix};$$

$$Д=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&-4\\2&-1&5\end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\3&1&1\end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Визначити ранги квадратних матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-3&1\\3&2&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&3&-4\\2&-1&3\\3&2&-2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Завдання 6. Розв’язати матричні рівняння:

$$а)\ \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix};\qquad б)\ X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\-5&6\end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.2.

Т е м а: **Визначники другого, третього порядків.**

М е т а: Засвоїти поняття визначника матриці. Набути навичок обчислення визначників другого, третього та вищих порядків. Дослідити властивості визначників. Закріпити вміння виконувати елементарні перетворення матриці.

Література:[1]§§1.2-1.4, [3]§2.13, [4] §§4.3.

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку матриці:

$$1)\ |\grave{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2)\ |\hat{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}; \quad 3)\ |H| = \begin{vmatrix} \grave{a}+1 & \hat{a}-\tilde{n} \\ \grave{a}^2+\grave{a} & \grave{a}\hat{a}-\grave{a}\tilde{n} \end{vmatrix}$$

$$4.\ |F| = \begin{vmatrix} \sqrt{\grave{a}} & -1 \\ \grave{a} & \sqrt{\grave{a}} \end{vmatrix}; \quad 5)\ |G| = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}; \quad 6)\ |\tilde{N}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix};$$

Завдання 2. Обчислити визначники третього порядку.

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 0 & \grave{a} & \hat{a} \\ \hat{a} & \cos\alpha & 1 \\ \grave{a} & 1 & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 6)\begin{vmatrix} 3 & \tilde{o} & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ \tilde{o}+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Завдання 3. Обчислити визначники четвертого порядку, використовуючи формулу розкладу визначника за елементами рядка та стовпця.

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ПИТАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ВСТУП.

1. Предмет математики. Прикладна спрямованість математики.
2. Економіко-математичне моделювання виробничих процесів.

ТЕМА 1: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.

3. Поняття матриці. Задачі, які приводять до поняття матриці. Застосування матриць в економічних розрахунках.
4. Різновиди матриць. Дії над матрицями: додавання та множення, множення на число. Елементарні перетворення. Знаходження рангу матриць.
5. Визначники другого та третього порядків. Обчислення визначників n-го порядку. Властивості визначників. Розклад визначників за елементами рядків та стовпців.
6. Обернені матриці. Способи обчислення обернених матриць.
7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: основні означення та поняття. Матричний запис. Застосування систем лінійних рівнянь у лінійному моделюванні. Теорема Кронекера-Капеллі сумісності та визначеності систем.
8. Методи обчислення визначників. Теорема Крамера. Розв′язування систем рівнянь за формулами Крамера.
9. Матричний метод розв′язування систем лінійних рівнянь.
10. Розв′язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса, Гаусса-Жордана.

ТЕМА 2: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.

11. Предмет і методи аналітичної геометрії. Прямокутна декартова система координат на площині, метод координат.
12. Застосування методів аналітичної геометрії до геометричної інтерпритації задач лінійного програмування.
13. Поняття рівняння лінії на площині. Різноманітні завдання прямої на площині.
14. Загальне рівняння лінії на площині та його окремі випадки.
15. Умова перпендикулярності та паралельності прямих, заданих загальним рівнянням та рівнянням з кутовим коефіцієнтом.
16. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
17. Знаходження відстані між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні.
18. Вектори. Векторні простори. Розклад вектора за базисом. Приклади застосування векторів до задач мікроекономіки.
19. Координати векторів. Дії з векторами, заданими в координатній формі.
20. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

Необхідна умова збіжності числового ряду

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,,\quad \lim_{n\to\infty}u_n=0$$

Ознаки збіжності додатних рядів:

1) маємо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(A)$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(B)$, *якщо* $u_n<v_n$, *то із збіжності ряду (В) випливає збіжність ряду (А), а з розбіжності ряду (А) випливає розбіжність ряду (В)*
(перша ознака порівняння);

2) Ознака Д'Аламбера. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(A)$ *існує скінченна або нескінченна границя* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$, *то при D <1 ряд збігається, а при D >1 розбігається;*

3) Ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(A)$ *існує (скінченна або нескінченна) границя* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=K$, *то при K<1 ряд збігається, а при K> 1 розбігається ;*

Ознака збіжності знакозмінного ряду (ознака Лейбніца)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n=u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot u_n+\ldots\quad \lim_{n\to\infty}u_n=0$$

Найбільш вживаним і найпростішим функціональним рядом є степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

Областю збіжності степеневого ряду є проміжок (скінченний або нескінченний), симетричний відносно точки x = 0, який пов'язаний з інтервалом збіжності. Радіус збіжності шукаємо за формулами:

$$R=\lim_{n\to}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \textit{або} \qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Т е м а: **Розв'язання неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь методами Крамера, матричним методом, методом Гаусса, Гауса-Жордана з використанням розрахункових таблиць.**

М е т а: Формування навичок розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера та матричним методом; закріплення навичок обчислення визначників третього порядку та знаходження обернених матриць за формулою алгебраїчних доповнень та з використанням елементарних перетворень матриці.

Література:[1]§§1.7-1.12, [3]§3.1-3.8, [4] §§5.1-5.3.

Завдання 1. Розв'язати системи рівнянь методом Крамера, та матричним методом.

1) $\begin{cases}\tilde{o}-2\acute{o}+3z=6\\ 2x+3y-4z=20\\ 3x-2y-5z=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+y-3z=-2\\ 4x+3y+2z=16\\ 2x-3y+z=17\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x+3y+3z=48\\ 2x+6y-3z=18\\ 8x-3y+2z=21\end{cases}$

4) $\begin{cases}x-2y-z=2\\ 3x-6y-3z=6\\ 5x-10y-5z=10\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x-y-3z=-3\\ 2x-y-z=0\\ 3x-2y-z=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x-2y-z=-6\\ 2x-y-z=-3\\ 3x+y-2z=-1\end{cases}$

7) $\begin{cases}2x-y-z=0\\ x-2y-z=-2\\ 3x-3y+z=1\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x+z=2\\ 3x-y-z=5\\ 4x+y=1\end{cases}$ 9) $\begin{cases}2x-y-z=0\\ x+y+z=10\\ -3y-z=-8\end{cases}$

Завдання 2. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса та Гаусса-Жордана.

1) $\begin{cases}2x-y+z=2\\ 3x+2y+2z=-2\\ x-2y+z=1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y+3z=5\\ 2x-y-z=5\\ x+3y+4z=6\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-4y+3z=1\\ x-2y+4z=3\\ 3x-y+5z=2\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x-2y+2z=-3\\ x+4y-z=0\\ 4x-y+4z=6\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3x-y+3z=-2\\ x-y+2z=-3\\ 2x+y+z=3\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x-4y+3z=4\\ 2x-2y+3z=4\\ -x-2y+z=-2\end{cases}$

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

Формула знаходження оберненої матриці:

1. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}A_{12}...A_{1n} \\ A_{21}A_{22}...A_{2n} \\ ....\ .... \\ A_{m1}A_{m2}...A_{mn} \end{pmatrix}^T$ $\quad$ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. *(додавання матриць)*

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b2_j + a_{i3}b3_j + \ldots + a_{in}b_{mj}$ *(множення матриць)*

A^T – транспонування матриці вимагає заміни рядків відповідними стовпцями

M_{ij} – мінор, $\quad A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення

Обчислення визначників

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Формули Крамера до розв'язку систем:

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$

Матричний метод розв'язку систем:

$X = A^{-1} B$

Теорема Кронекера-Капеллі: *для того, щоб система була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи співпадав з рангом матриці системи:*

$Rg\,\overline{A} = RgA$

Метод Гаусса для розв'язку системи рівнянь вимагає зведення розширеної матриці до трикутного виду з використанням математичних операцій.

ТЕМА 7. ЧИСЛОВІ РЯДИ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7.1

Т е м а: **Числові ряди. Ознаки збіжності рядів**

М е т а: Засвоїти поняття: знакосталі та знакозмінні ряди, абсолютна та умовна збіжність рядів. Дати практику дослідження рядів з додатними членами на збіжність за ознаками порівняння, Даламбера, Коші, інтегральною ознакою Коші. Навчитись досліджувати абсолютну та умовну збіжність знакопочергових рядів за ознакою Лейбніца.

Література:[1]§12.10, [3] §9.1, [4] §13.1.

Завдання 1. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; $\quad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; $\quad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}$; $\quad$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\quad$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$.

Завдання 2. Використовуючи ознаку порівняння, дослідити збіжність рядів&

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\quad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n*2n}$; $\quad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 8^4}$; $\quad$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{1+2^{2n}}$; $\quad$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Завдання 3. За допомогою ознаки Даламбера дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\quad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; $\quad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; $\quad$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$; $\quad$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Завдання 4. За допомогою ознаки Коші дослідити ряди на збіжність:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$; $\quad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{7n}{3n-1})^{2n}$; $\quad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{5n+1})^n$.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$ 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ 9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Формула Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Застосування визначеного інтеграла:

$S = \int_a^b f(x)dx$ - *обчислення площі криволінійної трапеції*

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f^{/}(x))^2} dx$ - *обчислення довжини дуги кривої*

$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$ - *обчислення об'єму тіла обертання*

$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f^{/}(x))^2 dx}$ - *обчислення площі обертання*

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду: ***y /+a(x)y = b(x)*** *Для розв'язку використовують метод Логранжа варіації довільної сталої.*

Розв'язки однорідного рівняння $\frac{dy}{dx} = +a(a)xy = 0$

Знаходять за формулою $y = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$.

ТЕМА 2: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.1.1

Т е м а: **Вектори. Дії над векторами**

М е т а: Засвоїти поняття: вектор, векторний простір, лінійна залежність та лінійна незалежність векторів, базис векторного простору. Навчити виконувати дії з векторами, обчислювати довжину вектора, кут між векторами, напрямні косинуси вектора, скалярний добуток векторів, розкладати вектор за базисом.

Література:[1]§§2.1-2.9, [3] §§2.1-2.5, [4] §6.1.

Завдання 1. Дано вектори $\bar{a} =$ (2,3), $\bar{\hat{a}}$=(-1,2), $\bar{\tilde{n}}$=(3,1). Знайдіть координати векторів: $\bar{a} - \bar{\hat{a}}$, $\bar{a} + \bar{\tilde{n}}$, $\overline{3\grave{a}}$, $\overline{3\grave{a}} - \bar{\tilde{n}}$, $\overline{-3\grave{a}} + \bar{\tilde{n}}$, $(\vec{a} + 2\vec{\tilde{n}})$ - $(4\vec{\grave{a}} - \vec{\tilde{n}})$, $(4\vec{\grave{a}} - 4\vec{\hat{a}})$ + $(2\vec{\tilde{n}} - \vec{\grave{a}})$ + $(\vec{\hat{a}} - 3\vec{\tilde{n}})$.

Завдання 2. Знайдіть довжину вектора:

1) $\vec{a} = (3,4)$*;* *2)* $\overrightarrow{AB}$*, де А (1, 3) , В(-2, 0);*

3) $\vec{b} = (2,1,-1)$*;* *4)* $\overrightarrow{MN}$*, де М(-1,5,2), N(2,5,-2)*

Завдання 3. Обчисліть кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ **і** $\overrightarrow{\hat{A}\ddot{A}}$ **;** $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$ **і** $\overrightarrow{\tilde{N}\ddot{A}}$ **,** якщо А(3;1), В(7;4), С(3;2), Д(6;6).

Завдання 4. Обчисліть периметр трикутника, вершинами якого є точки:

1) А (4;0), В(7;4) і С(-4;6); 2) А(6;7;-1), В(3;3;2) і С(1;-5;0).

Завдання 5. Знайти координати точки поділу відрізка, якщо:

а) точка С ділить відрізок АВ у відношенні 3:5(від А до В). Кінець відрізка - точки А(2;3) і В(10;11). Знайти точку С;

б) відрізок, кінцями якого є точки А(-5;-2), В(4;2,5), поділений у відношенні 3:4:2 (від А до В). Знайти точки поділу;

в) відрізок задано точками А(-4;7), В(-3;5). Знайдіть на відрізку АВ таку точку С, щоб $|\grave{A}\hat{A}| : |\hat{A}\tilde{N}|$=1:7.

Завдання 6. Обчисліть площу трикутника, вершинами якого є точки:

1) A(-1; -1), B(1;-3), C(3;-1);

2)A(1;-3;2), B(2;5;-3), C(4;1;3).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.1.2

Т е м а: **Рівняння прямої на площині та в просторі.**
М е т а: Ознайомитись з різновидами рівняння прямої на площині. Дослідити умови паралельності та перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями та рівняннями з кутовим коефіцієнтом. Навчитись знаходити кут між прямими, відстань від заданої точки до прямої, відстань між двома точками, обчислювати площу трикутника за координатами трьох вершин. Навчитись записувати рівнянням прямої, яка проходить через дві точки; прямої, що проходить через задану точку паралельно чи перпендикулярно вектору.

Література:[1]§§3.2,5.2, [3] §§4.1-4.3, [4] §6.2.

Завдання 1. а)Складіть рівняння прямої, яка проходить через дану точку *Mo* і перпендикулярна до даного вектора $\vec{n}$:
1)$Mo(-2;-3)$, $\vec{i}=(4;-5)$; 2) $Mo(1;-1;2)$, $\vec{i}=(-3;1;-2)$.
б) Написати рівняння прямої, яка проходить через дві точки:
1) $A(-1;3)$, $B(4;-2)$; 2) $A(5;-2)$, $B(-3;-1)$;
3)$A(1;-4;3)$, $B(0;-6;1)$; 4) $A(5;0;3)$, $B(-4;-2;5)$.
Завдання 2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку А(2,3) і утворює з віссю Ох кут:
1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 0^0
Завдання 3. Знайдіть кут між прямими:
1) $y=2x+3$ та $y=-3x+2$; 2) $y=-2x+3$ та $y=3x+5$;
3) $y=2x-3$ та $y=\frac{1}{2}x+1$; 4) $x-2y-4=0$ та $2x-4y+3=0$;
Завдання 4. Визначити паралельність та перпендикулярність прямих:
1) $3x-5y+7=0$; $10x-30y-11=0$ 2) $3x-5y+7=0$; $10x+6y-3=0$.
Завдання 5. Задані вершини трикутника АВС. Знайдіть :
1) рівняння сторони ВС; 2) рівняння висоти АД;3) рівняння медіани СЕ; 4) довжину висоти АД; 5) величину кута <А; 6) площу трикутника АВС. Зробіть відповідні побудови.
1)$A(2;-3)$, $B(3;2)$, $C(-2;5)$; 2)$A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(1;3)$;
Завдання 6. Дано координати піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$. Знайти: а) довжину ребра A_1A_2; б)кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 ; в) площу грані $A_1A_2A_3$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.5

Т е м а: **Лінійні та однорідні диференціальні рівняння**
М е т а: Дати практику розв'язку лінійних та однорідних диференціальних рівнянь першого порядку. Повторити поняття: загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язок задачі Коші, інтеграл рівняння, інтегральна крива. Закріпити навички знаходження невизначених інтегралів.

Література:[2]§§13.3-13.5, [3] §§10.3-10.6, [4] §12.4-12.6.

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь:
1) $y' + y = 2$; 2) $xy' -3y = x^4$; 3) $x' - 3x = e^{-t}$;

4) $y' + 2y = 4x$; 5) $y' - y = e^x$; 6) $xy' - y = x$;

7) $y' + x^2y = x^2$; 8) $y' + y = \cos x$; 9) $xy' + 2y = x^2$.

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь:
1) $(x+y)dy + xdy = 0$; 2) $(x+y)dy + (y-x)dy = 0$;
3) $(x-y)dx + xdy = 0$; 4) $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydy = 0$;
5) $xy^2dy=(x^3 + y^3)dx$; $y=3$ при $x = 1$
6) $(x^2+y^2)dx = xydy$; $y=0$ при $x=1$
7) $(x-y)dy = y\,dy$; $y = 1$ при $x=0$
8) $x\cos(y/x)dy - y\cos(y/x)dx+xdx=0$; $y=0$ при $x=1$.

Завдання 3. Знайти загальні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами:
1) $y'' + y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 8y + 15y = 0$;3) $y'' + 5y + 6 = 0$;
4) $y'' - 9y' = 0$; 5) $y'' + 3y = 0$; 6) $y'' - y = 0$;
7) $y'' + 9y = 0$; 8) $y'' -2y + 5y = 0$; 9) $y'' + 4y + 7y = 0$;
10) $y'' + 3y' + 4y = 3\sin 5x$; 11) $y'' - 4y = x^2 + 3$;
12) $y'' - 4y + 3y = 5e^x$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.4

Т е м а: **Диференціальні рівняння. Загальний розв'язок. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними**

М е т а: Сформувати вміння розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку: рівнянь з відокремленими змінними та автономних рівнянь. Закріпити поняття: загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язок задачі Коші, інтеграл рівняння, інтегральна крива, порядок диференціального рівняння.

Література:[2]§§13.1-13.2, [3] §§10.1-10.3, [4] §12.1-12.3.

Завдання 1. Перевірити , чи є вказані функції розв'язками диференціальних рівнянь:

1)y=Cx, *y'x-y=0;* *2) y=x³+Ñ,* *y'=3x²;*

3) y=e^{2õ}, *y'=2y;* *4) y=e^{−õ}+1,* *y'=-y+1;*

5) $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$, *y'-ycosx=* $\frac{1}{2}\sin 2x$.

Завдання 2. Розв'язати автономні диференціальні рівняння:

1) $\frac{dx}{dy} = x$ 2) $y' + 4x = 0$ 3) $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

4) $x' = 2t^3 + 3t + 5$ 5) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{t+1}$ 6) $y' = x + \sin x$.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

1) $y' = 2x(y-1)^2$; 2) $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0$;

3) $xydx + (x+1)dy = 0$; 4) $(y^2+1)dx - xydy = 0$;

5) $(x+1)dy - (y-2)dx = 0$; 6) $(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0$

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші:

1) $xdy = ydx$ $y(2)=6$; 2) $3y^2dy = x^2dx$ $y(3)=1$;

3) $y' - \frac{y}{x} = 0$ $y(1)=5$; 4) $2y'\cdot\sqrt{x} = y$ $y(4)=1$;

5) $2\sqrt{y}dx = dy$ $y(0)=1$; 6) $x^2y' + y^2 = 0$ $y(-1)=1$

Завдання 7. Рівняння прямої і площини у просторі.

а) обчисліть гострий кут між двома прямими

$a)\ \frac{(x-1)}{3} = \frac{(y+4)}{-2} = \frac{z-2}{4};\ b)\ \frac{(x-3)}{2} = \frac{(y-1)}{3} = \frac{z+1}{-2}$

б) знайти точку перетину прямих:

(x+3)/2=(y-1)/3=(z+5)/2 та 2x+3y+z-22=0;

в)складіть рівняння прямої, яка проходить через точку Мо(-4;-3;-1) і паралельна векторам $\vec{a}$ =(5;2;-3) і $\vec{a}$=(1;4;-2).

г) знайдіть відстань від точки А(1;-2;1) до площини 10x-2y+11z-10 = 0;

д) складіть параметричне рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку М (1;4;-3).

Завдання 8. Знайдіть відстань:

1) від точки М(-2;4) до прямої 4х -3у-5=0;

2) від точки А(4,6) до прямої 3х+4у+14 = 0.

Завдання 9. Знайдіть відстань між двома паралельними прямими:

1) 4x+3y+33=0 *і* *4x+3y-17=0*

2) 12x + 5y – 101 = 0 *і* *12x + 5y + 68 = 0*

Завдання 10. Складіть рівняння прямої, яка:

1) проходить через точку перетину прямих х + у - 4 = 0 і х – у = 0 паралельно прямій х – 4у + 4 = 0;

2) проходить через точку перетину прямих х/6 + у/3 = 1 і х/3 + у/6 = 1 паралельно прямій х – 2у – 6 = 0.

Завдання 11. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих х + 2у + 4 = 0 і 3х – у – 9 = 0 перпендикулярно до прямої х + у – 7 = 0.

Завдання 12. Визначити параметри k і b прямої, що проходить через точку А(3;3) і утворює із Ох кут 60^0.

Завдання 13. Записати рівняння сторін ромба з діагоналями 8 см і 4 см, розміщуючи більшу діагональ на осі Ох, а меншу – на осі Оу.

Завдання 14. Дана пряма 3х – 4у + 10 = 0 і точка М(4;3). Знайти відстань d від точки М до даної прямої.

Завдання 15. Площа трикутника дорівнює 10 м², дві його вершини – точки А(5,1), В(-2,2). Знайти координати третьої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі абсцис.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.2

Т е м а: **Лінії другого порядку**

М е т а: Дослідити властивості кривих ліній другого порядку на площині: кола, еліпса, гіперболи, параболи. Сформування навичок побудови даних кривих. Навчитись зводити загальні рівняння кривих ліній другого порядку до одного з канонічних рівнянь шляхом виділення повних квадратів.

Література:[1]§§3.4-3.7, [3] §§4.4, [4] §6.2.5.

Завдання 1. Складіть рівняння кола та побудуйте його:

а) з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{3}$;

б) з центром у точці (-2;5) і радіусом 3;

в) знайдіть координати точок перетину кола $x^2+y^2+4x-12=0$ з осями координат;

г) складіть рівняння кола, що проходить через точки:

1)(2;8), (4;-6), (-12;-6); 2) (-2;-6), (-3;1) і (4;2).

Завдання 2. Складіть канонічне рівняння еліпса та побудуйте його :

а) якщо дві його вершини знаходяться в точках $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$, а фокуси $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$;

б) з фокусами на осі Ох, якщо його велика вісь 10, ексцентриситет $\varepsilon=0,6$;

в) якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 8, а мала вісь 2b = 6;

г) якщо відстань між фокусами дорівнює 6 (фокуси лежать на осі Ох) і велика вісь дорівнює 10.

Завдання 3. Скласти канонічне рівняння гіперболи та здійснити побудову:

а) з фокусами на осі Ох, якщо її дійсна вісь 16, а уявна 8;

б) якщо координати її вершин $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$ та координати фокусів $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$;

в) відстань між фокусами 2с=10, а між вершинами 2а=8;

г) вісь b=4, а відстань між фокусами 2с=10.

д) знайдіть вершини, фокуси, ексцентриситет і асимптоти гіперболи $x^2/9 - y^2/16 = -1$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.3.2

Т е м а: **Геометричне застосування визначеного інтеграла : обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання**

М е т а: Навчитись застосовувати на практиці вміння знаходити визначений інтеграл до обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання. Закріпити навички дослідження функцій та побудови їх графіків.

Література:[2]§§8.17, [3] §§8.3-8.5, [4] §11.4-11.5.

Завдання 1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою y=f(x), віссю Ох та прямими x = a, x = b:

1) $y=-x^2$, $x=0$, $x=3$; 2) $y=e^{-x}$, $x=\ln 2$, $x=\ln 5$;

3) $y=1-x^2$, $x=0$. $x=2$; 4) $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$.

Завдання 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y=3x$, $x = 1$, $x = 2$; 2) $y = e^x$, $y=x^2$, $x=0$, $x=1$;

3) $y = x^2$, $y=0$, $x = 4$; 4) $y=|x|+1$, $Y=0$, $x=-2$, $x=1$;

5) $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$.

Завдання 3. Обчислити довжину дуги плоскої кривої:

1) *напівкубічної параболи* $y=x^{3/2}$ *від* $x=0$ *до* $x=4$;

2) *кривої* $y=x^2-1$, *відсіченої віссю Ох;*

3) *кривої* $y=x^2$ *від* $x=0$ *до* $x=2$;

4) *знайти довжину дуги кривої* $y=\ln\sin x$ *від* $x=0$ *до* $x=\pi/6$.

Завдання 4. Обчислити об'єм:

1) *тіла, утвореного обертанням еліпса* $\frac{\tilde{o}^2}{4}+\frac{\acute{o}^2}{9}=1$;

2) *тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями* $y=x^2$, $y=\sqrt{\tilde{o}}$ *навколо осі Ох;*

3) $y=e^{\tilde{o}}$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ *навколо осі Ох;*

Завдання 5. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ох: *1) дуги кривої* $y^2=4\tilde{o}$ *від* $x=0$ *до* $x=3$;

2)півкола $y=\sqrt{9-\tilde{o}^2}$; *3)дуги синусоїди* $y=\sin x$ *від* $x=0$ *до* $x=\pi$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.3.1

Т е м а: **Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи обчислення визначених інтегралів: заміна змінних та формула інтегрування частинами**

М е т а: Сформувати вміння обчислювати визначені інтеграли заміною змінних та за формулою інтегрування частинами. Засвоїти основні властивості визначених інтегралів, умову інтегрованості функції на відрізку. Показати зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами. Повторити основні методи інтегрування функцій, зокрема інтегрування дробово-раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій.

Література:[2]§§8.12-8.15, [3] §§8.3-8.5, [4] §11.1-11.2.

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл.

1) $\int_1^2 (3x^2-5x+7)dx$; *2)* $\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2+1}dx$; *3)* $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; *5)* $\int_{2\Pi}^{3\Pi} x*\sin x dx$; *6)* $\int_0^9 x^2\sqrt{81-x^2}dx$;

7) $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos x*\sin^2 x dx$; *8)* $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$; *9)* $\int_{-1}^1 x*e^{-x^2}dx$;

10) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{2+9x^2}$; *11)* $\int_{-2}^3 (4x^2-3x^2+2x+1)dx$;

12) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$; *13)* $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sqrt{3\sin+1}\cos x dx$; *14)* $\int_{\frac{\Pi}{8}}^{\frac{\Pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

15) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{3+4x^2}$; *16)* $\int_0^1 \arcsin x dx$; *17)* $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} x\cos x dx$;

18) $\int_0^2 9\sqrt{x^3+1}x^2dx$; *19)* $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$; *20)* $\int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{2}} (\cos x+\frac{1}{\sin^2 x})dx$;

Завдання 4. Скласти канонічне рівняння параболи та здійснити побудову:

а) парабола розташована у правій півплощині симетрично відносно осі Ох і її параметр p = 3;

б) з вершиною в початку координат, якщо її фокус лежить в точці: 1) $F_1(5;0)$; 2) $F_2(-4;0)$; 3) $F_3(0;2)$;

в) з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма: 1) x =-2; 2) x = 3; 3) y = -4;

г) з віссю симетрії паралельною осі Ох, якщо:

1) парабола проходить через т. М(1;3) і має вершину А(-4;-2);

2) парабола проходить через початок координат і має вершину А(-2;-4).

Завдання 5.

а) знайдіть довжину відрізка прямої x+4y-28=0, що лежить всередині еліпса $x^2/400 + y^2/25 = 1$;

б)знайдіть вершини, фокуси. асимптоти, ексцентриситет гіперболи $\frac{\tilde{o}^2}{9}-\frac{\acute{o}^2}{16}=-1$;

в)знайдіть точки перетину параболи $y^2=16x$ з прямою 2x-y+2=0;

г) складіть рівняння спільної хорди двох кіл, які перетинаються $x^2 + y^2 - 6y = 0$, $x^2 + y^2 - 12x = 0$;

д) Обчисліть площу квадрата, вписаного в еліпс

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1;$$

е) складіть рівняння гіперболи, вершини якої лежать у фокусах еліпса $x^2/20 + y^2/8 = 1$, а фокуси – у вершинах еліпса;

є) знайдіть відстань від вершини гіперболи $x^2/25 - 4y^2/25 = 1$ до її асимптоти;

ж) знайдіть точки перетину двох парабол, що мають спільну вершину в початку координат, а фокуси – в точках $F_1(3;0)$ і $F_2(0;3/8)$;

з) коло $x^2 + y^2 = 20$ перетинає параболу $x^2 = 8y$. Складіть рівняння їх спільної хорди;

и) обчисліть гострі кути,утворені при перетині парабол:

1) $y = x^2$ і $x = y^2$; 2) $y^2 = 4x$ і $2x^2 = 27y$.

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

Координати вектора шукаються за формулою:

$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ *де A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)*

Довжина вектора обчислюється за формулою:

$\overline{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *, якщо вектор має координати x, y, z.*

Скалярний добуток векторів обчислюється за формулами:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi,$$

Координати точки M(x,y), що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ, знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Площа трикутника ABC з вершинамиA(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3 ,y_3)

$$\boldsymbol{S} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$

Рівняння прямих

$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$, $k = tg\alpha$ *- з кутовим коефіцієнтом*

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ *рівняння прямої через дві точки M_1, та M_2*

$\boldsymbol{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0}$ *нормальне рівняння прямої*

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих:

$$\boldsymbol{A_1/A_2 = B_1/B_2,\ k_1 = k_2;\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0,\ k_1 k_2 = -1.}$$

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Рівняння кола з радіусом R: $\boldsymbol{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, c^2 = a^2 - b^2, \varepsilon = \frac{c}{a}, x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ *- рівняння еліпса.*

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, c^2 = a^2 + b^2, \varepsilon = \frac{c}{a}, x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ *- рівняння гіперболи*

$\boldsymbol{y^2 = 2px,\ x = -p/2}$ *– рівняння параболи та її директриси*

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.2

Т е м а: **Невизначений інтеграл. Метод інтегрування частинами, інтегрування дробово-раціональних функцій**

М е т а: Дати практику знаходження невизначеного інтеграла методом інтегрування частинами, інтегрування дробово-раціональних функцій методом невизначених коефіцієнтів. Закріпити вміння знаходити інтеграл методом заміни змінної та за допомогою таблиці основних інтегралів. Повторити поняття первісної функції, невизначеного інтеграла, основні правила інтегрування функцій.

Література:[2]§§8.6-8.7, [3] §8.2, [4] §10.2.

Завдання 1. Знайти невизначений інтеграл, використовуючи формулу інтегрування частинами.

1) $\int arctgx dx$; *2)* $\int x \cdot e^{-x} dx$; *3)* $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x dx$;

4) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$; *5)* $\int x \cdot \cos x dx$; *6)* $\int x^2 \sin x dx$;

7) $\int e^x \sin x dx$; *8)* $\int (x^3 + 1)\cos dx$; *9)* $\int e^x \sin\frac{x}{2} dx$;

10) $\int x \ln x dx$; *11)* $\int \arcsin x dx$; *12)* $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Завдання 2. Знайти невизначений інтеграл від дробово-раціональних функцій, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

1) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$; *2)* $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx$; *3)* $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

4) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; *5)* $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$; *6)* $\int \frac{xdx}{x^2 + 3x + 2}$;

7) $\int \frac{7x-6}{2x^2 - 6x + 4} dx$; *8)* $\int \frac{dx}{1 - x^3}$; *9)* $\int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x+2)} dx$;

10) $\int \frac{3x+5}{(x^2 + 2x + 2\_)^2} dx$; *11)* $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx$; *12)* $\int \frac{6x-4}{x^3 - 4x} dx$.

ТЕМА 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.1

Т е м а: **Невизначений інтеграл. Метод безпосереднього інтегрування, метод інтегрування заміною змінних**

М е т а: Засвоїти поняття первісної функції, невизначеного інтегралу, основні правила інтегрування, дати практику знаходження невизначеного інтегралу за допомогою таблиці основних інтегралів, методом безпосереднього інтегрування та методом заміни змінної.

Література:[1]§§8.1-8.5, [3] §§8.1-8.2, [4] §10.1-10.2.

Завдання 1. Знайти невизначений інтеграл, використовуючи правила інтегрування та таблицю основних інтегралів:

1) $\int(x^2+5x^4+2x+4)dx$; 2) $\int ctg^2 x dx$; 3) $\int e^{3x+2}dx$;

4) $\int 7\sqrt[4]{x^3dx}$; 5) $\int(\sin t+3\cos 2t)dt$; 6) $\int \frac{5^x+x}{\sqrt{5}}dx$;

7) $\int(\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x})dx$; 8) $\int(x+1)^2(3x-4)dx$; 9) $\int\frac{x^3-8}{2-x}dx$;

10) $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$.

Завдання 2. Знайти невизначений інтеграл, використовуючи метод заміни змінної.

1) $\int(x+4)^8dx$; 2) $\int\sqrt{x-1}dx$; 3) $\int\frac{dx}{4x+1}$;

4) $\int\cos\frac{2x-1}{3}dx$; 5) $\int 5e^{\frac{x-1}{2}}dx$; 6) $\int\cos^5 x\cdot\sin x dx$;

7) $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 8) $\int\frac{2\ln^2 x+3}{x}dx$; 9) $\int(1+e^x)^{2x}\cdot e^x dx$;

10) $\int\frac{xdx}{x^2+9}$; 12) $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 13) $\int\frac{3xdx}{\cos^2 2x^2}$.

ТЕМА 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.1

Т е м а: **Функціональна залежність. Основні елементарні функції. Властивість функцій.**

М е т а: З'ясувати поняття функціональної залежності між величинами; дослідити властивості основних елементарних функцій; навчитись знаходити область визначення функцій, досліджувати їх на парність та непарність, періодичність.

Література:[1]§§6.2, [3] §§5.1-5.6, [4] §7.1.

Завдання1. Дослідити властивості основних елементарних функцій та побудувати їх графіки:

Лінійної та квадратичної функції $y = ax + b$, $y = ax^2+bx+c$;

Степеневої функції $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;

Показникової функції $y = a^x = e^{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$;

Логарифмічних функцій $y = \ln x$, $y = \log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;

Тригонометричних функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$.

Завдання 2.Знайти значення функції в даних точках:

а) $f(xy) = x^3-3xy-y^2$ *при* $x = 4$, $y = 3$;

б) $f(x) = 2\cos 4x + \sqrt{x+1}$ *при* $x=0$;

в) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{2-\tilde{o}}{\tilde{o}}}$ *при* $x=1$; г) $f(x) = \frac{2t-3}{t^2+1}$ *при* $x=1$.

Завдання 3. Знайти область визначення функції, яка задана формулами:

а) $y=\frac{1}{\sqrt{\tilde{o}+1}}$; б) $y= 3\cos 2x + \sqrt{\tilde{o}+2}$; в) $y=\log_2(1-\cos x)$;

г) $y=\sqrt{4x-x^2-3}$; д) $y=\arcsin(x+3)$; е) $y=\arccos(x+2)$;

є) $y=\ln(-x)+\sqrt{x^2-4}$; ж) $y= 3\sqrt{5-x}-\frac{4}{\sqrt{x-3}}$.

Завдання 4. Дослідити функцію на парність та знайти період:

1) $y= 2x-x^2$; 2) $y= x^2+\sin x$; 3) $y= x - 2^x$;

4) $y=\frac{5x^4}{2x^6+7}$; 5) $y=\frac{x}{\sin\alpha}$; 6) $y= \sin x - \cos x$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.2.1

Т е м а: **Знаходження границі послідовності**

М е т а: Засвоїти поняття: числова послідовність, обмежена та необмежена послідовності, нескінченно малі та нескінченно великі величини, збіжні послідовності; сформувати вміння знаходити границі збіжних послідовностей.

Література:[1]§§6.3, [3] §§5.1-5.2, [4] §7.3.

Завдання 1. Знаючи перші елементи послідовності, запишіть формулу загального елемента послідовності:

а) $1; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5^2}; \frac{1}{7^2}; ...;$ *б)* $1; \frac{1}{1\cdot 2}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}; ...;$

в) -1; 1; -1; 1; …; *г) 2; 10; 26; 82; 242; 7304 …;*

Завдання 2. Які з послідовностей є обмеженими?

а) 2; 4; 6; 8 ; 10; 12; …; 2n; …;

б) $1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; \ldots 4(-1)^{n+1}n; \ldots;$

в) sin1; sin2; sin3; sin4; …; sin n;…;

г) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; ...; \frac{n}{n+1}; ...;$

Завдання 3. Знайти границі.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{5}{n})^{n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{3n}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n})^{\frac{n}{2}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.2.2

Т е м а: **Знаходження границь функції . Дослідження функції на безперервність**

М е т а: Закріпити поняття: границя функції,нескінченно малі та нескінченно великі величини, неперервність функції в точці; пояснити важливість знаходження границь функцій для дослідження їх на неперервність; навчитися знаходити границі, застосовуючи основні теореми про границі, розкриваючи невизначеності типу 0/0, ∞/∞ та використовуючи чудові границі.

Література:[1]§§6.1, [3] §§5.3-5.6, [4] §7.2-7.4.

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

Якщо функція z = f(x,y) диференційована в точці (x_0,y_0) *, то в цій точці існують частинні похідні за змінними x та y:*

$$f'_x(x,y)\ ,\ f'_y(x,y)$$

Повний диференціал функції двох змінних обчислюють за формулою : $dZ = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$

Градієнтом функції називається вектор координати якого дорівнюють відповідним частинним похідним у цій точці:

$$grad\ Z = (f'_x(x,y)\ ,\ f'_y(x,y))$$

Формула для наближеного обчислення наближеного значення функції:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_o,y_o)\cdot\Delta y$$

Необхідна умова існування екстремуму: $f'_x(x,y)=0\ ,\ f'_y(x,y)=0$

Достатня умова існування екстремуму:

$A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

1) якщо $\Delta>0$*, то функція* **z = f (x,y)** *має в точці* $M_0(x_0;y_0)$ *екстремум, а саме: максимум при A<0 (C< 0) і мінімум при A> 0 (C> 0);*

2) якщо $\Delta<0$*. то екстремум в точці* M_0 *відсутній;*

3) якщо $\Delta=0$*, то потрібні додаткові дослідження.*

Для відшукання найбільшого z_{max} *і найменшого* z_{min} *значень функції в обмеженій замкненій області користуються таким правилом:*

1. *Знаходять стаціонарні точки всередині заданої області і обчислюються значення функції в цих точках.*
2. *Знаходять найбільше і найменше значення функції на межі області.*
3. *Серед знайдених значень вибирають найбільше і найменше.*

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа потрібно:

1.Записати функцію Лагранжа вигляду: $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

2.Знайти критичні точки М функції Лагранжа:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0, \frac{\partial L}{\partial y}=0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5.3

Те м а: **Визначення параметрів функціональної залежності методом найменших квадратів**

М е т а: Навчитись визначати вид функціональної залежності змінних величин х та у в процесі, що досліджується. Дати практику застосування методу найменших квадратів для оцінки невідомих параметрів лінійної та параболічної функціональних залежностей.

Література:[2]§§9.2, [3] §§7.7-7.5, [4] §9.5.

Завдання 1. Величина товарообміну X(тис. грн) та витрати обігу Y(грн.) задані таблицею

X	60	80	140	160	240	320
Y	550	570	630	670	740	860

Знайти аналітичну залежність між величинами X та У.

Завдання 2. Величина товарообміну X(тис. грн.) та витрати обігу Y (грн.) задані таблицею

X	20	40	60	80	90	110
Y	550	450	1020	1700	1500	2550

Знайти аналітичну залежність між величинами X та Y.

Завдання 3. В таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га. (X) та врожай пшениці (Y) у центнерах.

X	1	2	3	5	75	9	11	12
Y	24	26,5	28	37	40	46	49	50,5

Обрати вигляд аналітичної залежності між величинами X та Y і визначити її параметри.

Завдання 4. Методом найменших квадратів визначити параметри лінійної функціональної залежності між величинами X та Y:

X	3	4	5	6	7	8
Y	0,7	1,9	2,1	2,5	3,4	4,5

Завдання 5. В таблиці задані витрати пального на 100 км (У) залежно від пробігу автомобіля (X) тис. км.

X	1	5	15	30	50	60
Y	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6

Обрати вигляд аналітичної залежності між величинами X та Y і визначити її параметри.

Заняття 1. Знайти границі функції.

1) $\lim\limits_{x\to3}(x^2-7x+4)$; *2)* $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; *3)* $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$; *5)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; *6)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; *8)* $\lim\limits_{x\to o}\frac{\sin10x}{\sin9x}$. *9)* $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.

10) $\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8})$; *11)* $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2x}{3})^{\frac{3}{2x}}$; *12)* $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{5}{3x})^{2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; *14)* $\lim\limits_{x\to\Pi}\frac{\sin10x}{\sin9x}$; *15)* $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2+3x}$.; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-8}{2x-2}$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x^2}{x^3+3x^2-1}$; *5)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2}-x-x)$; *6)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x}{2x+1})^x$; *8)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$; *9)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^x$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x^2+1}{2x^2})^{2x^2}$; *11)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3+1}{x^2+4x+2}$.; *12)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

Завдання 3. Знайти границі функції.

1) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x\cos2x}{tg^4x})$; *2)* $\lim\limits_{x\to0}(\frac{2x+3}{x^2+3})^{\frac{4}{x}}$; *3)* $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$. *5)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{arctg2x}$; *6)* $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{2x^2-3x-9}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin4x}$. *8)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^6}{(3x^2+1)^2-2}$. *9)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x^3}{2x+3x^2}$.

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2})^{4x+1}$; *11)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^{2x^2}$; *12)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{-x}$.

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

При виконанні завдань використовуйте чудові границі для послідовностей:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0, a>1; 2)\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e; 3)\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ *;* *5)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>0$*;* *6)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Теорема Вейєрштрасса. *Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю.*

При виконанні завдань використовуйте чудові границі для функцій:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$*;* *2)* $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$*;* *3)* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$*;*

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$*;* *5)* $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\ln a$*;* *6)* $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

Теорема про єдність границі. *Якщо функція має границю при x, що прямує до a, то ця границя єдина.*

Основні теореми про границі:

1) $\lim_{x\to x_0}C=C, C=const$*;* *2)* $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=a\pm b$*;*

3) $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=ab$*;* *4)* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}, b\neq 0.$

З чудових границь (1-6) дістають основні еквівалентності, які використовуються при обчисленні границь:

1) $\sin x\to x, x\to 0$*;* *2)* $\ln x\to x, x\to 0$*;*

3) $e^x-1\to x, x\to 0$*;* *4)* $(1+x)^\alpha-1\to\alpha x.$

5) $\arcsin x\to x, x\to 0$*;* *6)* $\sqrt[n]{1+x}-1\to\frac{x}{n}, x\to 0.$

Нескінченно малою називається величина, границя якої дорівнює нулю.

Нескінченно великою називається величина , границя якої дорівнює нескінченності.

Т е м а: **Екстремуми функцій двох змінних. Знаходження умовного екстремуму функції двох змінних методом Лагранжа**

М е т а: Засвоїти поняття екстремуму функцій багатьох змінних. Закріпити навички знаходження частинних похідних першого та другого порядків функцій двох змінних та навчитися застосовувати їх до знаходження екстремумів, використовуючи необхідні та достатні умови існування екстремуму. Сформувати вміння та навички знаходити умовний екстремум функцій двох змінних методом Лагранжа. Закріпити навички знаходження частинних похідних першого порядку та обчислення визначників третього порядку.

Література:[2]§§9.1, [3] §§7.7-7.5, [4] §9.4.

Завдання 1. Знайти екстремуми функції двох змінних:

1) $z = x^2+xy+y^2-2x-3y$*;* *2)* $z = xy(1-x-y)$*;*

3) $z = x^3-y^3-3xy$*;* *4)* $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$*;*

5) $z = 2x^3-xy^2+5x^2+y^2$*;* *6)* $z = 3x^2-x^3+3y^2+4y$*;*

7) $z = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$*;* *8)* $z = x^2-xy+y^2+9x-6y$*;*

9) $z = y^2-x^2+xy-2x-6y$*;* *10)* $z = y\sqrt{x}-y^2-x+6y$*.*

Завдання 2. Знайти екстремум функції Z=(x;y) за умови φ (x;y)=0:

1) $z = xy$*.* *якщо* $x^2+y^2=2$*;*

2) $z = x^2-y^2$*, якщо* $x^2+y^2-2xy=0$*;*

3) $z = x^2-y^2$*, якщо 2x - y=3;*

4) $z = xy^2$*, якщо x + 2y=1;*

5) $z = x^3+y^3$*, якщо x + y=2,* $x\geq 0$*.*$y=\geq 0$

6) $z = xy$*, якщо x + y=10 ;*

7) $z = xy^2$*, якщо* $x-y=0$*;*

8) z = 10x+y, якщо $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$*;*

9) $z = x^2+xy+y^2$*, якщо* $x^2+y^2=1.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5.1.2

Тема: Частинні похідні функції багатьох змінних. Похідні вищих порядків. Повний диференціал

Мета: *Дати практику знаходження частинних похідних першого порядку та вищих порядків функції багатьох змінних, повного диференціалу. Засвоїти поняття градієнта функції багатьох змінних та його механічного змісту. Навчитися обчислювати наближено значення функції в точці, замінюючи її повний приріст повним диференціалом. Дати навички обчислення похідних складних функцій.*

Література:[2]§§9.1, [3] §§7.7-7.5, [4] §9.2.

Завдання1. Знайти частинні похідні першого порядку функцій двох змінних:

1) $z = x^2 - 2xy^2 + y^3 x$; *2)* $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$; *3)* $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$;

4) $z = (5x^3 y^2 + 1)^3$; *5)* $z = x^2 - \sin y$; *6)* $z = \dfrac{xy}{x+y}$;

7) $z = e^{xy}$; *8)* $z = \ln(x^2 - y^2)$; *9)* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; *10)* $z = \operatorname{arg} tg \dfrac{7}{x}$

Завдання 2. Знайти повні диференціали функцій двох змінних:

1) $z = xy^2$; *2)* $z = xy$; *3)* $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

4) $z = \sin xy^2$; *5)* $z = \ln(x + 5y^2)$; *6)* $z = xy \cdot \cos xy$;

7) $z = y^x$; *8)* $z = tg \dfrac{x}{y}$; *9)* $z = \sqrt{y^2 - 4x}$.

Завдання 3. Знайти градієнт grad Z та [grad Z] функції двох змінних в даній точці:

1) $z = x^2 + 2y^2 - 5$, *Mo(2,-1);* *2)* $z = 4 - x^2 - y^2$, *Mo(1,2);*

3) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, *Mo(0,3);* *4)* $z = (x-y)^2$, *Mo(1,1).*

Завдання 4. Обчислити наближено значення:

1) $(1{,}08)^{3{,}96}$; 2) $1{,}94^2 \cdot e^{0{,}12}$; 3) sin 1,59 · tg 3,09;

4) $2.68^{\sin 0.05}$. 5) $1{,}02^{3{,}04}$; 6) $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$;

7) $1{,}04^{2{,}02}$; 8) $\ln(0{,}09^2 + 0{,}99^2)$; 9) $\sqrt[3]{3{,}02^2 - 0{,}98}$.

ТЕМА 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.1

Т е м а: **Знаходження похідних функції**

М е т а: Закріпити поняття похідної функції та її геометричного, механічного та економічного змісту. Закріпити навички знаходження похідних основних елементарних функцій; відпрацювати навики знаходження похідних, застосовуючи основні правила диференціювання. Навчитися знаходити похідні складних функцій та функцій, заданих неявно і параметрично.

Література:[1]§§7.1ß7-5, [3] §§6.1-6.5, [4] §8.1-8.4.

Завдання 1. Знайти похідні першого порядку.

1) $y = 2x^4 + 2\tilde{o}^3 - 2\tilde{o} + 4$; 2) $y = \sqrt[4]{\tilde{o}} + \dfrac{1}{\tilde{o}} - \dfrac{2}{\tilde{o}^2} + 3$; 3) $y = \dfrac{\ln x}{\sin x}$;

4) $y = 4x^3 - 3\sin x + ctgx$; 5) $y = \sqrt[8]{x^3 - 4x^6 + \ln x}$;

6) $y = \log_2 \tilde{o} + 6\log_3 x$; 7) $y = 2^x + 5^x + (\dfrac{1}{6})^x$; 8) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

9) $y = \arcsin x + 4\sqrt[3]{x} + \arccos x$; 10) $y = \sqrt[3]{x} * \sin x$.

Завдання 2. Знайти похідні складних функцій:

1) $y = \cos(\tilde{o}^2 - 4\tilde{o} + 1)$; 2) $y = \sqrt[3]{1 + \sin x}$; 3) y = cosx+lnx ;

4) y = lnsinx; 5) $y = e^{tgx}$; 6) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$;

7) $y = 2^{\sin x}$; 8) y = arcos(1-2x); 9) $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$;

Завдання 3. Знайти похідні другого порядку таких функцій:

1) $y = e^{-x^2}$ 2) $y = \sqrt{1 + x^2}$ 3) $y = \cos^2 x$

4) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 5) $y = x * e^x$ 6) y = x*sinx

Завдання 4. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

Завдання 5. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) x siny - y cosx = 0 2) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.2

Т е м а: **Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень.**

М е т а: Пояснити поняття диференціала функції. З'ясувати різницю між диференціалом та приростом функції в даній точці. Формувати вміння використовувати диференціали до наближених обчислень.

Література:[1]§§7.6, [3] §§6.4, [4] §8.1.

Завдання1. Знайти диференціали першого порядку функції.

1) $y = x \cdot \cos x + \sin x$; 2) $y = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$; 3) y=ln(sinx);

4) y=$\sqrt{5x+2}$; 5) y=$3^{\cos x}$; 6) $y = 4(e^{\sin x} - 1)^2$;

7) $y = x \cdot \arcsin 2x$; 8) $y = arctg\sqrt{x^2+1}$; 9) $y = x^2 \cdot \sin x$;

10) $y = 2^{-\frac{1}{x}} + x$; 11) y=e^xsinx; 12) y = $e^x\sqrt{2x}$

Завдання 2. Знайдіть диференціали другого порядку таких функцій:

1) y=lncos^{2}x; 2) y = lntg2x; 3) y = e^{tgx};
4) y = arcos x; 5) y = arctgx^2 ; 6) y = arcctgx

Завдання 3. Обчислити наближене значення функції у вказаних точках:

1)f(x)=$\sqrt{4x^2+3x+2}$ в точці x=1,003;
2)f(x)= $x^5+2x^4-x^3-1$ в точці x=1,01;
3)f(x)=$\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ в точці x=3,032;
4)f(x)=x*ln(x-2) в точці x=3,012;
5)f(x)=$e^{\sqrt{x}-2}$ в точці x=3,97.

Завдання 4. Обчислити наближено:

1) $10^{0,99}$; 2) $1,025^{10}$ 4 3) $\sqrt[3]{0,95}$;
4) $\ln(1,05^5)$; 5) $e^{0,07}$; 6) $10^{3\lg 2,994}$;
7) $(1,03)^5$; 8) $\sqrt[5]{1,04}$; 9) $\sqrt{1,005}$.

ТЕМА 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5.1.1

Т е м а: **Функції багатьох змінних. Границя функції багатьох змінних**

М е т а: Засвоїти поняття функції багатьох змінних. Навчитися знаходити області визначення функції багатьох змінних, області неперервності, точки розриву. Дати практику обчислення границь функцій багатьох змінних.

Література:[2]§9.1, [3] §§6.6-6.7, [4] §8.5.

Завдання1. Знайти значення функції у вказаних точках:

1) f(x,y,z)=$x^2+2y+3z^2$ в точках Mo(1;2;3), M(-2;1;-4);

2) f(x,y,z)=$\dfrac{x+y+z}{x+y-z}$. (x.y.z)=$(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$;

3) f(x,y)=$\dfrac{(x-1)(y-1)}{x+y}$, Mo(1;-2), M_1(3;-2), M_2(2;-2).

Завдання 2. Знайти область визначення функції, заданих рівняннями:

1) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; *2)* $z = \sqrt{xy}$; *3)* $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$;

4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$; *5)* $z = \arg\sin\dfrac{7}{x^2}$; *6) z = ln(x+y);*

7) $z = \ln(4x^2+9y^2-36)$; *8)* $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$; *9)* $z = \sqrt{x}+y$;

Завдання 3. Обчислити границі функції багатьох змінних:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to-1}}(x^2+y^2)$; *2)* $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to3}}\dfrac{x}{y^2-1}^{2}$; *3)* $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\y\to1}} x^2y$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to2}}\dfrac{x}{y}$; *5)* $\lim\limits_{\substack{x\to\\y\to2}}\dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$ *6)* $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to2}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$; *8)* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$; *9)* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

Диференціал функції обчислюється за формулою:

f′(x) = dy/dx

Властивості диференціалу:

1. $dc = 0$;
2. $d(uv)= du+ dv$;
3. $d(uv)= vdu + udv$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu+udv}{v^2}$

Застосування диференціалу:

1. Обчислення наближеного значення приросту функції

$dy = y'dx$

2.Обчислення наближеного числового значення функції

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

3. Наближене обчислення степенів: $(x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$;

4. Наближене обчислення коренів : $\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Розкриття невизначено стей вигляду 0/0. Перше правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей вигляду ∞/∞.

Друге правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Невизначеності 0 · ∞, ∞ - ∞ , зводяться до невизначеностей 0/0, ∞/∞ шляхом перетворення до вигляду дробу, а потім розкриття за правилом Лопіталя

Загальна схема побудови графіків функцій:

1) *знаходимо область визначення функції. Визначаємо точки розриву і інтервали неперервності функції. Досліджуємо на парність, непарність, періодичність. Знаходимо точки перетину графіків функції з координатними осями та інтервалами знакосталості;*
2) *досліджуємо поведінку функції на кінцях проміжків визначення. Знаходимо асимптоти графіка функції;*
3) *визначаємо екстремуми функції та встановлюємо інтервали монотонності функції;*
4) *визначаємо інтервали опуклості графіка функції та точки перегину;*
5) *будуємо графік функції.*

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.3

Т е м а: **Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя.**

М е т а: Вивчити основні теореми диференціального числення з метою подальшого їх застосування для дослідження функцій та побудови графіків. Навчитись розкривати невизначеності типу 0/0, ∞/∞, 0·∞, ∞ - ∞, ∞^0 *,* 0^0*, застосовуючи правило Лопіталя.*

Література:[1]§§7.6, [3] §§6.8, [4] §8.1.

Завдання 1. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{tg5x}{tg3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3 4x^2+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Завдання 2. Використовуючи правило Лопіталя, розкрийте невизначеності:

1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg2x$; 2) $\lim\sqrt[3]{x}\cdot\ln x$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\cos x\cdot tg5x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x}-3$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{1-e^{3x}}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{tgx}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.4

Т е м а: **Дослідження функцій та побудова їх графіків**

М е т а: Засвоїти схему дослідження функції. Сформувати вміння досліджувати та будувати графіки. Систематизувати знання з теми «Диференціальне числення функцій однієї змінної». Закріпити навички знаходження границь функцій, похідних функцій, розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя.

Література:[1]§§7.9, [3] §§6.6-6.7, [4] §8.5.

Завдання 1. Знайти інтервали зростання, спадання та екстремуми функції:

1) $y = x^2 + 2x - 3$; 2)$y=x^2(x-12)^2$; 3) y= x·lnx ;

4)$y=\frac{x^2}{2} - 6\ln(x-1)$; 5) $y=15-x^2-2x$; 6)$y=e^{x(x-1)}$.

Завдання 2. Знайти інтервали опуклості та точки перегину функції:

1) $y= x^3 - 3x$; 2)$y= x^3 - 6x^2 + x$; 3) $y=\frac{2x^2}{1+x^2}$;

4)$y= 2x^2 + \ln x$; 5) $y= x \cdot \arg tgx$; 6) $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

Завдання 3. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку.

1) $y= x^3 - 3x^2 + 9x, [-4;4]$; 2) $y=\frac{x+3}{x^2+7}$, [-3;7]; 3) y=sinx+2x,[П;-П]

4) $y=3x^4 + 4x^3 + 1$, [0;1] ; 5) $y=\frac{x+6}{x^2+13}$, [-5;5] ; 6) y=x $x^2 + \frac{81}{x^2}$, [-1;4]

Завдання 4. Дослідити функції та побудувати їх графіки.

1) $y=x^3-3x+4$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=\frac{5x}{x-1}$;

4) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$; 5) $y=3x^2-3$; 6) y=x·lnx;

7) $y=\frac{x}{x-2}$; 8) $y= x^4 - 5x^2 + 4$; 9) $y = 3^{\frac{1}{x}}$; 10) $y = x^2e^{-x}$.

Методичні вказівки до виконання практичних завдань

Похідна функції y = f(x) в даній точці знаходиться за формулою: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Найбільш часто для похідних приймають позначення

$$y';\ f'(x);\frac{dy}{dx};\frac{d(f(x))}{dx}$$

Правила диференціювання:

1. Похідна сталої дорівнює нулю: $C' = 0$;

2. Похідна суми двох диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто: $(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x)$

3. Похідна добутку двох диференційованих функцій має вид:

$(UV)' = U'V+V'U$

4. Похідна частки двох диференційованих функцій має вид:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

Похідна складної функції $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$ $y'(x)=f'(u)\cdot \varphi'(x)$

<u>Таблиця похідних елементарних функцій:</u>

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2. $(a^x)' = a^x \ln a$; 3. $(e^x)' = e^x$;

4. $(\log_a x)' = 1/x \ln a$; 5. $(\ln x)' = 1/x$; 6. $(\sin x)' = \cos x$;

7. $(\cos x)' = -\sin x$; 8. $(tg\, x)' = 1/\cos^2 x$; 9. $(ctg\, x)' = -1/\sin^2 x$;

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; *11.* $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; *13.* $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Похідна функції x = x(y), оберненої до y = y(x) знаходиться за формулою $\boldsymbol{x'_y = 1/y'_x}$

Якщо функція y = f(x) задана рівнянням F(x, y)=0, нерозв'язаним відносно y, то вона називається заданою неявно і її похідна y'_x знаходиться за формулою $\boldsymbol{y'_x = -F'_x / F'_y}$

Якщо функція y =f(x) задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \quad \text{де } t \text{ - параметр,}$$

тоді похідна визначається формулою: $\boldsymbol{y'_x = y'_t / x'_t}$