

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ

Синіцька Н. В.

ШКІЛЬНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКА ЇЇ НАВЧАННЯ

навчальний посібник для підготовки студентів за спеціальностями «Середня
освіта»

Рівне - 2025

УДК 51:373.5.016(07)(075.8)

Рекомендовано до друку Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 12 від 30.10.2025 р.)

Синіцька Н. В. Шкільний курс математики та методика її навчання: навчальний посібник для підготовки студентів за спеціальностями «Середня освіта». Рівне: РДГУ, 2025. 127 ст.

Укладач:

Наталія СИНІЦЬКА – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання Рівненського державного гуманітарного університету

Рецензенти:

Ольга ХОМ'ЯК – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри теорії та методики початкової освіти ПВНЗ «Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука»;

Юрій ГАЛАТЮК – кандидат педагогічних наук, професор кафедри фізики, астрономії та методики викладання Рівненського державного гуманітарного університету.

Навчальний посібник націлений на формування у студентів базового комплексу знань з методики навчання математики для вирішення фахових завдань та поглибленого аналізу проблем викладання математики, що і є метою вивчення даної навчальної дисципліни. У посібнику визначені основні принципи та інструментарій постановки задач, схеми їх побудови, методів їх розв'язування та аналізу з метою використання в майбутній професійної діяльності; узагальнено й систематизовано теоретичні надбання. Питання, що розкривають сутність відповідних тем, забезпечують викладення методологічних основ дисциплін «Шкільний курс математики» та «Методика викладання математики».

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ I. ПРОЄКТУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1. Особистісно - орієнтований підхід до навчання.....	6
1.2. Діяльнісний підхід до навчання математики.....	9
1.3. Формування в учнів умінь виділяти головне, суттєве в навчальному матеріалі шкільною курсу математики.....	16
1.4. Конструювання уроку.....	27
РОЗДІЛ 2. ОРГАНІЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІОВАННОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ.....	30
2.1. Сутність диференціації навчання і періоди її розвитку.....	30
2.2. Характеристика основних форм диференціації.....	32
2.3. Основні напрямки здійснення диференціації навчання.....	34
2.4. Самостійна робота учнів на уроках математики та її дидактичне забезпечення.....	45
РОЗДІЛ 3. НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ПІДХІД ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ.....	55
3.1. Числові системи та їх вивчення в загальноосвітній школі.....	55
3.2. Вивчення тотожних перетворень в загальноосвітній школі.....	69
3.3. Характер вправ, їх послідовність і кількість при формуванні в учнів умінь і навичок проводити тотожні перетворення.....	76
3.4. Рівняння і нерівності в шкільному курсі математики середньої школи.....	80
3.5. Функції в загальноосвітній школі.....	87
РОЗДІЛ 4. ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.....	96
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	111

ВСТУП

Загальноосвітня мета навчання математики вимагає від учителя: передати учням певну систему математичних знань, навичок; навчити усній і письмовій математичній мові; допомогти учням досягти обов'язкових результатів навчання, навчити застосовувати набуті знання для розв'язання найпростіших завдань життєвої практики та вивчення інших навчальних предметів; ознайомити з шляхами пізнання реальної дійсності, математичними методами; навчити користуватися математичними інструментами та приладами, а також умінню самостійно здобувати знання (робота з підручником, науково-популярною літературою). Загальноосвітні цілі також покликані допомогти учителю раціонально розподілити час, розмежовуючи основний і другорядний матеріал.

Для успішної самореалізації особистості у сучасному житті необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідні більш повне опанування понять, законів, теорій і використання інноваційних технологій у навчанні та організації дослідницької і проектної діяльності у сфері математики, які призводять до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.

Навчання математики в основній школі спрямоване на досягнення таких цілей:

- формування в учнів математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення школярів з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності;
- інтелектуальний розвиток учнів, розвиток їхнього логічного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції, умінь аналізувати, класифікувати, узагальнювати, робити

умовиводи за аналогією, діставати наслідки з даних передумов шляхом несуперечливих міркувань тощо;

- опанування учнями системи математичних знань і вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей, а також необхідні у повсякденному житті й достатні для оволодіння іншими шкільними предметами та продовження навчання.

Виховні цілі - виховання стійкого інтересу до навчання математики, її ролі в практичній діяльності та повсякденному житті, моральне та естетичне виховання.

Розвиваючі цілі - виховання математичної і графічної культури; розвиток математичного мислення, навичок застосування аналізу, синтезу порівняння, аналогії, індукції, дедукції, узагальнення і конкретизації, моделювання, класифікації, геометричної, алгебраїчної та числової інтуїції; просторового уявлення, кмітливості, спостережливості, пам'яті тощо.

Учитель в цьому випадку виступає як організатор і керівник навчальною діяльністю учнів.

РОЗДІЛ І. ПРОЄКТУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Особистісно - орієнтований підхід до навчання

Особистісно-орієнтоване навчання - це таке навчання, на перше місце ставиться особистість дитини, її самобутність, самоцінність, суб'єктивний досвід кожного спочатку розкривається, а потім узгоджується з змістом освіти [23].

Зв'язок компонентів двох систем змісту освіти і структури особистості на змістовному і процесуальному рівнях наведемо схематично (Рис. 1.1).

Особистісно-орієнтоване навчання повинно забезпечувати розвиток і саморозвиток особистості учня як суб'єкта пізнавальної і предметної діяльності.

Особистісно-орієнтоване навчання має забезпечувати кожному учневі, спираючись на його здібності, нахили, інтереси, ціннісні орієнтації та суб'єктивний досвід, можливість реалізувати себе в різних видах діяльності.

Зміст освіти. її засоби й методи організовуються так, щоб учень мав можливість вибирати предметний матеріал, його вид і форму.

Освіченість як сукупність знань, умінь, індивідуальних здібностей є найважливішим засобом становлення духовних і інтелектуальних якостей учня і має бути основною метою сучасної освіти.

Освіченість формує індивідуальне сприйняття світу, можливості його творчого перетворення, широке використання суб'єктивного досвіду в інтерпретації та оцінці фактів, явищ, подій навколишньої дійсності на основі особистісно значущих цінностей.

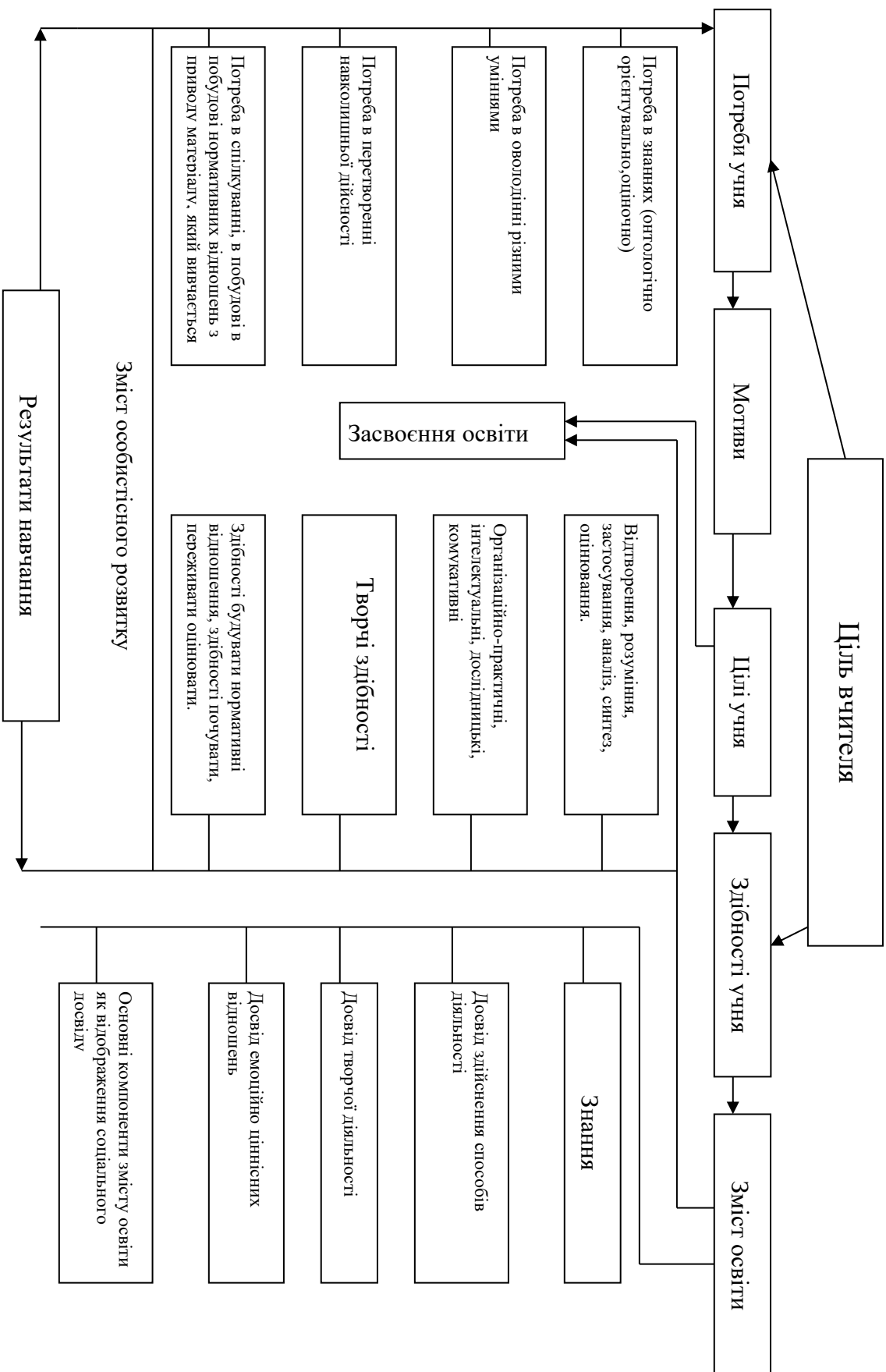


Рис1.1. Зв'язок компонентів двох систем змісту освіти.

Найважливішими чинниками особистісно-орієнтованого освітнього процесу є ті, що розвивають індивідуальність учня, створюють умови для його саморозвитку та самовираження.

Особистісно-орієнтоване навчання будується на принципі варіативності [23, 30].

Реформування загальної середньої освіти відповідно до Закону України «Про загальну середню освіту» передбачає реалізацію принципів гуманізації освіти, демократизації освіти, методологічну переорієнтацію процесу навчання на розвиток особистості учня, формування його основних компетенцій [19].

Процес навчання, виховання та розвитку особистості складають основу єдиного педагогічного процесу, який у сучасній педагогічній науці прийнято називати педагогічною технологією формування особистості.

Педагогічна технологія формування особистості школяра передбачає такі основні ланки:

- мету навчання в сучасній школі;
- основні завдання навчання особистості;
- удосконалення змісту освіти відповідно до розвитку будівництва незалежної України, втілення в життя програми освіти на XXI століття;
- традиційні і нетрадиційні методи навчання із застосуванням комп'ютерної техніки;
- забезпечення навчального процесу необхідними засобами навчання;
- форми навчання та виховання особистості в процесі пізнавальної діяльності учнів.

Таким чином, названі вище основні ланки є діалектично взаємопов'язані між собою і складають основну структуру педагогічної технології формування особистості в національній школі.

1.2. Діяльнісний підхід до навчання математики

Під навчальною діяльністю психологи розуміють діяльність учнів, спрямовану на набування теоретичних знань про предмет вивчення та загальних способів розв'язання пов'язаних із ним задач і, отже, на розвиток учнів і формування їх особистості.

Структура навчальної діяльності наведена на рис. 1.2.

Ми розглядаємо навчальну діяльність учнів при навчанні математики в межах в загальноосвітньої школи. Характерна риса цієї діяльності є в тому, що вона організовується і керується вчителем і здійснюється за допомогою спеціальних засобів навчання - підручника, дидактичних матеріалів, комп'ютера, таблиць і ін.

Навчальна задача (головний компонент навчальної діяльності) - це узагальнена мета діяльності, котра сформульована перед учнями у вигляді узагальненого навчального завдання (Рис.1.3).

Постановка навчальної задачі складає мотиваційно-орієнтований етап навчальної діяльності.

Навчальна задача реалізується через систему навчальних дій. Навчальні дії для розв'язування навчальної задачі:

- перетворення умов предметної задачі з метою виділення загального (основного) відношення об'єкту, що вивчається;
- моделювання основного відношення у предметній, графічній чи буквеній формі;

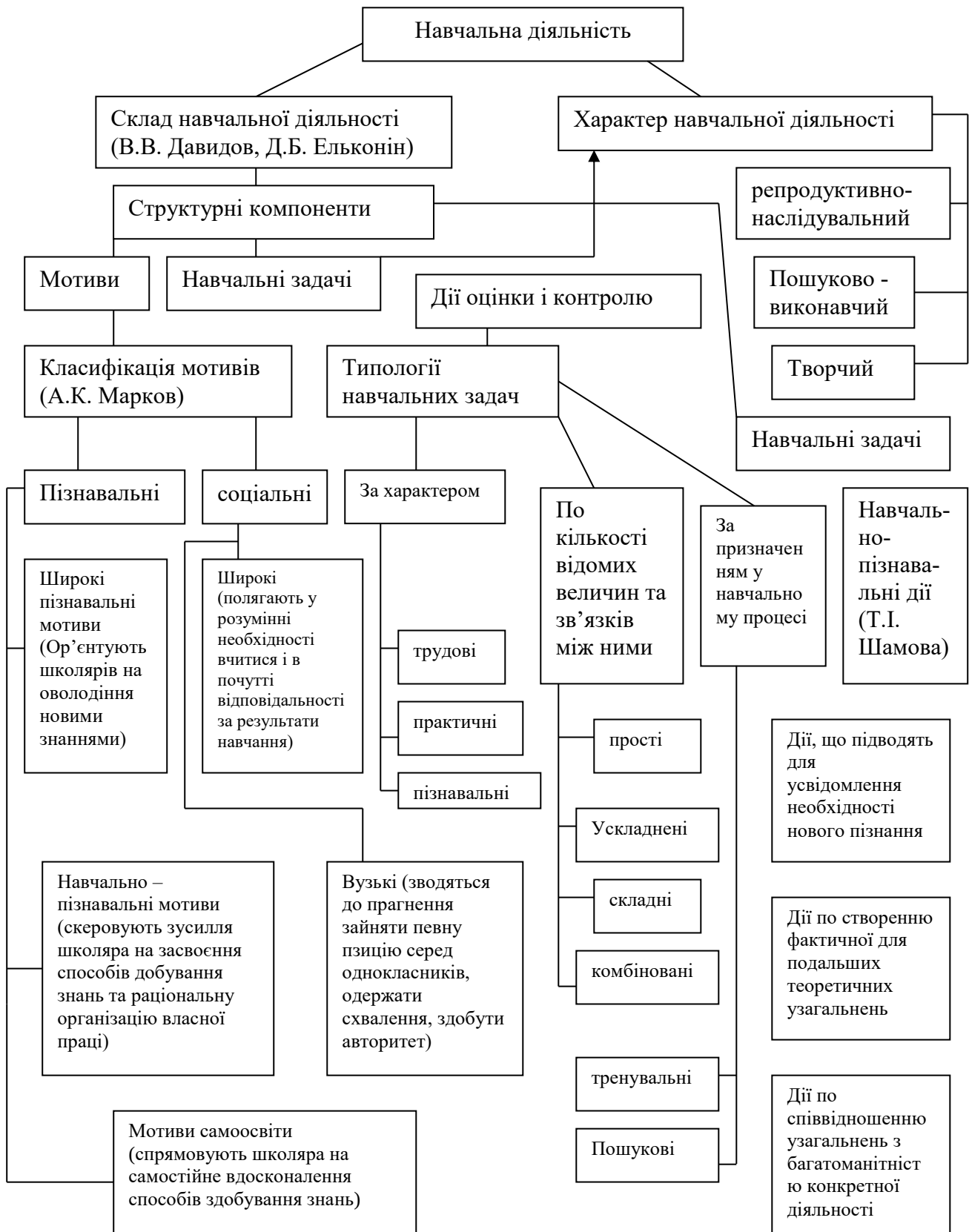


Рис. 1.2 Навчальна діяльність

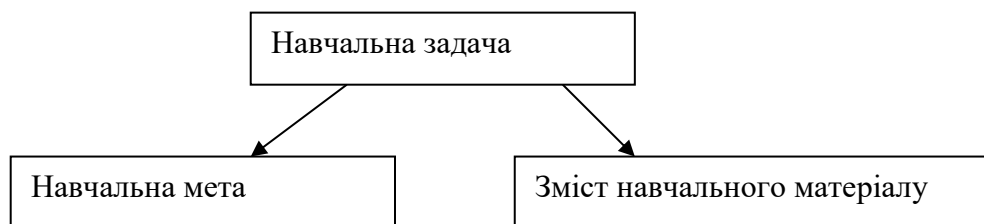


Рис.1.3 Навчальна задача

- перетворення моделі відношення для вивчення його властивостей;
- побудова системи частинних задач, які розв'язуються загальним способом.

Навчальними задачами виступають такі інтелектуальні завдання, в результаті виконання яких людина повинна розкрити деякі відношення, властивість, величину, дію; в них реалізується мета заняття, ступінь складності навчального матеріалу і його обсяг, прогнозується характер розумової діяльності та умови її виконання.

Функція оцінки результативності дій полягає в констатації рівня засвоєння учнями способів дій, спрямованих на вирішення навчальної задачі, у визначенні правильності й повноти здійснюваних умінь та навичок.

Контролюючо-оцінювальний етап навчальної діяльності включає в себе контроль за виконанням дій другого етапу та оцінку засвоєння загального способу як результату розв'язування навчальної задачі. На цьому етапі навчальні завдання можуть бути такими:

- розповісти, які знання ви використали для розв'язування даної задачі;
- вказати спосіб розв'язування задачі та його суть;
- перевірити знайдений розв'язок іншим способом;
- шляхом порівняння різних способів розв'язування задачі виділити найбільш раціональний.

Крім контролю на основі аналізу результатів виконаних дій в процесі навчання використовується поопераційний контроль на основі виявленого способу дій, поданого у вигляді правила, узагальненої схеми і т.п. Отже, діяльнісний підхід до процесу навчання - це розглядання навчання як активної діяльності учнів з метою засвоєння знань, способів їх набуття. Цей підхід передбачає таку організацію діяльності учнів в процесі навчання, при якій створюються умови для ефективного засвоєння учнями знань і способів діяльності для їхнього розвитку. Засвоєння знань відбувається не само собою, а в процесі формування видів діяльності,

Будь-який вид діяльності може здійснюватися різними прийомами в залежності від поставленої мети і завдань. Прийоми навчальної діяльності називають прийомами навчальної роботи [17, 24, 34].

Прийом діяльності визначається як система дій, що виконуються в певній послідовності і призначені для розв'язання навчальних завдань. Істотними ознаками прийому діяльності є: найбільш раціональний прийом роботи, котрий складається з окремих дій (практичних чи розумових); сутність прийому може знайти своє вираження у вигляді правила, інструкції, припису, тощо; вірний прийом допускає узагальнення, спеціалізацію конкретизацію; прийом має властивість переносу на іншу задачу, прийом можна перебудувати, створити на його основі новий прийом.

Прийом виконання роботи містить в собі перелік операцій, дій. Цей перелік може мати характер вказівок, рекомендацій, правил тощо. Враховуючи, що до складу дії входять операційні і обґрунтовані знання (як умова виконання дії), то послідовність операцій будь-якого прийому повинна відбивати наявність необхідних знань для виконання дії.

Прийоми діяльності можуть бути різного ступеня складності і узагальненості. Прийом діяльності називають узагальненим, якщо його одержали на основі аналізу окремих прийомів шляхом вилучення спільного, незмінного змісту діяльності для розв'язання конкретних (окремих) задач. Узагальнений

прийом створює орієнтовану основу необхідної діяльності для розв'язання ряду навчальних завдань і забезпечує "перенесність" прийому на широке коло нових окремих завдань.

Використання учнями прийомів діяльності в нових ситуаціях називається переносом прийомів. Переносу прийомів діяльності в нову ситуацію сприяє така методика, котра забезпечує узагальнення в процесі засвоєння. Термінами "вміння" і "навички" характеризується ступінь оволодіння учнями прийомами навчальної діяльності.

Вміння вчитися - це оволодіння сукупністю загальнонавчальних прийомів навчальної діяльності.

Існує два шляхи засвоєння учнями прийомів навчальної діяльності - стихійний і керований.

Класифікація прийомів навчальної діяльності подана на рис. 1.4.



Рис. 1.4. Класифікація прийомів навчальної діяльності.

До методики формування прийомів навчальної діяльності в процесі навчання математики ставлять такі вимоги: формування прийомів навчальної діяльності повинно бути основою навчання учнів знанням, уміннями навичкам; навчання узагальненим прийомам навчальної діяльності має плануватися так само, як навчання змісту навчального предмета; вибір методів навчання має бути тісно пов'язаним з етапами формування прийомів навчальної діяльності; контроль за процесом формування прийомів діяльності в учнів має включати в себе спеціальні завдання на перевірку їх засвоєння [28].

Знання, уміння і навички ми розглядаємо, як взаємозв'язані компоненти навчально-пізнавальної діяльності, а в зв'язку з цим доцільно виділити два види знань:

- знання про об'єкти вивчення;
- знання оперативні (про зв'язки між об'єктами).

Перші з них стосуються, наприклад, конкретних геометричних фігур, їх властивостей, понять, символів, теорем, тощо. Що ж до "оперативних знань", то вони є основою того, що учневі треба робити (мислити, аналізувати, будувати) в конкретних умовах - під час розв'язування задачі, під час аналізу математичної ситуації і прийняття рішення. Оперативними знаннями є правила дій, алгоритми, класифікації та ін., тобто ці знання пов'язані переважно з практичним застосуванням.

Питання, як навчити учнів використовувати знання, є одним з найважливіших. Оволодіння оперативними знаннями має свою специфіку, яка реалізується, зокрема, в формуванні умінь і навичок розв'язувати математичні задачі.

У вивченні шкільного курсу математики ми маємо справу з формуванням трьох видів умінь і навичок, а саме:

- спеціальні (обчислювальні, вимірювальні, графічні тощо);
- узагальнені або інтелектуальні;

- уміння і навички самостійно працювати, самостійно здобувати знання.

Інтелектуальні уміння є найбільш узагальненими уміннями, якими користується учень у процесі оволодіння як математичними знаннями, так і знаннями, здобутими у процесі вивчення усіх навчальних предметів. Йдеться про операції логічного мислення — аналіз, синтез, узагальнення, порівняння, конкретизацію, встановлення причинно-наслідкових зв'язків тощо.

Наявність третього виду умінь і навичок фактично визначає успіхи в навчанні. Якщо учень уміє усвідомити зміст математичної задачі і підготуватися до її розв'язання, уміє скористатися посібником, оформити здобуті знання, проконтролювати свою діяльність (і свого товариша), внести в неї корективи, то це означає, що такий учень уміє спланувати і організувати свою діяльність, керувати своєю психічною діяльністю. Усе це є показником того, що в учні розвинуті "інтелектуальні вміння і навички", навички "раціональної організації навчання".

Знання, вміння і навички, як і види навчальної діяльності перебувають у складних взаємозалежностях і діалектичній єдності.

Якщо структуру навчальної діяльності (як і структура будь-якої діяльності) подати в такій загальній схемі: "мета - мотив - спосіб (засіб, форма, метод) - результат", то навчальна мета зумовлюється змістом навчального матеріалу, потребами в оволодінні конкретними знаннями і на їх основі - певними видами діяльності; мотив як спонукання до цієї діяльності виявляється в єдності свідомості і здібностей. Можуть бути мотиви дій і мотиви діяльності. Навчальна діяльність складається з таких елементів: операція - найпростіший елемент, який не має своєї особливої мети; дія - сукупність взаємозв'язаних операцій, яка має: мету і породжувану нею потребу, намагання досягти її, інтерес, емоційно вольове напруження, бажання подолати труднощі і домогтися позитивного результату діяльності. Діяльність складається з дій і як процес реалізується через дії, а дія складається з операцій і реалізується через операції.

Навичку можна визначити як операцію, яка в процесі свого формування, автоматизуючись, може стати більш складної навички - дією. Наприклад, як брати в руку креслярську лінійку або олівець - це навичка, а як провести за їх допомогою паралельні, є більш складною навичкою - це конструктивна дія. Діяльність учня найбільш виразно виявляється в його вміннях і навичках. Уміння - це здатність учня виконувати певну діяльність, або дію в нових умовах, створених на основі знань і навичок. Формування у своїх учнів умінь є головним навчально-виховним завданням вчителя. Навички як засвоєні операції і дії стають показниками здібностей учня, основою його вмінь і властивостями особистості. У різних умовах навчальної діяльності знання породжують уміння, а уміння сприяють формуванню навичок і, навпаки, на основі знань формуються навички, а на основі знань і навичок вироблюються вміння. Та у процесі вивчення геометрії переважає друга послідовність залежностей: на основі знань і навичок в оволодінні графічними і символічними позначеннями і операціями формуються вміння, пов'язанні з творчим мисленням. Навички, як і уміння, формуються поетапно - від початкового осмислення операцій через свідоме використання їх до творчої майстерної діяльності.

На персоніфікованому рівні теорія навчальної діяльності конкретизується такими елементами учіння школяра: мета, зміст, організація, технологія, комунікативність, контроль і корекція, оцінка діяльності.

1.3. Формування в учнів умінь виділяти головне, суттєве в навчальному матеріалі шкільною курсу математики

Особливе значення вміння виділяти головне набуває в зв'язку з стрімким ростом об'єму наукової інформації, з якої потрібно засвоїти тільки важливе, тільки суттєве, тільки необхідне для подальшої практичної діяльності і продовження освіти. 'Без невпинної, наполегливої концентрації уваги на головному, - вказує Ю.К.Бабанський, - ми не зможемо попередити

перевантаження учнів при любых програмах і підручниках. Це необхідно пам'ятати кожному вчителю" [6].

В умінні виділяти головне, суттєве поєднуються, синтезуються багато розумових прийомів: аналіз матеріалу, порівняння окремих його частин, синтез, виділення суттєвих ознак, абстрагування, конкретизація і узагальнення.

Спеціальними дослідженнями дидактів встановлено, що процес по виділенню головного включає такі операції: виділення предмету думки (поняття, теореми, задачі) і мети його розглядання, поділ матеріалу на логічні частини і порівняння їх, сортування матеріалу (відділення головного від другорядного), знаходження ключових понять, законів, смислових опорних пунктів, групування матеріалу, виведення головної думки, знакове оформлення цього виводу у вигляді плану, опорного конспекту, схеми, моделі, алгоритму і т.п.

На основі цих логічних операцій стосовно до навчального матеріалу з математики ми розглядаємо методичну схему діяльності вчителя з виділення головного, а саме: виділення в темі, розділі основних понять, теорем, типів задач, умінь і навичок; поділ матеріалу на декілька логічно закінчених частин, в кожній з яких розглядається поняття, теорема, правило, тип задач; в кожній частині навчального матеріалу потрібно вміти виділити ключові елементи, характеристики.

Для виділення головного в навчальному матеріалі вчителю і учням передусім потрібно знати, що вважати головним в поняттях, задачах, тобто критерії головного в кожному виді навчального матеріалу з математики.

Головними, суттєвими компонентами слід назвати:

- засвоєння певної системи знань про поняття (суттєві ознаки поняття і ознаки понять, які доводяться);

- оволодіння спеціальною операційною системою дій (підведення під поняття, вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання об'єкта, виведення наслідків з поняття);

- встановлення системи понять і їх родо-видових відношень всередині системи, взаємозв'язок їх ознак;

-розкриття генезису понять.

Ми повністю розділяємо точку зору тих психологів [3, 10,18], які вважають, що знання про дії з поняттями потрібно виділити, зробити їх самостійним предметом вивчення.

Підведення під поняття. Суть процесу підведення під поняття полягає в тому, що ми перевіряємо наявність у предмета певної системи достатніх властивостей (ознак) і на їх основі робимо висновок про належність (або неналежність) об'єкта даному поняттю.

Дія підведення під поняття включає такі операції:

-виорати зручне означення або яку-небудь загальну необхідну і

Основні критерії, по яким виділяють головне, суттєве в задачі і її розв'язуванні:

- теоретична значущість результату задачі;
- структура задачі, математичні зв'язки і відношення між даними, між даними і шуканими;
- узагальнені способи розв'язування, загальні підходи, орієнтири, критерії застосування способів розв'язування, схеми, алгоритми розв'язування;
- деякі загальні і спеціальні знання про задачі і сутності їх розв'язування.

Вміння виділяти головне, суттєве в навчальному матеріалі формується в учнів в процесі вивчення понять, теорем, розв'язування задач. Дидактичні етапи формування математичних понять:

Підготовчий (пропедевтичний) етап. Повторюються ті поняття і правила оперування, які являються опорними при введенні нового поняття. Під "опорними" розуміють такі поняття або дії, на основі яких (по аналогії з якими) вводиться нове поняття.

1.Мотиваційний етап. Від зацікавленості, бажання, наполегливості, цілеспрямованості навчаючогося значно залежить успіх навчання. Збудити інтерес до нової теми, зробити значимою мету її вивчення, показати необхідність

введення нового поняття, розширення наявних знань – задачі мотиваційного етапу.

2.Орієнтувальний етап. Вводиться означення нового поняття, виділяються його суттєві ознаки (основи класифікації або правила одержання). На достатній кількості прикладів (суттєві ознаки у наявності, відмінності в несуттєвих ознаках) і контрприкладів (невиконання частини суттєвих при можливо більшому співпаданні несуттєвих ознак) формується дія підведення під поняття. Дія відпрацьовується на задачах виду: "Чи належить об'єкт до об'єкту даного поняття:" Подальше відпрацьовується виведення наслідків з поняття. Таким чином, у учнів формується орієнтація у відокремленні поняття із множини понять.

3. Розв'язування задач на безпосереднє застосування формуючого поняття. На цьому етапі реалізується практична спрямованість навчання, тобто відпрацьовуються оперативні навички використання поняття, яке вводилось, при розв'язуванні задач.

4. Етап розширення класу розв'язуваних задач до реальних (нетипових) додатків. Введене поняття застосовується при розв'язуванні задач у сукупності з раніше вивченими поняттями (внутріпредметні зв'язки) і в суміжних дисциплінах (міжпредметні зв'язки), здійснюється прикладна спрямованість навчання.

5. Абстрагування. На цьому етапі відбувається узагальнення і формалізація введеного поняття, в результаті досягається більш широке використання поняття (теорії) в різних сферах практичної діяльності.

Вказані етапи формування математичних понять приводять в систему різні методи навчання і організацію навчальної діяльності учнів.(Рис. 1.5).

Запропонована схема "Організація навчальної діяльності учнів при вивченні теорем" дає можливість вказати методичну схему навчання учнів виділяти головне в доведенні теорем: розгорнуте доведення -формулювання його суті одним - двома реченнями - розгортання доведення на основі головної думки.

Слід підкреслити, що в теоремах існування і єдиності доцільно виділяти не ідею, а етапи доведення.

Враховуючи основні критерії, по яким виділяють головне, суттєве в задачі і її розв'язанні, пропонуємо методичну схему навчання учнів розв'язуванню задач: аналіз задач даного розділу - виділення в кожному типі однієї-двох вузлових, опорних, найбільш типових задач-моделей (навколо яких ґрунтуються всі останні задачі, які відрізняються тільки варіаціями несуттєвого) - розв'язування опорних задач - складення алгоритму (схеми) розв'язування - визначення загального підходу - з'ясування типових особливостей задач даного виду - встановлення меж зміни несуттєвого в задачах типу - складення, задач (узагальнених, обернених і ін.)

Для навчання учнів виділяти суттєве дидакти рекомендують такі спеціальні види самостійної роботи: скласти план відповіді; озаглавити окремі абзаци або частини параграфу; скласти тези прочитаного; коротко викласти сутність тексту двома-трьома реченнями; скласти алгоритм розв'язування задачі визначеного типу, використовуючи вирази «зробимо висновок», «таким чином»; «отже», «узагальнимо сказане». Самостійну роботу з теорії організують за таким планом:

1. Визначити основні поняття, вказавши його рід і характеристичні ознаки.
2. Записати коротко теорему, зробити малюнок.
3. Викласти ідею доведення.
4. Скласти план доведення (вказати етапи доведення).
5. Сформулювати наслідки, якщо вони є.

Вимоги до конспекту означення. Конспект повинен включати всі компоненти означення: термін, найближчий рід, до якого належить означуване поняття; особлива ознака (або кілька таких ознак) даного поняття, що характеризує його як один із видів зазначеного роду.

На основі логіко-математичного аналізу структури твердження дається короткий запис теореми.

Наприклад. Ознака рівності трикутників за трьома сторонами: якщо три сторони одного трикутника рівні відповідно трьом сторонам, другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Короткий запис теореми може бути таким:

$$(\forall \triangle ABC \wedge \triangle A_1B_1C_1 (AB = A_1B_1) \wedge (BC = B_1C_1) \wedge (AC = A_1C_1)) \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Виділяти (без втручання вчителя) в якості головного в доведеннях ідеї, схеми, ознаки, підходи, як вказують психологи [10], можуть тільки обдаровані до математики учні, отже останніх потрібно навчити цьому.

Для навчання учнів вмінню виділяти головне, суттєве в матеріалі, який вивчається, відокремлювати суттєве від несуттєвого потрібно добитися розуміння суті термінів «суттєве», «головне», «несуттєве». Окрім цього, учні повинні знати, що вважати головним в понятті, теоремі, задачі теорії.

Оскільки вміння виділяти головне, суттєве формується і проявляється в діях учнів, важливо, щоб навчання конкретному математичному предмету та методики викладання набувало яскраво виявленої спрямованості на формування цього вміння, передбачало спеціальну і систематичну організацію всієї навчальної і мислительної діяльності учнів, а останні належним чином усвідомлювали і обґрунтовували цю діяльність.



Рис. 1.5 Організація навчальної діяльності учнів при вивченні теорем

На основі аналізу психолого-педагогічної, методичної літератури з даної проблеми, узагальнення практичного досвіду учителів і особистого досвіду пропонуємо основні навчальні задачі для формування вміння виділяти головне, суттєве в навчальному матеріалі. А саме:

- вказати знання про вказане поняття;
- скласти логіко-структурну схему вказаного поняття;
- для даного поняття вказати орієнтовну основу дій виведення наслідків із поняття;
- вказати орієнтовну основу дій підведення під поняття;
- виділити дії, адекватні суттєвим ознакам поняття і записати алгоритм виконання дій;
- скласти конспект вивчених властивостей поняття, систематизував їх;
- скласти набір достатніх умов для доведення рівності вказаних понять;
- скласти набір необхідних і достатніх умов даного поняття, понять;
- скласти і проаналізувати логічну структуру системи понять з указаних тем;
- на основі логіко-математичного аналізу структури теореми скласти конспект теореми;
- вказати головну ідею (ідеї) доведеної теореми;
- скласти план доведення теореми;
- виділити головні поняття, теореми в темі;
- вказати ознаки задач, розв'язуємих певним методом;
- скласти схему (алгоритм) розв'язування задач певним методом;
- вказати опорні задачі в темі, в розділі;
- виділити в темі її основні логічно завершені частини, вказавши головне в кожній частині;
- скласти план теми;
- скласти конспект теми;

-. скласти план відповіді на поставлене питання. Наведемо приклади виконання завдань. 1. Вказати знання про вказане поняття.

Означення паралелограма. Паралелограм - це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих.

Термін- паралелограм. Рід Чотирикутник. Видові ознаки:

- 1)одна пара протилежних сторін паралельна;
- 2)друга пара протилежних сторін паралельна.

2.Скласти логіко-структурну схему понять: "Чотирикутник", "Алгебраїчні вирази"

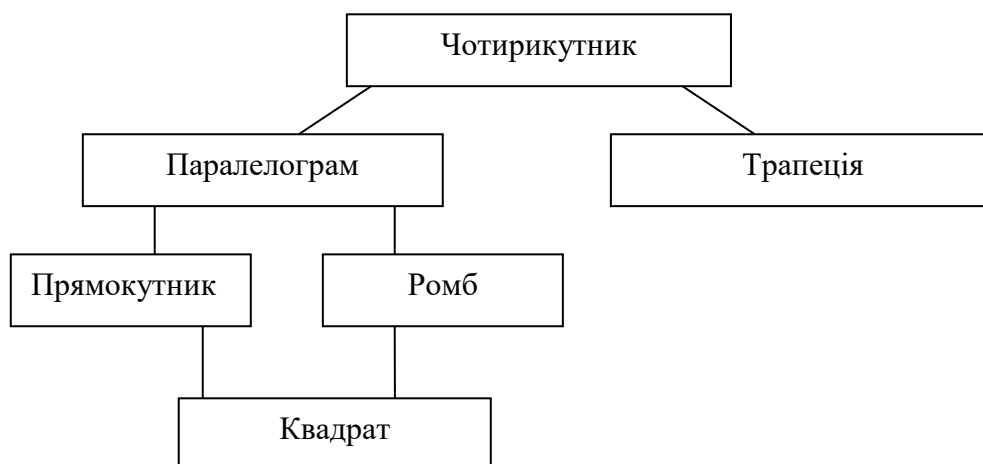


рис. 1.6. Логіко-структурна схема "Чотирикутник"

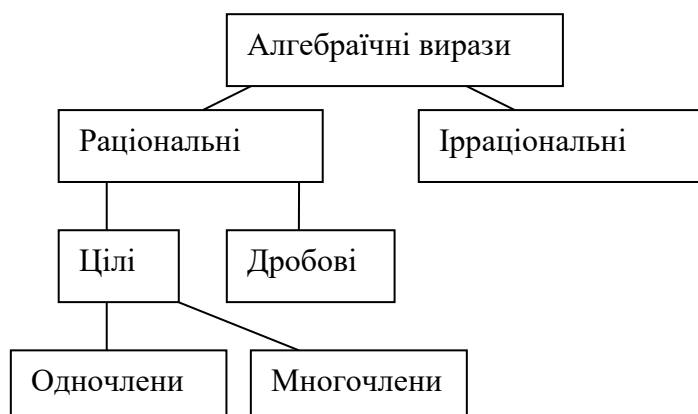


Рис. 1.7 Логіко-структурна схема "Алгебраїчні вирази"

3. Скласти конспект теореми та її доведення.

Теорема. Всяка неспадна обмежена зверху послідовність має кінцеву границю.

Умова: Послідовність (x_n) : 1) неспадна; 2) обмежена зверху. Висновок: Послідовність (x_n) має кінцеву границю.

Конспект теореми.

$$(\forall n > m (x_n \geq x_m)) \wedge (\exists M \in \mathbb{R} \forall n (x_n \leq M)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 (|x_n - a| < \varepsilon))$$

План доведення:

$$1. \quad n > m (x_n \geq x_m)$$

$$a) \forall n (x_n \leq a), b) \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} (a - \varepsilon < x_n \leq a)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 (a - \varepsilon < x_n \leq a = \varepsilon)$$

4. Скласти схему, яка відтворює зв'язки між поняттями, властивостями понять теми "Первісна та інтеграл"

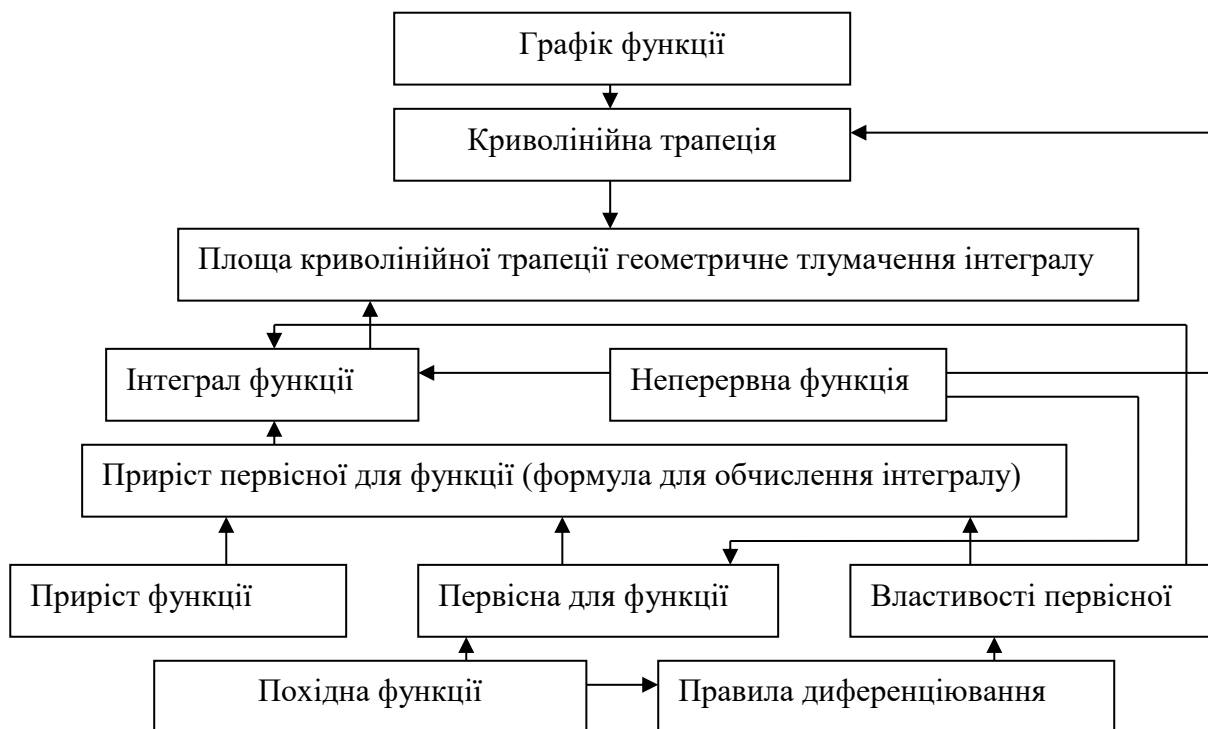


Рис. 1.8 Зв'язки між поняттями, властивостями понять теми "Первісна та інтеграл".

5. Вказати орієнтовану основу дій скорочування дробів. Орієнтована основа дій скорочування дробів:

- розкласти чисельник на прості множники;
- розкласти знаменник на прості множники;
- виділити загальний дільник в чисельнику і в знаменнику, відмінний від одиниці;
- розділити чисельник і знаменник на цей загальний дільник;
- записати відповідь.

6. В темі «Квадратична функція та її графік» вказати логічно завершені частини.

«Квадратична функція та її графік» - містить такі логічно завершені частини (або блоки):

1. Функція $y = ax^2$ при $a \neq 0$. Головне - алгоритм побудови графіка, вплив коефіцієнта a на положення графіка в системі координат, взаємне розташування графіків $y = ax^2$ і $y = -ax^2$

2. Основні властивості функції $y = ax^2$ при $a \neq 0$. Головне — вміння формулювати основні властивості, ілюструвати їх на графіку.

3. Функція виду $y = ax^2 + bx + c$, Головне - означення квадратичної функції загального виду, алгоритм побудови графіка.

4. Основні типи задач: побудова графіка квадратичної функції на основі алгоритмів; знаходження по графіку значення координат точок графіка за значенням координат однієї із них; визначення належності точок з заданими координатами графіку функції; дослідження функції по графіку; знаходження координат точок перетину графіків функцій аналітично і графічно. Головне - знати алгоритми розв'язування задач.

7. Скласти конспект самостійно вивченого тексту параграфу «Парабола», скористувавшись алгоритмом вивчення лінії методом координат на площині:

1. Записати характеристичну властивість множини точок. 2 Ввести раціонально систему координат

3.Записати характеристичну властивість в координатній формі.

4.Спростити результат, одержаний в 3.

5.Довести, що рівняння (нерівність), одержана в 4. є рівнянням (нерівністю) заданої множини точок.

6.Дослідити результат.

7.Виконати малюнок.

Навчивши учнів виділяти головне в навчальному матеріалі, ми забезпечимо засвоєння ними інших прийомів мислення та знаходити необхідні для них знання і ефективно використовувати їх у професійній діяльності, що вкрай необхідно в зв'язку з ростом об'єму наукової інформації.

1.4. Конструювання уроку.

Під "конструюванням " в дидактичному смислі цього слова розуміють процес розробки учителем дидактичної моделі сценарію майбутнього навчального процесу. Дане означення найбільш загальне, спрямоване на загальну характеристику і інтерпретацію результату, який одержують в ході конструювання. Більш конкретне означення конструювання [33] передбачає виділення його процесуальних компонентів, які в узагальненому плані називаються процедурами. Отже, конструювання уявляє собою сукупність послідовних процедур, в результаті виконання яких здійснюється розробка вчителем дидактичної моделі-сценарію майбутнього навчального процесу.

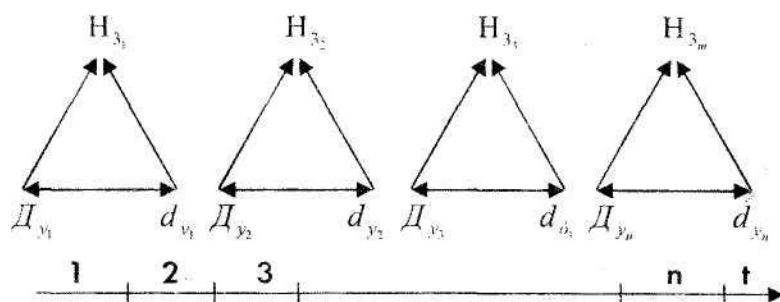


Рис. 1.7 . Здійснення процесу навчання, будь-якої його ділянки.

Умовні позначення нарис. 1.7.

t - час здійснення процесу навчання;

1, 2, 3, 4,..., n - кількість одиниць (циклів навчання)

$D_{y_1}, D_{y_2}, D_{y_3}, \dots, D_{y_n}$ - характеристика діяльності учителя в кожному циклі;

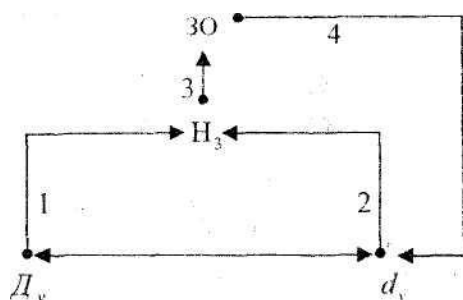
$d_{y_1}, d_{y_2}, d_{y_3}, \dots, d_{y_n}$ - характеристика діяльності учня в кожному циклі;

H_{z_i} - навчальне завдання в кожному циклі.

При $H_{z_1}, H_{z_2}, H_{z_3}, \dots, H_{z_m}$ цьому враховуються механізми взаємодії основних елементів процесу навчання, як це показано на рис. 1.8.

Зв'язки між елементами вказані стрілками.

Всі варіанти навчальної ситуації, які прогнозує вчитель, відтворюють



засвоєння визначеного фрагменту змісту і включаються в одну із моделей уроку.

D_y - діяльність вчителя

d_y - діяльність учня

H_z - навчальне завдання

ZO - зміст освіти

Рис.1.8 Взаємодія основних елементів процесу навчання.

Під навчальним завданням ми розуміємо все те, що учитель пропонує виконати учнем в процесі навчання, включаючи і роботу з теоретичними текстами. В навчальному процесі весь навчальний матеріал - тексти, задачі і вправи - втілюються в форму навчальних завдань. Тому в відповідності з змістом освіти в процесі навчання навчальне завдання є форма утілення цього змісту. Виконуючи навчальне завдання, учень розформовує зміст, закладений в завданні, і в своїй діяльності переводить цей зміст в нову форму - свідомість, тобто засвоює матеріал.

В ході підбору видів навчальних завдань для реалізації визначеної мети вони наповнюються конкретним предметним змістом і включаються потім в лінійну структуру навчального матеріалу. Конструювання лінійної послідовності видів навчальних завдань, наповнених конкретним предметним змістом є організація навчальних завдань, їх упорядкованість з часом і в відповідності з проходженням навчального процесу. Організованість, яка включає всі планові учителем варіанти навчальних завдань, є сценарій навчального процесу (уроку).

Основою формулювання навчальних завдань є конкретизація цілей навчання, відповідність цілей, зміст освіти, методи навчання навчальної ситуації, яка передбачається, логіка процесу навчання.

Розгляд процесу конструювання в розгорнутому, детальному виді допомагає розкрити розумову діяльність учителя і виразити її в зовнішніх практичних діях. Слід зауважити, що в ході дидактичної підготовки, потім методичної і практичної підготовки процес конструювання "згортається", переходить із зовнішнього практичного в внутрішній, розумовий план. Якщо процес конструювання повністю переходить в внутрішній план, то це характеризує досягнення вчителем високого рівня педагогічної майстерності і володіння навчальним матеріалом.

РОЗДІЛ 2. ОРГАНІЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

2.1. Сутність диференціації навчання і періоди її розвитку

Диференціація навчання дозволяє організувати навчальний процес на основі урахування індивідуальних особливостей особистості, забезпечити засвоєння всіма учнями змісту освіти, яке може бути відмінним для різних учнів, але є обов'язковим для всіх, виділенням інваріантної частини.

Ціль диференціації процесу навчання - забезпечити кожному учню умови для максимального розвитку його здібностей, нахилів, задоволення пізнавальних потреб і інтересів в процесі засвоєння їм змісту загальної освіти.

В розумінні диференціації виділяють три основних аспекти;

- урахування індивідуальних особливостей учнів;
- групування учнів на основі цих особливостей;
- варіативність навчального процесу в групах.

Перший аспект - урахування індивідуальних особливостей учнів характерний і для диференціації, і для індивідуалізації. Специфіка диференціації навчання - урахування індивідуальних особливостей, притаманних групам учнів, і організація варіативного навчального процесу в цих групах

Індивідуалізація - це граничний варіант диференціації, коли навчальний процес будується з урахуванням особливостей не груп, а кожного окремо взятого учня.

Під диференціацією розуміють спосіб організації навчального процесу, при якому враховуються індивідуально-типологічні особливості особистості (здібності, інтереси, нахили, особливості інтелектуальної діяльності і ін.)- Диференціація характеризується створенням груп учнів, в яких елементи дидактичної системи (цілі, зміст, методи, форми, результати) розрізняються [15].

Диференціація навчання має зміст і форму. Зміст диференціації навчання - це спеціально організований навчальний процес для певної групи учнів. Спеціальна організація навчального процесу може виявлятися в різних формах.

Диференціація може здійснюватись на різних рівнях. Рональд Де Гроот [17] виділяє три рівня, а саме: 1-й мікрорівень, коли різний підхід здійснюється до окремих груп учнів в нутрі класу. Цей рівень диференціації інколи називають внутрішньою або внутрікласною; 2-й рівень мезорівень - рівень школи, коли диференціація здійснюється внарі школи між окремими класами, профілями, напрямками; 3-й макрорівень, коли диференціація здійснюється між школами, створення різних типів шкіл. Другий і третій рівні є диференціація зовнішня.

Якщо врахувати наявні в практиці форми диференціації і вказані рівні, то результат класифікації пред'явимо в виді таблиці, (таблиця 1) Диференціація навчання

Таблиця. 1 Диференціація навчання

№ п/п	Рівні Види	Мікрорівень (внутрішня диференціація)	Мезорівень (зовнішня диференціація)	Макрорівень (зовнішня диференціація)!
	За загальними здібностями	Виконання завдань різного рівня складності. Рівнева диференціація. Групова робота в рамках моделі повного	Гімназичні класи, класи різного рівня навчання. Корекційно- розвиваючі класи, загальноосвітні	Гімназія
	За спеціальними здібностями		Групові заняття з обдарованими дітьми	Спец, школи і для обдарованих дітей (фіз.-мат., художн.,
	За індивідуальни- ми психофізіологі- чними	Врахування фізіологічних особливостей дітей при конструюванні і організації		Спец, школи

	За інтересами	Виконання творчих дослідницьких завдань, пов'язаних з інтересами учнів	Класи з поглибленим вивченням окремих предметів. Профільні класи, факультативи, гуртки. Вибір Альтернативних	
	За проєктуючою професією	Виконання творчих дослідницьких завдань, які пов'язані з проєктуючою	Класи спрофільовані на вуз. Ліцейські класи. Групові заняття по підготовці	
	За національною ознакою.			Нац. школи.
	За релігійною належністю.			Православні.
	За соціальним і майновим станом батьків			Недержавні і загальноосвітні заклади з високим рівнем оплати.

2.2. Характеристика основних форм диференціації

Основні компоненти моделі рівневої диференціації навчання математики: змістовний, організаційний і рівневий.

Змістовний компонент визначається цілями навчання, зафіксованими програмою, підручниками, які в свою чергу, визначаються системою дидактичних задач, адекватних змісту освіти і етапам навчального пізнання.

Рівневий компонент визначається системою знань і умінь з математики, адекватних змісту навчання і віковим можливостями учнів.

Внутрішньокласова диференціація.

Таблиця 2.

Форми внутрішньокласової диференціації	Способи включення диференційованих завдань в навчальний процес	Спрямованість диференційованих завдань
Виконання завдань різного рівня складності	- учитель дає сам завдання кожному учню; - учні самостійно вибирають	- завдання на ліквідацію програми в знаннях учнів; - завдання, які враховують наявні в
Дозування допомоги учителем учням	- учитель пропонує завдання але об'єм дозування допомоги визначає сам учень	- розбивка тексту або вправи на самостійні частини; - завдання з письмовою інструкцією; - робота з підготовчими вправами, з наочним матеріалом.

Організаційний компонент розкривається через систему форм навчальної діяльності учнів на уроці.

Задачі освітнього процесу:

- максимальний розвиток здібностей дітей, розкриття їх творчого потенціалу;
- реалізація освітніх програм підвищеної складності;
- вияв і розвиток нахилів, пізнавальних інтересів учнів;
- формування потреби до активної і інтелектуальної діяльності. Критерієм відбору в дані класи є навчаємість, навченість, характер мотивації.

Напрямки розширення змісту освіти:

- більш повне, всебічне вивчення ключових питань навчальної програми;
- виконання учнями завдань, які сприяють розвитку інтелектуальних умінь (порівняння, класифікація, визначення закономірностей та ін.), формування надпредметних умінь і навичок (уміння планувати свою діяльність, співвідносити результати і ціллю та ін.);
- включення в процес навчання нестандартних, творчих задач;

- посилення гуманітарних аспектів в викладанні;
- розширення кругозору учнів в процесі роботи з додатковою літературою.

Специфіка організації процесу навчання: великий об'єм самостійної роботи, роботи з додатковою літературою, проведення самостійних експериментально-дослідницьких робіт. Навчання ведеться на високому рівні труднощі, збільшується об'єм теоретичного матеріалу в базових предметах. При організації процесу навчання широко використовують елементи модульної технології. Навчальний матеріал вводиться великими блоками, організація засвоєння його учнями може здійснюватися в довільному темпі. По закінченні вивчення теми здається залік. Практикується лекційно-практична система. В єдності з урочною організовується позаурочна робота гімназистів, спрямована на розширення кругозору, культурно-естетичного самовдосконалення.

2.3. Основні напрямки здійснення диференціації навчання

1. Створення на уроках динамічних груп учнів з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей і здібностей до навчання (добір спеціальних вправ, зорієнтованих на можливості окремих учнів з різними здібностями; характер педагогічної допомоги залежно від підготовленості учнів; оптимальне поєднання колективної, групової та індивідуальної роботи учнів; індивідуалізація домашніх завдань тощо). При цьому необхідно забезпечити кожному учневі повноцінну загальноосвітню підготовку. Учні, які виявляють особливий інтерес до того чи іншого предмета і мають відповідні нахили і здібності, повинні мати можливість більш глибоко опанувати його (достатній і високий рівні).

2. Запровадження профільного навчання у старших класах (у межах передбачених навчальними планами годин). Воно має на меті забезпечити

допрофесійну підготовку старшокласників з тієї галузі знань, з якої у них проявились стійкі інтереси і здібності. Можливі різні профілі: загальний, гуманітарний, фізико-математичний, хіміко-біологічний, технічний, сільськогосподарчий, економічний, художньо-естетичний, екологічний, педагогічний та ін.

3.Розвиток мережі шкіл і класів з поглибленим вивченням окремих предметів або їх циклів.

4.Запровадження факультативів з метою задоволення різнобічних навчальних інтересів школярів.

5.Курси за вибором учнів покликані розширити сферу загально - освітніх шкільних предметів, стимулювати пошук НОВІСХ галузей діяльності в період інтенсивного самовизначення особистості підлітка.

6.Різноманітна система позакласних занять за інтересами учнів (розвиток наукових товариств, творчих студій, гуртків, олімпіад, заочних шкіл при провідних вузах, конкурсів тощо).

Основні методичні підходи до здійснення диференціації навчання:

- поєднання індивідуальних та колективних методів навчальної роботи;
- відкритість, зрозумілість рівня обов'язкової підготовки (обов'язкових результатів) з кожного предмета;
- недопустимість ототожнювання рівня викладання і рівня вимог до результатів навчання;
- дидактичне діагностування.

Розглянемо реалізацію першого напрямку здійснення диференціації навчання, основою якої є цілісна система навчальної діяльності школярів. Цілісну систему навчальної діяльності школярів представимо за допомогою схеми (рис.2.2).

Застосування трьох розглянутих видів навчальної діяльності повинно визначатися самим учителем з урахуванням таких чинників:

- дидактичної і виховної мети конкретного заняття;

- специфіки і складності навчального матеріалу;
- навченості і працездатності учнів;
- кваліфікації самого вчителя.

Формування навчальної діяльності означає "управління дорослим (вчителем, психологом, експериментатором, батьками) процесом становлення навчальної діяльності школяра" [39].

Щоб визначити, на яких заняттях та яка форма групової діяльності буде використана і передбачити все це планом, педагогу варто провести таку підготовчу роботу:

- проаналізувати зміст навчального матеріалу з конкретної теми і скласти до неї перелік базових знань і вмінь:
- визначитись з вибором видів навчальних занять (лекції, семінарів, практичних занять, заліків, комбінованих уроків тощо) та з їх кількістю при вивченні конкретної теми;
- підготувати завдання для групової роботи учнів та індивідуальної перевірки знань учнів.

Впровадження у навчальний процес групової роботи учнів потребує від учителя:

- знання внутрішньої структури класу і психолого-педагогічних характеристик кожного учня;
- бездоганного володіння предметом і методикою його викладання;
- усвідомлення мети і завдань групової діяльності;
- вміння забезпечувати повноцінне функціонування групового навчання.

Предметом вивчення є індивідуальні особливості й інтереси учнів, їх успішність, здатність до навчання, темп роботи й працездатності. Детальному з'ясуванню підлягають характер стосунків між учнями, виявлення формальних і неформальних лідерів. Результатом такого вивчення буде умовний поділ учнів класу на три типологічних групи з високим, середнім та низьким рівнем навчальних

можливостей, а також виявлення претендентів на роль лідера малої навчальної групи.



Рис. 2.2 Цілісна система навчальної діяльності школярів.

Необхідна умова виформування групової навчальної діяльності-умовний поділ учнів класу на типологічні групи з високим, середнім та низьким рівнем навчальної діяльності.

Одна із проблем, яку вирішує вчитель при формуванні групової навчальної діяльності школярів, стосується забезпечення високого ступеня активності виконання групових завдань. Отже потрібно вказати вимоги до конструювання завдань для групової роботи учнів, а саме:

- обсяг завдань має бути таким, що дозволяє здійснити закріплення й перевірку необхідного мінімуму знань;
- рівень складності завдань повинен відповідати можливостям учнів на конкретному етапі засвоєння навчального матеріалу;
- складання завдань має бути диференційованим; потрібно враховувати складність матеріалу, характер навчальної діяльності, міру допомоги учням у вирішенні навчальних задач.

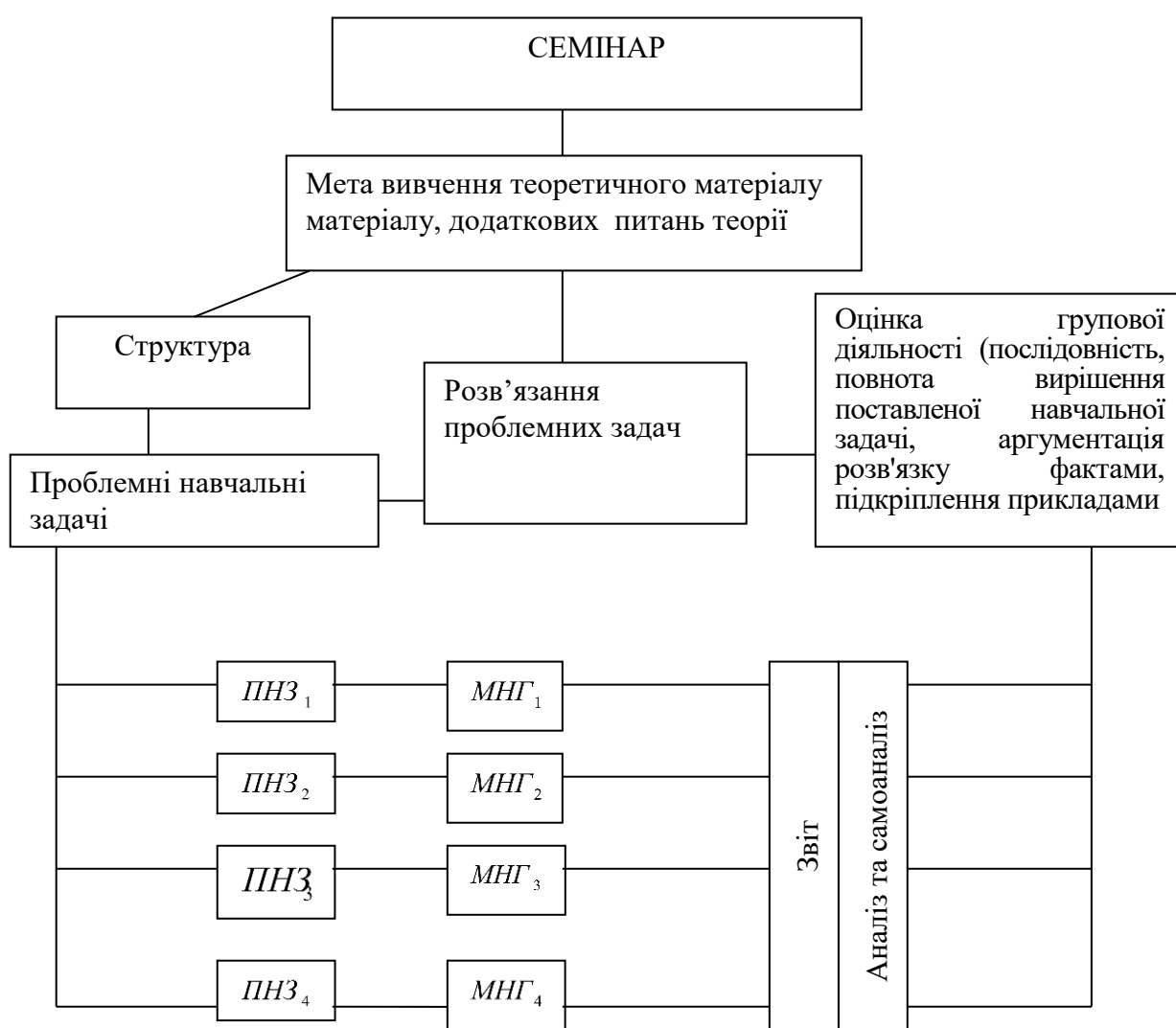


Рис. 2.4 Семінарські заняття при груповій навчальній діяльності учнів та їх зміст.

Опорна схема для складення різнорівневих завдань

№ п/п	Задача навчання	Вимоги до умінь учнів	Відповідність рівню засвоєння	Зміст завдання
1	Формування активних знань (терміни)	Уміти відтворювати терміни, поняття, формули,	Репродуктивний (пізнання) — формальні знання Вид пам'яті -	1. Що називається ... 2. Що таке 3. Дайте означення.... 4. Запишіть формулу ...
2	Формування фактичних знань (поняття, факти)	Уміти відтворю- вати, пояснювати, підтверджувати прикладами	Репродуктивний (розуміння) — елементарні знання. Вид пам'яті механічний	1. Розв'язати задачу шляхом простої підстановки 2. Знайти в тексті... 3. Пояснити ... Завдання на використання елементарних знань для пояснення типових
3	Формування уміння застосовувати знання на практиці (теореми)	Уміти відтворювати знання, пізнавати їх в новій ситуації	Конструктивний (елементарні уміння). Вид пам'яті - логічний	Завдання на використання знань за взірцем, пред'явлене учню в нестандартній ситуації (перед використанням)
4	Формування уміння творчо використо- вувати наявні знання 1	Уміти здійсню- вати перенесення знань в нову ситуацію	Творче (перенесення) — вище уміння. Утворення і нових психічних	Творчі завдання

Система диференційованих навчальних завдань повинна [35]:

- забезпечити різний темп просування в засвоєнні математичних знань, умінь і навичок різними за рівнями розумового розвитку на даному етапі навчання учнями, забезпечувати при цьому засвоєння, застосування, а також необхідне закріплення вивчаємих понять і способів математичних дій;

- будується за принципом поступового зростання складності, забезпечувати спочатку рівень обов'язкової математичної підготовки, як основу

диференціації навчання;

- сприяти загальному розвитку учнів;
- відповідати конкретним дидактичним цілям уроку, етапу навчання і узгоджуватися з формами навчальної діяльності;
- будуватися на базі діючих підручників з притягненням додаткових збірників задач і дидактичних матеріалів;
- мати задачі трьох рівней. які відповідали б розробленим в психології та методиці навчання математиці рекомендаціям відповідно складності, трудності і ступеня проблемності, а також відомим в дидактиці рівням засвоєння знань і способів дій.

Вимоги до творчих задач:

- вони повинні бути зорієнтовані, по можливості, на всіх учнів, бути простими і разом з тим стимулювати спостережливість, звертання до аналізу, синтезу, порівнянню, аналогії, індукції, конкретизації, узагальненню та ін.;
- вони мають бути тісно пов'язані з основними навчальним матеріалом, що допоможе зруйнувати існуючу на практиці стіну між навчанням і розвитком;
- доцільно добирати блоки завдань, які поєднані однією будь-якою математичною ідеєю, або проблемою: кожна задача і такої серії "висвітлює" окрему грань проблеми, що досліджується, сама ж серія дозволить вивчити проблему в цілому: необхідно учням явно повідомляти проблему, у зв'язку з якою наводиться група завдань (задач); проблему необхідно формулювати, по можливості, коротко і виразно, у формі, яка здатна зацікавити учнів і спрямувати їх на роботу;
- розвиваючий ефект дає не тільки та чи інша окрема задача, скільки вся серія в цілому, тому їх не можна розв'язувати, перестрибуючи через ті або інші задачі.

Курс математики в класах з поглибленим вивченням математики значно ширший та глибший, ніж в загальноосвітній школі. Проте треба враховувати ідейну спільність цих курсів.

Реалізація індивідуального підходу до сильних учнів.

Група сильних учнів - неоднорідна група. В роботі В.А.Крутецького [22] виділено три основні стадії розумової діяльності в процесі розв'язування будь-яких задач: отримання інформації про задачу; переробка інформації; збереження інформації.

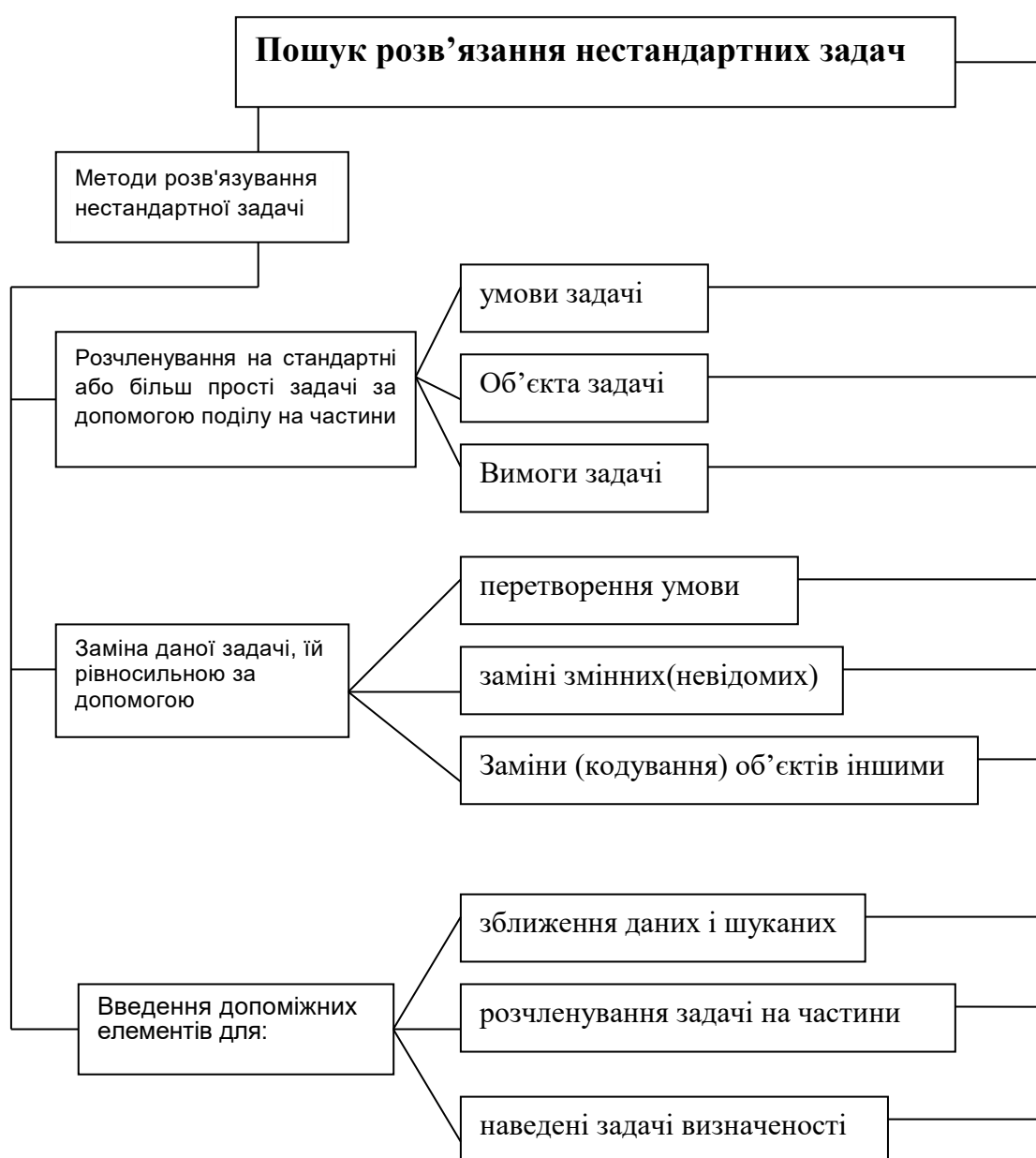


Рис. 2.7. Пошук розв'язування нестандартної задачі.

У зв'язку з цим виділяються три компоненти структури математичних здібностей: особливості отримання інформації про задачу, її перетворення і зберігання. Здається, що сильні учні, сприймаючи математичну задачу, виділяють її структуру, систематизують дані. В задачі вони звертають увагу не на конкретні чи числові значення, а на функціональні залежності, розрізняють суттєве і несуттєве для даної задачі. У процесі перетворення отриманої інформації учні з розвинутим мисленням проявляють здібності до узагальнення. Для сильних учнів характерні мислення згорнутими структурами, скороченими висновками, гнучкість розумових процесів, здібність до швидкого і вільного переключення з прямого на обернений хід думки. Цим школярам притаманна організована система пошуку, підкорена певному плану. Проби сильних учнів - це завжди цілеспрямовані і систематизовані пошуки, спрямовані на перевірку зробленого. На стадії зберігання вони не запам'ятовують дані, але добре пам'ятають способи розв'язування.

Як ми можемо бачити, на всіх трьох ступенях розв'язування задачі в першу чергу виявляється добре розвинена розумова операція узагальнення (виділяються не числові дані, а функціональні залежності, запам'ятовуються не дані, а спосіб розв'язання та ін.). Усвідомленість проявляється у можливості виразити в слові або інших символах ціль, результат і спосіб розумової діяльності, а також в здібності виявити помилкові шляхи і їх причини.

В методичній літературі для організації з сильними учнями пропонуються також індивідуальні завдання на відшукування різних засобів розв'язування однієї і тієї ж задачі, завдання, що доповнюють і розширюють основні спільні завдання. При цьому можлива допомога учням при розв'язуванні ними важких задач з використанням «підказок» - допоміжних питань і задач. Перед тим як пропонувати «підказку», треба добре знати, як проходить розумовий процес, в якому місці задачі учень може мати затруднення (труднощі). Заздалегідь оформлена «підказка» дозволяє організувати самостійну роботу сильних школярів без вчителя, який в цей час має можливість займатись іншими групами учнів. «Підказка» спільної ідеї розв'язування складається, як правило, з вказівки незвичайного співставлення даних, шуканих. Допомога в таких випадках може

бути надана вказівкою, які дані необхідно зіставити, в якому руслі отримати висновок, яку теорему необхідно використовувати, яку теорему і до якого об'єкту треба застосувати.

Індивідуальний підхід до учнів з пониженим розвитком мислення в умовах розвиваючого навчання.

У дітей із зниженим навчанням немає патологічних змін в пам'яті, не пов'язаної з мисленням, але страждає логічна пам'ять. При відповідних умовах слабкі учні концентрують увагу однаково з сильними. Але «... увага є другим явищем, її не можна вважати першопричиною виникнення труднощів, вона сама обумовлена тим, що учень через особливості свого мислення не втягується в активну навчальну роботу.

Активність учнів, яка проявляється в посиленій діяльності, в тому, що треба не просто дивитись, а бачити, не слухати, а чути, розуміти, осмислено користуватись розумовими операціями, прийомами розумової праці, також залежить від розвитку мислення. Рівень практичних дій і у сильних, і у слабких школярів практично однаковий. Мотивація, відношення до учня також залежить від того, як учень справляється з роботою, чи отримує він задоволення від неї чи ні. Наведені міркування говорять про те, що з усіх критеріїв, що використовуються для організації індивідуального підходу до навчання учнів, рівень розвитку мислення - найважливіший. Аналіз методичної літератури показує, то проблема індивідуалізації навчання часто розв'язується без урахування мети розвитку мислення. Учитель з досвідом робить це інтуїтивно вірно, але початківець захоплюється зовнішньою стороною індивідуального підходу. Необхідно, щоб обидва могли свідомо їх реалізовувати.

Отже, організація індивідуального підходу до навчання математики є одним із окладних питань, в якому пов'язані теоретичні, частіше не до кінця розв'язані питання, і практичні вимоги їх реалізації на конкретному предметі, в конкретних класах.

Для організації індивідуального підходу учителю необхідно таке: мати уяву про особливості розумової, діяльності різних груп учнів, про шляхи розвитку мислення; уміти оцінювати рівень розвитку учнів; уміти здійснювати допомогу різної міри, якщо учні натрапляють на труднощі; володіти формами організації індивідуального підходу з урахуванням необхідності розвитку мислення.

2.4. Самостійна робота учнів на уроках математики та її дидактичне забезпечення

Організуємо на уроці самостійну роботу можна умовно розділити на три основні групи: до першої групи відносяться самостійні роботи по придбанню нових знань; до другої - по формуванню умінь і навичок; до третьої - по застосуванню знань, умінь навичок (рис 2.8).

На всіх етапах проведення самостійної роботи вчитель використовує дидактичний матеріал.

Тільки при наявності дидактичного забезпечення, можна говорити про побудову особистісно-орієнтованого навчання.

Основні вимоги до розробки дидактичного забезпечення (особистісно-орієнтованого освітнього процесу) [32, 34]:

- навчальний матеріал повинен забезпечити виявлення змісту суб'єктивного досвіду учня, включно досвід попереднього навчання;
- виклад знань учитель спрямовує не тільки на розширення їх об'єму, структурування, інтегрування, узагальнення предметного змісту але і на постійне перетворення наявного суб'єктивного досвіду кожного учня;



- Рис. 2.8. Самостійна робота учнів з математики.

- в ході навчання необхідне постійне погодження суб'єктивного досвіду учнів з науковим змістом знань, які задаються;
- активне стимулювання учня до самоцінної освітньої діяльності, зміст і форми якої повинні забезпечити учню можливість самоосвіти, саморозвитку, самовираження в ході оволодіння знаннями;
- конструювання і організація навчального матеріалу таким чином, що учню створюється можливість вибору його змісту, вид і форм) виконання завдань, розв'язування задач;
- виявлення і оцінка способів навчальної роботи, якими користується учень самостійно, стійко, продуктивно; можливість вибору способу повинна бути закладена в самому завданні;
- при введенні метазнань. тобто знань про прийоми виконання навчальних дій. необхідно виділяти загальнологічні і спеціальні предметні способи навчальної роботи з \ рахуванням їх функцій в розвитку особистості учня;
- необхідно забезпечити контроль і оцінку не тільки результату, але головним чином, процес} учіння, тобто тих трансформацій, які виконує учень при

засвоєнні навчального матеріалу;

- освітній процес повинен забезпечити побудову, реалізацію, рефлексію, оцінку учіння. як суб'єктивної діяльності.

При розробці дидактичного матеріалу (системи навчальних завдань) важливо враховувати не тільки об'єктивну складність предметного змісту завдань, але і різні способи їх виконання.

В зміст завдань повинно входити опис прийомів їх виконання, які можуть задаватися безпосередньо (в вигляді викладення правил, приписів, алгоритмів дій) або шляхом організації самостійних пошуків (розв'язування різними способами, знайти раціональний, порівняльний і оцінки два підходи і ін.).

Конструкція цих матеріалів повинна бути різною. В одному випадку учень одержує завдання з указівкою тих прийомів, які він повинен використати. В іншому випадку, йому пропонується виконати завдання (розв'язати задачу), а потім описати способи виконання.

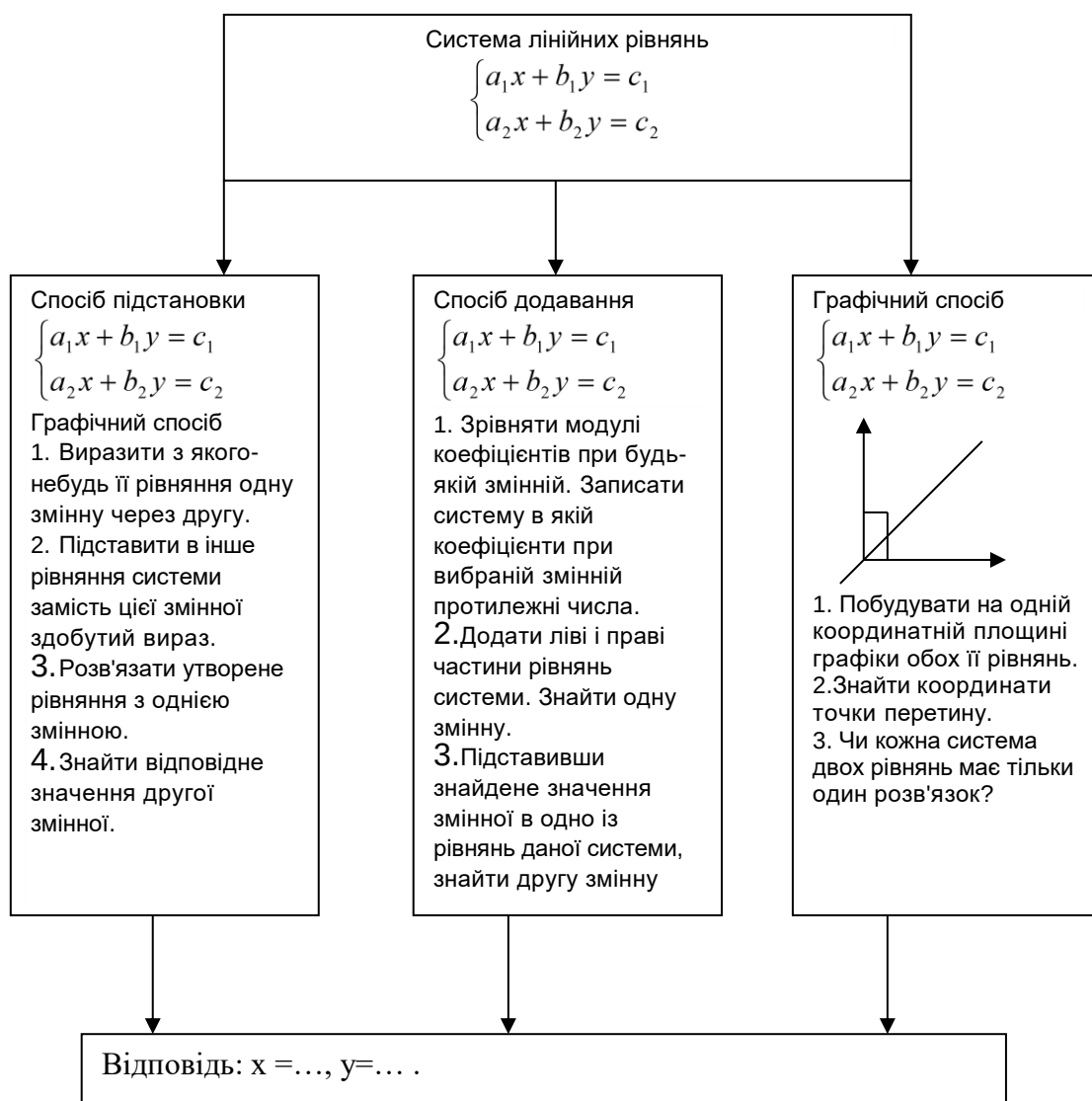
Приклади дидактичного забезпечення.

"Картка - консультант" і методика її складання.

Зміст картки складають вузлові моменти вивчаємої теми, а також алгоритм розв'язування задачі.

"Картки-консультанти" допомагають учню розв'язати задачу при виконанні домашнього завдання, при відповіді у дошки. Її можна використати і під час відповіді на запитання вчителя. Спочатку картку складає вчитель, а потім залучає до цього і учнів. В процесі роботи учні вчаться виділяти головне питання в прочитаному тексті, складати алгоритм для розв'язування задач. Робота з складення карток прищеплює інтерес до предмету, вчить творчо сприймати навчальний матеріал.

"Картка-консультант" 1. Система лінійних рівнянь.



Картка-консультант 2. . Найбільше та найменше значення функції.

Завдання. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на проміжку $[0;2]$

№ кроку	План знаходження $y_{\max}$ і y на $[a;b]$	Застосування плану
1	Знаходимо похідну функції	$y = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2	Знаходимо критичні точки	$y' = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$ або $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$ - критичні точки функції
3	Вибираємо критичні точки, які лежать всередині $[a;b]$	$0; 1 \in [0;2]$
4	Знаходимо значення функції в критичних точках	$y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ $y(0) = -3$ $y(2) = 16 - 8 - 3 = 5$
5	Із знайдених значень функції вибираємо найменше та найбільше	$y_{\min} = y(1) = -4$ $y_{\max} = y(2) = 5$

Приклади.

Застосовуючи вказаний вище план, знайдіть найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, якщо:

- 1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $[0;4]$
- 2) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1;3]$
- 3) $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2$, $[-1;1]$
- 4) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$, $[0;2]$
- 5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $[-2;2]$
- 6) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$
- 7) $f(x) = x + \cos^2 x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 8) $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $[1;e]$
- 9) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}$, $[-3;3]$

Картка-консультант 3, Похідна функції.

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ в заданій точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу Δx , коли Δx прямує до нуля, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta x > 0$$

Завдання. Обчисліть похідну функції $f(x)$ в точці $x_0 = 2$. якщо

$$\text{а) } f(x) = 3x^2 - 5x + 1; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt{7x - 5}$$

№ кроку	План обчислення похідної функції	Застосування плану	
		а)	б)
1	Фіксуємо точку x і даємо аргументу Δ	$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $x + \Delta x$	$f(x) = \sqrt{7x - 5}$ $x -$ $x + \Delta x$

2	Обчислюємо приріст функції $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\Delta f = (3(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 1) - (3x^2 - 5x + 1) = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 5\Delta x$	$\Delta f = \sqrt{7(x + \Delta x) - 5} - \sqrt{7x - 5} = \sqrt{7x + 7\Delta x - 5} - \sqrt{7x - 5}$
3	Знаходимо відношення приросту функції до приросту аргументу	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 5$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{7x + 7\Delta x - 5} - \sqrt{7x - 5}}{\Delta x}$
4	Обчислюємо похідну	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x - 5) = 6x - 5$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x + 7\Delta x - 5} - \sqrt{7x - 5}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7x + 7\Delta x - 5 - 7x + 5}{\Delta x(\sqrt{7x + 7\Delta x - 5} + \sqrt{7x - 5})} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{7x - 5}}$
5	Обчислюємо $f'(x_0)$	$f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$	$f'(2) = \frac{7}{2\sqrt{7 \cdot 2 - 5}} = \frac{7}{6}$

Приклади

Обчисліть похідні таких функцій:

1) $f(x) = 2x + 3$ в т. $x = 3$

2) $f(x) = 3x^2 - 2$ в т. $x = 0$

3) $f(x) = 5x - x^2$ в т. $x = 1$

4) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$ в т. $x = -1$

5) $f(x) = \sin 2x$ в т. $x = \frac{\pi}{4}$

6) $f(x) = \cos x$ в т. $x = -\frac{\pi}{3}$

7) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ в т. $x = 1$

8) $f(x) = \sqrt{3x + 5}$ в т. $x = 3$

Картка-консультант 4. Площа криволінійної трапеції.

Означення. Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком функцій $f(x)$, яка неперервна і не змінює на відрізку $[a; b]$ знак, прямими $x=a$, $x=b$ та відрізком $[a; b]$.

Площа S криволінійної трапеції знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Завдання. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

а) $y = \sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$

в) $y = x^2$, $y=2-x$, $x=0$

№ кроку	План обчислення площі криволінійної трапеції	Застосування плану	
		а)	б)
		$y = \sqrt{x}$ $x=2, y=9$	$y(x) = x^2$ $y=2-x, x=0$
1	Будуємо задані лінії і штриховкою відмічаємо фігуру, площу якої потрібно знайти. Встановимо, чи являється ця фігура криволінійною трапецією		
2	Записуємо формулу для обчислення площі шуканої фігури	$S = S_{ABCD} - S_{ADE} =$ $= \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_0^4 2 dx$	$S = S_{OAC} + S_{ABC} =$ $= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (2-x) dx$
3	Знаходимо межі інтегрування	$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 \end{cases}$ $\sqrt{x} = 2, x = 4$ $a = x_A = 0$ $b = x_B = 4$	$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$ $x^2 + x - 2 = 0$ $x = -2 \text{ і } x = 1$ $a = x_A = 0$ $b = x_B = 1$

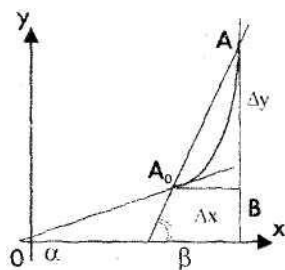
4	Обчислюємо шукану площу за формулою (1)	$S = \int_4^9 x dx - \int_4^9 2 dx =$ $= \frac{2x^2}{3} \Big _4^9 - 2x \Big _4^9 =$ $= \frac{2}{3}(27 - 8) -$ $- 2(9 - 4) = \frac{8}{3};$ $S = \frac{8}{3} \text{ кв.од.}$	$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^2 =$ $= \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{4}{2} \right) -$ $- \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6};$ $S = \frac{5}{6} \text{ кв.од.}$
---	---	--	---

Приклади. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

- 1) $y = x^2, y = 0, x = 2$
- 2) $y = x^2, y = 1$
- 3) $y = -x^2 + 1, y = 0$
- 4) $y = 1 + x^2, y = 2$
- 5) $y = 1^x, y = 0, x = 0, x = 2$
- 6) $y = x^3, y = \sqrt{x}$
- 7) $y = 2x - x^2, y = \frac{3}{4}$
- 8) $y = x^3, y = 1, x = 2$
- 9) $y = \frac{5}{x}, y = 6 - x$

Картка 4. Рівняння дотичної

1. Дотична - пряма, тому її рівняння:



$$y = kx + b$$

2, Знайдемо k

$$k = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$$

3. Знайдемо b Точка $(x_0; y_0)$ - належить дотичній

$$b = y_0 - y'(x_0)x_0$$

$$y = kx_0 + b_0; y_0 = y'(x_0) \cdot x_0 + b$$

4. Рівняння дотичної

$$y = y'(x_0) \cdot x + (y_0 - y'(x_0)x_0) \text{ або}$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Задача 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , якщо:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1, x_0 = 1;$

б) $y = 2x^2 + 3, x_0 = -1;$

в) $y = 3x^2, x_0 = 1;$

г) $y = 2x^2 - 4x + 1, x_0 = 2;$

д) $y = x^3 + 1, x_0 = 1;$

е) $y = x^3 + 1, x_0 = 1;$

ж) $y = 0,5x^2 + x + 2, x_0 = 0$

з) $y = x^3 - 3x, x_0 = -1;$

Зразок запису розв'язання для випадку б) - з)

$$1. y_0 = 2(-1)^2 + 3 = 5$$

$$2. y' = (2x^2 + 3)' = 4x$$

$$3. y'(-1) = 4(-1) = -4$$

$$4. y = 5 + (-4)(x + 1), y = 5 - 4x - 4,$$

$$y = 1 - 4x$$

Відповідь: $y = 1 - 4x$

Самостійно розв'язати випадки в)-з

Задача 2. До графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 проведена дотична.

Знайти кут нахилу дотичної до додатнього напрямку осі абсцис, якщо

$$a) y = x^2, x_0 = \frac{1}{2}$$

$$б) y = x^2 + x\sqrt{3} + 1, x_0 = 0$$

$$в) y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 1$$

$$г) y = 2x^2 - 5x + 2, x_0 = 1$$

$$д) y = 3x^2 + x\sqrt{3} - 2, x_0 = 0$$

$$е) y = x^3 - 4x + 5, x_0 = -1$$

$$y' : y' = (x^2)' = 2x$$

$$y'(x_0) : y'(x_0) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0); \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$1. y' = (x^2 + x\sqrt{3} + 1)' = 2x + \sqrt{3}$$

$$2. y'(0) = 2 \cdot 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$4. \alpha = 60^\circ$$

РОЗДІЛ 3. НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ПІДХІД ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

3.1. Числові системи та їх вивчення в загальноосвітній школі

Числа. Натуральні числа та дії над ними.

Поняття числа - стрижневе поняття шкільного курсу і служить фундаментом, на якому будується вивчення функцій, тотожних перетворень, рівнянь та ін.

В учнів повинно бути уявлення про число як про об'єкт, з котрим можна проводити арифметичні операції.

В шкільному курсі математики ми розглядаємо множини натуральних цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел, які є прикладами кілець і полів, що вивчаються в алгебраїчній науці з сійної точки зору.

Вчитель, проводячи лінію розвитку поняття числа, додержується принципу розширення множини A до множини B , визначаємого такими умовами:

1. A повинна бути під множиною B ($A \subset B$).

2. Операції з елементами із множини A такі ж самі, що й з елементами із множини B , але суть тих операцій, які були тільки в множині A , залишаються незмінними.

3. На множині B повинна виконуватись операція, яка в множині A є нездійсненою або не завжди здійсненою.

4. Розширення B повинно бути мінімальним з усіх розширень множини A і повинно визначуватись однозначно з точністю до ізоморфізму.

Числа мають властивості, які ми виражаємо в поняттях їх рівності, суми і добутку.

Еволюція поняття числа - залежить від розвитку понять рівності, суми, добутку. Змінюючи умови рівності, суми і добутку, ми одержуємо нові числа.

Для того, щоб нові числа були рівноправними і узаконеними, необхідно внести означення:

I. 1) Поняття рівності.

2) Поняття "більше" і "менше", тобто установлення критерію порівняння нових чисел між собою і з раніше відомими числами, крім комплексних чисел, для яких поняття "більше" і "менше" не вводяться.

II. Поняття суми.

III. Поняття добутку.

Потрібно показати також, що нові числа підпорядковані всім законам арифметичних дій, які встановлено для вивчаємих раніше чисел.

Схематичний зв'язок понять за темою "Числова система" ілюструє рис. 3.1.

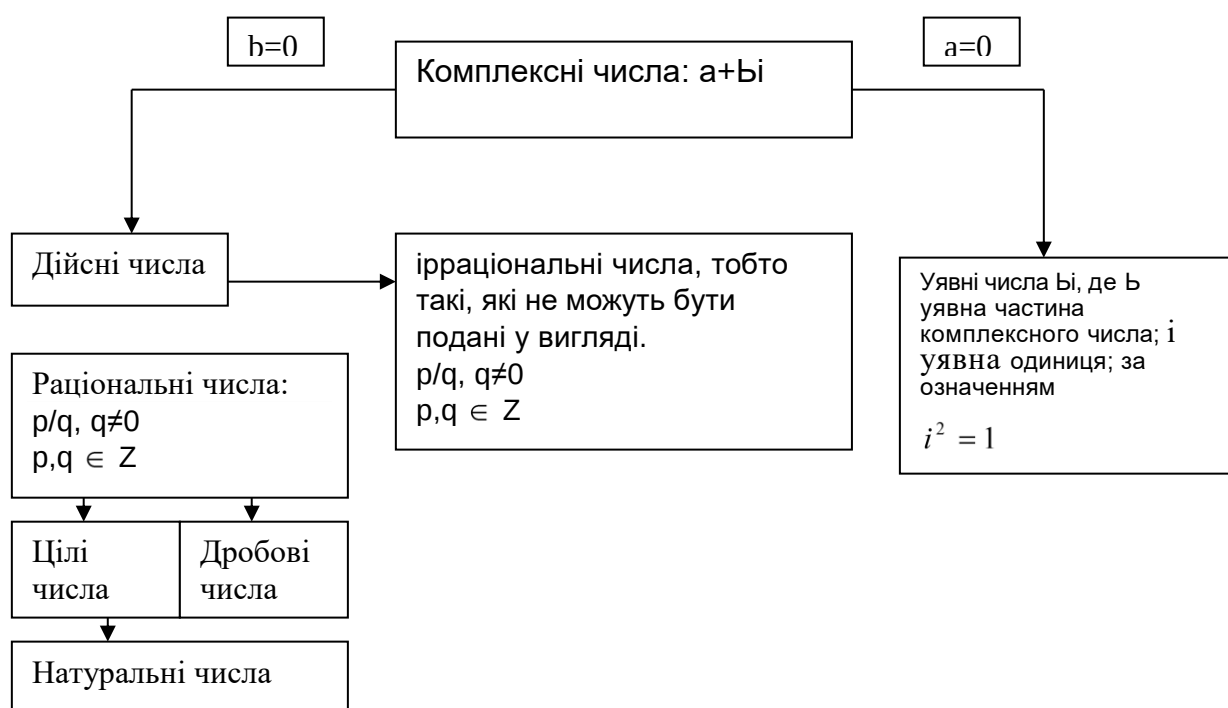


Рис. 3.1 Числова система

Властивості числової системи:

1. До істотних ознак структурних елементів числової системи належать такі:

а) підпорядкованість законам алгебраїчних операцій;

б) наявність у кожного елемента числової системи модуля, тобто міри, яка позначається символом $| \cdot |$.

Схематичний зв'язок понять за темами "Властивості числової системи та основні поняття математики" ілюструє рис. 3.2.

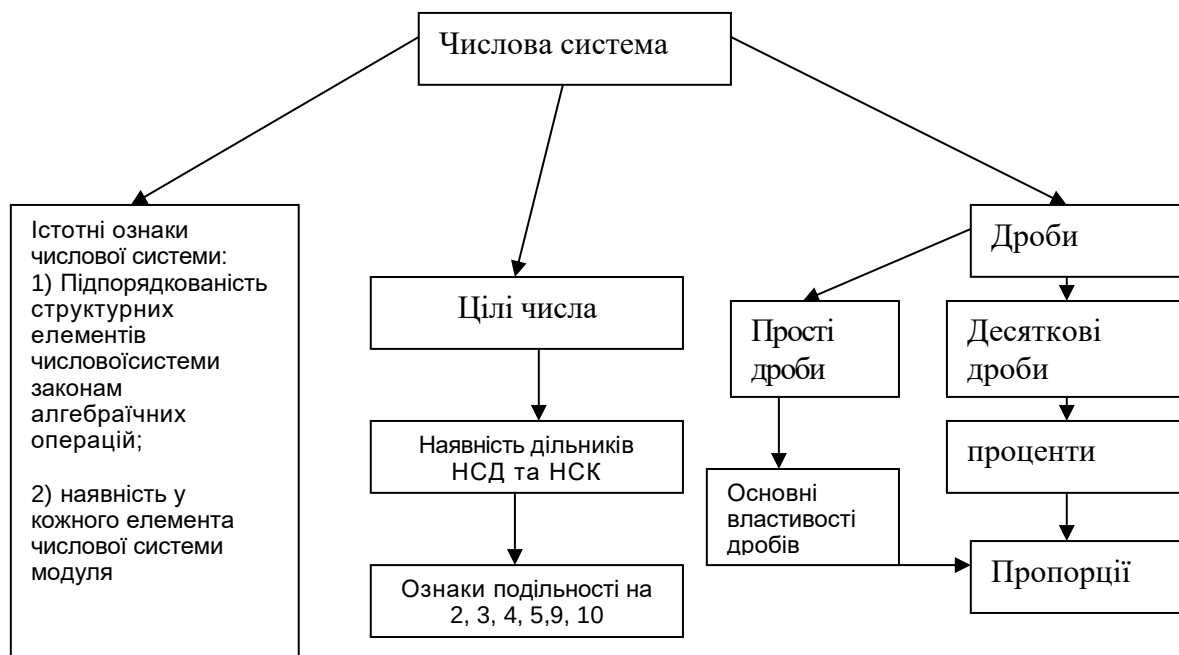


Рис. 3.2 Властивості числової системи та основні поняття математики.

В математиці існує два підходи до побудови числових систем: аксіоматичний і конструктивний. У шкільному курсі математики присутні елементи обох цих підходів.

Натуральні числа і дії над ними

Арифметика наука про числа - перша складова частина математики; арифметичні знання - основа, на якій будується подальше навчання математиці.

Для всякого поняття, що вводиться заново, обов'язковим є точне означення. Найбільш поширеною є система первинних понять і аксіом арифметики натуральних чисел, яку дав італійський математик Пеано. Сучасна система аксіом така:

Первинні поняття

1. Число (натуральне).

2.Одиниця.

3.Наступне число.

Аксіоми

1.Одиниця є число.

2.За кожним числом безпосередньо йде єдине наступне число,

3.Два числа, за якими йде одне й те саме число, рівні між собою.

4.Одиниця не йде ні за яким числом.

5.Якщо будь-яке твердження є правильним для одиниці і коли воно, будучи справедливим для будь-якого числа, є справедливим і для наступного числа, то це твердження є правильним для всякого числа.

У загальноосвітній школі не викладаються аксіоми натуральних чисел, хоч наявно учні ними користуються. У 5 - 6 класах певна частина нових понять дається учням без означень. Термін "аксіома" не дається.

Вивчення натуральних чисел у 5 класі має на меті:

1) поглибити знання учнів про нумерацію багатоцифрових чисел; 2) розкрити роль нуля як числа; 3) систематизувати відомості про чотири арифметичні дії, зокрема про зв'язок між прямими та оберненими діями; 4) узагальнити знання учнів про закони арифметичних дій і їх застосування.

Розглянемо кожний з цих напрямків окремо.

1) Під нумерацією розуміють спосіб читання (усна нумерація) і записування (письмова) нумерація чисел. Учням краще говорити не про нумерацію, а про читання і записування багатоцифрових чисел.

З питань нумерації учні 5 класу не дістають принципово нових знань порівняно з 4 класом, де вони вже вивчили нумерацію до мільйонів, навчилися читати і записувати числа в цих межах, встановлювати співвідношення між розрядними одиницями, записувати число у вигляді суми розрядних одиниць.

Подальше застосування відомостей у записуванні багатоцифрових чисел вимагає, щоб учні правильно вживали слова "цифра" і "число", уміли читати і записувати будь-яке число в межах мільярдів, розуміли позиційний принцип

десятькової нумерації, уміли записувати число як суму розрядних доданків. Найбільше помилоку записуванні багатоцифрових чисел припадає на ті числа, в яких немає одиниць певних розрядів, а то й одиниць цілих класів, бо учні недостатньо усвідомлюють ідею поділу чисел на класи і розряди. Тут не допоможе орієнтація на розряди - заучування номерів розрядів. Головну увагу треба зосередити на класах і добитися, щоб учні добре вміли називати класи, починаючи з класу одиниць і закінчуючи класом мільярдів, і навпаки, починаючи з класу мільярдів і закінчуючи класом одиниць.

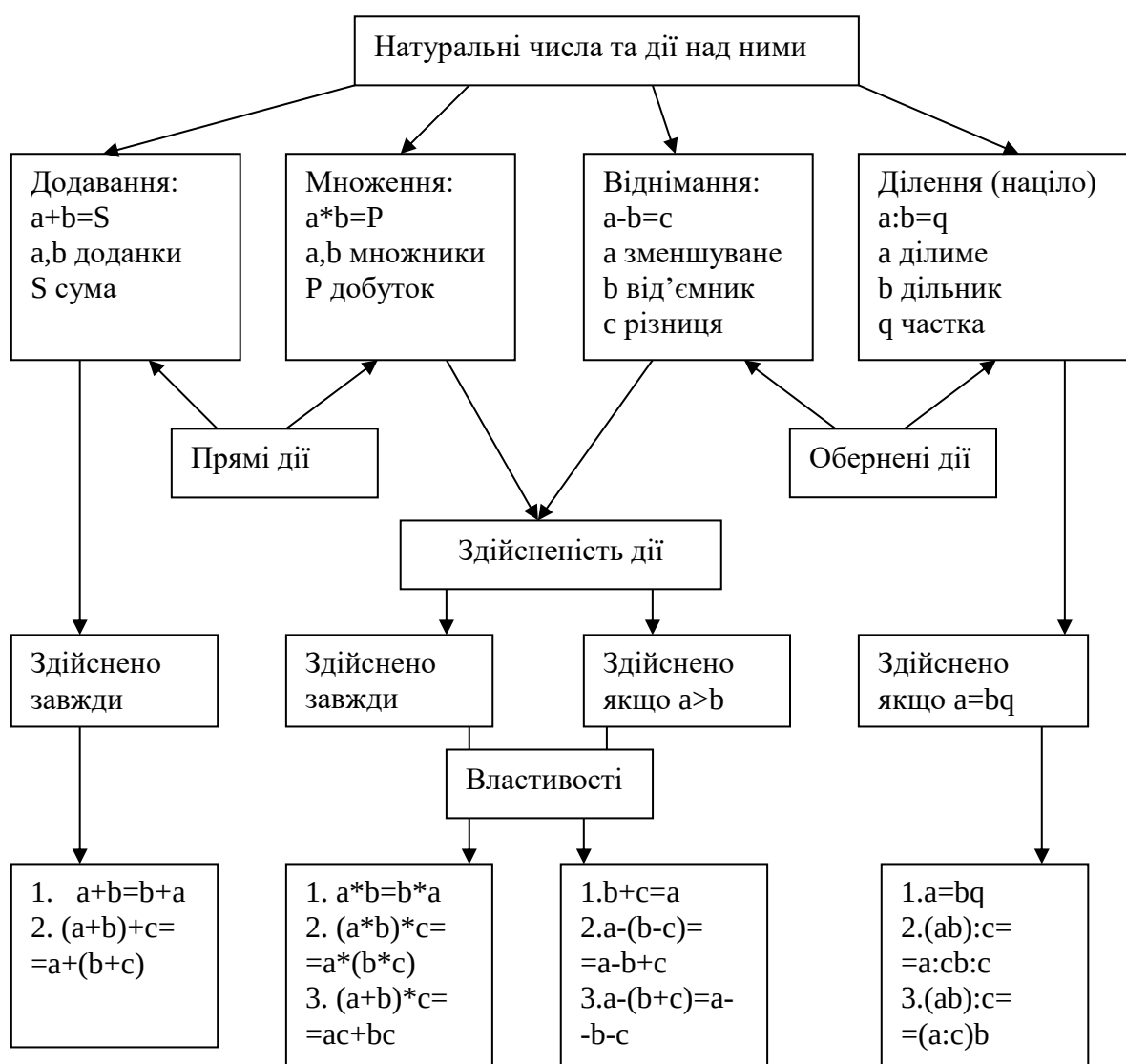


Рис. 3.3 Натуральні числа і дії над ними

2) Питання про роль нуля в початковому навчанні математиці тривалий час було предметом гострих дискусій. Йшлося про те, чи варто в курсі арифметики

початкових класів знайомити учнів з нулем як числом, чи обмежитися лише тим, щоб вони знали нуль як цифру, що показує відсутність одиниць певного розряду, тобто лише як показника розряду:

- уся сучасна наука вважає нуль числом;
- якщо ми не визнаємо нуль числом, то змушені будемо визначити, що різниця (а після введення від'ємних чисел - і сума) двох чисел може не бути числом;
- якщо ми не визнаємо нуль як число, то змушені будемо виконувати арифметичні дії над тим, що не є числом; навпаки, визначаючи нуль числом, можна довести до свідомості учнів: нуль можна додавати і віднімати, на нуль можна множити, отже, нуль є числом;
- нуль, який спочатку виникає як заперечення натурального числа, з розвитком поняття числа стає в один ряд з натуральними числами, виступає як продукт операцій над натуральними числами, підпорядковується однаковим з ними законам і правилам.

У процесі вивчення чотирьох арифметичних дій у 5 класі слід розрізняти вимоги до техніки обчислень і теоретичні питання, пов'язані з обґрунтуванням кожної дії, розглядом взаємозв'язку між прямими та оберненими діями, ролі нуля як компонента дій.

Дія додавання в підручниках з математики не визначається. Зміст дії розкривається на конкретних прикладах додавання натуральних чисел. Звернути увагу в процесі вивчення дії додавання треба, насамперед, на виконуваність дії та її однозначність.

Під час вивчення дії додавання важливо з'ясувати той факт, що термін "сума" вживається у двох значеннях: як результат дії додавання і як вираз, що складається з двох або кількох чисел (змінних), сполучених знаком "плюс". Тому в першому випадку говорять про "значення суми"

Дія віднімання вводиться за означенням: "Відняти від числа a число b означає знайти таке число x , яке в сумі з числом b дає a : $b+x=a$ ". На цьому є гани

навчання учням ще важко вивчити це означення і тим більше повністю усвідомити його. Адже тут йдеться про логічне виведення нової дії (віднімання) з уже відомої (додавання). Зміст дії віднімання розкривається на зрозумілій учням задачі, від розв'язання якої можна перейти до узагальнення у вигляді наведеного вище означення.

У підручниках з математики не розглядається у загальному вигляді питання про виконуваність дії віднімання і однозначність результату. Проте як підсумок розв'язування відповідних вправ учні повинні усвідомити такі факти:

- 1) різниця натуральних чисел буде натуральним числом, якщо зменшуване більше за від'ємник;
- 2) якщо зменшуване дорівнює від'ємнику, то різниця дорівнює нулю;
- 3) якщо зменшуване менше за від'ємник, то нема натурального числа, яке дорівнювало б різниці цих чисел.

У добре підготовлених класах доцільно записати умову, за якої можливе віднімання від числа a числа b , у вигляді нерівності $a \geq b$ і підкреслити, що за цієї умови маємо єдине число, яке дорівнює різниці даних чисел a і b .

Після розгляду дій додавання і віднімання систематизуються знання учнів на перевірку цих дій. Важливо, щоб учні усвідомили можливі два способи перевірки віднімання: знаходження зменшуваного за від'ємником і різницею (додаванням) і знаходження від'ємника за зменшуваним та різницею (відніманням).

Мова йде не про заучування відповідних правил, а про вміння їх застосовувати на конкретних прикладах.

У 5 класі систематизуються й узагальнюються знання учнів про дію множення, набуті в 3 - 4 класах.

Зміст поняття добутку дається в загальному вигляді, а саме: суму b доданків, кожний з яких дорівнює a , називають добутком чисел a і b й позначають $a \cdot b$. Це означення учні засвоюють поступово, розглядаючи приклади на записування сум однакових числових і буквених доданків у вигляді добутків, і, навпаки, на записування добутків у вигляді відповідних сум.

Спеціально розглядаються випадки множення одиниці й нуля на натуральне число: $1 \cdot b = b$, $0 \cdot b = 0$. Оскільки множення є окремим випадком додавання, то дію множення можна завжди виконати.

Після розгляду задачі з конкретними числовими даними зміст дії ділення розкривається так: поділити число a на число b означає знайти таке число x , при множенні якого на число b дістанемо $a : x \cdot b = a$.

Завдяки систематизації відомостей про чотири арифметичні дії забезпечується єдиний підхід до вивчення обернених дій - віднімання і ділення. Ці дії вводяться за означеннями, які мають однакову структуру і відображають зв'язок між відповідними прямими та оберненими діями. Подібність цих означень певною мірою допомагає учням запам'ятовувати їх, проте зміст кожного з них усвідомлюється поступово і у частини учнів викликає деякі труднощі. Щоб подолати ці труднощі, важливо розв'язувати вправи, в яких вимагається пояснити зміст дії ділення на числових прикладах [25].

Істотне значення має питання про виконуваність дії ділення.

- дія ділення в множині натуральних чисел не завжди можлива;
- обґрунтування "заборони" ділення на нуль.

Важливим питанням є техніка ділення. Це виявляється, зокрема, у невмінні відшукати першу цифру частки, коли друга цифра дільника більше 5. Щоб учням було легше це робити, треба приділити достатню увагу усному множенню двоцифрових чисел на одноцифрові.

Досвід показує, що найбільше помилок припадає на ті випадки, коли всередині частки є нулі.

До питань техніки дії ділення, які потребують особливої уваги, належить і ділення чисел, що закінчуються нулями. Щоб запобігти помилкам, такі числа доцільно ділити згідно із загальним правилом, не закреслюючи нулі у діленому і дільнику.

Розглядаючи ділення з остачею, слід добитися, щоб учні добре засвоїли залежність між діленим, дільником, часткою і остачею (основну теорему про подільність).

У процесі вивчення відомостей про дільники і кратні та ознак подільності чисел нові поняття водяться через систему вправ. Ознаки подільності є тими твердженнями, що їх учні мають завчити напам'ять, і на кожну ознаку вони повинні вміти наводити власні приклади.

Закони прямих арифметичних дій (додавання і множення) є теоретичною базою для обґрунтування техніки дій над багатоцифровими числами і мають безпосереднє практичне значення як засоби реалізації обчислень. Проте цим їхня роль не вичерпується. Тотожні перетворення виразів у курсі арифметики і початків алгебри теж ґрунтується на законах арифметичних дій.

Подаючи закони арифметичних дій за допомогою змінних, треба щоразу підкреслювати, що записані рівності правильні за будь-яких значень змінних. Наприклад: за будь-яких значень змінних a і b є правильною рівністю $a+b=b+a$; за будь-яких значень a , b і c є правильною рівністю $(a+b)*c=a*c+c*b$ та ін.

Послідовність вивчення натуральних чисел і дробів.



Дії з багатоцифровими числами.

Закон поглинання нуля.

Зв'язок з геометрією: площа прямокутника; об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Дробові числа

Мотивування введення поняття дробу.

. Пропедевтика звичайних дробів у 5 класі, що спочатку вивчати: десяткові дробі чи звичайні?

Спочатку - десяткові:

- їх запис - продовження нумерації цілих чисел;
- велика практична значимість; зв'язок з метричною системою мір;
- техніка операцій над десятковими дробами простіша;
- обчислення за допомогою ЕОМ простіші;
- обґрунтування правил додавання, віднімання десяткових дробів простіші.

Спочатку - звичайні:

- учням важко $1/10$, $1/100$, $1/1000$, ... без опори на $1/2$, $1/3$, $1/4$...;
- спираємося на відомості про звичайні дроби із початкової школи;
- дріб результат ділення цілого на рівні долі і взяття декілька таких долей -

.-Десяткові дроби як засіб запису дробів із знаменником виду 10.

Історичні відомості про виникнення дробових чисел у процесі вимірювання.

Координатний промінь для позначення дробів, порівняння дробів і вивчення основної властивості дробу.

Арифметичні операції із звичайними дробами. Особливості додавання дробів з різними знаменниками.

Розв'язування рівнянь.

Текстові задачі, які розв'язуються арифметичними і алгебраїчними способами. Зв'язок з геометричним матеріалом.

Мета формування поняття звичайного дробу - підготувати необхідний ґрунт для вивчення десяткових дробів. Учитель повинен звернути особливу увагу на термін "дробове число" у програмі і підручнику.

Терміни "звичайний дріб", "чисельник", "знаменник" вводяться у зв'язку з розглядом поділу предметів на рівні частини. Одразу ж дається поняття про рівні дроби.

Принципово новим кроком у розгляді питання про рівні дроби у 5 класі є твердження "Два рівні дроби - це різкі позначення одного й того самого числа".

По-перше, учні зустрічаються тут з новим розумінням терміна "рівність", по-друге, вони вперше сприймають дріб як число, не вдаючись до розгляду конкретних предметів. Формування в учнів поняття дробового числа - тривалий процес.

В математиці дробове число визначається як клас еквівалентних дробів. Кожний із дробів, які входять у визначений клас еквівалентності і є представником цього класу. Тому поняття "звичайний дріб" і "дробове число" відрізняються один від одного як елемент множини і множина.

Важливим елементом методики вивчення чисел є переконання учнів в доцільності введення нових чисел:

- можливість записати долі за допомогою звичайних дробів;
- операція ділення натуральних завжди здійснена;
- пов'язана з задачею вимірювання величин.

Основним змістом перших уроків вивчення десяткових дробів є читання і записування десяткових дробів та їх порівняння.

Початкове ознайомлення з поняттям десяткового дробу пов'язується з метричною системою мір. Спеціальну увагу слід звернути на читання і записування дробів, у яких пропущені одиниці певних розрядів.

Для усвідомлення нумерації десяткових дробів важливе значення має порозрядне читання і записування їх.

Порівнюють десяткові дроби за величиною двома способами: через зорове сприймання кожного з дробів і порівняння відповідних розрядних одиниць цілої та дробової частин та зіставлення того, як розміщені дані дроби на координатному промені.

Дії додавання і віднімання десяткових дробів у більшості учнів 5 класу не викликають труднощів, бо вони виконуються так само, як додавання і віднімання натуральних чисел.

Щоб пояснити дію додавання десяткових дробів, можна скористатися аналогією з додаванням натуральних чисел, підкреслюючи, що десятковий принцип нашої нумерації поширюється і на десяткові дробі.

Досвід вивчення десяткових дробів показує, що частина учнів робить помилки при додаванні цих дробів, бо неправильно підписує доданки [15].

Техніка віднімання десяткових дробів не становить нічого принципово нового порівняно з додаванням, проте у складніших випадках (наприклад, при відніманні десяткового дробу від одиниці, від цілого числа) частина учнів допускає помилки.

При розгляді дії множення десяткових дробів:

- обґрунтувати доцільність правила множення десяткового дробу на десятковий гріб;
- розглянути алгоритм множення;
- звернути увагу учнів на те, що правило множення складається, по суті, з двох частин: у першій частині йдеться про те, як звести множення десяткових дробів до множення цілих чисел, а в другій зазначається, скільки десяткових знаків слід відокремити в добутку;
- під час множення десяткових дробів учні допускають найбільше помилок тоді, коли в добутку виходить дріб, який закінчується нулями, і коли не вистачає десяткових знаків, щоб відокремити комою потрібну їх кількість.

Особливістю вивчення ділення десяткових дробів є те, що ця дія вивчається в два етапи: спочатку розглядається ділення дробу на натуральне число, а потім, відповідно, ділення на десятковий дріб. Найбільше помилок учні допускають у діленні десяткового дробу на 10, 100, 1000 і та ін., коли в числі не вистачає цифр для перенесення коми на потрібну кількість знаків. Головну увагу треба зосередити на техніці ділення на десятковий дріб і засвоєнні самого алгоритму ділення.

Додатні і від'ємні числа.

Історія виникнення від'ємних чисел.

Діофант, індійські математики. Майно і борг. Леопард Ейлер про множення чисел з різними знаками. Рене Декарт: неправильні числа. Мотивування введення від'ємних чисел у школі:

- алгебраїчне (можливість виконання віднімання);
- геометричне (відповідність між точками прямої і числами);
- практичне (характеристика зміни величини).

Від'ємні числа - рівноправні з додатними.

Означення поняття рівності.

Критерії порівняння нових чисел між собою і з раніше відомими числами.

Означення дій додавання і множення.

Установлення справедливості законів дій для нових чисел.

Деякі методичні прийоми, які використовуються при введенні поняття від'ємного числа:

- робота з моделлю термометра;
- текстові задачі про зміну температури і про рух за течією і проти течії;
- робота з числовою прямою.
- Модуль числа. Протилежні числа.

Додавання додатних і від'ємних чисел. Числова пряма. $(+a) + (-a) = 0$

Віднімання від'ємних чисел як дія, обернена додаванню. Таблиці:

1. $(+) \cdot (+) = (+)$

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

$$(+) \cdot (-) = (-)$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

II. Закони додавання:

переставний: $a + b = b + a$

сполучний: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Наявність нейтрального елемента: $a + 0 = a$

Наявність протилежного елемента: $a + (-a) = 0$

III. Закони множення:

переставний: $a \cdot b = b \cdot a$

сполучний: $a(b + c) = ab + ac$

Наявність нейтрального елементу: $a \cdot 1 = a$

Наявність оберненого елементу: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Дійсні числа.

Введення дійсних чисел

Існують різні підходи до побудови теорії дійсних чисел:

- Дедекінда (побудова перерізу на множині раціональних чисел;
- Вейерштраса (представлення дійсного числа у вигляді нескінченного десяткового дробу);

-Кантора (побудова фундаментальної послідовності раціональних чисел). В підручниках (посібниках) для загальноосвітньої школи "в чистому вигляді" жодна з концепцій (Дедекінда, Вейерштраса) не була реалізована. Ідеї цих концепцій взаємно збагачують друг друга. За нашого часу дійсні числа вводяться так:

1)Робиться спроба розв'язання рівняння $x^2 - 2 = 0$. Це веде до необхідності доведення теореми: "Не існує ні цілого, ні дробового числа, квадрат якого дорівнював би числу 2".

2)Позаяк теорему доведено, надалі ставиться задача знаходження числа, квадрат якого був би близький до числа 2.

3)Паралельно з цим поняття дійсного числа вводиться на геометричній основі. (Задачі: а) розв'язати геометрично рівняння $x^2 = 2$; б) знайти довжину діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює 1).

4)Вимірювання відрізків. Сумірні і несумірні відрізки. Десяткові наближення довжини відрізка.

5)Нескінчені періодичні і неперіодичні дробі.

6)Перетворення звичайного дробу в нескінчений періодичний і обернена задача.

7)Ірраціональні числа.

8)Дійсні числа, (рис.3.4.)

9) Порівняння дійсних чисел.

10) Операції над дійсними числами.

Зазначимо, що між множиною дійсних чисел і точками координатної прямої існує взаємно-однозначна відповідність: кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число. Цим множина дійсних чисел істотно відрізняється від усіх інших відомих учням числових множин. Слід зауважити, що теорія дійсних чисел досить складна і не входить у програму загальноосвітньої школи.

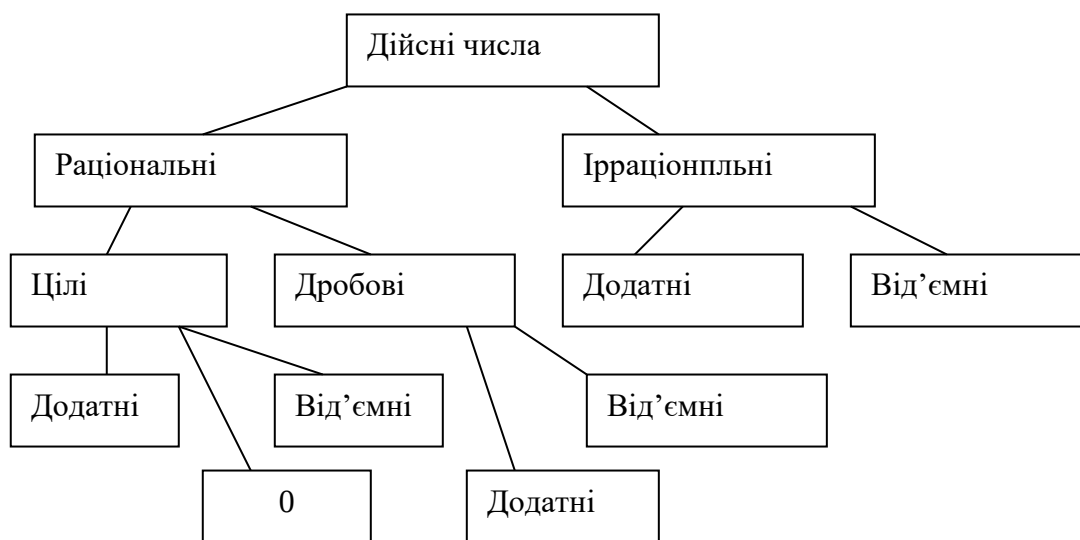


Рис. 3.4 Дійсні числа.

3.2. Вивчення тотожних перетворень в загальноосвітній школі.

Теоретичні основи тотожних перетворень.

Тотожні перетворення являють собою одну із головних ліній шкільного курсу математики. На їх основі в учнів формується уява про аналітичні методи математики.

До математичних основ тотожних перетворень відносяться:

- означення тотожності і тотожного перетворення;

- розгляд різних наукових підходів до тлумачення тотожних перетворень;

- виділення основних тверджень.

В алгебрі дії над буквеними виразами лише позначаються і можуть бути виконані тільки при виборі чи завданні конкретних числових значень її змінних. При цій умові основою тотожних перетворень є закони арифметичних дій. властивості операцій з 0 і 1 і властивості тотожностей.:

$$a) A=A; б) A=B \Leftrightarrow B=A; в) (A=B \wedge B=C) \Rightarrow A=C$$

Тому на основі систематизації відомостей про згадані твердження, нові твердження доводяться.

По строї ості доведення тотожності діляться на три типи:

- неповністю строгі міркування, які вимагають використання методу математичної індукції для надання їм повної строгості:

- повністю строгі міркування, які спираються на основні властивості арифметичних дій і не використовують інших властивостей числової системи;

- повністю строгі міркування, які використовують умовне розв'язання рівнянь виду $\varphi(x) = a$, де $\varphi(x)$ елементарна функція, що вивчається.

Базисна програма з математики не виділяє тотожні перетворення в одну окрему тему курсу математики середньої школи; матеріал, пов'язаний з тотожними перетвореннями, розосереджений по всім класам, по всьому курсу математики, а саме:

- 5-6 класи - закони арифметичних дій; застосування законів арифметичних дій для раціональних виразів, розкриття дужок, зведення подібних членів;

- 7-9 класи - додавання, віднімання і множення многочленів; розкладання многочлена на множники;

- 10-11 класи (курс В) тригонометричні формули додавання, наслідки із них. Тотожні перетворення тригонометричних виразів. Тотожні перетворення виразів, а яких є степені і корні. Логарифмічні тотожності:

$$a^{\log_a x} = x; \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

Тотожні перетворення виразів, в яких є логарифми.

Мета вивчення тотожних перетворень в середній школі така:

- спрощення виразів;
- доведення тотожностей;
- зведення рівнянь і нерівностей до простої форми;
- використання при розв'язуванні задач (і геометричних також)

аналітичним методом.

Пропедевтика тотожних перетворень в початковій школі і в 5-6 класах середньої школи пов'язана в першу чергу з вивченням властивостей арифметичних дій і записом їх в буквеному вигляді. До простих перетворень виразів, які вивчаються в 5-6 класах, відносяться розкриття іужок і зведення подібних доданків. Ці перетворення розглядаються в Технології навчання математики в сучасній школі зв'язку з розв'язуванням найпростіших рівнянь.

Поняття тотожності і тотожного перетворення формується за трьохетапною схемою:

1 етап - тотожність для цілих раціональних виразів;

2 етап - тотожність для дробових раціональних виразів;

3 етап - тотожність на множині.

Види тотожних перетворень: тотожні перетворення цілих раціональних виразів, дробово-раціональних виразів, ірраціональних виразів, тригонометричних виразів.

Слід зауважити, що застосовуючи те чи інше тотожне перетворення, необхідно чітко формулювати цільову установку цього перетворення.

Тотожні перетворення складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є базою для вивчення рівнянь і нерівностей, дослідження функцій і організацій обчислень. Тотожні

перетворення знаходять широке застосування в курсах геометрії, алгебри і початків аналізу, фізики, хімії і інших предметів. Від рівня сформованості навичок тотожних перетворень залежить результативність навчання учнів математики і іншим дисциплінам.

В процесі вивчення учні 7-9 класів повинні:

- засвоїти поняття тотожності і саму ідею тотожних перетворень;
- оволодіти умінням виконувати тотожні перетворення цілих, раціональних виразів, нескладних виразів, які містять степені і корні, тригонометричні вирази:
- засвоїти важливу ідею алгебри - ідею підстановки; якщо в тотожності замість змінної підставити вираз, то знову одержимо тотожність (при цьому треба слідкувати за допустимими значеннями змінних);
- навчитися застосувати апарат тотожних перетворень при доведенні алгебраїчних теорем, розв'язанні рівнянь і нерівностей, побудові графіків функцій [3, 8, 19].

Короткий методичний коментарій вивчення тотожних перетворень в загальноосвітній школі.

Пропедевтична робота в початковій школі. Означення алгебраїчного виразу.

Вправи трьох типів:

- на читання і розуміння смислу буквено-символічного запису об'єктів вивчення:
- на запис об'єктів вивчення в буквено-символічній формі;
- на дії з об'єктами вивчення, записаними в буквено-символічній формі.

Використання буквеної символіки в якості засобу узагальнення

вивченого матеріалу. Приклади: запис законів арифметичних дій. Вправи на формування поняття протилежного числа. Тотожності, тотожні перетворення алгебраїчних виразів. Означення тотожності. Три типи доведення тотожностей за рівнем строгості:

1)Неповністю строгі міркування.

2)Повністю строгі міркування, які спираються на основні властивості арифметичних дій.

Формування навичок простіших тотожних перетворень при виконанні вправ на:

- приведення подібних доданків;
- розкриття дужок і заключення в дужки;
- винесення множника за дужки;
- формули скороченого множення.

3) Повністю строгі міркування, які використовують умови розв'язання рівнянь виду $f(x) \sim a$, де $sp(x)$ елементарна функція, що вивчається.

Робота з тотожностями на різних етапах навчання. Тригонометричні

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \quad \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

тотожності: $\sin(180^\circ - x) = \sin x, \sin(90^\circ - x) = \cos x,$

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x, \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Перетворення дробових виразів.

Деякі означення і властивості степені з цілим показником.

Властивості степені з раціональним показником. Логарифмічна тотожність

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a} \text{ в сучасній школі}$$

Формування умінь і навичок тотожних перетворень.

Процес оволодіння учнями знаннями, уміннями і навичками по виконанню тотожних перетворень являється складним і тривалим. Він складається із повідомлення нових теоретичних відомостей, показу способів виконання тотожних перетворень і вироблення умінь і навичок. Викладання теоретичного матеріалу при вивченні тотожних перетворень займає значно менше часу, чим відпрацювання умінь і навичок. Важливим методом формування навичок тотожних перетворень є письмові і усні вправи, їх послідовність, а саме: 1) вправи прямого застосування вивченого правила, формули, алгоритму; 2) безпосереднє

застосування правила, формули, алгоритму усилюється введенням більш складних числових коефіцієнтів, показників степенів або іншими причинами; 3) задачі, для розв'язання яких від учнів вимагається уміння установлювати зв'язки з раніше вивченими тотожностями, виконувати декілька дій; 4) вивчена формула застосовується для розв'язання різноманітних задач.

Однією з умов ефективності вироблення міцних навичок є правильна організація роботи учнів з системою вправ, яка передбачає чітку постановку мети і планування з алгоритмом, прийомом навчальної діяльності із кожною операцією окремо, правильний темп роботи над виконанням вправ; забезпечення самостійності в роботі учнів шляхом використання роздаткового матеріалу і інших засобів; використання системи усних вправ на кожному уроці; ознайомлення учнів з прийомами самоконтролю при виконанні тотожних перетворень.

Сформовані в учнів навички тотожних перетворень повинні володіти такими якостями: правильністю, усвідомленістю, раціоналістичністю, узагальнюваністю, автоматизмом і міцністю [19, 34].

Однією із головних причин несформованості навичок виконання того чи іншого тотожного перетворення раціональних (любих) виразів є дуже швидкий перехід від пробних розгорнутих письмових записів розглянутих алгоритмів і відповідних усних міркувань до згорнутих письмових записів. При цьому учні значну частину часу витрачають не на обдумування суті розглядуваного алгоритму, а на усне виконання більшості розглядуваних раніше перетворень, що неминуче веде до перевантаження уваги, пам'яті і мислення. Частково згорнути записи в міркуваннях необхідно лише в тому випадку, якщо вчитель об'єктивно впевнений, що алгоритм усвідомлений на рівні розгорнутих записів і міркування учнями.

Удосконалення методики формування навиків тотожних перетворень алгебраїчних, тригонометричних виразів: 1) повинно йти в напрямі поступового переходу з початкового рівня елементарних однокрокових завдань на рівень не складних комбінованих вправ і при цьому мати на увазі, що поступове зниження

рівня сформованості навичок тотожних перетворень, говорить про недостатню роботу в процесі навчання по підтриманню цих навичок; постійне підтримування навичок тотожних перетворень на даному рівні забезпечує їх міцність через систему усних вправ, математичних диктантів, звернення в разі необхідності до розгорнутих письмових записів і усному їх обґрунтуванню, постійне включення елементарних навичок в комбіновані вправи; 2) ціленаправлена робота по попередженню і виправленню помилок (виявлення помилок в процесі вивчення тотожних перетворень виразів, систематизація помилок, вияснення причин виникнення помилок, організація роботи по усуненню помилок).

В шкільних підручниках з математики всі тотожні перетворення вводяться за допомогою правил, які формулюються в стислій лаконічній формі; правило дає складну структуру дії в нерозгорнутому вигляді. В правилах проявляється тенденція як можна скоріше дати учням інструмент вільного виконання відповідного перетворення. Але далеко не всі учні в змозі самі розгорнути правило в необхідну систему дій. Для формування у учнів на високому рівні умінь і навичок виконувати базові тотожні перетворення необхідно посилити алгоритмічний підхід в процесі навчання, який передбачає достатньо тривале застосування розгорнутих форм запису дій. При такому підході алгоритм дії буде включати в себе і повний склад формально-операційних і обґрунтованих знань, що попередить проникнення формалізму в процес пізнання і дуже обмежить можливості здійснення помилок при виконанні тотожних перетворень алгебраїчних виразів.

Для визначення вимоги до рівня складності тотожних перетворень алгебраїчних виразів, до сформованості відповідних умінь і навичок учнів, вчитель може скористуватись такими критеріями: загальноосвітня значущість тотожних перетворень; внутрішні потреби шкільної математики і її застосування; потреби суміжних дисциплін і подальшої освіти в вищій школі.

В роботі з класом вчителю необхідно зосередити увагу на основних стандартних перетвореннях. Комбіновані вправи на тотожні перетворення тотожних виразів повинні, як правило, містити дві - три дії.

Для того, щоб домогтися свідомого засвоєння алгоритму учнями, вчитель повинен на перших стадіях його формування відображувати в записах всі етапи. Скорочувати, пропускати деякі етапи в записах і міркуваннях треба поступово, враховуючи індивідуальний темп учня по оволодінню цим алгоритмом.

Формувати алгоритм треба на основі таких прийомів, які б забезпечили у учнів повне розуміння теоретичних обґрунтувань можливості виконання тієї чи іншої дії. Особливу увагу при формуванні базових тотожних перетворень вчитель повинен приділити варіюванню різних випадків, які показали б учням ті об'єкти, до яких дія застосовується, і ті, до яких застосування дії або обмежено або повністю виключено.

3.3. Характер вправ, їх послідовність і кількість при формуванні в учнів умінь і навичок проводити тотожні перетворення

При створенні системи завдань при вивченні тотожних перетворень додержуються принципу - пред'явлення їх від простого до складного з урахуванням необхідності подолання учнями посильних труднощів в створенні проблемних ситуацій.

Перша серія вправ, яка спрямована на відпрацювання уміння виконувати перетворення, повинна бути повністю звільнена від усякого роду труднощів. В кожную нову серію вправ входить рівно один елемент новизни, так як засвоєння забезпечить успішний перехід до наступного етапу. Такий підхід вчителя до групування вправ дозволяє кожний етап засвоєння процедури завершити репродуктивними самостійними роботами.

Тотожні перетворення являють собою одну із основних методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу. Основна задача вчителя - вироблення повноцінних навичок виконання тотожних перетворень. З цією ціллю необхідно дотримуватися таких основних умов:

- етапність формування знань, умінь і навичок; усвідомлення і запам'ятовування основних алгоритмів (правил); оволодіння вміннями

виконувати тотожні перетворення за зразком, в подібній або відмінній ситуації;
формування умінь застосовувати алгоритм в нових ситуаціях;

- різноманітність вправ, правильний підбір і організація роботи з ним;
- систематична і цілеспрямована робота по виявленню і попередженню типових помилок при виконанні тотожних перетворень, навчання учнів самоконтролю;
- систематизація і узагальнення знань учнів.

Основні методичні підходи в навчанні тотожним перетворенням. Перший від завчання правил тотожних перетворень до вироблення умінь і навичок через велику кількість вправ. Другий - передбачає скорочення їх, розглядання суті і генезису тотожних перетворень і вдумливого виконання їх на вказаній математичній основі доведених раніше властивостей різних виразів. На наш погляд другий підхід в навчанні тотожним перетворенням має перевагу.

Однією з основних вимог до створення методики вивчення тотожних перетворень в загальноосвітній школі є створення схем, які ілюструють зв'язок понять за темою, а також обов'язковий перелік здобутих знань. Такими схемами можуть бути наступні, вказані на відповідних рисунках.

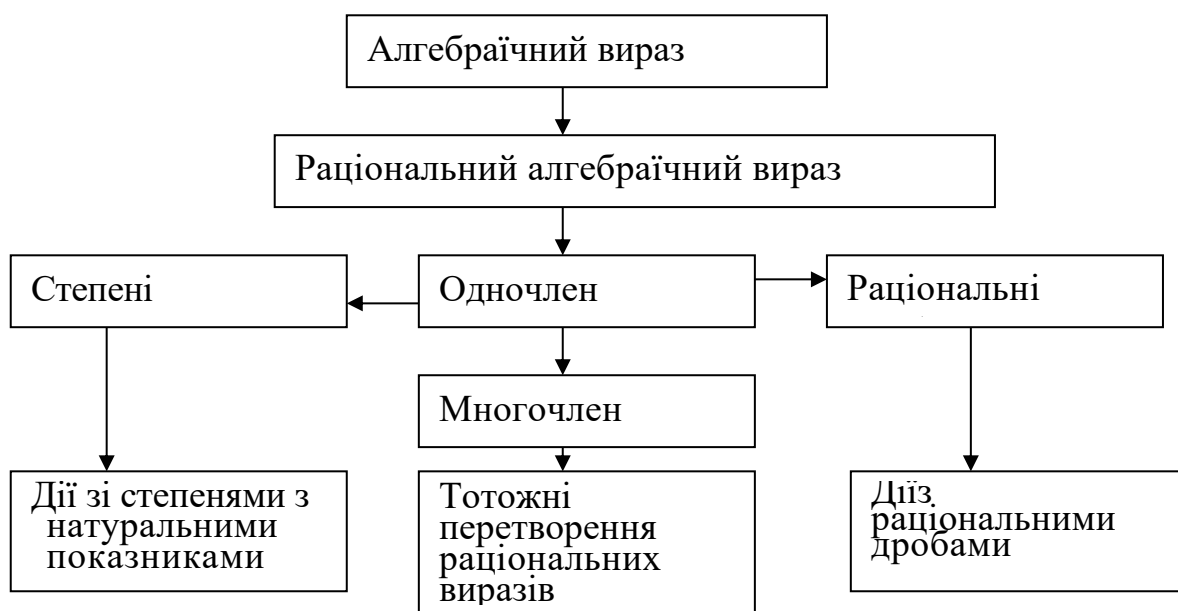


Рис. 3.6 Зв'язок понять за темою "Тотожні перетворення раціональних алгебраїчних виразів".

Перелік здобутих знань.

Повинні знати: алгебраїчний вираз та раціональний алгебраїчний вираз; коефіцієнт; одночлен і многочлен; числове значення алгебраїчного виразу; упорядкований многочлен; тотожні вирази; тотожні перетворення; подібні члени та їх зведення; функції дужок; розкриття дужок та взяття в дужки; степінь та дії зі степенями з натуральними показниками; дії з одночленами та многочленами; ділення многочлена на одночлен; ділення многочлена на многочлен; формули скороченого множення; розкладання многочленів на множники; способи розкладання многочленів на множники; алгебраїчні дроби; основну властивість алгебраїчного дроби; скорочення дробів; зведення дробів до спільного знаменника; дії з алгебраїчними дробами; квадратний тричлен та виділення в ньому повного квадрата.

Уміти виконувати такі процедури: знаходження числови; значень алгебраїчних виразів; зведення подібних членів та порядкування многочленів; розкриття дужок та взяття в дужки; дії з одночленами і многочленами; алгоритм ділення многочлена на многочлен; розкладання многочленів на множники; дії з алгебраїчними дробами; тотожні перетворення алгебраїчних виразів; виділення повного квадрата з квадратного тричлена.

Перелік здобутих знань.

Учні повинні знати: корінь n -го степеня; арифметичний корінь n -го степеня; ірраціональні вирази; основну властивість радикала; дії з радикалами: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня; винесення множників за знак радикала; внесення множників під знак радикала; звільнення підкореневого виразу від дроби; подібність радикалів; знищення ірраціональності в знаменнику або в чисельнику дроби; формули складного радикала; степені з нульовим, від'ємними і дробовими показниками; наближення значення кореня у вигляді десяткового дроби.

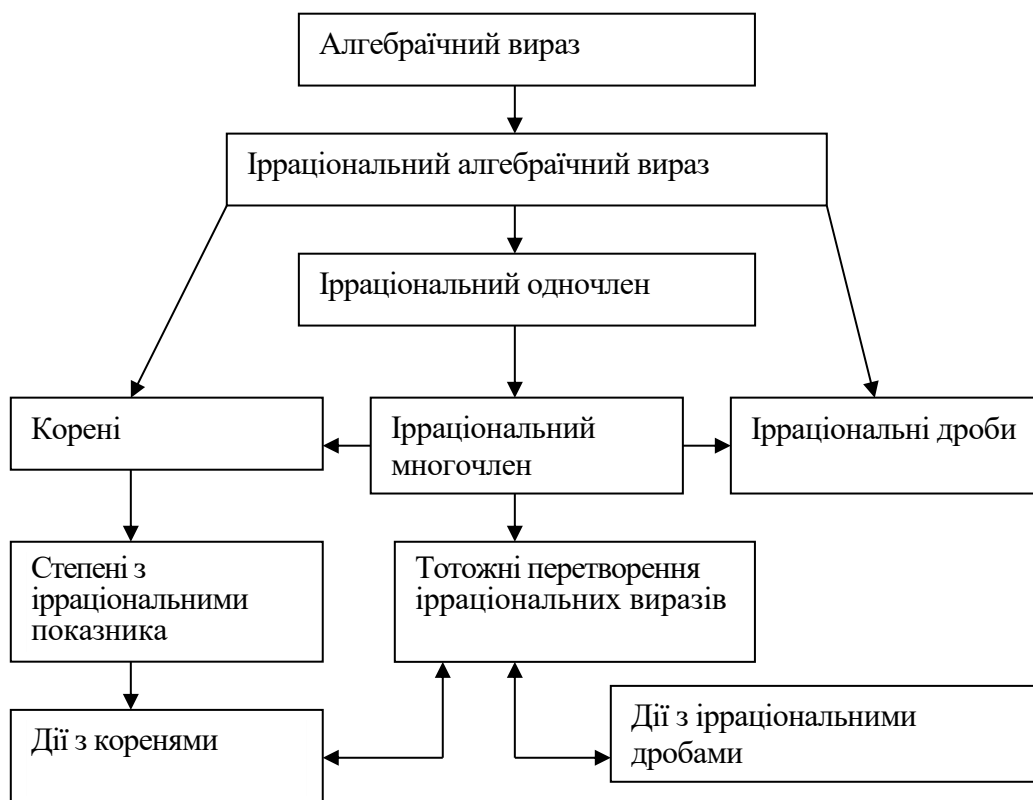


Рис. 3.7 Зв'язок понять за темою "Тотожні перетворення ірраціональних алгебраїчних виразів"

Потрібно уміти виконувати такі процедури: дії з радикалами; звільнення від ірраціональності в знаменнику або чисельнику дробу; знаходження наближеного значення кореня; розкладання суми та різниці радикалів за формулами скороченого множення.

Вказані схеми вчитель може використати в двох випадках: для уявлення обсягу вивчення тотожних перетворень в загальноосвітній школі; для проведення систематизації і узагальнення знань, умінь і навичок при заключному повторенні. [19].

3.4.Рівняння і нерівності в шкільному курсі математики середньої школи

Рівняння і нерівності складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є засобом розширення, поглиблення і закріплення теоретичних знань учнів. Апарат рівнянь і нерівностей широко використовується при розв'язуванні математичних задач. Наприклад, при знаходженні області визначення, при побудові графіків функцій, при розв'язуванні геометричних задач.

Основі напрями розгортання лінії рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики:

- прикладна спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається головним чином при вивченні алгебраїчного методу розв'язування текстових задач;

- теоретично-математична спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається в двох аспектах: а) вивчення найбільш важливих класів рівнянь і нерівностей і їх систем; б) в вивченні узагальнених понять і методів, які відносяться до лінії в цілому (невідоме, рівність, рівносильність, логічне слідування і ін.).

- основні класи рівнянь і нерівностей пов'язані з простими і одночасно найбільш важливими математичними моделями.

Використання узагальнення понять і методів дозволяє логічно упорядковувати розкриття лінії в цілому; ці загальні поняття і методи спираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, логічне слідування, які повинні бути розкриті в лінії рівнянь і нерівностей.

Спрямованість на встановлення зв'язків і іншим змістом курсу математики:

- а) З числовою лінією - це ідея послідовного розширення числової системи. Всі числові області (за винятком області всіх дійсних чисел) виникають в зв'язку з розв'язуванням будь-яких рівнянь, нерівностей систем. Зв'язок з числовою лінією двохсторонній.

б) З функціональною лінією - застосування методів, які розглядаються в лінії рівнянь і нерівностей, до дослідження функції (наприклад, до завдань на знаходження області визначення деяких функцій. їх коренів, проміжків зникосталості і т.п.). З іншої сторони, функціональна лінія чинить великий вплив як на зміст лінії рівнянь і нерівностей, так і на стиль її вивчення. Зокрема, функціональні зображення є основою залучення графічної наочності до розв'язання і дослідження рівнянь і нерівностей і їх систем.

в) З алгоритмічною лінією - в можливості використання її понять для опису алгоритмів розв'язання рівнянь, нерівностей і систем різних класів.

Теорія диференціальних рівнянь досить складна і в шкільному курсі математики розглядаються тільки початкові відомості, які безпосередньо відносяться до різних конкретних прикладних питань.

Різні підходи до означення поняття рівняння, нерівності.

1. *Рівнянням* називається рівність, яка містить одну або декілька невідомих. *Розв'язком рівняння* з однією невідомою (коренем рівняння) називається таке значення невідомої, при підстановці якої рівняння перетворюється на вірну числову рівність. Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

2. Рівність із змінною $f(x) = \varphi(x)$ називають *рівнянням з однією змінною x* . Будь-яке значення змінної, при якому вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$ приймають рівні числові значення, називають коренем рівняння. Розв'язати рівняння - означає знайти всі його корені або довести, що їх нема. Рівняння, що мають одні й ті самі корені, називаються рівносильними. Рівносильними вважаються також рівняння, кожне з яких не має коренів. (Функціональний підхід до поняття рівняння).

3. *Нерівностями* називаються вирази вигляду $a < b$, $a = b$, $a > b$, $a \leq b$, де a і b можуть бути числами (числовими виразами) або функціями. Нерівності, які містять знаки $<$ або $>$, називаються строгими, а нерівності, які містять знаки $\leq$ або $\geq$, нестрогими.

Розрізняють два види нерівностей: числові і нерівності зі змінними. Розв'язком нерівності з однією змінною називається таке значення змінної, при підстановці якої нерівність перетворюється на вірну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки, або довести, що розв'язків немає.

Рівносильними називаються нерівності множини розв'язків яких збігаються.

Основні поняття лінії рівнянь і нерівностей.

Рівняння.

а) Поняття рівняння.

При засвоєнні поняття рівняння необхідно використовувати терміни: "рівняння", "корінь рівняння", що значить розв'язати рівняння.

В означенні поняття рівняння використовується один із двох термінів: "змінна" або "невідоме".

Термін "невідоме" (буквене позначення конкретного числа) використовують в основному при розв'язуванні текстових задач алгебраїчним методом і при вивченні рівнянь в 5-6 класах.

Термін "змінні" вживається, коли рівняння трактується як рівність двох функцій.

б) Властивості рівнянь.

в) Область допустимих значень змінної (ОДЗ).

г) Рівносильність і логічне слідування.

Нерівність.

Види нерівностей: числові і нерівності зі змінними. Основними поняттями, на яких ґрунтується вивчення нерівностей є "більше", "менше", "числова нерівність", "критерій порівняння двох чисел", "властивості числових нерівностей", "нерівність із змінною", "нерівність", "розв'язок нерівності", "розв'язати нерівність", "область допустимих значень змінної" (ОДЗ), "рівносильні нерівності", "строгі нерівності", "нестрогі нерівності".

Логічне обґрунтування при вивченні рівнянь і нерівностей.

Емпіричне обґрунтування процесу розв'язання. Таким способом описуються прийоми розв'язання перших вивчаємих класів рівнянь. Зокрема, рівняння першого степеня з одним невідомим [11, 18, 30].

Методика вивчення цих рівнянь полягає в пред'явленні алгоритму розв'язання таких рівнянь і розборі декількох типових прикладів

Дедуктивне обґрунтування розв'язання рівнянь і нерівностей без явного використання поняття рівносильності.

Введення для обґрунтування процесу розв'язання рівнянь, нерівностей і їх систем понять рівносильності і логічного слідування.

Класифікація рівнянь (нерівностей) за видом функцій, які розташовані в лівій і правій частині рівняння (нерівності).

Рівняння (нерівності) $f(x)=g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$) називається алгебраїчним, якщо $f(x)$ і $g(x)$ - алгебраїчні функції; трансцендентними, якщо хоч одна із функцій $f(x)$ і $g(x)$ трансцендентна; раціональним алгебраїчним (або просто раціональним), якщо алгебраїчні функції $f(x)$ і $g(x)$ цілі раціональні; дробово-раціональним, якщо хоч одна із раціональних функцій $f(x)$ і $g(x)$ дробово-раціональна; ірраціональним алгебраїчним (або просто ірраціональним), якщо хоч одна із алгебраїчних функцій $f(x)$ і $g(x)$ ірраціональні.

Рівняння (нерівність) $P(x)=0$ ($P(x) \leq 0$), де $P(x)$ - многочлен стандартного виду, називається лінійним (першої степені), квадратним (другої степені) і взагалі n -ї степені, якщо многочлен $P(x)$ має відповідно першу, другу, третю або n -ступень. Таким чином, поняття степені рівняння (нерівності) визначено указанного виду, тому немає смислу ставити питання, яку степінь мають інші рівняння (нерівності) [15].

Загальна послідовність вивчення матеріалу лінії рівнянь і нерівностей.

Необхідно враховувати два протилежно спрямованих процеси, які супроводжують навчання: 1) поступове зростання кількості класів рівнянь, нерівностей і прийомів їх розв'язування, різних перетворень, які застосовуються при розв'язуванні; 2) встановлення різноманітних зв'язків між

різними класами рівнянь, виявлення загальних класів, закріплення узагальнених типів перетворень, спрощення опису і обґрунтування розв'язання.

Основні ступені вивчення: незалежне вивчення основних типів рівнянь, нерівностей, систем; поступове розширення кількості вивчаємих класів рівнянь, нерівностей і їх систем; формування прийомів розв'язання і аналізу рівнянь, нерівностей і їх систем; синтез матеріалу лінії рівнянь і нерівностей.

Зміст питання формування прийомів розв'язання і дослідження рівнянь, нерівностей і систем:

- логічні методи обґрунтування розв'язання;
- обчислювальні прийоми;
- - наочно-графічні прийоми.

Синтез матеріалу лінії рівнянь, нерівностей - організація знань учнів і досвіду розв'язування рівнянь і нерівностей представлена в єдину, цілісну систему і подана на відповідних рис. 3.8, рис. 3.9.

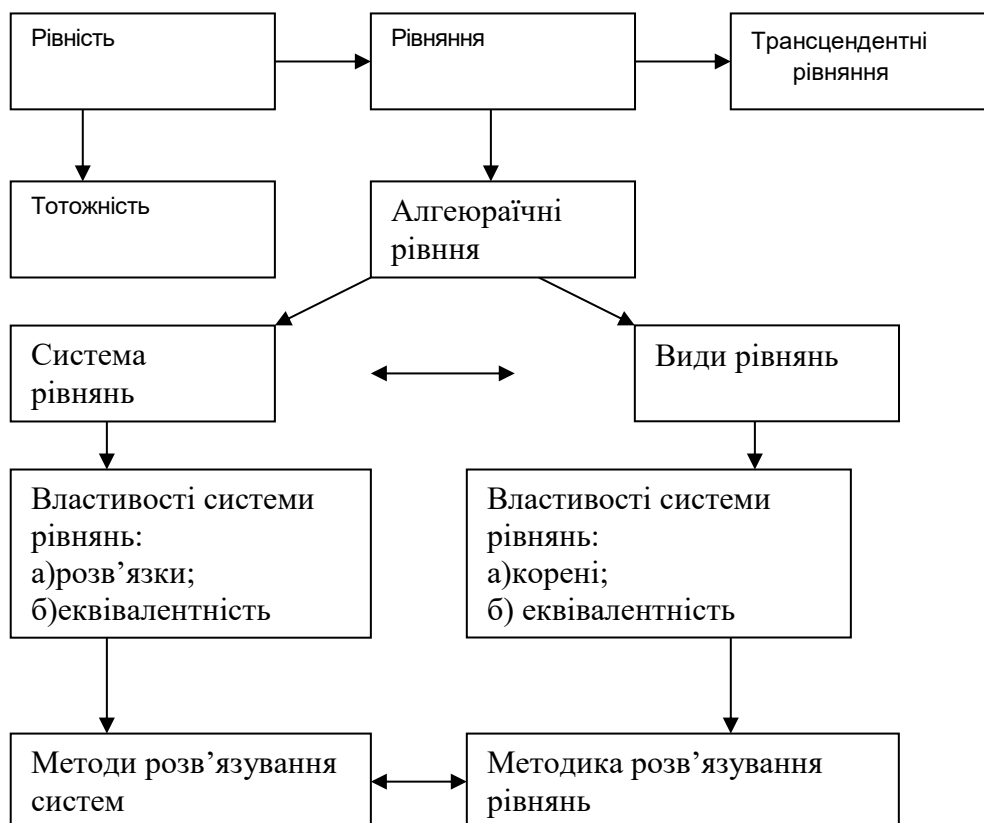


Рис. 3.8 Алгебраїчні рівняння та системи рівнянь. Зв'язок понять.



Рис. 3.9. Алгебраїчні нерівності. Зв'язок понять.

Формування умінь і навичок розв'язування рівнянь і нерівностей.

При вивченні курсу алгебри і алгебри і початків аналізу учні набувають умінь і навички розв'язання лінійних, квадратних, раціональних, ірраціональних, трансцендентних рівнянь і нерівностей.

В процесі формування умінь і навичок розв'язання рівнянь і нерівностей виділяють наступні етапи.

Підготовчий етап. Його мета - формування в учнів мотиву оволодіння відповідними умінями і навичками, актуалізація знань, необхідних при введенні і закріпленні прийому розв'язання рівняння або нерівності. Діяльність учнів на цьому етапі носить репродуктивний або репродуктивно-творчий характер.

Ознайомлювальний етап складається з пояснення учням прийому розв'язання рівняння або нерівності, який фіксується в алгоритмі (навчальному прийомі), і усвідомлені ними кожного кроку алгоритма і їх послідовності.

Діяльність учнів повинна здійснюватися на наслідувальному і репродуктивному рівнях.

Третій етап. Його суть полягає в формуванні уміння застосовувати прийом. Від учнів вимагається чітке розуміння того, як треба застосовувати прийом і фактичне виконання дій, які входять до нього, часто неточні і нестійкі, з інтенсивною концентрацією уваги. Діяльність учнів здійснюється на репродуктивному рівні.

Четвертий етап - формування навички застосовувати прийом, метою якого є автоматизація уміння. Формування навички досягається в результаті багаторазових застосувань вивченого прийому, орієнтована основа прийому скорочується, його виконавча частина автоматизується. Діяльність учнів здійснюється на репродуктивному рівні.

П'ятий етап - трансформація навички. Суть його заключається в застосуванні навички в різноманітних ситуаціях. Діяльність учнів здійснюється на репродуктивному або творчому рівнях.

Важливим завданням учителя є забезпечення в учнів повноцінних навичок по розв'язуванню рівнянь і нерівностей, які характеризуються наступними якостями: правильністю, усвідомленістю, автоматизмом і міцністю.

Основні етапи вивчення рівнянь і нерівностей.

Виклад теоретичних відомостей про рівняння і нерівності залежить від змісту і послідовності вивчення інших тем: числових систем, тотожних перетворень виразів, функцій, початків математичного аналізу.

Вибір певного поєднання лінії рівнянь і нерівностей з іншими лініями шкільного курсу математики є ключем до визначення загальної структури курсу, рівня строгості викладу, ролі аналітичних методів розв'язання рівнянь і нерівностей.

Можна виділити два шляхи розгортання змісту лінії рівнянь і нерівностей:

1. Спочатку вивчається матеріал, який відноситься до рівнянь, потім - до нерівностей. Розподільний виклад проводиться до теорії квадратного тричлена включно. В старших класах логарифмічні, показникові, тригонометричні

рівняння і нерівності вивчаються в більш тісному зв'язку.

2. Основні класи нерівностей вивчаються відразу за вивченням відповідних рівнянь. Деякі класи рівнянь і нерівностей зближені, а інші не пов'язані в часі. [29].

3.5. Функції в загальноосвітній школі.

Різні підходи до означення поняття функція.

Поняття "функція" було впроваджено в математику в кінці XVII ст. Вперше Р.Декарт дослідив, як змінюється ордината точки в залежності від зміни її абсциси, але термін "функція" він не вживав. Цей термін (латинське слово *functio* означає виконання, здійснення) впровадив в математику в 1694 році Г.Лейбніц. Функцією він назвав відрізок, довжина якого змінюється по певному правилу. Ж.Фур'є, М.І.Лобачевський, Л.Дирихле, Б.Больцано, О.Коші стали вважати, що функцію можна задати не тільки аналітичним виразом, тобто поняття функції було більше розширено.

Достатньо широким є таке означення "Величина Y називається функцією змінної величини X в області визначення D , якщо кожному значенню X із D відповідає єдине значення величини Y . Таке означення функції іноді називають класичним.

Починаючи з другої половини XIX ст., після створення теорії множини, поняття функції ще більше розширили. Його не пов'язували з поняттям змінної величини, а означили через відповідність або відношення "Відповідність між множиною X і множиною Y , при якій кожному елементу множини X відповідає не більш одного елемента множини Y , називається функцією". Це означення ширше класичного, так як значення величин, про які йде мова в класичному означенні, - це числа, а елементи множини можуть бути і іншими об'єктами. В шкільній програмі поняття функції включено відносно недавно. Поняття функціональної залежності, говорив ще в 1940 р. професор А.Я.Хінчін, повинно

стати не тільки одним із важливих понять шкільного курсу математики, але і тим основним стержнем, який проходить від елементарної арифметики до вищих розділів алгебри, геометрії і тригонометрії, навколо якого ґрунтується все математичне викладання [25].

Існують дві найбільш різко відмінні методичні трактовки поняття функції: генетична і логічна.

Генетична трактовка поняття функції заснована на розробці поняття функції, відомої до середини XIX ст. Найбільш істотними поняттями є такі: змінна величина, функціональна залежність змінних величин, формула, декартова система координат.

Позитивне: підкреслюється "динамічний" характер поняття функціональної залежності, природно пов'язується з рештою змісту курсу алгебри, так як більшість функцій, які використовуються в ньому, виражаються аналітично і таблично.

Недоліки: поняття пов'язується з числовими функціями одного числового аргументу.

Логічне трактування поняття функцій виходить із положення про те, що будувати поняття функції треба в рамках поняття алгебраїчної системи. Функція при такому підході виступає у вигляді відношення спеціального виду між двома множинами, що задовольняє умові функціональності.

Достоїнство: узагальненість поняття і можливості встановлення зв'язків в навчанні математики. Але поняття функції в середній школі пов'язувалось, головним чином, з числовими функціями одного числового аргументу, тобто тією областю, в якій воно простіше формується на генетичній основі.

Висновок. Генетичний підхід виявляється недостатнім для формування функцій як узагальненого поняття, логічний виявляє певний надлишок.

Відмінність в трактуваннях функції проявляється з найбільшою різкістю при введенні цього поняття.

Понятійний апарат функції.

Впровадження поняття функції тривалий процес, який завершується формуванням уявлень про всі компоненти цього поняття і про роль граючої ним в математиці і її застосування. Цей процес ведеться у трьох напрямках: 1) упорядкування уявлень про функцію, розгортання систем понять, характерних для функціональної лінії (способи завдання, графік, область визначення, множина значень, зростання і ін.); 2) глибоке вивчення окремих функцій і їх класів; 3) розширення галузі застосувань алгебри за рахунок включення в неї ідеї функції.



Рис. 3.9 Зв'язок понять за темою "Понятійний апарат функції".

Можна запропонувати таку методичну схему вивчення функцій в 7-9 класах: 1) розглянути підводящу задачу, за допомогою якої мотивується вивчення нової функції; 2) на основі математизації емпіричного матеріалу сформулювати означення функції (повідомити формулу); 3) скласти таблицю значень функції і побудувати графік "по точкам"; 4) провести дослідження основних властивостей функції (безпосередньо по графіку); 5) розглянути задачі і вправи на застосування властивостей функції.

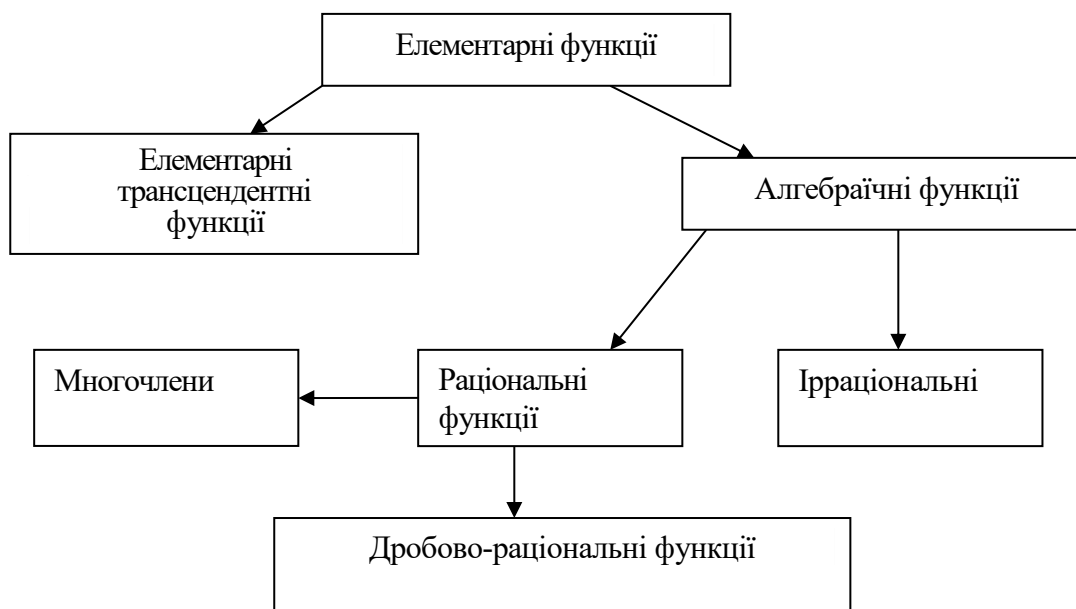


Рис. 3.10 Класифікація елементарних функцій.

Основний тезис "математика вивчає математичні моделі" наповнюється конкретним змістом, а саме: основна тема 6 класу лінійна функція, що з точки зору моделювання реальних процесів відповідає рівномірним процесам; основна тема 7 класу - квадратична функція, моделююча рівноприскорені процеси; основна тема 8 класу-тригонометричні функції, які моделюють періодичні процеси; основна тема 9 класу - показникова функція, яка моделює процеси органічного росту. Тобто чотири типи основних моделей реальної дійсності, які вивчаються в школі, чітко розводяться за роками вивчення

шкільного курсу математики. Заслуговує уваги, що вивчення функцій в школі передбачає одноманітну структуру викладу матеріалу і створення системи вправ при вивченні любого нового класу функцій, яка включає в себе шість напрямків: 1) кускові функції; 2) знаходження найбільшого і найменшого значення заданої функції на заданому проміжку; 3) перетворення графіків; 4) графічне розв'язання рівнянь; 5) читання графіків; 6) функціональна символіка.

Функціональна лінія - головна в шкільному курсі математики. Різні підходи до означення поняття функції: генетичний і логічний.

Залежність змінної Y від змінної X називають функціональною залежністю, функцією якщо кожному значенню X відповідає єдине значення Y .

Область визначення $D(f)$ і множина значень функції $E(f)$.

Способи завдання функції: алгебраїчний, графічний, табличний, описом.

Елементарні функції,

Пряма пропорційність $y=kx$

Графік - пряма, яка проходить Через початок координат.

Лінійна функція $y=kx+b$.

Графік пряма паралельна графіку Функції $y=kx$ і відтикаюча на вісі координат відрізок b .

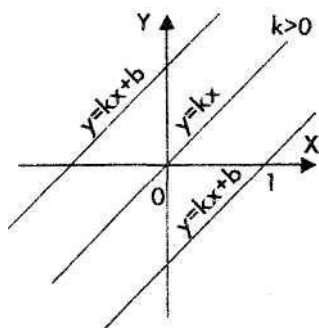


Рис. 3.11

Функція виду: $y=x^2$ і $y=x^3$ Графік - парабола.

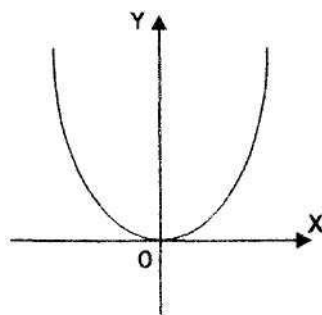


Рис. 3.12

Графік кубічна парабола.

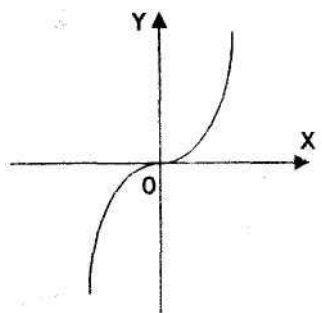


Рис. 3.13

Дослідження на спадання і зростання.

Обидва графіки проходять через початок координат.

Графік симетричні відносно: а) осі ординат; б) початку координат.

Підготовча робота ю вивчення поняття степеневої функції: парної і непарної.

$$y = \sqrt{x} ; x \geq 0$$

Функція

Парабола.

Функція $y = \sqrt{x}$ - обернена функції $y = x^2$.

Графік проходить через початок координат.

Зростає від 0 до $+\infty$

Обернена пропорційність.

$$y = \frac{k}{x}$$

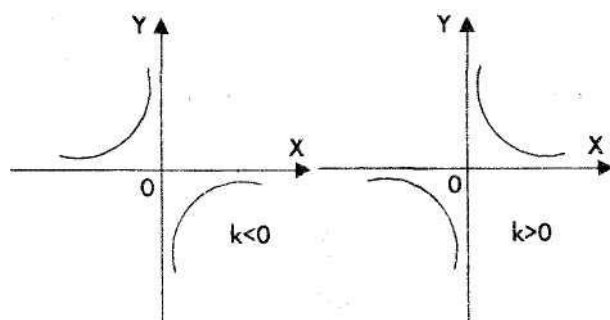


Рис. 3.14.

Гіпербола

Зростання, спадання. Графік функції необмежено наближається до осей координат, але ніколи їх не перетинає. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$

Попередньо: функція $y = x^2$ її графік (парабола). Побудувати графіки функцій:

$$y = x^2; y = -x^2; y = 3x^2; y = \frac{1}{2}x^2; y = -\frac{3}{2}x^2; y = -2x^2.$$

Висновки:

- 1) При $a > 0$, вітки параболи напрямлені вгору, при $a < 0$ вниз.
- 2) Із збільшенням $|a|$ графік функції ближче до осі ординат. Технології навчання математики в сучасній школі

Графік функції $y = ax^2 + bx + c$ -- парабола, вісь якої паралельна осі ординат.

Знаходження координат вершини параболи двома способами:

- виділенням повного квадрату в многочлені $ax^2 + bx + c$;
- знаходження абсцис точок перетину параболи з віссю абсцис або прямої, їй паралельної.

Показникова функція $y = a^x$

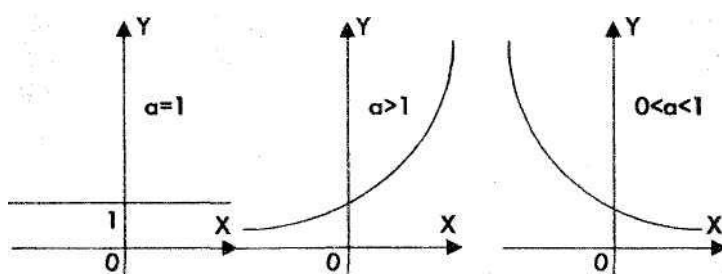


Рис 3.16.

Зростає

$$y = 2^x$$

Рис. 3.17.

Спадає

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Рис. 3.18

Вироджений випадок

$$y = 1^x$$

Початкова побудова по точкам.

Загальні властивості.

Графік функції - в верхній напівплощині відносно осі абсцис і проходить через точку $(0;1)$.

Графік функцій $y=2^x$ і $y=(\frac{1}{2})^x$ - симетричні один одному відносно осі ординат.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$

Вона обернена показниковій, її графік симетричний графіку функції $y=a^x$ відносно прямої $y=x$.

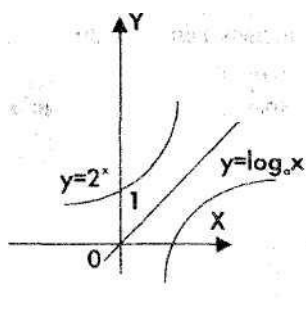


Рис. 3.19

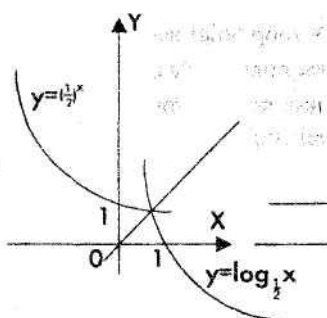


Рис. 3.20.

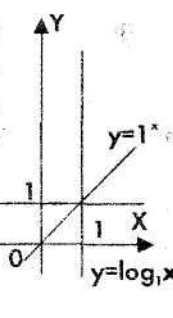


Рис.3.21.

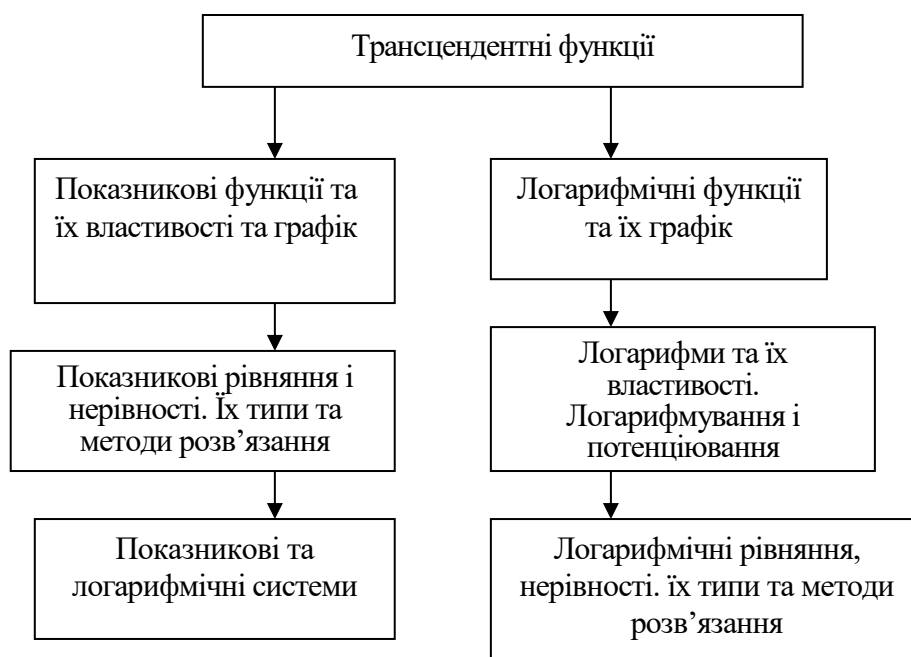


Рис. 3.22 Зв'язок понять за темою "Показникові та логарифмічні функції"

Схема дослідження функції (11 кл).

- Області визначення і значення.
- Парність і непарність. Періодичність.
- Координати точок перетину графіку з осями координат.
- Проміжки знакосталості. Зростання, спадання.
- Точки екстремуму. Вид екстремуму, значення функції в цих точках.
- Дослідження поведінки функції в околі характерних точок, які не входять

в область визначення, і при великих (по модулю) значеннях аргументу.

Асимптоти.

Побудова графіків тригонометричних функцій. Арксинус, арккосинус, арктангенс і їх графіки.

В різних розділах шкільного курсу математики вивчаються властивості функцій на тому чи іншому рівні строгості, а саме:

- область визначення функції;
- область значення функції;
- парність і непарність;
- нулі;
- періодичність;
- проміжки знакосталості;
- проміжки монотонності;
- екстремуми;
- графік функцій проходить через точки;
- асимптоти.

Основна методична помилка, полягає в тому, що з'явлення цих властивостей більш або менш повному об'ємі практично одночасно в темі "Побудова графіків функцій за допомогою похідної" спричиняє природні труднощі в учнів з-за надміру інформації і вважає не тільки можливим, але і корисним вживання, починаючи з 7 класу таких, наприклад, термінів, як неперервність, опуклість, без знання точних математичних означень. [15].

РОЗДІЛ 4. ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Основні питання. Границя і неперервність функції. Похідна та її застосування. Первісна і інтеграл. Найпростіші диференціальні рівняння в шкільному курсі математики.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

Для математичного аналізу поняття границі має першорядне значення. Саме введення поняття границі дало можливість розглядати не лише стани, а й процеси.

У загальноосвітній школі учні вивчають границі числової послідовності і функції.

Означення. "Число a називається границею послідовності (y_n) , якщо для будь-якого додатнього числа ϵ знайдеться таке натуральне число N ,

що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n - a| < \epsilon$ ".

Методична схема введення поняття:

1. Проілюструвати на конкретних прикладах.

2. Після чого перейти до узагальнення: Число a називається границею нескінченною послідовності, якщо починаючи з якогось члена цієї послідовності, модуль різниці між a і кожним наступним членом менший від як завгодно малого додатнього числа.

3. Розглянути два-три приклади і контрприкладів, зокрема, коли члени послідовності підходять до границі з обох боків (коливні послідовності) і коли вони поперемінно наближаються то до одного, то іншого числа.

(Коли числова послідовність має границю, то тільки одну).

4. Сформулювати загальноприйняте означення цього поняття.

Означення доцільно ілюструвати на конкретних прикладах і геометрично, причому не тільки на числовій осі, а й на координатній площині.

Крім границі послідовності, в математичному аналізі відіграє важливу роль і поняття границі функції. Як і границю послідовності, поняття границі функції треба вводити конкретно - індуктивним методом, тобто спочатку пояснити його

на кількох конкретних прикладах, краще з використанням графіків функцій, а вже потім робити узагальнення.

В математичній літературі поширені два означення границі функції - "за Коші" і "за Гейне".

У першому використовуються символи ε і δ , а в другому - границю послідовності. Більшість авторів перевагу віддають першому означенню:

Число C називається границею функції $f(x)$ при x , що прямує до a , якщо для будь-якого як завгодно малого наперед заданого додатнього числа ε можна вказати додатне число δ , що для всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)-C| < \varepsilon$

Означення границі функції за Гейне можна сформулювати так. Нехай

$f(x)$ - числова функція, задана на множині M . Якщо для будь-якої збіжної до a послідовності $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ відмінних від a чисел за M

послідовність $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ збігається до C , то C називають

границею даної функції при $x \rightarrow a$.

Сказане вище стосується трактовки поняття границі функції (і числової послідовності) в класах з поглибленим вивченням математики. В загальноосвітніх школах учні повинні мати уявлення про границю функції в точці, неперервність функції в точці і на проміжку.

Питання про неперервність функції розглядають після введення поняття границі функції в точці.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці.

Відповідно даному означенню неперервність функції $f(x)$ в граничній точці x_0 множини E (область визначення цієї функції) означає, що виконуються наступні умови:

- 1) функція повинна $y=f(x)$ бути визначена в т. x_0 ($x_0 \in E$) тобто існує число $f(x_0)$;
- 2) границя функції $y=f(x)$ повинна існувати в т. x_0 ,
- 3) границя функції $y=f(x)$ при $x \rightarrow a$ співпадає із значенням функції в цій точці,

тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Слід звернути увагу учнів, що рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ справедлива завжди.

Різні підходи до введення похідної.

2) Логічний підхід- похідна і інтеграл вводяться за допомогою поняття границі функції в точці.

3) Історичний підхід- похідна і інтеграл вводяться без використання поняття границі функції в точці, тобто спочатку сформовані поняття похідної і інтеграла і пізніше, як узагальнення понять - поняття границі функції. При такому підході в шкільному підручнику більше уваги приділяється практичному аспекту вивчення похідної, а не теоретичному.

Похідна та її застосування. Короткий методичний коментар.

Роль даної теми в шкільному курсі математики. Її практична значимість, зв'язок з вивченням інших дисциплін.

Підготовча робота до вивчення похідної: приклади з фізики (середня та миттєва швидкість руху точки, зміни функції).

Поняття приросту аргументу ($x - x_0 = \Delta x$) і приросту функції

$$(\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)).$$

Підготовча робота до вивчення геометричного змісту похідної.

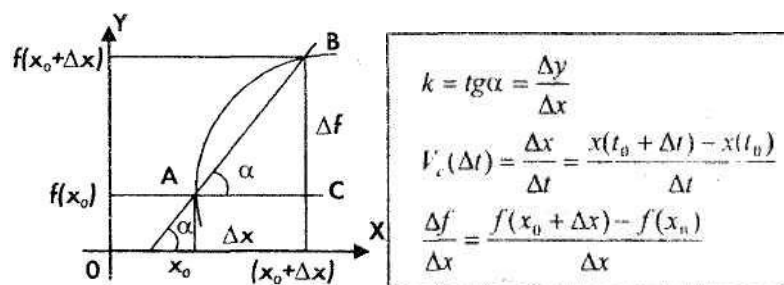


Рис. 4.1- середня швидкість зміни функції на проміжку x_0 і $x_0 + \Delta x$.

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту Δx аргументу за умови, що прирост Δx аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідна функції в точці x_0 - швидкість зміни функції в цій точці.

Механічний та геометричний зміст похідної:

Дотична до графіку функції - є граничне положення січної при $\Delta x \rightarrow 0$.

Геометричний зміст похідної: кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $f'(x)$

Окремий випадок: дотична паралельна осі абсцис.

Рівняння дотичної: $y = f'(x_0) \cdot x + b$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Конкретні приклади.

Застосування похідної

- до наближених обчислень;
- до фізики і техніки:

Механічний смисл похідної: $v(t) = x'(t)$; $a = v'(t)$ до дослідження функції

Правила обчислення похідних суми, добутку, частки двох функцій:

$$1. (u + v)' = u' + v'; 2. (uv)' = u'v + v'u; 3. (cu)' = cu'$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Похідна степеневі функції $(x^n)' = nx^{n-1}$

Поняття складеної функції та похідна складеної функції

$$h(x) = g(f(x)); h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Починати з конкретних прикладів:

Похідна тригонометричних функцій: (з доведенням).

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x; (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Зростання і спадання, критичні точки функції, максимуми і мінімуми, найбільше і найменше значення функції.

Приклад повного дослідження функції з складанням таблиці та побудовою графіка.

Застосування методу пошуку найбільших і найменших значень функції до розв'язування прикладних задач.

Три основних етапи розв'язування практичних задач методом математичною моделювання:

- формалізація (переклад текстової задачі на мову математики);
- розв'язування одержаної математичної задачі;
- інтерпретація знайденого розв'язку (переклад з мови математики в терміни початкової задачі).

Розв'язання за зразком. Приклади.

Історичний матеріал із шкільних підручників та додаткової літератури, факультатив.

Короткий методичний коментар вивчення границі функції та неперервності.

Різні підходи до означення поняття границі функції та неперервності.

Що спочатку запропонувати учням: означення границі функції чи означення неперервності?

Функція f прямує до числа a кол. x прямує до x_0 , якщо різниця $f(x) - a$ як завгодно мала, тобто $|f(x) - a|$ стає менше від будь-якого фіксованого

$\epsilon > 0$ при зменшенні $|\Delta x|$, де $\Delta x = x - x_0$

Знаходження a за функцією/називають **граничним переходом**.

Приклад: Знаходження похідної - граничний перехід.

Інакше: Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для любого $\epsilon > 0$ знайдеться таке δ , що для всіх $x \neq a$, для яких $|x - a| < \delta$,

вірна нерівність $|f(x) - b| < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Теореми про границю суми, добутку, частки.

Функцію $f(x)$ називається **неперервною** в точці x_0 , якщо вона визначена в деякому околу точки і якщо границя функції при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Означення функції, неперервної на проміжку (якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку).

Наглядне поняття про неперервність функції (малюнок, виконаний без відриву олівця від паперу).

Функції неперервні в у всіх точках своєї області визначення: дробно-раціональні, тригонометричні.

Властивість неперервних функцій:

Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція неперервна і не перетворюється в нуль, то вона на цьому інтервалі зберігає постійний знак.

На цій властивості оснований метод **інтервалів** -метод розв'язування нерівностей з однією змінною.

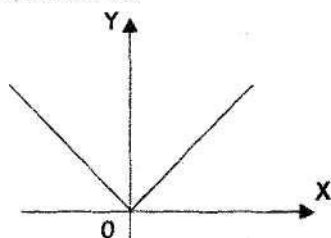
Подальше використання поняття неперервності функції: ознаки максимуму і

Чи бувають неперервні функції, але не диференційовані в даній точці?

Так, функція $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$

(З доведенням)

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ \text{не існує,} & \text{якщо } x = 0 \\ -1, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$



мінімуму функції в темі "Дослідження функції".

Ознака максимуму (мінімуму) функції:

Якщо функція f неперервна в точці x_0 , а $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на інтервалі $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) на інтервалі $(x_0; b)$, то x_0 являється точкою максимуму (мінімуму) функції.

Недоліки в знаннях учнів, які виникають при вивченні неперервності та границі функції:

- вірмо обчислив границю функції, учні утрудняються, а порою і зовсім неспроможні зобразити графік функції окіл точки;

- за готовими рисунками графіків функції учні неспроможні відповісти на питання: чи має дана функція границю при $x \rightarrow a$, чи неперервна функція в т. $x = a$

Це означає, що учні не розуміють змістовну сторону вивчаємлх означень, хоч вони оволоділи деякими оперативними навичками.

Розв'язування задач на найбільші та найменші значення величин

У багатьох геометричних, фізичних і технічних задачах доводиться знаходити найбільше або найменше значення величини, яка пов'язана функціональною залежністю з іншою величиною.

Практична необхідність розв'язувати такі задачі стала одним із джерел розвитку математичного аналізу.

Задачі цього типу, як правило, розв'язуються за такою схемою:

- зробити креслення досліджуваного об'єкта й увести позначення;
- скласти функцію, для якої далі потрібно знайти найбільше чи найменше значення;
- якщо ця функція залежить більш як від одного аргументу, потрібно виключити зайві аргументи, використовуючи залежності даних змісту задачі;
- дослідити на екстремум складену функцію на області її реального існування;
- дослідити здобуті результати з точки зору постановки задачі.

Задача 1. Навколо даного циліндра описати конус найменшого об'єму (площини основ циліндра і конуса збігаються).

Розв'язання. 1) Виконаємо креслення (рис. 5.33) та введемо позначення:

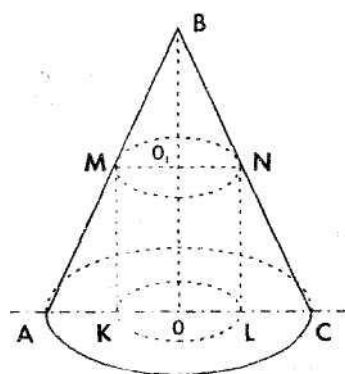


Рис. 5.33.

$h = OO_1$ - висота циліндра; H - його висота, причому $R = AO$

$r = OK$ - радіус його основи; $h \neq BO$;

R радіус конуса;

2) Складемо функцію V , якою виражається змінний об'єм конуса:

$$V(R, H) = \frac{1}{3} \pi R^2 H; \quad (1)$$

помічаємо, що ця функція залежить від двох змінних R та H ;

Встановимо залежність між змінними R і H та виразимо H через R , розглянувши подібні трикутники ABO та AMK , із їх подібності запишемо пропорцію:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r} \Rightarrow H = \frac{Rh}{R-r};$$

Підставивши (2) в (1), дістанемо функцію K від однієї змінної R :

$$V(R) = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{Rh}{R-r} = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^3}{R-r}$$

4) Оскільки задача містить реальні об'єкти, область визначення функції K змінного об'єму становить проміжок (r, ∞) ; дослідимо функцію $V(R)$ на екстремум на області її визначення:

$$V'(R) = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{3R^3 - 3R^2r - R^3}{(R-r)^2} = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^2(2R-3r)}{(R-r)^2};$$

$$V'(R) = 0 \text{ при } R_1 = 0; R_2 = \frac{3}{2}r; V'(R) = -\infty \text{ при } R_3 = r \in D(V);$$

критичною є єдина точка $R_2 = \frac{3}{2}r$;

точки $R_1 = 0$ і $R_3 = r$ не є критичними, оскільки вони не належать $D(V)$;

5) За зміною знака першої похідної визначимо наявність екстремуму та його характер на проміжку $\frac{4}{3}r \leq R_2 \leq 2r$,

$$V'\left(\frac{4}{3}r\right) = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 \left(2 \cdot \frac{4}{3}r - 3r\right)}{\left(\frac{4}{3}r - r\right)^2} = \frac{\pi h}{3} \left(\frac{4}{3}r\right)^2 \frac{\left(-\frac{r}{3}\right)}{\left(\frac{r}{3}\right)^2} < 0$$

Отже, у точці функція $V(R)$ спадає. Знайдемо знак похідної в

$$R = \frac{4}{3}r$$

точці $R = 2r$;

$$V'(2r) = \frac{4\pi hr}{3} > 0.$$

Таким чином, у точці $R = 2r$ функція $V(R)$ зростає. Отже, $R = \frac{3}{2}r$

точка мінімуму, тобто конус найменшого об'єму має радіус $R = \frac{3}{2}r$. Висоту

конуса знаходимо з рівності (2):

$$H = \frac{\frac{3}{2}rh}{\frac{3}{2}r - r} = \frac{\frac{3}{2}rh}{\frac{r}{2}} = 3h.$$

Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3}{2}r\right)^2 \cdot 3h = \frac{9\pi r^2 h}{4}$$

2) складемо функцію $S(t)$, яка виражає відстань між автомобілями, що рухаються до перехрестя О; нехай у момент часу t відстань між ними дорівнює СД; за час t автомобіль, що вирушив із точки А зі швидкістю 40 км/год., подолає відстань ВД = 50 t , звідси ОД = 3-50 t ; за теоремою Піфагора

$$S(t) = \sqrt{(2-40t)^2 + (3-50t)^2};$$

отже, дістали функцію одного аргументу, що описує зміну відстані між автомобілями й визначена на проміжку $[0; \infty)$; $t=0$ входить до області існування функції і, таким чином, не включається той факт, що найменша відстань буде при $t=0$;

3) найменшого свого значення функція $S(t)$ може набути й у внутрішній точці, тобто в точці мінімуму; отже, дослідимо функцію $S(t)$ на екстремум:

$$S'(t) = \frac{2(2-40t)(-40) + 2(3-50t)(-50)}{2\sqrt{(2-40t)^2 + (3-50t)^2}} = \frac{-10(23-410t)}{\sqrt{(2-40t)^2 + (3-50t)^2}}$$

$$S'(t) = 0$$

Оскільки знаменник дробу не дорівнює 0: то

$$t = \frac{23}{410}$$

4) за зміною знака першої похідної визначимо характер екстремуму в критичній точці

$$S'(0) < 0; S'(1) > 0;$$

Отже, функція, $S(t)$ має в точці $t = \frac{23}{410}$ - мінімум, причому

$$S\left(\frac{23}{410}\right) < S(0)$$

Отже, найменша відстань між автомобілями, що рухаються, буде через

$$\frac{23}{410}$$

години.

Вивчення первісної та інтегралу.

Короткий методичний коментар.

Інтегрування - операція, обернена диференціюванню.

Мотивування введення цієї операції:

Приклад із механіки:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2}; S'(t) = V(t) = gt;$$

$$V'(t) = a(t) = g$$

Функція F називається первісною для функції/на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$

Будь-яка первісна для функції/ на проміжку I може бути записана в вигляді $F(x) + C$, де $F(x)$ - одна із первісних для функції $f(x)$ на проміжку I , а C - довільна стала, (з доведенням).

Приклади:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ -первісна для } f(x)=x^2, \text{ так як } F' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$$

А функція

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1? F_1'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Так,

$$\text{А функція } F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 100? F_2'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \text{ Аналогічно.}$$

Значить довільна функція $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ буде первісною для функції

$$f(x) = x^2$$

У функції - *похідна одна, а первісних безліч*. Геометричний смисл основної властивості первісної. Графіки будь-яких первісних для функції одержуються один із одного паралельними перенесеннями вздовж осі ОУ

Графіки первісних краще будувати на конкретних прикладах. Три правила знаходження первісних.

Інтеграл

Означення криволінійної трапеції. Чому в формулюванні означення потрібні слова "невід'ємної" і "неперервної"?

Теорема (з доведенням).

Якщо f - неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b]$ функція, а F — її первісна на цьому відрізку, то площа S відповідної криволінійної трапеції дорівнює приросту первісної на відрізку $[a;b]$, тобто $S = F(b) - F(a)$.

Інший підхід до задачі на обчислення площі криволінійної трапеції: відрізок $[a;b]$ розбивається на n відрізків однакової довжини точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Введення означення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Застосування інтегралу:

1. Обчислення площ фігур.
2. Обчислення об'ємів тіл.
3. В механіці.

Приклади вправ на обчислення площ фігур.

$$V = \int_a^b S(x) dx . \text{ Площина перерізу проводиться перпендикулярно осі ОХ.}$$

Об'єми зрізаної піраміди і тіл обертання: кулі, конуса, циліндра. Інтеграл у фізиці й техніці. Історичні факти.

Шкільний факультатив та роботи в класах з поглибленим вивченням математики (програми, підручники).

Найпростіші диференціальні рівняння в шкільному курсі математики.

Короткий методичний коментар.

Роль і місце даної теми в шкільному курсі математики: детальне вивчення теми тільки в умовах поглибленого вивчення математики (спецкласи і факультатив).

Найпростіше диференціальне рівняння: $F'(x) = f(x)$

Диференціальне рівняння для розв'язування більшості задач фізики, техніки, біології: $F'(x) = kf(x)$

Приклад із механіки про одержання диференціальних рівнянь:

$h' = ma$, де F — сила, a прискорення точки. $F = F(t)$, $a(t) = x''(t)$

, тоді $F(t) = ma = mx''(t) \rightarrow x''(t) = \frac{F(t)}{m}$

Розв'язання цього рівняння.

Диференціальне рівняння показникового зростання і показникового спадання.

Радіоактивний розпад.

Гармонійне коливання

$\sin' x = \cos x$; $\sin''(x) = \cos' x = -\sin x$

$\cos' x = -\sin x$; $\cos'' x = -\sin' x = -\cos x$

$f''(t) = -f'(t)$; $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ *

- диференціальне рівняння гармонійного коливання.

Задача про кульку на пружині. Функція $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ при

будь-яких постійних A являється розв'язком рівняння (*). З доведенням.

Диференціальні рівняння на заняттях факультативу і в спеціалізованих класах.

Геометричний смисл диференціального рівняння.

Похідна й інтеграл - це фундаментальні математичні поняття, без яких немислимі сучасне природознавство й техніка. Вивчення розділів, пов'язаних з

похідною й інтегралом, сприяє формуванню світогляду школярів: вони дають багаті можливості для створення правильного розуміння відношення математики до реального світу, для ілюстрації формування математичних понять у зв'язку з потребами науки і практики і застосування математичних теорій до розв'язування задач. Крім того, вивчення цих розділів сприяє загальному розвитку школярів, виробленню спроможності до напруженої розумової праці, розвиває уміння чітко і послідовно мислити, обґрунтовувати свої міркування і вникати у переконання інших.

Основним завданням вивчення елементів математичного аналізу в школі є ознайомлення учнів з деякими основними поняттями, теоретичними положеннями, методами і практичними застосуваннями математичного аналізу, а також створення достатньої бази для подальшого вдосконалення знань випускників шляхом самоосвіти чи при продовженні навчання у вузі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівневий підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2009. 304 с.
2. Бабій Н.М. Способи розв'язування задач із математики як засіб інтегрованого навчання в школі. *Математика в школах України*. 2019. № 13-15 (601-603) травень. С. 8- 12.
3. Бараболя М. М. Педагогічний довідник вчителя математики. Посібник для самоосвіти вчителів математики. Вінниця, 2008. 128 с.
4. Белешко Д. Т. Загальні питання теорії математичних задач. поняття задачі, класифікація задач, вправи, запитання .РДГУ. 2014. С. 3-5.
5. Бевз В. Г. Практикум з методики навчання математики. Основна школа. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.
7. Бевз В. Г. Метод координат і його вивчення в школі. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. 2010. № 34. С. 82-86.
8. Бевз Г. П. Методи навчання математики. Харків: Видавнича група «Основа», 2003. 96 с.
9. Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Швець В. О. Геометрія. Академічний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Київ: Генеза, 2010. 256 с.
10. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. 240 с.
11. Гончарова І.В. Евристичні вміння: роль і значення в процесі навчання математики. Гуманізація навчально-виховного процесу: *Збірник наукових праць. Випуск XXXV*. Слов'янськ: Видавничий центр СДПІ, 2007. С.84-91.
12. Гончарова І.В. Прийоми розвитку особистості учня на евристичних факультативах з математики. *Вісник черкаського університету*. Вип.93. Черкаси,

2006. С.30-35.

13. Гордієнко І. В. Метод аналогії у вивченні шкільного курсу стереометрії : автореф. дис. канд. пед. наук :13.00.02. Київ, 2003. 20 с.

14. Грідіна О. О. Використання онлайнового сервісу Learningapps.org для узагальнюючого повторення теми «Рівняння». Тези доповідей IX міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021). Черкаси: вид. від ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2021. С. 136-137.

15. Жук Ю.О., Шишкіна М.П. Електронний підручник та проблема систематики комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання. *Нові технології навчання*. 2000. № 25. С. 44-49.

16. Евристична діяльність учня – основний спосіб ефективного навчання шкільного курсу алгебри [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://oblosvita.com/navigaciya/skrynka/matematyka/2537evristichna-diynalnist-uchnya-osnovnij-sposib-efektivnogo-navchannyashkilnogo-kursu-algebri.html>.

17. Евристичні методи пошуку способу розв'язання задач [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://referatbox.net/page,5,233022-Evristicalskie-metody-poiska-sposoba-resheniya-zadach.html>.

18. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підруч. для 9 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. 256 с.

19. Істер О. С. Геометрія: підручн. для 10 кл. Профільний рівень. Київ: Генеза, 2018. 240 с.

20. Кушнір В. А., Ріжняк Р. Я. Практикум з методики навчання математики: навчальний посібник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 224 с.

21. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя. Київ: Абрис, 1994. 464 с.

22. Максименко В.П. Дидактика: курс лекцій: навч. посіб.. Хмельницький: ХмЦНП, 2013. 222 с.

23. Максимова Т.С. Психолого-педагогічні передумови формування

евристичних умінь майбутніх спеціалістів // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць. Випуск XII / За загальною редакцією проф. В. І. Сипченка. Слов'янськ: Видавничий центр СДП, 2004. С.138-145.

24. Математика. Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://docs.google.com/document/preview?hgd=1&id=1iM_xCzAP_Pq-Td3xSZAcqQvP5oi9bj3TsPjIz9OXe1U

25. Математика 5 кл., Тарасенкова Н.А. та ін. 2-ге вид. допов. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.

26. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.

27. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підручн. для 9 кл. з поглибленим вивченням. Харків: Гімназія, 2017. 240 с.

28. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.

29. Неліна О.Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2003. 241 с.

30. Нова українська школа. URL: <https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola>

31. Овчар О. Методи розв'язування прикладних задач на уроках математики. *Молодь і ринок*. 2010. № 10(69). С. 145-150.

32. Пазиненко С.В. Збірник прикладних задач ДЛІЯ 5-6-Х КЛАСІВ «Математика навколо нас»: Збірник задач для вчителів математики і учнів загальноосвітніх шкіл. URL: <https://naurok.com.ua/zbirnik-prikladnih-zadach-93930.html> [ст12- 14](#)

33. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи

студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / За ред. В. О. Швеця. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.

34. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.

35. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студентів математичних спеціальностей пед. навчальних закладів. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

36. Стеценко П. Є. Курс вищої математики для технікумів, інститутів: навч.- метод. посіб. Київ: Генеза, 2002. 312 с.

37. Фіцула М.М. Педагогіка: навч. посібник для студ. вищих пед. закладів освіти. Київ: вид. центр «Академія», 2000. 554 с.