

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня
на тему:

**Методика навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з
параметром в основній школі**

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи ММ-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Катанаш Ярослава Ананіївна

Керівник: канд. педагогічних наук,
професор кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доцент
Сяський Василь Олексійович

Рівне – 2021 рік

Зміст

Вступ	4
Розділ I. Науково-теоретичні основи теми дослідження	7
1.1. Знайомство з параметром. Основні поняття і визначення.....	7
1.2. Алгоритм розв’язування рівняння або нерівності з параметром.....	12
1.3. Аналітичний та графічний методи порівняння виразів, залежних від параметра.....	14
1.4. Аналіз підручників і завдань державної підсумкової атестації 9 класів.....	16
Розділ II. Методика розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами в основній школі	19
2.1. Лінійні рівняння і рівняння, що призводять до лінійних.....	19
2.2. Лінійні нерівності і нерівності, що призводять до лінійних.....	20
2.3. Квадратний тричлен.....	23
2.3.1. Розв’язування квадратних рівнянь із коефіцієнтами, залежними від параметрів.....	24
2.3.2. Графік квадратного тричлена.....	25
2.3.3. Необхідні і достатні умови, які визначають можливі випадки розташування коренів квадратного тричлена.....	27
2.3.4. Задачі із застосуванням теореми Вієта.....	35
2.4. Квадратні рівняння і рівняння, які приводять до квадратних.....	37
2.5. Квадратні нерівності.....	41
Розділ III. Програма факультативу з розв’язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі	44

3.1.	Зміст	програми	
занять.....			44
3.2.	Тема 1. Знайомство з парметром	(4 год)	47
3.3.	Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметром	(6 год)	52
3.4.	Тема 3. Квадратична функція	(8 год)	59
3.5.	Практична перевірка результатів дослідження		76
Висновки.....			78
Список використаної літератури.....			80

ВСТУП

Вивчення математики в основній школі полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями безпосередньо пов'язаними з математикою або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів.

Для успішної самореалізації особистості необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідне більш повне опанування понять, законів, теорій, використання інноваційних технологій навчання та організація дослідницької і проєктної діяльності в сфері математики.

Кожна людина після здобуття середньої освіти постає перед важливим вибором — вибір професії. Беззаперечним фактом є те, що необхідною умовою для вступу до вищих навчальних закладів є участь у зовнішньому незалежному оцінюванні, де випускники шкіл складають обов'язково тести з математики. Результати ЗНО показують, що на сьогоднішній день багато випускників допускають помилки при розв'язуванні рівнянь та нерівностей в тому числі із параметром.

Обґрунтуванню змісту методів, засобів, організаційних форм навчання та активізації пізнавальної діяльності присвячені праці П. І. Горнштейн, В. Б. Полонського, М. С. Якір, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович та інших. Розв'язування рівнянь та нерівностей із параметром розглядається, як ефективний засіб формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як засобу їх математичного розвитку. Проте, незважаючи на постійне удосконалення форм і методів роботи

вчителів, аналіз практики навчання показав, що у вмінні учнів при розв'язуванні рівнянь і нерівностей із параметром є прогалини.

Однією з причин появи учнівських помилок є формальне, поверхнєве заучування навчального матеріалу, невміння бачити в ньому принципову відмінність від попереднього. Несвоєчасне виявлення прогалин у знаннях школярів призводить до поступового «запускання» знань. Складається ситуація, коли учень перестає розуміти вчителя, втрачає інтерес до навчання, віру в себе і на тривалий час залишається пасивним спостерігачем.

Актуальність дослідження. В учнів основної школи великі труднощі виникають при розв'язуванні рівнянь і нерівностей з параметром. Це викликано насамперед тим, що в будь-якому випадку, навіть при розв'язуванні найпростіших рівнянь, що містять параметри, доводиться робити розгалуження всіх значень параметрів на окремі класи, при кожному з яких задача має розв'язування. При цьому слід чітко і послідовно стежити за збереженням рівносильності розв'язуваних рівнянь з урахуванням області визначення виразів, що входять в рівняння, а також враховувати виконання операцій. Однак шкільна програма не передбачає формування міцних навичок розв'язування таких завдань, хоча практика державного іспиту з математики показує, що такі завдання стали традиційними, і абсолютно очевидно, що до «зустрічі» з ними треба спеціально готуватися.

Результати державної підсумкової атестації показують, що на сьогоднішній день багато випускників 9 класів допускають помилки при розв'язуванні рівнянь та нерівностей в тому числі із параметром.

Тому була вибрана тема дослідження «Методика навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з параметром в основній школі».

Мета дослідження – розробити і теоретично обґрунтувати методику розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром в основній школі.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з параметром в основній школі.

Предмет дослідження – зміст і методика навчання учнів методів розв'язування рівнянь і нерівностей із параметром в основній школі.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація факультативних занять, на яких розглядаються лінійні, квадратні рівняння, нерівності з параметром в основній школі, покращить знання і вміння учнів основної школи з даного питання.

Мета та висунута гіпотеза визначили основні **завдання дослідження:**

- проаналізувати літературу по темі дослідження;
- розглянути методику навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з параметром в основній школі;
- систематизувати різні методи і прийоми розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром та проаналізувати ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки та шляхи їх усунення;
- розробити програму факультативних занять з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі;
- розробити заняття факультативу з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі;
- провести практичну перевірку результатів дослідження;
- розробити методичні рекомендації по проведенню факультативу з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані методичні твердження та висновки можна використовувати для вдосконалення навчально-виховного процесу.

Розділ I. Науково-теоретичні основи теми дослідження

1.1. Знайомство з параметром. Основні поняття і визначення

Відомо, що в програмах з математики для неспеціалізованих шкіл задачам із параметром відводиться невелике місце. Тому в першу чергу, вкажемо розділи загально навчальної математики, у яких взагалі є присутня сама ідея параметра.

Із параметром учні зустрічаються при введенні деяких понять. Не наводячи детальних визначень, розглянемо на прикладах наступні об'єкти:

- функція пряма пропорційність: $y = k x$ (x і y – змінні; k – параметр, $k \neq 0$);
- лінійна функція: $y = k x + b$ (x і y – змінні; k і b – параметри);
- лінійне рівняння: $a x + b = 0$ (x – змінна; a і b – параметри);
- рівняння першого степеня: $a x + b = 0$ (x – змінна; a і b – параметри, $a \neq 0$);
- квадратне рівняння: $a x^2 + b x + c = 0$ (x – змінна; a , b і c – параметри, $a \neq 0$).

До задач із параметром, які розглядаються у шкільному курсі, можна віднести, наприклад, пошук розв'язку лінійних та квадратних рівнянь у загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення параметрів.

Звичайно, такий невеликий клас задач багатьом не дозволяє засвоїти головне: параметр, будучи фіксованим, але невідомим числом, має як би двоїсту природу. По-перше, припустимі відомі дозволяють «говорити» із параметром як із числом, а по-друге, – ступінь свободи говоріння обмежується його невідомістю. Так, ділення на вираз, який містить параметр, вилучення кореня парного степеня із подібних виразів вимагають попередніх досліджень. Як правило, результати цих досліджень впливають і на розв'язок, і на відповідь.

Головне, що треба засвоїти при першому знайомстві з параметром, – це необхідність обережного, навіть, якщо хочете, делікатного поводження із фіксованим, але невідомим числом.

Необхідність акуратного поводження із параметром добре видно на тих прикладах, де заміна параметра числом робить задачу простою. До таких завдань, наприклад відносяться: порівняння двох чисел, розв'язування лінійного чи квадратного рівняння, нерівності і т.д.

Розглянемо ряд прикладів.

1. Порівняти – a і $3a$.

Розв'язування. Звичайно розглянемо три випадки:

якщо $a < 0$, то — $a > 3a$;

якщо $a = 0$, то — $a = 3a$;

якщо $a > 0$, то — $a < 3a$.

2. Розв'язати рівняння $ax = 1$.

Розв'язування. На перший погляд можна зразу дати відповідь: $x = \frac{1}{a}$.

Адже при $a = 0$, дане рівняння розв'язків немає, і правильною відповіддю буде:

Відповідь. Якщо $a = 0$, то розв'язку немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

3. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Розв'язування. Неважко здогадатися, що при розв'язанні цього рівняння достатньо розглянути такі випадки:

1) $a = 1$; тоді рівняння матиме вигляд $0x = 2$ і не має розв'язку;

2) $a = -1$; отримаємо $0x = 0$, і очевидно x – будь яке.

3) $a \neq \pm 1$; маємо $x = \frac{1}{a-1}$.

Зробимо одне зауваження. Вагомим етапом розв'язування завдань із параметром є запис відповіді. Особливо це відноситься до тих прикладів, де розв'язування немов би «крутиться» в залежності від значення параметра. У подібних випадках складання відповіді – це набір раніше отриманих результатів. І тут дуже важливо не забути відобразити у відповіді всі етапи розв'язування.

У розглянутому прикладі, запис відповіді практично повторює розв'язування.

Відповідь. Якщо $a = -1$, x – будь яке; $a = 1$, то немає розв'язку; $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

4. Розв'язати нерівність $ax < 1$.

Розв'язування. Як і раніше, аналіз трьох можливостей $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ дозволяє отримати наступне:

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке; якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$.

Висловимо міркування з приводу ролі параметра у наведених прикладах. Отже, шукані значення x виступали у ролі залежної змінної, а параметр – незалежної. Звідси і виникло «розташування» розв'язку із урахуванням визначених значень параметра. А також, умова задачі відводила параметру скромніше місце, – незрозуміло було, чи вплине його присутність на хід розв'язку.

Подальше знайомство із параметром будемо проводити дещо в іншому напрямку.

Виділимо клас задач, де за рахунок параметра на змінну накладають будь-які штучні обмеження. Для таких задач характерними є наступні формулювання:

- при якому значенні параметра рівняння (нерівність) має один розв'язок, два, нескінченно багато, жодного;
- розв'язком рівняння (нерівності) є певна підмножина множини дійсних чисел і ін.

Звернемося до конкретних прикладів.

5. При якому a нерівність $(x - a)(x - 2) \leq 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язування. Легко здогадатися, що $a = 2$ задовольняє потреби задачі. Дійсно, при $a = 2$ отримаємо нерівність $(x - 2)^2 \leq 0$, яка має єдиний розв'язок. Для випадку, коли $a \neq 2$, розв'язком нерівності очевидно буде відрізок.

Відповідь. $a = 2$.

6. При яких a розв'язком нерівності $(x - a)^2(x - 2)(x + 3) < 0$ буде відрізок ?

Розв'язування. Так як $(x - a)^2 \geq 0$, то дана нерівність рівносильна сукупності $\begin{cases} (x - 2)(x + 3) \leq 0, \\ x = a. \end{cases}$

Розв'язком нерівності сукупності буде відрізок $[-3; 2]$. Отже, при $a \in [-3; 2]$ розв'язком сукупності також буде відрізок.

Відповідь. $-3 \leq a \leq 2$.

7. При яких a рівняння $ax^2 - x + 3 = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язування. Перед усім звернемо увагу на розповсюджену помилку: вважати початкове рівняння квадратним. Насправді це рівняння не вище другого степеня. Користуючись цим міркуванням, звично розпочати розв'язок, розглянувши випадок, коли $a = 0$. Отож, якщо $a = 0$, то очевидно дане рівняння має єдиний розв'язок. Якщо $a \neq 0$, то маємо діло із квадратним рівнянням. Його дискримінант $1 - 12a$ приймає значення, рівне нулю, при $a = \frac{1}{12}$.

Відповідь. $a = 0$ або $a = \frac{1}{12}$.

8. При яких a рівняння $(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$ має один розв'язок?

Розв'язування. Зрозуміло, що треба починати з випадку $a = 2$. Але при $a = 2$ початкове рівняння взагалі немає розв'язків. Якщо $a \neq 2$, то дане рівняння — квадратне, і, здавалося б, шукані значення параметра — це корені дискримінанта. Проте дискримінант перетворюється в нуль при $a = 2$ або $a = 5$. Оскільки $a = 2$ не підходить, то

Відповідь. $a = 5$.

Ймовірно, у двох останніх прикладах нічого складного нема (тим більше, якщо вони вже розв'язані). Проте параметр у цих задачах проявляє свою «підступність», особливо для початківців. Тому корисно розглянути ще декілька прикладів, де параметр «розставляє пастки».

9. При яких a рівняння $ax^2 - 4x + 3 = 0$ має більше одного кореня?

Розв'язування. При $a = 0$ рівняння має один корінь, що не задовольняє умову. При $a \neq 0$ початкове рівняння, будучи квадратним, має два корені, якщо його дискримінант $16 - 4a^2 - 12a$ — додатний. Звідси отримаємо $-4 < a < 1$. Проте в отриманий проміжок $(-4; 1)$ входить число 0, яке неприйнятне.

Відповідь. $-4 < a < 0$ або $0 < a < 1$.

10. При яких a рівняння $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ має більше одного кореня ?

Розв'язування. Стандартний крок — почати із випадків $a = 0$ і $a = -3$. При $a = 0$ рівняння має єдиний розв'язок. Цікаво, що при $a = -3$ розв'язком рівняння є будь-яке дійсне число. При $a \neq -3$ і $a \neq 0$, поділивши обидві частини даного рівняння на $(a + 3)$, отримаємо квадратне рівняння $ax^2 + 2a - 3 = 0$, дискримінант якого $4(1 + 3a)$ додатний при $a > -\frac{1}{3}$.

Досвід попередніх прикладів підказує, що із проміжку $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ треба виключити точку $a = 0$, а у відповідь не забути включити $a = -3$.

Відповідь. $a = -3$, або $-\frac{1}{3} < a < 0$, або $a > 0$.

Нехай дано рівняння або нерівність з двома змінними:

$$F(x, a) = 0 \quad (G(x, a) \geq 0 \text{ або } G(x, a) > 0) \quad (1.1)$$

Задача про розв'язування рівнянь (нерівностей) (1.1) може бути сформульована одним із двох наступних способів.

1. Знайти всі пари чисел (x, a) , які задовольняють дане рівняння (нерівність). У цьому випадку вираз (1.1) називається рівнянням (нерівністю) із двома змінними x і a , у якому обидві змінні x і a грають однакову роль.
2. Для кожного значення змінної a із деякої числової множини A розв'язати- рівняння (нерівність) відносно x . Тоді вираз (1.1) називають рівнянням (нерівністю) зі змінною x і параметром a , а множина A — областю зміни параметра. При відсутності обмежень під областю зміни параметра мається на увазі множина всіх дійсних чисел.

Якщо параметру, що міститься в рівнянні (нерівності), надати деяке конкретне числове значення, то можливий один з випадків:

- а) рівняння або нерівність з однією невідомою x ;
- б) вираз, позбавлений сенсу.

У першому випадку значення параметра називається допустимим, у другому — неприпустимим. Розв'язати рівняння або нерівність з параметром — це значить для кожного допустимого значення параметра знайти множину всіх, які задовольняють рівняння або нерівності, значень невідомого. Зверніть увагу на те, що вираз $F(x, a) = 0$ ($G(x, a) > 0$ або $G(x, a) < 0$) — це, по суті, короткий запис сімейства рівнянь (нерівностей), що виходять з нього при заданих значеннях параметра. Тому розв'язати рівняння (нерівність)

$F(x, a) = 0$ ($G(x, a) > 0$ або $G(x, a) < 0$) (зі змінною x і параметром a) — це значить на множині дійсних чисел утворити рівняння (нерівності), одержані з (1.1) при всіх допустимих значеннях параметра a .

Відзначимо, що при деяких множинах із допустимих значень параметра a можуть виходити одні рівняння (нерівності), при інших — інші. Тому для полегшення розв'язування зручно нанести на числову пряму значення параметра, які називаються контрольними, при яких або при переході через які відбуваються якісні зміни рівняння. Наприклад, рівняння (нерівність) з квадратного стає лінійним.

При розв'язуванні рівняння (нерівності) (1.1) можна користуватися наступним алгоритмом.

1.2. Алгоритм розв'язування рівняння або нерівності з параметром

Визначають обмеження, що накладаються на значення невідомого x і параметра a , які випливають з того, що функції і арифметичні операції в $F(x, a)$ або $G(x, a)$ мають сенс.

Визначають формальні розв'язки (1.1), які записуються без врахування обмежень. Якщо при розв'язуванні виникають контрольні значення параметра, то їх наносять на числову вісь Oa . Ці значення розбивають область допустимих

значень параметра на підмножини. На кожній з підмножин розв'язують задане рівняння.

Виключають ті значення параметра, при яких формальні розв'язки не задовольняють отриманим обмеженням.

На числову вісь Oa додають знайдені значення параметра. Для кожного з проміжків на осі Oa записують всі отримані розв'язки в залежності від значень параметра a .

Виписують відповідь, тобто записують розв'язок в залежності від значень параметра a .

Зауваження.

1) Наявність параметра в задачі припускає спеціальну форму запису відповіді, що дозволяє встановити, якою є відповідь для будь-якого допустимого значення параметра. Неприпустимі значення також вказуються у відповіді, і вважається, що при цих значеннях параметра задача не має розв'язку. При запису відповіді, зазвичай значення параметра перераховуються в порядку зростання від $-\infty$ до $+\infty$, але іноді для компактності відповіді об'єднують проміжки для параметра, на яких формули розв'язування збігаються.

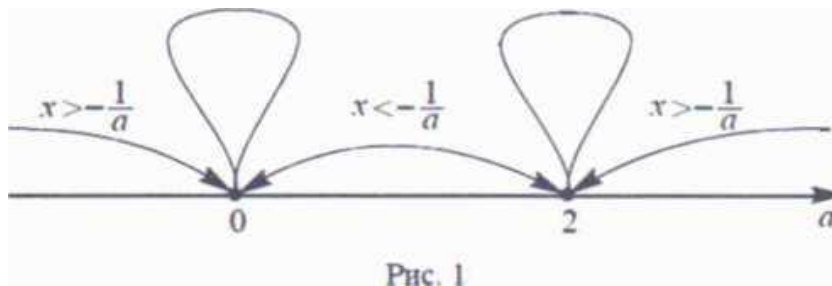
2) У разі розгалуження розв'язків зручно використовувати числову пряму, на яку наносяться контрольні значення параметра, а на проміжках, на які ці значення розбили пряму, вказуються відповіді завдання. Даний прийом дозволяє в подальшому не втратити знайдені відповіді і чітко вказані значення параметра, яким вони відповідають.

Продемонструємо сказане вище на прикладі.

Приклад: Розв'язати нерівність $a(a - 2)x > 2a$.

Розв'язування. Контрольні значення параметра виходять із умови $a(a - 2) = 0$, так як при $a(a - 2) = 0$ нерівність не містить змінної x .

Нанесемо на числову вісь Oa контрольні значення. Вони розбивають вісь Oa на проміжки



- 1) $a < 0$;
- 2) $0 < a < 2$;
- 3) $a > 2$.

На кожному із цих проміжків розв'яжемо дане рівняння. Значення $a = 0$ і $a = 2$ вимагають окремого розгляду.

Якщо $a < 0$, то $a(a - 2) > 0$. Розділивши обидві частини нерівності на множник $a(a - 2) \neq 0$, отримаємо $x < -\frac{1}{a}$.

Якщо $0 < a < 2$, то $a(a - 2) < 0$ і, отже, $x > -\frac{1}{a}$.

Якщо $a > 2$, то $a(a - 2) > 0$ і $x < -\frac{1}{a}$.

При $a = 0$ отримуємо нерівність $0 > 2$, немає розв'язків.

При $a = 2$ отримуємо $0 > 0$, тобто розв'язків також немає.

Нанесемо одержані в ході розв'язування відповіді на відповідні проміжки числової осі Oa і запишемо відповідь.

Зауваження.

Проміжок, до якого належить відповідний розв'язок, позначається на малюнку дугою. На її кінці ставиться стрілочка в тому випадку, якщо цей розв'язок не відноситься до крайньої точки проміжку.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x < -\frac{1}{a}$ якщо $0 < a < 2$, то $x > -\frac{1}{a}$; якщо $a > 2$, то $x < -\frac{1}{a}$; якщо $a = 0$ і $a = 2$, то розв'язків немає.

1.3. Аналітичний та графічний методи порівняння виразів, залежних від параметра

При розв'язуванні рівнянь (нерівностей) з параметром часто приходиться порівнювати декілька виразів залежних від параметра, знаходити серед них

найбільше або найменше. Зазвичай застосовують аналітичний метод, тобто складають і розв'язують систему нерівностей. У разі двох виразів достатньо розв'язати одну нерівність. Якщо ж виразів більше, то краще використовувати графічний метод.

1. Порівняти числа a^2 і $3a + 4$.

Розв'язування. Знайдемо значення параметра a , при яких число a^2 більше числа $3a + 4$. Для цього розв'яжемо нерівність $a^2 > 3a + 4$ або $a^2 - 3a - 4 > 0$. Його розв'язком є $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. При $a = -1$ і $a = 4$ справедливе рівняння $a^2 = 3a + 4$, тобто числа рівні. Відповідно, при $a \in (-1; 4)$ число a^2 менше числа $3a + 4$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, то $a^2 > 3a + 4$; якщо $a = -1$ або $a = 4$, то $a^2 = 3a + 4$; якщо $a \in (-1; 4)$, то $a^2 < 3a + 4$.

2. Визначити найбільше із чисел $1 - a^2$, $-2a - 7$, $\frac{a+1}{3}$, $a - 1$ і $-\frac{a+1}{3}$.

Розв'язування. Скористаємося графічним методом. Для цього побудуємо в системі координат Oxa графіки функції $x = 1 - a^2$, $x = -2a - 7$, $x = \frac{a+1}{3}$
 $x = a - 1$, $x = -\frac{a+1}{3}$.

Для кожного значення змінної a , проводячи вертикальну пряму $a = \text{const}$, визначаємо ординати її точок перетину з побудованими графіками функцій. Ясно, що при фіксованому значенні, з чисел $1 - a^2$, $-2a - 7$, $\frac{a+1}{3}$, $a - 1$ і $-\frac{a+1}{3}$ буде найбільшим те, для якого ордината $\left\{1 - a^2, -2a - 7, \frac{a+1}{3}, a - 1 \text{ і } -\frac{a+1}{3}\right\}$ точки перетину відповідного графіка і прямої $a = \text{const}$ буде найбільшою.

Точки -4 , -1 , $\frac{2}{3}$ і 2 розбивають числову пряму Oa на п'ять проміжків. На кожному з них записуємо відповідь.

Зауваження. Шукане значення лежить на графіку функції

$$f(a) = \max$$

Графік $f(a)$ на мал. Намальований суцільною лінією.

Відповідь. Якщо $a \leq -4$, то

$-2a - 7$; якщо $-4 < a \leq -1$, то $-\frac{a+1}{3}$; якщо $-1 < a \leq \frac{2}{3}$, то $1 - a^2$;

якщо $\frac{2}{3} < a \leq 2$, то $\frac{a+1}{3}$; якщо $a > 2$, то $a - 1$.

1.4. Аналіз підручників і завдань державної підсумкової атестації

9 класів

Алгебра 7 клас

У підручнику Г. П. Бевза [3] рівняння із параметром з'являється при вивченні теми «Лінійні рівняння з однією змінною». Усі номери підвищеної складності, цієї теми, присвячені завданням із параметром. Більш складні завдання із параметром пропонуються лише у додаткових завданнях для повторення.

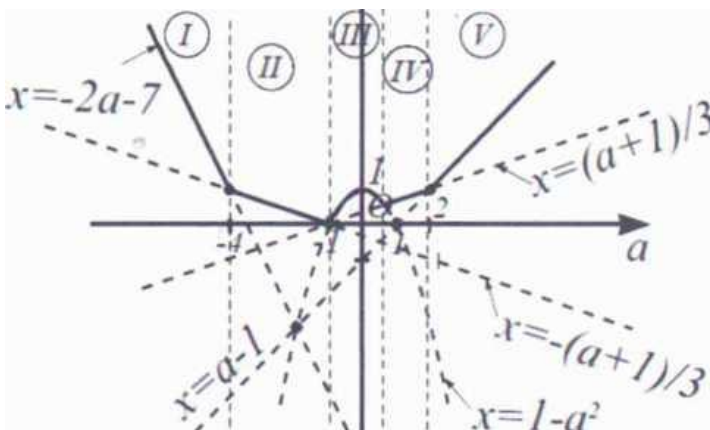
Розглянемо ще один підручник із алгебри, автор Істер О. С. [11]. У цьому підручнику при вивченні теми «Лінійне рівняння з однією змінною» пропонують завдання, у яких треба знайти значення параметра. Ці завдання були позначені, як завдання високого рівня. Також рівняння, які містять параметри представлені у задачах підвищеної складності.

Таким чином, у цих двох підручниках із алгебри 7 класу зустрічається мало завдань із параметром. Найбільш різноманітні і цікаві завдання зустрічаються у підручнику Г. П. Бевза.

Алгебра 8 клас

Для 8 класу також розглянемо підручники Г. П. Бевза [4] і О.С. Істера [12].

У підручнику Г. П. Бевза при вивченні теми «Квадратні рівняння» зустрічаються вправи на знаходження



параметра, також у цьому розділі пропонуються вправи, які містять параметр, де необхідно знайти значення змінної (параметра), якщо відомий корінь рівняння або якесь співвідношення коренів. У кінці підручника наведено вправи для підвищеної складності, у яких треба знайти значення параметра, якщо дано суму або різницю коренів рівняння.

Вивчаючи тему «Квадратні рівняння» по підручнику О. С. Істера, зустрічаємо вправи на знаходження параметра, у яких дано один корінь і треба знайти другий корінь і параметр, ці вправи із середнього рівня складності, а також вправи для повторення.

У кінці підручника є вправи підвищеної складності, в яких треба знайти значення параметра, якщо дано суму або різницю коренів рівняння.

При вивченні інших тем обох підручників 8 класу параметр не використовується.

Таким чином, у цих двох підручниках зустрічається також мало завдань із параметром. Вправи обох підручників схожі за змістом, але більш складніші вправи з параметром наведені у підручнику Г. П. Бевза.

Алгебра 9 клас

Розглянемо підручник з алгебри, автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [14]. В даному підручнику вправи з параметром зустрічаються в темах «Нерівності», «Квадратична функція». У розділі також наводяться вправи з параметром на дослідження:

- області значень;
- розташування графіка щодо прямої;
- вершини параболи;
- нулів функції;
- належність даних точок функції, яка містить два параметри.

Всі вправи з параметром позначені, як вправи підвищеної складності.

Аналіз завдань державної підсумкової атестації 9 класу

Посібник «Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас» [8] призначено для проведення державної підсумкової атестації з математики в дев'ятих класах загальноосвітніх навчальних закладів, а також перевірки знань і вмінь учнів протягом навчального року. Він складається із чотирьох частин. Ці частини відрізняються за формою тестових завдань і за рівнем їх складності. Зміст усіх завдань відповідає чинній програмі для загальноосвітніх навчальних закладів та програмі для шкіл, ліцеїв і гімназій з поглибленим вивченням математики.

Учні загальноосвітніх шкіл виконують усі завдання першої, другої та третьої частин атестаційної роботи.

Учні з поглибленим вивченням математики виконують завдання першої, другої, третьої та четвертої частин.

Лише у четвертій частині підручника наведені вправи з параметром, такі як:

➤ Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$\frac{a^2-1}{ax-1} + \frac{a-x}{a} = 1.$$

➤ При яких значеннях параметра k один з коренів рівняння

$$4x^2 - (3k+2)x + (k^2-1) = 0 \text{ утричі більший за другий?}$$

➤ При яких значеннях параметра a корені рівняння

$$x^2 - (a+1)x + a+4 = 0 \text{ є від'ємними числами?}$$

➤ При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x-1} - a)(4x-5) = 0$ має єдиний корінь?

➤ При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння

$$4x^2 - (3a+1)x - a - 2 = 0 \text{ належать проміжку } [-1; 2)?$$

Розділ II. Методика розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром у основній школі

2.1. Лінійні рівняння і рівняння, що призводять до лінійних

1. Розв'яжіть рівняння $2a(a - 2)x - a - 2 = 0$. (1)

Розв'язування.

Тут контрольними будуть ті значення параметра, при яких коефіцієнт при x перетворюється на нуль. Такими значеннями є: $a = 0$ і $a = 2$. Ці значення розбивають множину значень параметра на три підмножини:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a \neq 0, a \neq 2$.

Розглянемо ці випадки.

1) При $a = 0$ рівняння (1) набуває вигляду $0 \cdot x = -2$. Це рівняння немає коренів.

2) При $a = 2$ рівняння (1) набуває вигляду $0 \cdot x = 0$. Коренем цього рівняння є будь-яке дійсне число.

3) При $a \neq 0$ і $a \neq 2$ із рівняння (1) отримуємо $x = \frac{-2}{2a(a-2)}$ звідки $x = \frac{1}{2a}$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 2$, то x – будь-яке дійсне число; якщо

$$\left\{ \begin{array}{l} a \neq 0, \\ \end{array} \right.$$

$$a \neq 2, \text{ то } x = \frac{1}{2a}.$$

2. Розв'яжіть рівняння $(a^2 - 2a + 1) \cdot x = a^2 + 2a - 3$.

Розв'язування. Знаходимо контрольні значення параметра a : $a^2 - 2a + 1 = 0$, $a - 1$. Множину значень параметра розбиваємо на дві підмножини:

1) $a = 1$; 2) $a \neq 1$.

Розв'яжемо рівняння на кожному із їх.

1) $a = 1$; $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $a \neq 1$; $x = \frac{(a+3)(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a+3}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{a+3}{a-1}$

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-2}{a^2-2a} + \frac{x+1}{a-2} + \frac{2}{a} = 0$.

Розв'язування.

Звільнимися від знаменника в рівнянні, для цього помножимо обидві його частини на $a(a-2) \neq 0$.

$$3a - 2 = ax - a + 2a = 0, \quad x(3+a) = 6-a$$

Контрольними значеннями будуть: $a = 0$, $a = 2$, $a = -3$.

Розглянемо розв'язок рівняння на підмножинах:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a = -3$; 4) $\begin{cases} a = -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$

1) $a = 0$. Рівняння (2) не має розв'язків.

2) $a = 2$. Рівняння (2) не має розв'язків.

3) $a = -3$. $x \cdot 0 = 6+3 = 9$, $x \in \emptyset$.

4) $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases} \quad x = \frac{6-a}{3+a}.$

Відповідь: якщо при $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$; якщо $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{6-a}{3+a}$.

2.2. Лінійні нерівності і нерівності, що приводять до лінійних

Кожна із нерівностей вигляду $Ax > B$, $Ax < B$, $Ax \geq B$ або $Ax \leq B$, де A і B – дійсні числа або функції від параметра, а x – дійсна змінна величина, називають лінійною нерівністю із одним невідомим x .

Наприклад нерівність $(b - 2)x < 4b$ – лінійна відносно x . При $b = 2x$ – будь-яке число, при $b > 2$ $x < \frac{4b}{b-2}$, при $b < 2$ $x > \frac{4b}{b-2}$.

1. Розв'яжіть нерівність $\frac{(a+2)x}{a-1} - \frac{2}{3} < 2x - 1$.

Розв'язування.

За змістом задачі $a \neq 1$. Перетворимо нерівність:

$$\frac{3ax+6x-2a+2+3a-6ax-3+6x}{3(a-1)} < 0, \quad \frac{3x(4-a)+a-1}{3(a-1)} < 0. \quad (1)$$

При $a = 1$ немає змісту, немає розв'язків.

1) $a - 1 > 0$, тобто $a > 1$, тоді нерівність (1) рівносильна нерівності

$$3x(4-a) + a - 1 < 0 \text{ або } 3x(4-a) < 1-a.$$

а) $4 - a = 0$, $a = 4$, $x \cdot 0 < -3$; розв'язків немає.

$$\text{б) } 4 - a > 0, a < 4, x < \frac{1-a}{3(4-a)}, \quad x < \frac{a-1}{3(a-4)}.$$

$$\text{Звідси при } 1 < a < 4 \quad x < \frac{a-1}{3(a-4)}.$$

$$\text{в) } 4 - a < 0, a > 4, x > \frac{a-1}{3(a-4)}. \text{ Тоді при } a > 4 \quad x > \frac{a-1}{3(a-4)}$$

2) $a - 1 < 0$, тобто $a < 1$, нерівність (1) рівносильна нерівності

$$3x(4-a) + a - 1 > 0 \text{ або } 3x(4-a) > 1-a \quad (2)$$

а) $4 - a = 0$, $a = 4$, $0 \cdot x > -3$, x – будь-яке, але так як $a < 1$, то нерівність (2) розв'язків немає.

$$\text{б) } 4 - a > 0, a < 4, x > \frac{1-a}{3(4-a)} \Rightarrow x > \frac{a-1}{3(a-4)}.$$

$$\text{Враховуючи, що } a < 1, \text{ отримаємо, що при } a < 1 \quad x > \frac{a-1}{3(a-4)}.$$

в) $4 - a < 0$, $a > 4$, але так як $a < 1$, то розглядати нерівність (2) немає сенсу.

$$\text{Відповідь: при } a < 1 \text{ і при } a > 4 \quad x > \frac{a-1}{3(a-4)}; \text{ при } 1 < a < 4 \quad x < \frac{a-1}{3(a-4)};$$

при $a = 1$ і при $a = 4$ розв'язків немає.

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{ax-3}{x-3} - \frac{a}{2} < a - 1$ (3)

Розв'язування.

За змістом задачі $x \neq 3$. Перетворимо нерівність (3):

$$\frac{3ax+6x-2a+2+3a-6ax-3+6x}{3(a-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-ax+9a+2x-12}{2(x-3)} < 0, \frac{x(2-a)+9a-12}{2(x-3)} < 0 \quad (4)$$

Нерівність (4) рівносильна нерівності (3) і зводиться до сукупності двох систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(2-a) < 12-9a, \\ x < 3; \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2-a)x > 12-9a, \\ x > 3. \end{array} \right. \quad (4б)$$

Розв'яжемо систему (4а). Розглянемо першу нерівність

$$x(2-a) < 12-9a.$$

1) $a = 2$, $x \cdot 0 < -6$; немає розв'язків.

2) $2-a > 0$, $a < 2$, $x < \frac{9a-12}{a-2}$.

$$\text{Отже, при } a < 2 \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{9a-12}{a-2}, \\ x > 3. \end{array} \right. \quad (5)$$

3) $2-a < 0$, $a > 2$, $x > \frac{9a-12}{a-2}$

$$\text{Отже, при } a > 2 \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{9a-12}{a-2}, \\ x > 3. \end{array} \right. \quad (6)$$

Для вибору розв'язку кожної із систем порівняємо величини $\frac{9a-12}{a-2}$ і 3.

Для цього розглянемо різницю $\frac{9a-12}{a-2} - 3 = \frac{6a-6}{a-2} \cdot \frac{6a-6}{a-2} < 0$ при

$1 < a < 2$ $\frac{6a-6}{a-2} > 0$ при $a < 1$ і при $a > 2$, отже, $\frac{9a-12}{a-2} < 3$ при $1 < a < 2$;

$\frac{9a-12}{a-2} > 3$ при $a < 1$ і при $a > 2$.

Тоді слідє розв'язок (5) і при $1 < a < 2$ немає розв'язків, при $a < 1$

$$3 < x < \frac{9a-12}{a-2}$$

Система (6) має розв'язок при $a > 2$: $x > \frac{9a-12}{a-2}$.

Аналогічно розглянемо розв'язок системи (4б). $(2-a)x > 12-9a$.

1) $2 - a, 0 \cdot x > -6, x$ – будь яке число, крім $x = 3$.

2) $2 - a > 0, a < 2, x > \frac{-12+9a}{-2+a}$.

Отже, при $a < 2$
$$\left\{ \begin{array}{l} x > \frac{-12+9a}{-2+a}, \\ x > 3. \end{array} \right. \quad (7)$$

3) $2 - a < 0, a > 2, x < \frac{9a-12}{a-2}$.

При $a > 2$
$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{9a-12}{a-2}, \\ x < 3. \end{array} \right. \quad (8)$$

Розв'язуємо системи (7) і (8), знаючи, що $\frac{9a-12}{a-2} < 3$ при $1 < a < 2$.

Якщо $a = 1, 1 - \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2}$ розв'язків немає.

$\frac{9a-12}{a-2} < 3$ при $a < 1$ і при $a > 2$.

При $1 < a < 2$ система (7) має розв'язок $\frac{9a-12}{a-2} < x < 3$.

При $a < 1$ система (7) немає розв'язків.

При $a > 2$ система (8) має розв'язки $x < 3$.

Відповідь:

якщо $a < 1$, то $3 < x < \frac{9a-12}{a-2}$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає;

якщо $1 < a < 2$, то $x \in (\frac{9a-12}{a-2}; 3)$; якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

якщо $a > 2$, то $x \in (-\infty; 3)$ або $x \in (\frac{9a-12}{a-2}; +\infty)$.

2.3 Квадратний тричлен

Квадратним тричленом називають вираз $ax^2 + bx + c$, де $a, b, c \in R$ і $a \neq 0$.

Графік квадратного тричлена – парабола. Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ – її вісь симетрії.

Точка $(x_0; y_0)$ – вершина параболи, де $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Число $D = b^2 - 4ac$ – дискримінант. Абсциси точок перетину параболи з віссю Ox є коренями квадратного тричлена, тобто розв'язками квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

і вираховуються із допомогою формули

$$x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

При $D < 0$ рівняння (1) не має коренів (парабола не перетинає вісь Ox);
при $D = 0$ – один корінь $x_1 = \frac{-b}{2a}$ (парабола торкається до осі Ox в точці x_1);
при $D > 0$ – два корені $x_1 = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$ і $x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (парабола перетинається з віссю Ox у двох точках x_1 і x_2).

При розв'язуванні рівняння (1) значення параметра $a = 0$ є контрольним, так як в цьому випадку рівняння не є квадратним.

Всякий квадратний тричлен (квадратна функція)

$$f(x) = a(x - x_B)^2 + y_B.$$

Множина значення квадратної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$E_f = [y_B; +\infty) \text{ при } a > 0 \text{ і } E_f = (-\infty; y_B] \text{ при } a < 0.$$

Якщо $a > 0$, то найменше значення $\min f(x) = y_B$; $a < 0$, то найбільше значення $\max f(x) = y_B$.

2.3.1. Розв'язування квадратних рівнянь із коефіцієнтами залежними від параметрів

Найбільш поширеним типом задач із параметром, пов'язаних із квадратним тричленом, є задачі на визначення коренів квадратного рівняння, коефіцієнти якого залежать від параметра. При їх розв'язуванні використовується формула (2) і досліджується дискримінант. Окремо необхідно розглядати випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю і рівняння не є квадратним, тобто рівняння зводиться до лінійного.

Як уже відмічалось вище, відповідь задачі повинна містити розв'язок для всіх значень параметра у порядку зростання його від $-\infty$ до $+\infty$. Для

компактності відповіді можливе об'єднання проміжків для параметра, на яких формули розв'язування збігаються.

Розглянемо кілька типових прикладів.

1. Для кожного дійсного значення параметра a розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Розв'язування. При $a = 0$ початкове рівняння є лінійним і має вигляд $2x = -1$. В цьому випадку число $x = -0,5$ – корінь рівняння.

При $a \neq 0$ початкове рівняння є квадратним. Його дискримінант $D = 4 - 4a$; квадратне рівняння має розв'язок при $D \geq 0$, тобто при $a \leq 1$.

Якщо $a = 1$, то $D = 0$ і рівняння має один корінь $x = -1$.

Якщо $a \neq 0$ і $a < 1$, то початкове рівняння має два корені

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} \text{ і } x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}.$$

Якщо $a > 1$, то $D < 0$ і рівняння не має коренів.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то рівняння має два корені

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} \text{ і } x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; \text{ якщо } a = 0, \text{ то } x = -0,5; \text{ якщо } a = 1, \text{ то } x = -1;$$

якщо $a > 1$, то розв'язків немає.

2. Для кожного дійсного значення параметра a розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$.

Розв'язування. При $a = 0$ рівняння має вигляд $2x = 0$, звідки отримаємо $x = 0$.

При $a \neq 0$ дискримінант $D = 4(a+1)^2 - 8a^2 = -4(a^2 - 2a - 1)$.

Рівняння має розв'язок при $D \geq 0$, тобто при $a \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

Якщо $a = 1 - \sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; якщо $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$.

При $a \in (1 - \sqrt{2}; 0 \cup (0; 1 + \sqrt{2})$ рівняння має два розв'язки

$$x_1 = \frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a} \text{ і } x_2 = \frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$$

При $a \notin [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$ рівняння не має розв'язків.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$, то розв'язків не має, якщо $a = 1 - \sqrt{2}$; то $x = \sqrt{2}$; якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$; якщо $a \in (1 - \sqrt{2}; 0 \cup (0; 1 + \sqrt{2})$, то рівняння має два розв'язки

$$x_1 = \frac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a} \text{ і } x_2 = \frac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}.$$

2.3.2. Графік квадратного тричлена

1. Визначити знаки коефіцієнтів a, b , і c , якщо графік квадратної функції $y = ax^2 + bx + c$ має вигляд, зображений на малюнку.

Розв'язування. Знак коефіцієнта a визначається напрямком віток параболи. Так як вітки параболи направленні вгору, то $a > 0$.

Із умови $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ отримується значення ординати точки перетину параболи з віссю Oy на малюнку видно, що $c < 0$.

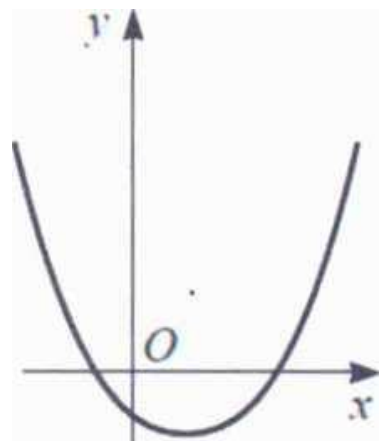
Вершина параболи розміщена правіше осі Oy тобто $x_e = -\frac{b}{2a} < 0$. Так як $a > 0$ і $x_e > 0$ отримаємо, що $b < 0$.

Відповідь. $a > 0, b < 0, c < 0$.

2. Визначити знак числа c , якщо відомо, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ не має коренів і крім того, справедлива нерівність $\sqrt{63}a - \sqrt{21}b + \sqrt{7}c < 0$.

Розв'язування. Так як квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не має коренів, то його графік не має спільних точок із віссю абсцис, тобто розміщений вище (вітки параболи направлені) або нижче (вітки параболи направлені вниз) осі Ox . Це значить, що для всіх значень x квадратного тричлена $f(x)$ приймає значення одного знака. Помітимо, що

$$\sqrt{63}a - \sqrt{21}b + \sqrt{7}c = \sqrt{7}(3a - \sqrt{3}b + c) = \sqrt{7}(a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c).$$



Із умови $\sqrt{63} a - \sqrt{21} b + \sqrt{7} c < 0$ слідує, що

$$f(-\sqrt{3}) = a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c < 0,$$

тобто $f(x) < 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$.

Отже, і $f(0) < 0$, але $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, тобто $c < 0$.

Відповідь. $c < 0$.

3. Для кожного значення параметра a знайти кількість розв'язків рівняння $x^2 + 2x - 3 = a^2 - 4a$.

Розв'язування. Графік квадратного тричлена $y = x^2 + 2x - 3$, який стоїть у лівій частині даного рівняння — парабола, яка має координати вершини $(x_e; y_e)$, де $x_e = -1$ і $y_e = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$. Так як вітки параболи направлені вгору, то множина значення функції $y = x^2 + 2x - 3$ становить $[-4; +\infty)$.

Права частина рівняння для кожного значення параметра a становить постійну функцію $y = a^2 - 4a$. Її графік — пряма лінія, паралельна осі Ox , не має спільних точок із параболою при $y = a^2 - 4a < -4$ (1); має одну спільну точку при $y = a^2 - 4a = -4$ (2); дві точки при $y = a^2 - 4a > -4$ (3).

Розглянемо кожний із отриманих випадків:

- (1) $a^2 - 4a < -4 \Leftrightarrow (a - 2)^2 < 0$ — таких a не існує;
- (2) $y = a^2 - 4a = -4 \Leftrightarrow (a - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ — початкове рівняння має один розв'язок;
- (3) $y = a^2 - 4a > -4 \Leftrightarrow (a - 2)^2 > 0$ — при всіх $a \neq 2$ початкове рівняння має два розв'язки.

Відповідь. Якщо $a = 2$, то рівняння має один розв'язок; якщо $a \neq 2$, то — два розв'язки.

2.3.3 Необхідні і достатні умови, які визначають можливі випадки розташування коренів квадратного тричлена

Задачі із параметром часто призводять до дослідження квадратного тричлена із коефіцієнтами, які залежать від параметра. Розв'язок кожної такої

задачі можна розділити на два етапи. Перший етап полягає в перефразуванні початкової задачі і зведенні її до дослідження квадратного тричлена. Другий — у дослідженні отриманого квадратного тричлена, що зводять до визначення необхідних і достатніх умов для реалізації однієї або декількох можливостей, у наведених нижче завданнях. У кожному з розглянутих випадків висновок необхідних і достатніх умов може бути здійснений аналітично. Проте кожен з них допускає графічну інтерпретацію і, як буде показано нижче, дозволяє досить просто вивести аналітичні умови з використанням можливих для конкретного випадку варіантів розташування графіка відповідного квадратного тричлена.

Задача. За допомогою дискримінанта D квадратного тричлена

$ax^2 + bx + c$ із додатнім коефіцієнтом a абсциси $x_0 = -\frac{b}{2a}$ вершини відповідної

параболи, а також значення функції у окремих точках, сформулюйте необхідні і достатні умови для того, щоб цей квадратний тричлен:

- а) не мав коренів;
- б) мав єдиний корінь;
- в) мав два корені, розташовані по різні сторони від числа d ;
- г) мав два корені, між якими лежить відрізок $[d_1; d_2]$;
- д) мав два корені, кожен з яких більше числа d ;
- е) мав два корені на відрізку $[d_1; d_2]$;
- є) мав два корені, розташованих по одному на кожному з двох непересічних інтервалів $(d_1; d_2)$ і $(d_3; d_4)$;
- ж) не мав коренів, більших числа d ;
- з) не мав коренів на відрізку $[d_1; d_2]$;
- и) мав хоча б один корінь, більший числа d ;
- к) мав хоча б один корінь на відрізку $[d_1; d_2]$;
- л) мав рівно один корінь, більший числа d ;
- м) мав рівно один корінь на інтервалі $(d_1; d_2)$.

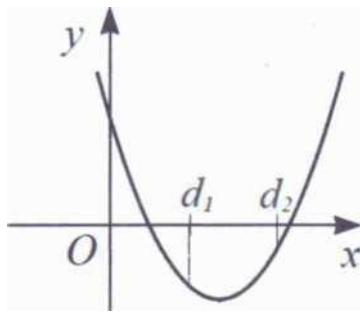
Розв'язування.

- а) Квадратний тричлен не має коренів, якщо його дискримінант від'ємний. Умова $D < 0$ або $b^2 - 4ac < 0$ — необхідна і достатня.
- б) Квадратний тричлен має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Умова $D = 0$ або $b^2 - 4ac = 0$ — необхідна і достатня.

Для виведення необхідних і достатніх умов в наступних пунктах даної задачі скористаємося методом графічної інтерпретації, тобто виведемо аналітичні умови з графічного представлення задачі.

- в) Якщо квадратний тричлен має два корені, розміщені по різні сторони від числа d , то значення $f(d) = ad^2 + bd + c$ — від'ємні, тобто умова $f(d) < 0$ — необхідна і достатня.

- г) Якщо квадратний тричлен має два корені, між якими розміщений



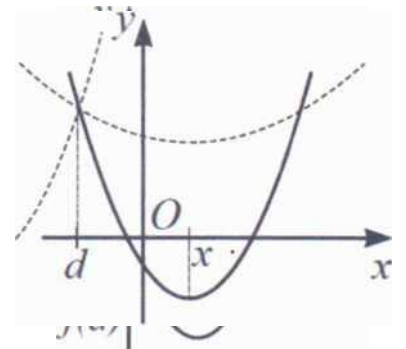
відрізок $[d_1; d_2]$, то обидва його значення $f(d_1)$ і $f(d_2)$ від'ємні, тобто необхідну і достатню умови можна представити системою нерівностей:

$$\begin{cases} f(d_1) < 0, \\ f(d_2) < 0. \end{cases}$$

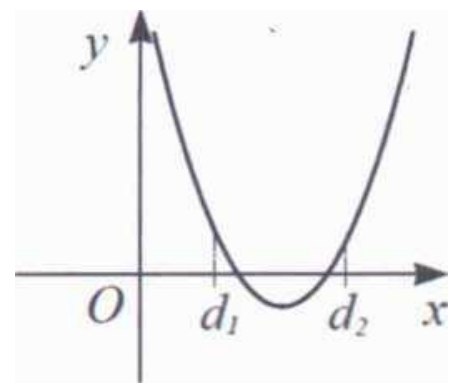
д) Якщо квадратний тричлен має два корені, кожний із яких більший від числа d , то його значення $f(d)$ додатне (інакше див. пункт в), дискримінант додатний (умова існування коренів) і абсциса вершини параболи розміщена правіше числа d .

Отже, необхідну і достатню умову можна представити системою нерівностей:

$$\begin{cases} f(d) > 0, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} > d. \end{cases}$$



- е) Якщо квадратний тричлен має два корені на відрізку $[d_1; d_2]$, то



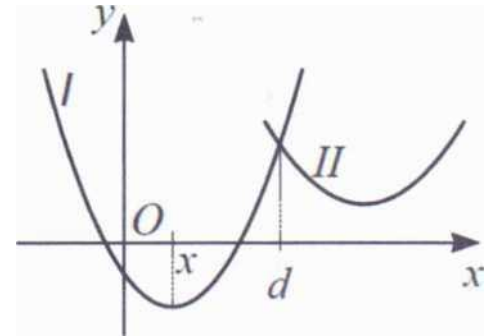
обидва значення $f(d_1)$ і $f(d_2)$ невід'ємні (інакше див. пункт в), дискримінант додатний (умова існування коренів) і абсциса вершини параболи розміщена між числами d_1 і d_2 . Отже, необхідна і достатня умови представляються системою нерівностей:

$$f(d_1) \geq 0,$$

$$f(d_2) \geq 0,$$

$$D > 0,$$

$$d_1 < x_0 < d_2.$$

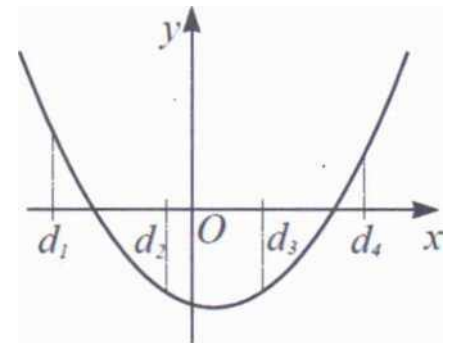


є) Якщо квадратний тричлен має два корені, розміщені по одному на

кожному із двох непересічних інтервалів $(d_1; d_2)$ і $(d_3; d_4)$, то це можливо

тільки, якщо його значення $f(d_1)$ і $f(d_2)$ (аналогічно $f(d_3)$ і $f(d_4)$) різного знака.

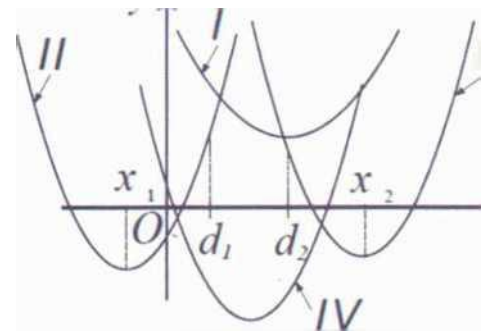
Отже, необхідну і достатню умови можна представити системою нерівностей:



$$\begin{cases} f(d_1) \cdot f(d_2) < 0, \\ f(d_3) \cdot f(d_4) < 0. \end{cases}$$

ж) Квадратний тричлен не має коренів, більших за число d у двох випадках: або він взагалі немає коренів ($D < 0$), або корені є, але вони не перевищують d . Отже, необхідну і достатню умову можна представити наступною сукупністю:

$$\begin{cases} \text{(II)} & D < 0, \\ \text{(I)} & \begin{cases} f(d) \geq 0, \\ x_0 \leq d. \end{cases} \end{cases}$$



з) На малюнку представлені чотири можливі варіанти розміщення графіків квадратного тричлена, які задовільняють умову задачі.

1. Квадратний тричлен не має коренів

$$D < 0.$$

2. Корені квадратного тричлена розміщені на осі Ox лівіше від числа d_1 , що задається умовами

$$\begin{cases} f(d_1) > 0, \\ x_0 \leq d_1. \end{cases}$$

Зауваження. Умову невід'ємності дискримінанта $D \geq 0$ включати в систему не обов'язково, так як в протилежному випадку виконується умова випадку 1.

3. Корені квадратного тричлена розміщені на осі Ox правіше від числа d_2 , що задається умовами:

$$\begin{cases} f(d_2) > 0, \\ x_0 \leq d_2. \end{cases}$$

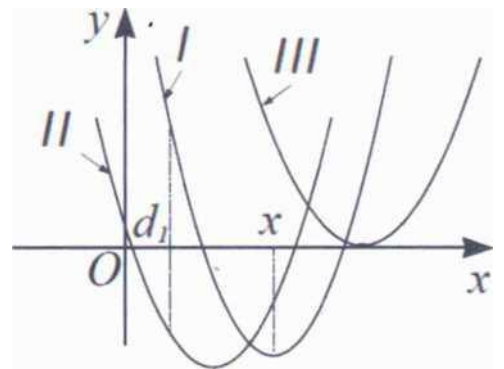
4. Відрізок $[d_1; d_2]$ розміщений між коренями квадратного тричлена, тобто при виконанні умов

$$\begin{cases} f(d_1) < 0 \\ f(d_2) < 0. \end{cases}$$

Об'єднавши отримані умови, отримаємо сукупність необхідних і достатніх умов:

$$\begin{cases} \text{(I)} & D < 0, \\ \text{(II)} & \begin{cases} f(d_1) > 0, \\ x_0 \leq d_1, \end{cases} \\ \text{(III)} & \begin{cases} f(d_2) > 0, \\ x_0 \leq d_2, \end{cases} \\ \text{(IV)} & \begin{cases} f(d_1) < 0, \\ f(d_2) < 0. \end{cases} \end{cases}$$

и) На малюнку представлені можливі варіанти розміщення графіків квадратного



тричлена, які задовільняють умову задачі. За аналогією з попереднім пунктом (об'єднавши випадки I і III) завдання отримуємо сукупність необхідних і достатніх умов:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(II)} f(d) < 0, \\ \text{(I) і (III)} \left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_6 > d \end{array} \right. \end{array} \right.$$

к) На малюнку представлені можливі варіанти розміщення графіка квадратного тричлена, який має хоча б один корінь на відрізку $[d_1; d_2]$. За аналогією з попередніми пунктами завдання отримуємо сукупність необхідних і достатніх умов:

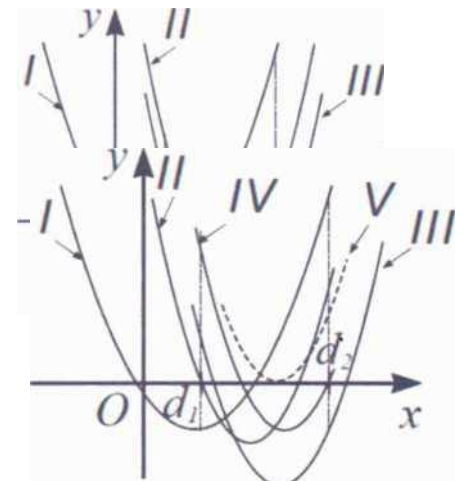
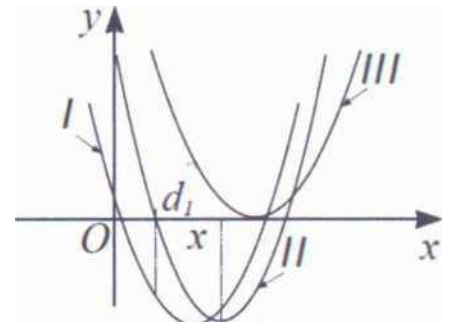
$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) і (III)} f(d_1) \cdot f(d_2) \leq 0, \\ \text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} f(d_1) > 0, \\ f(d_2) > 0, \\ D \geq 0, \\ d_1 < x_6 < d_2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

л) На малюнку представлені можливі варіанти розташування графіків квадратних тричленів, які мають рівно один корінь, більший за число d .

Необхідні і достатні умови задаються сукупністю:

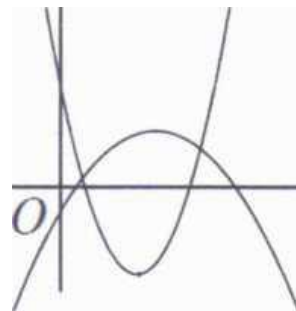
$$\left[\begin{array}{l} \text{(I)} f(d) < 0, \\ \text{(II) і (III)} \left\{ \begin{array}{l} x_6 > d, \\ D = 0, \\ f(d) = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

м) На малюнку представлені можливі варіанти розташування графіків квадратних тричленів, які мають рівно один корінь на



проміжку $(d_1; d_2)$. Необхідні і достатні умови мають вигляд:

$$(I) \text{ і } (III) \quad f(d_1) \cdot f(d_2) < 0,$$



Зауваження. Немає необхідності запам'ятовувати всі наведені вище відповіді. Досить при запису необхідних і достатніх умов вміти користуватися графічним представленням завдання.

Перевага використання методу графічної інтерпретації в порівнянні з використанням формул полягає в тому, що метод графічної інтерпретації дозволяє звести задачу визначення належності коренів заданого проміжку до

$$(II) \begin{cases} f(d_1) = 0, \\ d_1 < x_B < \frac{d_1 + d_2}{2}, \end{cases}$$

$$(V) \begin{cases} D = 0, \\ d_1 < x_B < d_2, \end{cases}$$

$$(IV) \begin{cases} f(d_2) = 0, \\ \frac{d_1 + d_2}{2} < x_B < d_2. \end{cases}$$

розв'язування системи раціональних нерівностей.

Для ілюстрації сказаного розглянемо розв'язування кількох типових прикладів, пов'язаних з дослідженням квадратного тричлена:

1. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2(a - 1)x + a + 5 = 0$ має тільки додатні корені?

Розв'язування. Згідно з результатами пункту (д), розглянутої вище задачі для цього необхідно і достатньо виконання умов:

$$\begin{cases} f(0) = a + 5 > 0, \\ D = 4(a - 1)^2 - 4(a + 5) > 0, \\ x_B = a - 1 > 0; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > -5, \\ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > -5, \\ \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 > 0, \quad \Leftrightarrow (a - 4)(a + 1) > 0,$$

$$a > 0; \quad a > 1.$$

Отримуємо, що умову завдання задовільняють значення параметра $a > 4$.

Відповідь: $a > 4$.

2. Знайти всі значення p , при кожному з яких рівняння $(2 + p)x^2 - 2px + 3p = 0$ має два додатні корені.

Розв'язування. У даній задачі необхідно розглянути два випадки $2 + p > 0$ (вітки параболи направлені вгору) і $2 + p < 0$ (вітки параболи направлені вниз). Дискримінант рівняння $D = -8p(3 + p) > 0$. Згідно з попередніми результатами отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} D = -8p(3 + p) > 0, \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ p + 2 > 0, \\ x_B > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(0) < 0, \\ p + 2 < 0, \\ x_B > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < p < 0, \\ \begin{cases} 3p > 0, \\ p > -2, \\ \frac{2p}{2(2+p)} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3p < 0, \\ p < -2, \\ \frac{2p}{2(2+p)} > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < p < 0, \\ \begin{cases} p > 0, \\ p < -2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < p < -2.$$

Відповідь: $-3 < p < -2$.

3. Знайти всі дійсні значення параметра a , при яких корені рівняння $x^2 + x + 2a = 0$ дійсні і більші a .

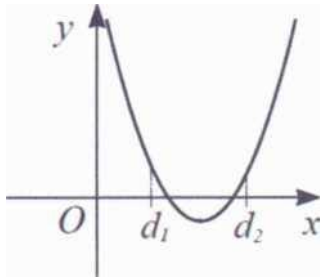
Розв'язування. Дискримінант $D = 1 - 8a$; $D \geq 0$ при $a \leq \frac{1}{8}$

Розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(a) = a^2 + 3a, \\ x_B = -0,5 > a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0,125, \\ \begin{cases} a < -3, \\ a > 0, \\ a < -0,5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a < -3.$$

Відповідь: $a < -3$.

4. Знайти всі дійсні значення параметра b , при яких корені рівняння $x^2 - 2bx - 1 = 0$ дійсні і не перевищують по модулю 2.



Розв'язування. Дискримінант $D = 4b^2 + 4 > 0$ при будь якому b . Згідно умові корені рівняння повинні належати відрізку $[-2; 2]$. Задача зводиться до розв'язку системи (див мал., $d_1 = -2, d_2 = 2$):

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(-2) = 4 - 4b - 1 \geq 0, \\ f(2) = 4 - 4b - 1 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4b \geq -3, \\ 4b \leq 3; \end{cases} \iff -\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{3}{4}$$

Відповідь. $-\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{3}{4}$.

2.3.4. Задачі із застосуванням теореми Вієта

Багато задач пов'язано з квадратним тричленом і їх розв'язування ґрунтуються на застосуванні прямої і оберненої теореми Вієта.

Теорема Вієта: сума коренів x_1 і x_2 квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює відношенню другого коефіцієнта до першого, взятому із протилежним знаком, а добуток дорівнює відношенню вільного члена до першого коефіцієнта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Обернена теорема Вієта: якщо існують дійсні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1 \cdot x_2 = q$, то ці числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

До типу задач, які ґрунтуються на застосуванні теореми Вієта, відносяться задачі, у яких треба знайти такі значення параметра, при яких сума або добуток коренів квадратного тричлена дорівнює якомусь числу; сума квадратів або кубів коренів квадратного тричлена приймає найбільше або найменше значення і так далі. Зазвичай застосування теореми Вієта значно спрощує розв'язування.

1. Визначте, при яких значеннях параметра a сума коренів квадратного тричлена $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ дорівнює нулю.

Розв'язування. Якщо корені квадратного рівняння існують, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = a^2 + a - 2$.

Сума коренів дорівнює нулю, якщо $a^2 + a - 2 = 0$, тобто при $a = 1$ і $a = -2$.

При цих значеннях a отримаємо рівняння $x^2 - a^2 = 0$, яке має два дійсні корені.

Відповідь: $a = 1$ і $a = -2$.

2. При яких значеннях параметра a добуток коренів квадратного тричлена $x^2 + 2x + (a^2 - 5a + 6) = 0$ дорівнює 2?

Розв'язування. Якщо корені квадратного рівняння існують, то за теоремою Вієта $x_1 \cdot x_2 = a^2 - 5a + 6$. Добуток коренів дорівнює 2, якщо $a^2 - 5a + 6 = 2$, тобто при $a = 1$ і $a = 4$. При цих значеннях a початкове рівняння має вид $x^2 + 2x + 2 = 0$ і не має дійсних коренів.

Відповідь: таких a не існує.

3. Визначити значення параметра a , при яких сума S квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - (3 + a) = 0$ є найменшою? Чому дорівнює ця сума?

Розв'язування. Дискримінант рівняння $D = (2 - a)^2 + 4(3 + a) = a^2 + 16$. Так як $D > 0$ при всіх значеннях a , то корені існують. Із теореми Вієта випливає $x_1 + x_2 = -(2 - a)$, $x_1 \cdot x_2 = -(3 + a)$. Тоді $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(3 + a) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9$. Найменше значення суми квадратних коренів 9 і досягається при $a = 1$.

Відповідь: $a = 1, S = 9$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $x^4 - (5a + 6)x^2 + 4a^2 + 6a = 0$ має два розв'язки?

Розв'язування. Рівняння $x^4 - (5a + 6)x^2 + 4a^2 + 6a = 0$ буде мати два розв'язування у наступних випадках:

- 1) рівняння $y^2 - (5a + 6)y + 4a^2 + 6a = 0$, де $y = x^2$ (*) має єдиний, додатний корінь;
- 2) рівняння (1) має два корені різного знака.

Знайдемо дискримінант D рівняння (1): $D = (5a + 6)^2 - 4(4a^2 + 6a) = 9(a + 2)^2$.

У першому випадку маємо: $D = 0$, тобто $a = -2$. Тоді розв'язком рівняння (*) буде $y = \frac{5a+6}{2} = \frac{5 \cdot (-2)+6}{2} = -2$. Так як корінь від'ємний, то в цьому випадку існує значення параметра a , яке задовольняє умову задачі.

Випадок другий рівносильний тому, що добуток коренів $y_1 \cdot y_2$ рівняння (*) від'ємний. За теоремою Вієта добуток коренів дорівнює $y_1 \cdot y_2 = 4a^2 + 6a$. Отже, значення параметра a , яке задовольняє умову задачі, є розв'язками нерівності $4a^2 + 6a < 0$, тобто $-1,5 < a < 0$.

Відповідь: $-1,5 < a < 0$.

2.4 Квадратні рівняння і рівняння, які приводять до квадратних

Рівняння виду $mx^2 + px + q = 0$, де x — невідоме, m, p, q — вирази, які залежать тільки від параметра, і $m \neq 0$, називають квадратним рівнянням відносно x .

Допустимими будемо вважати тільки ті значення параметрів, при яких m, p, q — дійсні.

$$1. \text{ Рівняння } mx^2 + 3tx - (m + 2) = 0 \quad (1)$$

Має сенс при будь-яких дійсних значеннях параметра m . Контрольним значенням для $m \in m = 0$, при якому рівняння стає лінійним.

Отже, розглянемо 2 випадки: 1) $m = 0$; 2) $m \neq 0$.

1) При $m = 0$ рівняння приймає вигляд $0x^2 + 0x - 2 = 0$ і не має коренів.

2) При $m \neq 0$ рівняння є квадратним. І якщо при цьому

$D = m(13m+8) \geq 0$, тобто $m < -\frac{8}{13}$ або $m > 0$, то воно має два дійсні

корені $x_{1,2} = \frac{1}{2m}(-3m \pm \sqrt{m(13m+8)})$.

$$2. \text{ Розв'яжіть рівняння } ax^2 - (1-2a)x + a-2 = 0 \quad (2)$$

Розв'язування. Контрольним значенням для $a \in a = 0$, при якому рівняння (2) стає лінійним.

Отже, розглянемо 2 випадки:

1) $a = 0$; 2) $a \neq 0$.

1) При $a = 0$ рівняння (2) набуде вигляду $-x - 2 = 0$; $x = -2$.

2) При $a \neq 0$ значення параметра, при якому дискримінант квадратного рівняння перетворюється в нуль, також відносяться до контрольних значень.

$$D = (-(1-2a))^2 - 4a(a-2) = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 + 8a = 4a + 1 = 0, a = -\frac{1}{4}$$

— друге контрольне значення параметра a .

Якщо $a = -\frac{1}{4}$, то $x^2 + 5x + 9 = 0$ і $x = -3$.

При цьому, якщо $a < -\frac{1}{4}$, то $D < 0$ і рівняння (2) немає дійсних коренів.

Якщо $\begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \text{ то } D \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad x_{1,2} = \frac{1-2 \pm \sqrt{4a+1}}{2a}.$

Відповідь: -2 при $a = 0$; -3 при $a =$

$-\frac{1}{4}; \frac{1-2 \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$ при $\frac{1}{4} < a < 0, a < 0.$

3. Параметр позначений буквою d . Розв'яжіть рівняння: $dx^2 + 2x + 1 = 0$.

Розв'язування.

1) Якщо $d = 0$, то рівняння $2x + 1 = 0$ має розв'язок $x = -\frac{1}{2}$.

2) Якщо $d \neq 0$, то $D_1 = 1 - d$.

$D = 0$, при $d = 1$ один розв'язок: $x = -\frac{1}{d} = -1$.

$D_1 < 0$, при $d > 1$ немає розв'язків.

$D_1 > 0$, при $d < 1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$. Так як $d \neq 0$, то при $d < 0$ або

$0 < d < 1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$.

Відповідь:

при $d = 0$ $x = -\frac{1}{2}$ при $d = 1$ $x = -1$; при $d > 1$ розв'язків немає;

при $d < 0$ або $0 < d < 1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-d}}{d}$.

4. Розв'яжіть рівняння $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$

Розв'язування. Контрольне значення $a = 0$.

1) Якщо $a = 0$, то $2x = 0$, $x = 0$ — один розв'язок.

2) Якщо $a \neq 0$, то отримаємо квадратне рівняння.

$D_1 = (a+1)^2 - 2a^2 = 2a + 1 - a^2$.

Якщо $D_1 < 0$, то немає розв'язків, при $a > 1 + \sqrt{2}$ або $a < 1 - \sqrt{2}$

$a^2 - 2a - 1 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

Якщо $D_1 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{2}$, один розв'язок $x = -\frac{a+1}{a}$.

При $a = 1 + \sqrt{2}$

$x = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = -(2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

або при $a = 1 - \sqrt{2}x = -\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}$

Якщо $D_1 > 0$, то два розв'язки:

$$x = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{2a+1-a^2}}{a} \text{ при } 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2}$$

Відповідь: при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 1 + \sqrt{2}$ або $a < 1 - \sqrt{2}$ немає коренів; при $a = 1 + \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$; при $a = 1 - \sqrt{2}$ $x = \sqrt{2}$; при $1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2}$ рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-(a+1)+\sqrt{D_1}}{a}; \quad x_2 = \frac{-(a+1)-\sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = 2a+1-a^2$$

5. При яких значеннях параметра a один корінь рівняння

$$x^2 - 2(a+1)x - 2a + 1 = 0 \text{ від'ємний, а другий додатний?}$$

Розв'язування. Так як рівняння має два розв'язки, то $D > 0$ і за теоремою Вієта $-2a + 1 < 0$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (a+1)^2 - (-2a+1) > 0, \\ -2a+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 + 2a - 1 > 0, \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a > 0, \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}. \\ & \text{Відповідь: при } a > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Бувають завдання, в яких потрібно знайти всі значення параметра, при яких між коренями рівняння виконується те чи інше співвідношення. Можна було б вирішувати ці завдання, висловивши корені через коефіцієнти рівняння і виписавши явно задані в умові задачі співвідношення. Отримані при цьому рівняння і нерівності з параметром зазвичай бувають дуже складними. Більш простий метод заснований на використанні теореми Вієта.

6. Знайти всі значення параметра a , при кожному із яких один корінь рівняння $x^2 + ax + a + 2 = 0$ дорівнює подвійному другому кореню.

Розв'язування. Нехай параметр a приймає одне з шуканих значень. Позначивши корені вихідного рівняння через x_1, x_2 , за теоремою Вієта і згідно умови задачі отримуємо наступну систему рівнянь: $x_1 + x_2 = -a$,

$$x_1 \cdot x_2 = -a + 2,$$

$$x_1 = 2x_2.$$

Із першого і третього рівняння системи знайдемо $x_1 = -\frac{2}{3}a$, $x_2 = -\frac{1}{3}a$.

Підставляючи ці вирази для x_1 і x_2 у друге рівняння системи, отримуємо

рівняння $\frac{2}{9}a^2 = a + 2$, яке можна переписати так: $2a^2 - 9a - 18 = 0$. Всі

шукані значення параметра знаходяться серед коренів цього квадратного

рівняння. Воно має два кореня: $a_1 = -\frac{3}{2}$ і $a_2 = 6$. При $a = -\frac{3}{2}$ початкове

рівняння приймає вигляд $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$. Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{1}{2}$

задовільняють умову задачі. При $a = 6$ початкове рівняння має вигляд

$x^2 + 6x + 8 = 0$. Його корені $x_1 = -4$ і $x_2 = -2$ також задовільняють умову задачі.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$ і 6.

Іноді буває необхідно знати розташування коренів квадратного тричлена по відношенню до деякого числа або чисел. Можна знайти самі корені, виписавши систему нерівностей, яким вони повинні задовольняти, і з неї знайти умови на параметри. Однак і в цьому випадку більш просте розв'язування може бути отримане за допомогою теореми Вієта.

7. Знайдіть всі значення параметра a , при кожному із яких корені квадратного рівняння $x^2 + ax + 1$ різні і лежать на відрізку $[0; 2]$.

Розв'язування. Дискримінант D заданого квадратного тричлена $f(x) = x^2 + ax + 1$ дорівнює $D = a^2 - 4$. Для існування різних коренів необхідна умова $0 > 0$, тобто $a^2 - 4 > 0$. Позначимо ці корені буквами x_1 і x_2 . Згідно теореми Вієта справедливе рівняння $x_1 + x_2 = -a$. Із умови задачі слідує, що разом із коренями проміжків $[0; 2]$ повинна належати і абсциса вершини параболи — середина відрізка із кінцями x_1 і x_2 , тобто число $\frac{(x_1+x_2)}{2} = -\frac{a}{2}$. Тому ще одна необхідна умова на параметр дає нерівність $0 < -\frac{a}{2} < 2$. Коефіцієнт при x^2 у

тричлені

$$a^2 - 4 > 0, 0 < -\frac{a}{2} < 2, 2a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2 \text{ або } a > 2, \\ -4 < a < 0, \\ a \geq -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

заданому
додатній,

тому точки 0 і 2, які лежать поза інтервалом, які містять корені, повинні задовольняти нерівності $f(0) = 1 \geq 0$ і $f(2) = 2a + 5 \geq 0$. Отже, шукані значення параметра a задовольняють систему нерівностей (7):

Легко побачити, що ці умови і достатні, тобто якщо параметр задовольняє умови (7), то даний квадратний тричлен має різні корені, які належать проміжку $[0; 2]$. Розв'язуючи систему нерівностей (7), знаходимо шукану множину значень параметра:

$$-\frac{5}{2} \leq a < -2.$$

Відповідь: $-\frac{5}{2} \leq a < -2$.

2.5. Квадратні нерівності

Кожна із нерівностей виду $mx^2 + px + q > 0$, $mx^2 + px + q < 0$ (≤ 0) або $mx^2 + px + q < 0$, де $m \neq 0$, називають квадратним відносно x (m, p, q — дійсні числа або функції від деяких параметрів). Допустимими є ті значення параметрів, при яких m, p, q — дійсні.

1. Розглянемо розв'язок нерівності $x^2 - 2x + b > 0$ (1)

Нехай D — дискримінант тричлена $x^2 - 2x + b$. При $D = 0$, тобто при $b = 1$, нерівність (1) приймає вигляд: $(x - 1)^2 > 0$. Вона правильна при будь-яких дійсних значеннях x , крім $x = 1$. При $D < 0$, тобто при $b > 1$, нерівність (1) справедлива при будь-яких дійсних значеннях x .

При $D > 0$, тобто при $b < 1$, тричлен $x^2 - 2x + b$ має два корені:

$1 - \sqrt{1 - b}$ і $1 + \sqrt{1 - b}$, — і розв'язком нерівності є $(-\infty; 1 - \sqrt{1 - b}) \cup (1 + \sqrt{1 - b}; +\infty)$.

Відповідь: при $b = 1$ x — будь-яке, крім $x = 1$; при $b > 1$ x — будь-яке; при $b < 1$ $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - b}) \cup (1 + \sqrt{1 - b}; +\infty)$.

2. Розв'яжемо нерівність $ax^2 - 2x + 4 > 0$.

Розв'язування.

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при x^2 і дискримінант квадратного тричлена $ax^2 - 2x + 4$, знаходимо перше контрольне значення параметра

$a = 0$ і друге контрольне значення $a = \frac{1}{4}$ (причому якщо $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$; якщо $a \leq \frac{1}{4}$ то $D \geq 0$).

Розв'яжемо дану нерівність для кожного із наступних чотирьох випадків:

1) $a > \frac{1}{4}$; 2) $0 < a \leq \frac{1}{4}$; 3) $a = 0$; 4) $a < 0$.

1) Якщо $a > \frac{1}{4}$ то тричлен $ax^2 - 2x + 4$ має від'ємний дискримінант і додатній старший коефіцієнт. Значить, тричлен додатній при будь-яких x , тобто розв'язком початкової нерівності у цьому випадку є множина всіх дійсних чисел.

2) Якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, причому $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{a}$. Значить, розв'язком початкової нерівності є наступна сукупність: $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$; $x > \frac{1+\sqrt{1+4a}}{a}$.

3) Якщо $a = 0$, то дана нерівність приймає вигляд $-2x + 4 > 0$, звідки отримуємо $x < 2$.

4) Якщо $a < 0$, то має $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

Значить, у цьому випадку розв'язком нерівності є наступна система:

$$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}.$$

Відповідь: якщо $a > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < +\infty$; якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то

$x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$, $x > \frac{1+\sqrt{1+4a}}{a}$; якщо $a = 0$, то $x < 2$; якщо $a < 0$, то

$$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}.$$

3. Розв'яжемо нерівність $mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0$. (2)

Розв'язування.

При $m = 0$ (контрольне значення) воно приймає вигляд $2x + 2 < 0$, і розв'язок його є $x < -1$.

Введемо позначення $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + (m+2)$, де $m \neq 0$. У цьому випадку нерівність $f(x) < 0$ – квадратне відносно x . Нехай D – дискримінант $f(x)$. $0,25 D = 1 - 4m$.

Якщо $D < 0$, тобто якщо $m > 0,25$, то знак $f(x)$ співпадає із знаком m при будь-яких дійсних значеннях x , тобто $f(x) > 0$ при будь-яких $x \in \mathbb{R}$. Значить, при $m > 0,25$ нерівність $f(x) < 0$ немає розв'язків.

Якщо $D = 0$, тобто $m = 0,25$, то $f(x) = (0,5x + 1,5)^2$, тобто $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in \mathbb{R}$. Отже, при $m = 0,25$ нерівність $f(x) < 0$ також немає розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $D > 0$, тобто $m < 0,25$ ($m \neq 0$) $\Rightarrow m < 0$ або $0 < m < 0,25$. $f(x) = 0$ при двох дійсних значеннях x :

$$x_1 = \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) \text{ і } x_2 = \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}).$$

Тут можуть представитися два випадки:

1) $m < 0$.

Розв'язати нерівність $f(x) < 0$ - значить знайти ті значення x , при яких знак $f(x)$ співпадають із знаком m . Щоб дати відповідь на це питання, зауважимо, що $-\sqrt{1-4m} < \sqrt{1-4m}$, тобто

$$m-1-\sqrt{1-4m} < m-1+\sqrt{1-4m}, \text{ але так як } m < 0.$$

$$\text{то } \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$$

Тому розв'язок нерівності (2) є:

$$\left(-\infty; \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m})\right) \cup \left(\frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}); +\infty\right).$$

2) $0 < m < 0,25$.

Тепер для розв'язку нерівності (2) достатньо вказати на ті значення x , при яких знак $f(x)$ протилежний знаку m . Оскільки при $0 < m < 0,25$ $x_1 < x_2$, то де $x \in (x_1; x_2)$.

Відповідь: при $m = 0$ де $x < -1$; при $m < 0$ де $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$; при $0 < m < 0,25$ де $x \in (x_1; x_2)$; при $m > 0,25$ розв'язків немає.

Розділ III. Програма факультативу з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі

Програма факультативу

Структура програми:

2 години на тиждень. Всього 18 годин.

Тема 1. Знайомство з параметром. (4 год.)

Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметром (6 год.)

Тема 3. Квадратний тричлен. Квадратична функція (8 год.)

Дана програма розрахована на учнів 9 класів із достатнім та високим рівнем знань з математики.

Вивчення даного курсу дасть можливість поліпшити результати навчання, покращить результативність участі учнів в математичних олімпіадах

Зміст програми факультативу

№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин	Вимоги до рівня підготовки учня
Тема 1. Знайомство з параметром. (4 год)			
1 - 2	Поняття параметру і пошуку розв'язків рівнянь, нерівностей	2	<i>Основна мета:</i> ✓ ознайомити з поняттям рівняння з параметром, областю допустимих значень параметра; ✓ провести класифікацію рівнянь з параметром. <i>Основні вимоги:</i> <i>Учні повинні знати:</i> ✓ перехід від однотипних рівнянь до рівнянь з параметром;
3-4	Параметр і кількість розв'язків рівнянь, нерівностей. Типи рівнянь з параметром.	2	

			✓ поняття параметра як тимчасової змінної; ✓ область зміни параметрів; ✓ класифікація рівнянь з параметром.
Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметром (6 год)			
5-6	Розв'язування лінійних рівнянь з параметром	2	<i>Основна мета:</i> ознайомити з поняттям лінійного рівняння з параметром, областю допустимих значень параметра;
7-8	Розв'язування лінійних нерівностей з параметром	2	познайомити із методами розв'язування лінійних рівнянь з параметром.
9-10	Лінійні рівняння та нерівності з параметром	2	<i>Основні вимоги:</i> <i>Учні повинні знати:</i> принцип перебору значень параметра, та вплив цього значення на корені рівняння. <i>Учні повинні вміти:</i> ✓ розв'язувати простіші лінійні рівняння з параметром.
Тема 3. Квадратична функція (8 год)			
11-12	Квадратний тричлен. Квадратична функція, дискримінант, коефіцієнт, вершина параболи, графік	2	<i>Основна мета:</i> узагальнити і систематизувати знання учнів про кількість розв'язків квадратного рівняння; ознайомити учнів із дослідженнями кількості розв'язків квадратного рівняння

		функції. Опорні задачі		показати застосування теореми Вієта в задачах з параметром.
	13-14	Розв'язування квадратних рівнянь з параметром	2	<i>Основні вимоги:</i> <i>Учні повинні вміти:</i> проводити
	15-16	Розв'язування квадратних рівнянь з параметром	2	дослідження кількості коренів квадратного рівняння залежно від параметра;
	17-18	Розв'язування квадратних рівнянь та нерівностей з параметром	2	застосовувати теорему Вієта в задачах з параметром; знаходити умови належності коренів квадратного тричлена певному інтервалу залежно від значення параметра.

Література

1. Горнштейн П.І. Задачі з параметрами. Київ: РІА «Текст», 1992.
2. Єфімов Є.А., Коломієць Л.В. Задачі з параметрами, навчальний посібник для факультету довузівської підготовки. Самара, 2006.
3. Навчальна програма для загальноосвітніх навч. закладів. Математика 5-9 кл. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita>
4. Науково-методичний журнал «Математика в школах України», «Математика в рідній школі».
5. Непочатова Т.С., Сіренський І.О., Смішко Г.С.. Математичні олімпіади Хмельниччини. Інформаційний вісник ХОШПО, 2009.

3.2.Тема 1. Знайомство з параметром. (4 год)

Знайомство з параметром

Заняття 1–2

Цей курс адресований в першу чергу тим, хто має мінімальну уяву про задачі з параметрами. Відомо, що в програмах з математики для неспеціалізованих шкіл цим задачам відводиться незначне місце. Тому в першу чергу розглянемо розділи шкільної математики, в яких, взагалі, присутня сама ідея параметрів.

Так, з параметром учні зустрічаються при введенні деяких понять. Розглянемо як приклади наступні об'єкти.

Функція пряма пропорційність: $y=kx$ (ті y — змінні, k — параметр, $k \neq 0$);

Лінійна функція: $y=kx+b$ (ті y — змінні, k і b — параметри);

Лінійне рівняння: $ax+b=0$ (x — змінна, a і b — параметри);

Рівняння першого степеня: $ax+b=0$ (x — змінна, a і b — параметри, $b \neq 0$);

Квадратне рівняння: $ax^2+bx+c=0$ (x — змінна, a , b і c — параметри, $a \neq 0$).

До завдань з параметром можна віднести, наприклад, пошук розв'язків лінійних і квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення параметрів.

Основне, що потрібно засвоїти при першому знайомстві з параметром, — це необхідність обережного звернення до фіксованого, але невідомого числа. Розв'язати рівняння з параметром означає, що для кожного значення параметра треба встановити, чи має рівняння розв'язки, і якщо має, то знайти ці розв'язки, що, як правило, залежать від параметра.

Розглянемо ряд прикладів:

Вправа 1. Порівняємо $-a$ і $3a$.

Розв'язування

Розглядаємо три випадки:

- 1) Якщо $a < 0$, то $-a > 3a$;
- 2) Якщо $a = 0$, то $-a = 3a$;
- 3) Якщо $a > 0$, то $-a < 3a$.

Вправа 2. Розв'яжемо рівняння: 1) $ax = 1$; 2) $x - 3 = a + 1$

Розв'язування

- 1) На перший погляд відповідь очевидна: $x = \frac{1}{a}$. Однак при $a = 0$ дане рівняння немає розв'язків.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$

- 2) Перетворимо спочатку рівняння $x = a + 4$. Рівняння має єдиний розв'язок незалежно від значення параметра a . Наприклад, якщо $a = 1$, то $x = 5$; $a = 0$, то $x = 4$; $a = -4$, то $x = 0$.

Зауважимо, що параметр a може набувати будь-яких значень, а значення x знаходимо за формулою $x = a + 4$.

Відповідь. $x = a + 4$ для будь-якого значення параметра a .

Вправа 3. $x - 3 = a + 1$, для якого a число 4,5 є коренем рівняння? Оскільки число 4,5 є коренем даного рівняння, то воно перетворює рівняння в правильну рівність: $4,5 - 3 = a + 1$, звідки $a = 0,5$.

Відповідь, $a = 0,5$

Вправа 4. Розв'язати рівняння $ax + 7 = a$.

Основою розв'язування завдань з параметром є правильне розбиття області зміни параметра на окремі частини і до цього потрібно привчати учнів.

У запропонованому рівнянні коефіцієнт при x дорівнює a . Тому можливі випадки:

а) коефіцієнт при x дорівнює 0 і рівняння має вигляд $0 \cdot x = -7$ та немає коренів;

б) коефіцієнт при x не дорівнює 0. Тоді поділимо обидві частини рівняння на

коефіцієнт $a \neq 0$: $ax + 7 = a$, $ax = a - 7$,

$$x = \frac{a-7}{a}.$$

Відповідь. Якщо $a=0$, то рівняння розв'язку немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a-7}{a}$.

Важливо звертати увагу учнів на випадки, коли коефіцієнт при x дорівнює нулю, і розглядати їх у першу чергу, що допоможе учням уникати поширеної помилки: взагалі не розглядати таких випадків.

Доцільно запропонувати учням самостійно розв'язати таке рівняння:

Вправа 5. Розв'язати рівняння, $(a + 4)x + 4 = a$, де a параметр, з наступною перевіркою правильності розв'язування на дошці чи на екрані.

Слід звернути увагу учнів на конструкцію запису відповіді:

"якщо $a \dots$, то $x \dots$ ", або "якщо $x \dots$, то $a \dots$ ".

У запропонованому прикладі відповідь може бути записана так:

Якщо $a = -4$, то розв'язків немає; якщо $a \neq -4$, то $x = \frac{a-4}{a+4}$.

Вправа 6. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Розв'язування

Очевидно, що для розв'язку цього рівняння достатньо розглянути такі випадки:

1) $a = 1$; тоді рівняння матиме вигляд $0x = 2$ і немає розв'язків;

2) $a = -1$; рівняння матиме вигляд $0x = 0$ і матиме безліч розв'язків;

3) $a \neq \pm 1$; маємо $x = \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{1}{a-1}$.

Важливим етапом розв'язування задач з параметрами є запис відповіді. Особливо це відноситься до тих прикладів, де розв'язки міняються в залежності від значення параметра. В подібних випадках складання відповіді — це збір одержаних результатів. І тут дуже важливо не забути відобразити у відповіді всі етапи розв'язку.

Відповідь. Якщо $a = -1$, то x – будь-яке число; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

Вправа 7. Розв'язати нерівність $ax < 1$.

Розв'язування

Аналіз трьох можливостей $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$ дозволяє отримати результат:

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$.

Заняття 3–4

Для знайомства із параметрами, корисно ще розглянути наступні два приклади:

Вправа 8. Розв'язати нерівність $|x + 3| > -a^2$.

Розв'язування

Очевидно, що при $a \neq 0$ права частина нерівності від'ємна, тоді при будь-якому x ліва частина більша правої. У випадку, коли $a = 0$, варто не пропустити той факт, що дану нерівність задовольняють всі дійсні числа, крім $x = -3$.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то x – будь-яке число; якщо $a = 0$, $x < 3$ або $x > 3$.

Звертаємо увагу, що у всіх прикладах, що розглядалися областю допустимих значень для змінної і для параметра була множина дійсних чисел. Познайомимося із задачею іншого роду.

Вправа 9. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x} = a^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язування.

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. існує для будь-якого x , $a^{\frac{1}{3}} > 0$ при всіх a . Учні часто допускаються помилки, вважаючи розв'язком рівняння єдиний корінь $x = a$, адже при від'ємних значеннях a дана рівність неможлива.

Відповідь. Якщо $a \geq 0$, то $x = a$; якщо $a < 0$, то розв'язків немає.

Для закріплення вивченого матеріалу розв'яжемо приклади.

Вправа 10. Розв'язати рівняння $\frac{x-a}{x-1} = 0$.

Розв'язування.

Очевидно, що $x = a$ – єдиний корінь рівняння, проте слід пам'ятати, що $x \neq 1$, а тому $a \neq 1$.

Відповідь. Якщо $a \neq 1$, то $x = a$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає.

Вправа 11. Розв'язати нерівність $(a - 1)\sqrt{x} \leq 0$.

Розв'язування

Зауважимо, що $\sqrt{x} \geq 0$ для всіх невід'ємних x . Очевидно, що відповідь залежить від знака двочлена $a - 1$. При $a < 1$, $a - 1 < 0$ і дана нерівність справедлива для всіх $x > 0$. А для всіх $a > 1$, $a - 1 > 0$, очевидно, що дана нерівність інших розв'язків крім $x = 0$ немає.

Відповідь. Якщо $a \leq 1$, то $x \geq 0$; якщо $a > 1$, то $x = 0$.

Варто також звернути увагу і на такі типи завдань:

Вправа 12. При яких натуральних значеннях a корінь рівняння $(a + 2)x = 5$ є натуральним числом?

Розв'язування

Лінійне рівняння $(a + 2)x = 5$ має корінь, за умови $a + 2 \neq 0$, тоді $x = \frac{5}{a+2}$.

Корінь рівняння є натуральним числом, якщо $a + 2$

- дільник числа 5, тобто при $a = 3$.

Відповідь. 3.

Вправа 13. При яких цілих значеннях коренем рівняння $(a + 1)x = 7$ є ціле число?

Розв'язування

При $a + 1 \neq 0$ рівняння $(a + 1)x = 7$ має корінь $x = \frac{7}{a+1}$. Вираз $\frac{7}{a+1}$ набуватиме цілих значень, за умови, що $a + 1$ є цілим дільником числа 7. Оскільки число 7 є простим числом, то його цілими дільниками є числа: 1; 7; -1; -7. Отже, значення параметра знайдемо з таких умов: $a + 1 = 1$, $a + 1 = 7$, $a + 1 = -1$, $a + 1 = -7$.

Розв'язавши ці рівняння, маємо $a = 0$, $a = 6$, $a = -2$, $a = -8$.

Відповідь. -8; -2; 0; 6.

Вправа 14. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння
 $(a - 6)x = a^2 - 12a + 36$.

Продумати алгоритм розв'язання рівняння, аналогічні рівняння будуть розв'язуватися на наступних заняттях.

3.3.Тема 2. Лінійні рівняння та нерівності з параметром (6 год)

Тема. Лінійні функції в задачах з параметром

Заняття 5-6

1. Розв'язки лінійного рівняння

Рівняння $ax + b = 0$ називається лінійним, якщо коефіцієнт $a \neq 0$.

- воно має єдиний розв'язок $x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$;
- якщо обидва коефіцієнти дорівнюють нулю $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння перетворюється в тотожність $0 \cdot x + 0 = 0$, і його розв'язками є всі дійсні числа.
- якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння перетворюється в неправильну рівність $b = 0$ і воно не має розв'язків.

2. Тренувальні вправи

Вправа 15. Розв'язати рівняння $1) 2a(a - 2)x - a - 2$

Розв'язування

1) Знайдемо ті значення параметра, які перетворюють у нуль коефіцієнт при x :

$$2a(a - 2) = 0, a = 0 \text{ або } a = 2.$$

Якщо $a = 0$, рівняння матиме вигляд $0 \cdot x = -2$, таке рівняння розв'язків немає.

Якщо $a = 2$, то $0 \cdot x = 0$, тобто x – будь-яке число.

$$\text{Якщо } a \neq 0, a \neq 2, \text{ то } x = \frac{a-2}{2a(a-2)} = \frac{1}{2a}.$$

Відповідь. Якщо $a = 0$, то немає коренів; якщо $a = 2$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0, a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

Вправа 16. $(a^2 - 1)x - (2a^2 + a - 3) = 0$

$$(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3$$

$$(a - 1)(a + 1)x = (2a + 3)(a - 1)$$

Розглянемо випадок: $(a - 1)(a + 1) = 0$, $a = \pm 1$.

Якщо $a = 1$, то $0 \cdot x = 0$, тобто x — будь-яке число.

Якщо $a = -1$, то $0 \cdot x = -2$, це рівняння розв'язків немає.

Якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{2a+3}{a+1}$.

Відповідь. Якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a = -1$, то розв'язків немає; якщо $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{2a+3}{a+1}$.

Вправа 17. $(a^2 + 2)x = a(2 - 3x) + 2$

$$(a^2 + 2)x = 2a - 3ax + 2$$

$$(a^2 + 3a + 2)x = 2a + 2$$

$$(a + 1)(a + 2)x = 2(a + 1)$$

1) $(a + 1)(a + 2) = 0$, $a = -1$, або $a = -2$. Якщо $a = -1$, то $0 \cdot x = 2 \cdot 0$, x — будь-яке число. Якщо $a = -2$, то немає коренів.

2) Якщо $a \neq -1$, $a \neq -2$, то $x = \frac{2(a+1)}{(a+1)(a+2)} = \frac{2}{a+2}$,

Відповідь. Якщо $a = -2$, то рівняння немає коренів; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -1$, $a \neq -2$, то $x = \frac{2}{a+2}$.

Вправи для самоперевірки (проектуються на екран або пропонуються на картках)

Завдання для самоперевірки №1

При яких значеннях параметра a рівняння

$$(2a + 1)(x - 2) = 2ax + a - 2$$

має нульовий розв'язок?

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $a = -1$
- ☐ $a = 0$
- ☐ $a = 1$
- ☐ $a \leq -2$
- ☐ Таких значень немає

Завдання для самоперевірки №2

При яких значеннях параметра p рівняння
 $p^2 x - 2 = p(2 - x)$

має нескінчену множину розв'язків?

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $p = -1$
- ☐ $p = 0$
- ☐ $p = 1$
- ☐ $p \neq 1$
- ☐ Таких значень немає

Завдання для самоперевірки №4

При яких значеннях параметра p рівняння
 $p^2 x - 2 = p + 4x$

немає розв'язків?

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $p = -2$
- ☐ $p = 0$
- ☐ $p = 2$
- ☐ $p \neq -2$
- ☐ Таких значень немає

Завдання для самоперевірки №5

При яких значеннях параметра p рівняння
 $p^2 x + p - 4 = p(5 - x)$

має один додатній розв'язок?

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $p = -1$
- ☐ $p = 0$
- ☐ $p > 0$
- ☐ $p \leq -1$
- ☐ Таких значень немає

Тема. Практикум розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром
Заняття 7-8

Засвоєння нового матеріалу

Вправа 18. Розв'язати рівняння $(x - 1)\sqrt{x - a} = 0$.

Розв'язування. Дане рівняння рівносильне системі

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq a, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = a. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Звідси $x = a$ — корінь даного рівняння при будь-якому a , а $x = 1$ — корінь лише при $x = a$.

Відповідь. Якщо $a < 1$, то $x = a$, або $x = 1$; якщо $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a > 1$, то $x = a$.

В подальшому знайомство з параметрами ми проведемо ще в одному напрямку. Мова йде про клас задач, де за рахунок параметра на змінну накладаються якісь штучні обмеження. Для таких задач характерні наступні формулювання: при якому значенні параметра рівняння (нерівність, система) має лише один розв'язок, два, нескінченну множину чи жодного; розв'язком рівняння (нерівності чи системи) є якась підмножина множини дійсних чисел і т.п.

Вправа 19. При яких a нерівність $(x - a)(x - 2) \leq 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язування

Очевидно, що $a = 2$ задовольняє вимогу задачі. Дійсно, при $a = 2$ отримуємо нерівність $(x - 2)^2 \leq 0$, що має єдиний розв'язок. Для випадку, коли $a \neq 2$, розв'язком нерівності буде відрізок, тобто безліч розв'язків.

Відповідь. $a = 2$.

Вправа 20. При яких значеннях a розв'язком нерівності $(x - a)^2(x - 2)(x + 3) \leq 0$ буде відрізок?

Розв'язування

Оскільки $(x - a)^2 \geq 0$, то дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 3) \leq 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Розв'язком нерівності системи буде відрізок $[-3; 2]$. Отже, при $a \in [-3; 2]$ розв'язком рівняння також буде відрізок.

Відповідь. $-3 \leq a \leq 2$.

Закріплення вивченого матеріалу.

Вправа 21. При кожному значенні розв'язати рівняння $(a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81$.

Розв'язування.

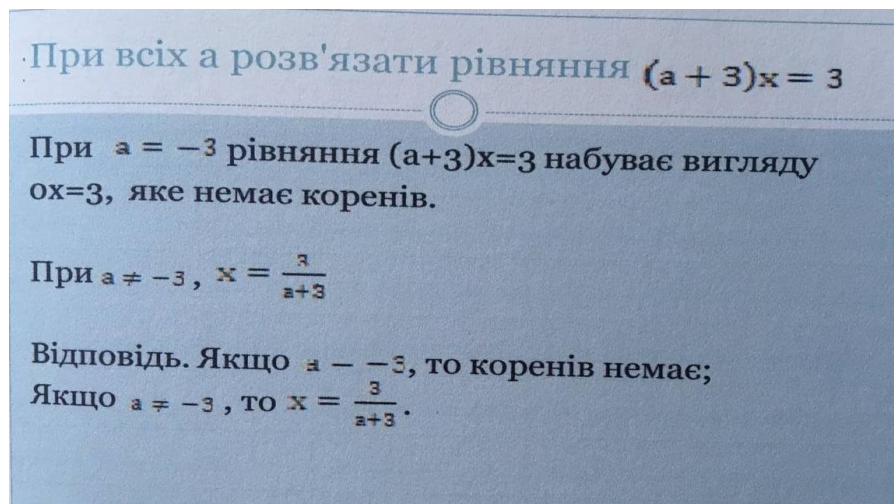
Запишемо дане рівняння у вигляді $x = \frac{a^2 - 18a + 81}{a^2 - 9a} = \frac{(a - 9)^2}{a(a - 9)}$.

Якщо $a = 9$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 0$, коренем цього рівняння є будь-яке число; якщо $a \neq 0$, $a \neq 9$, то $x = \frac{a - 9}{a}$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, $a \neq 9$, то $x = \frac{a - 9}{a}$.

Вправа 22. Для кожного значення a розв'язати рівняння: $(a + 3)x = 3$

Самостійна робота учнів. В кінці роботи звіряються із розв'язком, спроектованим на екран.



Вправа 23. Розв'язати рівняння $\frac{x}{a} + 2 = 7 - x$, де a — параметр.

Розв'язування.

Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то $a = 0$ не належить області допустимих значення параметра a .

Перетворимо рівняння: $\frac{x}{a} + x = 5$, $x \left(\frac{1}{a} + 1 \right) = 5$.

Для $a \neq 0$ розглянемо два випадки:

1) Коефіцієнт при x дорівнює нулю, тобто $\frac{1}{a} + 1 = 0$, $a + 1 = 0$, $a = -1$.

Тоді маємо рівняння: $0 \cdot x = 5$, що не має коренів.

2) Коефіцієнт при x не дорівнює нулю, тобто $\frac{1}{a} + 1 \neq 0$, $a \neq -1$. Тоді

$$x = \frac{5a}{a+1}.$$

Відповідь. Якщо $a = -1$, то рівняння коренів немає; якщо $a \neq -1$, то

$$x = \frac{5a}{a+1}.$$

Тема. Розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром

Заняття 9-10

На екран проєктуються завдання (з перебором та на вибір правильної відповіді) для напівсамостійного опрацювання:

Розв'язати лінійне рівняння (з перебором)

Приклад 1.

Розв'язати при всіх a рівняння $ax - 1 = x$

Розв'язання

Віднімаємо від обох частин рівняння $x - 1$

отримаємо $ax - x = 1$. Винесемо за дужки x : $(a - 1)x = 1$

В залежності від значень параметра a можливі два випадки:

Випадок 1: $a = 1$

Випадок 2: $a \neq 1$

Відповідь.

Розв'язати лінійне рівняння (з перебором)

Приклад 2.

Розв'язати при всіх a рівняння

$$x - 2a = ax - 2$$

Розв'язання

Перетворимо рівняння до більш зручного вигляду.

Віднімаємо від обох частин рівняння $ax - 2$,

отримаємо $x - ax = 2a - 2$. Внесемо за дужки x і 2 ,
запишемо результат: $(1 - a)x = 2(a - 1)$

В залежності від значень параметра a можливі два випадки:

Випадок 1: $a = 1$

Випадок 2: $a \neq 1$

Відповідь.

Лінійна функція в рівняннях з параметрами

Вправа 1

При яких значеннях параметра a рівняння

$$a(x - 3) = x - 2$$

має нескінченну множину розв'язків.

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $a = -10$
- ☐ $a = 3$
- ☐ $a = 1$
- ☐ $a \leq -2$
- ☐ Таких значень немає

Лінійна функція в рівняннях з параметрами

Вправа 2

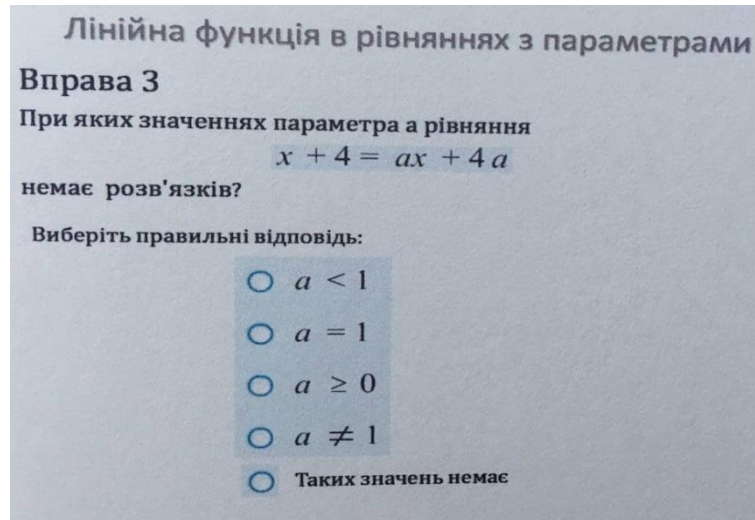
При яких значеннях параметра a рівняння

$$x - a = ax - 1$$

має хоча б один розв'язок, що не дорівнює одиниці?

Виберіть правильні відповідь:

- ☐ $a \neq 1$
- ☐ $a = 0$
- ☐ $a = 1$
- ☐ $a = -2$
- ☐ Таких значень немає



Завдання додому:

- Повторити властивості лінійної функції
- Проаналізувати алгоритми, розв'язуваних на занятті, завдань
- Виконати завдання, до яких склалися алгоритми, але не знайдені відповіді на занятті.

3.4.Тема 3. Квадратична функція (8 год)

Тема. Квадратний тричлен. Опорні задачі

Заняття 11-12

1. Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена

Нехай $y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ – квадратний тричлен, коефіцієнти якого залежать від параметра a ; $D = B^2 - 4AC$ – дискримінант цього рівняння;

$x_0 = -\frac{B}{2A}$ – абсциса вершини параболи; $y_0 = -\frac{D}{4A}$ – ордината вершини параболи;

$y(a) = f(a) = Aa^2 + Ba + C$ – значення квадратного тричлена при $x = a$.

Сформулюємо такі основні задачі:

- 1) Розв'язати рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ (A1)
- 2) Розв'язати одну з нерівностей (B_1) або їх систему:
- 3) Знайти всі значення a , за яких рівняння має дійсні корені, і визначити їх знаки

- 4) Дослідити розташування дійсних коренів рівняння (A_1) відносно заданої точки чи проміжку
 - 5) Знайти всі значення параметра a , за яких з однієї нерівності випливає інша.
 - 6) Визначити всі значення a , за яких корені рівняння (A_1) задовільняють задану умову
 - 7) Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $A_1(a)x^2 + B_1(a)x + C_1(a) = 0$ та $A_2(a)x^2 + B_2(a)x + C_2(a) = 0$ мають спільні корені (або хоча б один спільний корінь)
 - 8) Знайти всі значення a , за яких квадратний тричлен $y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ чи задана функція $P(x_1, x_2)$, де x_1, x_2 — дійсні корені рівняння (A_1) , набуває найбільшого (найменшого) значення на заданому проміжку.
2. Розв'язування основних задач на дослідження квадратного тричлена з коефіцієнтами, залежними від параметра.

Вправа 24. Розв'язування квадратного рівняння з коефіцієнтами, залежними від параметра:

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0 \quad (1)$$

Під час розв'язання (1) треба врахувати, що при $A=0$ це рівняння буде лінійним, тому рівняння (1) еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} A = 0, \\ Bx + C = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} A \neq 0, B^2 - 4AC \geq 0, \\ x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \end{cases} \quad (2)$$

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$, то при $A > 0$ маємо $x_1 < x_2$, а при $A < 0$ $x_1 > x_2$.

Вправа 25. Розв'язати рівняння $(a-2)x^2 - 4(a+3)x + a-1 = 0$

Розв'язування

Дане рівняння еквівалентне сукупності двох систем (див. (2)):

$$\begin{cases} a = 2, \\ x = \frac{1}{20} \end{cases} \text{ та } \begin{cases} a \neq 0, \quad 3a^2 + 27a + 34 \geq 0, \\ x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{3a^2 + 27a + 34}}{a-2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи нерівність $(a-2)x^2 - 4(a+3)x + a-1 \geq 0$, знаходимо ті значення a , за яких x_1, x_2 набувають дійсних значень:

$$a \in \left(-\infty; \frac{-27-\sqrt{321}}{6}\right] \cup \left[\frac{-27+\sqrt{321}}{6}; \infty\right) \setminus \{2\}, \text{ то}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{3a^2 + 27a + 34}}{a-2}.$$

Розв'язування квадратних нерівностей (та їх систем) з коефіцієнтами, залежними від параметра.

Під час розв'язання, наприклад, нерівності $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) < 0$ (3)

Зручно розглянути спочатку випадок $A = 0$ (тоді (3) буде лінійною нерівністю), а у випадку $A \neq 0$ скористатися методом інтервалів, врахувавши при цьому, що вид розв'язку квадратної нерівності визначається знаком коефіцієнта A при x^2 дискримінанта D .

Вправа 26. Розв'язати нерівність $(a^2 - 1)x^2 - 2(a^2 + 3a + 2)x + a + 2 > 0$.

Розв'язування.

Розглянемо спочатку випадок, коли дана нерівність буде лінійною, тобто $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.

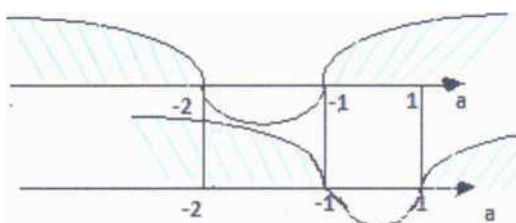
Підставимо ці значення a в нерівність і одержимо при $a = 1$:

$$-12x + 3 > 0, x < \frac{1}{4}, \text{ а при } a = -1: 1 > 0, x \in \mathbb{R}.$$

При $a \neq \pm 1$ обчислимо дискримінант D і подамо його у формі, зручній для визначення проміжків знакосталості:

$$\frac{D}{4} = (a^2 + 3a + 2)^2 - (a^2 - 1)(a + 2) = (a^2 + 2a + 3)(a + 1)(a + 2);$$

На паралельних координатних осях a відкладаємо проміжки знакосталості D та A (мал.1)



(мал. 1)

Провівши через точки $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$ вертикальні прямі, одержимо проміжки, на кожному з яких легко вказати вид розв'язку даної нерівності.

$$x_1 = \frac{a^2+3a+2-\sqrt{\frac{D}{4}}}{a^2-1}, \quad x_2 = \frac{a^2+3a+2+\sqrt{\frac{D}{4}}}{a^2-1}$$

Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Якщо $a \in (-2; -1)$, то $x \in (-\infty; \infty)$.

Якщо $a \in (-1; 1)$, то $x \in (x_2; x_1)$.

Розв'язання задач, пов'язаних із знаходженням значень параметра, при яких корені квадратного рівняння задовільняють задані умови

Для визначення значень параметра a , при яких корені квадратного рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$ x_1 та x_2 при $A \neq 0$ задовільняють умову

$P(x_2; x_1) = 0$, розглянемо систему рівнянь, еквівалентну поставленій задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-C}{A}, \\ P(x_2; x_1) = 0 \end{cases}$$

Визначимо з довільної пари рівнянь x_1 та x_2 і, підставляючи знайдені вирази в рівняння, що залишилося, одержимо співвідношення для знаходження шуканих значень a . При виборі пари рівнянь для визначення x_1 та x_2 варто виходити з простоти їх розв'язання. Дискримінант має бути невід'ємний.

Вправа 27. При яких значеннях a один з коренів рівняння $8x^2 + 2(1 - 4a^2)x + (a + 2)^3 = 0$ дорівнює квадрату іншого?

Розв'язування. Для визначення шуканих значень a складемо систему, в якій два перші рівняння описують теорему Вієта для даного квадратного рівняння

$$x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} = \frac{4a^2 - 1}{4}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-C}{A} = \frac{(a+2)^3}{8}, \text{ а третє співвідношення містить}$$

умову, яка накладається на його корені: $x_2 - x_1^2 = 0$.

У даному випадку для визначення x_1 та x_2 зручно вибрати друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{(a+2)^3}{8}, \\ x_2 = x_1^2; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a+2}{2}, \\ x_2 = x_1^2. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені вирази в перше рівняння системи, одержимо:

$$\frac{a+2}{2} = \frac{(a+2)^2}{4} = \frac{4a^2-1}{4}, \quad a^2 - 2a - 3 = 0, \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

Відповідь. $a = -1$, або $a = 3$.

Тема. Квадратний тричлен. Тренувальні вправи

Заняття 13 - 14

Вправа 28. При яких значеннях параметра a корені рівняння

$$ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0 \quad (1.1) \quad \text{більші 1?}$$

Розв'язування

Очевидно, що задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1$ більші 1.

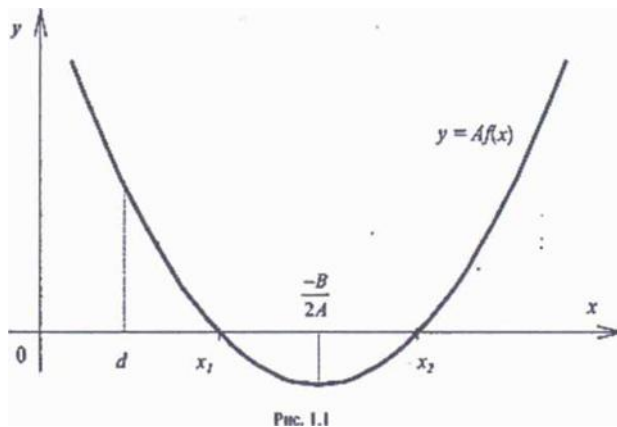
Перехід від одного формулювання задачі до іншого, підкреслює загальну ідею, що пов'язана з описом тих чи інших властивостей квадратного тричлена в їх геометричній інтерпретації на графіку.

Для того, щоб корені квадратного тричлена

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad (A \neq 0) \quad (1.2)$$

були більші числа d , необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ \frac{-B}{2A} > d, \\ Af(d) > 0 \end{cases} \quad (1.3) \quad (\text{див. рис. 1.1})$$



При $a = 0$ рівняння (1.1) має корінь $x = -1$, який не задовільняє умову задачі.

Розглянемо випадок $a \neq 0$. При таких a умови (1.3) запишуться у вигляді

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0, \\ \frac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a - (2a+1) + 3a-1) > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо, що $a \in 1; (\frac{2+\sqrt{6}}{4}]$. Очевидно, що цей же результат ми отримали б і розв'язуючи нерівність $x_1 > 1$, де x_1 – менший корінь рівняння (1.1).

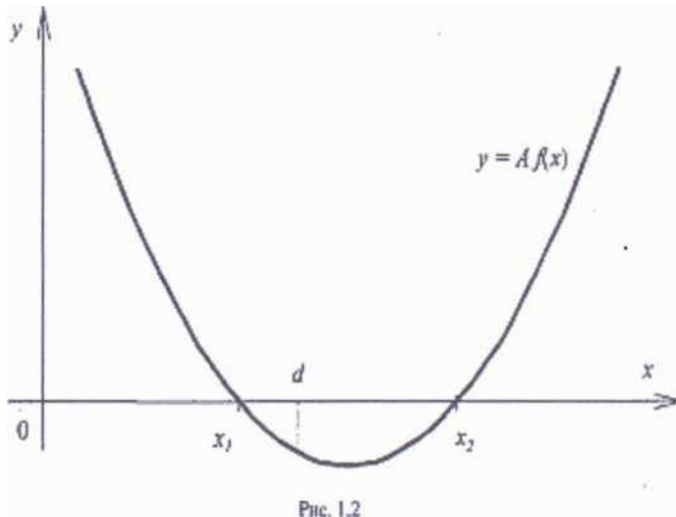
Відповідь. $a \in 1; (\frac{2+\sqrt{6}}{4}]$.

Вправа 29. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$ більший числа a , а другий менший числа a ?

Розв'язування

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $g(x) = (a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a$ лежать на дійсній осі по різні сторони від точки $x = a$?

Для розв'язування цієї задачі скористаємося тим загальним фактом, що для того щоб корені квадратного тричлена (1.2) лежали на дійсній осі по різні сторони від числа a , необхідно і достатньо виконання умови $Af(a) > 0$ (див. рис. 1.2)



В нашому випадку ця умова приймає вигляд $(a^2 - 2)g(a) < 0$.

Тобто, вимогу задачі задовольняють розв'язки нерівності

$(a^2 - 2)((a^2 - 2)a^2 + (a^2 + a - 1)a - a^3 + a) < 0$, де $a^2 - 2 \neq 0$ ($a = \pm \sqrt{2}$ не задовольняють вимогу задачі).

Розв'язуючи отриману нерівність, знаходимо, що $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Варто сказати, що розв'язуючи цю задачу іншим способом, розглядаючи нерівності $x_1 < a$ і $x_2 > a$ досить складно.

Відповідь. $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

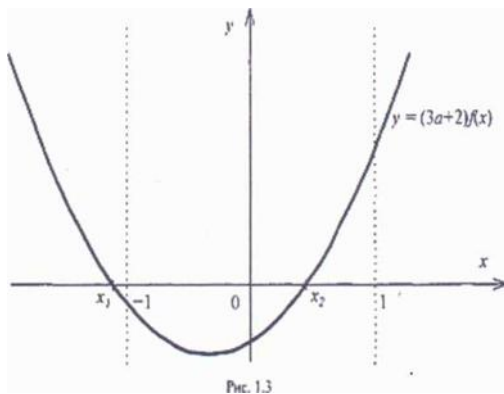
Вправа 30. При яких значеннях параметра a корені x_1 та x_2 рівняння $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$ задовольняють умовам $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

Розв'язування

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a тільки один, а саме - більший корінь квадратного тричлена $f(x) = (3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3$ де $3a + 2 \neq 0$ належить інтервалу $(-1; 1)$, а другий - менший -1.

Вимоги в даній задачі виконуються тільки з-за умов:

$$\begin{cases} (3a + 2)f(-1) < 0, \\ (3a + 2)f(1) > 0 \end{cases}$$



Таким чином ми приходимо до системи

$$\begin{cases} (3a+2)((3a+2) - (a-1) + 4a+3) < 0, \\ (3a+2)((3a+2) + (a-1) + 4a+3) > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, приходимо до висновку, що $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.

Відповідь. $a \in (-1; -\frac{2}{3})$.

Вправа 31. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ мають різні знаки і обидва по модулю менші 4?

Розв'язування

Нехай $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1$. Тоді вимоги задачі виконуються, якщо сумісна система

$$\begin{cases} f(-4) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(4) > 0, \end{cases} \quad \text{яку запишемо у вигляді} \quad \begin{cases} 10a+9 > 0, \\ 2a+1 < 0, \\ -6a+25 > 0, \end{cases} \quad \text{і якій задовольняють}$$

всі $a \in (-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2})$.

Відповідь. $a \in (-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2})$.

Вправа 32. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ по абсолютній величині більший 1, а другий менший одиниці?

Розв'язування

Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a один з двох коренів квадратного тричлена $f(x) = a^2x^2 + ax - 2$ належать дійсній осі інтервалу $(-1; 1)$.

А другий розміщений поза цим інтервалом, і по модулю не дорівнює одиниці? Користуючись графіком, відмічаємо, що рівно один корінь тричлена $f(x)$ належить інтервалу $(-1; 1)$ тільки в тому випадку, коли числа $f(-1)$ і $f(1)$ мають різні знаки (корені по модулю не дорівнюють 1), приходимо до висновку, що вимоги задачі виконуються тільки при умові $f(-1) \cdot f(1) < 0$, яка в нашому випадку запишеться у вигляді $(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0$.

Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо, що $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Вправа 33. При якому значенні параметра a парабола $y = 4ax^2 - 8x + 25$ має з віссю Ox дві спільні точки?

Розв'язування

Даний квадратний тричлен має два різних дійсних корені, якщо виконуються

$$\text{умови: } \begin{cases} 4a \neq 0 \\ \frac{D}{4} = 16 - 100a > 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є проміжок $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Відповідь. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$.

Вправа 34. При яких значеннях параметра a квадратний тричлен $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k+7$ можна представити у вигляді повного квадрата?

Розв'язування.

Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна представити у вигляді $a(x - x_0)^2$, якщо його корені рівні $x_1 = x_2 = x_0$. Тобто $D = 0$. В даному випадку

$$D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0. \text{ Розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо } k = -\frac{22}{3} \text{ і } k = 2.$$

Відповідь. $k = -\frac{22}{3}$ і $k = 2$.

Вправа 35. Знайти значення параметра a , при яких нерівність

$$(2a+1)x^2 + (a+2)x + \frac{3}{4} \geq 0 \text{ виконується для всіх } x.$$

Розв'язування

Графік квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ розміщений не нижче осі Ox при виконанні умов:
$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0. \end{cases}$$

В даній задачі ці умови мають вигляд:

$$\begin{cases} 2a+1 > 0 \\ (a+2)^2 - 3(2a+1) \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $a = 1$.

Відповідь. $a = 1$.

Завдання, які можна розв'язувати як додаткові на занятті, для індивідуальної роботи або для домашньої роботи:

Розв'язати рівняння та нерівності:

1) $(a^2 - 6a + 5)x = a - 1$

2) $\frac{x-2}{x+a} = 0$

3) $\sqrt{x} = -a$

4) $\frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$

5) $\frac{x^2-4x+3}{x-a} = 0$

6) $a\sqrt{x} > 0$

Тема. Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена належали певному інтервалу відносно чисел t і p на числовій прямій

Заняття 15 - 16

1. *Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена були більшими t*
2. *Необхідні і достатні умови для того, щоб корені квадратного тричлена були меншими t*
3. *Знаходження умови належності коренів квадратного тричлена певному інтервалу залежно від значення параметра.*

Вправа 36. При яких значеннях параметра b корені рівняння

$$\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)} \text{ більші числа } 10.$$

Розв'язування:

При $(b+1)(x-2) \neq 0$ рівняння рівносильне такому рівнянню:

$$x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0. \text{ Звідки } x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4},$$

$$x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}.$$

Тепер необхідно перевірити, чи немає таких значень b , при яких один з одержаних коренів дорівнює 2. Виявляється, що таке значення є. В цьому легко переконатися, якщо підставити в рівняння $x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0$ значення $x=2$. При цьому одержуємо $b = -8$.

Другий розв'язок в цьому випадку дорівнює $\frac{-3b+4}{2}$ при $b=-8$, тобто $x = 14$.

Отже, при $b = -8$ початкове рівняння має один розв'язок $x = 14$

При $b \neq -8$ і $b \neq -1$ рівняння має два розв'язки: $x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$.

Ці розв'язки дійсні при $b \leq -4$, ($b \neq -8$) і при $b \geq 1$. При $b = -1$ рівняння немає змісту.

Корені рівняння, що більші числа 10:

1) $x=14$ при $b = -8$

2) При $b \neq -8$ і $b \neq -1$ рівняння має розв'язки $x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$, тобто розв'яжемо нерівності:

$$-b - \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10 \text{ і } -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10. \text{ Звідки:}$$

$$\text{при } b > -6 \text{ справджується нерівність } -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10$$

$$\text{при } b < -6 \text{ справджується нерівність } -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4} > 10$$

Вправа 37. Знайти значення a , при якому один з коренів рівняння

$$x^2 - 2ax + 5 = 0 \text{ в два рази менший від одного з коренів рівняння } x^2 + 4x - 4a = 0$$

Вправа 38. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких корені рівняння

$$(a-2)x^2 + 2ax + a + 3 = 0 \text{ належать інтервалу } (-2;1).$$

$$\text{Нехай } f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + a + 3. \quad x_0 = -\frac{a}{a-2}, \quad D = 4a^2 - 4(a-2)(a+3).$$

Якщо $a = 2$, то $f(x) = 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \in (-2; 1)$.

Якщо $a \neq 2$, то задача рівносильна виконанню умов:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0, \\ -2 < x_0 < 1, \\ (a-2)f(-2) > 0, \\ (a-2)f(1) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - (a-2)(a+3) \geq 0, \\ \frac{a}{a-2} + 1 > 0, \\ \frac{a}{a-2} - 2 < 0, \\ (a-2)(a-5) > 0, \\ (a-2)(4a+1) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (5; 6].$$

Відповідь: $a \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup \{2\} \cup (5; 6]$.

Вправа 39. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2 + (2a-1)x + 1 = 0$ розташовані в інтервалі $(-1; 1)$?

Задача зводиться до розв'язування системи нерівностей:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -1 < x_0 < 1, \\ af(1) > 0, \\ af(-1) > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $a \in (\frac{1}{4}; 2)$.

Завдання для самоперевірки з вибором правильної відповіді:

Вправа 40. Розв'язати при всіх a рівняння $x^2 + ax + 9 = 0$. Вибрати правильну відповідь:

- ☐ При $a \geq 36$ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$, при $a < 36$ розв'язків немає
- ☐ При $|a| \geq 6$ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$, при $|a| < 6$ розв'язків немає
- ☐ При $|a| \leq 6$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 36}$, при $|a| > 6$ розв'язків немає
- ☐ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 36}}{2}$
- ☐ При $|a| \leq 3$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$, при $|a| > 3$ розв'язків немає

Вправа 41 Розв'язати при всіх a рівняння $x^2 - 2ax + 4 = 0$

Вибрати правильну відповідь:

- ☐ При $a \geq 4$ $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, при $a < 4$ розв'язків немає
- ☐ При $|a| \leq 2$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{4 - a^2}$, при $|a| > 2$ розв'язків немає
- ☐ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$
- ☐ При $a \leq 4$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{4 - a}$, при $a > 4$ розв'язків немає
- ☐ При $|a| \geq 2$ $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, при $|a| < 2$ розв'язків немає

Вправа 42. Розв'язати при всіх a рівняння $2x^2 - bx + 8 = 0$

Вибрати правильну відповідь:

- ☐ При $|b| \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{4}$, при $|b| < 8$ розв'язків немає
- ☐ При $|b| \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{4}$, при $|b| < 8$ розв'язків немає
- ☐ При $|b| \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{2}$, при $|b| < 8$ розв'язків немає
- ☐ При $|b| \geq 8$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 64}}{2}$, при $|b| < 8$ розв'язків немає
- ☐ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 64}}{2}$

Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами (з перебором)

Вправа 43. Розв'язати при всіх a рівняння $x^2 + 2x - a = 0$.

Дослідимо рівняння на існування розв'язків. Зручно знайти одну четверту частину дискримінанта $\frac{D}{4} = 1 + a$. В залежності від значень параметра a можливі три випадки:

Випадок 1. $a < -1$.

Випадок 2. $a = -1$.

Випадок 3. $a > -1$.

Вправа 44. Розв'язати при всіх b рівняння $x^2 + 2bx - 1 = 0$.

Знайти одну четверту частину дискримінанта $\frac{D}{4} = b^2 + 1$. Оскільки квадрат будь-якого дійсного числа завжди є невід'ємним числом, то дискримінант буде

додатнім числом при довільних значеннях параметра b . Отже, рівняння завжди буде мати два дійсних корені. Знайдемо їх: $x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 1}$,
 $x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 1}$.

Вправа 45. Розв'язати при всіх p рівняння $x^2 - px + 4 = 0$.

Дослідимо значення дискримінанта $D = p^2 - 4 \cdot 4 = p^2 - 16$. В залежності від значення дискримінанта можливі три випадки:

Випадок 1. $D < 0$

Випадок 2. $D = 0$

Випадок 3. $D > 0$

Вправа 46. Розв'язати при всіх a рівняння $a^2x + 2x - 4 = 0$.

В залежності від значення параметра a ми отримуємо різні рівняння. Якщо $a = 0$, то рівняння стає лінійним, якщо $a \neq 0$ рівняння стає квадратним. В цьому випадку кількість розв'язків залежить від значення дискримінанта: $D = 2^2 - 4(-4)a = 4 + 16a = 4(1 + 4a)$.

Дискримінант приймає значення 0, якщо $1 + 4a = 0$, при цьому $a = -0,25$.

Відмітимо точки $a = -0,25$ та $a = 0$ на координатній прямій. В залежності від значення a треба розібрати 5 можливих випадків:

Випадок 1. $a < -0,25$

Випадок 2. $a = -0,25$

Випадок 3. $-0,25 < a < 0$

Випадок 4. $a = 0$

Випадок 5. $a > 0$

Задачі для закріплення вивченого матеріалу

Вправа 47. Розв'язати при всіх b рівняння $x^2 - 4bx + b - 2 = 0$. Вибрати правильну відповідь.

- ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{4b^2 - b + 2}$
- ☐ При $b \leq 2$ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{2 - b}$, при $b > 2$ розв'язків немає
- ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{4b^2 + 2}$
- ☐ $x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{b^2 + 2}$
- ☐ При $b \geq -2$ $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b + 2}$, при $b < -2$ розв'язків немає

Вправа 48. Знайти всі a , при яких рівняння $a^2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2ax$ має рівно два різних кореня.

Вибрати правильну відповідь.

- ☐ $a < 13/12$
- ☐ $a < -1, a > 13/12$
- ☐ $a < -1, -1 < a < 1, 1 < a < 13/12$
- ☐ $a < -1, -1 < a < 1, a \geq 13/12$
- ☐ $a < -1, -1 < a < 13/12$

Вправа 49. Знайти всі p , при яких рівняння $px^2 + x + p = 2px$ має рівно два різних кореня.

Вибрати правильну відповідь.

- ☐ $p < 1/4$
- ☐ $p < 0, p > 1/4$
- ☐ $p < -1, -1 < p < 0, 0 < p < 1/4$
- ☐ $p \geq 1/4$
- ☐ $p < 0, 0 < p < 1/4$

Вправа 50. Знайти всі a , при яких рівняння $a^2x^2 - 2ax + 1 = ax^2 + x$ має рівно два різних кореня.

Вибрати правильну відповідь.

- ☐ $a < -1/8$
- ☐ $a < -1, a > 1/8$
- ☐ $-1/8 < a < 1, a > 1$
- ☐ $a \geq -1/8$
- ☐ $-1/8 < a < 0, 0 < a < 1, a > 1$

Вправа 51. Знайти всі a , при яких рівняння $x^2 - ax + a + 3 = 0$ має рівно два різних кореня і відстань між ними 3.

Вибрати правильну відповідь.

- ☐ $a = -2$
- ☐ $a = -2, a = 7$
- ☐ $a = -3, a = 2$
- ☐ $a = -3, a = 7$
- ☐ $a = 7$

Контрольні завдання

Вправа 52. Знайти всі p , за яких рівняння $px^2 - x + p = 2px - x^2 - 1$ має рівно 2 різних кореня

Вправа 53. Знайти всі a , при яких рівняння $x^2 - 2ax + 2a = 3 - 4x$ має рівно два різних кореня і відстань між ними дорівнює 1.

Тема. Розв'язування вправ. Підсумкове заняття з теми

Заняття 17 -18

Тренувальні вправи

Вправа 54. Розв'язати при всіх a рівняння $a^2x^2 + x - a = x^2 - ax + 1$.

Розв'язування

Перенесемо всі доданки із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком $a^2x^2 + x - a - x^2 + ax - 1 = 0$ і знайдемо коефіцієнти при однакових степенях x : $(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x - (a + 1) = 0$. Застосуємо формулу перетворення різниці квадратів у добуток $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ і винесемо спільний множник $(a+1)$ за дужки $(a + 1)((a - 1)x^2 + x - 1) = 0$.

Якщо параметр $a = -1$, то рівняння зводиться до тотожності $0 = 0$. Отже, його розв'язками є всі дійсні числа.

Нехай $a \neq -1$, тоді $a + 1 \neq 0$. Поділивши обидві частини рівняння на $(a + 1)$, отримаємо $(a - 1)x^2 + x - 1 = 0$. В залежності від значень параметра a одержимо різного виду рівняння.

Якщо $a = 1$, то рівняння стає лінійним. Якщо $a \neq 1$, то рівняння буде квадратним.

Обчислимо дискримінант рівняння: $D = 1 - 4(-1)(a - 1) = 4a - 3$.

Дискримінант перетворюється в нуль при $a = 0,75$. Відмітимо тепер на дійсній осі значення параметра $a = -1$, $a = 0,75$, $a = 1$ в порядку зростання. В залежності від значень параметра a можливі 7 випадків.

Розглянути всі випадки та записати відповідь.

Вправа 55. Розв'язати при всіх b рівняння $b x^2 - 1 = b - x$. Розв'язування.

Перенесемо всі доданки із правої частини рівняння в ліву з протилежним знаком $b x^2 - 1 - b + x = 0$ і запишемо по степеням x : $b x^2 + x - (1 + b) = 0$. Якщо $b = 0$, то рівняння стає лінійним. Якщо $b \neq 0$, то рівняння буде квадратним. Знайдемо його дискримінант $D = 1 + 4b(1 + b) = (2b + 1)^2$. Дискримінант перетворюється в нуль, якщо $b = -0,5$, а в решті випадків він додатний. В залежності від значення параметра b розглянемо три можливі випадки:

Випадок 1. $b = 0$

Випадок 2. $b = -0,5$

Випадок 3. $b \neq 0$ і $b \neq -0,5$

Вправа 56. Знайти всі p , при яких рівняння $p^2x^2 - x + 1 = 2px$ має рівно два різних корені.

Розв'язування

Віднімаємо від обох частин рівняння $2px$ отримуємо $p^2x^2 - x + 1 - 2px = 0$.

Запишемо по степеням x : $p^2x^2 - (1 + 2p)x + 1 = 0$.

Скласти подальший алгоритм розв'язання, розглянути випадки:

Випадок 1. $p = 0$

Випадок 2. $p \neq 0$

Контрольні завдання з вибором правильної відповіді

Вправа 57. Знайти всі значення параметра b , за яких рівняння $b^2x^2 + bx - 6 = 3bx^2 + 3x - 2b$ має рівно один розв'язок

Вибрати правильну відповідь

- ☐ $b = 0$
- ☐ $b = 1/8, b = 3$
- ☐ $b = 0, b = 1/8$
- ☐ $b < 1/8$
- ☐ Таких значень немає

Вправа 58. Розв'язати при всіх a рівняння $ax^2 + 3 = a - 3x$.

Вибрати правильну відповідь

- ☐ При $a \geq 0$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a+3}{a}$, при $a < 0$ розв'язків немає
- ☐ При $a \leq 3/2$ $x = -1$, при $a > 3/2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a-3}{a}$.
- ☐ При $a = 0, a = 3/2$ $x = -1$,
при $a \neq 0, a \neq 3/2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{a-3}{a}$.
- ☒ При $a = 0$ $x = -1$, при $a \neq 0$ $x_1 = \frac{a-3}{a}$ и $x_2 = \frac{a+3}{a}$.

Вправа 59. Розв'язати при всіх b рівняння $2x^2 + b = bx^2 - 2x$.

Вибрати правильну відповідь

- ☐ При $b \leq 2$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{b-2}{b}$, при $b > 2$ розв'язків немає
- ☐ При $b \geq 1$ $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{b}{b-2}$, при $b < 1$ розв'язків немає
- ☐ При $b = 1$ $x = -1$, при $b \neq 1$ $x = \frac{b}{b-2}$
- ☐ При $b \neq 1, b \neq 2$ $x_1 = -1, x_2 = \frac{b}{b-2}$, при $b = 1$ и $b = 2$ $x = -1$

3.5. Практична перевірка результатів дослідження

Здійснивши аналіз різних видів джерел наукової, педагогічної, методичної літератури та Інтернет-ресурсів з теми дослідження, була розглянута методика розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі.

З метою перевірки доцільності та ефективності проведення факультативних занять по розв'язуванню рівнянь та нерівностей з параметром було проведено практичну перевірку знань учнів.

В процесі навчання на етапі закріплення знань учнів було застосовано систему вправ. На факультативних заняттях учні ознайомились з поняттям параметра, засвоїли методи та алгоритми розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром у відповідності з рівнем складності.

Практична перевірка відбувалася на базі Дубенського ліцею №1 Дубенської міської ради Рівненської області з учнями 9-х класів.

Організація навчання на основі запропонованих вправ, а також відповідне дидактичне забезпечення дозволяють інтенсифікувати процес навчання розв'язування задач, скоротити час, який відводиться програмою на

вивчення тем. Одержаний резерв часу використовується для узагальнення та систематизації матеріалу.

Проаналізувавши результати шкільної олімпіади з математики, державної підсумкової атестації, можна стверджувати, що проведені факультативні заняття з даної теми сприяють кращому засвоєнню математичного матеріалу, дають можливість розв'язувати більш складні задачі, розвивають логічне та аналітичне мислення учнів.

Проведення факультативних занять з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі відіграє важливу роль у сучасному навчальному процесі.

Висновки

В даній магістерській роботі була розглянута методика розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром, методи розв'язування, були розв'язані найпоширеніші типи рівнянь і нерівностей з параметром, розглядалися складні випадки розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром.

Серед методів розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром користуються аналітичним (із використанням формул, властивостей функцій) та графічними методами.

Для того, щоб набути міцних та глибоких знань, оволодіти способами розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром, дуже важливо розв'язати їх достатню кількість, щоб систематизувати та узагальнити знання по даній темі. Практична перевірка підтвердила ефективність розробленої програми факультативних занять з розв'язування рівнянь та нерівностей параметром в основній школі, що спрямована на розвиток здібностей учнів.

Поставлені завдання дослідження були виконані:

- проаналізовано літературу по темі дослідження;
- описана методика навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з параметром в основній школі;
- систематизовано різні методи і прийоми розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі, проаналізовано ефективність використання їх на практиці, визначено основні недоліки та шляхи їх усунення;
- розроблено програму факультативних занять з розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром в основній школі;
- проведено практичну перевірку по темі дослідження;
- розроблено методичні рекомендації щодо проведення факультативних занять.

Отже, матеріал даної магістерської роботи сприяє систематизації, поглибленню і розширенню знань, навичок та умінь по темі «Методика навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності з параметром в основній

школі» та їх цілеспрямованому використанні під час виконання різних типів завдань.

Список використаної літератури

1. Амелькін В.В., Рабцевіч В.Л. Завдання з параметрами. М.: Асар, 1996. 194 с.
2. Балан В. Г., Лавренюк В.І., Шарова Л.І. Квадратний тричлен з параметром на вступних іспитах. Київ: 1999. 80 с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Київ: Освіта, 2015. 288 с.
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Київ: Освіта, 2021. 256 с.
5. Бродський Я. С. Тести для самостійної роботи та контролю знань. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. 160 с.
6. Василевський А. Б. Завдання для позакласної роботи з математики. Мн: Народна освіта, 1988. 176 с.
7. Глаголева Н. Ю. Задачі по математиці для вступників у вузи. Київ: 2009. 274 с.
8. Глобін О. І., Єргіна О. В., Сидоренко П. Б., Комаренко О. В. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики 9 клас. Київ: Центр навчально-методичної літератури, 2013. 165 с.
9. Горнштейн П. І., Полонский В. Б., Якір М.С. Задачі з параметрами. Київ: 2006. 150 с.
10. Дорофеев Г. В. Решение задач, содержащих параметры. Москва: Перспектива, 2000. 38 с.
11. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
12. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Київ: Генеза, 2021. 280 с.
13. Лікоть В. В. Задачі з параметрами. Київ. 2007. 54 с.
14. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.

15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. заклад. Харків: Гімназія, 2017. 320 с.
16. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. Москва: Экзамен, 2009. 286 с.
17. Мордкович А. Г. Алгебра й початки аналізу. Київ, 2008. 256 с.
18. Навчальна програма для загальноосвітніх навч. закладів. Математика 5-9 кл.
URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita>
19. Никонов Е. Ю. Параметр. Самара. 1998. 80 с.
20. Новосьолов С. І. Спеціальний курс елементарної алгебри. Москва. 1997. 120 с.
21. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. Москва: Илекса. 2009. 212 с.
22. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. 2 вид. доповн. і переробл. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.
23. Субханкулова С. А. Задачі з параметрами. Москва: Илекса, 2010. 208 с.
24. Ткачук В. В. Математика – абітурієнтові. Київ: 1994. 130 с.
25. Харитонов Л. О. Параметри. Математика в школах України. 2008. № 29. С. 27-30.
26. Ципкін А. Г., Пінський А. І. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. Москва: Наука, 2004. 576 с.
27. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика : интенсивный курс подготовки к экзамену. Москва: Рольф, 1997. 384 с.
28. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Уч. пособ. для 10 кл. ср. школы . Москва: Просвещение, 1989. 252 с.
29. Ястребинецький Г. А. Рівняння і нерівності, що містять параметри. Київ. 2005. 208 с.
30. Ястребинецький Г. А. Уравнения с параметрами. Москва: Просвещение, 1999. 128 с.