

**Міністерство освіти та науки України
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра цифрових технологій та методики навчання
інформатики**

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

**методичні рекомендації до виконання
лабораторних завдань та самостійних робіт**

Рівне 2024

Методи обчислень: методичні рекомендації до виконання лабораторних завдань та самостійних робіт/ Укладач: Шліхта Г.О. – Рівне: РДГУ, 2024. –100 с.

Відповідно до програми курсу “Методи обчислень” розглянуто математичні методи розв’язування рівнянь і систем рівнянь, питання інтерполяції та апроксимації функцій, а також числове диференціювання та інтегрування.

Розробка містить опис методів та засобів обчислювальної математики для наближеного числового розв’язку прикладних задач, приклади з необхідними коментарями, завдання до лабораторних занять, порядок виконання лабораторної роботи і варіанти індивідуальних вправ для групи, контрольні питання.

Укладач: *Шліхта Г.О.* – професор, доцент кафедри цифрових технологій та методики навчання інформатики РДГУ, кандидат педагогічних наук.

Рецензенти: *Турбал Ю.В.* – професор кафедри «Комп’ютерних наук та прикладної математики» Національного університету водного господарства та природокористування, кандидат фізико-математичних наук, доктор технічних наук.

Рекомендовано до друку НМК факультету №1 від 30.01.2024р.

Зміст

Лабораторна робота №1	4
Лабораторна робота №2	10
Лабораторна робота №3	14
Лабораторна робота №4	20
Лабораторна робота №5	28
Лабораторна робота №6	30
Лабораторна робота №7	34
Лабораторна робота №8	40
Лабораторна робота №9	48
Лабораторна робота №10	51
Лабораторна робота №11	55
Лабораторна робота №12	60
Лабораторна робота №13	66
Лабораторна робота №14	70
Лабораторна робота №15	78
Завдання для самостійного виконання	81
Таблиця 1	87
Таблиця 2	90
Таблиця 3	92
Таблиця 4	94
Таблиця 5	96
Порядок захисту лабораторної роботи	98
Література	99

Лабораторна робота №1

Тема: Локалізація коренів нелінійного рівняння.

Мета: Встановити існування коренів нелінійного рівняння; локалізувати окремі корені на відрізках заданої довжини.

Завдання

1. Для нелінійного рівняння вигляду $f(x)=0$, $x \in [a;b]$ встановити існування коренів в області задання. Варіант функції $f(x)$ обрати в таблиці 1.
2. Користуючись аналітичним методом, локалізувати корені рівняння на інтервалах одиничної довжини.
3. На основі аналізу графіка функції $y = f(x)$ перевірити результати аналітичного відокремлення коренів.
4. Звузити інтервали локалізації коренів до довжини 0,1 методом послідовного перебору.

Теоретичні відомості

Нехай задано рівняння з однією змінною

$$f(x)=0, \quad (1)$$

де функція $f(x)$ визначена та неперервна на деякому проміжку $(a;b)$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in (a;b)$, при яких рівняння (1) перетвориться на тотожність. Корінь рівняння (1) називають **нулем функції** $f(x)$.

Алгебраїчними рівняннями називають рівняння, що містять тільки алгебраїчні функції (цілі, раціональні, ірраціональні). Рівняння, що містять інші функції (тригонометричні, показові, логарифмічні й інші) називаються **трансцендентними**.

Знаходження наближених коренів рівняння вигляду (1) складається з двох етапів:

- відокремлення коренів, тобто знаходження відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь рівняння ;
- обчислення коренів з наперед заданою точністю.

Теорема 1 (теорема існування кореня). Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень протилежних знаків, тобто $f(a)f(b)<0$, то в середині цього відрізка існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=0$.

Теорема 2 (теорема існування і єдиності кореня). Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована на відрізку $[a;b]$, набуває на його кінцях значень різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак всередині відрізка $[a;b]$, то рівняння $f(x)=0$ на цьому відрізку має корінь, причому єдиний.

В обчислювальній практиці користуються трьома способами локалізації: аналітичним, графічним та методом послідовного перебору.

Аналітичне відокремлення коренів.

У відповідності з теоремами 1 і 2 алгоритм відокремлення коренів рівняння можна сформулювати наступним чином:

1. Знайти область визначення рівняння.
2. Знайти критичні точки функції.
3. Записати інтервали монотонності функції.
4. Визначити знак функції на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити відрізки, на кінцях яких функція набуває значень протилежних знаків.
6. Знайдені відрізки ізоляції кореня при необхідності звузити.

Графічний метод.

Для відокремлення коренів цим методом будують графік функції $y = f(x)$ і знаходять точки перетину цього графіка з віссю абсцис та кінці відрізків ізоляції коренів. Побудова графіків можна спростити, замінивши рівняння (1) рівносильним йому рівнянням: $f_1(x) = f_2(x)$, де функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - простіші функції. Тоді, побудувавши графіки функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, знаходять межі, в яких містяться абсциси точок перетину цих графіків.

Метод послідовного перебору.

Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ локалізований на відрізку $[a; b]$. Вибираючи початкове значення $x = a$, фіксований крок $\Delta x = h$ визначимо наступне значення функції за формулою $x_i = a + ih$, $i = (0, 1, 2, \dots)$. На кінцях кожного з відрізків $[a + ih, a + (i + 1)h]$, $i = (0, 1, 2, \dots)$ визначають знак функції $f(x)$. Якщо знаки однакові, тобто $f(a + ih)f(a + (i + 1)h) > 0$, то на відрізку $[a + ih, a + (i + 1)h]$ рівняння (1) не має кореня; якщо знаки функції протилежні, то на даному відрізку є корінь рівняння, значення якого $\bar{x} = a + ih + \frac{1}{2}h$ є наближеним значенням кореня з точністю $\varepsilon = \frac{1}{2}h$. Так продовжують доти, поки правий кінець не досягне значення b .

Хід роботи

Завдання 1. Відокремити корені рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ аналітично.

Розв'язування.

За алгоритмом аналітичного відокремлення коренів маємо:

1. Знайдемо область визначення: $X = (-\infty; +\infty)$.
2. Знайдемо першу похідну $f'(x)$. Критичні точки знайдено з умови $f'(x) = 0$:

$$3x - 2 = 0;$$

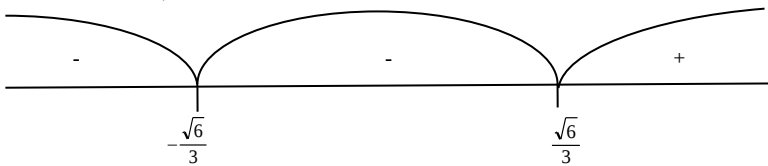
$$x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

3. Запишемо інтервали монотонності $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right);$

4. Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6} - 45}{9} < 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{6} - 45}{9} < 0;$$



5. Отже, відрізком ізоляції кореня є проміжок $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right).$

6. Методом проб звузимо знайдений проміжок ізоляції до одиничної довжини. Оскільки значення $\frac{\sqrt{6}}{3}$ близьке до одиниці, то обчислимо $f(1) = -6 < 0; \quad f(2) = -1 < 0, \quad f(3) = 16 > 0.$

Отже, за теоремою Больцано – Коші 2:

$$f(2) \cdot f(3) > 0$$

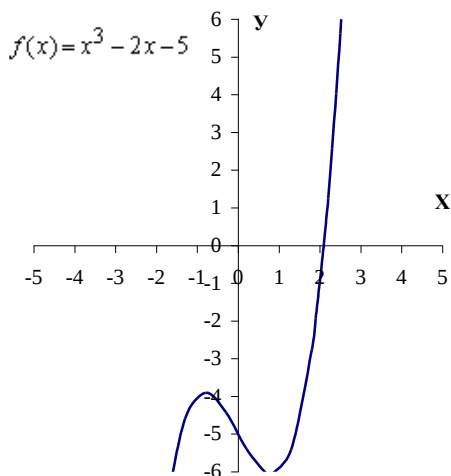
корінь заданого рівняння належить відрітку $[2; 3].$

Завдання 2. На основі аналізу графіка функції $f(x) = x^3 - 2x - 5$ розв'язати рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0.$

Розв'язування.

Складемо таблицю значень функції $f(x) = x^3 - 2x - 5:$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	-9	-5,375	-4	-4,125	-5	-5,875	-6	-4,625	-1	5,625



Мал . 1. Графік функції $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Як бачимо наближене значення кореня $x \approx 2,1$; $x \in [2,3]$.

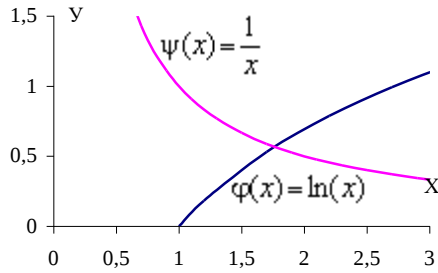
Завдання 3. На основі графічного методу розв'язати рівняння $x \ln(x) = 1$.

Розв'язування.

Подемо це рівняння у вигляді: $\ln(x) = \frac{1}{x}$. Корені такого рівняння можуть бути знайдені як абсциси точок перетину функцій $\varphi(x) = \ln(x)$ та $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

Побудуємо таблиці значень обох функцій:

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi(x)$	-0,69	0,00	0,41	0,69	0,92	1,10	1,25	1,39	1,50	1,61
$\psi(x)$	2,00	1,00	0,67	0,50	0,40	0,33	0,29	0,25	0,22	0,20



Мал. 2. Графіки функцій

Як бачимо, наближене значення кореня $x \approx 1,7$ на проміжку $[1,5;2]$.

Завдання 4. Звузити інтервал локалізації кореня $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$ до довжини 0,1

методом послідовного перебору для рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$

Розв'язування.

За початкове значення приймемо $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,816$, фіксований крок $h = 0,1$. Обчислюємо наступне значення x_1 :

$$x_1 = x_0 + i \cdot h = 0,816 + 1 \cdot 0,1 = 0,916$$

Визначаємо знак функції на кінцях відрізка $[0,816; 0,916]$:

$$f(0,816) = 0,816^3 - 2 \cdot 0,816 - 5 = -6,08866$$

$$f(0,916) = (0,916)^3 - 2 \cdot 0,916 - 5 = -6,06342$$

За теоремою Больцано – Коші $f(0,816) \cdot f(0,916) > 0$ на даному відрізку немає кореня, тому обчислюємо наступне значення:

$$x_2 = x_0 + i \cdot h = 0,816 + 2 \cdot 0,1 = 1,016$$

Визначаємо знак функції на кінцях відрізка $[0,916; 1,016]$:

$$f(0,916) = (0,916)^3 - 2 \cdot 0,916 - 5 = -6,06342$$

$$f(1,016) = (1,016)^3 - 2 \cdot 1,016 - 5 = -5,98323$$

За теоремою Больцано – Коші $f(0,916) \cdot f(1,016) > 0$ на даному відрізку також немає кореня рівняння. Так продовжуємо до тих пір поки, не отримаємо проміжок, на якому знаки функції протилежні. Цей алгоритм зручно реалізувати в табличному процесорі MS Excel:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,816	-6,08866
1	0,916	-6,06342
2	1,016	-5,98323
3	1,116	-5,84207
4	1,216	-5,63395
5	1,316	-5,35288
6	1,416	-4,99284
7	1,516	-4,54784
8	1,616	-4,01189
9	1,716	-3,37897
10	1,816	-2,64309
11	1,916	-1,79826
12	2,016	-0,83846
13	2,116	0,242297
14	2,216	1,450014

В результаті отримали проміжок $[2,016; 2,166]$. Наближене значення кореня:

$$\bar{x} = x_0 + i \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h = 0,816 + 12 \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 2,066.$$

Контрольні питання:

1. Що таке нелінійне алгебраїчне рівняння?
2. Що означає „відшукати розв’язок нелінійного рівняння”?
3. На які етапи поділяється процес відшукування розв’язків нелінійного рівняння?

Лабораторна роботи №2

Тема: Уточнення коренів нелінійних рівнянь. Методи дихотомії, релаксації.

Мета: Знайти наближені розв'язки нелінійного рівняння на інтервалах локалізації із заданою точністю.

Завдання

1. Користуючись результатами лабораторної роботи № 1 по відокремленню розв'язків нелінійного рівняння, уточнити методом дихотомії корені із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.
2. Для кожного окремого інтервалу локалізації коренів нелінійного рівняння (дивись лабораторну роботу №1) уточнити корінь методом простої ітерації.
3. Для кожного окремого інтервалу локалізації коренів нелінійного рівняння (дивись лабораторну роботу № 1) визначити параметр релаксації для наступного уточнення методом релаксації, уточнити корені із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.
4. В процесі уточнення коренів визначити кількість ітерацій необхідних для досягнення необхідної точності результату. Порівняти отримані результати, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Метод дихотомії.

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0 \quad (1),$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$. Поділимо відрізок

пополам. Якщо значення $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $x_1 = \frac{a+b}{2}$ - корінь рівняння. Якщо

$f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то вибираємо той, з отриманих відрізків – $[a, x_1]$ та $[x_1, b]$ на кінцях якого функція $f(x)$ має протилежні знаки. Новий відрізок отриманий зазначеним способом $[\alpha_1, \beta_1]$ знову поділяємо навпіл і процес повторюємо.

Таким чином, одержимо або точне значення кореня рівняння або нескінченну послідовність вкладених відрізків $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, ..., $[\alpha_n, \beta_n]$, ... таких, що

$$f(\alpha_i, \beta_i) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \text{причому} \quad \beta_i - \alpha_i = \frac{1}{2^i} (\beta - \alpha).$$

Метод простої ітерації (метод релаксації).

Рівняння (1) приводиться до вигляду

$$x = \varphi(x), \quad (2)$$

при цьому для функції $\varphi(x)$ повинна виконуватися умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (3)$$

для $x \in [\alpha, \beta]$.

Якщо умова (3) не виконується, то можна $\varphi(x)$ представити в вигляді $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, а число λ підібрати таким чином, щоб умова (3) мала місце.

Рекурентне співвідношення методу простої ітерації має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

За початкове наближення x_0 на практиці обирають крайню ліву межу інтервалу $[\alpha, \beta]$.

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Теорема 1. Нехай для обраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S = \{x: |x - x_0| \leq \delta\} \quad (5)$$

функція $\varphi(x)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q |x' - x''|, \quad x', x'' \in S \quad (6)$$

де $0 < q < 1$, і виконується нерівність

$$|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta. \quad (7)$$

Тоді рівняння $x = \varphi(x)$ має на проміжку S єдиний корінь x_* , до якого збігається послідовність $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|. \quad (8)$$

Зауваження: якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$, яка задовольняє умові

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad (9)$$

то функція $\varphi(x)$ буде задовольняти умові (6) теореми 1.

Наведемо одну оцінку, що характеризує збіжність методу простої ітерації:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|, \quad (10)$$

де $0 < q < 1$.

Для збіжності ітераційного процесу (4) суттєве значення має вибір функції $\varphi(x)$. Зокрема, якщо в $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ вибрати $\lambda = \text{const}$, то отримаємо **метод релаксації**.

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

Алгоритм методу релаксації.

1. Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ задано на відрізку $[a, b]$, функція на якому монотонна. Визначаємо знак похідної, параметр релаксації буде мати протилежний знак.

2. На інтервалі локалізації обчислюємо максимальне та мінімальне значення модуля похідної.

3. Для знаходження значення параметра релаксації скористаємось формулами:

$$\lambda = \frac{2}{\max_{x \in [a;b]} |f'(x)|} \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{2}{\max_{x \in [a;b]} |f'(x)| + \min_{x \in [a;b]} |f'(x)|}$$

4. Для обраного параметру оцінюємо коефіцієнт стиску $\alpha = \min \left\{ \frac{1 + \lambda f'(x)_{\min}}{1 + \lambda f'(x)_{\max}} \right\}$.

5. Виконуємо процес послідовних уточнень за схемою:

$$x_k = x_{k-1} + \lambda f(x_{k-1}), \quad x_0 \in [a;b] \text{ будь-яке початкове наближення,} \quad (13)$$

до тих пір поки задовольнятиме одна з умов:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \varepsilon \quad \text{або} \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

якщо $\alpha \leq \frac{1}{2}$, де ε – точність рівняння (1).

Загальні прийоми перетворення рівняння $f(x)=0$ до рівняння $x=\varphi(x)$:

Спосіб 1. Якщо умова $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ не виконується, то можна $\varphi(x)$ представити у вигляді $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$, а число λ підібрати таким чином, щоб умова (3) виконувалася. Таким чином застосовуємо модифікацію цього методу – **метод релаксації**.

Спосіб 2. Замінюють рівняння (1) на рівносильне йому $x = x - \frac{1}{\mu} f(x)$, $\mu \neq 0$. Сталу μ

підбирають з умови – $|\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) \right| < 1$. Отже, на заданому відрізку стала

повинна мати той самий знак, що й $f'(x)$, задовольняти нерівності $|\mu| \geq \frac{1}{2} \max |f'(x)|$

Спосіб 3. Якщо умова (3) не виконується, то ітераційний процес буде розбіжний, і тоді рівняння замінюють на рівносильне йому $x = \psi(x)$, де функція $\psi(x)$ – функція обернена до $\varphi(x)$. Для останнього рівняння метод ітерацій буде збіжним, оскільки

$$\left| \psi'(x) \right| = \left| \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} \right| \leq \frac{1}{v} = q < 1.$$

Хід роботи

Завдання 1. Уточнити методом дихотомії корені рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі $[2,3]$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

За умовою задачі маємо $a_0=2$, $b_0=3$. Обчислимо середину цього відрізка

$$x_{\text{сер}} = \frac{a_0 + b_0}{2} = 2,5. \text{ Досліджуємо отримані проміжки } [a_0, x_{\text{сер}}] \text{ та } [x_{\text{сер}}, b_0]$$

на виконання умов теореми Больцано-Коші і вибираємо той відрізок для якого справджується нерівність:

$f(a_0) \cdot f(x_{\text{сер}}) < 0$ або $f(x_{\text{сер}}) \cdot f(b_0) < 0$. На отриманому відрізку шукаємо середину і знову досліджуємо на виконання умови теореми.

Результати обчислення в табличному процесорі MS Excel:

Метод половинного ділення (дихотомії)							
i	a_i	c_i	b_i	$F(a_i)$	$F(c_i)$	$F(a_i) \cdot F(c_i)$	$ a_i - b_i < \varepsilon$
0	2,0000	2,5000	3,0000	-1,0000	5,6250	-5,6250	
1	2,0000	2,2500	2,5000	-1,0000	1,8906	-1,8906	
2	2,0000	2,1250	2,2500	-1,0000	0,3457	-0,3457	
3	2,0000	2,0625	2,1250	-1,0000	-0,3513	0,3513	
4	2,0625	2,0938	2,1250	-0,3513	-0,0089	0,0031	
5	2,0938	2,1094	2,1250	-0,0089	0,1668	-0,0015	
6	2,0938	2,1016	2,1094	-0,0089	0,0786	-0,0007	
7	2,0938	2,0977	2,1016	-0,0089	0,0347	-0,0003	
8	2,0938	2,0957	2,0977	-0,0089	0,0129	-0,0001	
9	2,0938	2,0947	2,0957	-0,0089	0,0020	0,0000	
10	2,0938	2,0942	2,0947	-0,0089	-0,0035	0,0000	Корінь

Отже, наближене значення кореня становить: $x \approx 2,092$.

Завдання 2. Уточнити методом простої ітерації корінь рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі $[2,3]$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

1). Перепишемо задане рівняння у такому вигляді: $x = \varphi(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{5}{2}$.

Перевіримо умову збіжності ітераційного процесу:

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2}x^2; \quad |\varphi'(x)| > 1 \text{ для } 2 \leq x \leq 3.$$

Отже, умова (3) не виконується, тому ітераційний процес розбіжний.

2). Для функції $x = \varphi(x)$ оберненою буде функція $\psi(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ і заміна рівняння $x = \varphi(x)$ рівносильним йому $x = \psi(x)$ приведе до рівняння

$$x = \sqrt[3]{2x+5}, \text{ для якого } \psi'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x+5)^2}} \text{ на відрізку } [2,3]$$

$$|\psi'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt[3]{81}} < 0,154.$$

Отже умова збіжності ітераційного процесу (3) виконується і можна скористатись таким представленням заданого рівняння $x = \psi(x)$.

3). Подамо рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ в такому вигляді:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{10} f(x) = x - \frac{1}{10} (x^3 - 2x - 5).$$

Сталу $\mu = 10$ підбираємо таким чином, щоб виконувалась умова

$$|\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) \right| < 1, \text{ тобто } |\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{1}{10} (3x^2 - 2) \right|$$

На проміжку $[2,3]$ значення $|\varphi'(x)| < 1$. Це означає, що процес ітерацій буде збіжний. Ітерації будемо продовжувати до виконання умови $|x_i - x_{i+1}| \leq 0,001$.

Обчислення запишемо у виді таблиці:

Метод простої ітерації		
i	x_i	$ x_i - x_{i+1} \leq \varepsilon$
0	2	
1	2,1	
2	2,0939	
3	2,0947	Корінь

Отже, наближене значення кореня становить: $x \approx 2,094$.

Завдання 3. Уточнити методом релаксації корінь рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі $[2,3]$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

За алгоритмом методу релаксації виконуємо наступні кроки:

1. Функція на даному проміжку неперервна та монотонна. Визначаємо на ньому знак похідної:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0.$$

Отже параметр релаксації буде мати протилежний знак $-\lambda < 0$.

2. На інтервалі локалізації $[2,3]$ обчислимо максимальне значення похідної:

$$\max_{x \in [a;b]} |f'(x)| = f'(3) = 25.$$

3. Значення параметра релаксації:

$$\lambda = -\frac{2}{\max_{x \in [a;b]} |f'(x)|} = -\frac{2}{25} = -0,08.$$

4. Для обраного параметру оцінюємо коефіцієнт стиску:

$$\alpha = \min_{x \in [a;b]} \left\{ \left| \frac{1 + \lambda f'(x)_{\min}}{1 + \lambda f'(x)_{\max}} \right| \right\} = 0,2$$

5. Виконуємо процес послідовних уточнень за схемою (13). Вибравши за початкове наближення точку $x_0 = 2$, обчислимо наступні значення x_i , $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_1 = x_0 - \lambda f(x_0) = 2 - 0,08 \cdot f(2) = 2,08$$

$$|x_1 - x_0| > \varepsilon$$

$$x_2 = x_1 - \lambda f(x_1) = 2,08 - 0,08 \cdot f(2,08) = 2,092887$$

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon$$

Метод релаксації		
i	x_i	$ x_i - x_{i+1} \leq \varepsilon$
0	2	
1	2,08	
2	2,092887	Корінь

Ітераційний процес виконується доти доки задовольнятиме умова, $|x_n - x_{n-1}| \leq 0,02$.

Отже, на третій ітерації критерій точності виконано: $|x_2 - x_1| < 0,2$ і наближений розв'язок рівняння $x \approx 2,092887$.

Контрольні питання:

1. У чому полягає сутність методу дихотомії, методу ітерацій розв'язування нелінійного рівняння?
2. Які умови збіжності методів?

Лабораторна робота №3

Тема: Уточнення коренів нелінійних рівнянь. Метод хорд, метод дотичних (Ньютона).

Мета: Знайти наближені корені нелінійного рівняння на інтервалах локалізації із заданою точністю.

Завдання

1. Для кожного окремого інтервалу локалізації розв'язків нелінійного рівняння (дивись лабораторну роботу № 1) перевірити виконання достатніх умов збіжності методу хорд, уточнити корені із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon=0,001$.
2. Для кожного окремого інтервалу локалізації розв'язків нелінійного рівняння (дивись лабораторну роботу № 1) перевірити виконання достатніх умов збіжності методу дотичних (Ньютона), уточнити корені із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon=0,001$.
3. В процесі уточнення коренів визначити кількість ітерацій необхідних для досягнення необхідної точності результату. Порівняти отримані результати, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Метод Ньютона.

Нехай корінь рівняння

$$f(x)=0 \quad (1)$$

локалізований на відрізку $[a,b]$, тобто $f(a)f(b)<0$, і функція $f(x)$ неперервна та двічі диференційована на цьому відрізку.

Ітераційні співвідношення методу дотичних мають вигляд:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n=1,2,\dots, \quad (2)$$

$$x_0 = \begin{cases} a, & f(a)f''(a)>0, \\ b, & f(b)f''(b)>0, \end{cases} \quad (3)$$

де x_0 - початкове наближення та $f'(x_n) \neq 0$.

З геометричної точки зору x_{k+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також **методом дотичних**.

Теорема 1. Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a)f(b)<0$, а $f''(x)$ не змінює знак на $[a,b]$, то виходячи з початкового наближення $x_0 \in [a,b]$, що задовольняє умові $f(x_0)f''(x_0)>0$, можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь x_* рівняння (1) з будь-якою ступінню точності.

Поклавши

$$0 < m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|, \quad (4)$$

для методу Ньютона справедлива оцінка

$$|x_n - x_*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2. \quad (5)$$

Звідси видно, що для досягнення заданої точності ε ітераційний процес треба продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_n та x_{n-1} не виконуватиметься нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}} \varepsilon \quad (6)$$

Якщо на відрізку $[a; b]$ справджується нерівність $M_2 < 2m_1$, то ітераційний процес можна закінчити, коли виконається умова $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Метод хорд.

Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ локалізований на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a)f(b) < 0$, і функція неперервна та двічі диференційована на цьому відрізку.

Ітераційні співвідношення методу хорд мають вигляд:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(d)} (x_{n-1} - d), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$d = \begin{cases} a, & f(a)f''(a) > 0, \\ b, & f(b)f''(b) > 0, \end{cases}, \quad x_0 = \begin{cases} a, & f(a) \cdot f''(a) < 0, \\ b, & f(b) \cdot f''(b) < 0, \end{cases} \quad (8)$$

де d -нерухома точка, x_0 - початкове наближення.

Поклавши,

$$0 < m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| \quad \text{та} \quad M_1 = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| \quad (9)$$

для методу хорд справедлива оцінка

$$|x_n - x_*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|. \quad (10)$$

Якщо на відрізку $[a; b]$ справджується нерівність $M_1 \leq 2m_1$, то впливає оцінка $|x_n - x_*| \leq |x_n - x_{n-1}|$.

Отже, корінь x_* рівняння (1) буде знайдено методом хорд із наперед заданою точністю ε , якщо для двох послідовних наближень x_n та x_{n-1} справджуватиметься нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1}{M_1 - m_1} \varepsilon. \quad (11)$$

Хід роботи

Завдання 1. Перевірити виконання достатніх умов збіжності методу хорд та уточнити цим методом корені рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі локалізації $[2,3]$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

Виберемо згідно з умовами (8) початкове наближення та нерухому точку:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2, \\ f''(x) &= 6x, \\ f(2)f''(2) &= (-1) \cdot 12 = -12 < 0, \\ f(3)f''(3) &= 16 \cdot 18 = 288 > 0. \end{aligned}$$

Отже, $x_0 = 2$ – початкове наближення, а $d = 3$ – нерухома точка.

Легко з'ясувати, що в даному випадку

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_{[2,3]} |f'(x)| = \min_{[2,3]} |3x^2 - 2| = 10, \\ M_1 &= \max_{[2,3]} |f'(x)| = \max_{[2,3]} |3x^2 - 2| = 25. \end{aligned}$$

Виконуючи обчислення за схемою (7) в табличному процесорі MS Excel отримуємо такі результати:

Метод хорд							
i	x_i	d	$f(x_i)$	$f(d)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i+1} $	$ x_i - x_{i+1} \leq \frac{m_1}{M_1 - m_1} \varepsilon$
0	2	3	-1	16	2,058824	0,058824	
1	2,058824	3	-0,3908	16	2,081264	0,022440	
2	2,081264	3	-0,1472	16	2,089639	0,008376	
3	2,089639	3	-0,05468	16	2,09274	0,003100	
4	2,09274	3	-0,0202	16	2,093884	0,001144	
5	2,093884	3	-0,00745	16	2,094305	0,000422	Корінь

Отже, за наближений корінь рівняння можна прийняти $x \approx 2,094305$.

Завдання 2. Перевірити виконання достатніх розумів збіжності методу дотичних (Ньютона) та уточнити цим методом корені нелінійного рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ на інтервалі локалізації $[2,3]$ із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

Визначимо початкове наближення кореня за розрахунковими формулами (3):

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = 6x,$$

$$f(2)f''(2) = (-1) \cdot 12 = -12 < 0$$

$$f(3)f''(3) = 16 \cdot 18 = 288 > 0$$

Отже, згідно з умовою, точка $x_0 = 3$ – початкове наближення.

З виразів для $f'(x)$ та $f''(x)$ знаходимо, що $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$ при довільних $x \in [2, 3]$.

Легко з'ясувати, що

$$0 < m_1 = \min_{x \in [2, 3]} |f'(x)| = 10,$$

$$M_2 = \max_{x \in [2, 3]} |f''(x)| = 18.$$

Процес обчислення має такий вигляд:

Метод дотичних						
i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i+1} $	$ x_i - x_{i+1} \leq \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}} \varepsilon$
0	3	16	25	2,36	0,640000	
1	2,36	3,424256	14,7088	2,127197	0,232803	
2	2,127197	0,3711	11,5749	2,095136	0,032061	
3	2,095136	0,006527	11,16879	2,094552	0,000584	Корінь

Отже, на четвертій ітерації маємо наближений корінь рівняння – $x \approx 2,094552$.

Контрольні питання:

1. У чому сутність методу хорд? Які його переваги і недоліки?
2. Яка ідея методу дотичних? Які переваги і недоліки цього методу?

Лабораторна робота №4

Тема: Арифметичні методи розв'язування СЛАР. Методи Гаусса, метод Жордано-Гаусса.

Мета: Встановити кількість та знайти корені СЛАР із максимально допустимою точністю обчислень.

Завдання

1. Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь встановити її невинродженість та обумовленість. Варіант системи обрати в таблиці 2.
2. У випадку невинродженості СЛАР відшукати її корені методом Гаусса за схемою єдиного ділення.
3. Відшукати корені СЛАР одним із способів послідовного виключення змінних: методом Гаусса з вибором ведучого елемента або методом Жордано-Гаусса з точністю $\varepsilon=0,00001$.
4. Для кожного методу вивести вектор розв'язку та величину нев'язки (значення різниць між вільними членами вихідної системи лінійних рівнянь і результатами підстановки обчисленого вектор – розв'язку в СЛАР). Порівняти результати, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Задано систему n – лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$,:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один корінь розв'язку, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок. Якщо матриця A квадратна і її визначник не дорівнює нулеві ($\det A \neq 0$), то вона називається **невиродженою**.

Система є *добре обумовленою*, коли визначник є величиною не нижчого порядку, ніж її коефіцієнти.

Метод Гаусса (метод Гауссовых выключень).

Нехай задана система СЛАР (1), така що $a_{11} \neq 0$, (цього завжди можна досягти перестановкою рівнянь системи, бо $\det A \neq 0$, і тому завжди є таке рівняння, в якому $a_{11} \neq 0$).

На першому етапі (його називають *прямим ходом*) вихідні рівняння (1) перетворюються таким чином, що з наступних рівнянь вилучаються усі попередні змінні, тобто із другого і подальших рівнянь вилучається змінна x_1 , система

$$\text{набуває вигляду} - \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}; \text{ на другому кроці першого етапу}$$

– з третього рівняння і подальших виключається змінна x_2 – і так далі. В результаті таких дій виходить, що останнє рівняння міститиме лише одну змінну – x_n , передостаннє – дві змінні – x_n і x_{n-1} і так далі у порядку зростання кількості змінних. На n -му кроці утворюється така система рівнянь –

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 + \dots a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 + \dots a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 + \dots a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)} \\ \dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right. \quad (2)$$

На другому етапі (який називається *зворотним ходом*) визначаються шукані розв'язки СЛАР. Значення змінної x_n визначається безпосередньо з останнього одержаного рівняння, значення x_{n-1} з передостаннього (із врахуванням відшуканого значення x_n) і так далі.

У методі Гаусса з обранням ведучого елемента перед діленням рядка на роздільний елемент порівнюють за модулем усі елементи відповідного стовпця матриці, відшуковують той рядок (із подальших), де міститься елемент, найбільший за модулем, і міняють місцями поточний рядок із знайденим рядком із максимальним елементом. Таким чином домагаються, щоб роздільний елемент був якомога більшим за модулем.

На практиці всі записи розміщують у виді таблиці – *схемі єдиного ділення*.

Схема єдиного ділення для системи третього порядку:

прямий хід Гаусса:

- 1) записуємо коефіцієнти розширеної системи в розділ I;
- 2) підсумовуємо всі коефіцієнти по рядках і записуємо суму в стовпці Σ (стовпці 7);
- 7), наприклад, $a_{15} = \sum_{j=1}^4 a_{1j}$;
- 3) ділимо всі числа, що стоять у першому рядку, на a_{11} і результати $a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}$, ($j=2,3,4,5$) записуємо в четвертий рядок;
- 4) обчислюємо рядкову суму $\sum_{j=2}^4 a^{(1)}_{1j} + 1$, робимо перевірку. Значення рядкових та

контрольних сум не повинні відрізнятися більш ніж на одиницю останнього розряду (якщо всі обчислення ведуться з постійним числом знаків після коми);

Крок	Рядок	Коефіцієнт при змінних			Вільний член	Контроль	
		x_1	x_2	x_3		Контрольна сума Σ	Рядкова сума a
1	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum_{j=1}^4 a_{1j}$
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum_{j=1}^4 a_{2j}$
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum_{j=1}^4 a_{3j}$
2	4	1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$	$\sum_{j=2}^4 a^{(1)}_{1j} + 1$
	5		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$\sum_{j=2}^4 a^{(1)}_{2j}$
	6		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$\sum_{j=2}^4 a^{(1)}_{3j}$
3	7		1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$	$\sum_{j=3}^4 a^{(2)}_{2j} + 1$
	8			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$\sum_{j=3}^4 a^{(2)}_{3j}$
4	9			1	x_1	$\overline{x_3}$	$1 + x_3$
	10		1		x_2	$\overline{x_2}$	$1 + x_2$
	11	1			x_3	$\overline{x_1}$	$1 + x_3$

5) обчислюємо коефіцієнти

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)} \quad (i=2,3; \quad j=2,3,4) \quad (3)$$

і записуємо 5-й та 6-й рядки. Контрольні суми збігаються з відповідними рядковими сумами.

6) ділимо всі елементи 5-го рядка розділу II (крім рядкової суми) на $a_{22}^{(1)}$ і результати записуємо в 7-й рядок поділу; виконуємо перевірку контрольної та рядкової суми.

7) обчислюємо коефіцієнти

$$a_{ij}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{2j}^{(2)}, \quad (i=3, j=3,4) \quad (4)$$

записуємо в 8-й рядок; виконуємо перевірку контрольної та рядкової суми.

зворотний хід Гаусса:

1) у розділі 4 записуємо одиниці;

2) обчислюємо за формулами

$$\begin{cases} x_3 = a_{34}^{(3)}, \\ x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3, \\ x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2. \end{cases} \quad (5)$$

3) для обчислення значень x_3, x_2, x_1 використовуємо лише 8-й, 7-й, 4-й рядки.

Контроль обчислень методу.

Контрольна сума — це сума коефіцієнтів при змінних і вільного члена для кожного рівняння системи. Рядкові суми — це суми всіх елементів відповідного рядка. Рахуючи разом з даною також і контрольну суму, одержуємо можливість контролювати кожен крок розрахунку.

Обчислені значення $\overline{x_j}$ та x_j зв'язані між собою співвідношенням $\overline{x_j} = x_j + 1 \quad (j=1,2,3)$.

Метод Жордано - Гаусса (метод повного виключення).

Метод виключення змінних поширюється не тільки на подальші рівняння, а й на попередні, що називають *повним виключенням*.

Перший крок цього методу – вибір ведучого елемента та виключення змінних як в методі Гаусса. На другому кроці слід ту саму операцію виключення розповсюдити і на перше рівняння, тобто з першого рівняння відняти друге, помножене на $a_{12}^{(1)}$.

Після другого кроку отримаємо систему:
$$\begin{cases} x_1 + 0 + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \dots = \dots \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

В результаті всіх перетворень отримаємо систему виду:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^{(n)} \\ x_2 = b_2^{(n)} \\ \dots = \dots \\ x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (6).$$

Хід роботи

Завдання 1. Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2,50x_1 + 0,94x_2 + 0,36x_3 = 6,804 \\ 0,87x_1 + 2,30x_2 + 0,76x_3 = 8,415 \\ 0,26x_1 + 0,97x_2 + 2,15x_3 = 8,877 \end{cases}$$

встановити її невиврожденість та обумовленість. У випадку невиврожденості СЛАР відшукати її корені методом Гаусса за схемою єдиного ділення.

Розв'язування.

Переконаємось спочатку, що система невивроджена і добре обумовлена. Для цього підрахуємо визначник системи: $\det A = 9,035498$. Значення визначника системи становить 361% значення найбільшого коефіцієнта системи ($a_{11} = 2,50$).

За схемою єдиного ділення систему розв'язуємо в такий спосіб:

1). Коефіцієнти і вільні члени системи записуємо в перші три рядки (стовпці 3-6) таблиці. Підраховуємо контрольні і рядкові суми, які збігаються між собою, і записуємо їх у 7-му і 8-му стовпцях;

2). Усі числа першого рядка, крім рядкової суми (стовпець 8), ділимо на $a_{11} = 2,50$. Результати ділення записуємо в четвертий рядок. Усі проміжні обчислення виконуємо з двома запасними десятковими розрядами. Рядкова сума $1 + 0,376 + 0,144 + 2,7216 = 4,2416$ збігається з контрольною сумою $10,604 : 2,50 = 4,2416$, а це означає, що випадкових помилок немає.

3). Обчислюємо коефіцієнти $a_{ij}^{(1)}$ ($i = 2,3; j = 2,3,4$) системи

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)}, \end{cases}$$

за формулами (3) і записуємо їх у 5-й і 6-й рядки.

Контрольні суми

$$12,345 - 0,87 \cdot 4,2416 = 12,345 - 3,690 = 8,6548,$$

$$12,257 - 0,26 \cdot 4,2416 = 12,257 - 1,103 = 11,1542$$

збігаються з відповідними рядковими сумами:

$$1,9729 + 0,6347 + 6,0472 = 8,6548,$$

$$0,8722 + 2,1126 + 8,1694 = 11,1542,$$

а це означає, що обчислення виконано правильно.

4). Усі числа рядка 5, крім числа, що стоїть у 8-му стовпці, ділимо на $a_{22}^{(1)} = 1,9729$, і результати записуємо в 7-й рядок. Контрольна сума дорівнює $8,6548 : 1,9729 = 4,3868$, і вона збігається з рядковою сумою $1 + 0,3217 + 3,0651 = 4,3868$.

5). Коефіцієнт $a_{ij}^{(2)} (i=3; j=3,4)$ рівняння $a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}$ обчислюємо за формулами (4) і записуємо у 8-й рядок. Контрольна сума

$$11,1542 - 4,3868 \cdot 0,8722 = 7,3280$$

збігається з рядковою

$$1,8320 + 5,4960 = 7,3280.$$

6). Зворотний хід виконуємо за формулами (5). При цьому використовуються 8-й, 7-й і 4-й рядки.

З 8-го рядка дістаємо:

$$x_3 = 5,4960 : 1,8320 = 3,0000$$

$$\overline{x_3} = 7,3280 : 1,8320 = 4,0000$$

З 7-го рядка маємо:

$$x_2 = 3,0651 - 0,3217 \cdot 3 = 2,1000$$

$$\overline{x_2} = 4,3868 - 0,3217 \cdot 4 = 3,1000$$

Нарешті, з 4-го рядка знаходимо:

$$x_1 = 2,7216 - 0,144 \cdot 3 - 0,376 \cdot 2,1 = 1,5000$$

$$\overline{x_1} = 4,2416 - 0,144 \cdot 4 - 0,376 \cdot 3,1 = 2,5000$$

Обчислення можна подати у вигляді такої таблиці:

Крок	Рядок	Коефіцієнти при невідомих (x_1, x_2, x_3)			Вільні члени	Σ (контр. сума)	Σ' (рядкова сума)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2,50	0,94	0,36	6,804	10,604	10,604
	2	0,87	2,30	0,76	8,415	12,345	12,345
	3	0,26	0,97	2,15	8,877	12,257	12,257
2	4	1	0,376	0,144	2,7216	4,2416	4,2416
	5		1,9729	0,6347	6,0472	8,6548	8,6548
	6		0,8722	2,1126	8,1694	11,1542	11,1542
3	7		1	0,3217	3,0651	4,3868	4,3868
	8			1,8320	5,4960	7,3280	7,3280
4	9			1	3,0000	4,0000	4,0000
	10		1		2,1000	3,1000	3,1000
	11	1			1,5000	2,5000	2,5000

Обчислені значення x_j і $\overline{x_j}$ зв'язані між собою співвідношенням $\overline{x_j} = x_j + 1 (j=1,2,3)$, що свідчить про відсутність випадкових обчислювальних помилок.

Отже вектор розв'язку має вигляд: $\{1,5000; 2,1000; 3,0000\}$.

Завдання 2. Для СЛАР виду

$$\begin{cases} 2,50x_1 + 0,94x_2 + 0,36x_3 = 6,804 \\ 0,87x_1 + 2,30x_2 + 0,76x_3 = 8,415 \\ 0,26x_1 + 0,97x_2 + 2,15x_3 = 8,877 \end{cases}$$

відшукати її розв'язок одним із способів послідовного виключення змінних: методом Гаусса з вибором ведучого елемента або методом Жордано-Гаусса.

Розв'язування.

З розв'язку задачі 1 дана СЛАР є сумісною, має єдиний розв'язок, добре обумовлена. Запишемо систему в матричному виді: $A \cdot X = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2,5 & 0,94 & 0,36 \\ 0,87 & 2,30 & 0,76 \\ 0,26 & 0,97 & 2,15 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6,804 \\ 8,415 \\ 8,877 \end{pmatrix}$$

Рівносильними перетвореннями методом Жордано-Гаусса (спочатку за допомогою першого рівняння виключається x_1 із усіх наступних рівнянь, потім за допомогою другого рівняння виключається x_2 з наступних і т.д.) приводимо до виду (6):

Крок	Коефіцієнти при змінних			Вільні члени
1	2,5	0,94	0,36	6,804
	0,87	2,3	0,76	8,415
	0,26	0,97	2,15	8,877
2	1	0,376	0,144	2,722
	0	1,973	0,635	6,047
	0	0,872	2,113	8,169
3	1	0	0,023	1,569
	0	1	0,32	3,07
	0	0	1,83	5,50
4	1	0	0	1,50
	0	1	0	2,10
	0	0	1	3,00

Виконуючи зворотній хід, отримаємо вектор розв'язку СЛАР:
 $x_i = \{1,5; 2,1; 3\}$, $i = 1, 2, 3$.

Безпосередньою підстановкою значень $x_i = \{1,5; 2,1; 3\}$, $i = 1, 2, 3$ у вихідну систему переконуємось, що її розв'язано точно.

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення СЛАР? Що означає "розв'язати СЛАР"?
2. У чому суть арифметичних методів розв'язання СЛАР? Перерахуйте такі методи. У чому сутність методу Гаусса розв'язування СЛАР?

Лабораторна робота №5

Тема: Метод прогонки для розв'язування тридіагональних СЛАР.

Мета: Знайти корені СЛАР із тридіагональною матрицею коефіцієнтів.

Завдання

Знайти розв'язок СЛАР із три діагональною матрицею коефіцієнтів.

Теоретичні відомості

Нехай задано СЛАР з *тридіагональною матрицею* коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1),$$

де $b_1 = b_n = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Загальна схема методу прогонки:

1. Визначаємо розмірність матриці – N . Згідно із співвідношеннями обчислюємо значення коефіцієнтів $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ (прямий хід):

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -a_n \\ \beta_{n-1} &= f_n \end{aligned} \quad (2)$$

2. За рекурентними формулами обчислюємо

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1} &= -\frac{a_i}{b_i + c_i \cdot \alpha_i}, \text{ де } i = \overline{n-1, 1} \\ \beta_{i-1} &= \frac{f_i - c_i \cdot \beta_i}{b_i + c_i \cdot \alpha_i} \end{aligned} \quad (3)$$

3. За формулою обчислюємо початкову компоненту розв'язку системи (зворотній хід):

$$x_1 = \frac{f_1 - \beta_1 \cdot c_1}{1 + \alpha_1 \cdot c_1} \quad (4)$$

4. За рекурентними формулами на основі коефіцієнтів α_i, β_i обчислюємо решту компонентів розв'язку:

$$x_i = \alpha_{i-1} \cdot x_{i-1} + \beta_{i-1}, i = \overline{2, n} \quad (5)$$

Хід роботи

Завдання 1. Знайти розв'язок СЛАР із три діагональною матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Розв'язування.

Запишемо систему в матричному виді -
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Розмірність матриці – $N=4$; згідно формул (2), отримаємо:

$$\alpha_3 = -a_4 = -3$$

$$\beta_3 = f_4 = 5.$$

2. За рекурентними формулами (3), матимемо для всіх $i=\overline{3,1}$:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{a_3}{b_3 + c_3 \cdot \alpha_3} = 0,13 \\ \beta_2 = \frac{f_3 - c_3 \cdot \beta_3}{b_3 + c_3 \cdot \alpha_3} = 0,73 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{a_2}{b_2 + c_2 \cdot \alpha_2} = 0,52 \\ \beta_1 = \frac{f_2 - c_2 \cdot \beta_2}{b_2 + c_2 \cdot \alpha_2} = 1,48. \end{cases}$$

3. Значення першої компоненти розв'язку обчислимо за формулою (4)–

$$x_1 = \frac{f_1 - c_1 \cdot \beta_1}{1 + c_1 \cdot \alpha_1} = 1.$$

4. За формулами (5) решта компонентів розв'язку будуть мати такі значення:

$$x_2 = \alpha_1 \cdot x_1 + \beta_1 = 0,52 \cdot 1 + 1,48 = 2$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2.$$

Отже, розв'язок системи - $X = \{1; 2; 1; 2\}$

Контрольні питання

1. Для яких систем використовують розв'язування методом прогонки?
2. В чому сутність даного методу?

Лабораторна робота №6

Тема: Застосування методу Гаусса для розв'язування задач лінійної алгебри.

Мета: Знайти обернену матрицю до даної, визначник її; розв'язати СЛАР матричним методом.

Завдання

1. Встановити невинродженість та обумовленість заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (дивись лабораторну роботу № 4).
2. У випадку невинродженості матриці коефіцієнтів обчислити обернену матрицю методом Гаусса за схемою єдиного ділення.
3. Знайти розв'язок даної СЛАР матричним методом, порівняти отримані результати з результатами методу Гаусса з вибором ведучого елемента та із результатами методу Жордано-Гаусса.
4. Для матричного методу вивести вектор розв'язку та величину нев'язки (значення різниць між вільними членами вихідної системи лінійних рівнянь і результатами підстановки обчисленого вектор – розв'язку в СЛАР). Порівняти результати, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Визначник невинродженої матриці дорівнює добутку діагональних елементів у прямому ході методу Гаусса:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(1n-1)}. \quad (1)$$

При використанні методу Гаусса з обранням ведучого елемента значення визначника слід помножити на $(-1)^S$, де S - кількість перестановок місцями рядків і стовпців матриці A при її перетворенні до трикутної форми:

$$\det(A) = (-1)^S \cdot a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(1n-1)}. \quad (2)$$

Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1. сформуємо розширену матрицю, додаючи до заданої матриці справа одиничну матрицю того самого розміру:

$$A^* = [A \ E] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

2. перетворюємо таку розширену матрицю згідно методу повного виключення Гаусса; в результаті одержимо матрицю:

$$A_{(n-1)}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nn}^* \end{bmatrix};$$

3. права половина одержаної матриці – обернена матриця.

Розв'язок СЛАР матричним способом отримуємо при множенні оберненої матриці на матрицю вільних членів В: $X = A^{-1} \cdot B$

Хід роботи

Завдання 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2,50 & 0,940 & 0,36 \\ 0,870 & 2,30 & 0,76 \\ 0,260 & 0,970 & 2,150 \end{pmatrix}$$

якщо елементи матриці A — точні числа.

Розв'язування.

Елементи оберненої матриці обчислимо методом Гаусса за схемою єдиного ділення. Таблиця має три стовпці вільних членів, елементи оберненої матриці A^{-1} розміщено в тих самих стовпцях трьох останніх рядків, але в зворотному порядку: перший рядок оберненої матриці записано в 11-му рядку таблиці, другий — у 10-му і третій — у 9-му.

Крок	Рядки	Коефіцієнти основної матриці			Вільні члени			Контрольна сума	Рядкова сума
1	1	2,50	0,94	0,36	1	0	0	4,38	4,38
	2	0,87	2,30	0,76	0	1	0	4,93	4,93
	3	0,26	0,97	2,15	0	0	1	4,38	4,38
2	4	1	0,376	0,144	0,4	0	0	1,92	1,92
	5		1,9729	0,6347	-0,348	1	0	3,2596	3,2596
	6		0,8722	2,1126	-0,104	0	1	3,8808	3,8808
3	7		1	0,3217	-0,176	0,507	0	0,6527	0,6527
	8			1,8320	0,050	-0,442	1	2,44	2,44
4	9			1	0,027	-0,241	0,546	0,332	0,332
	10		1		-0,185	-0,585	-0,176	-0,946	-0,946
	11	1			0,466	-0,185	-0,013	0,268	0,268

Отже, обернена матриця має такий вигляд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,466 & -0,185 & -0,013 \\ -0,185 & 0,585 & -0,176 \\ 0,027 & -0,241 & 0,546 \end{pmatrix}$$

Щоб дістати уявлення про те, з якою точністю обчислено обернену матрицю, треба провести заключний контроль.

Обчислимо добуток матриці A та оберненої до неї A^{-1} , отримаємо:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{pmatrix}$$

Звідси видно, що елементи оберненої матриці обчислено точно.

Іноді, внаслідок округлення елементи оберненої матриці визначаються не точно. В обчислювальній математиці використовують алгоритми для виправлення (уточнення) елементів наближеної оберненої матриці.

Завдання 2. Знайти розв'язок даної СЛАР матричним методом:

$$\begin{cases} 2,50x_1 + 0,94x_2 + 0,36x_3 = 6,804 \\ 0,87x_1 + 2,30x_2 + 0,76x_3 = 8,415 \\ 0,26x_1 + 0,97x_2 + 2,15x_3 = 8,877 \end{cases}$$

Розв'язування.

Розв'язок СЛАР матричним способом отримаємо при множенні оберненої матриці на матрицю вільних членів B : $X = A^{-1} \cdot B$.

Використовуючи значення оберненої матриці, знайденої в задачі 1, обчислення в електронному процесорі MS Excel мають такий вигляд:

Матричний метод				
A^{-1}			B	X
0,466	-0,185	-0,013	6,804	1,500
-0,185	0,585	-0,176	8,415	2,100
0,027	-0,241	0,546	8,877	3,000

Отже, розв'язання даної СЛАР матричним способом більш точні результати, ніж арифметичні методи Гаусса та Жордано – Гаусса, хоча вимагає більшу кількість елементарних операцій над матрицею коефіцієнтів та одиничною матрицею.

Контрольні питання

1. Які методи розв'язку СЛАР вам відомі?
2. Які модифікації методу Гаусса ви можете назвати?
3. Як найраціональніше побудувати процес обчислення визначника матриці високого порядку? оберненої матриці високого порядку?

Лабораторна робота №7

Тема: Ітераційні методи розв'язування СЛАР. Методи Якобі, Зейделя.

Мета: Знайти розв’язок СЛАР методом послідовних наближень із заданою точністю.

Завдання

1. Встановити невідродженість та обумовленість заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (дивись лабораторну роботу № 4). Перевірити виконання достатніх умов збіжності методу простої ітерації для СЛАР.
2. У випадку обумовленості системи рівнянь та виконання умов збіжності ітераційного процесу відшукати наближений розв'язок методом Якобі та методом Зейделя із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.
3. Для кожного методу вивести кількість ітерацій необхідних для досягнення заданої точності розв'язку, вектор розв'язку та величину нев'язки (значення різниць між вільними членами вихідної системи лінійних рівнянь і результатами підстановки обчисленого вектор – розв'язку в СЛАР). Порівняти результати, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Ітераційні методи – це методи, що дозволяють одержати розв’язок системи з заданою точністю шляхом ітераційних процесів, що збігаються, (метод простої ітерації - Якобі, метод Зейделя й ін.).

Метод Якобі.

Задано систему n – лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Припускаючи, що діагональні коефіцієнти $a_{ii} \neq 0, (i=1,2,\dots,n)$, зведемо СЛАР до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \quad (2),$$

$$\text{де } \beta_i = \frac{b_i}{a_{ij}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}; \quad i \neq j.$$

Формули ітераційного процесу методу Якобі –

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} = 0; \quad i = 1, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3).$$

Достатні умови збіжності методу ітерацій.

Теорема. Якщо матриця α така, що задовольняє хоч одну з умов

$$\begin{aligned} 1) \|\alpha\|_m &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \text{ (} m\text{-норма або невизначена норма)} \text{ або} \\ 2) \|\alpha\|_l &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \text{ (} l\text{-норма або норма } L1) \text{ або} \\ 3) \|\alpha\|_k &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1 \text{ (} k\text{-норма або Евклідова норма),} \end{aligned} \quad (4)$$

то система рівнянь (2) має єдиний розв'язок: $x = \{x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*\}$. Цей розв'язок є границею послідовності, знайденої методом простої ітерації за схемою (3), виходячи з початкового наближення: $x^{(0)} = \{x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \dots; x_n^{(0)}\}$.

На практиці часто за початкове наближення беруть стовпчик вільних членів $x^{(0)} = \beta$.

Наслідок. Послідовність, побудована за формулами (3) буде збіжною до єдиного розв'язку системи (1), якщо:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ або } |a_{jj}| > \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

тобто збіжність має місце, якщо модулі діагональних елементів матриці A системи або для кожного рядка перевищують суму модулів недіагональних елементів цього рядка, або ж для кожного стовпця перевищують суму модулів недіагональних елементів цього стовпця (має місце **діагональна перевага**).

Метод Зейделя

Метод являє собою модифікацію методу ітерацій – при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомої x_i враховуються вже обчислені раніше $(k+1)$ -е наближення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Формули ітераційного процесу методу Зейделя:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} = 0; i=1, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (5).$$

Хід роботи

Завдання 1. Встановити невинродженість та обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2,50x_1 + 0,94x_2 + 0,36x_3 = 6,804 \\ 0,87x_1 + 2,30x_2 + 0,76x_3 = 8,415. \\ 0,26x_1 + 0,97x_2 + 2,15x_3 = 8,877 \end{cases}$$

Перевірити виконання достатніх умов збіжності методу простої ітерації для СЛАР. У випадку обумовленості системи рівнянь та виконання умов збіжності ітераційного процесу відшукати наближений розв'язок методом Якобі та методом Зейделя із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

Питання встановлення невинродженості та обумовленості даної СЛАР встановлено в лабораторній роботі № 4. Перевіримо виконання достатніх умов збіжності (5) для методу простої ітерації:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|, \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|, \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|, \\ |a_{44}| &> |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|. \end{aligned}$$

Модулі діагональних елементів матриці A для кожного рядка перевищують суму модулів недиагональних елементів цього рядка, отже має місце діагональна перевага.

Запишемо рівняння в нормальному виді:

$$\begin{cases} x_1 = 2,72 - 0,38x_2 - 0,14x_3 \\ x_2 = 3,66 - 0,38x_1 - 0,33x_3 \\ x_3 = 4,13 - 0,45x_2 - 0,12x_1. \end{cases}$$

Для даної системи перевіримо одну з умов (4), а саме умову (4, а):

$$\sum_{j=1}^2 |a_{1j}| = 0,52; \quad \sum_{j=1}^2 |a_{2j}| = 0,71; \quad \sum_{j=1}^2 |a_{3j}| = 0,57,$$

$$\text{отже, } \|\alpha_m\| = \max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^2 |a_{ij}| = 0,71 < 1.$$

Процес ітерацій закінчуватиметься, якщо

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq 0,001.$$

Метод простої ітерації (Якобі).

Виберемо початкове наближення $x_i^{(0)} = \beta_i (i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 2,72 \\ x_2^{(0)} = 3,66 \\ x_3^{(0)} = 4,13 \end{cases}$$

Обчислимо наступні наближення через попередні згідно формул (3):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 - \alpha_{12}x_2^{(0)} - \alpha_{13}x_3^{(0)} = 2,72 - 0,38 \cdot 3,66 - 0,14 \cdot 4,13 = 0,752 \\ x_2^{(1)} = \beta_2 - \alpha_{21}x_1^{(0)} - \alpha_{23}x_3^{(0)} = 1,268 \\ x_3^{(1)} = \beta_3 - \alpha_{31}x_1^{(0)} - \alpha_{32}x_2^{(0)} = 2,149 \end{cases}$$

Результати обчислень подано в таблиці:

Метод простої ітерації (Якобі)				
Ітерації	$x_i^{(k)} (i=1,2,3)$			$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \leq 0,001$
0	2,722	3,659	4,129	
1	0,752	1,268	2,149	
2	1,936	2,666	3,466	
...	...			...
18	1,500	2,103	3,000	
19	1,500	2,102	2,999	Корені

Умова $\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq 0,001$ для знайдених та наступних наближень через попередні x_i справджується на 20-тій ітерації.

Отриманий вектор розв'язку має вигляд: $x_i = \{1,500; 2,102; 2,999\}, i = 1, 2, 3$

Метод Зейделя

Запишемо рівняння в нормальному виді:

$$\begin{cases} x_1 = 0,6804 + 0,75x_1 - 0,094x_2 - 0,036x_3 \\ x_2 = 0,8415 + 0,77x_2 - 0,087x_1 - 0,076x_3 \\ x_3 = 0,8877 + 0,785x_3 - 0,026x_1 - 0,097x_2 \end{cases}$$

За формулами (5) виберемо початкове наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0,6804 \\ x_2^{(0)} = 0,8415 \\ x_3^{(0)} = 0,8877 \end{cases}$$

Далі обчислення виконуємо за схемою (5), процес знаходження розв'язків має вигляд:

Ітерації	$x_i^{(k)} (i=1,2,3)$			$\max_{1 \leq i \leq 3} x^{(k)}_i - x^{(k-1)}_i \leq 0,001$
0	0,680	0,842	0,888	
1	1,080	1,363	1,485	
2	1,309	1,684	1,893	
...	...			...
35	1,499	2,103	2,997	
36	1,499	2,102	2,998	Корені

Умова $\max_{1 \leq i \leq 3} |x^{(k)}_i - x^{(k-1)}_i| \leq 0,001$ для знайдених та наступних наближень через попередні x_i справджується на 37-й ітерації.

Отриманий вектор розв'язку має вигляд: $x_i = \{1,499; 2,102; 2,998\}, i = 1, 2, 3$

Завдання 2. Порівняти отримані результати із методами Гаусса, Жордано-Гаусса, матричним.

Розв'язування.

Методом Жордано-Гаусса, матричним методом отримано такі розв'язки:

$$x_i = \{1,5; 2,1; 3\}, i = 1, 2, 3.$$

Ітераційним методом Якобі виконано 19 операцій, отримані розв'язки –

$$x_i = \{1,500; 2,102; 2,999\}, i = 1, 2, 3.$$

Методом Зейделя – 36 ітерацій, отримані розв'язки –

$$x_i = \{1,499; 2,102; 2,998\}, i = 1, 2, 3.$$

Часто метод Зейделя збігається швидше ніж метод простої ітерації, але в нашому випадку метод Якобі виявився більш швидким.

Контрольні питання:

1. Які методи розв'язування СЛАР вам відомі?
2. У яких випадках необхідно використовувати ітераційні методи?
3. Сформулювати достатні умови збіжності методу ітерацій.

Лабораторна робота №8

Тема: Інтерполяція функцій многочленами Лагранжа.

Мета: Побудувати наближаючу функцію у вигляді многочлена Лагранжа; оцінити похибку наближення.

Завдання

1. Для функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (дивись лабораторну роботу № 1) провести табуляцію $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $n=10$ на проміжку задання по двох системах вузлів: по системі рівновіддалених вузлів із $N+1$ точки $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$; по системі вузлів – коренів поліномів Чебишева 2-го роду порядку $N+1$.
2. Побудувати інтерполяційні многочлени Лагранжа для таблично заданої функції по різних системах вузлів. Знайти наближене значення функції в точці, значення якої вводиться з клавіатури ($x \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$). Обчислити значення функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ в точці $x \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$, вивести нев'язку.
3. Оцінити абсолютну похибку наближення інтерполяційних многочленів Лагранжа відносно заданої функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ у серединних точках між вузлами інтерполяції; порівняти розподіл похибки інтерполяції для різних систем вузлів.
4. Використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа, обчислити значення функції в точці $x' = x_0 + 0,01$ (дивись завдання tabl_3), використовуючи схему обчислень.

Теоретичні відомості

Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Нехай у точках x_i ($i=0, 1, \dots, n$) ($x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$) з відрізка $[a, b]$ задано значення функції $y = f(x)$: $y_i = f(x_i)$. Треба побудувати многочлен $L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ (степеня не вищого за n), який у вузлах x_i ($i=0, 1, \dots, n$) набуває тих самих значень, що і функція $y = f(x)$, тобто $L_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$).

Інтерполяційний многочлен Лагранжа має вигляд

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i \quad (1)$$

або

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}, \quad (2)$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n), i = \overline{0, n}.$$

Наближену рівність $f(x) \approx L_n(x)$ називають інтерполяційною формулою Лагранжа.

Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа.

Залишковий член інтерполяційної формули Лагранжа, або похибка інтерполювання

$$R_n(f, x) = f(x) - L_n(x) \quad (3)$$

дорівнюватиме нулю лише у вузлах інтерполяції x_i ($i=0, \dots, n$), а в інших точках відрізка $[a; b]$ вона відмінна від тотожного нуля.

Теорема (оцінка залишкового члена многочлена Лагранжа).

Якщо вузли інтерполювання x_i ($i=0, 1, \dots, n$) різні і належать відрітку $[a; b]$, а функція $f(x)$ диференційована $n+1$ раз на відрітку $[a; b]$, то для будь-якої точки $x \in [a; b]$ існує така точка $\xi \in (a; b)$, що для похибки інтерполювання справедлива

$$\text{рівність } R_n(f, x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Якщо $M_{n+1} = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$, то для абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа дістаємо таку оцінку:

$$|R_n(f, x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (4)$$

Зменшити величину абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа можна таким вибором вузлів інтерполювання, за якого множник $|\omega_{n+1}(x)|$ набуває найменшого максимального значення на відрітку $x \in [a; b]$. П. Л. Чебишев довів, що величина $\max_{x \in [a; b]} |\omega_{n+1}(x)|$ має найменше значення, якщо вузлами інтерполювання є числа

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_k, \text{ де } \xi_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

— нулі многочлена Чебишева $T_{n+1}(t) = \cos(n+1) \arccos(t)$. Вони дійсні, різні, належать в інтервалі $(-1; 1)$ і згущуються біля кінців інтервалу. Доведено, що за

такого вибору вузлів інтерполювання $|\omega_{n+1}(x)| \leq 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}$

Хід роботи

Завдання 1. Для функції $x^3 - 2x - 5 = 0$ провести табуляцію $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $n = 10$ на інтервалі задання по двох системах вузлів: по системі рівновіддалених вузлів із $N+1$ точки $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$; по системі вузлів – коренів поліномів Чебишева 2-го роду порядку $N+1$.

Розв'язування.

За результатами лабораторної роботи №1 функція $f(x) = x^3 - 2x - 5$ задана на проміжку $[2; 3]$, кількість точок розбиття – $N+1=11$, крок розбиття:

$$h = \frac{b-a}{n} = 0,1.$$

Табуляцію по рівновіддалених вузлах можна подати у вигляді таблиці:

i	x_i	y_i
0	2,00	-1,00
1	2,10	0,06
2	2,20	1,25
3	2,30	2,57
4	2,40	4,02
5	2,50	5,63
6	2,60	7,38
7	2,70	9,28
8	2,80	11,35
9	2,90	13,59
10	3,00	16,00

Для того, щоб функцію $f(x) = x^3 - 2x - 5$ протабулювати на проміжку $[2; 3]$ поліномами Чебишева, скористаємось формулами (5):

$$x_0 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)}{2(n+1)} \cdot \pi = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot (10+1)} \cdot \pi = 2,99$$

$$x_1 = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{(2 \cdot 1 + 1)}{22} \cdot \pi = 2,95$$

$$x_2 = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{(2 \cdot 2 + 1)}{22} \cdot \pi = 2,85$$

$$x_3 = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{(2 \cdot 3 + 1)}{22} \cdot \pi = 2,73$$

...

$$x_9 = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{(2 \cdot 9 + 1)}{22} \cdot \pi = 2,01$$

$$x_{10} = 2,5 + 0,5 \cdot \cos \frac{(2 \cdot 10 + 1)}{22} \cdot \pi = 2,006$$

Отримані результати подамо у вигляді таблиці:

i	x_i	y_i
0	2,99	15,85
1	2,95	14,67
2	2,85	12,53
3	2,73	9,83
4	2,58	6,99
5	2,42	4,37
6	2,27	2,20
7	2,15	0,60
8	2,05	-0,43
9	2,01	-0,94
10	2,006	-0,94

На відміну від табуляції по системі рівновіддалених вузлів значення вузлових точок будуються починаючи від правого кінця відрізка.

Завдання 2. Побудувати інтерполяційні многочлени Лагранжа для таблично заданої функції по різних системах вузлів. Знайти наближене значення функції в точці, значення якої вводиться з клавіатури.

Розв'язування.

Фрагмент програми обчислення многочлена Лагранжа в точці x_1 , значення якої задається з клавіатури, написаної мовою програмування Turbo Pascal 7.0.:

```
{блок табулювання функції}
write('Многочлен Лагранжа - ');
S:=0;
for i:=0 to n do
    begin
        U:=1;
        for j:=0 to N do if i<>j then U:=U·(x1-x[j])/(x[i]-x[j]);
        S:=S+U·f(x[i]); {обчислення многочлена}
    end;
write('X=',x1:3:2,' ');
writeln('Значення многочлена =',S:3:2);
writeln('Значення функції =',f(x1):3:2);
```

Завдання 3. Оцінити абсолютну похибку наближення інтерполяційних многочленів Лагранжа відносно заданої функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ в серединних точках між вузлами інтерполяції; порівняти розподіл похибки інтерполяції для різних систем вузлів.

Розв'язування.

Оцінка похибки наближення в серединних точках $x_{сер} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ на кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ полягає в знаходженні значення різниці функції в та многочлена Лагранжа в цих точках згідно означення залишкового члена – (3).

Фрагмент програми оцінки похибки (МП TP 7.0.):

```
writeln('Оцінка похибки в серединних точках:');
k:=0;
while k<=n-1 do
    begin
        ser:=(x[k+1]+x[k])/2; {обчислення серединної точки між вузлами інтерполяції}
        S:=0;
        for i:=0 to n do
            begin
                U:=1;
                for j:=0 to N do if i<>j then U:=U·(ser-x[j])/(x[i]-x[j]);
                S:=S+U·f(x[i]); {обчислення многочлена Лагранжа
                                                                    в серединній точці}
```

```

end;
s1:=f(ser);
writeln('y[,ser:3:2,]=' ,s1:3:5,' L[,ser:3:2,]=' ,s:3:5,'
      y[,ser:3:2,]- L[,ser:3:2,]=' ,abs(s-s1):3:7);
k:=k+1
end;

```

Для системи рівновіддалених відрізків маємо такі результати виконання програми оцінки похибки в серединних точках:

```

serednya tochka=2.05  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.15  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.25  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.35  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.45  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.55  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.65  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.75  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.85  pohibka=0.0000000001
serednya tochka=2.95  pohibka=0.0000000002

```

Для системи відрізків побудованих за значеннями коренів поліномів Чебишева:

```

serednya tochka=2.97  pohibka=0.0000000001
serednya tochka=2.92  pohibka=0.0000000001
serednya tochka=2.82  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.71  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.57  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.43  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.29  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.18  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.08  pohibka=0.0000000000
serednya tochka=2.03  pohibka=0.0000000000

```

Як видно, відхилення в обчисленнях співпадають, накопичуються на кінцях інтервалу, маємо високу точність результату. Для серединних точок на відрізках інтерполювання точність наближення значно вища, ніж для крайніх, похибка накопичується біля кінцевих точок інтервалу розбиття.

Завдання 4. Використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа, обчислити значення функції в точці $x_i = a + 0,01$.

Розв'язування.

Оскільки треба обчислити значення інтерполяційного многочлена Лагранжа лише в одній точці, то немає потреби будувати многочлен в явному вигляді. Тому виконаємо обчислення за обчислювальною схемою. В результаті дістанемо таблицю:

i	x_i	Різниці $x - x_i, x_i - x_j \ (i \neq j)$							$\frac{y_i}{P_i}$
0	2,00	0,01	-0,10	-0,20	...	-0,80	-0,90	-1,00	-275573,19
1	2,10	0,10	-0,09	-0,10	...	-0,70	-0,80	-0,90	18677,74
2	2,20	0,20	0,10	-0,19	...	-0,60	-0,70	-0,80	-814536,34
3	2,30	0,30	0,20	0,10	...	-0,50	-0,60	-0,70	2927157,45
4	2,40	0,40	0,30	0,20	...	-0,40	-0,50	-0,60	-5971035,14
5	2,50	0,50	0,40	0,30	...	-0,30	-0,40	-0,50	7971938,78
6	2,60	0,60	0,50	0,40	...	-0,20	-0,30	-0,40	-7234777,15
7	2,70	0,70	0,60	0,50	...	-0,10	-0,20	-0,30	4448949,47
8	2,80	0,80	0,70	0,60	...	-0,79	-0,10	-0,20	-1781946,96
9	2,90	0,90	0,80	0,70	...	0,10	-0,89	-0,10	420760,01
10	3,00	1,00	0,90	0,80	...	0,20	0,10	-0,99	-44537,08
$\omega_{11}(2,01) = 0,0000027$									$S = -334922,41$
$L_{11}(2,01) = -0,90$									

Для оцінки похибки інтерполяції скористаємось означенням залишкового члена – (3):

$$R_{11}(f, x) = f(2,01) - L_{11}(2,01).$$

Отже:

$$f(2,01) = -0,90;$$

$$L_{11}(2,01) = -0,90;$$

$$R_{11}(2,01) = 0$$

Всі десяткові знаки наближеного числа правильні, таку високу точність маємо через високий порядок інтерполяційного многочлена Лагранжа і точка x лежить близько до вузла інтерполявання $x_0 = 2,00$.

Завдання 5. За допомогою формули Лагранжа побудувати інтерполяційний многочлен для функції, що задана наступною таблицею:

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
y_i	10	6	8	5

Обчислити значення многочлена в точці $x=2$.

Розв'язування.

За формулою Лагранжа (1):

$$L_3(x) = 10 \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} + 6 \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} + 8 \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} + 5 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} = \frac{1}{6}(-3x^3 + 32x^2 - 101x + 132)$$

В точці $x=2$ значення ІМЛ набуває вигляду:

$$f(2) = L_3(2) = 5,66666666.$$

Контрольні питання:

1. Що розуміють під "наближенням" функції?
2. Які види наближень існують?
3. Оцінка похибки інтерполювання.

Лабораторна робота №9

Тема: Скінченні різниці та їх властивості.

Мета: Побудувати таблицю скінчених різниць; визначити порядок практично сталих скінчених різниць.

Завдання

1. Для функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (дивись лабораторну роботу № 1) провести табуляцію $y_i = f(x_i)$ на інтервалі задання по системі рівновіддалених вузлів із $N+1$ точки $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0, n}$, $n=10$.
2. Для таблично заданої функції $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a; b]$, $i = \overline{0, n}$ (дивись завдання 1) побудувати таблицю скінчених різниць.
3. Для таблично заданої функції $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a; b]$, $i = \overline{0, n}$ (дивись завдання 1) побудувати таблицю скінчених різниць та визначити порядок практично сталих скінчених різниць із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.

Теоретичні відомості

Нехай $y_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$ - значення функції $y = f(x)$, обчислені для рівновіддалених значень аргументу $x_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$, $x_{i+1} - x_i = h, (i = \overline{0, 1, \dots, n-1})$, де h - крок таблиці.

Величина $y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$ називається *скінченною різницею першого порядку функції $y = f(x)$ в точці x_i з кроком h* .

Скінченна різниця другого порядку в точці x_i визначається рівностями $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$ називаються *скінченими різницями другого порядку*.

Аналогічно

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (1)$$

є *скінченими різницями k -го порядку*.

Скінченні різниці різних порядків розташовують у формі таблиць: горизонтальної (таблиця 1) або діагональної.

Таблиця 1

Горизонтальна таблиця різниць

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					
Σ		$\sum_{i=0}^4 \Delta y_i$	$\sum_{i=0}^3 \Delta^2 y_i$	$\sum_{i=0}^2 \Delta^3 y_i$	$\sum_{i=0}^1 \Delta^4 y_i$	
S	$y_5 - y_0$	$\Delta y_4 - \Delta y_0$	$\Delta^2 y_3 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0 - \Delta^4 y_0$	

Контроль правильності обчислення табличних різниць здійснюють за допомогою двох додаткових рядків – Σ (суми різниць кожного із стовпців) та S (різниці між крайнім (останньою і першою) різницями кожного стовпця). Сума різниць будь-якого стовпця таблиці дорівнює різниці між крайніми різницями попереднього стовпця, тобто

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_i = y_n - y_0, \quad \sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 y_i = \Delta y_{n-1} - \Delta y_0; \quad \sum_{i=0}^{n-3} \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0; \quad \text{і т.д.}$$

Якщо на деякій частині таблиці всі скінченні різниці l -го порядку відрізняються одна від одної не більше як на 2^l одиниць нижчого розряду табличних значень функції, то ці різниці називаються **практично сталими**. Тоді різниці $(l+1)$ -го порядку не треба обчислювати, бо вони складатимуться лише з сумнівних цифр, а тому в межах даної точності вважають, що вони дорівнюють нулю і не беруть їх до уваги.

Хід роботи

Завдання 1. Побудувати діагональну таблицю різниць для функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ з кроком $h = 0,1$.

Розв'язування.

У таблиці подано відповідні значення різниць згідно формули (1):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
2,00	-1,00	1,06100	0,12600	0,00600	0,00000
2,10	0,06	1,18700	0,13200	0,00600	
2,20	1,25	1,31900	0,13800	0,00600	
2,30	2,57	1,45700	0,14400	0,00600	
2,40	4,02	1,60100	0,15000	0,00600	
2,50	5,63	1,75100	0,15600	0,00600	
2,60	7,38	1,90700	0,16200	0,00600	
2,70	9,28	2,06900	0,16800	0,00600	
2,80	11,35	2,23700	0,17400		
2,90	13,59	2,41100			
3,00	16,00				
Σ		17,0000	1,35000	0,04800	0,00000
S	17,0000	1,35000	0,04800	0,00000	

Завдання 2. Для таблично заданої функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ визначити порядок практично сталих скінчених різниць із граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язування.

В даній таблиці різниці 3-го порядку відрізняються одна від одної менш як на $2^3 = 8$ одиниць розряду 10^{-3} тому їх треба вважати практично сталими, а різниці 4-го порядку такими, що дорівнюють нулю. Тому на відрізку $x \in [2; 3]$, функція поводить себе приблизно як многочлен 3-го степеня.

Контрольні питання

1. Що називають скінченими різницями першого порядку? k -го?
2. Як проконтролювати правильність обчислення табличних різниць?
3. Чому дорівнює порядок практично сталих різниць при обчисленнях?

Лабораторна робота №10

Тема: Інтерполяція функцій многочленами Ньютона.

Мета: Побудувати наближаючу функцію у вигляді многочленів Ньютона-1 та Ньютона-2; оцінити похибку наближення.

Завдання

1. Для таблично заданої функції (дивись лабораторну роботу № 9) побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона-1 та Ньютона-2. В якості степеня інтерполяційних многочленів вибрати порядок практично сталих скінчених різниць. Знайти наближене значення функції в точці, значення якої вводиться з клавіатури ($x \neq x_i, i = \overline{0, n}$). Обчислити значення функції $y = f(x), x \in [a; b]$ в точці $x \neq x_i, i = \overline{0, n}$, вивести нев'язку.
2. Оцінити абсолютну похибку наближення інтерполяційних многочленів Ньютона-1 та Ньютона-2 відносно заданої функції $y = f(x)$ у серединних точках між вузлами інтерполяції. Порівняти результати інтерполяції, зробити висновки.

Теоретичні відомості

Нехай $y_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$ - значення функції $y = f(x)$, обчислені для рівновіддалених значень аргументу $x_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$, $x_{i+1} - x_i = h, (i = \overline{0, 1, \dots, n-1})$, де h - крок таблиці.

Перша інтерполяційна формула Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполяції має вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta y_0^2}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \quad (1)$$

де $\Delta^n y_0$ - скінченні різниці n -го порядку в точці x_0 .

На практиці зручно використовувати такий вид інтерполяційних формул Ньютона, ввівши заміну $\frac{x - x_0}{h} = t$ -

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2)$$

Друга інтерполяційна формула Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполяції має вигляд:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta y_{n-1}^2}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1), \quad (3)$$

де $\Delta^n y_n$ - скінченні різниці.

На практиці зручно використовувати такий вид інтерполяційних формул Ньютона, ввівши заміну $\frac{x-x_n}{h}=t$ –

$$P_n(x_n+th)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\dots+\frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4)$$

Оцінка похибки інтерполяційної формули Ньютона-1 та Ньютона-2.

Залишковий член інтерполяційного многочлена Ньютона, або похибка інтерполювання

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) \quad (5)$$

дорівнюватиме нулю лише у вузлах інтерполяції x_i ($i=0, \dots, n$), а в інших точках відрізка $[a; b]$ вона відмінна від тотожного нуля.

Залишковий член інтерполяційної формули Ньютона збігатиметься з залишковим членом Лагранжа, тобто для будь-якої точки $x \in [a; b]$ існує така точка $\xi \in (a; b)$, що

$$R_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Із введенням заміни $t = \frac{x-x_0}{h}$, залишковий член набуває виду:

$$R_n(f, x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) t(t-1)(t-2)\dots(t-n). \quad (6)$$

Якщо $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$, то для абсолютної похибки інтерполяційної

формули **Ньютона 1** дістаємо таку оцінку:

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} |t(t-1)(t-2)\dots(t-n)|. \quad (7)$$

Якщо похідна функції невідома, але є табличні різниці функції до $(n+1)$ -го порядку, то залишковий член ІМН1 виду (1) можна записати:

$$R_n(f, x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)(t-2)\dots(t-n). \quad (8)$$

Якщо $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$, то для абсолютної похибки інтерполяційної

формули **Ньютона 2** дістаємо таку оцінку:

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} |t(t+1)(t+2)\dots(t+n)|. \quad (9)$$

Якщо похідна функції невідома, але є табличні різниці функції до $(n+1)$ -го порядку, то залишковий член ІМН2 виду (9) можна записати:

$$R_n(f, x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} t(t+1)(t+2)\dots(t+n). \quad (10)$$

Хід роботи

Завдання 1. Для таблично заданої функції $y = f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона-1 та Ньютона-2. В якості степеня інтерполяційних многочленів вибрати порядок практично сталих скінчених різниць.

Розв'язування.

За результатами лабораторної роботи №9 порядок практично сталих різниць дорівнює 3 для функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$.

Побудуємо інтерполяційні многочлени Ньютона 1 та 2 у вигляді поліномів степеня 3 –

$$P_{1_3} = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

та

$$P_{2_3}(x) = b_0 + b_1(x - x_3) + b_2(x - x_3)(x - x_2) + b_3(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

Запишемо формули для коефіцієнтів інтерполяційних многочленів Ньютона 1 та 2 для $i=1,3$

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{h^i i!}, (a_0 = y_0)$$

$$b_i = \frac{\Delta^i y_{3-i}}{h^i i!}, (b_0 = y_{10})$$

Враховуючи обчислені скінченні різниці в лабораторній роботі №9, отримаємо:

$$a_0 = y_0 = -1$$

$$b_0 = y_{10} = 16$$

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} = 10,61$$

$$b_1 = \frac{\Delta y_9}{h} = 24,11$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} = 6,3$$

$$b_2 = \frac{\Delta^2 y_8}{2! h^2} = 8,7$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} = 1$$

$$b_3 = \frac{\Delta^3 y_7}{3! h^3} = 1$$

Згідно формул (1) та (3) отримаємо такий вигляд інтерполяційних многочленів (відповідно):

$$P_{1_3}(x) = -1 + 10,61(x - 2) + 6,3(x - 2)(x - 2,1) + (x - 2)(x - 2,1)(x - 2,2) = x^3 - 2x - 5$$

$$P_{2_3}(x) = 16 + 24,11(x - 3) + 8,7(x - 3)(x - 2,9) + (x - 3)(x - 2,9)(x - 2,8) = x^3 - 2x - 5$$

Многочлени мають однаковий вигляд, отже обчислення є правильними.

Завдання 2. За допомогою інтерполяції обчислити $e^{0,15}$, якщо

x_i	0	0,1	0,2
e^{x_i}	1	1,10517	1,22140

Оцінити похибку такого обчислення.

Розв'язування.

Для нашої задачі немає потреби будувати многочлен в явному вигляді, треба лише обчислити його значення в точці $x=0,15$. Значення $x=0,15 \in [0,1;0,2]$ знаходиться в кінці таблиці, тому використовуватимемо другу інтерполяційну формулу Ньютона (4). Позначимо $f(x)=e^x$. Тоді таблиця скінченних різниць для даних має вигляд

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1,0	1,0517	0,553
0,1	1,105187	1,1623	
0,2	1,22140		

Покладемо

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,15 - 0,2}{0,1} = -0,5$$

Тоді за формулою (4), отримаємо

$$P_2(0,15) = y_2 + t\Delta y_1 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0 = 1,2214 + (-0,5)1,1623 + \frac{(-0,5)(-0,5+1)}{2}0,553 = 0,5711.$$

Похибку інтерполяційного многочлена Ньютона 2 оцінюватимемо за формулою (9). Оскільки $M_3 = \max_{0,1 \leq x \leq 0,2} |f^{(3)}(x)| = e^{0,2} = 1,2214$, то

$$|R_2(x; e^x)| \leq \frac{0,1^3}{3!} 1,2214 |(-0,5) \cdot 0,5 \cdot 1,5| = 0,0000763.$$

Отже, оцінка залишкового члена гарантує, що чотири десяткових знаків результату, обчисленого за формулою (4), правильно.

Контрольні питання

1. Що розуміють під "наближенням" функції? Які види наближень існують?
2. В чому полягає інтерполювання за Ньютоном?
3. Похибка інтерполяційної формули Ньютона 1.
4. Коли застосовують кожен з видів інтерполювання?
5. Що розуміють під "екстраполюванням" функції?

Лабораторна робота №11

Тема: Апроксимація функцій многочленами найкращого наближення (МНН). Метод найменших квадратів для побудови МНН.

Мета: Побудувати наближаючу функцію у вигляді многочлена найкращого наближення; оцінити похибку наближення.

Завдання:

1. Для таблично заданої функції (дивись лабораторну роботу № 9) встановити степінь многочлена найкращого наближення (МНН). В якості степеня МНН вибрати порядок практично сталих скінчених різниць.
2. Побудувати наближаючу функцію у вигляді многочлена найкращого наближення за методом найменших квадратів. При розв'язуванні СЛАР відносно шуканих коефіцієнтів МНН використовувати арифметичні методи.
3. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ в точці, значення якої вводиться з клавіатури ($x \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$), вивести нев'язку.
4. Оцінити абсолютну похибку наближення многочлена найкращого наближення відносно функції $y = f(x)$ у серединних точках між вузлами задання.

Теоретичні відомості

Нехай $y_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$ - значення функції $y = f(x)$, обчислені для рівновіддалених значень аргументу $x_i (i = \overline{0, 1, \dots, n})$, $x_{i+1} - x_i = h, (i = \overline{0, 1, \dots, n-1})$, де h - крок таблиці. Будемо шукати найкраще наближення функції $y = f(x)$.

Наближаючу функцію будемо у вигляді многочлена:

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (1)$$

Побудова такого многочлена поділяється на два етапи:

1. встановлення степеня;
2. визначення коефіцієнтів.

Побудуємо нову функцію, яку назовемо *функцією нев'язки*:

$$\sigma(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2 \quad (2)$$

За задачею мінімізації такої функції обчислимо коефіцієнти $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, будуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь з $m+1$ - невідомою, та $m+1$ рівнянням:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+0} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+0} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+0} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+0} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+1} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+m} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+m} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+m} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+m} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^m \end{cases}$$

Розв'язавши систему відомими методами (формули Крамера, метод Гауса та ін.), знайдемо коефіцієнти $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ емпіричної формули (1).

Хід роботи

Завдання 1. Для таблично заданої функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ встановити степінь многочлена найкращого наближення. В якості степеня многочлена найкращого наближення вибрати порядок практично сталих скінчених різниць. Побудувати наближаючу функцію за методом найменших квадратів.

Розв'язування.

Для функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ порядок практично сталих скінчених різниць, а також і степінь МНН дорівнює 3; діагональна таблиця скінчених різниць з кроком $h = 0,1$ має вигляд:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
2,00	-1,00	1,06100	0,12600	0,00600
2,10	0,06	1,18700	0,13200	0,00600
2,20	1,25	1,31900	0,13800	0,00600
2,30	2,57	1,45700	0,14400	0,00600
2,40	4,02	1,60100	0,15000	0,00600
2,50	5,63	1,75100	0,15600	0,00600
2,60	7,38	1,90700	0,16200	0,00600
2,70	9,28	2,06900	0,16800	0,00600
2,80	11,35	2,23700	0,17400	
2,90	13,59	2,41100		
3,00	16,00			
Σ		17,0000	1,35000	0,04800
S	17,0000	1,35000	0,04800	

Апроксимуючий поліном третього порядку будемо за формулою (1):

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Система нормальних рівнянь для отримання значень коефіцієнтів $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ запишеться у виді:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+0} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+0} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+0} + a_3 \sum_{i=0}^n x_i^{3+0} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+1} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+1} + a_3 \sum_{i=0}^n x_i^{3+1} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^1 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+2} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+2} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+2} + a_3 \sum_{i=0}^n x_i^{3+2} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^{0+3} + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{1+3} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{2+3} + a_3 \sum_{i=0}^n x_i^{3+4} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^3 \end{array} \right.$$

У матричній формі СЛАР буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i^1 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^1 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^5 \\ \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^5 & \sum_{i=0}^n x_i^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо окремо:

$$\sum_{i=0}^n x_i, \sum_{i=0}^n x_i^2, \sum_{i=0}^n x_i^3, \sum_{i=0}^n x_i^4, \sum_{i=0}^n x_i^5, \sum_{i=0}^n x_i^6, \sum_{i=0}^n y_i, \sum_{i=0}^n y_i x_i, \sum_{i=0}^n y_i x_i^2, \sum_{i=0}^n y_i x_i^3.$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = 2,0 + 2,1 + 2,2 + 2,3 + 2,4 + 2,5 + 2,6 + 2,7 + 2,8 + 2,9 + 3,0 = 27,50$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 = (2,0)^2 + (2,1)^2 + (2,2)^2 + (2,3)^2 + (2,4)^2 + \dots + (3,0)^2 = 69,85$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^3 = (2,0)^3 + (2,1)^3 + (2,2)^3 + (2,3)^3 + (2,4)^3 + \dots + (3,0)^3 = 180,125$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^4 = (2,0)^4 + (2,1)^4 + (2,2)^4 + (2,3)^4 + (2,4)^4 + \dots + (3,0)^4 = 572365,75$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^5 = (2,0)^5 + \dots + (3,0)^5 = 1248,541$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^6 = 3348,475$$

$$\sum_{i=0}^n y_i = 70,13$$

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i = 193,93$$

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i^2 = 539,04$$

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i^3 = 1505,584$$

Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі і розв'яжемо її:

$$\begin{pmatrix} 11 & 27,5 & 69,85 & 180,125 \\ 27,5 & 69,85 & 180,125 & 471,1333 \\ 69,85 & 180,125 & 471,1333 & 1248,541 \\ 180,125 & 471,1333 & 1248,541 & 3348,475 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,13 \\ 193,93 \\ 539,04 \\ 1505,584 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши систему методом Гаусса отримаємо такі результати:

$$\begin{cases} a_0 = -5 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Апроксимуючий поліном буде мати вигляд:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = x^3 - 2x - 5$$

Контрольні питання

1. Що розуміють під "апроксимуванням" функції? Коли його застосовують?
2. Що таке метод найменших квадратів? Коли його застосовують?
3. Від яких чинників залежить точність апроксимування заданої (таблично) функції?

Лабораторна робота № 12

Тема: Чисельне інтегрування функцій.

Мета: Обчислити означений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ із заданою точністю ε .

Завдання

1. Для функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (дивись таблицю 4) визначити максимальний крок розбиття інтервалу інтегрування при граничній абсолютній похибці $\varepsilon = 0,001$ для квадратурних формул: лівих (правих) прямокутників, центральних прямокутників, трапецій, Сімпсона.
2. Обчислити інтеграл за квадратурними формулами.

Теоретичні відомості

Узагальнені квадратурні формули:

Формула лівих прямокутників та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f_i, \quad |R_1| \leq h \frac{b-a}{2} M_1 = \frac{(b-a)^2}{2n} M_1, \quad (1)$$

де $M_1 = \max_{[a;b]} |f'(x)|$.

Формула правих прямокутників та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f_i, \quad |R_1| \leq h \frac{b-a}{2} M_1 = \frac{(b-a)^2}{2n} M_1, \quad (2)$$

де $M_1 = \max_{[a;b]} |f'(x)|$.

Формула центральних прямокутників та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f_{i-\frac{1}{2}}, \quad |R_2| \leq h^2 \frac{b-a}{24} M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2, \quad (3)$$

де $M_2 = \max_{[a;b]} |f''(x)|$.

Якщо наближене значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ треба обчислити з наперед

заданою точністю ε , необхідно відрізок інтегрування поділити на n рівних відрізків так, щоб виконувались нерівності:

- 1) для лівих (правих) прямокутників –

$$n_1 > \frac{M_1(b-a)^2}{2\varepsilon}, \quad (4)$$

2) для середніх прямокутників –

$$n_2 > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}, \quad (5)$$

а крок розбиття обчислити за формулою $h = \frac{b-a}{n}$.

Формула трапецій та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right), \quad |R_3(f)| \leq h^2 \frac{b-a}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad (6)$$

де $M_2 = \max_{[a;b]} |f''(x)|$.

Формула Сімпсона та оцінка залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1}),$$

$$|R_4(f)| \leq h^4 \frac{b-a}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4, \quad (7)$$

де $M_4 = \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|$.

Якщо наближене значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ треба обчислити з наперед

заданою точністю ε , необхідно відрізок інтегрування поділити на n рівних відрізків так, щоб виконувались нерівності:

1) для формули трапецій –

$$n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}, \quad (8),$$

а крок розбиття обчислити за формулою $h = \frac{b-a}{n}$;

2) для формули Сімпсона –

$$n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{2880\varepsilon}}, \quad (9),$$

а крок розбиття обчислити за формулою $h = \frac{b-a}{2n}$.

Хід роботи

Завдання 1. Для функції $f(x) = e^x + x$ визначити максимальний крок розбиття інтервалу інтегрування при граничній абсолютній похибці $\varepsilon = 0,001$ для квадратурних формул: лівих (правих) прямокутників, центральних прямокутників, трапецій.

Розв'язування.

Обчислимо першу, другу та четверту похідні підінтегральної функції:

$$f'(x) = e^x + 1$$

$$f''(x) = e^x$$

$$f^{(4)} = e^x.$$

Максимальне значення цих похідних – $M_1 = \max_{[0;1]} |f'(x)|$ та $M_2 = \max_{[0;1]} |f''(x)|$:

$$M_1 \approx 3,72$$

$$M_2 = M_4 \approx 2,72$$

Для того, щоб обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x + x) dx$ з точністю $\varepsilon = 0,001$,

обчислимо для квадратурних формул кількість точок розбиття. Отримаємо:

1) для формули лівих (правих) прямокутників за формулою (4) (5)

$$n_1 > \frac{3,72(1-0)^2}{2 \cdot 0,001} = 1860,$$

2) для формули середніх прямокутників за формулою (5)

$$n_2 > \sqrt{\frac{2,72}{24 \cdot 0,001}} \approx 113,$$

3) для формули трапецій за формулою (8)

$$n_3 > \sqrt{\frac{2,72}{12 \cdot 0,001}} \approx 226,$$

4) для формули Сімпсона за формулою (9)

$$n_4 > \sqrt[4]{\frac{2,72}{2880 \cdot 0,001}} \approx 1.$$

Тоді кроки розбиття заданого інтервалу будуть відповідно –

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = 0,0005, \quad h_2 = \frac{b-a}{n_2} = 0,0088, \quad h_3 = \frac{b-a}{n_3} = 0,0044, \quad h_4 = \frac{b-a}{2n_4} = 0,5.$$

Отже, максимальний крок розбиття $h_4 = \frac{b-a}{2n_4} = 0,5$ для формули Сімпсона.

Завдання 2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x + x) dx$ при граничній абсолютній

похибці $\varepsilon = 0,001$ за квадратурними формулами.

Розв'язування.

З попереднього прикладу встановлено кількість кроків розбиття інтервалу інтегрування та відповідно кроки інтегрування.

1) Формула лівих (правих) прямокутників.

Крок розбиття проміжку $[0;1]$ - $h_1 = \frac{b-a}{n_1} = 0,0005$.

Фрагмент обчислення інтеграла за формулою (1) (МП ТР 7.0.) –

```
const N=1860;
var x,y:array [0..n] of real;
    a,b,h,S,Int:real;
    i:integer;
function f(x:real):real;
begin
    f:=exp(x)+x;
end;
begin
    writeln('Інтервал розбиття:');
    readln(a);
    readln(b);
    x[0]:=a; y[0]:=f(x[0]); S:=f(x[0]); h:=(b-a)/N;
    i:=1;
    while i<=N-1 do
    begin
        x[i]:=x[i-1]+h;
        y[i]:=f(x[i]);
        S:=S+y[i];
        i:=i+1;
    end;
    Int:=S*h; {обчислення суми значень}
    writeln('Значення інтеграла =',Int:3:5);
    readln;
end.
```

Результуюче значення інтеграла за узагальненою формулою лівих прямокутників (1)

$$I_{л.п.} = h \sum_{i=0}^{1859} f_i = 2,21755$$

і за узагальненою формулою правих прямокутників (2)

$$I_{n.n.} = h \sum_{i=1}^{1860} f_i = 2,21755$$

Оцінимо абсолютну похибку за формулою (1):

$$|R_1(f)| \leq h \frac{b-a}{2} M_1 \approx 0,00093 \approx 0,001,$$

що відповідає заданій точності.

2) Формула середніх прямокутників

$$\text{Крок розбиття проміжку } [0;1] - h_2 = \frac{b-a}{n_2} = 0,0088.$$

Результуюче значення інтеграла за узагальненою формулою середніх прямокутників (3)

$$I_{c.n.} = h \sum_{i=1}^{113} f_{i-\frac{1}{2}} = 2,20627.$$

Оцінимо абсолютну похибку за формулою (3):

$$|R_2(f)| \leq h^2 \frac{b-a}{24} M_2 \approx 0,000009,$$

що відповідає заданій точності.

3) Формула трапецій

$$\text{Крок розбиття проміжку } [0;1] - h_3 = \frac{b-a}{n_3} = 0,0044.$$

Обчислимо значення підінтегральної функції на кінцях відрізка:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 3,718282 \end{aligned}$$

Результуюче значення інтеграла за узагальненою формулою трапецій (6)

$$I_{mp.} = h \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{i=1}^{225} f_i \right) = 0,0044 \left(\frac{1 + 3,718282}{2} + \sum_{i=1}^{225} f_i \right) = 2,20633.$$

Оцінимо абсолютну похибку за формулою (6):

$$|R_3(f)| \leq h^2 \frac{b-a}{12} M_2 \approx 0,000004,$$

що відповідає заданій точності.

4) Формула Сімпсона

$$\text{Крок розбиття } h_4 = \frac{b-a}{2n_4} = 0,5.$$

Фрагмент обчислення інтеграла за формулою Сімпсона (МП ТР 7.0.) –

const N=1;

var x,y:array [0..n] of real;

```

a,b,h,S,Int:real;
i:integer;
function f(x:real):real;
begin
    f:=exp(x)+x;
end;
begin
writeln('Інтервал:');
    readln(a);
    readln(b);
x[0]:=a; y[0]:=f(x[0]); S:=0; S1:=0; h:=(b-a)/2*N;
i:=1;
    while i<=N do
        begin
            x[i]:=x[i-1]+h;
            y[i]:=f(x[i]);
            i:=i+1
        end;

        for i:=1 to n do s:=s+y[2*i-1]; { обчислення  $\sum_{i=1}^n f_{2i-1}$  }

        for i:=1 to n-1 do s1:=s1+y[2*i]; {  $\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}$  }

Int:=h/3*(f(a)+f(b)+4*S+2*S1);
writeln('Значення інтеграла=',Int:3:5);
readln;
end.

```

Результуюче значення інтеграла за узагальненою формулою Сімпсона (7)

$$I_{C_{1M}} = \frac{0,5}{3} (f(0) + f(1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1}) = 2,21886.$$

Оцінімо абсолютну похибку за формулою (7):

$$|R_4(f)| \leq h^4 \frac{b-a}{180} M_4 \approx 0,00094,$$

що відповідає заданій точності.

Контрольні питання:

1. У чому полягає задача чисельного інтегрування функції?
2. Як вирішується задача відшукування значення похідної від функції, заданої таблично?
3. Які існують найпростіші методи чисельного інтегрування функції? Напишіть формули обчислення інтегралу для цих методів?

Лабораторна робота № 13

Тема: Чисельне диференціювання функцій.

Мета: Обчислити чисельні похідні 1-го та 2-го порядку від таблично заданої функції.

Завдання

1. Для таблично заданої функції (дивись Варіанти завдань) обчислити за різницевиими формулами чисельні похідні 1-го та 2-го порядку у точках визначення.
2. Для таблично заданої функції обчислити за допомогою операції диференціювання інтерполяційного многочлена Лагранжа похідну у точках визначення та у серединних точках між вузлами задання.
3. Оцінити абсолютну похибку чисельного диференціювання функції за допомогою різницевих формул та операції диференціювання інтерполяційного многочлена Лагранжа відносно аналітичної похідної $y' = f'(x)$ у вузлах задання та у серединних точках між вузлами.

Теоретичні відомості

Різницеві формули обчислення похідних 1-го та 2-го порядків:

$$\begin{aligned}y_i^{'+} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} && \text{(правостороння похідна),} \\y_i'^{-} &= \frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} && \text{(лівостороння похідна),} \\y_i' &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)} && \text{(центральна похідна)}\end{aligned} \tag{1}$$

де $h = x_{i+1} - x_i, (i = \overline{0, n-1})$.

Формули чисельного диференціювання, побудовані за першою інтерполяційною формулою Ньютона.

$$\begin{aligned}f'(x_0) &\approx P'_n(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_0) \\f''(x_0) &\approx P''_n(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots + \frac{(-1)^n 2S_{n-1}^{(n-2)}}{n!}\Delta^n y_0)\end{aligned} \tag{2}$$

Формули чисельного диференціювання, побудовані за другою інтерполяційною формулою Ньютона.

$$f'(x_n) \approx P'_n(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{n-4} + \dots + \frac{1}{n}\Delta^n y_0)$$

$$f''(x_n) \approx P''_n(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + \dots + \frac{2S_{n-1}^{(n-2)}}{n!}\Delta^n y_0)$$

(3)

Формули чисельного диференціювання, побудовані за інтерполяційною формулою Лагранжа.

$$f'(x) \approx L'_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^n \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_j)} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n (x - x_j) \right]$$

(3)

Хід роботи

Завдання 1. Для таблично заданої функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ обчислити за різницевиими формулами чисельні похідні першого та другого порядку у точках визначення.

Розв'язання.

Виконуючи обчислення в табличному процесорі Ехсел, з таблиці значень функції та скінчених різниць та різницевих співвідношень (1) отримаємо:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	права $f'(x)$	ліва $f'(x)$	центр $f'(x)$	друга $f''(x)$
2,00	-1,00	1,06100	0,12600	0,00600	10,61			
2,10	0,06	1,18700	0,13200	0,00600	11,87	10,61	11,24	12,6
2,20	1,25	1,31900	0,13800	0,00600	13,19	11,87	12,53	13,2
2,30	2,57	1,45700	0,14400	0,00600	14,57	13,19	13,88	13,8
2,40	4,02	1,60100	0,15000	0,00600	16,01	14,57	15,29	14,4
2,50	5,63	1,75100	0,15600	0,00600	17,51	16,01	16,76	15
2,60	7,38	1,90700	0,16200	0,00600	19,07	17,51	18,29	15,6
2,70	9,28	2,06900	0,16800	0,00600	20,69	19,07	19,88	16,2
2,80	11,35	2,23700	0,17400		22,37	20,69	21,53	16,8
2,90	13,59	2,41100			24,11	22,37	23,24	17,4
3,00	16,00					24,11		
Σ		17,00	1,350	0,048				
S	17,00	1,350	0,048					

Оскільки у випадку лівосторонньої та правосторонньої похідних вони мають 1-й порядок точності відносно h , центральна похідна має 2-й порядок точності, то формула $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)}$ є більш точнішою.

Завдання 2. Для таблично заданої функції $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$, $x \in [2; 3]$ обчислити за різницевиими формулами чисельні похідні 1-го та 2-го порядку у перших двох точках та останньої точки визначення. Перевірити правильність обчисленням

Розв'язування.

Оскільки треті різниці практично сталі, то покладемо $n=3$. Таблиця значень функції та скінчених різниць має вигляд:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
2,00	-1,00	1,06100	0,12600	0,00600	0,00000
2,10	0,06	1,18700	0,13200	0,00600	
2,20	1,25	1,31900	0,13800		
2,30	2,57	1,45700	0,14400		
2,40	4,02	1,60100	0,15000		
2,50	5,63	1,75100	0,15600		
2,60	7,38	1,90700	0,16200		
2,70	9,28	2,06900	0,16800		
2,80	11,35	2,23700	0,17400		
2,90	13,59	2,41100			
3,00	16,00				
Σ		17,00000	1,35000	0,01200	0,00000
S	17,00000	1,35000	0,04800	0,00000	

Точка $x=2,00$ розміщена на початку таблиці, тому першу й другу похідні обчислюємо за формулами (2). В цьому разі $h=0,1$; $x_0=2,00$; $\Delta y_0=1,06100$; $\Delta^2 y_0=0,12600$; $\Delta^3 y_0=0,00600$. Виконавши обчислення, знайдемо:

$$f'(x_0) \approx P'_n(2,00) = \frac{1}{0,1} \left(1,06100 - \frac{1}{2} 0,12600 + \frac{1}{3} 0,006 \right) = 10$$

$$f''(x_0) \approx P''_n(2,00) = \frac{1}{0,1^2} (0,126 - 0,006) = 12$$

Точка $x=2,10$ розміщена також на початку таблиці, тому першу й другу похідні обчислюємо за формулами (2). В цьому разі

$h=0,1$; $x_0=2,10$; $\Delta y_0=1,18700$; $\Delta^2 y_0=0,13200$; $\Delta^3 y_0=0,00600$. Виконавши обчислення, матимемо:

$$f'(x_0) \approx P'_n(2,1) = \frac{1}{0,1}(1,18700 - \frac{1}{2}0,13200 + \frac{1}{3}0,006) = 11,23$$

$$f''(x_0) \approx P''_n(2,10) = \frac{1}{0,1^2}(0,132 - 0,006) = 12,6$$

Похідну в точці $x=3,00$ обчислимо за формулою (3), поклавши $x_n=3,00$; $h=0,1$; $\Delta y_2=2,41100$; $\Delta^2 y_1=0,17400$; $\Delta^3 y_0=0,006$, отримаємо:

$$f'(x_n) \approx P'_n(3) = \frac{1}{0,1}(2,41100 + \frac{1}{2}0,17400 + \frac{1}{3}0,006) = 25$$

$$f''(x_n) \approx P''_n(3) = \frac{1}{0,1^2}(0,174 + 0,006) = 18$$

Значення похідних в точках $x=2,00$, $x=2,10$ та $x=3,00$ обчислені вручну, дорівнюють отриманим значенням, отже наші розрахунки є правильними.

Контрольні питання

1. У чому полягає задача чисельного диференціювання?
2. Як вирішується задача відшукування значення похідної від функції, заданої таблично за різницевиими формулами чисельного диференціювання?
3. Як вирішується задача відшукування значення похідної від функції, заданої таблично за формулами, чисельного диференціювання, побудовані за першою інтерполяційною формулою Ньютона?
4. Як поводить себе похибка при різних варіантах обчислень похідної?

Лабораторна робота № 14

Тема: Наближене розв'язування задач Коші для лінійних ЗДР 1-го порядку. Схеми Ейлера та їх модифікації.

Мета: Побудувати наближений розв'язок задачі Коші для лінійних ЗДР 1-го порядку.

Завдання

1. Користуючись несиметричною схемою Ейлера побудувати наближений розв'язок задачі Коші для лінійного ЗДР 1-го порядку виду $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на системі вузлів $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$, $n = 10$. (дивись таблицю 5).
2. Для задачі Коші (дивись пункт 1) побудувати наближений розв'язок за модифікованою схемою Ейлера.
3. Для задачі Коші (дивись пункт 1) побудувати наближений розв'язок за схемою Ейлера-Коші.
4. Оцінити абсолютну похибку наближених розв'язків за кожною схемою відносно аналітичного розв'язку $y = y(x)$.

Теоретичні відомості

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y = f(x)$ звичайного диференціального рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

яке задовольняє початкову умову

$$y(x) \Big|_{x=x_0} = y_0. \quad (2)$$

Для побудови схем отримання чисельного розв'язку задачі (1) – (2) введемо на промені $[x_0, +\infty)$ систему вузлів $x_0, x_1, \dots$ з фіксованим кроком $h_x = |x_i - x_{i-1}| = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Несиметрична схема Ейлера:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h_x \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_0 &= y_0 \\ x_i &= x_{i-1} + h_x \end{aligned} \quad (3)$$

Модифікована схема Ейлера:

$$\begin{aligned} y_{i-\frac{1}{2}} &= y_{i-1} + \frac{h_x}{2} \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i &= y_{i-1} + h \cdot f\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}}\right) \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + \frac{h_x}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Схема Ейлера-Коші:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h_x \\ \bar{y}_i &= y_{i-1} + h_x f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i &= y_{i-1} + h_x \left(\frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \bar{y}_i)}{2} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

Для оцінки похибки наближеного розв'язку $|\varepsilon_i^*|$ задачі (1) – (2) використовують правило Рунге. Для цього розв'язок задачі у кожній вузловій точці x_i обчислюють двічі: з кроком h та $\frac{h}{2}$. Позначатимемо їх відповідно y_i та y_i^* . Звідси для абсолютної похибки в точці x_i дістаємо таку рівність:

$$|\varepsilon_i^*| = |y_i^* - y(x_i)| = \frac{|y_i - y_i^*|}{2^s - 1}, \quad (6)$$

де s – порядок точності методу.

Оцінку для абсолютної похибки можна подати у вигляді таблиці:

Порядок точності s	Похибка методу $ \varepsilon_i^* $
1	$ y_i - y_i^* $
2	$\frac{1}{3} y_i - y_i^* $
3	$\frac{1}{7} y_i - y_i^* $

Хід роботи

Завдання 1. Користуючись несиметричною схемою Ейлера побудувати наближений розв'язок задачі Коші для лінійного ЗДР 1-го порядку виду $y' = \frac{1}{\cos(x)} - y$ для таких граничних умов $y(0)=1$ на проміжку $[0;0,5]$ за системою вузлів $x_i = x_0 + ih$, $i=0, n$, $n=10$.

Розв'язування.

Крок табулювання обчислимо таким чином:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0,5-0}{10} = 0,05.$$

Позначимо $f(x, y) = \frac{1}{\cos(x)} - y$. Початкові умови – $y(0)=1$.

Ітераційні формули мають вигляд:

$$y_i = y_{i-1} + h_x \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$y_0 = y_0$$

$$x_i = x_{i-1} + h_x$$

$$y_0 = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$y_1 = 1 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0)} - 1 \right) = 1,000000$$

$$x_1 = 0 + 0,05 = 0,05$$

$$y_2 = 1 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,05)} - 1 \right) = 1,000063$$

$$x_2 = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$y_3 = 1,000063 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,1)} - 1,000063 \right) = 1,000310$$

$$x_3 = 0,1 + 0,05 = 0,15$$

$$y_4 = 1,00031 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,15)} - 1,00031 \right) = 1,000863$$

$$x_4 = 0,15 + 0,05 = 0,2$$

...

Результати обчислень подано в таблиці:

<i>i</i>	x_i	y_i
0	0	1
1	0,05	1,000000
2	0,10	1,000063
3	0,15	1,000310
4	0,20	1,000863
5	0,25	1,001837
6	0,30	1,003349
7	0,35	1,005519
8	0,40	1,008470
9	0,45	1,012332
10	0,50	1,017243

Завдання 2. Для задачі Коші $y' = \frac{1}{\cos(x)} - y$, $y(0) = 1$ побудувати наближений

розв'язок за модифікованою схемою Ейлера.

Розв'язування.

Крок табулювання обчислимо таким чином:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0,5-0}{10} = 0,05.$$

Позначимо $f(x, y) = \frac{1}{\cos(x)} - y$. Початкові умови – $y(0) = 1$.

Ітераційні формули мають вигляд:

$$y_{i-\frac{1}{2}} = y_{i-1} + \frac{h_x}{2} \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}})$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h_x}{2}$$

$$y_{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{0,05}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos(0)} - 1 \right) = 1,000000$$

$$x_{\frac{1}{2}} = 0 + \frac{0,05}{2} = 0,025$$

$$y_1 = 1 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,025)} - 1 \right) = 1,000016$$

$$x_1 = 0 + 0,05 = 0,05$$

$$y_{\frac{3}{2}} = 1,000016 + \frac{0,05}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,05)} - 1,000016 \right) = 1,000047$$

$$x_{\frac{3}{2}} = 0,05 + \frac{0,05}{2} = 0,075$$

$$y_2 = 1,000016 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,075)} - 1,000047 \right) = 1,000154$$

$$x_2 = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$y_{\frac{5}{2}} = 1,000154 + \frac{0,05}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,1)} - 1,000154 \right) = 1,000276$$

$$x_{\frac{5}{2}} = 0,1 + \frac{0,05}{2} = 0,125$$

$$y_3 = 1,000154 + 0,05 \cdot \left(\frac{1}{\cos(0,125)} - 1,000276 \right) = 1,000534$$

$$x_3 = 0,1 + 0,05 = 0,15$$

...

За ітераційними формулами (4) результати розрахунків:

i	x_i	y_i	$\frac{x_i}{2}$	y_i
0	0			1
1	0,05	1	0,025	1,000016
2	0,1	1,000047	0,075	1,000154
3	0,15	1,000276	0,125	1,000534
4	0,2	1,000804	0,175	1,001269
5	0,25	1,001746	0,225	1,002475
6	0,3	1,003215	0,275	1,004266
7	0,35	1,005328	0,325	1,006762
8	0,4	1,008206	0,375	1,010085
9	0,45	1,011976	0,425	1,014369
10	0,5	1,016774	0,475	1,019755

Завдання 3. Для задачі Коші $y' = \frac{1}{\cos(x)} - y$, $y(0)=1$ побудувати наближений розв'язок за схемою Ейлера-Коші.

Розв'язування.

Схема методу має вигляд:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h_x \\ \bar{y}_i &= y_{i-1} + h_x f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i &= y_{i-1} + h_x \left(\frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \bar{y}_i)}{2} \right)\end{aligned}$$

$$x_1 = 0 + 0,05 = 0,05$$

$$y_1 = 1 + 0,05 \left(\frac{1}{\cos 0} - 1 \right) = 1$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot \left(\left(\frac{1}{\cos 0} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\cos(0,05)} - 1 \right) \right) = 1,000031$$

$$x_2 = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$y_2 = 1,000031 + 0,05 \left(\frac{1}{\cos(0,05)} - 1,000031 \right) = 1,000092$$

$$y_2 = 1,000031 + \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot \left(\left(\frac{1}{\cos(0,05)} - 1,000031 \right) + \left(\frac{1}{\cos(0,1)} - 1,000092 \right) \right) = 1,000185$$

...

За ітераційними формулами (5) результати обчислень мають вигляд таблиці:

i	x_i	$\overline{y_i}$	y_i
0	0		1
1	0,05	1,000000	1,000031
2	0,1	1,000092	1,000185
3	0,15	1,000427	1,000579
4	0,2	1,001118	1,001329
5	0,25	1,002280	1,002549
6	0,3	1,004026	1,004356
7	0,35	1,006476	1,006867
8	0,4	1,009751	1,010208
9	0,45	1,013983	1,014510
10	0,5	1,019312	1,019916

Зведена таблиця результатів обчислень має вигляд:

<i>Ітерації</i>	x_i	<i>Метод Ейлера</i>	<i>Модифікований метод</i>	<i>Метод Ейлера- Косі</i>
0	0	1	1	1
1	0,05	1,000000	1,000016	1,000031
2	0,10	1,000063	1,000154	1,000185
3	0,15	1,000310	1,000534	1,000579
4	0,20	1,000863	1,001269	1,001329
5	0,25	1,001837	1,002475	1,002549
6	0,30	1,003349	1,004266	1,004356
7	0,35	1,005519	1,006762	1,006867
8	0,40	1,008470	1,010085	1,010208
9	0,45	1,012332	1,014369	1,014510
10	0,50	1,017243	1,019755	1,019916

Звдання 4. Оцінити абсолютну похибку наближених розв'язків за кожною схемою відносно аналітичного розв'язку $y = y(x)$.

Розв'язування.

Результати обчислень задачі за схемою Ейлера з кроками $h=0,05$ та

$\frac{h}{2}=0,025$ подано в таблиці:

i	x_i	y_i	y_i^*	$ y_i - y_i^* $
0	0	1	1,000000	0,000000
1	0,03		1,000000	
2	0,05	1,000000	1,000008	0,000008
3	0,08		1,000039	
4	0,10	1,000063	1,000108	0,000046
5	0,13		1,000231	
6	0,15	1,000310	1,000422	0,000112
7	0,18		1,000695	
8	0,20	1,000863	1,001066	0,000203
9	0,23		1,001548	
10	0,25	1,001837	1,002155	0,000319
11	0,28		1,002904	
12	0,30	1,003349	1,003807	0,000458
13	0,33		1,004881	
14	0,35	1,005519	1,006140	0,000621
15	0,38		1,007600	
16	0,40	1,008470	1,009277	0,000807
17	0,43		1,011187	
18	0,45	1,012332	1,013349	0,001017
19	0,48		1,015779	
20	0,50	1,017243	1,018497	0,001254
	$\max y_i - y_i^* $			0,001254

Результати обчислень задачі за схемою Ейлера з кроками $h=0,05$ та

$\frac{h}{2}=0,025$ мають такий вигляд:

i	x_i	y_i	y_i^*	$\frac{1}{3} y_i - y_i^* $
0	0	1	1,000000	0,000000
1	0,03		1,000002	
2	0,05	1,000016	1,000019	0,000004
3	0,08		1,000067	
4	0,10	1,000154	1,000161	0,000007
5	0,13		1,000314	
6	0,15	1,000534	1,000542	0,000009
7	0,18		1,000859	
8	0,20	1,001269	1,001279	0,000010
9	0,23		1,001816	
10	0,25	1,002475	1,002486	0,000011
11	0,28		1,003301	
12	0,30	1,004266	1,004277	0,000011
13	0,33		1,005430	
14	0,35	1,006762	1,006773	0,000011
15	0,38		1,008323	
16	0,40	1,010085	1,010096	0,000011
17	0,43		1,012109	
18	0,45	1,014369	1,014379	0,000010
19	0,48		1,016925	
20	0,50	1,019755	1,019764	0,000009
	$\max \frac{1}{3} y_i - y_i^* $			0,000011

Отже, подвійний перерахунок показує, що за методом Ейлера знайдено три точні знаки, за модифікованим методом Ейлера – п'ять.

Контрольні питання:

1. Постановка задачі Коші.
2. Розв'язування задачі методами типу Ейлера.
3. Геометричні ілюстрації схем.

Лабораторна робота № 15

Тема: Наближене розв'язування граничних задач для лінійних ЗДР 2-го порядку. Метод сіток.

Мета: Побудувати наближений Розв'язання задачі Коші для лінійних ЗДР 2-го порядку.

Завдання: Сформулювати граничну задачу для функції, обраної за варіантом, при заданих функціях $P(x)=x, G(x)=1$ на проміжку $[0,1]$, кількість точок розбиття – $n=3$. Звести задачу до тридіагонального виду та розв'язати її методом прогонки.

Теоретичні відомості

Розглянемо граничну задачу:

$$y''(x_i) + P(x)y'(x_i) + G(x)y(x) = f(x), x \in [a; b] \quad (1)$$

де $P(x), G(x)$ - деякі функції, які є змінними коефіцієнтами, функція $f(x)$ - будь-яка функція, що є вільним членом рівняння, задана у вузлових точках проміжку $\{x_i\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$.

Якщо функція $f(x)=0$, то рівняння називається **однорідним**.

Для повноти граничної задачі запишемо граничні умови на границі області задання:

$$\begin{cases} A_1 y(x_0) + A_2 y'(x_0) = g_1 \\ B_1 y(x_n) + B_2 y'(x_n) = g_2 \end{cases} \quad (2)$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 - деякі коефіцієнти.

Якщо $A_2 = B_2 = 0$, то на границі задається лише значення функції. В цьому випадку отримані *граничні умови першого роду* і відповідна гранична задача називається *першою граничною задачею*.

Якщо $A_1 = B_1 = 0$, тобто на границі задається похідна функції, то такі граничні умови називаються *граничними умовами другого роду*, а відповідну граничну задачу називають *другою граничною задачею*.

Для розв'язування даної граничної задачі отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} P(x_i) + g(x_i) y(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, n-1} \\ A_1 y_0 + A_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = g_1 \\ B_1 y_n + B_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = g_2 \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) є СЛАР з тридіагональною матрицею коефіцієнтів відносно шуканого розв'язку $\{y_0, \dots, y_n\}$.

Введемо позначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{A_2}{A_1 h - A_2}, \quad k_2 = -\frac{B_2}{B_1 h + B_2} \\
 a_i &= \frac{1}{h^2} - \frac{P(x_i)}{2h}, \quad b_i = -\frac{2}{h^2} + g(x_i), \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{P(x_i)}{2h} \\
 f_0 &= g_1 \frac{h}{A_1 h - A_2}, \quad f_n = g_2 \frac{h}{B_1 h + B_2}, \quad f_i = f(x_i)
 \end{aligned} \tag{8}$$

При введених позначеннях (8) отримаємо СЛАР з тридіагональною матрицею коефіцієнтів такого виду:

$$\begin{pmatrix}
 1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \\
 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 1
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \tag{9}.$$

Отримана система розв'язується методом прогонки.

Хід роботи

Завдання 1. Сформулювати граничну задачу для функції $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$ при заданих функціях $P(x) = x, G(x) = 1$ на проміжку $[0;1]$, кількість точок розбиття – $n=3$. Звести задачу до тридіагонального виду та розв'язати її методом прогонки.

Розв'язування.

Сформулюємо граничну задачу (1):

$$y''(x) + P(x)y'(x) + G(x)y(x) = f(x).$$

При обраних функціях знаходимо вільний член рівняння. Обчислимо першу та другу похідну:

$$y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$$

$$y'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$y''(x) = 12x - 6$$

Отже,

$$f(x) = 12x - 6 + x(6x^2 - 6x - 12) + 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 8x^3 - 9x^2 - 12x - 11 = 0$$

Запишемо граничні умови на проміжку $[0;1]$ для поставленої задачі:

$$\begin{cases}
 y''(x) + x \cdot y'(x) + y(x) = 8x^3 - 9x^2 - 12x - 11 \\
 y(0) + y'(0) = -17 \\
 y(1) + y'(1) = -30
 \end{cases}$$

Кількість точок розбиття проміжку $[0;1]$ – $n=3$, крок розбиття:

$$h = \frac{b-a}{n} = 0,3.$$

Обчислюємо коефіцієнти за формулами (8):

$$k_1 = \frac{A_2}{A_1 h - A_2} = \frac{1}{0,3} = 3,3$$

$$k_2 = -\frac{B_2}{B_1 h + B_2} = -\frac{1}{0,3} = -3,3$$

$$f_0 = g_1 \frac{h}{A_1 h - A_2} = \frac{-17 \cdot 0,3}{0,3} = -17$$

$$f_3 = g_2 \frac{h}{B_1 h + B_2} = \frac{-30 \cdot 0,3}{0,3} = -30$$

Коефіцієнти матриці ($i = \overline{1, n-1}$)–

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{P(x_i)}{2h}: \quad a_1 = \frac{1}{0,3^2} - \frac{P(0,3)}{2 \cdot 0,3} = 10,6$$

$$a_2 = \frac{1}{0,3^2} - \frac{P(0,6)}{2 \cdot 0,3} = 10,1$$

$$b_i = -\frac{2}{h^2} + g(x_i): \quad b_1 = -\frac{2}{0,3^2} + 1 = -21,2$$

$$b_2 = -\frac{2}{0,3^2} + 1 = -21,2$$

$$c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{P(x_i)}{2h}: \quad c_1 = \frac{1}{0,3^2} + \frac{P(0,3)}{2 \cdot 0,3} = 11,6$$

$$c_2 = \frac{1}{0,3^2} + \frac{P(0,6)}{2 \cdot 0,3} = 12,1$$

$$f_i = f(x_i) \quad \begin{matrix} f_1 = -15,2 \\ f_2 = -19,7 \end{matrix}$$

Матриця коефіцієнтів має три діагональний вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3,3 & 0 & 0 \\ 10,6 & -21,2 & 11,6 & 0 \\ 0 & 10,1 & -21,2 & 12,1 \\ 0 & 0 & -3,3 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -17 \\ -15,2 \\ -19,7 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Методом прогонки можна знайти розв'язок даної системи.

Контрольні питання:

1. Яким чином можна побудувати граничну задачу Коші для ЗДР 2-го порядку? На чому базується наближене розв'язування ЗДР 2-го порядку?

Завдання для самостійного виконання.

Тема: Локалізація коренів нелінійних рівнянь

Тема: Уточнення коренів нелінійних рівнянь. Методи дихотомії, релаксації.

Тема: Уточнення коренів нелінійних рівнянь. Методи хорд, дотичних (Ньютона).

Завдання 1. Знайти найменший додатний корінь рівняння. Початкове наближення знайти графічно. Використовуючи ітераційні методи, уточнити результат до чотирьох вірних знаків.

Варіант	Вихідні данні	Варіант	Вихідні данні
1.	$\operatorname{tg}(x) + x^2 - 1 = 0$	2.	$2^x - 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
3.	$10 \ln(x) - 3 \cos(x) = 0$	4.	$\ln(x) - x^2 + 7x - 8 = 0$
5.	$\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{x} + 2 = 0$	6.	$\frac{\sqrt{x}}{3} - \operatorname{ctg}(x) = 0$
7.	$2\sqrt{x} - \frac{4}{x} = 0$	8.	$\arcsin(x) + 2x - 2 = 0$
9.	$\ln(x) - 5 \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$	10.	$\arccos(x) - x^2 = 0$

Завдання 2 Знайти всі корені алгебраїчного рівняння з чотирма вірними знаками.

Варіант	Вихідні данні
1.	$x^4 - 10.84x^3 - 22.41x^2 + 4.92x - 32.52 = 0.$
2.	$x^4 + 30.54x^3 - 1.4x^2 + 115.73x + 9.86 = 0.$
3.	$x^4 + 8.99x^3 + 2.6x^2 + 119.55x + 68.48 = 0.$
4.	$x^4 - 7.15x^3 - 23.81x^2 - 6.93x + 157.6 = 0.$
5.	$x^4 - 10.64x^3 + 1.27x^2 + 130.43x + 221.38 = 0.$
6.	$x^4 - 56.83x^3 - 5.56x^2 - 24.69x - 72.56 = 0.$
7.	$x^4 - 19.82x^3 + 30.51x^2 + 64.1x - 32.4 = 0.$
8.	$x^4 - 9.01x^3 - 56.22x^2 + 104.42x - 7.56 = 0.$
9.	$x^4 + 13.15x^3 + 42.42x^2 + 55.2x + 106.82 = 0.$
10.	$x^4 - 15.71x^3 - 8.33x^2 + 41.57x - 71.92 = 0.$

Тема: Арифметичні методи розв'язування СЛАР. Методи Гаусса, Жордано-Гаусса.

Тема: Ітераційні методи розв'язування СЛАР. Методи Якобі, Зейделя.

Завдання:

а) Розв'язати систему методом Гаусса;

б) Розв'язати систему методом простої ітерації і методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$,

в) порівняти ітераційні методи по кількості ітерацій; порівняти по ефективності (трудність реалізації метода, об'єм пам'яті) ітераційні методи і метод Гауса

а)

Варіант	Вихідні дані
1.	$\begin{cases} -6.45x_1 + 7.11x_2 - 9.34x_3 + 7.78x_4 = -36; \\ 8.45x_1 + 6.23x_2 + 4.68x_3 + 0.91x_4 = -64.3; \\ -4.41x_1 + 6.51x_2 - 7.89x_3 + 0.63x_4 = -0.2; \\ 9.26x_1 + 9.37x_2 - 9.89x_3 + 9.49x_4 = 35.6. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 6.54x_1 + 4.37x_2 + 0.92x_3 - 4.71x_4 = 96.1; \\ 6.21x_1 - 8.49x_2 + 7.72x_3 + 9.24x_4 = 91; \\ 6.96x_1 + 6.21x_2 + 3.18x_3 - 0.61x_4 = 87.2; \\ -7.43x_1 + 1.96x_2 + 4.53x_3 - 3.51x_4 = 78.2. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} -5.38x_1 - 9.31x_2 - 4.68x_3 - 3.99x_4 = -89.8; \\ 1.33x_1 + 7.35x_2 - 1.31x_3 - 3.96x_4 = -24.8; \\ 4.73x_1 - 9.22x_2 + 5.52x_3 + 6.31x_4 = -14.5; \\ 1.83x_1 - 1.85x_2 + 9.99x_3 - 1.86x_4 = 60.7. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} -4.92x_1 - 4.25x_2 + 0.84x_3 + 6.6x_4 = -18.7; \\ -2.56x_1 - 5.96x_2 + 1.48x_3 + 5.53x_4 = 62.7; \\ -2.99x_1 - 7.46x_2 - 0.44x_3 + 2.11x_4 = -56; \\ -8.32x_1 + 3.8x_2 + 5.48x_3 - 0.71x_4 = -93.3. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 1.77x_1 - 5.31x_2 + 6.46x_3 - 8.85x_4 = -52.3; \\ 7.62x_1 + 8.77x_2 + 6.4x_3 + 5.17x_4 = 40.7; \\ 1.58x_1 - 3.24x_2 + 8.34x_3 - 4.9x_4 = 88.5; \\ -6.56x_1 - 1.46x_2 + 1.98x_3 - 9.48x_4 = 29.2. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} -5.87x_1 - 7.28x_2 - 3.15x_3 - 0.42x_4 = 25.1; \\ 6.43x_1 - 3.98x_2 - 7.55x_3 - 1.53x_4 = 30.3; \\ 0.93x_1 + 9.41x_2 + 0.35x_3 - 0.23x_4 = -44.6; \\ -9.87x_1 - 0.09x_2 + 0.04x_3 + 9.96x_4 = 85.8. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} -0.07x_1 + 9.89x_2 - 0.17x_3 - 0.28x_4 = 0.1; \\ 9.55x_1 - 0.72x_2 - 1.16x_3 + 8.13x_4 = -0.3; \\ 3.03x_1 - 4.9x_2 + 2.08x_3 + 7.19x_4 = 99.8; \\ -0.72x_1 - 3.53x_2 + 5.75x_3 - 7.77x_4 = -0.5. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 6.61x_1 + 5.03x_2 + 1.64x_3 - 3.32x_4 = 79.8; \\ 8.33x_1 - 4.99x_2 - 6.66x_3 - 1.65x_4 = -97.9; \\ 1.69x_1 - 9.95x_2 + 1.75x_3 + 1.8x_4 = 82; \\ -6.45x_1 + 5.36x_2 + 8.92x_3 + 4.29x_4 = 84.1. \end{cases}$

9.	$\begin{cases} -1.03x_1 + 7.21x_2 - 3.82x_3 - 6.61x_4 = 32.1; \\ -0.43x_1 + 2.97x_2 - 7.46x_3 + 5.51x_4 = -24.9; \\ 8.06x_1 + 3.58x_2 + 1.65x_3 - 4.77x_4 = -92.8; \\ 6.88x_1 - 7.88x_2 + 9x_3 - 8.88x_4 = -17.6. \end{cases}$
10.	$\begin{cases} -5.97x_1 - 3.33x_2 + 0.7x_3 + 7.38x_4 = -98.7; \\ -1.92x_1 - 4.54x_2 + 3.55x_3 + 0.01x_4 = -87.5; \\ 2.57x_1 + 1.59x_2 - 5.84x_3 + 5.75x_4 = -86.2; \\ 9.91x_1 + 5.66x_2 + 5.57x_3 + 1.24x_4 = -73.6. \end{cases}$

б)

Варіант	Вихідні данні
1.	$\begin{cases} -3.64x_1 + 4.65x_2 - 8.99x_3 + 5.66x_4 = -21.5; \\ 6.68x_1 + 2.35x_2 - 0.97x_3 - 8.61x_4 = 2.1; \\ 0.43x_1 + 1.82x_2 - 7.75x_3 + 4.08x_4 = 80.7; \\ 6.34x_1 + 0.42x_2 - 3.24x_3 + 7.19x_4 = -17.1. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 1.4x_1 + 7.68x_2 - 0.92x_3 - 3.23x_4 = -60.4; \\ 5.85x_1 - 7.38x_2 + 8.48x_3 - 8.89x_4 = -88.5; \\ 9.6x_1 - 9.28x_2 - 9.67x_3 - 8.95x_4 = -48.8; \\ -8.61x_1 - 7.55x_2 - 6.16x_3 - 3.71x_4 = -37.2. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} -0.44x_1 + 2.56x_2 - 7.87x_3 + 4.7x_4 = 1.3; \\ 6.84x_1 + 1.55x_2 - 1.6x_3 + 9.95x_4 = 64.3; \\ -1.65x_1 - 1.7x_2 + 6.66x_3 - 5.03x_4 = -34.4; \\ -8.37x_1 - 3.4x_2 - 1.77x_3 + 4.83x_4 = -70. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 9.86x_1 + 8.75x_2 + 8.61x_3 + 7.36x_4 = -69.3; \\ 5.98x_1 + 3.35x_2 - 0.67x_3 - 7.31x_4 = 79; \\ 2.03x_1 + 4.72x_2 - 3.24x_3 - 8.52x_4 = -90.3; \\ -1.75x_1 - 0.26x_2 + 7.99x_3 - 2.27x_4 = 88.8. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 1.8x_1 - 5.57x_2 + 6.24x_3 - 9.33x_4 = -42.8; \\ 6.92x_1 + 7.59x_2 + 4.51x_3 + 2.11x_4 = 34.5; \\ -3.37x_1 + 8.75x_2 - 4.62x_3 - 5.87x_4 = 91.7; \\ -0.48x_1 + 3.66x_2 - 6.82x_3 + 6.84x_4 = 26.2. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 0.68x_1 - 5.55x_2 + 5.13x_3 + 9.59x_4 = -99.8; \\ 4.73x_1 + 4.33x_2 - 0.94x_3 - 6.61x_4 = 68.7; \\ 2.46x_1 + 5.85x_2 - 1.69x_3 - 5.83x_4 = 69; \\ 2.49x_1 + 6.67x_2 - 0.83x_3 - 4.16x_4 = 37.7. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2.62x_1 - 0.64x_2 - 8.02x_3 + 1.35x_4 = 50.1; \\ 3.33x_1 - 5.32x_2 + 8.02x_3 - 7.3x_4 = -91.4; \\ -9.27x_1 - 6.56x_2 - 5.83x_3 - 2.39x_4 = 58.7; \\ 1.79x_1 + 9.4x_2 + 1.19x_3 + 0.6x_4 = 67.4. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} -9.21x_1 - 2.61x_2 - 1.81x_3 + 5.59x_4 = -82.1; \\ 6.21x_1 + 9.38x_2 - 6.83x_3 - 7.45x_4 = 24; \\ -4.27x_1 - 1.71x_2 + 4.02x_3 - 7.68x_4 = 41.9; \\ 6.35x_1 + 8.67x_2 + 5.02x_3 + 3.69x_4 = -34.1. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} -5.31x_1 + 8.25x_2 - 7.05x_3 - 8.79x_4 = -12.8; \\ -5.83x_1 - 4.62x_2 - 0.45x_3 + 4.94x_4 = -75.9; \\ -5.51x_1 + 9.44x_2 - 6.06x_3 - 6.62x_4 = 11.4; \\ -2.68x_1 + 0.7x_2 + 8.02x_3 - 1.28x_4 = 35.5. \end{cases}$

10.	$\begin{cases} 9.96x_1 + 7.68x_2 + 7.64x_3 + 5.33x_4 = -32.5; \\ 2.97x_1 - 1.69x_2 - 8.71x_3 - 0.4x_4 = 54.8; \\ 0.89x_1 - 9.51x_2 + 1.39x_3 + 1.89x_4 = -77.7; \\ -6.71x_1 + 5.18x_2 + 6.47x_3 + 3.66x_4 = 77.2. \end{cases}$
------------	--

Тема: Апроксимація функцій многочленами найкращого наближення (МНН). Метод найменших квадратів для побудови МНН.

Завдання Для обраної таблиці виконайте апроксимацію алгебраїчними многочленами різного степеня та оцінити їх якість по відношенню вихідного та результуючого середньоквадратичного відхилення

Варіант	Вихідні данні		Варіант	Вихідні данні	
1	x	y	6	x	y
	61,10	49,10		60,80	49,40
	60,80	48,60		60,00	49,80
	60,18	50,10		58,60	53,40
	59,20	52,20		57,30	55,20
	58,10	53,60		56,10	56,20
	55,20	58,10		50,40	59,9
	49,10	69,10		46,80	67,4
2	x	y	7	x	y
	61,8	49,0		60,8	50,8
	60,0	49,3		59,1	53,3
	58,7	52,8		57,9	54,3
	56,1	55,2		55,7	57,6
	54,2	57,5		54,3	60,7
	50,6	63,1		52,6	64,1
	47,1	68,2		49,1	67,7
3	x	y	8	x	y
	60,1	49,0		63,1	49,8
	59,2	52,1		61,9	49,3
	58,6	53,2		59,6	53,3
	55,4	56,6		57,2	56,1
	53,1	59,5		57,1	57,3
	52,0	66,6		50,9	64,1
	49,9	67,8		47,1	66,6
4	x	y	9	x	y
	60,3	49,9		61,7	49,8
	59,1	54,8		60,4	51,1
	58,7	56,9		58,1	53,2

	58,1 54,5 50,3 47,1	57,1 62,3 66,1 67,3		57,2 53,4 49,4 45,9	57,3 61,5 66,4 68,8
5	x	y	10	x	y
	59,2	49,7		58,1	49,1
	59,0	50,5		57,5	51,2
	54,2	51,9		56,4	53,0
	55,6	54,4		55,1	54,6
	53,1	57,3		53,4	57,6
	57,8	64,8		50,2	60,1
	60,9	49,0		46,1	61,8

Тема: Чисельне інтегрування функцій.

Завдання Обчислити визначений інтеграл при $n=24$ по відповідній квадратурній формулі:

Варіант	Прямокутників	Трапецій	Сімпсона
1.	$\int_0^1 \sqrt{e^x + 1} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$
2.	$\int_0^1 \frac{2+x}{2-x} dx$	$\int_0^1 \cos(x^2) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 + \cos x) dx$
3.	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$	$\int_0^2 \frac{2xdx}{1+x^2}$
4.	$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+\cos x}$	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$
5.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x}} dx$	$\int_0^{\pi} (\cos x)^2 \cos(2x) dx$	$\int_0^1 (x+1)(x+2) dx$
6.	$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+\sin x}$	$\int_1^2 (\ln x + x) dx$
7.	$\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x+x^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+2\cos x)^2 dx$	$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
8.	$\int_1^e (x \ln(x))^2 dx$	$\int_1^2 \frac{2+x}{5+x} dx$	$\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$

9.	$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$	$\int_1^3 \sqrt{6x - 5} dx$	$\int_1^3 \sqrt{x + 4} dx$
10.	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$	$\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{8x-2}}$	$\int_1^3 \sin \sqrt{x^3 + 1} dx$

Таблица № 1

№ 1 1) $2^x + 5x - 3 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ 3) $0.5^x + 1 = (x-2)^2$ 4) $(x-3)\cos x = 1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	№ 2 1) $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3x^3} = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ 3) $[\log_2(-x)] \cdot (x+2) = -1$ 4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0.5x = 0$
№ 3 1) $5^x - 3x = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$ 3) $x^2 - 2 + 0.5^x = 0$ 4) $(x-1)^2 \cdot \lg(x+11) = 1$	№ 4 1) $2e^x = 5x$ 2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ 3) $x \cdot \log_3(x+1) = 1$ 4) $\cos(x+0.5) = x^3$
№ 5 1) $3^{x-1} + 2 - x = 0$ 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$ 3) $(x-4)^2 \cdot \log_{0.5}(x-3) = -1$ 4) $5\sin x = x$	№ 6 1) $2\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2x^3} = 0$ 2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$ 3) $x^2 \cdot 2^x = 1$ 4) $\operatorname{tg} x = x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
№ 7 1) $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$ 2) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$ 3) $0.5^x - 1 = (x+2)^2$ 4) $x^2 \cos 2x = -1$	№ 8 1) $5^x - 6x + 3 = 0$ 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ 3) $2x^2 - 0.5^x - 3 = 0$ 4) $x \lg(x+1) = 1$
№ 9 1) $\operatorname{arctg}(x-1) + 2x = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ 3) $(x-2)^2 2^x = 1$ 4) $x^2 - 20\sin x = 0$	№ 10 1) $2\operatorname{arccctg} x - x + 3 = 0$ 2) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$ 3) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.5x^2 - 1$ 4) $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$

№ 11 1) $3^x + 2x - 2 = 0$ 2) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$ 3) $\left[(x-2)^2 - 1\right]2^x = 1$ 4) $(x-2)\cos x = 1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	№ 12 1) $2\arctg x - 3x + 2 = 0$ 2) $2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$ 3) $[\log_2(x+2)](x-1) = 1$ 4) $\sin(x-0.5) - x + 0.5 = 0$
№ 13 1) $3^x + 2x - 5 = 0$ 2) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ 3) $x^2 - 3 + 0.5^x = 0$ 4) $(x-2)^2 \lg(x+11) = 1$	№ 14 1) $2e^x - 3x + 1 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ 3) $x \log_3(x+1) = 2$ 4) $\cos(x+0.3) = x^2$
№ 15 1) $3^{x-1} + 4 - x = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ 3) $(x-3)^2 \log_{0.5}(x-2) = -1$ 4) $5\sin x = x$	№ 16 1) $\arctg x + \frac{1}{3x^2} = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$ 3) $(x-1)^2 2^x = 1$ 4) $\tg^3 x = x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
№ 17 1) $e^x + x + 1 = 0$ 2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ 3) $0.5^x - 3 = (x+2)^2$ 4) $x^2 \cos 2x = -1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	№ 18 1) $3^x - 2x + 5 = 0$ 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$ 3) $2x^2 - 0.5^x - 2 = 0$ 4) $x \lg(x+1) = 1$
№ 19 1) $\arctg(x-1) + 3x - 1 = 0$ 2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$ 3) $(x-2)^2 2^x = 1$ 4) $x^2 - 20\sin x = 0$	№ 20 1) $2\arccctg x - x + 3 = 0$ 2) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$ 3) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = x^2 - 0,5$ 4) $2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$
№ 21 1) $2^x - 3x + 2 = 0$ 2) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$	№ 22 1) $\arccctg x + 2x - 1 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ 3) $(x+2)\log_2(x) = 1$

3) $(0.5)^x + 1 = (x-2)^2$ 4) $(x-3)\cos x = 1$	4) $\sin(x+1) = 0.5x$
№ 23 1) $3^x + 2x - 3 = 0$ 2) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$ 3) $x^2 - 4 + 0.5^x = 0$ 4) $(x-2)^2 \lg(x+11) = 1$	№ 24 1) $2e^x - 2x + 3 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ 3) $x \log_3(x+1) = 1$ 4) $\cos(x+0.5) = x^3$
№ 25 1) $3^x + 2 - x = 0$ 2) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ 3) $(x-4)^2 \log_{0.5}(x-3) = -1$ 4) $5\sin x = x$	№ 26 1) $\arctg(x-1) + 2x - 3 = 0$ 2) $x^4 - x - 1 = 0$ 3) $(x-1)^2 2^x = 1$ 4) $\operatorname{tg}^3 x = x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
№ 27 1) $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$ 2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ 3) $0.5^x - 3 = -(x+1)^2$ 4) $x^2 \cos 2x = -1$	№ 28 1) $3^x - 2x + 5 = 0$ 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$ 3) $2x^2 - 0.5^x - 3 = 0$ 4) $x \lg(x+1) = 1$
№ 29 1) $\arctg(x-1) + 2x = 0$ 2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$ 3) $(x-2)^2 2^x = 1$ 4) $x^2 - 20\sin x = 0$	№ 30 1) $3^x + 5x - 2 = 0$ 2) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ 3) $0.5^x + 1 = (x-2)^2$ 4) $(x-3)\cos x = 1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$

Таблица 2.

№1 $\begin{cases} 3,21x_1 - 4,25x_2 + 2,13x_3 = 5,06 \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75 \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05 \end{cases}$	№2 $\begin{cases} 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15 \\ 1,14x_1 - 2,15x_2 + 5,11x_3 = -4,16 \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17 \end{cases}$
№ 3 $\begin{cases} 2,5x_1 - 3,12x_2 - 4,03x_3 = -7,5 \\ 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44 \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,877x_3 = -1,16 \end{cases}$	№ 4 $\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = -4,75 \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05 \\ 3,21x_1 - 4,25x_2 + 2,13x_3 = 5,06 \end{cases}$
№ 5 $\begin{cases} 1,14x_1 - 2,15x_2 - 5,11x_3 = -4,16 \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17 \\ 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15 \end{cases}$	№ 6 $\begin{cases} 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44 \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,87x_3 = -1,16 \\ 2,5x_1 - 3,12x_2 - 5,03x_3 = -7,5 \end{cases}$
№ 7 $\begin{cases} 3,11x_1 - 1,66x_2 - 0,60x_3 = -0,92 \\ -1,65x_1 + 3,51x_2 - 0,78x_3 = 2,57 \\ 0,60x_1 + 0,78x_2 - 1,87x_3 = 1,65 \end{cases}$	№ 8 $\begin{cases} 0,10x_1 + 12x_2 - 0,13x_3 = 0,10 \\ 0,12x_1 + 0,71x_2 + 0,15x_3 = 0,26 \\ -0,13x_1 + 0,15x_2 + 0,63x_3 = 0,38 \end{cases}$
№ 9 $\begin{cases} 0,71x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = 0,29 \\ 0,10x_1 + 0,34x_2 - 0,04x_3 = 0,32 \\ 0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = -0,10 \end{cases}$	№ 10 $\begin{cases} 0,34x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = 0,33 \\ -0,04x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = -0,05 \\ 0,10x_1 + 0,12x_2 + 0,71x_3 = 0,28 \end{cases}$
№ 11 $\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08 \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,18x_3 = 0,17 \\ 1,17x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28 \end{cases}$	№ 12 $\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75 \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11 \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05 \end{cases}$
№ 13 $\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11 \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,00 \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13 \end{cases}$	№ 14 $\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15 \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,77x_3 = 0,11 \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12 \end{cases}$
№ 15 $\begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00 \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13 \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17 \end{cases}$	№ 16 $\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15 \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62 \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88 \end{cases}$
№ 17 $\begin{cases} 1,24x_1 - 0,87x_2 - 3,17x_3 = 0,46 \\ 2,11x_1 - 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,50 \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 = 0,35 \end{cases}$	№ 18 $\begin{cases} 0,64x_1 - 0,83x_2 + 4,2x_3 = 2,23 \\ 0,58x_1 - 0,83x_2 + 1,43x_3 = 1,71 \\ 0,86x_1 + 0,77x_2 + 0,88x_3 = -0,54 \end{cases}$
№ 19 $\begin{cases} 0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32 \\ 0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = -0,44 \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64 \end{cases}$	№ 20 $\begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 = 0,58 \\ 1,25x_1 + 0,66x_2 - 0,78x_3 = 0,66 \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 = 0,92 \end{cases}$
№ 21 $\begin{cases} 3,14x_1 - 2,12x_2 + 1,17x_3 = 1,27 \\ -2,12x_1 + 1,32x_2 - 2,45x_3 = 2,13 \\ 1,17x_1 - 2,45x_2 + 1,18x_3 = 3,14 \end{cases}$	№ 22 $\begin{cases} 2,45x_1 + 1,75x_2 - 3,24x_3 = 1,23 \\ 1,75x_1 - 1,16x_2 + 2,18x_3 = 3,43 \\ -3,24x_1 + 2,18x_2 - 1,85x_3 = -0,16 \end{cases}$

№ 23	$\begin{cases} 1,65x_1 - 2,27x_2 + 0,18x_3 = 2,25 \\ -2,27x_1 + 1,73x_2 - 0,46x_3 = 0,93 \\ 0,18x_1 - 0,46x_2 + 2,16x_3 = 1,33 \end{cases}$	№ 24	$\begin{cases} 3,23x_1 + 1,62x_2 + 0,65x_3 = 1,28 \\ 1,62x_1 - 2,33x_2 - 1,43x_3 = 0,87 \\ 0,65x_1 - 1,43x_2 + 2,18x_3 = -2,87 \end{cases}$
№ 25	$\begin{cases} 0,93x_1 + 1,42x_2 - 2,55x_3 = 2,48 \\ 1,42x_1 - 2,87x_2 + 2,36x_3 = -0,75 \\ -2,55x_1 + 2,36x_2 - 1,44x_3 = 1,83 \end{cases}$	№ 26	$\begin{cases} 1,42x_1 - 2,15x_2 + 1,07x_3 = 2,48 \\ -2,15x_1 + 0,76x_2 - 2,18x_3 = 1,15 \\ 1,07x_1 - 2,18x_2 + 1,23x_3 = 0,88 \end{cases}$
№ 27	$\begin{cases} 2,23x_1 - 0,71x_2 + 0,63x_3 = 1,28 \\ -0,71x_1 + 1,45x_2 - 1,34x_3 = 0,64 \\ 0,63x_1 - 1,34x_2 + 0,77x_3 = -0,87 \end{cases}$	№ 28	$\begin{cases} 1,63x_1 + 1,27x_2 - 0,84x_3 = 1,51 \\ 1,27x_1 + 0,65x_2 + 1,27x_3 = -0,63 \\ -0,84x_1 + 1,27x_2 - 1,21x_3 = 2,15 \end{cases}$
№ 29	$\begin{cases} 0,78x_1 + 1,08x_2 - 1,35x_3 = 0,57 \\ 1,08x_1 - 1,28x_2 + 0,37x_3 = 1,27 \\ -1,35x_1 + 0,37x_2 + 2,86x_3 = 0,47 \end{cases}$	№ 30	$\begin{cases} 0,83x_1 + 2,18x_2 - 1,73x_3 = 0,28 \\ 2,18x_1 - 1,41x_2 + 1,03x_3 = -1,18 \\ -1,73x_1 + 1,03x_2 + 2,27x_3 = 0,72 \end{cases}$

Таблиця 3.

№	Вихідні данні		№	Вихідні данні	
1	$x_0=0,35$	$y_0=1,419$	6	$x_0=0,38$	$y_0=1,462$
	$x_1=0,48$	$y_1=1,616$		$x_1=0,49$	$y_1=1,632$
	$x_2=0,97$	$y_2=2,637$		$x_2=0,99$	$y_2=2,691$
	$x_3=1,08$	$y_3=2,944$		$x_3=1,09$	$y_3=2,974$
	$x_4=1,18$	$y_4=3,254$		$x_4=1,19$	$y_4=3,287$
	$x_5=1,40$	$y_5=4,055$		$x_5=1,40$	$y_5=4,055$
	$x_6=1,71$	$y_6=5,528$		$x_6=1,71$	$y_6=5,528$
	$x_7=1,74$	$y_7=5,697$		$x_7=1,72$	$y_7=5,584$
	$x_8=2,09$	$y_8=8,084$		$x_8=2,04$	$y_8=7,690$
	$x_9=2,46$	$y_9=11,704$		$x_9=2,38$	$y_9=10,804$
	$x_{10}=2,69$	$y_{10}=14,731$		$x_{10}=2,53$	$y_{10}=12,553$
	$x=0,58$			$x=2,95$	
2	$x_0=0,32$	$y_0=1,377$	7	$x_0=0,14$	$y_0=1,419$
	$x_1=0,73$	$y_1=2,075$		$x_1=0,28$	$y_1=1,419$
	$x_2=0,97$	$y_2=2,637$		$x_2=0,57$	$y_2=1,419$
	$x_3=1,13$	$y_3=3,095$		$x_3=1,00$	$y_3=1,419$
	$x_4=1,52$	$y_4=4,572$		$x_4=1,22$	$y_4=1,419$
	$x_5=1,57$	$y_5=4,806$		$x_5=1,36$	$y_5=1,419$
	$x_6=2,02$	$y_6=7,538$		$x_6=1,73$	$y_6=1,419$
	$x_7=2,52$	$y_7=12,428$		$x_7=1,74$	$y_7=1,419$
	$x_8=2,96$	$y_8=19,297$		$x_8=2,11$	$y_8=1,419$
	$x_9=3,40$	$y_9=29,964$		$x_9=2,49$	$y_9=1,419$
	$x_{10}=3,79$	$y_{10}=44,256$		$x_{10}=2,74$	$y_{10}=1,419$
	$x=1,96$			$x=0,80$	
3	$x_0=0,32$	$y_0=1,377$	8	$x_0=0,38$	$y_0=1,462$
	$x_1=0,48$	$y_1=1,616$		$x_1=0,40$	$y_1=1,491$
	$x_2=0,97$	$y_2=2,637$		$x_2=0,81$	$y_2=2,247$
	$x_3=1,11$	$y_3=3,034$		$x_3=1,25$	$y_3=3,490$
	$x_4=1,25$	$y_4=3,490$		$x_4=1,59$	$y_4=4,903$
	$x_5=1,53$	$y_5=4,618$		$x_5=1,86$	$y_5=6,423$
	$x_6=1,94$	$y_6=6,958$		$x_6=1,98$	$y_6=7,242$
	$x_7=2,14$	$y_7=8,499$		$x_7=2,36$	$y_7=10,590$
	$x_8=2,25$	$y_8=9,487$		$x_8=2,37$	$y_8=10,697$
	$x_9=2,56$	$y_9=12,935$		$x_9=2,76$	$y_9=15,799$
	$x_{10}=2,97$	$y_{10}=19,491$		$x_{10}=3,16$	$y_{10}=23,570$
	$x=1,34$			$x=1,72$	
4	$x_0=0,09$	$y_0=1,094$	9	$x_0=0,18$	$y_0=1,197$
	$x_1=0,41$	$y_1=1,506$		$x_1=0,65$	$y_1=1,915$
	$x_2=0,83$	$y_2=2,293$		$x_2=0,80$	$y_2=2,225$
	$x_3=1,06$	$y_3=2,886$		$x_3=0,92$	$y_3=2,509$
	$x_4=1,22$	$y_4=3,387$		$x_4=1,20$	$y_4=3,320$

	x ₅ =1,61 x ₆ =1,65 x ₇ =2,08 x ₈ =2,56 x ₉ =2,96 x ₁₀ =3,35	y ₅ =5,002 y ₆ =5,206 y ₇ =8,004 y ₈ =12,935 y ₉ =19,297 y ₁₀ =28,502		x ₅ =1,59 x ₆ =1,77 x ₇ =1,83 x ₈ =2,07 x ₉ =2,38 x ₁₀ =2,43	y ₅ =4,903 y ₆ =5,870 y ₇ =6,233 y ₈ =7,924 y ₉ =10,804 y ₁₀ =11,358
	x=1,75			x=2,14	
5	x ₀ =0,17 x ₁ =0,64 x ₂ =0,78 x ₃ =0,89 x ₄ =1,14 x ₅ =1,50 x ₆ =1,62 x ₇ =2,10 x ₈ =2,19 x ₉ =2,25 x ₁₀ =2,41	y ₀ =1,185 y ₁ =1,896 y ₂ =2,181 y ₃ =2,435 y ₄ =3,126 y ₅ =4,481 y ₆ =5,053 y ₇ =8,166 y ₈ =8,935 y ₉ =9,487 y ₁₀ =11,133	10	x ₀ =0,40 x ₁ =0,66 x ₂ =0,83 x ₃ =1,27 x ₄ =1,37 x ₅ =1,40 x ₆ =1,54 x ₇ =1,71 x ₈ =2,02 x ₉ =2,50 x ₁₀ =2,79	y ₀ =1,491 y ₁ =1,934 y ₂ =2,293 y ₃ =3,560 y ₄ =3,935 y ₅ =4,055 y ₆ =4,664 y ₇ =5,528 y ₈ =7,538 y ₉ =12,182 y ₁₀ =16,281
	x=1,35			x=1,61	

Таблиця 4.

Варіант	$f(x)$	a	b	ε
1	$e^x \cos x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
2	$x^2 e^{-x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
3	$x^2 \arctg x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
4	$e^{\sin x} \sin 2x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
5	$e^{\cos^2 x} \cdot \cos x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
6	$\frac{e^x}{1+x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
7	$(1+x)^{3/2} e^{-x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
8	$\frac{e^x}{3+2\cos x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
9	$e^{\cos x} \cdot (1+x)$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
10	$(1+x) \ln^2(1+x)$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
11	$(1+x)^2 e^{\arctg x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-7}$
12	$e^{\sin x} \sin(\cos x)$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-7}$
13	$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
14	$x^2 + 2 \ln x$	1	2	$0,5 \cdot 10^{-8}$
15	$x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$	1	2	$0,5 \cdot 10^{-8}$
16	$x^2 \sin(1+x^2)$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
17	$x \cos x^2$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
18	$\frac{\cos x}{1+\sin^3 x}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
19	$(1-x^2) \ln(1+x)$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
20	$\sqrt{1+x} \cos x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$

21	$\sqrt{1+x} \sin x$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$
22	$\frac{e^{-x}}{1+x}$	1	2	$0,5 \cdot 10^{-6}$
23	$\frac{\arctg x}{1+x^2}$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-4}$
24	$x \ln^2 x$	2	3	$0,5 \cdot 10^{-8}$
25	$\sqrt{1 - (\frac{7}{16}) \sin^2 x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$0,5 \cdot 10^{-8}$
26	$\arcsin e^{-(x/8)}$	1	7	$0,5 \cdot 10^{-8}$
27	$\arccos e^{-(x/6)}$	2	7	$0,5 \cdot 10^{-3}$
28	$\ln(2 + tg(\frac{x}{10}))$	0	14	$0,5 \cdot 10^{-8}$
29	$5x \sin x^2$	0	2	$0,5 \cdot 10^{-8}$
30	$3x^3 \cos x^2$	0	1	$0,5 \cdot 10^{-8}$

Таблиця 5.

ЗДР 1-го порядку	Початкові умови	Проміжок
№ 1 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8; 2,8]$
№ 2 $y' = x + \cos \frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6; 2,6]$
№ 3 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6; 1,6]$
№ 4 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$x \in [0,5; 1,5]$
№ 5 $y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$x \in [1,7; 2,7]$
№ 6 $y' = x + \cos \frac{y}{2,25}$	$y_0(1,4) = 2,2$	$x \in [1,4; 2,4]$
№ 7 $y' = x + \cos \frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4; 2,4]$
№ 8 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8; 1,8]$
№ 9 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,2) = 2,1$	$x \in [1,2; 2,2]$
№ 10 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1; 3,1]$
№ 11 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8; 2,8]$
№ 12 $y' = x + \sin \frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6; 2,6]$
№ 13 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6; 1,6]$
№ 14 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$x \in [0,5; 1,5]$
№ 15 $y' = x + \sin \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$x \in [1,7; 2,7]$

№ 16 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2,8}}$	$y_0(1,4)=2,2$	$x \in [1,4;2,4]$
№ 17 $y' = x + \sin \frac{y}{e}$	$y_0(1,4)=2,5$	$x \in [1,4;2,4]$
№ 18 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8)=1,3$	$x \in [0,8;1,8]$
№ 19 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1)=1,5$	$x \in [1,1;2,1]$
№ 20 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0,6)=1,2$	$x \in [0,6;1,6]$
№ 21 $y' = x + \sin \frac{y}{1,25}$	$y_0(0,5)=1,8$	$x \in [0,5;1,5]$
№ 22 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1,5}}$	$y_0(0,2)=1,1$	$x \in [0,2;1,2]$
№ 23 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$y_0(0,1)=0,8$	$x \in [0,1;1,1]$
№ 24 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,5)=0,6$	$x \in [0,5;1,5]$
№ 25 $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(1,2)=1,4$	$x \in [1,2;2,2]$
№ 26 $y' = x + \cos \frac{y}{1,25}$	$y_0(0,4)=0,8$	$x \in [0,4;1,4]$
№ 27 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1,5}}$	$y_0(0,3)=0,9$	$x \in [0,3;1,3]$
№ 28 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$y_0(1,2)=1,8$	$x \in [1,2;2,2]$
№ 29 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,7)=2,1$	$x \in [0,7;1,7]$
№ 30 $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(0,9)=1,7$	$x \in [0,9;1,9]$

Порядок здачі лабораторної роботи.

1. Для здачі лабораторної роботи студент має знати теоретичний матеріал, що стосується даної роботи, і як мінімум, має вміти відповідати на контрольні запитання.
2. У звіті за виконання лабораторної роботи обов'язково має бути присутні такі структурні одиниці:
 - тема
 - короткі теоретичні відомості
 - хід виконання завдань: текст програми, ручний рахунок або обрахунок за допомогою табличного процесору EXCEL (відповідно до завдання) або програмна частина реалізації завдання
 - висновок.
3. Після теоретичного опитування коротко розповісти про поставлену задачу та шляхи її розв'язання.
4. Обґрунтувати правильність і раціональність своєї програми чи обрахунку за допомогою EXCEL та розповісти, як працює обчислювальний процес.

Навчальне видання

Методи обчислень

**Методичні рекомендації до виконання
лабораторних завдань та самостійних робіт
з курсу „Методи обчислень”**

Укладач: Шліхта Ганна Олександрівна

Підписано до друку _____
Формат _____ Умовн. Друк. Арк. 2,3
Тираж ____ . Замовлення № _____