Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

ВИЩА
МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

За редакцією В. В. Білецького

Рівне 2024

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. – К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.
2. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2002. – Ч. 2. – 451 с.
4. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
5. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закладів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
6. Дюженкова Л.І. Вища математика. Приклади і задачі / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михлін. – К.: Видавничий центр "Академія", 2002.
7. Пак В. В., Носенко Й. Л. Вища математика. — К.: Либідь, 1996. – 440 с.
8. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. – К.: Вища школа, 2001. – 303 с.
9. Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика (Ч. 1).- К.: Діал, 2004.-192 с.
10. Підченко Ю.П., Пастушенко С.М. Вища математика (Ч.2).- К.: Діал, 2004.-200 с.
11. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: ЦУЛ, 2009.
12. Керекеша П. В. Лекції і вправи з вищої математики.-О.: Астропринт,2003. – 520 с.
13. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики: Навч. Пос. – Тернопіль, «Економічна думка» 2010. – 304 с.
14. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. — К.: Вища шк., 1994. — 454 с.
15. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Котлова. – Т. 1,2,3. – К.: Либідь, 1994.
16. Шкіль М.І. Курс математичного аналізу / М.І. Шкіль. – Ч. 1,2. – К. : Вища школа, 2005

Орієнтовні варіанти екзаменаційних білетів

Екзаменаційний білет №_____

1. Властивості визначника. Знайти $|A|$, якщо $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$.

2. Пряма лінія у просторі. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M (3; 1; 2), перпендикулярно до площини $3x+2y-6z+5=0$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{3x-5}$.

4. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\mathrm{arctg}^3 x}{\sqrt{x+3^{\ln\cos x}}}$.

5. Дослідити на неперервність функцію $y=x-2^{\frac{1}{1-x}}$.

Екзаменаційний білет №_______

1. Метод інтегрування частинами. Знайти інтеграл:

$$\int x^2\cos 4x dx.$$

2. Означення числового ряду та його властивості. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{4^n}$.

3. Знайти повний диференціал dz функції

$$z=x^3y+\ln(\sin(xy)).$$

4. Обчислити

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+x}dx.$$

5. Розв’язати рівняння:

$$y'+\cos y=\sin x.$$

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

За редакцією В. В. Білецького

Рівне 2024

Упорядник:

Білецький В. В. – к. п. н., доцент кафедри вищої математики РДГУ

Рецензенти:
Петрівський Я. Б. – к.ф.-м. н, професор РДГУ
Присяжнюк І.М. – к. тех. н., доцент РДГУ

Даний посібник розрахований для студентів Рівненського державного гуманітарного університету всіх спеціальностей заочної форми навчання.

У посібнику висвітлено перелік питань з кожної теми за розділами згідно навчальної дисципліни «Вища математика». Завдання блочно-модульного контролю для перевірки теоретичного та практичного засвоєння знань.

Посібник допоможе студентам за короткий термін ознайомитись з курсом вищої математики та підготуватись до заліку.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Розглянуто і схвалено на засіданні навчально-методичної
комісії факультету математики та інформатики РДГУ
Протокол № 8 від 30 жовтня 2024 року.

суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, щоб похибка не перевищувала 0,01? Який знак матиме ця сума?

5) Які з умов достатні, а які необхідні для розкладу функції в степеневий ряд на інтервалі збіжності?

а) границя залишку ряду дорівнює нулю;
б) обмеженість усіх похідних функції $f(x)$;
в) існування усіх похідних функції $f(x)$.

Контрольна робота № 8

1. Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n*\sin\frac{1}{n}$

2. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-1}{5(n+1)}$;. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n*2n}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{7n}{3n-1})^{2n}$

3. Знайти область збіжності ряду $\sum^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{3n-2}\;2^{2n}}$.

4. Обчислити наближено cos 0,15; взяти 2 члени; оцінити похибку.

5. Знайти суму ряда

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

6. Розкласти функцію $y=\ln x$ в ряд Тейлора в околі точки $x = 1$.

2) Якщо за ознакою Даламбера ряд розбігається, то для цього ряду:
а) не виконується достатня умова збіжності;
б) не виконується необхідна умова збіжності;
в) необхідна умова збіжності може як виконуватись, так і не виконуватись.

3) а) Якщо $\int_1^{\infty}\sqrt{f(x)}dx = 1$, то про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{f(n)}$ нічого сказати не можна;

б) для дослідження збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ достатньо використати ознаку порівняння рядів;
в) ознака Даламбера — це достатня ознака збіжності будь-якого числового ряду;
г) ознаку Лейбніца можна застосувати для дослідження знакопочергового ряду.
4) Степеневий ряд буде збіжним при $x = -3$, якщо цей ряд:
а) умовно збіжний при $x = 4$;
б) абсолютно збіжний при $x = 3$;
в) збіжний при $x = 3$;
5) Степеневими рядами будуть:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}\cdot n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+7}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n \sin nx$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$.

3-й рівень

1) Який ряд дістанемо, узявши суму рядів:
а) двох збіжних; б) двох розбіжних; в) збіжного і розбіжного.
2) Які з наведених далі умов (або їх комбінації) будуть достатніми, а які лише необхідними для збіжності знакопочергового ряду?
а) послідовність модулів членів ряду монотонно спадає;
б) границя загального члена дорівнює нулю;
в) ряд із абсолютних величин членів ряду збіжний;
г) обмеженість послідовності частинних сум.
3) Які з властивостей зумовлюють абсолютну, а які умовну збіжність знакозмінного ряду?
а) монотонне спадання абсолютних величин членів ряду;
б) компенсація додатних і від'ємних членів;
в) рівність границі загального члена ряду нулю.
4) Яку кількість членів достатньо залишити при обчисленні

ЗМІСТ

Передмова

У кожній науці приховано стільки істини,
стільки в ній є математики. *І. Кант*

У сучасному світі математика відіграє велику роль у теоретичних, технічних, економічних дослідженнях. Багато економічних проблем, наприклад проблем внутрішнього зв'язку прогнозів, їх оптимізації, вибору найефективніших інвестиційних рішень та інших, можна успішно розв'язати за допомогою математичних методів.

Даний навчально-методичний посібник написано відповідно до освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математики. Інформатика» з вищої математики для бакалаврів освіти за спеціальністю Середня освіта(математика, інформатика) і містить перелік питань з наступних розділів вищої математики: «Елементи лінійної алгебри», «Аналітична геометрія та векторна алгебра», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної». «Диференціальне числення функції багатьох змінних», «Інтегральне числення та диференціальні рівняння», «Ряди». Окремою добіркою подаються завдання для блочно-модульного контролю з різними рівнями засвоєння навчального матеріалу, стандартні варіанти контрольних робіт, екзаменаційних білетів, а також критерії оцінювання знань на заліку та іспиті.

Посібник призначений для систематичного читання, особливо тим, хто вперше ознайомлюється з предметом і має намір самостійно ознайомитися з математичним апаратом для розв'язування прикладних задач.

Бажаємо успіхів!

БЛОК 8. РЯДИ

1-й рівень

1) Вибрати з понять: а) число; б) функція; в) символ; г) числова послідовність, ті, які відповідають поняттю числовий ряд.
2) Числовим рядом називається ...
3) За означенням, ряд буде збіжним, якщо:
а) границя його загального члена дорівнює нулю;
б) існує границя його частинних сум;
в) послідовність частинних сум ряду обмежена.
(Виберіть правильне із цих тверджень.)
4) Назвіть ті з поданих далі умов, які будуть лише необхідними для збіжності ряду:
а) обмеженість будь-якого члена ряду;
б) границя загального члена ряду дорівнює нулю;
в) границя частинних сум ряду існує;
г) обмеженість частинних сум ряду.
5) Ряд називається розбіжним, якщо ...
6) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^n}$ — збіжний при: а) $q>1$; б) $|q|>1$; в) $q<1$; г) $|q|<1$.
(Вибрати правильну відповідь.)
7) Якщо ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду збіжний, то сам знакозмінний ряд буде ...
8) Записати розвинення функції $f(x)$ в ряд Маклорена та Тейлора.
9) Дослідити збіжність рядів:
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{n-1}}$.

2-й рівень

1) Вибрати правильні з тверджень:
а) якщо ряд збіжний, то границя його частинних сум існує;
б) якщо ряд збіжний, то границя загального члена дорівнює нулю;
в) якщо границя загального члена дорівнює нулю, то ряд збіжний;
г) якщо границя загального члена ряду дорівнює одиниці, то про збіжність ряду нічого сказати не можна.

3-й рівень

1) Функція $y = (x + c)^3$ — загальний розв'язок рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.
Вказати, які з поданих далі розв'язків цього рівняння будуть частинними розв'язками:
а) $y = (x + 1)^3$; б) $y = x^3$; в) $y = 0$?
2) Виберіть ті умови, за яких через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y' = f(x, y)$: а) $f(x, y)$ — диференційовна в точці (x_0, y_0) та її деякому околі; б) $f(x, y)$ і $f'_y(x,y)$ — неперервні в точці (x_0, y_0); в) $f(x, y)$ — диференційовна, а $f'_y(x,y)$ — неперервна в точці (x_0, y_0).

Контрольна робота № 7

1. Доведення теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі.
2. Перевірити , чи є вказані функції розв'язками диференціальних рівнянь:

1)y=Cx., y'x-y=0; 2) $y=x^3+\tilde{N}$, $y'=3x^2$;
3) $y=e^{2\tilde{o}}$, y'=2y; 4) $y=e^{-\tilde{o}}+1$, y'=-y+1

3. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

1)$y'=2x*(y-1)^2$. 2) $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0$
3) xydx+(x+1) dy=0 4) $(y^2 + 1)dx - xydy = 0$
5) (x+1)dy-(y-2)dx=0 6. $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$;

7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$; 8. $x + xy + y'(y + xy) = 0$ при $x = 1$, $y = 0$;

9. $(1 + x^2)y' + xy = 1$; 10. $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0$;

Екзаменаційні питання з курсу вищої математики

ВСТУП.

1. Предмет математики. Зв'язок математики з економікою.
2. Економіко-математичне моделювання. Задача планування виробництва.

ТЕМА 1: ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.

3. Поняття матриці. Задачі, які приводять до поняття матриці. Застосування матриць в економічних розрахунках.
4. Різновиди матриць. Дії над матрицями: додавання та множення, множення на число. Елементарні перетворення. Знаходження рангу матриць.
5. Визначники другого та третього порядків. Обчислення визначників n-го порядку. Властивості визначників. Розклад визначників за елементами
рядків та стовпців.
6. Обернені матриці. Способи обчислення обернених матриць.
7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: основні означення та поняття. Матричний запис. Застосування систем лінійних рівнянь у лінійному моделюванні. Теорема Кронекера-Капеллі сумісності та визначеності систем.
8. Методи обчислення визначників. Теорема Крамера. Розв'язування систем рівнянь за формулами Крамера.
9. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.
10. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса, Гаусса-Жордана.

ТЕМА 2: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.

11. Предмет і методи аналітичної геометрії. Прямокутна декартова система координат на площині, метод координат.
12. Застосування методів аналітичної геометрії до геометричної інтерпритації задач лінійного програмування.

13. Поняття рівняння лінії на площині. Різноманітні завдання прямої на площині.
14. Загальне рівняння лінії на площині та його окремі випадки.
15. Умова перпендикулярності та паралельності прямих, заданих загальним рівнянням та рівнянням з кутовим коефіцієнтом.
16. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
17. Знаходження відстані між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні.
18. Вектори. Векторні простори. Розклад вектора за базисом. Приклади застосування векторів до задач мікроекономіки.
19. Координати векторів. Дії з векторами, заданими в координатній формі.
20. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами
21. Лінії другого порядку. Канонічне рівняння кола та еліпса.
22. Лінії другого порядку. Канонічне рівняння гіперболи.
23. Лінії другого порядку. Канонічне рівняння параболи.
24. Прямокутна декартова система координат в просторі. Рівняння площини та його окремі випадки.
25. Загальне рівняння площини у просторі. Відстань від точки до площини.
26. Кут між площинами. Відстань від точки до площини.
27. Взаємне розташування прямої і площини у просторі.
28. Рівняння прямої у просторі. Кут між двома прямими.

ТЕМА 3:ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.

29. Поняття множини, функції, послідовності. Означення функції.
30. Способи задання функції. Основні елементарні функції.
31. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв′язок між ними. Властивості нескінченно малих величин.
32. Границя послідовності. Основні теореми про границі. Обчислення границь.
33. Границя функції. Визначені границі. Розкриття невизначеностей.

БЛОК 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

1-й рівень

1) Порядок звичайного диференціального рівняння визначається за такими ознаками: а) найвищий степінь функції; б) найвищий степінь похідної функції; в) сума порядків похідних рівнянь; г) порядок старшої похідної.

(Вибрати правильну відповідь.)

2) Звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку називається ...
3) Розв’язком диференціального рівняння називається ...
4) Який із поданих далі розв’язків рівняння $y''' - y'' = 0$ буде загальним, а який — частинним?

а) $y = x + 5$; б) $y = c_1x + c_2$; в) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$;
г) $y = ce^x$; д) $y = c_1x + 2e^x + c_2$.

5) Сформулювати теорему Коші для рівняння $y' = f(x; y)$.
6) Які з наведених рівнянь будуть лінійними, а які з відокремлюваними змінними?

а) $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$;
б) $x + xy + y'\left(y + xy\right) = 0$;
в) $y' + xy' = xy^3$;
г) $yy' = 2y - 3$;
д) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; е) $y'x^2 + ye^x = \cos x$.

2-й рівень

1) Знайти частинні розв’язки рівнянь за даними початковими умовами:
   а) $e^x dx - 2e^{2y}dy = 0$, $y = 0$ при $x = 0$;
   б) $y' - \dfrac{2y}{x} = x$, $y = 1$ при $x=1$.

2)Знайти загальні розв’язки

1) $y'' = x + \sin x$; 2). $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

3) $\left(y''\right)^2 = y'$; 4) $yy'' - yy'\ln y = \left(y'\right)^2$; 5) $xy'' = y'$.

2) Первісні $F_1(x) = \mathrm{arctg}\, x$ та $F_2(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ для функції $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ збігаються у точці x = 1 і не збігаються у точці $x = -1$. Пояснити, чому це так.

3) Для функцій:

а) $f_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \geq 1; \\ 0, \text{ якщо } x < 1; \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f_3(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0; \\ \dfrac{\sin x}{x}, \text{ якщо } x \neq 0; \end{cases}$ г) $f_4(x) = e^{-x}$;

д) $f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ існують невизначені інтеграли для будь-якого дійсного x. (Зазначити правильні твердження).

4) Для виконання рівності $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ достатньо, щоб $f(x)$ була: а) інтегровна; б) неперервна; в) неперервно диференційовна; г) диференційовна. (Зазначити правильне твердження.)

5) При доведенні формули Ньютона—Лейбніца використовується посилання на теорему …

Контрольна робота № 6

1. Знайти невизначений інтеграл:

1. $\int e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}+2e^{-x}\right)dx$. 2. $\int e^x \cdot x^2 dx.$ 3. $\int \dfrac{5x^4+9x^3+3}{x^3+1}dx$.

4. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$. 5. $\int \sqrt{1-2x-3x^2}\,dx$. 6. $\int\left(\cos\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right)\right)\cdot \sin(29\pi+14x)dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл.

1) $\int\limits_1^2 (3x^2-5x+7)dx$ 2) $\int\limits_{-1}^2 \dfrac{x}{x^2+1}dx$ 3) $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}}$

4) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 5) $\int\limits_{2\Pi}^{3\Pi} x * \sin x dx$ 6) $\int\limits_0^9 x^2\sqrt{81-x^2}dx$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) y = x^2. y=3x. x=1. x=2. 2) y=e^x. y=x^2. x=0. x=1.

3) y = x^2. y=0. x=4. 4) y=$|x|+1$. y=0. x=-2. x=1.

34. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій. Точки розриву функцій та їх класифікація.

ТЕМА 4: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

35. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної. Її геометричний та механічний зміст.
36. Залежність між неперервністю та диференційованістю функцій. Правила диференціювання.
37. Похідні основних елементарних функцій. Приклади застосування похідної до розв′язування задач з економіки.
38. Означення диференціалу функції. Правила знаходження диференціалу.
39. Диференціал складної функції. Застосування диференціалу до наближених обчислень.
40. Зростання та спадання функції. Опуклість функцій.
41. Монотонність функції. Екстремуми функції.
42. Дослідження функції та побудова графіка функції.

ТЕМА 5: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

43. Основні поняття та означення функції багатьох змінних.
44. Границя та неперервність функції двох змінних.
45. Частинні похідні.
46. Повний приріст функції багатьох змінних, повний диференціал.
47. Похідна за напрямком. Градієнт.
48. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень.
49. Поняття екстремуму функцій двох змінних. Екстремуми функції багатьох змінних.
50. Знаходження умовного екстремуму функції двох змінних методом множників Лагранжа.

ТЕМА 6: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

51. Первісна функції. Невизначений інтеграл.
52. Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування виразів.
53. Метод підстановки та інтегрування за частинами.
54. Інтегрування раціональних дробів.
55. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.
56. Означення визначеного інтегралу. Інтегральні суми.
57. Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца.
58. Застосування визначених інтегралів для обчислення площ плоских фігур
59. Застосування визначених інтегралів для обчислення об′ємів тіл обертання.
60. Основні поняття та означення диференціальних рівнянь. Задача Коші.
61. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінами.
62. Диференціальні рівняння першого порядку.
63. Лінійні та однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
64. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

ТЕМА 7. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

65. Числові ряди. Основні поняття та означення. Збіжність рядів.
66. Властивості збіжних рядів. Гармонійний ряд. Необхідна умова збіжності рядів.
67. Достатні ознаки збіжності рядів: ознаки порівняння, Даламбера, Коші.
68. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність.
69. Поняття функціонального ряду. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область збіжності степеневого ряду.
70. Розклад функції в ряд Тейлора та Маклорена.
71. Застосування рядів до наближених обчислень.

2) Які функції будуть первісними для функції $f(x)=\cos x$?

а) $F_1(x)=\sin x+2$; б) $F_2(x)=3\sin\dfrac{x}{3}+3$;

в) $F_3(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3) Які з підстановок:

а) $\sin x=t$; б) $\cos x=t$; в) $\operatorname{tg} x=t$; г) $\operatorname{ctg} x=t$;

д) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$

можна застосувати при інтегруванні функцій:

$$f_1(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x};\quad f_2(x)=\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x};\quad f_3(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x};$$

$$f_4(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x};\quad f_5=\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}?$$

4) Яку з підстановок можна використати при інтегруванні функції $f(x)=\sqrt{x^2-1}$:

а) $\sqrt{x^2-1}=t$; б) $x=\sin t$; в) $x=\dfrac{1}{\sin t}$; г) $x=\operatorname{tg} t$;

д) $x=\cos t$; е) $x=\dfrac{1}{\cos t}$?

5) Які з формул:

а) $\int\limits_a^b\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)dx=\sum\limits_{i=1}^n\int\limits_a^b f_i(x)dx$; б) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_a^b\dfrac{dx}{f(x)}$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$ при $\begin{cases} f(x)\ge 0\\ a>b\end{cases}$; г) $\int\limits_a^b 0\cdot f(x)dx=0\int\limits_a^b f(x)dx$;

д) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$ відбивають властивості визначеного інтеграла?

3-й рівень

1) Які з функцій:

а) $F_1(x)=-\ln|\cos x|$, б) $F_2(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\right|$,

в) $F_3(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right|$, г) $F_4(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)+\ln|\operatorname{tg} x|$

не будуть первісними для функції $f(x)=\operatorname{tg} x$?

а) $F_1(x)=e^x$; б) $F_2(x)=e^{x+3}$; в) $F_3(x)=e^{3x}$;

г) $F_4(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+c$; д) $F_5(x)=\left(e^x\right)^3+10$.

(Зазначити правильну відповідь.)

8) Інтегрування раціональних функцій у загальному випадку: а) неможливе; б) завжди можливе; в) можливе при деяких обмеженнях. (Зазначити правильну відповідь.)

9) Знайти помилку, якщо вона є, у розкладі

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{(x-1)}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C}{x^2-x+1}.$$

10) Методом підстановки можна проінтегрувати функції:

а) $f_1(x)=x^2\sin x$; б) $f_2(x)=xe^{-x^2}$;

в) $f_3(x)=\sin x\cdot\cos^3 x$; г) $f_4(x)=x\,\mathrm{arctg}x$.

(Зазначити правильну відповідь.)

11) Методом інтегрування частинами інтегруються функції:

а) $f_1(x)=xe^{2x^2}$; б) $f_2(x)=x^2\cdot\sin 5x$; в) $f_3(x)=\sqrt{x}\ln(x+1)$;

г) $f_4(x)=\cos^5 x$; д) $f_5(x)=\sin x\cos^2 x$.

(Зазначити правильне твердження.)

12) Формула Ньютона—Лейбніца має вигляд:

а) $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$; б) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$;

в) $\int_a^b f(x)dx=F(x)+c$; г) $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$;

(Зазначити неправильні формули.)

13) Формула для обчислення об’єму тіла, одержаного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями: $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, має вигляд:

а) $V=\pi\int_a^b f(x)dx$; в) $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$;

г) $V=\int_a^b f^2(x)dx$. (Указати правильну формулу.)

2-й рівень

1) Використовуючи лише відповідне означення, можна записати для даної функції її: а) похідну; б) диференціал; в) первісну; г) визначений інтеграл. (Зазначити правильні твердження.)

ЗАВДАННЯ БЛОЧНО-МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

БЛОК 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1-й рівень

1) Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо ...
2) Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо ...
3) Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо
4) Матрицею називається ...
5) Для того щоб дістати суму двох матриць, потрібно ...
6) Для того щоб помножити матрицю на скаляр, потрібно ...
7) Для знаходження добутку двох матриць потрібно, щоб ... причому елемент c_{ij} матриці добутку дорівнює ...
8) Матриця A^{-1} називається оберненою до невиродженої матриці A, якщо ...
9) Рангом матриці називається ...
10) Розширеною матрицею називається ...
11) Чи існує матриця $C = -A + 5B$,

де $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

2-й рівень

1) Мінором k-го порядку називається ...
2) Алгебраїчним доповненням називається ...
3) Визначник n-го порядку дорівнює ...
4) Сформулювати теорему Крамера.
5) Сформулювати теорему Кронекера—Капеллі.
6) Що називається лінійним перетворенням матриці? ...
7) N-вимірним лінійним простором називається ...
8) Базисом n-вимірного векторного простору називається ...
9) Довести, що коли A і B-квадратні матриці одного порядку і $AB \neq BA$, то $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

3-й рівень

1) Фундаментальною системою розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь називається ...
2) Матриці A і B подібні, якщо ...
3) Характеристичною матрицею матрицею A називається ...

4) Власним вектором матриці називається ...
5) Що називається квадратичною формою?
6) Канонічний вигляд квадратичної форми має вигляд ...
7) Знайти власні числа і власні вектори лінійних перетворень, заданих матрицями

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

Контрольна робота № 1

1. Задамо матриці.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0{,}1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$D=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/7 \\ 0{,}1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$; $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Виконати дії. а) А*В-С*Д^{ò} ;   б) А*Р^{ò} +5$Ä$ * $Ñ^{ò}$.

2.Побудувати графік функції $y=\begin{vmatrix} x & \sqrt{3} & x+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x+\sqrt{3} & x \\ x+\sqrt{3} & x & \sqrt{3} \end{vmatrix}$.

3**.** Знайти власні числа та власні вектори матриці — розв’язку системи рівнянь $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4**.** Знайти обернені матриці за заданими двома способами:
а) за допомогою формули алгебраїчних доповнень;
б) за допомогою елементарних перетворень матриць:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

5. За допомогою елементарних перетворень матриці знайти ранги матриць:

Контрольна робота № 5

1.Частинні прирости та повний приріст функції двох незалежних змінних. Частинні похідні першого та другого порядку.

2. Знайти частинні похідні функції $z = \mathrm{arctg}^3(x^2 + 2y)$.

3. Знайти похідну функції $u = xy^2 + z^3 - xy^z$ в точці $M(1; 1; 1)$ за напрямом, який утворює з осями координат кути відповідно 60°, 45°, 60°.

4. Знайти екстремум функції $z = x^3 + y^3 - xy + 1$.

5. Знайти та зобразити область визначення функції

$$z=\lg\left(y-|x+1|\right)+\sqrt{3-y}\ .$$

6. Записати рівняння дотичної площини в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ для поверхні

$$x^2+y^2+z^2=169.$$

7. Знайти екстремум функції $z=x^2+2y^2$ за умови

$$x^2+y^2-2y=0.$$

8. В еліпс $x^2+4y^2=16$ вписано рівнобедрений трикутник, основа якого паралельна більшій осі. При якому значенні основи площа трикутника найбільша?

БЛОК 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1-й рівень

1) Первісною називається ...
2) Операції знаходження для функції похідної і первісної співвідносяться між собою як ...
3) Теорема про множину первісних функції формулюється так ...
4) Задача інтегрування функції на деякому проміжку полягає в тому, щоб ...
5) Теоретичною основою розв’язання задачі інтегрування функції є теорема про ...
6) Невизначеним інтегралом називається ...
7) Подані далі функції будуть первісними для функції $f(x)=3e^{3x}$:

4) Градієнт функції $z = f(x, y)$ у точці:
а) дорівнює максимальному значенню функції в цій точці;
б) є вектор з координатами $\left\{(z'_x)^2;(z'_y)^2\right\}$;
в) задає напрям найбільшого зростання функції у цій точці;
г) є вектор з координатами $\{z'_x, z'_y\}$.

5) Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за даним напрямом $\vec{S_0}\left(|S_0|=1\right)$ має такі властивості:
а) є вектором зростання функції;
б) дорівнює $\vec{S_0}\cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$;
в) набуває мінімального значення, якщо $\vec{S_0}\perp \overrightarrow{grad}u$.

3-й рівень

1) Із функцій:

а) $f_1(x;y)=\sin^{-1}\left(x^2+y^2\right)$; б) $f_2(x;y)=\sqrt{\sin\pi\left(x^2y^2\right)}$;

в) $f_3(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0\\ 1, & y=0\end{cases}$; г) $f_4(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^2-y^2}, & x\neq y\\ \dfrac{1}{x+y}, & x=y\end{cases}$

вибрати ті, які неперервні в області $D=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$.

2) Виберіть правильні з тверджень:

а) $\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\right)\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0\right)$;

б) $\begin{pmatrix}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x z=0\\ \lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y z=0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0,y_0)\right)$;

в) $\left(\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\Delta_x z+\Delta_y z\right)=0\right)\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0,y_0)\right)$,

де Δz, $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ — відповідно повний і частинні прирости функції в точці $M_0(x_0; y_0)$.

3) Які з умов будуть достатніми, а які необхідними для існування повного диференціала функції?
а) існування частинних диференціалів функції;
б) неперервність функції;
в) неперервність частинних похідних функції.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&3&5\\2&1&-1&4\\2&-2&6&3\end{pmatrix}.$$

6. Обчислити визначники другого, третього та четвертого порядку.

$$1)\ |\hat{A}|=\begin{vmatrix}2&-3\\2&-4\end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix}2&0&5\\1&3&16\\0&-1&10\end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix}1&0&2&3\\2&0&2&0\\3&1&4&5\\5&0&0&0\end{vmatrix};$$

7. Розв’язати системи рівнянь методом Крамера, Гаусса та матричним методом.

$$1)\begin{cases}\tilde{o}-2\acute{o}+3z=6\\2x+3y-4z=20\\3x-2y-5z=6\end{cases}\quad 2)\begin{cases}5x+y-3z=-2\\4x+3y+2z=16\\2x-3y+z=17\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}5x+3y+3z=48\\2x+6y-3z=18\\8x-3y+2z=21\end{cases}$$

БЛОК 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1-й рівень

1) Вектором називається ...
2) Проекцією вектора на вісь називається ...
3) Лінійні операції над векторами мають такі властивості ...
4) Скалярним добутком двох векторів називається ...
5) Скалярний добуток векторів має властивості ...
6) Кут між двома векторами шукається за формулою ...
7) Умова перпендикулярності векторів є ...
8) Умова паралельності векторів є ...
9) Векторним добутком двох векторів називається ...
10) Векторний добуток двох векторів має такі властивості ...
11) Геометричний зміст векторного добутку полягає в тому

12) Мішаним добутком трьох векторів називається ...
13) Відстань між двома точками в прямокутній системі координат обчислюється за формулою ...
14) Вивести рівняння прямої на площині із кутовим коефіцієнтом.
15) Вивести рівняння прямої на площині, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом.
16) Вивести рівняння прямої на площині, яка проходить через дві задані точки.
17) Вивести формулу кута між двома прямими на площині.
18) Якщо дві прямі взаємно перпендикулярні, то ...
19) Формула знаходження відстані від точки до прямої має вигляд ...
20) Еліпсом називається ..., його канонічне рівняння має вигляд ...
21) Гіперболою називається ..., її канонічне рівняння має вигляд ...
22) Параболою називається ..., її канонічне рівняння має вигляд ...
23) Колом називається ..., його канонічне рівняння має вигляд ...
24) Загальне рівняння площини в просторі має вигляд ...
25) Кут між двома площинами обчислюється за формулою ...
26) Умова взаємної перпендикулярності двох площин ...
27) Умова паралельності двох площин ...
28) Нормальне рівняння площини має вигляд ...
29) Відстань від точки до площини обчислюється за формулою ...
30) Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини має вигляд ...

2-й рівень

1) Визначити, як розміщена пряма відносно еліпса — перетинає, дотикається чи проходить зовні його:

а) $2x - y - 3 = 0$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $2x + y - 10 = 0$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

в) $3x + 2y - 20 = 0$; $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

2) Записати рівняння площин, паралельних площині $2x + 2y + + z - 8 = 0$ і віддалених від неї на відстань 4.

БЛОК 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1-й рівень

1) Функцією n незалежних змінних називається ...
2) Границею функції $z = f(M)$, $M \in R^n$ при $M \to M_0$ називається ...
3) Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці (x_0, y_0), якщо ...
4) Частинною похідною функції $z = f(M)$ $M = (x_1; x_2; ...; x_n)$, за змінною $x_i (i = 1, ..., n)$ $M \in R^n$, називається ...
5) Частинним диференціалом функції називається ...
6) Точка (x_0, y_0) називається стаціонарною для функції $z = f(x, y)$, якщо ...
7) Градієнтом функції $u = f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ називається ...

2-й рівень

1) Серед поданих тверджень назвати правильні:

а) $\left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x; y_0) = A\right] \Rightarrow \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A\right]$;

б) $\begin{bmatrix} \lim\limits_{x \to x_0} f(x; y_0) = A \\ \lim\limits_{y \to y_0} f(x_0; y) = A \end{bmatrix} \Leftarrow \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A\right]$.

2) Знайти помилки в записах частинних похідних функції $z = xe^{x+y^2} + \frac{x^2}{y}$, якщо вони є $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y^2}(1 + 2y) + xe^{x+y^2} + 2x$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y^2} xe^{x+y^2} \cdot 2y - \frac{x^2}{y^2}$.

Вибрати правильні з поданих тверджень.

3) У стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x; y)$ має максимум, якщо в цій точці виконуються такі умови:

а) $\Delta = 0$, $a_{11} > 0$; в) $\Delta < 0$, $a_{11} < 0$; д) $\Delta = 0$, $a_{12} > 0$.

б) $\Delta > 0$, $a_{11} < 0$, г) $\Delta > 0$, $a_{12} < 0$;

Тут використані такі позначення:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $a_{11} = z''_{x^2} = \Big|_M$, $a_{12} = z''_{xy} \Big|_M$, $a_{22} = z''_{y^2} \Big|_M$.

5) y=$\log_2 \tilde{o} + 6\log_3 x$ 6) y=$2^x + 5^x + (\frac{1}{6})^x$

3. Знайти похідні складних функцій:

1) y=$\cos(\tilde{o}^2 - 4\tilde{o} + 1)$ 2)y=$\sqrt[3]{1+\sin x}$ 3)y=cosx+lnx

4) y=lnsinx 5) y=e^{tgx} 6) y $= \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

4. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

5. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) x siny-y cosx=0; 2) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$;

3) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$; 4) $y\ln x - x\ln y = x + y$.

6**.** Знайти границі використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}} \frac{tg5x}{tg3x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$

7**.** Знайти інтервали опуклості функції та точки перетину функції:

1) y= $x^3 - 3x$ 2)y= $x^3 - 6x^2 + x$ 3) y= $\frac{2x^2}{1+x^2}$

4)y= $2x^2 + \ln x$

8**.** Чи лежать точки перегину графіка функції $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ на одній прямій?

9**.**Знайти екстремум функції

1) $y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^3 + 8}$. 2) y=15-x $^2 - 2x$ 3)y=$e^{x(x-1)}$

10**.**Знайти найбільше та найменше значення функції :

1) $y = x + \cos x$, коли $x \in [0;\ 2\pi]$. 2)y= $x^3 - 3x^2 + 9x$.[–4;4]

3)y=$\frac{x+3}{x^2+7}$. [-3;7]

3) На векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ побудовано паралелограм, знайти його площу і висоту.

4) Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

5) На прямій $2x - 5y - 12 = 0$ знайти точку, що рівновіддалена від точок $A(-1;\ 3)$ і $B(3;\ -5)$.

3-й рівень

1) Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, паралельних прямій $10x - 3y + 9 = 0$.

2) Знайти відстань точки A (4; 3; 0) до площини, що проходить через точки M_1 (1; 3; 0), M_2 (4; – 1; 2) і M_3 (3; 0; 1).

3) Записати рівняння прямої, що проходить через точки A (– 1; 2; 3), B (2; 6; – 2) і знайти її напрямні косинуси.

4) Знайти кут прямої $x = 2z - 1$, $y = 2z + 1$ з прямою, що проходить через початок координат і точку A (1; – 1; – 1).

5) Знайти кути, які утворює пряма $x + y - z = 0$, $x = y$ з осями системи координат.

6) Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A (2; – 3; 4) на вісь *Ox*.

Контрольна робота № 2

1. Знайти довжину вектора $5\bar{a} - 2\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 120^\circ$.

2. Задано трикутник *ABC: A* (1; 2), *B* (2; – 2), *C* (6; 1). Потрібно:

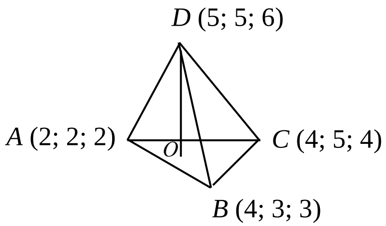
а) записати рівняння сторони (*AB*);

б) знайти висоту (*CD*), довжину $|CD|$;

в) знайти $\angle\varphi = (CD),(BM)$, де *BM* — медіана;

г) написати рівняння бісектриси кута *A*.

3. Дано: *ABCD* — піраміда, *DO* — висота.



1) (ABC) — ?
2) (DO) — ? $|DO|$ — ?
3) V_{ABCD} — ?

4. Складіть рівняння прямої, яка: 1) проходить через точку перетину прямих x + y -4 = 0 і x – y = 0 паралельно прямій x – 4y + 4 = 0; 2) проходить через точку перетину прямих x/6 + y/3 = 1 і x/3 + y/6 = 1 паралельно прямій x – 2y – 6 = 0

5. Рівняння прямої і площини у просторі.

а) обчислити гострий кут між двома прямими
(x-1)/3=(y+4)/-2=(7-2)/4;
(x+3)/2=(y-1)3=(7=1)/-2;

б) знайти точку перетину прямих:
(x+3)/2=(y-1)/3=(7+5)/2 та 2x+3y+7-22=0

в)складіть рівняння прямої, яка проходить через точку Mo(-4;-3;-1) і паралельна векторам $\vec{a}$ =(5;2;-3) і $\vec{a}$=(1;4;-2).

6. Скласти рівняння кола та побудувати коло.

а) з центром у точці і радіусом $\sqrt{3}$;

б) з центром у точці (-2;5) і радіусом 3;

в) знайдіть координати точок перетину кола $x^2+y^2+4x-12=0$ з осями координат.

г) складіть рівняння кола, що проходить через 1)(2;8), (4;-6), (-12;-6).

7. Складіть канонічне рівняння еліпса та побудуйте його :

а) якщо дві його вершини знаходяться в точках $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$, а фокуси $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$;

б) з фокусами на осі Ox, якщо його велика вісь 10, ексцентриситет ε =0,6;

в) якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 8, а мала вісь 2b = 6;

г) якщо відстань між фокусами дорівнює 6(фокуси лежать на

7) Знайти границі за допомогою правила Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

3-й рівень

1) Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці, якщо ...
2) Сформулювати і довести теорему про похідну складної функції.
3) Сформулювати і довести теореми про похідну оберненої функції. Функція $y = f^{-1}(x)$ має такі властивості:
1) визначена і неперервна на проміжку $[a, b]$;
2) на проміжку $[a, b]$ набуває мінімального і максимального значень;
3) набуває на кінцях проміжку $[a, b]$ значення різних знаків;
4) диференційовна на інтервалі (a, b);
5) на кінцях проміжку $[a, b]$ набуває різних значень.
4) Які з перелічених у задачі 3 тверджень використовуються для доведення теореми Ролля?
5) Які з перелічених у задачі 3 тверджень використовуються для доведення теореми Лагранжа?
6) Точка x_0 називається точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, якщо ...
7) Рівняння $x^3 - 3x = 1$ має принаймні один корінь у проміжку [1; 2].
8) Кожний многочлен непарного ступеня має принаймні один дійсний корінь.
9) Виконати дослідження функцій і побудувати їх графіки:

а) $y = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$; б) $y = x \operatorname{arctg} x$; *в*) $y=x^3-3x+4$.

Контрольна робота № 4

1. Чи можна почленно диференціювати нерівність між функціями? Пояснити.

2. Знайти похідні першого порядку.

1) $y=2x^4+2\tilde{o}^3-2\tilde{o}+4$ 2) $y=\sqrt[4]{\tilde{o}}+\frac{1}{\tilde{o}}-\frac{2}{\tilde{o}^2}+3$

3) $y=4x^3-3\sin x+ctgx$ 4) $y=\sqrt[8]{x^3-4x^6+\ln x}$

БЛОК 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1-й рівень

1) Геометричний зміст похідної функції полягає в тому, що ...
2) Економічний зміст похідної функції полягає в тому, що ...
3) Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, якщо ...
4) Точка x_0 називається критичною точкою функції $y = f(x)$, якщо ...
5) Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ у точках її перетину з віссю абсцис.
6) Знайти границі за допомогою правила Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\cos\beta x}{e^{\beta x}-\cos ax}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{a}{x}$.

2-й рівень

1) а) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона диференційовна в цій точці;
б) Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці. (Зазначити правильну відповідь.)
2) Диференціалом функції $y = f(x)$ називається ...
3) Якщо існують похідні функції $u(x)$ і $v(x)$, то $(u(x) + v(x))' =$… (Довести.)
4) а) Якщо похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю або не існує, то в цій точці функція $f(x)$ має екстремум;
б) якщо в точці екстремуму існує похідна функція $f(x)$, то вона дорівнює нулю. (Знайти правильну відповідь.)
5) Нехай $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } x\le\frac{\pi}{2};\\ \sin x+a, & \text{якщо } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Як потрібно вибрати число a, щоб $f(x)$ була неперервною?
6) Виконати повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

а) $y = e^{\mathrm{tg}x}$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$; в) $y = 2x - \mathrm{tg}x$.

осі Ох) і велика вісь дорівнює

8.Скласти канонічне рівняння гіперболи та здійснити побудову.

а) з фокусами на осі Ох, якщо її дійсна вісь 16, а уявна 8;

б) якщо координати її вершин A_1 (-3;0), A_2 (3;0) та координати фокусів F_1 (-5;0), F_2 (5;0);

9. Скласти канонічне рівняння параболи та здійснити побудову:

а) парабола розташована у правій півплощині симетричне відносно осі Ох і її параметр р = 3;

б) з вершиною в початку координат, якщо її фокус лежить в точці: 1) F_1(5;0); 2) F_2 (-4;0); 3)P_3 (0;2);

БЛОК 3 .ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1-й рівень

1) Означення функції.
2) Областю визначення функції називається ...
3) Означення послідовності.
4) Функція називається парною, якщо ...
5) Функція називається непарною, якщо ...
6) Функція називається періодичною, якщо ...
7) Функція називається зростаючою, якщо ...
8) Функція називається спадною, якщо ...
9) Перелічити основні елементарні функції.
10) Означення границі послідовності ...
11) Означення границі функції в точці.
12) Означення границі функції, коли $x\to+\infty(-\infty)$…
13) Функція називається нескінченно малою, якщо ...
14) Означення нескінченно великої функції.
15) Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці, якщо ...
16) Функція $y = f(x)$ називається неперервною на множині, якщо ...
17) Точка x_0 називається точкою розриву функції, якщо ...
18) Приростом аргументу в точці x_0 називається ...
19) Приростом функції в точці x_0 називається ...
20) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y =$
21) Які із зазначених функцій парні; непарні, які не є ні парними, ні непарними?

а) $y = x^4 - 2x^2$; б) $y = 2^x$;
в) $y = x - x^3$; г) $y = \sin x - \cos x$.

22) Знайти точки розриву, дослідити їх характер, побудувати схематично графік функції.

а) $y = \dfrac{|x|}{x}$ б) $y = \dfrac{1}{\lg|x|}$.

2-й рівень

1) Функція називається елементарною, якщо ...
2) Означення границі функції зліва і справа.
3) Сформулювати теорему про суму нескінченно малих функцій.
4) Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі одного порядку, то ...
5) Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границями відповідно числа a і b, коли $x \to x_0$, то виконуються такі рівності:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \ldots$ б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right) = \ldots$

6) Для неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ маємо:

а) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$; г) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

(Зазначити правильні відповіді.)
7) Якщо $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то:
а) не існує околу точки x_0, в якому $f(x_0) > 0$;
б) існує окіл точки x_0, в якому $f(x) > 0$.
(Зазначити правильну відповідь.)
8) Знайти область визначення функції:

а) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$; б) $y = \arcsin(x-2)$.

3-й рівень

1) Сформулювати і довести теорему про добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію.
2) Якщо нескінченно мала $\alpha(x)$ має вищий порядок малості порівняно з нескінченно малою $\beta(x)$, то ...
3) Якщо функція $f(x)$ має границею число a, коли $x \to x_0$, то в околі точки x_0 її можна подати у вигляді ...
4) Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

5) Якщо $y = f(x)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для $c \in (A, B)$:
а) не існує жодної точки $c \in (a, b)$, такої що $f(c) = C$;
б) існує кілька точок $c \in (a, b)$, таких що $f(c) = C$;
в) існує хоча б одна точка $c \in (a, b)$, така що $f(c) = C$.
(Зазначити правильну відповідь.)
6) Якщо $y = f(x)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$, то:
а) $f(x)$ обмежена на проміжку $[a, b]$;
б) $f(x)$ не обмежена на проміжку $[a, b]$;
в) існує таке m, що $f(x) > m$, $\forall x \in [a, b]$;
г) не існує такого M, що $f(x) < M$, $\forall x \in [a, b]$.
(Зазначити правильну відповідь.)

Контрольна робота № 3

1. Знайти область визначення функції, задана формулами.

1) y= $\dfrac{1}{\sqrt{\tilde{o}+1}}$; 2) y= 3cos2x + $\sqrt{\tilde{o}+2}$; 3)y=$\log_2(1-\cos x)$;

4) y=$\sqrt{4x - x^2 - 3}$ 5) y=arcsin(x+3); 6) y=ln(-x)+$\sqrt{x^2-4}$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{3x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$. 3) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{5x}}$; 6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n+2}$.

3. Знайти границі

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$, 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^2+4x+2}$. 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

4. Дослідити неперервність функції:

а) $y = 1 + 2^{\frac{1}{x-3}}$; б) $y = \sqrt{x} + \dfrac{|x-8|}{x-8}$.

5. Дослідити функцію на неперервність, побудувати її графік: $y = \ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.