Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня
на тему:

Методика розв’язування геометричних задач координатно-векторним методом

Виконала:
студентка II курсу магістратури
групи М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
заочної форми навчання
Людмила Петрівна ДОМАНСЬКА

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент
Ольга ПАВЕЛКІВ

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад.Ст. Дем'янчука
Юрій ЛОТЮК

Рівне – 2024

ЗМІСТ

Вступ

Завдання математики формувати здатність логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, уміння застосовувати математичні методи у процесі розв’язування навчальних і практичних задач, оцінювати правильність і раціональність розв’язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, формувати ставлення до математики як складової загальної культури людини. Невід’ємною частиною математичної освіти є навчання учнів розв’язувати задачі.

В геометрії застосовують різні методи розв’язування задач - це синтетичний (суто геометричний) метод, метод перетворень, векторний, метод координат та інші. Деякі задачі, іноді доволі складні, зручно розв’язувати за допомогою координатно-векторного методу. Цей метод поєднує в собі два методи розв’язування задач: векторний та координатний.

Він зручний тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак, властивостей фігур, немає потреби в побудові складних малюнків, але є й недолік - іноді великий обсяг обчислень.

Досить часто знання про координати та вектори дають можливість спростити розв’язок задачі, уникнувши складних геометричних конфігурацій, обґрунтувань та доведень.

Координатно-векторний метод є досить актуальним і сьогодні, адже знаходить своє застосування в різних галузях науки та суспільного життя. За допомогою методу координат будь-яка геометрична задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізувати.

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами. [12]

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, об'єднуючись, вони дають «багаті плоди», які не могли б дати, залишаючись розділеними [2, с.32].

Координатний метод розв’язування задач є найдієвішим та найзручнішим.

Можна стверджувати, що навчання застосовувати координати до розв’язування задач є невід'ємною частиною шкільного курсу геометрії. В деяких випадках метод координат дає можливість будувати доведення і розв’язувати багато задач більш раціонально, красивіше, ніж суто геометричними способами. Векторний метод дуже поширений серед методів розв’язання задач. Але в шкільному курсі математики ця тема вважається складною і вивчається дуже стисло.

Застосування методу координат передбачає виконання робіт пов’язаних з перетворенням виразів, розв’язуванням рівнянь або систем рівнянь. Тому при розв’язувані задач цим методом необхіді навички алгебраїчних обчислень.

Цим і визначається **актуальність** обраної теми: Методика розв’язування геометричних задач координатно-векторним методом.

Метод координат – це метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри з застосуванням системи координат. У 1637 році цей метод став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Відкриття Декарта дало науці можливість створити своєрідний словник для перекладу геометричних задач мовою алгебри з подальшою можливістю використовувати рівняння і тотожні перетворення виразів для розв'язування суто геометричних проблем. Суть методу полягає в тому, що кожній точці на площині за певним правилом ставляться у відповідність числа, які і називають координатами точки. Це дає можливість за допомогою чисел засобами алгебри робити дослідження властивостей фігур.

Метод координат на площині знаходить широке застосування у розв’язанні задач з планіметрії. Це досить потужний засіб, оволодіння яким дає змогу набагато легше розв’язувати планіметричні задачі без використання різних теорем (теорема синусів, косинусів та ін.).

Питанням використання векторного та координатного методу при розв’язанні задач займалися Кушнір І.А., Майоров В.М., Крайзман М.Л., Готман Е.Г., Кирилов А.А., Гельфанд І.М., Філіпповський Г.Б. [9, 22, 47]

Мета дослідження - описати методичні особливості вивчення й використання координатного, векторного та координатно-векторного методів у шкільному курсі геометрії.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів розв’язувати геометричні задачі.

Предмет дослідження методика вивчення координатного, векторного та координатно-векторного методів у курсі геометрії.

Завдання дослідження:

1. Здійснити огляд науково-методичної літератури із зазначеної проблеми.
2. Розглянути історію розвитку координат і векторів.
3. Проаналізувати чинні програми та шкільні підручники щодо вивчення координатно-векторного методу.
4. Дослідити методичні особливості вивчення декартових координат у курсі стереометрії.
5. Дослідити методичні особливості вивчення векторів у курсі стереометрії.
6. Показати застосування даного методу на прикладі розв’язування математичних задач з геометрії.
7. Опрацювати завдання для підготовки до НМТ.
8. Здійснити перевірку ефективності дослідження.

В основі дослідження була висунута **гіпотеза**: вивчення координатного та векторного методів у школі буде більш ефективним, якщо у курсі геометрії ознайомити учнів із структурою цих методів і використовувати систему завдань для формування вмінь застосування методів.

Для досягнення поставленої мети та розв’язання завдань використано низку теоретичних та емпіричних методів дослідження: теоретичні – аналіз

навчально-методичної літератури з теми дослідження, порівняння, систематизація матеріалу;
емпіричні (тестування, спостереження; експериментальна перевірка).

Практичне значення дослідження полягає в тому, що матеріали роботи можуть бути використані вчителями математики для вивчення теми в закладах загальної середньої освіти, підібрані задачі можна застосовувати для перевірки та контролю знань учнів.

Апробація. Основні тези наукової роботи обговорювалися на наукових засіданнях кафедри, були опубліковані у збірнику «Матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Наука, освіта, суспільство очима молодих», яка відбулася 17 травня 2024 р. у РДГУ.

Структура дослідження. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Розділ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історія виникнення та розвитку системи координат

Історія виникнення координат розпочинається давно. Ще в стародавньому світі люди спостерігали за світилами на небі, вивчали Землю, а потім складали зоряні й географічні карти, схеми.

Уперше поняття координат (астрономічних та географічних, які називалися широтою і довготою) зустрічалося у працях давньогрецьких учених Ератосфена (ІІІ ст. до н.е.) та Гіппарха (ІІ ст. до н.е.). Саме Гіппарх запропонував поділити земну кулю на карті паралелями та медіанами і ввести географічні координати – довготу та широту.

Відомий давньогрецький астроном, географ та математик Клавдій Птолемей уже на той час використовував довготу та широту як географічні координати. Ідеї прямокутних координат у вигляді квадратної сітки (палетки) було знайдено у гробниці батька Рамзеса ІІ – фараона Сеті І (який помер близько 1279 р. до н. е.). За допомогою палетки можна було переносити зображення у збільшеному вигляді. Починаючи з XV ст., прямокутну сітку також використовували й художники епохи Відродження.

З часом метод географічних координат було удосконалено і трансформовано на інші системи координат точок на площині та в просторі.

Французький учений Нікола Орем (1323 – 1382) покривав площину прямокутною сіткою і таким способом вивчав геометричні фігури, досліджуючи співвідношення лінійних розмірів у двох взаємно перпендикулярних напрямах, які відповідають сучасним поняттям абсциси і ординати [9, с.167].

Ідея застосування координат у геометрії виникла значно пізніше. Вона належить математику XVII ст. Рене Декарту. Основоположниками методу координат вважають французьких математиків П’єра Ферма і Рене Декарта. Метод Ферма (1629, опублікований у 1679) ґрунтувався на взаємно однозначній відповідності між точками площини і парами чисел $(x; y)$. Його система координат складалася з однієї прямої (сучасна вісь абсцис) і початкової точки N (тепер початок координат). Положення, наприклад, точки P на деякій кривій визначалося відстанями A (сучасна абсциса *x* точки P) і E (сучасна ордината *y* точки P) (рис. 1.1.).

Ферма розглядав лише додатні значення *x* і *y*, тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта (будь-яка з чотирьох частин площини, на які її ділять дві взаємно перпендикулярні прямі).

Прямі PZ і QM – паралельні, але не обов’язково перпендикулярні прямій NM. Ферма встановив, що рівняння першого степеня описують прямі, а рівняння другого степеня – конічні перерізи.

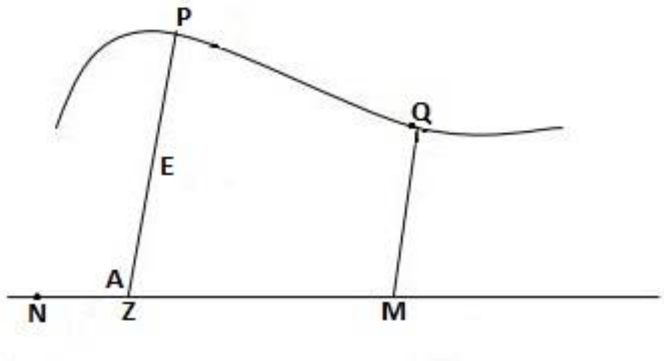


Рис. 1.1

У Декарта система координат складалася з однієї фіксованої вісі (абсцис), але, на відміну від Ферма, він розглядав точки з додатними і від’ємними ординатами. За допомогою методу координат Декарта подавалася геометрична інтерпретація від’ємних чисел. У такий спосіб значення від’ємних і додатних чисел зрівнювалися.

Свою роботу Ферма опублікував раніше Декарта, алепрямокутна система координат називається *декартовою системою*.

В червні 1637 року в місті Лейден (Нідерланди) з’явилася праця Декарта «Міркування про метод, що дозволяє спрямовувати розум і відшукувати істину в науках». Ця праця мала три частини. Одна з частин називалась «Геометрія». Вона здійснила великий переворот в математиці [47, с.22]. Саме в ній Рене Декарт виклав універсальний метод розв’язування математичних задач – метод координат, який пізніше склав основу аналітичної геометрії. Згідно цього методу алгебраїчні задачі розв'язуються засобами геометрії. Відкриття Декарта дало можливість створити спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази та співвідношення. [26, с. 50]

В своїй праці Декарт уперше запропонував позначення змінних і степенів, а також став подавати рівняння у вигляді, коли в правій частині стоїть нуль.

Проте «Геометрія» Декарта виявилася важкою для читання і розуміння. Її неодноразово коментували і доповнювали (Ф.Дебон, Ф.Скоотен, Дж.Валліс, Й.Бернуллі та інші).

У 1692 році Й. Бернуллі ввів термін «декартова геометрія». Тоді праця Ферма про його систему координат не була відома широкому загалу. Тому деякі поняття, що стосуються методу координат називають декартовими: «декартові координати», «декартова система координат», «декартове рівняння», «декартова площина».

Термін «аналітична геометрія» з'явився 1671 р. (як назва книги І.Ньютона). Терміни «абсциса», «ордината» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. Їх запропонував в 70–80-х роках XVII ст. Готфрід Лейбніц, після чого вони стали загальновживаними. Лейбніц запропонував абсцису разом з ординатою називати координатами. [18, с. 9]

Загальновживаними ці терміни стали лише з середини 18 століття. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670), а термін «вісь ординат» – значно пізніше Г. Крамер (1750). Початок координат спочатку називали початком абсцис, а в 1679 р. Філіп де Лагір використав термін «початок». Р. Декарт увів традицію невідомі величини позначати останніми буквами алфавіту, а відомі – першими.

Декарт також висунув припущення про можливість застосування координатного методу не тільки на площині, а й у просторі, проте саме цій ідеї не надав подальшого розвитку.

У 1715 р. Йоган Бернуллі означив просторові координати *x, y, z* як перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини.

Першим, хто широко використовував координати у просторі, став французький математик Алексіс Клод Клеро. У праці «Дослідження ліній двоякої кривизни» він додав у систему координат третю координату [21, с. 243].

Ідею координат у тривимірному просторі розвинув Л. Ейлер у 18 століття.

У роботі Г. Крамера «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) систематизовано, узагальнено і доповнено багато з результатів попередників. Г. Крамер першим використовував систему координат, яка мала дві рівноправні вісі [2].

Видатний математик та вчений Ісаак Ньютон спирався на координатний метод у своїх роботах з математичного аналізу та геометрії, у яких продовжив дослідження Декарта і Ферма. Зокрема, Ньютон увів класифікацію кривих 3-го порядку, а для кожної кривої 2-го порядку визначив такі характеристики, як діаметр, вісь симетрії, вершини, центр, асимптота, особливі точки тощо. [18, с. 25].

Отже, у 1637 році побачила світ головна математична праця Рене Декарта «Міркування про метод». У цій книзі викладалася аналітична геометрія, створення якої дало змогу перевести дослідження геометричних властивостей кривих і тіл на алгебраїчну мову, тобто аналізувати рівняння кривої в деякій системі координат. Координатний метод став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Завдяки координатам учені отримали універсальний спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення [15, с. 82].

1.2. Історичний розвиток та значення векторів

Поняття вектора, правила оперування з векторами та принципи їх застосування подолали тривалий шлях. [45]

Математики часів Піфагора та математики більш пізніх часів намагалися зводити вирішення питань арифметики й алгебри до розв’язування задач геометричним шляхом. Так було покладено початок геометричній теорії відношень Евдокса (408–355 рр. до н. е.), а пізніше – геометричної алгебри.

Одним з фундаментальних понять сучасної математики є вектор (в перекладі з латині означає «той, що несе»), який знайшов визнання і застосування в інших розділах фізики: в кінематиці, статиці, динаміці точки і динаміці системи, а також став одним із основних понять векторної алгебри, векторного аналізу, теорії поля, тощо.

Вектори доступні в математиці стали в 40-х роках XIX століття в роботі німецького математика, фізика і філолога Германа Грассмана.

Незалежно від Грассмана до поняття вектора прийшов ірландський математик Уільям Гамільтон.

Гамільтон ввів терміни «скаляр» (від латинського слова «skala» — сходи, шкала) та «вектор» (від латинського слова «vector» — той, що переносити). Поява терміну «вектор» відбулась у 1845 році під час роботи над побудовою числових систем та узагальненням комплексних чисел. Основи векторного аналізу він виклав у праці «Лекція про кватерніони». Гамільтон широко застосовував векторну алгебру для розгляду нових видів «чисел» — кватерніонів і для вивчення питань механіки. Понад 8 років Гамільтон витратив на те, щоб переконатися, що для комплексних чисел не можуть одночасно справджуватись сполучний і розподільний закони для додавання та множення.

У 1880-ті роки вийшли «Елементи векторного аналізу» Гіббса, а потім Гевісайд (1903) надав векторному аналізу сучасного вигляду.

Перші застосування векторів здійснив фізик Джеймс Максвелл у трактаті з електромагнетизму.

Поступово була створена загальна теорія векторного простору, яка відіграє важливу роль в сучасній фізиці. Наприклад, деякі фізичні величини, такі як, сила, швидкість, прискорення і т.п., зручно представляти напрямленими відрізками та виконувати різноманітні математичні дії над ними.

У лінійній алгебрі вектором називається елемент лінійного простору, що відповідає загальному означенню. Вектори можуть бути різної природи: напрямлені відрізки, матриці, числа, функції та інші. Таким поняттям вектору користуються під час розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а також при роботі з лінійними операторами. Зі скалярним добутком пов’язують поняття кута між векторами, а з нормою – поняття довжини вектору.

В XIX ст. в результаті синтезу ідей з фізики та математики було створене векторне числення. Поєднання методу координат з векторним численням дало векторно-координатний метод для розв’язування геометричних задач.

Цей метод став джерелом для плідних геометричних ідей та аналогій в алгебрі і аналізі. [45, с. 291].

Лише в XX ст. вектор як математичне поняття почало проникати в навчальну математичну літературу, а з 60-х років – у шкільні підручники.

Окрім застосувань у математиці, поняття вектора має велике прикладне значення, оскільки фізичні величини, такі як сила, переміщення , швидкість, прискорення характеризуються напрямом, отже описується за допомогою векторів [45].

За допомогою векторів описуються такі геометричні поняття: напрям, кут, паралельність, перпендикулярність.

Вектори використовують у комп’ютерній графіці для задання напрямку і руху об’єктів на екрані, для обертання об’єктів навколо осей і їх масштабування, побудови світлових ефектів, для моделювання тривимірних об’єктів.

Для опису швидкості, прискорення, падіння предметів, обертання, зіштовхування у моделюванні також використовують вектори.

У статистиці та машинному навчанні вектори використовують для представлення даних, знаходження середніх значень.

Векторні методи застосовуються для навігації роботів, в аерокосмічній індустрії, для розрахунку оптимальних маршрутів та аналізу карт. При обробці зображень вектори використовуються для представлення кольорів, кутів і напрямків, що дозволяє покращити якість.

1.3. Основні положення вивчення декартових координат і векторів згідно діючої програми та шкільних підручників

У школі вивчення координат і вміння застосувати їх для розв'язування математичних задач відбувається в кілька етапів. На першому етапі вводиться основний понятійний апарат, який добре відпрацьовується в 5-6 класах і систематизується в курсі геометрії [5, с. 305].

Важливе значення для підготовки учнів до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які дістають учні 5–6 класів: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов, побудова і аналіз окремих графіків залежностей між величинами. [35]

В 5 класі розглядають поняття «координатний промінь» і показують, як зобразити координатний промінь, натуральні числа на ньому.

Згідно модельної навчальної програми «Математика. 5-6 класи» (автор Істер О.С.) важливе місце займають початкові відомості про метод координат: координатний промінь, пряма, площина, зображення точок за їхніми координатами та навпаки, визначення координат точок за їхнім зображенням [34]

У 6 класі вводять координатну пряму для зображення додатних і від'ємних чисел. Учні усвідомлюють, що число, якому відповідає певна точка на координатній прямій, називають координатою цієї точки і записують A(x).

Поняття про координати точки на прямій і на площині вводять описово на прикладах. Учні вчаться будувати координатну пряму; координатну площину; знаходити координати точки на координатній площині та будувати точки за її координатами.

Система вправ має бути спрямована на формування вміння розв'язувати задачі на визначення положення точки на координатній прямій і площині [43, с. 306].

У 7 класі учні ознайомлюються з основами геометричної науки – означеннями, теоремами, основними методами доведення теорем, основними задачами на побудову. Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута.

У 8 класі вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину, градусну міру кута, площу. Вводиться одне з найскладніших понять шкільного курсу — поняття площі. Вивчення формул площ фігур дає можливість розв’язувати низку прикладних задач.

У 9 класі подається рівняння прямої, кола, виводяться формули довжини відрізка, координат середини відрізка, формується поняття про метод координат, який застосовується до доведення теорем та розв’язування задач. До відомих учням скалярних величин долучаються векторні величини. Розглядаються рівні, протилежні, колінеарні вектори. [35]

Вивчення теми «Координати на площині» (9 клас) розпочинається з повторення і систематизації знань і умінь, які учні отримали у попередніх класах. Це можна зробити за допомогою таких запитань і завдань:

що таке вісь координат; чим визначається положення точки на осі координат; як називають число, за допомогою якого визначається положення точки на осі координат; як записати точку, задану на прямій координатою; позначте на осі координат точки $A(2)$, $B(-2)$, $C(0{,}5)$; запишіть точки, позначені на осі координат, за допомогою їх координат; що таке координатна площина; чим визначається положення точки на координатній площині; як називають координати точки на координатній площині; як записують координати точки на площині; зобразити на координатній площині точки $A(2;-3)$, $B(0;-1)$, $C(3;-3)$; навести приклади застосування координат.

Застосування методу координат до розв'язування задач відбувається в курсі геометрії 9 класу. Для цього учнів знайомлять з основними етапи застосування методу, а потім на прикладі завдань показують застосування методу координат.

Згідно навчальної програми Математика. 5-9 класи у 9 класі вивчаються такі теми [35]:

Тема 1. КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ (8 год)

Зміст навчального матеріалу:

Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°.

Тотожності:

sin (180° – α) = sin α;

cos (180° – α) = – cos α.

Координати середини відрізка.

Відстань між двома точками із заданими координатами.

Рівняння кола і прямої.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів:

пояснюють: що таке синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°; рівняння фігури; *як можна задати* на координатній площині: пряму; коло;

формулюють теореми про: відстань між двома точками; координати середини відрізка;

записують та пояснюють: *формули* координат середини відрізка, відстані між двома точками; *рівняння* кола, прямої;

зображують та знаходять на малюнках геометричну фігуру (пряму, коло) за її рівнянням у заданій системі координат;

обчислюють: координати середини відрізка; відстань між двома точками, заданих своїми координатами;

доводять теорему про: відстань між двома точками; координати середини відрізка;

застосовують вивчені формули й рівняння фігур до розв’язування задач.

Тема 2. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ (*12 год*)

Зміст навчального матеріалу:

Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів.

Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів:

наводять приклади: рівних, протилежних, колінеарних векторів;

пояснюють: *що таке*: вектор; модуль і напрям вектора; одиничний вектор; нуль-вектор; колінеарні вектори; протилежні вектори; координати вектора; сума і різниця векторів; добуток вектора на число; *як задати* вектор; *як відкласти* вектор від заданої точки; *за якими правилами знаходять*: суму векторів; добуток вектора на число;

формулюють: *означення*: рівних векторів; скалярного добутку векторів; *властивості*: дій над векторами;

зображують і знаходять на малюнках: вектор; вектор, рівний або протилежний даному, колінеарний із даним, у т. ч. за його координатами; вектор, що дорівнює сумі (різниці) векторів, добутку вектора на число;

обчислюють: координати вектора, суми (різниці) векторів, добутку вектора на число; довжину вектора, кут між двома векторами;

обґрунтовують: рівність, колінеарність векторів;

застосовують вивчені означення й властивості до розв’язування задач.

Продовження вивчення координат відбувається в 10 класі під час вивчення теми «Координати та вектори у просторі». Аналогічно прямокутній системі координат на площині, яка вивчалася в курсі геометрії 9 класу, вводяться прямокутні координати у просторі. Ця тема дозволяє повторити матеріал 9 класу і застосовувати координатний метод у випадку простору.

В курсі стереометрії 10 класу розглядається тема «Координати і вектори», в якій повторюється матеріал із геометрії і узагальнюються знання про векторний і координатний метод у просторі.

Згідно навчальної програми (рівень стандарту) у 10 класі вивчається тема [36]:

Тема 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ (10 годин)

Зміст навчального матеріалу:

Прямокутні координати в просторі.

Координати середини відрізка. Відстань між двома точками.

Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів:

користуються аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі;

усвідомлюють важливість векторно-координатного методу в математиці;

виконують операції над векторами;

застосовують вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин;

знаходять відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин;

використовують координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.

У класа профільного рівня зміст навчального матеріалу вивчається більш поглиблено.

Згідно навчальної програми (профільний рівень) у 10 класі вивчається тема [38] :

Тема 4. КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ (22 години)

Зміст навчального матеріалу:

Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками.

Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.

Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора.

Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач.

Найпростіші геометричні місця точок простору.

Рівняння площини, сфери.

Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів:

формулюють означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу;

розрізняють векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори;

пояснюють та записують зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими.

класифікують взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі;

зображують на рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число;

знаходять на рисунку та зображують напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини;

аналізують та досліджують у координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення;

обґрунтовують перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток векторів;

характеризують найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач;

застосовують формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв’язування задач;

розв’язують вправи, що передбачають: знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.

Отже, основною метою вивчення координат в школі є формування поняття про координати точки на прямій і площині, вміння знаходити точку за її координатами і розв'язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, використовувати аналогії між векторами й координатами на площині та впросторі для розв'язування задач [43, с.306].

Особливості викладання даної теми згідно діючих шкільних підручників

Шкільні підручники рекомендовані Міністерством освіти і науки України (наказ МОН від 03.12.2021 р. №1306)

1) Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручн. для 9 класу закладів заг. сер. освіти. Харків: Гімназія, 2021. 255 с. [33]

Параграф «Декартові координати на площині» є третім для вивчення у даному підручнику і містить 4 пункти: Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка; Рівняння фігури. Рівняння кола; Рівняння прямої. Кутовий коефіцієнт прямої. Метод координат розглядається окремо після кутового коефіцієнта прямої.

Параграф «Вектори» є четвертим і містить 5 пунктів: Поняття вектора; Координати вектора; Додавання і віднімання векторів; Множення вектора на число; Скалярний добуток векторів.

У пунктах викладено теоретичний матеріал. Виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. До кожного пункту дібрано вправи для самостійного розв’язування, приступати до яких слід лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Параграфи завершується рубрикою ЗАВДАННЯ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ і головні відомості параграфа.

У параграфі 3 передбачено знаходження відстані між точками на площині, вивчення рівнянь прямої і кола на площині. Учні мають засвоїти поняття про рівняння фігури, усвідомити зв'язок між геометричним образом на координатній площині і його аналітичним заданням. Вивчення цієї теми має на меті розуміння і засвоєння методу координат.

Вивчаючи параграф 4 учні дізнаються, що вектори використовують не тільки у фізиці, а й у геометрії, навчаться додавати й віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити кут між двома векторами, застосовувати властивості векторів для розв’язування задач.

2) Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручн. для 9 класу з поглибл. вивченням математики закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2021. 335 с.

Параграф «Декартові координати на площині» є четвертим із семи поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 5 пунктів: Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні; Рівняння фігури; Загальне рівняння прямої; Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки; Метод координат.

Параграф «Вектори» наступний і містить теж 5 пунктів: Поняття вектора; Координати вектора; Додавання і віднімання векторів; Множення вектора на число. Застосування векторів до розв'язування задач; Скалярний добуток векторів. [32]

По структурі підручники аналогічні. Додатковим матеріалом порівняно з рівнем стандарту є рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки; умови паралельності і перпендикулярності двох прямих; формула відстані від точки до прямої; також подана формула Лейбніца.

3) Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія: підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Оріон, 2022. 223 с.

Увесь матеріал підручника поділено на п'ять розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші означення і властивості геометричних фігур виділені жирним шрифтом. Після кожного розділу розміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему. Задачі підручника мають чотири рівні складності.

Розділ «Метод координат на площині» є першим і складається з 6 параграфів: Декартові координати на площині; Координати середини відрізка; Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°; Основні тотожності для sin α, cos α, tg α; Поняття рівняння фігури. Рівняння кола; Рівняння прямої.

Кожний параграф містить теоретичну частину, рубрику «Дізнайтеся більше» і «Пригадайте головне», задачі різної складності. [7]

Одна з особливостей підручника – це доступність навчальних текстів, можливість самостійно їх опрацювати.

Матеріал параграфу ґрунтується на понятті геометричного місця точок. Кожну точку можна задати її координатами в прямокутній декартовій системі координат. Установивши залежність між абсцисами й ординатами точок фігури, одержимо рівняння фігури. Основна увага під час вивчення матеріалу звертається на формування вмінь учнів розв'язувати задачі двох видів: 1) знаходити рівняння геометричної фігури за даними її властивостями; 2) знаходити властивості геометричної фігури за даним її рівнянням.

В останньому пункті параграфа учнів знайомлять з методом координат. Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ [7, с.125].

4) Істер О.С. Геометрія: підручник для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. 2-ге видання, переробл. Київ: Генеза, 2022. 239 с.

Підручник містить 5 розділів, які поділені на параграфи. Кожний парграф містить теоретичний матеріал, завдання, приклади розв'язування задач з використання вивченого теоретичного матеріалу, запитань для самоперевірки. Перевірити знання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». У підручнику є велика кількість вправ як для виконання у класі, так і для домашнього виконання.

Розділ «Метод координат на площині» є першим і складається з 5 параграфів: Координатна площина; Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°. Тригонометричні тотожності; Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами; Рівняння кола; Рівняння прямої.

2 розділ «Вектори на площині» містить 5 параграфів: Вектор. Модуль і напрям вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів; Координати вектора;

Додавання і віднімання векторів; Множення вектора на число; Скалярний добуток векторів. [18]

Після кожного розділу наведено вправи для повторення.

У попередніх класах учні вивчали планіметрію - геометрію на площині. Починаючи з 10-го класу, вивчають геометрію у просторі. Її називають стереометрією. Отже, в 9 класі учні знайомились з методом координат на площині, а вже в 10 класі вивчають координати, вектори у просторі.

У 10 класі розгляд теми «Координати і вектори у просторі» дозволить повторити навчальний матеріал із планіметрії і узагальнити знання про векторний і координатний метод у просторі.

Основні підручники рекомендовані Міністерством освіти і науки України, для використання в освітньому процесі у 5-11 класах закладів загальної середньої освіти

5) Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Харків: Гімназія, 2018. 240 с.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу слід звертати на текст, який надруковано жирним шрифтом, жирним курсивом і курсивом; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі.

Координати та вектори в просторі є останнім, четвертим параграфом підручника і поділяється на 7 пунктів: Декартові координати точки в просторі; Вектори в просторі; Додавання і віднімання векторів; Множення вектора на число. Гомотетія; Скалярний добуток векторів; Геометричне місце точок простору. Рівняння сфери; Рівняння площини.

У пункті «Множення вектора на число. Гомотетія» показано розв’язання задачі за допомогою координатного методу. [31]

В наступному пункті учням дається завдання самостійно розв’язати наведену задачу методом координат.

Завершується параграф рубрикою «Головне в параграфі» і вправами для повторення курсу геометрії 10 класу.

6) Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: (проф. рівень): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2019. 368 с.

Зміст даного підручника дещо відрізняється від попереднього.
Матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт, проектної діяльності, графічні роботи тощо.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень: вправи початкового рівня; вправи середнього рівня; вправи достатнього рівня і вправи високого рівня. Наприкінці кожного параграфа в рубриці «Перевірте свою компетентність» є тестові завдання, завдяки яким можна перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Підручник має 4 розділи, кожен розділ поділений на параграфи.

Розділ «Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі» є останнім четвертим у підручнику і складається з 7 парграфів: Прямокутні координати у просторі; Вектори у просторі. Дії над векторами; Координати вектора. Дії над векторами, що задані координатами; Скалярний добуток векторів; Найпростіші геометричні місця точок у просторі. Рівняння площини і сфери; Координатний і векторний методи розв’язування задач; Перетворення у просторі. [21]

В даному розділі учні отримують знання про прямокутну систему координат, координати вектора у просторі, розглядають задачу на застосування координатного методу - знаходження рівняння площини, заданої трьома точками, застосовують векторний метод до розв’язування задач.

В кінці розділу є ряд вправ для повторення даного розділу, які розподілені згідно матеріалу кожного параграфа.

РОЗДІЛ 2. Методичні особливості вивчення координат та векторів в шкільному курсі геометрії

2.1. Координати на площині та у просторі

В 5 класі за програмою НУШ учні ознайомилися з поняттям про промінь, про пряму, про площину, вивчали координатний промінь, координати точки, креслили координатний промінь, позначали точки на ньому.

В 6 класі учні вивчали координатну пряму, координатну площину, будували на координатній площині точки за їхніми координатами і навпаки.

В 9 класі розширюються знання про координатну площину.

Пряму, на якій вибрано початок відліку, одиничний відрізок і вказано напрям називають **координатною прямою.**

Число, якому відповідає певна точка на координатній прямій, називають **координатою цієї точки.**

Проведемо дві перпендикулярні координатні прямі *x* і *y*, які перетинаються в точці О. Ці прямі називаються **осями координат** (рис. 2.1.). Точку О називають початком координат. Горизонтальну вісь *x* називають **віссю абсцис**, а вертикальну вісь *y* - **віссю ординат.** Таким чином на площині задано прямокутну систему координат [20, с.125].

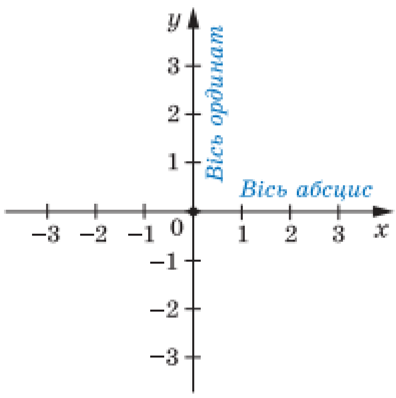


Рис. 2.1.

Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають **координатною площиною.**

Прямокутна система координат на площині вважається заданою, якщо на площині вказано:

а) дві взаємно перпендикулярні прямі, на кожній із яких вибрано додатній напрям - осі ординат (вісь абсцис і вісь ординат). Точка О перетину цих координат називається початком координат;

б) одиничний відрізок.

Кожній точці А площини поставимо у відповідність пару чисел - *координати точки*. Для цього проведемо через точку А пряму, паралельну осі y, вона перетинає вісь x в деякій точці A_x (рис. 2.2.). Абсцисою точки А називають число x, модуль якого дорівнює відстані відточки О до точки A_x. Причому, якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то $x < 0$. Якщо ж точка А належить осі y, то її абсциса дорівнює нулю.

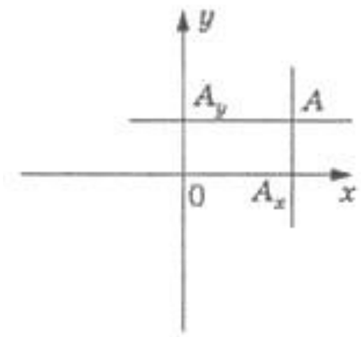


Рис. 2.2.

Проведемо через точку А пряму, паралельну осі x, вона перетне вісь y в деякій точці A_y (рис. 2.2.). Ординатою точки А називають число y, модуль якого дорівнює відстані від точки О до точки A_y. Причому, якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо ж точка А належить осі x, то її ордината дорівнює нулю.

Координати точки записуються у дужках А(x,y). На першому місці пишуть абсцису точки, а на другому - ординату.

Осі розбивають координатну площину на чотири області, які називають *чвертями* (рис. 2.3). В межах однієї координатної чверті знаки обох координат зберігаються.

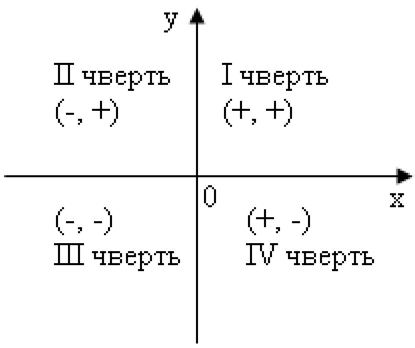


Рис. 2.3

Прямокутна система координат називається ще декартовою системою координат на честь французького математика Рене Декарта.

Отже, **прямокутними координатами точки площини** називаються координати ортогональних проекцій цієї точки на координатні осі, записані у певному порядку.

Прямокутна система координат на площині складається з двох перпендикулярних координатних прямих (осей координат) із спільним початком координат і однаковими одиницями масштабу.

Інколи застосовують й інші системи координат:

1. Декартова система координат. Найпоширеніша система координат у математиці (рис. 2.4.), названа на честь Рене Декарта. Декартова система координат задається початком координат і двома векторами, які визначають напрям координатних осей. Кожна точка простору задається числами, які дорівнюють віддалі від даної точки до координатних площин. Координати декартової системи на площині позначають $(x; y)$.

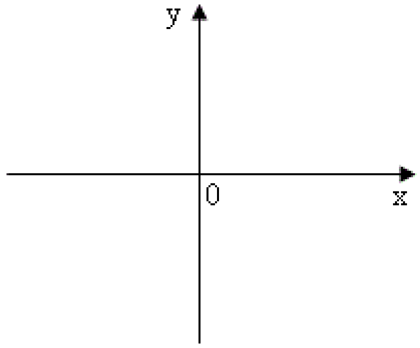


Рис. 2.4.

2. Криволінійна або косокутна система координат. Цю систему називають ще афінною. Назву ввів Л.Ейлер. Основу косокутної системи координат складають три координатні осі *Ox, Oy, Oz* з початком O, які не лежать в одній площині. В криволінійній системі координат осі координат не перпендикулярні і шкали на них не рівнозначні (рис. 2.5). Рене Декарт використовував косокутну систему координат з рівнозначними шкалами, причому лише її першу чверть [7]

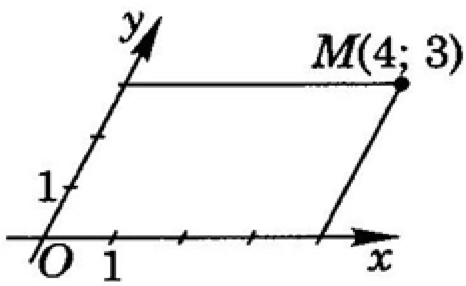


Рис. 2.5

3. Полярна система координат. Положення точки в даній системі задається двома числами: відстанню ρ між точкою та початком координат, і кутом φ між променем, який сполучає початок координат із точкою та обраною віссю (рис. 2.6.)

Декартові та полярні координати точки зв'язані між собою формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi\,; \\ y = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

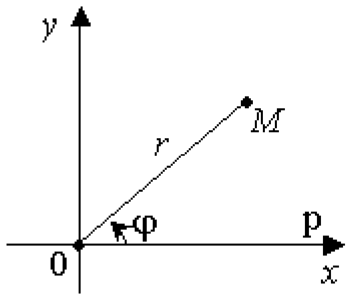


Рис. 2.6

На площині береться числова вісь *Ox*. Початок координат цієї осі (точка O*)* називається полюсом, а сама вісь *Ox* — полярною віссю.

Для визначення положення точки *M* у полярній системі координат вказують відстань від полюса до цієї точки і напрямок, у якому вона знаходиться. Відстань від точки до полюса називається полярним радіусом точки і позначається ρ. Напрямок задається кутом повороту (проти годинникової стрілки) від променя *Ox* до променя *OM.* Цей кут називається полярним кутом точки і позначається φ.

Таким чином, у полярній системі координат положення точки на площині визначають два числа $(\rho; \varphi)$, які називаються полярними координатами точки [9, с. 89].

Аналогічно прямокутні координати можна ввести й у просторі. Прямокутна система координат у просторі складається з трьох взаємно перпендикулярних осей: OX, OY і OZ. Ці осі утворюють тривимірну систему координат, яка дозволяє задавати положення будь-якої точки у просторі трьома координатами *x, y* і *z.* Точку, у якій перетинаються три координатні прямі, позначають буквою O. Її називають **початком координат**. Координатні прямі позначають буквами *x, y* і *z*, їх відповідно **називають віссю абсцис, віссю ординат і віссю аплікат** (рис. 2.7).

Сукупність трьох $(x; y; z)$ попарно перпендикулярних координатних прямих, які перетинаються в точці O називають **прямокутною системою координат у просторі.**

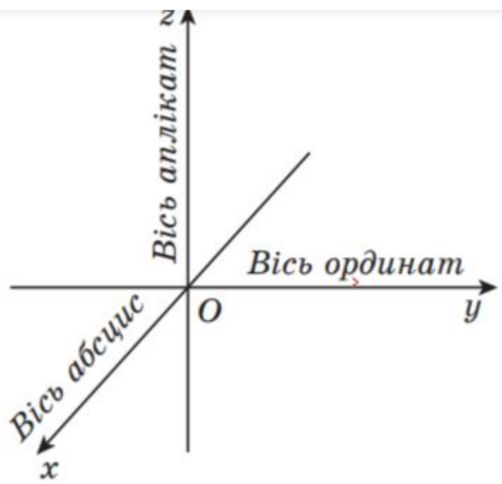


Рис. 2.7

Площини, які проходять через пари координатних прямих *x* і *y, x* і *z, y* і *z*, називають **координатними площинами**, їх відповідно позначають *xy, xz, yz.*

Кожній точці М координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел *(x; y; z)*. Цю трійку чисел називають *координатами точки.*

Які б не були три дійсні числа *x, y, z*, у просторі знайдеться одна цілком визначена точка, абсцисою якої є *x*, ординатою — *y*, аплікатою — *z*.

Щоб побудувати точку М за її координатами *(x, y, z)*, потрібно на осі абсцис відкласти від початку координат напрямлений відрізок OM_x, величина якого дорівнює *x*, на осі ординат — відрізок OM_y, величина якого дорівнює *y*, на осі аплікат — відрізок OM_z, величина якого дорівнює *z*, провести через M_x площину, що перпендикулярна до осі O*x*, через M_y — площину, що перпендикулярна до осі O*y*, через M_z — площину, що перпендикулярна до осі O*z*, і знайти точку М як точку перетину проведених площин (рис. 2.8).

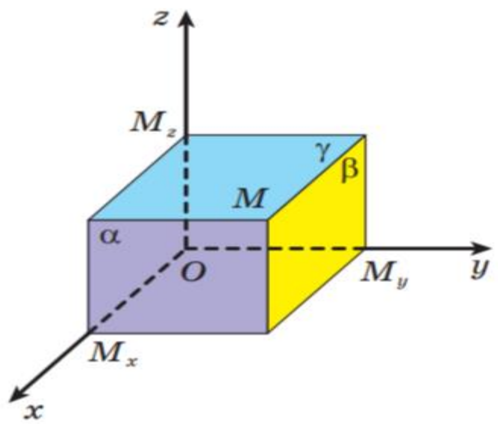


Рис. 2.8

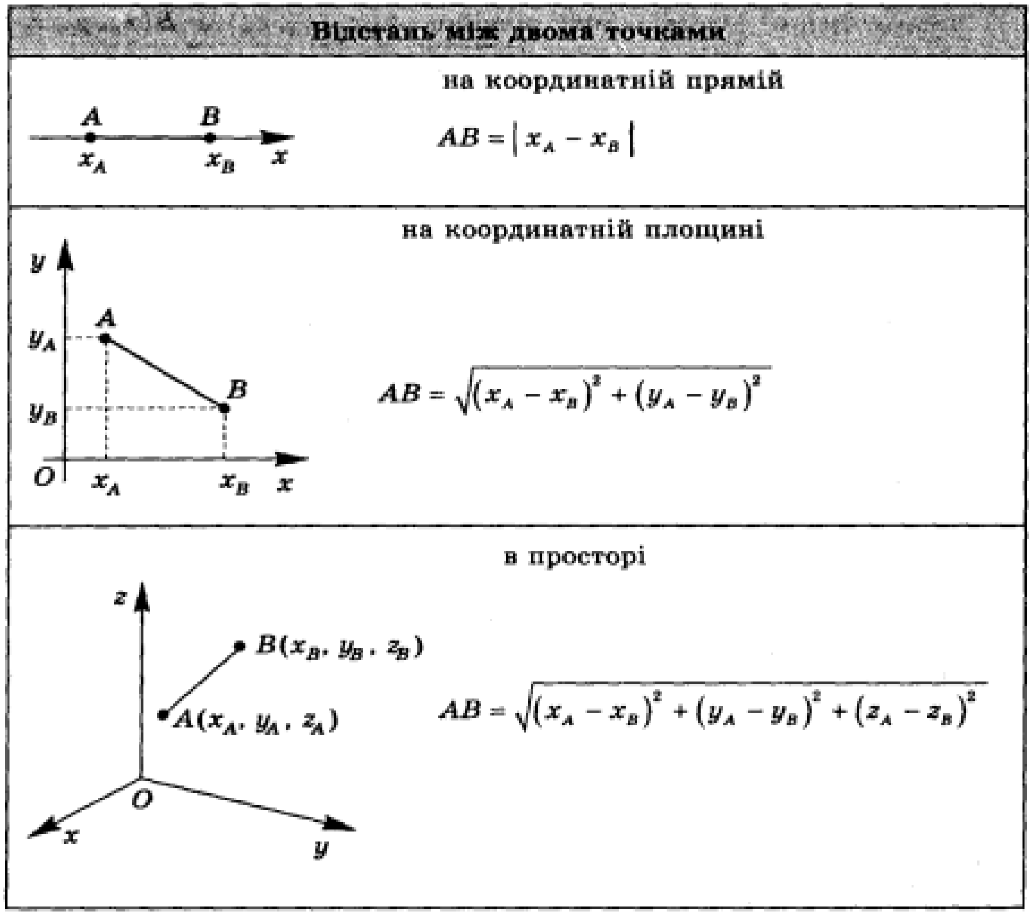
Одним з важливих аспектів у системі координат є обчислення **відстані між точками.**

Нехай задані точки А (x_1; y_1) і В (x_2; y_2), за допомогою формули обчислюємо відстань між двома точками, яка дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Відстань між двома точками простору A(x_A, y_A, z_A) і B(x_B, y_B, z_B) обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Задача. Знайти відстань між точками А (1, 2, 3) і В (4, 6, 8).

Розв'язання: використовуємо формулу для обчислення відстані

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2+(8-3)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$$

Отже, відстань між точками А і В дорівнює 7,07 одиниць.

Координати середини відрізка

Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.

Координати (x_c; y_c) середини відрізка з кінцями (x_a; y_a) і (x_b; y_b) можна знайти за формулами:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Формула для визначення координат середини відрізка з кінцями A(x_a, y_a, z_a) і B(x_b, y_b, z_b) у просторі:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_c = \frac{y_a + y_b}{2} \qquad z_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

Задача.

Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $\mathrm{A}(7; 0; 6)\ \mathrm{B}(4; 2\ 2), \mathrm{C}(-3; 2; 2), D(0; 0; 6)$ - паралелограм.

Розв'язання

Знайдемо координати середини діагоналей AC і BD.

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \qquad y_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \qquad z_1 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(2; 1; 4)$.

Аналогічно $x_2 = \frac{4+0}{2} = 2, \qquad y_2 = \frac{2+0}{2} = 1, \qquad z_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$

Середина діагоналі BD має координати $O_1(2; 1; 4)$.

Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що діагоналі чотирикутника перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

Отже, ABCD – паралелограм [2, с.15].

Задача.

Знайдіть відстань між серединою ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точкою M на його ребрі AD і AB, якщо ребро куба дорівнює 2 см, а $D_1M{:}\,MA_1 = 2$.

Розв'язання

1) Введемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат збігався з точкою A, а ребра AD і AB належали осям Ox і Oy відповідно (рис. 2.9). Тоді: $B(0;2;0)$, $C(2;2;0)$, $A_1(0;0\ 2)$, $D_1(2;0;2)$.

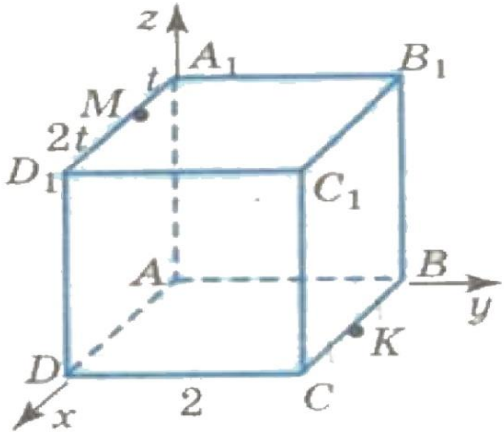


Рис. 2.9

2) K - середина BD. Тоді $K(1;2;0)$.

3) M поділяє D_1A_1 відношенні 2:1. Тоді:

$$x_M = \frac{0\cdot 2+2}{2+1} = \frac{2}{3}, \qquad y_M = \frac{2}{2+1} = 0, \qquad z_M = \frac{2\cdot 2+2}{2+1} = 2.$$

4) $|MK|^2 = \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + 2^2 + 2^2 = \frac{73}{9}$.

Відповідь: $MK = \frac{\sqrt{73}}{3}$ см [2, с. 9].

Щоб використовувати метод координат до розв'язування задач, потрібно вміти задавати фігури рівняннями.

Рівнянням фігури F, заданої на площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок $(x;\ y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F. [33]

Будь-яке рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a, b і R — деякі числа, причому R > 0, є **рівнянням кола** радіуса R із центром у точці з координатами $(a; b)$.

Задача. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра та радіус цього кола.

Розв'язання

Подамо дане рівняння у вигляді $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0$

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола із центром у точці (–3; 7) і радіусом $2\sqrt{2}$.

Відповідь: (–3; 7), $2\sqrt{2}$.

Рівняння прямої. Пряма, яка проходить через початок координат, задається рівнянням $y = kx$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, $k = tg\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі абсцис.

Рівняння прямої в прямокутній системі координат можуть мати вигляд:

1) $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють 0 одночасно;

2) рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки A$(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

3) рівняння прямої з кутовим коефіцціентом k $y = kx + b$.

У просторі також можна розглядати рівняння фігури.

Площину у просторі задають рівнянням вигляду $ax + by + cz + d = 0$, де a, b, c, d – числа, причому a, b, c одночасно не дорівнюють нулю.

Це рівняння називають загальним **рівнянням площини**.

Рівнянням прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Рівняння сфери радіуса R із центром у точці $A(a; b; c)$.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{R}^2.$$

Задача.

Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4; 2; -1), B(-1; 0; 3)$ і $C(0; 0; 1)$.

Розв'язання

Рівняння площини $ax+by+cz+d=0$. Оскільки точки A, B, C належать площині, їхні координати задовольняють її рівняння, тобто

$$4a+2b-c+d=0, \qquad -a+3c+d=0, \qquad c+d=0.$$

Виразимо коефіцієнти a, b, c через d: $c=-d$,

$$a=-2d,$$

$$b=3d.$$

Отже, $-2dx+3dy-dz+d=0$, звідки $2x-3y+z-1=0$ [10, с.22].

Задача.

Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(2; -1)$.

Розв'язання

Маємо $\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-(-4)}{-1-(-4)}$; $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+4}{3}$; $3x-9=-y-4$;

$3x+y-5=0$ - шукане рівняння прямої.

Зауважимо, що правильність складеного рівняння легко перевірити, підставивши по черзі координати обох точок.

Якщо розв'язуючи геометричну задачу оперують координатами окремих точок, рівняннями ліній або поверхонь, то використовують координатний метод.

2.2. Суть координатного методу. Застосування методу координат до розв'язування планіметричних та стереометричних задач

При розв'язуванні геометричних задач можуть використовуватись різні методи.

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів, це метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри з застосуванням системи координат.

Суть методу координат полягає в тому, що задаючи фігури рівняннями і виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо розв’язати геометричну задачу засобами алгебри. І навпаки, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні і аналітичні співвідношення та факти геометрично, таким чином застосовувати геометрію до розв'язування алгебраїчних задач.

Головне при розв’язуванні задач координатним методом є вдалий вибір системи координат, тобто вибір початку координат і напряму осей [39, с.25]; знаходження координат основних точок в обраній системі координат; розв’язування задачі з використанням відповідних співвідношень; з'ясування геометричного змісту кінцевого результату (переклад отриманого результату на мову геометрії).

Порівнюючи цей метод з алгебраїчним, можна сказати, що він істотно спрощує міркування і дозволяє розв'язувати задачі за певним алгоритмом [15, с.17].

Перед застосуванням координатного методу потрібно звернути увагу на формування таких вмінь:

- побудова точки за її координатами;
- знаходження координат точок, які задані умовою задачі;
- обчислення відстані між двома точками, які задані координатами;
- оптимальний вибір системи координат;
- складання рівняння заданих фігур (прямих, площин);
- визначення фігури за її рівнянням.

До типових задач, які розв’язують координатним методом відносять:

1) знаходження відстані між двома точками;

2) знаходження координат середини відрізка;

3) знаходження кута між прямими (векторами);

4) знаходження кута між прямою і площиною;

5) знаходження кута між площинами;

6) знаходження відстані від довільної точки до даної площини.

Для підготовки учнів до розв'язування геометричних задач координатним методом варто пропонувати учням усні вправи на введення системи координат, пов'язаної із даною фігурою. Починати розв’язування задач доцільно з побудови прямокутної системи координат.

Перші задачі на застосування даного методу потрібно підбирати так, щоб при їх розв'язуванні легко вводилася система координат і легко можна було визначити координати точок (найчастіше, це задачі пов'язані з прямокутниками, прямокутними трикутниками, паралелограмами, трапеціями) [28, с. 19].

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіуса 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.

Розв’язання

Нехай АВС – даний рівнобедрений трикутник з основою АС (рис. 2.2.1), точка О – центр описаного кола. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи АС трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (рис. 2.2.2).

Тоді дане коло задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати: $\mathrm{A}\,(-x_0; -3), \mathrm{B}\,(0;\ 5), \mathrm{C}\,(x_0; -3)$, де $x_0 > 0$. Точка С лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: $x_0{}^2 + (-3)^2 = 25$.

Звідси дістанемо: $x_0 = 4$, А (– 4; – 3), С (4; – 3).

За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін: $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}\,(\text{см}),\ \mathrm{AC} = 8$ см.

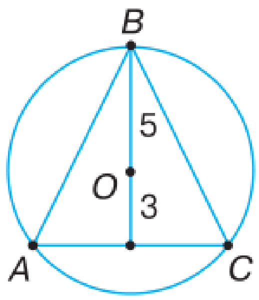


Рис. 2.2.1

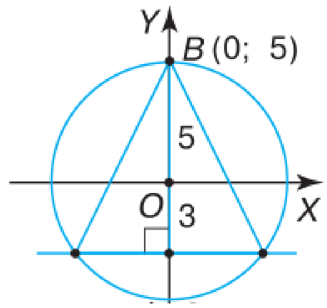


Рис. 2.2.2

Відповідь: $4\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см і 8 см.

Щоб застосувати метод координат:

1) потрібно накреслити задану фігуру та ввести прямокутну декартову систему координат (для цього вказати розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури);

2) визначити координати точок даної фігури;

3) використати відомі формули [2, с.105].

Отже, розв'язуючи задачу методом координат, слід фігури, які розглядають, розмістити на координатній площині. Приписавши деяким точкам фігур координати, а лініям рівняння, обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. Зіставивши координати точок і рівняння, приходять до відповіді [3, с.112].

Задача. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'язання

Сформулюємо дану задачу в координатах. Для цього розмістимо дану трапецію ABCD у системі координат так, щоб її вершини мали координати A(0; 0), B(a; b), C(c; b), D(d; 0) (рис. 2.2.3).

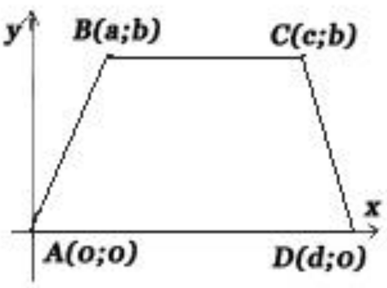


Рис. 2.2.3

Виразимо суму квадратів діагоналей трапеції через координати її вершин:

$\mathrm{AC}^2 + BD^2 = \mathrm{c}^2 + b^2 + (a-d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad.$

Обчислимо довжини основ трапеції:

$$AD = d, \mathrm{BC} = \mathrm{c} - a.$$

Виразимо в координатах суму квадратів бічних сторін:

$\mathrm{A}B^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + (c-d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd.$

Додаючи до цього виразу подвоєний добуток основ, маємо:

$\mathrm{A}B^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = a^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd - 2cd - 2ad =$

$= a^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad,$ що й треба було довести.

Отже, щоб розв'язати задачу методом координат необхідно виконати такі кроки:

1) сформулювати дану задачу мовою координат. Вводять декартову систему координат і вказують спосіб розміщення в ній даної фігури;

2) визначити координати деяких точок даної фігури;

3) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;

4) перекласти отриманий результат мовою геометрії [3, с.31].

Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури.

Розглянемо приклади задач.

Задача. Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він – прямокутник.

Розв'язання

Перший крок. Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати: $\mathrm{A}(0;0), B(b;c), C(a+b;c), D(a;0)$ (рис. 2.2.4).

За умовою $AC = BD$. Подаємо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2$$

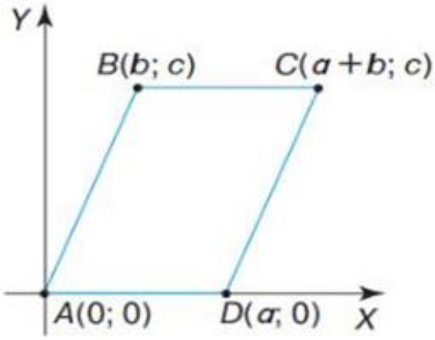


Рис. 2.2.4

Другий крок. Перетворюємо рівність:

$$a^2+2ab+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+c^2$$

$$4ab=0.$$

Третій крок. З останньої рівності випливає: $b=0$.

Це означає, що точка $B(b;c)$ лежить на осі Oy. Тому кут BAD прямий, а звідси паралелограм ABCD – паралелограм.

Задача. Знайти периметр і площу трикутника з вершинами A(-3; 1), B(-1; 3) і C(1; 1).

Розв'язання

За формулою d=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ знайдемо довжини сторін трикутника:

AB=$\sqrt{(-3+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$;

BC=$\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$;

CA=$\sqrt{(-3-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{16}=4$.

Маємо: $P_{\Delta ABC}$=AB + BC + CA; $P_{\Delta ABC}$=$2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=4\sqrt{2}+4$.

Для сторін трикутника ABC маємо $4^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$; 16=16, тобто виконується рівність: $CA^2 = AB^2 + BC^2$. Отже, ΔABC прямокутний з гіпотенузою CA. $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4$.

Відповідь: $4\sqrt{2} + 4$; 4.

Задача. Вершини чотирикутника KDCM мають координати K(1; 1), D (3;3), C (8;3), M(6;1). Довести, що KDCM – паралелограм.

Розв'язання

За ознакою паралелограма, чотирикутник, діагоналі якого діляться навпіл, - паралелограм. Знайдемо координати середини діагоналей KC і DM чотирикутника KDCM за формулами $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Координати середини сторони KC: $x = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{1+3}{2} = 2$.

Координати середини сторони DM: $x = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{3+1}{2} = 2$.

Отже, діагоналі мають спільну середину – точку (4,5; 2). Тому чотирикутник KDCM – паралелограм.

Задача. Скласти рівняння кола з центром на прямій $x = 3$, що дотикається до осі ординат у точці K(0; 2).

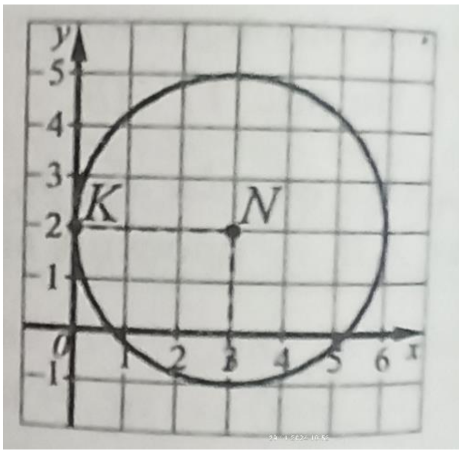


Рис. 2.2.5

Розв'язання

Точка N(a; b) – центр кола. Оскільки вона лежить на прямій x=3 і коло дотикається до осі ординат (рис. 2.2.6), то $a = 3$; $b = 2$.

За властивістю дотичної, R=3. Формула рівняння кола $(x-a)^2$+$(y-b)^2$=R^2, $(x-3)^2$+$(y-2)^2=9$.

Відповідь: $(x-3)^2$+$(y-2)^2=9$.

Задача. Відстань між населеними пунктами А і В, розміщеними з одного боку від залізничної колії, становить 13 км, а від них до колії – відповідно 6 км і 11 км. Де слід побудувати залізничну станцію, щоб вона була однаково віддалена від пунктів А та В? Знайти відстань від станції до пункту А. результат округлити до цілих.

Розв'язання

Уведемо систему координат так, щоб вісь *x* збігалася з залізничною станцією, а пункт А розміщувався на осі *y* (рис. 2.2.6)

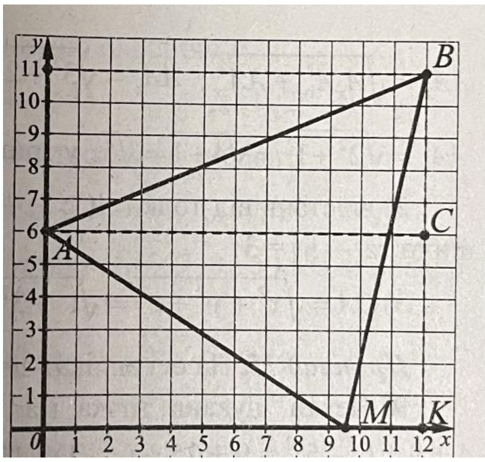


Рис. 2.2.6

Тоді ОА=6 км, ВК=11 км. А(0; 6), В(m; 11). АВ=13 км. За формулою відстані між точками на координатній площині одержимо: $(m-0)^2$+$(11-6)^2=13^2$; m^2= 169 – 25; $m^2=144$, $m=\pm 12$.

m = -12 не підходить.

Отже, В(12; 11). Знайдемо точку М(x; 0), рівновіддалену від точок А(0; 6) і В(12; 11). АМ^2 = (0 - $x)^2$+(6 - 0$)^2$= x^2+36,

ВМ^2 = (12 - $x)^2$+(11 - 0$)^2$ =144 – 24x +x^2+121 = 265– 24x +x^2. З рівності

АМ^2 = ВМ^2 одержимо: x^2+36 = 265– 24x +x^2, 24x=229, $x=\frac{229}{24}=9\frac{13}{24}$ (км).

Отже, М($9\frac{13}{24}$; 0) - точка, у якій має розміститися залізнична станція.

Тоді АМ = $\sqrt{(\frac{229}{24})^2 + 36} \approx 11$ (км).

Відповідь: 11 км.

Приклади розв'язування стереометричних задач

Задача. Довести, що трикутник з вершинами А(2; 0; 5), В(3; 4; 0) і С(2; 4; 0) прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника АВС. У відповідь записати суму координат центра.

Розв'язання

$AB^2 = (3\text{-}2)^2 + (4\text{-}0)^2 + (0\text{-}5)^2 = 42$, $BC^2 = (3\text{-}2)^2 + (4\text{-}4)^2 + (0\text{-}0)^2 = 1$,

$CA^2 = (2\text{-}2)^2 + (4\text{-}0)^2 + (0\text{-}5)^2 = 41$. 42=41+1.

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник АВС прямокутний з гіпотенузою АВ. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Її координати $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$, $y = \frac{0+4}{2} = 2$, $z = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$.

Отже, точка (2,5; 2; 2,5) – центр кола. Тоді 2,5 + 2 + 2,5 = 7.

Відповідь: 7.

Задача.

Площина проходить через точки $M, N\ i\ K$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ причому $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $K \in CD$, $AM{:}MA_1 = 1{:}2$, $B_1N{:}NC_1 = 3{:}2$, $CK = KD$. У якому відношенні ця площина ділить ребро AD?

Розв'язання

Розмістимо систему координат відносно даного куба (рис. 2.2.7) і позначимо $\mathrm{AB} = 1$. Дані точки мають такі координати: $M\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), N\left(0; \frac{3}{5}; 1\right), K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

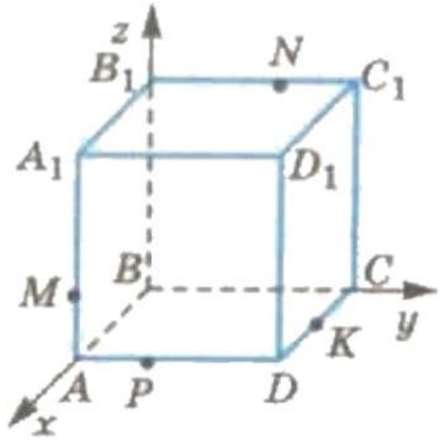


Рис. 2.2.7

Площину, яка проходить через ці точки, можна задати рівнянням:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Якщо підставимо в це рівняння координати названих точок, дістанемо систему

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c + d = 0, \\ \frac{3}{5}b + c + d = 0, \\ \frac{1}{2}a + b + d = 0. \end{cases}$$

Звідси $a = 26, b = 20, \text{c} = 21, d = -33$.

Отже, січній площині відповідає рівняння $26x + 20y + 21z - 33 = 0$.

Точка $\text{P}(1; y; 0)$ лежить на січній площині, Отже, $26 + 20y - 33 = 0$, звідки $y = \frac{7}{20}$. Якщо $AP = \frac{7}{20}$, то $PD = \frac{13}{20}$.

Відповідь: АР$: PD = 7: 13$.

Приклад 1. Знайти точки перетину сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - x = 20$, з віссю *x*.

Розв'язання

Якщо сфера претинає вісь *x*, то координати точок перетину мають вигляд (x; 0; 0). Тоді $x^2 + 0^2 + 0^2 - x = 20$, $x^2 - x = 20$, $x_1 = -4$, $x_2 = 5$.

Отже, (-4; 0; 0) і (5; 0; 0) – точки перетину.

Відповідь: (-4; 0; 0) і (5; 0; 0).

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки

M(3; 4; -1), N(-2; 0; 3) і K(0; 0; -1).

Розв'язання

Площина у просторі задається рівнянням $ax + by + cz + d = 0$. Оскільки площина проходить через точки M, N і K, то їх координати задовольняють рівняння площини. Тому $\begin{cases} 3a + 4b - c + d = 0, \\ -2a + 3c + d = 0, \\ -c + d = 0. \end{cases}$

З третього рівняння маємо, що $c = d$. Тоді $-2a + 3c + d = 0$, $-2a + 4d = 0$, $2a = 4d$, $a = 2d$.

$3a + 4b - c + d = 0$, $3 \cdot 2d + 4b - d + d = 0$, $6d + 4b = 0$, $4b = -6d$, $b = -1{,}5d$.

Отже, $2dx - 1{,}5dy + dz + d = 0$, $2x - 1{,}5y + z + 1 = 0$, $4x - 3y + 2z + 2 = 0$.

Відповідь: $4x - 3y + 2z + 2 = 0$.

Приклад 3. Скласти рівняння сфери з центром у точці (-1; 5; 3), яка дотикається до площини: а) xy; б) yz.

Розв'язання

а) сфера задається рівнянням $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, де a, b і c – координати центра сфери, R – радіус. Оскільки сфера дотикається до площини xy, то R= z = 3. Отже, рівняння сфери $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=9$.

б) R = $|x|$ = 1. Отже, рівняння сфери $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=1$.

Відповідь: а) $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=9$,

б) $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=1$.

2.3. Розв'язування задач на відшукання геометричних місць точок

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ [33, с.104].

Розв'язування задач на відшукання ГМТ за допомогою методу координат передбачає два основні етапи:

1) складання рівняння з двома невідомими x і y, які задовольняють координати будь-якої точки шуканого ГМТ. На цьому етапі обґрунтовується пряме твердження: якщо точка М$(x; y)$ — довільна точка шуканого ГМТ, то її координати задовольняють знайдене рівняння;

2) доведення оберненого твердження: будь-яка точка, координати якої задовольняють знайдене рівняння, належить шуканому ГМТ. [15]

Задача 1. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок площини, для яких різниця $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2$ дорівнює сталому числу k.

Розв'язання

Виберемо систему координат так, щоб точки A і B лежали на осі абсцис, а середина відрізка AB збігалася з початком координат (рис. 2.3.1). Нехай $\mathrm{AB} = a$, тоді дані точки матимуть координати $A(-\frac{a}{2}; 0)$ і $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Для довільної точки М$(x; y)$ за умовою задачі $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k$.

Записавши цю умову в координатах, маємо:

$$(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = k.$$

Спрощуючи цей вираз, дістанемо $2ax = k$, тоді $x = \frac{k}{2a}$.

Отже, кожна точка шуканого ГМТ належить прямій $x = \frac{k}{2a}$, яка паралельна осі ординат (тобто перпендикулярна до прямої AB) і проходить через точку $\left(\frac{k}{2a}; 0\right)$. І навпаки: якщо точка M(x; y) лежить на прямій $x = \frac{k}{2a}$, то її координати задовольняють рівняння $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k$.

Отже, точка M належить шуканому ГМТ [15, с.102].

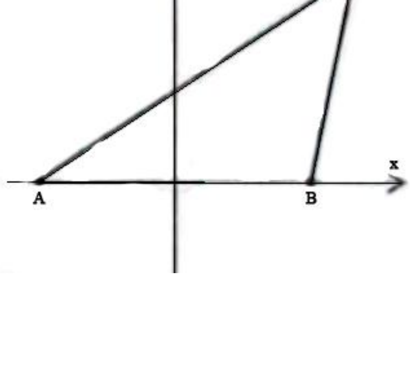


Рис. 2.3.1

Задача 2.

Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1; 2; 3)$ і початку координат.

Розв'язання

Нехай $M(x; y; z)$ – будь-яка точка шуканого геометричного місця точок. Тоді $MA^2 = MO^2$, або

$$(1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

звідси $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

Це і є шукане рівняння [10, с. 9].

Задача 3.

Точка А віддалена від площини α на 3 см. Знайти ГМТ, які належать площині α та віддалені від точки А на 5 см.

Розв'язання. Точки шуканого ГМТ належать як площині α, так і сфері із центром А та радіусом 5 см. Тоді шукане ГМТ – це спільні точки площини і сфери, тобто це коло із центром С і радіусом СВ, причому

СВ = $\sqrt{5^2 - 3^2}$ = 4 см.

Відповідь: коло радіуса 4 см.

Задача 4. Дано точки А і В. Знайти ГМТ простору М, для яких АМ:ВМ = $\sqrt{2}$.

Розв'язання.

1*)* Введемо просторову систему координат так, що А(-*a*; 0; 0), В(*a*; 0; 0).

2) Нехай М(*x; y; z*) – точка шуканого ГМТ. Маємо: АМ = $\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$, ВМ = $\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$.

3)Оскільки $\frac{\text{AM}}{\text{BM}} = \sqrt{2}$, маємо рівняння: $\frac{(x+a)^2+y^2+z^2}{(x-a)^2+y^2+z^2} = 2$.

Спростимо і отримаємо: $x^2 - 6xa + a^2 + y^2 + z^2 = 0$,

$(x - 3a)^2 + y^2 + z^2 = 8a^2$,

$(x - 3a)^2 + y^2 + z^2 = (2\sqrt{2}\,a)^2$.

Це рівняння сфери і з центрор у точці Q(3a; 0; 0) радіуса $2\sqrt{2}\,a$.

4) Тепер подамо отриманий результат, не використовуючи координат. Нехай AB = $2a$. Тоді шукане ГМТ – сфера із центром Q, що належить прямій AB, причому B – середина відрізка AQ, і радіусом R=$2\sqrt{2}\,a$. [21]

2.4. Вектори на площині та у просторі

Поняття вектора є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Його можна визначити по-різному: як напрямлений відрізок, як упорядковану пару точок, що є кінцями напрямленого відрізка, як множину однаково напрямлених відрізків однакової довжини, як упорядковану пару чисел, як паралельне перенесення.

Уперше поняття вектора знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо.

Є вектори й у геометрії.

1. Поняття вектора

В геометрії відрізком ***AB*** називається сукупність всіх точок прямої, що лежать між ***A*** і ***B***. Точки ***A*** і ***B*** називаються кінцями відрізка. Часто розглядають ***напрямлені відрізки***, тобто відрізки, для яких вказані початкова і кінцева точки. Тобто ***AB*** і ***BA*** геометрично один і той же відрізок, але, розглядаючи їх як напрямлені відрізки, слід враховувати, що вони задають різні об’єкти.

Відрізок AB називається ***напрямленим,*** якщо береться до уваги порядок його кінцевих точок. Перша точка ***(A)*** називається його ***початком,*** а друга ***(B)*** – його ***кінцем***.

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають напрямленим відрізком або **вектором.**

Позначають напрямлений відрізок так: $\overrightarrow{AB}$.

Довжиною напрямленого відрізка називається довжина відрізка ***AB***.

Напрямлені відрізки ***AB*** і ***CD*** називаються ***однаково напрямленими*** (співнапрямленими), якщо однаково напрямлені промені ***AB*** і ***CD***, і ***протилежно напрямленими,*** якщо ці промені протилежно напрямлені.

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрямок.

На рис. 2.4.1 зображено вектор $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ з початком у точці А та кінцем у точці В. Вектор позначають так: $\overrightarrow{AB}$.

Рис. 2.4.1

Вектор записується двома великими літерами латинського алфавіту зі спільною рискою зверху, перша з них позначає початок, друга – кінець вектора. Наприклад, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$(рис. 2.4.1a), причому ***A, C, M*** – початки, а ***B, D, N*** – кінці даних векторів.

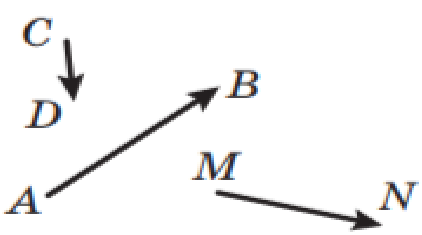


Рис. 2.4.1а

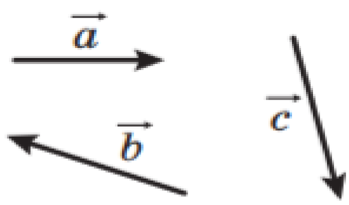


Рис. 2.4.1б

В деяких випадках вектор позначається однією малою літерою, наприклад, $\boldsymbol{\vec{a}}$, $\boldsymbol{\vec{b}}$, $\boldsymbol{\vec{c}}$. (рис. 2.4.1b).

Довжиною (або модулем) вектора називають довжину відрізка від точки А до точки В. Довжина вектора АВ – $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$.

Довжину вектора $\vec{a}$ $(a_1;a_2)$ обчислюють за формулою $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається **нульовим вектором** (або нуль-вектором) і позначають $\vec{0}$.

Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка А, то його можна позначити так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунку нульовий вектор зображають точкою. [32]

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним вектором***, або ***ортом***.

Вектори, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають **<u>колінеарними векторами</u>** (рис. 2.4.2). Позначають: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

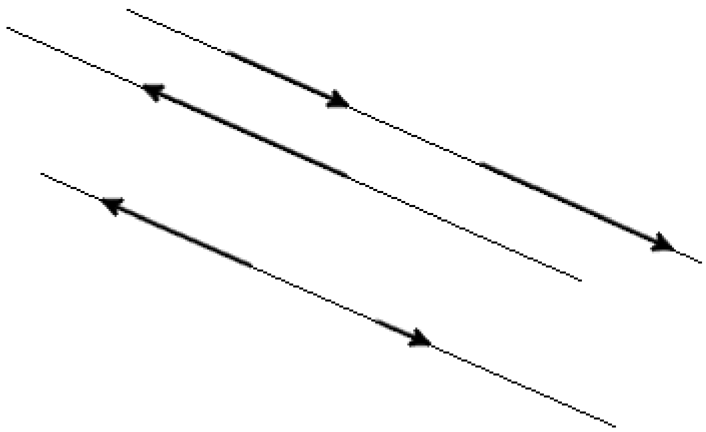


Рис. 2.4.2

Якщо колінеарні вектори мають один напрям, то їх називають **співнапрямленими** і позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; якщо колінеарні вектори мають протилежні напрями, то їх називають **протилежно напрямленими** і позначають $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (рис. 2.4.3).

Рис. 2.4.3

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакові довжини. Позначають $\vec{a} = \vec{b}$ (рис. 2.4.4).

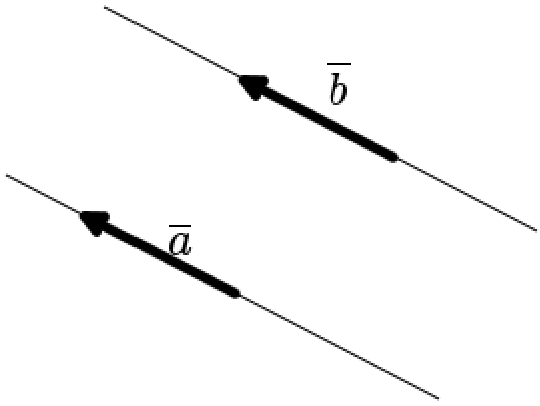


Рис. 2.4.4

Вектори можуть піддаватися різним операціям. Основними операціями з векторами є додавання, віднімання та множення на скаляр.

Додавання векторів (**сума векторів**) $\vec{a}+\vec{b}$ - це операція знаходження вектора $\vec{c}$, всі елементи, якого дорівнюють попарній сумі відповідних елементів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто дорівнює: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Сумою векторів $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ є вектор $\vec{c}(c_1;\, c_2)$ з координатами $c_1 = a_1+b_1$, $c_2 = a_2+b_2$.

У просторі дії над векторами виконують ьак само, як і на площині.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ *і* $\vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$ називають вектор $\vec{c}\,(x_1 + x_2;\, y_1 + y_2;\, z_1 + z_2)$.

При додаванні векторів можна використовувати правило трикутника або паралелограма (рис. 2.4.5).

Додавання векторів можна геометрично представити як переміщення одного вектора вздовж іншого.

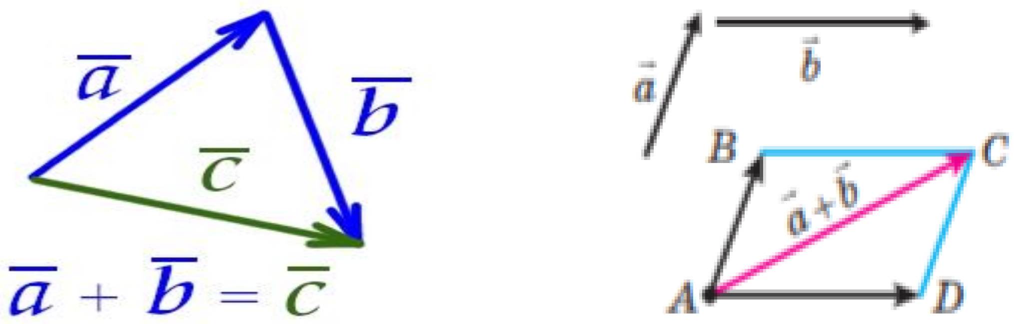


Рис. 2.4.5

Властивості операції додавання векторів:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативна (переставна) властивість);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативна (сполучна) властивість);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. З цього означення випливає, що для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 2.4.6).

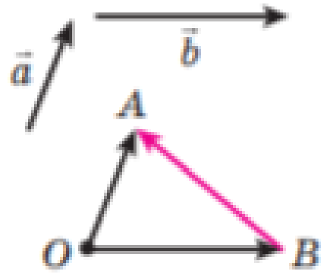


Рис. 2.4.6

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}$ - $\vec{b}$ – дорівнюють $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_3; y_3; z_3)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{d}+\vec{b}=\vec{a}$.

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)$. [21]

Добутком вектора $\vec{a}$ на число x називається вектор $\vec{b}$, що $\vec{b}=x\vec{a}$. Напрям $\vec{b}$ збігається з напрямом $\vec{a}$ при $x>0$, і протилежний за напрямком до $\vec{a}$ при $x<0$.

Добутком вектора $\vec{a}(x; y; z)$ на число λ називають вектор $\vec{b}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Властивості операції множення вектора на число:

1) $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$ (сполучна властивість);

2) $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$ (перша розподільна властивість);

3) $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$ (друга розподільна властивість).

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}$ $(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою $\vec{a}\,\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (\overline{a_1, a_2, a_3})$ і $\vec{b} = (\overline{b_1, b_2, b_3})$, то скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Властивості скалярного добутку векторів:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переставна).

2. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\overrightarrow{a \cdot} \vec{b})$ (сполучна)

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{a \cdot} \vec{b} + \overrightarrow{a \cdot} \vec{c}$ (розподільна).

4. Скалярний добуток вектора самого на себе завжди більше або дорівнює нулю:

$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Використання векторів у геометрії дозволяє розв'язувати різноманітні завдання, такі як визначення відстаней між точками, кутів між векторами, площ трикутників та інших фігур, об'ємів поверхонь обертання та інших характеристик геометричних фігур у просторі та на площині.

2.5. Векторний метод. Розв'язування задач векторним методом

При розв'язанні геометричних задач, крім традиційних методів, можна використовувати й векторний. Цей метод розв'язання задач пов'язаний з використанням властивостей векторів. Правильне використання векторів потребує певних навиків.

Специфічними розумовими діями, які входять у структуру вміння розв'язувати задачі векторним методом, є такі: 1) переформулювання співвідношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і навпаки; визначення «ключових» об'єктів і введення ключових векторів в структуру задачі; 2) введення базису і / або фіксування системи координат; 2) операції над векторами; виконання операції розкладання вектора по базису, знаходження координат «ключових» векторів; 3) представлення вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число; 4) перетворення отриманих співвідношень засобами векторної алгебри, отримання нових співвідношень; 5) перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їхніми довжинами [6].

Векторний метод, як і будь-який інший, використовується не завжди. Для початку необхідно навчитися використовувати вектори при розв’язку планіметричних задач.

В методичній літературі виділяються такі типи геометричних задач, для розв’язання яких зручніше застосовувати векторний метод:

1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;

2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;

3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;

4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;

5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;

6) задачі на знаходження величини кута.

Традиційно векторний спосіб розв’язування задач проводився за схемою: записувалася умова на векторній мові; векторний розв’язок задачі; переводився результат на геометричну мову. Але повна алгебраїзація геометричної задачі приховувала її геометричну суть і викликала труднощі при відшуканні розв’язку.

Доцільно спочатку записати на векторній мові тільки умову задачі, потім проаналізувавши її (за рисунком), з’ясувати, за допомогою яких векторів можна отримати потрібне співвідношення (в простих задачах), або які вектори доцільно вибрати в якості базових (або, як зручно вибрати систему координат) для більш складних задач; лише потім, перекладати умову на векторну мову, а на деяких етапах користуватись геометричними співвідношеннями.

Вказаний підхід до розв’язання задач векторним методом показано у формі загальної схеми векторного розв’язання геометричної задачі.

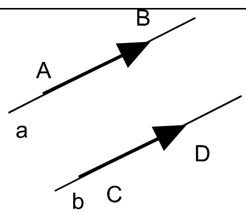
Таблиця 1

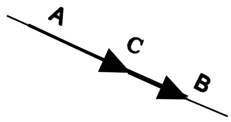
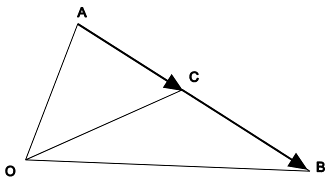
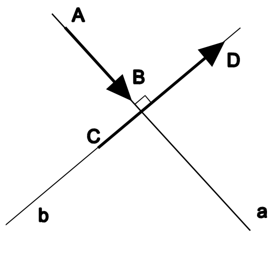
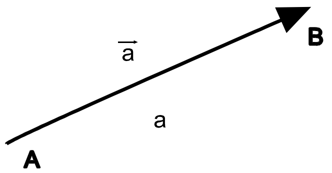
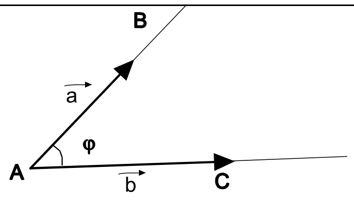
Схема розв’язування геометричних задач векторним способом
1. Перевести умову задачі на векторну мову (записати векторні співвідношення). 2. Вибрати прямокутну систему координат (або вибрати два неколінеарні вектори на площині або три неколінеарні вектори у просторі) як базових). 3. Знайти координати векторів, які входять у співвідношення (п.1) або виразити ці вектори через базові. 4. Довести або знайти дане співвідношення. 5. Перевести результат на геометричну мову.

Для роботи з таблицею необхідно пояснити учням всі дані, що входять до неї.

Таблиця 2 дозволяє при вивченні теми “Вектори на площині” створити основу для найважливішого етапу розв’язання геометричних задач векторним методом – переведення геометричних фактів на векторну мову (і назад).

Таблиця 2

№	Малюнок	Твердження на геометричній мові	Твердження на векторній мові
1		<u>Прямі паралельні</u> a//b	<u>Вектори колінеарні</u> $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$

		(прямі a і b не збігаються)	
2		$C \in AB$	<u>Вектори колінеарні</u> $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$
3		AC: $CB=m:n$ С - середина АВ	$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$
4		AB$\perp$ CD	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
5		$AB=a$	$\overrightarrow{a^2}=\lvert\vec{a}\rvert^2$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\lvert\vec{a}\rvert=a$ (у координатах: $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ -на площині; $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$ – у просторі)
6		$\angle BAC=\varphi$	$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де , $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$,

			φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Ця ж таблиця служить і для оберненого переводу векторних співвідношень на геометричну мову.

Можна розглянути з учнями доведення наступного співвідношення: якщо точка C належить прямій AB, то для довільної точки O виконується рівність:

$\overline{OC} = p\overline{OA} + (1-p)\overline{OB}$

І обернене, якщо виконується рівність:

$\overline{OC} = p\overline{OA} + (1-p)\overline{OB}$, то точка C належить прямій AB.

Дійсно, якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то вектори $\overline{BC}$ і $\overline{BA}$ колінеарні, а значить, $\overline{BC} = p\overline{BA}$ або $\overline{OC} - \overline{OB} = p(\overline{OA} - \overline{OB})$. Звідси $\overline{OC} = p\overline{OA} + (1-p)\overline{OB}$

Обернене твердження також вірне, значить точка C належить прямій AB.

Корисним для розв'язування деяких геометричних задач є також твердження: якщо K-точка перетину медіан трикутника ABC, то для довільної точки O: $\overline{OK} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$

Наведемо приклади завдань.

Приклад . Модуль вектора $\vec{a}$ $(12; n)$ дорівнює 13. Знайти n.

$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$; $13^2 = 12^2 + n^2$; $n^2 = 169 - 144 = 25$, $n = \pm 5$.

Відповідь: -5; 5.

Приклад . Дано $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = 60°$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти: а) скалярний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$; б) модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b}$.

Розв'язання

а) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 4 + 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

б) $|a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1} =$

$= \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$;

в) якщо α – кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$, то $\cos\alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}| \cdot |\vec{a}|}$, $\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Відповідь: а) 5; б) $\sqrt{7}$; в) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Приклад. Дано точки A(3; 5), B(-1; -2) і C(0; 4). Знайти таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були рівними.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1-3;\ -2-5)} = \overrightarrow{(-4;\ -7)}$.

Якщо вектори рівні, то їх відповідні координати рівні: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-4;\ -7)}$. Знаючи координати вектора $\overrightarrow{CD}$, знайдемо координати точки D(*x; y*): $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-4;\ -7)} = \overrightarrow{(x-0; y-4)}$; x = -*4*; y = -3. Отже, D(-4; -3).

Відповідь: (-4; -3).

Приклад. Дано точки A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2), C(0; 2; -1). Знайти на осі *z* таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були перпендикулярними.

Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярні, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Якщо точка D лежить на осі *z*, то вона має координати D(0; 0; *z)*. Тому маємо: $\overrightarrow{AB}$(-2; 1; 1),

$\overrightarrow{CD}$(0; -2; *z+1)*. Далі маємо: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (z+1) \cdot 1 = z - 1$,

$z - 1 = 0$, $\quad z = 1$. Отже, D(0; 0; *1*).

Відповідь: D(0; 0; *1*).

Приклад. Дано вектори $\vec{a} = (-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{b} = (6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати вектора: а) $2a^{\rightarrow} + 3b^{\rightarrow}$; б) $12\,a^{\rightarrow} - 14\,b^{\rightarrow}$; в) $0{,}5a^{\rightarrow} - 1{,}5b^{\rightarrow}$.

а) $2a^{\rightarrow} + 3b^{\rightarrow} = (-2 + 18;\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2;\ 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-8)) = (16;\ 12;\ -10)$

б) $12\,a^{\rightarrow} - 14\,b^{\rightarrow} = (-12+(-84);\ 36-28;\ 84+112) = (-96;\ 8;\ 196)$

в) $0{,}5a^{\rightarrow} - 1{,}5b^{\rightarrow} = (-0{,}5-9;\ 1{,}5-3;\ 3{,}5+12) = (-9{,}5;\ -1{,}5;\ 15{,}5)$.

Приклад. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{3}$ і він перпендикулярний до векторів $\vec{m} = (1; -2; 1)$ $\vec{n} = (2; 1; -3)$.

Розв'язання. Нехай вектор $\vec{a}$ має координати (*x; y; z*).

Тоді $x^2 + y^2 + z^2 = (2\sqrt{3})^2$, $x - 2y + z = 0$; $2x + y - 3z = 0$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x - 2y + z = 0, \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x - 2y + z = 0, \\ 5x - 5z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x - 2y + z = 0, \\ x = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ z = y, \\ x = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z^2 = 12, \\ z = y, \\ x = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2; \\ x = 2; \\ y = 2 \end{cases}$$

Отже, $\vec{a}$ (2; 2; 2) або $\vec{a}$ (-2; -2; -2).

Приклад. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-4; 3; 2)$ і $\vec{b}$ (0; 1; - 8); 2) $\vec{c}(1; -2; -3)$ і $\vec{d}(2; 1; -1)$.

Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) = -13$;

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = 3$

Відповідь: 1) -13; 2) 3.

Приклад. Знайти координати векторів $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; -3; 8)$, $\vec{b}$ (2; 4; 11).

Розв'язання. 1) $\vec{c}(-2 + 2; -3 + 4; 8 + 11)$, тобто $\vec{c}(0; 1; 19)$.

2) $\vec{d}$(-2 - 2; -3 - 4; 8 - 11), тобто $\vec{d}$ (-4; -7; -3).

Відповідь: $\vec{c}$(0; 1; 19), $\vec{d}$ (-4; -7; -3).

Задача.

На сторонах AD і DC опуклого чотирикутника ABCD вибрані точки M і K відповідно так, що $AM = \frac{1}{n}AD$, $DK = \frac{1}{m}DC$.

Відрізки AK і BM перетинаються в точці P, причому $AP = \frac{m}{1+mn}AK$, $MP = \frac{1}{1+mn}MB$.

Довести, що ABCD – паралелограм.

Перевід на векторну мову робимо за допомогою табл.2.

Виберемо для учнів конкретні значення m і n (m=3; n=2).

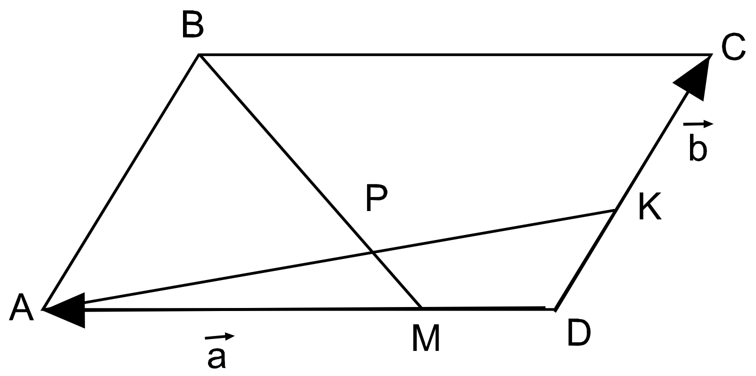


Рис. 2.5.1

Розв'язання:

1). Щоб довести, що ABCD – паралелограм, можна довести, що $\overline{AB} = \overline{DC}$ (тобто AB//DC, AB=DC).

2). Виберемо базисні вектори $\overline{DA} = \bar{a}$, $\overline{DC} = \bar{b}$

3). Виразимо вектор $\overline{AB}$ через базисні вектори $\overline{AB}$ = $\overline{MB}$ - $\overline{MA}$. Так як $MA = \frac{1}{n}DA$ і вектори $\overline{MA}$ і $\overline{DA}$ однаково напрямлені, то $\overline{MA} = \frac{1}{n}\overline{DA} = \frac{1}{n}\bar{a}$. Крім того, $MP = \frac{1}{1+mn}MB$, тоді $\overline{MB}$= (1+mn)$\overline{MP}$ (1).

Але $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{n}\bar{a} + \frac{m}{1+mn}\overline{AK}$

Враховуючи, що $\overline{AK} = \overline{DK} - \overline{DA} = \frac{1}{m}\overline{b} - \overline{a}$, отримаємо:

$\overline{MP} = \frac{1}{n}\overline{a} + \frac{m}{1+mn}\left(\frac{1}{m}\overline{b} - \overline{a}\right)$.

Підставивши це значення в (1), знаходимо $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{n}\vec{a} + \vec{b}$. Отже,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \frac{1}{n}\overline{a} + \overline{b} - \frac{1}{n}\overline{a} = \overline{b}$$

4) Тоді $\overline{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{b}$, а це на геометричній мові означає, що AB//DC і AB=DC, тобто ABCD – паралелограм.

Задача. Доведіть, що точки $A(1;2), B(2;4), C(-3;-6)$ лежать на одній прямій.

Розв'язання. Визначимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(1;2)$ $\overrightarrow{AB}(-4;-8)$

Зауважимо, що $\overrightarrow{(-4;-8)} = -4 \cdot \overrightarrow{(1;2)}$, тобто $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$. Це означає, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні, тобто мають лежати на одній прямій або на паралельних прямих. Але прямі AB і AC мають спільну точку A, тобто точки A, B і C лежать на одній прямій.

Задача. При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;-1)$ і $\vec{b}(3;x)$ перпендикулярні?

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні за умови $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Записавши цю умову в координатах, маємо: $2 \cdot 3 + (-1) \cdot x = 0$, $6 - x = 0$, $x = 6$.

Відповідь. При $x = 6$.

Векторний метод є потужним і ефективним інструментом, що широко застосовується для розв'язування задач у фізиці, інженерії, обробці даних і комп'ютерній графіці. Він забезпечує точність і надійність розрахунків, дозволяє розв'язувати багатовимірні задачі і спрощує роботу з напрямленими величинами. Завдяки використанню векторного підходу можна значно оптимізувати процес розв'язання задач і покращити розуміння складних процесів.

Переваги векторного методу

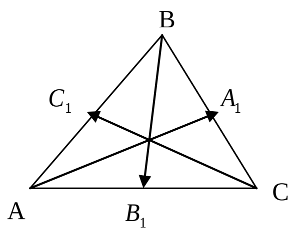
1. Компактність: векторний метод дозволяє записувати та обробляти задачі у компактній формі, це значно спрощує роботу з великою кількістю даних.

2. Систематичність: розділення задач на компоненти за осями координат дозволяє зосередитися на кожній складовій окремо.

3. Універсальність: векторний метод є універсальним, який можна застосовувати в різних галузях, де працюють з напрямленими величинами.

Завдяки використанню векторного підходу можна оптимізувати процес розв’язання задач і розуміння складних процесів.

Задача. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2: 1, рухаючи від вершин.



Доведення: нехай AA_1, BB_1, CC_1 – медіани трикутника ABC; AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O. Тоді $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$ (бо $\overrightarrow{AA_1} \parallel \overrightarrow{OA}$) і $2\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OB}$ (бо $\overrightarrow{AB_1} \parallel \overrightarrow{OB}$). Звідси $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OB}$. Враховуючи єдність розкладу вектора за двома неколінеарними векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, знаходимо, що k = -1, – p = 1. Отже, $2\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}, 2\overrightarrow{OB_1} = -\overrightarrow{OB}. \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$. За умовою $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC_1}, 2\overrightarrow{OC_1} = -\overrightarrow{OC}$, тому $|\overrightarrow{OC}| = 2|\overrightarrow{OC_1}|$, або $OC : OC_1 = 2:1$ і, отже, точки C, O, C_1 належать одній прямій. З цього випливає, що медіана CC_1 також проходить через точку O і ділиться нею у відношенні 2:1, рахуючи від вершини, що й треба було довести.

Задача. Дано правильну чотирикутну піраміду SABCD. Чи є лінійно залежними вектори: а) $\overrightarrow{AS}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BO}$ і $\overline{DB}$; в) $\overline{AC}, \overline{OD}, \overline{BO}$; г) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}$; д) $\overline{AB}, \overline{OC}, \overline{SD}$; е) $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AS}, \overline{DS}$?

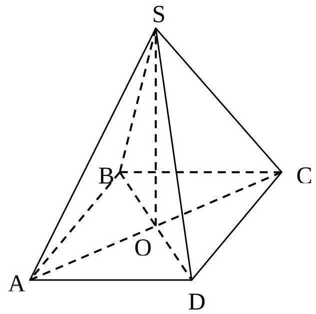


Рис. 2.5.2

Розв'язання: вектори $\overrightarrow{AS}$ і $\overrightarrow{BC}$ неколінеарні, тому за теоремою про колінеарні вектори вони не є лінійно залежними.

$\overrightarrow{BO}$ і $\overline{DB}$ колінеарні, а тому лінійно залежні.

$\overrightarrow{OD}$ і $\overrightarrow{BO}$ колінеарні, отже, лінійно залежні; за властивістю три вектори $\overline{AC}, \overline{OD}, \overline{BO}$ також лінійно залежні.

Вектори $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}$ компланарні, тому за теоремою вони лінійно залежні.

$\overline{AB}, \overline{OC}, \overline{SD}$ не є компланарними, за теоремою вони не є лінійно залежними.

$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AS}$ – три некомпланарні вектори. За теоремою про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами, вектор $\overrightarrow{DS}$ є лінійною комбінацією цих векторів. За властивістю $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AS}, \overline{DS}$ лінійно залежні.

Задача. Обчислити кут між векторами $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$ і $\bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}$, де $\bar{p}$ і $\bar{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв'язання: формула косинуса кута: $\cos(\overrightarrow{a}, \ \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Обчислимо $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{p}+2\vec{q})(\vec{p}+5\vec{q}) = 3\vec{p}^{\,2} + 17\vec{p}\vec{q} + 10\vec{q}^{\,2} = 3\cdot 1 + 10\cdot 1 = 13;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3\vec{p}+2\vec{q})^2} = \sqrt{9\vec{p}^{\,2} + 12\vec{p}\cdot\vec{q} + 4\vec{q}^{\,2}} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\bar{p}+5\bar{q})^2} = \sqrt{\bar{p}^2 + 10\bar{p}\cdot\bar{q} + 25\bar{q}^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

Тоді $\cos(\overrightarrow{a}, \ \vec{b}) = \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\overrightarrow{a}, \ \vec{b}) = 45°$.

Відповідь: 45°.

2.6. Застосування скалярного добутку векторів до розв'язування геометричних задач

З використанням скалярного добутку векторів, як правило, розв'язуються геометричні задачі на доведення перпендикулярності прямих і задачі на обчислення довжин відрізків і величин кутів.

Задача 1.

В прямокутнику ABCD зі сторонами 2a і 5a на більшій стороні AD взято точку K на відстані a від вершини A. Довести, що $\angle BKC = 90^0$.

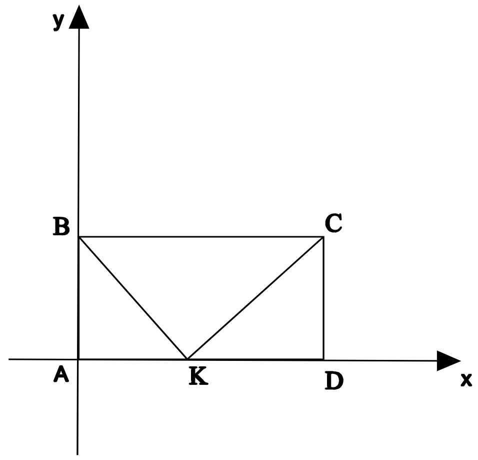


Рис. 2.6.1

Дано: ABCD – прямокутник, AB=CD=2a,

AD=BC=5a, $K \in AD$, AK=a

Довести: $\angle BKC = 90^0$

Розв'язання: (Використовуємо загальну схему)

1) На векторній мові умова задачі означає, що $\overrightarrow{KB} \perp \overrightarrow{KC}$, тобто $\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KC} = 0$

2) Введемо систему координат: точку A приймаємо за початок координат, а півпрямі $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ відповідно за додатні півосі *y* і *x*. Тоді визначимо координати точок: K(a; 0), B(0; 2a), C(5a; 2a).

3) Знайдемо координати векторів: $\overline{KB}$ і $\overrightarrow{KC}$: $\overline{KB}$ (*-a;2a)*; $\overrightarrow{KC}$ (4*a*; 2*a*).

4) Запишемо скалярний добуток векторів $\overline{KB}$ і $\overrightarrow{KC}$:

$\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KC} = -4a^2 + 4a^2 = 0$, тобто $\overrightarrow{KB} \perp \overrightarrow{KC}$ і $\angle BKC = 90^0$

Задача 2.

У трикутнику ABC $\angle BAC = 60^0$. Знайти величину кута між медіанами BD і CF, якщо AB = 6 і AC = 4.

Дано: ΔABC, $\angle BAC=60^0$, AD=DC, AF=FB, AB=6; AC=4

Знайти кут між медіанами BD і CF.

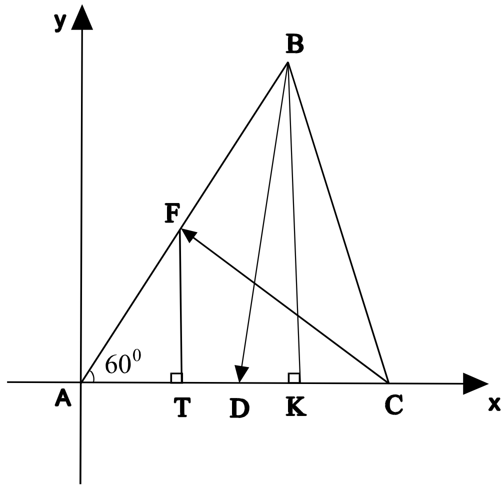


Рис. 2.6.2

Розв'язання:

Виберемо прямокутну систему координат так, як показано на рис. 2.6.2. У цій системі координат вершини трикутника будуть A(0;0); C(4;0); B(3; $3\sqrt{3}$).

Знайдемо координати $\overline{BD}$і $\overline{CF}$: $\overline{BD}$= (-1; $3\sqrt{3}$), $\overline{CF}$ = (-2,5; $1,5\sqrt{3}$).

Координати вершини B визначено з ΔABC:

AK = AB cos60° = 3; BK = AB sin60° = $3\sqrt{3}$

Координати т. D будуть (2; 0), F(1,5; $1,5\sqrt{3}$)

$$\cos\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|^{\wedge}\left|\overrightarrow{CH}\right|\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{BD}^{\wedge}\overrightarrow{CF}\right)\right| = \frac{|2{,}5-13{,}5|}{\sqrt{1+27}\cdot\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{27}{4}}} = \frac{11}{2\sqrt{91}}$$

$$\left(\overrightarrow{BD}^{\wedge}\overrightarrow{CF}\right) = \arccos\frac{11}{2\sqrt{91}}.$$

Задача 3.

В прямокутному трикутнику із сторонами a і b ($a > b$) і гострим кутом α (30^0; 45^0; 60^0) визначити кут між діагоналлю проведеною з вершини гострого кута, і більшою стороною.

Дано ABCD – паралелограм, AD=BC=a; AB=DC=b, $\angle BAD = \alpha$.

Знайти: $\angle CAD$.

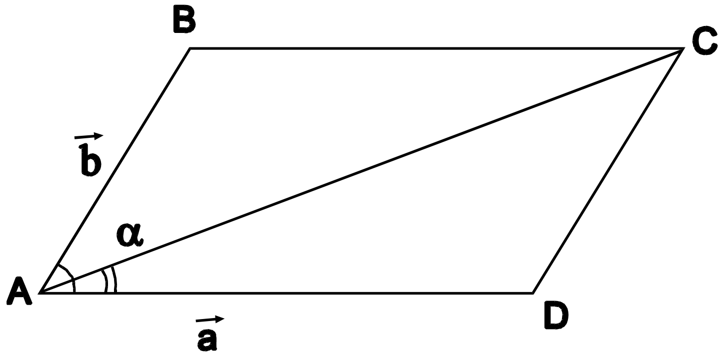


Рис. 2.6.3

Розв'язання:

1) Кут між діагоналлю AC і стороною AD збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overline{AD}$, тоді

$$\cos\angle CAD = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|}$$

2) Виберемо базові вектори $\overline{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

3) Виразимо вектор $\overrightarrow{AC}$ через базові $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

4) Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ і абсолютну величину вектора $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \overline{a^2} + \bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha = a^2 + ab \cdot \cos\alpha$$

Так як $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\overrightarrow{\mathrm{AC}^2} = \overrightarrow{a^2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{b^2}$, звідси

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha + \overrightarrow{b^2}$, тобто $\left|\overline{AC}\right|^2 = a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2$

Значить: $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}$

Тоді $\cos\angle CAD = \dfrac{a^2 + ab\cos\alpha}{a\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}$, або $\cos\angle CAD = \dfrac{a^2 + b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}$.

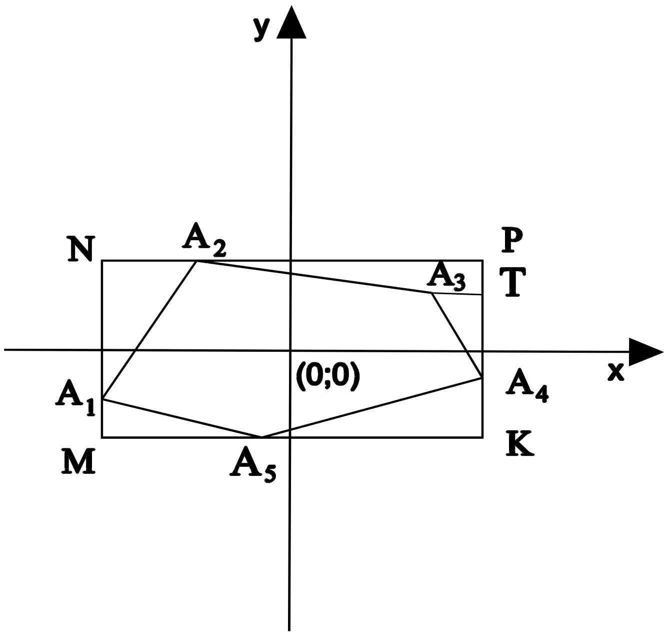
Знаючи косинус кута CAD, визначимо його величину. Наприклад, якщо $a = \sqrt{3} - 1$, b=2, $\alpha = 60^0$, то $\cos\angle CAD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тобто в цьому випадку кут між діагоналлю AC і AD дорівнює 45^0.

Задача 4.

Довести, що коли координати всіх вершин будь-якого опуклого многокутника є цілі числа, то його площа виражається раціональним числом.

Дано: $A_1A_2A_3A_4A_5$ – опуклий многокутник.

Довести: $S_{A1A2A3A4A5}$ – є раціональним числом.



Розв'язання:

Завжди можна побудувати прямокутник такий, щоб жодна з вершин даного многокутника не знаходилася зовні.

На основі аксіоми про площі запишемо таку рівність:

$S_{A1A2A3A4A5} = S_{MNPK} - (S_{\Delta A1NA2} + S_{A2PTA3} + S_{A3TA4} + S_{A4KA5} + S_{A5MA1})$ (1)

Сторони побудованого прямокутника, катети утворених прямокутних трикутників, основи і висоти створених трапецій є натуральні числа, як сума або різниця відповідних координат точок. Тому площі їх цілі або дробові (додатні) числа. Тоді з рівності (1) випливає, що площа шуканого многокутника є раціональним числом.

2.7. Розв'язування задач координатно-векторним методом при підготовці до НМТ. Практична перевірка ефективності дослідження

Деякі задачі зручніше розв'язувати за допомогою координатно-векторного методу. Це вправи, в яких йдеться про куб, прямокутний паралелепіпед або тетраедр.

Координатний метод часто поєднують з векторним, розглядаючи вектори, задані координатами.

Координатно-векторний метод – один з важливих методів розв'язування задач, який має велике практичне значення, так як застосовується у фізиці, картографії, інженерній практиці, геодезії. Сутність координатного, як і векторного методу полягає в тому, що геометрична задача перекладається на мову алгебри, тоді її розв'язання зводиться до розв'язання рівнянь, нерівностей чи їх систем.

Задачі, які розв'язуються цим методом, поділяються на три типи: задачі на доведення, задачі на обчислення; задачі на побудову.

Для того, щоб розв'язати задачу з застосуванням координатно-векторного методу слід:

1. Сформулювати задачу мовою векторів чи координат.
2. Перетворити алгебраїчний вираз.
3. Перекласти отриманий результат на мову геометрії [40, с. 150]

Спочатку необхідно встановити, чи доцільно розв'язувати задачу координатно-векторним методом.

Розв'язувати задачу цими методами має сенс, якщо це задачі:

• пов'язані з доведенням паралельності прямих (відрізків);

• в яких треба довести, що деяка точка ділить відрізок у певному відношенні або є його серединою;

• в яких треба обґрунтувати, що три точки A, B і C лежать на одній прямій;

• в яких треба довести, що даний чотирикутник ABCD – паралелограм;

• на знаходження довжини відрізка;

• на знаходження величини кута;

• на відшукання геометричних місць точок;

• на доведення залежностей між лінійними елементами. [40, с. 151]

Для оволодіння вмінням переводити з геометричної мови на координатно-векторну та навпаки необхідно знати, як те чи інше координатно-векторне співвідношення можна виразити на геометричній мові.

Перш ніж вводити систему координат, необхідно проаналізувати задачу, встановити координати яких точок потрібно знайти, рівняння яких прямих (та площин) одержати й подумати, в якій з обраних систем координат це можна зробити простіше.

Для розв'язування задач координатно-векторним методом можна використовувати таку схему:

1. Зробити рисунок до задачі;
2. Вибрати основні вектори;
3. Виразити дані вектори через основні;
4. Виконати операції над знайденими векторними залежностями за правилами векторної алгебри;
5. Перевести результат векторної рівності на мову геометрії;
6. Записати відповідь.

Результат розв'язування задач не залежить від вибору системи координат. Проте вдалий її вибір допомагає у розв'язанні задачі, швидкості і легкості одержання необхідного результату. Тому, перш ніж вводити систему координат, необхідно проаналізувати задачу, встановити, координати яких точок треба визначити. Загального правила не існує: кожна задача вимагає індивідуального підходу.

В школі вивчається елементарний підхід до розв'язання задач, тобто використовують найпростіші теоретичні знання з векторної алгебри. Існує багато інших формул для обчислення площ фігур, відстані від точки до прямої і площини і т.ін.

Задача. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$, де M – середина ребра AD.

Розв'язання

Задамо в просторі систему координат, початком якої є вершина A куба, а осі *x*, *y*, *z* містять відповідно ребра AB, AD, AA_1 (рис.2.7.1).

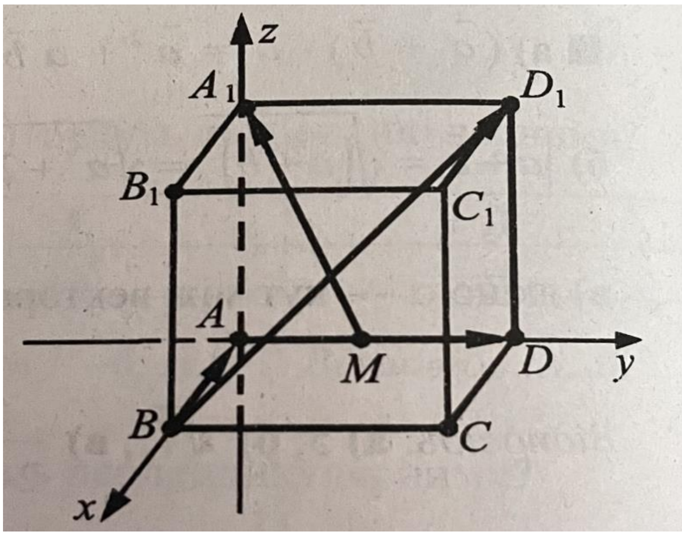


Рис.2.7.1

Приймемо довжину ребра куба за 1. Тоді B(1; 0; 0), D_1(0; 1; 1), M(0; 0,5; 0), $\overrightarrow{BD_1}$(-1; 1; 1), $\overrightarrow{MA_1}$(0; -0,5; 1). Знайдемо кут φ між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$

$$\cos\varphi = \frac{(-1)\cdot 0+1\cdot(-0,5)+1\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0,25+1}} = \frac{0,5}{\sqrt{3\cdot 1,25}} = \frac{0,5}{0,5\cdot\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$\varphi = arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Відповідь: $arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Задача.

Основою піраміди SABCD є паралелограм. Проведено площину, що перетинає бічні ребра SA, SB, SC, SD піраміди відповідно в точках K, L, M, N таких, що $SK = \frac{1}{k}SA,\ SL = \frac{1}{l}SB, SM = \frac{1}{m}SC, SN = \frac{1}{n}SD.$ Знайти залежність між числами k, l, m, n.

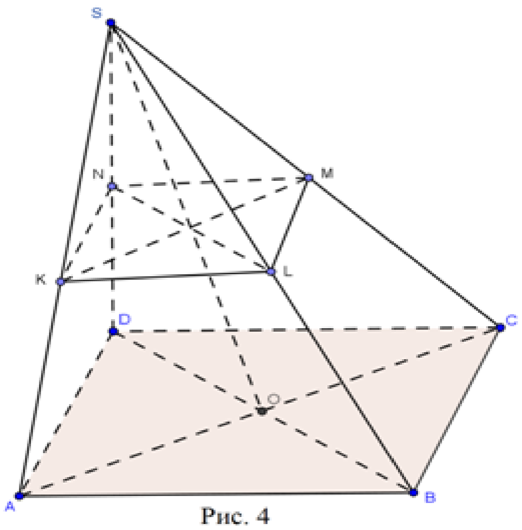


Рис. 4

Розв'язання.

За умовою належності чотирьох точок M, N, K і L, маємо:

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MK} + \beta\overrightarrow{ML}.$$

Представимо кожен із векторів, що входять в рівність у вигляді різниці двох векторів зі спільним початком в точці S. Отримаємо:

$$\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \alpha\left(\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SM}\right) + +\beta\left(\overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SM}\right).$$

$$\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \gamma\overrightarrow{SM},$$

де $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Враховуючи умову задачі і попередню рівність перепишемо так

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{\alpha}{k}\overrightarrow{SK} + \frac{\beta}{l}\overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{SC}.$$

Позначимо через точку O перетин діагоналей паралелограма ABCD. Так як O – середина діагоналей AC і BD, то

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}.$$

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right).$$

Таким чином, вектор $\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ виражаємо двома способами через не компланарні вектори $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ і $\overrightarrow{SC}$.

В силу єдиності розкладу вектора, отримуємо числові рівності:

$\frac{\alpha}{k}=\frac{1}{n}$, $\frac{\beta}{l}=-\frac{1}{n}$, $\frac{\gamma}{m}=\frac{1}{n}$.

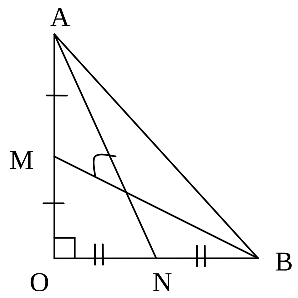
Звідси, враховуючи, що $\alpha+\beta+\gamma=1$, знаходимо:

$\frac{k}{n}-\frac{l}{n}+\frac{m}{n}=1,$

$k+m=l+n.$

Наведемо числовий приклад. Якщо площина проходить через вершину A тетраедра ABCD і перетинає його ребра SB і SD в точках L і N таких, що $\overrightarrow{SL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$, то , $l=2$, $n=3$, значить m =2+3-1=4 $m=2+3-1=4$, тобто $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$.

Задача. Довести, що косинус кута між медіанами катетів рівнобедреного трикутника дорівнює $-\frac{4}{5}$.



Доведення: нехай задано рівнобедрений прямокутний трикутник OAB (OA = OB = a), точки M і N – відповідно середини OA і OB. Розмістимо цей трикутник в прямокутну систему координат так, щоб точка O збігалася з початком координат, а катети OA і OB лежали на відповідних осях координат *x і y*. Тоді в цій системі координат матимемо A (a; 0), B (0; a), M($\frac{a}{2}$; 0),

N (0; $\frac{a}{2}$). Вектори, які збігаються з медіанами, матимуть координати

$\overrightarrow{AN}$(-a; $\frac{a}{2}$) і $\overrightarrow{BM}$($\frac{a}{2}$; a). Кут між медіанами – це кут між векторами $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{BM}$, який знайдемо за формулою: cos ($\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$) =

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{-\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{-a^2}{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{4}{5}$$

що й треба було довести.

Задача. Знайдіть кут між мимобіжними прямими, одна з яких містить діагональ куба, а інша – діагональ його грані.

Розв'язання.

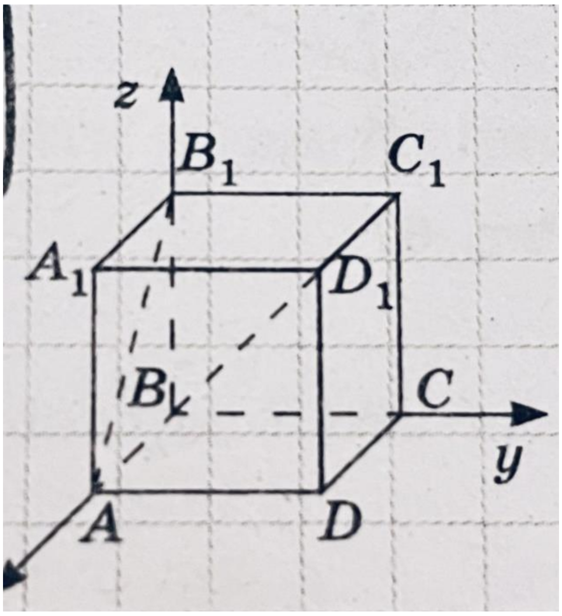


Рис. 2.7.

Розмістимо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a в системі координат так, як показано на рисунку 2.7. і знайдемо кут між прямими BD_1 і B_1A, користуючись формулою скалярного добутку векторів

$\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = |\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1A}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{B_1A})$.

Оскільки $B(0; 0; 0)$, $D_1(a; a; a)$, $B_1(0; 0; a)$, $A(a; 0; 0)$, то $\overrightarrow{BD_1}(a; a; a)$, $\overrightarrow{B_1A}(a; 0; -a)$.

Отже, $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = a \cdot a + a \cdot 0 + a \cdot (-a) = 0$, тобто вектори перпендикулярні і шуканий кут дорівнює 90°.

Відповідь: 90°.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E середина A_1B_1, точка F – середина B_1C_1. Знайти кут між прямими AE і CF.

Розв'язання. 1) Введемо систему координат із початком у точці A(0; 0; 0).

2) Маємо A(0; 0; 0), E(0; 0,5; 1), C(1; 1; 0), F(0,5; 1; 1), $\overrightarrow{AE}$(0; 0,5; 1), $\overrightarrow{CF}$(-0,5; 0; 1).

3) Нехай φ – кут між прямими AE і CF. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|} = \frac{|0\cdot(-0,5)+0\cdot0,5+1\cdot1|}{\sqrt{0^2+0,5^2+1^2}\cdot\sqrt{(0,5)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{1,25} = 0,8.$$

Отже, $\varphi = \arccos 0,8$.

Відповідь: $\arccos 0,8$.

Національний мультипредметний тест (НМТ) – обов'язковий іспит для вступу до закладів вищої освіти в Україні, який замінив ЗНО. Цей формат введений як альтернатива для проведення вступних випробувань під час війни, забезпечуючи доступність і прозорість оцінювання.

НМТ дозволяє скласти кілька предметів в один день.

Формат тесту поєднує онлайн-технологіїї та контроль у спеціально підготовлених пунктах тестування.

НМТ – це комп'ютерний онлайн-тест, що складається з чотирьох предметів, які об'єднані в 2 блоки по 120 хвилин:

- перший блок: українська мова та математика;
- другий блок: історія України та предмет на вибір (українська література, географія, біологія, фізика, хімія, іноземні мови (англійська, французька, німецька, іспанська).

Три з них обов'язкові — це українська мова, математика та історія України. Один буде на вибір.

У 2025 році **блок завдань з української мови** міститиме 30 завдань.

Блок завдань з математики міститиме 22 завдання: 15 завдань з вибором однієї правильної відповіді з 5 варіантів, 3 завдання на встановлення відповідності та 4 завдання з короткою відповіддю. [48]

Завдання з тем «Координати» і «Вектори» містяться в блоках завдань з математики. Приклади завдань розміщені в додатках.

Практична перевірка ефективності дослідження

З метою виявлення рівня знань учнів з теми «Координати, вектори» було проведено практичну перевірку. Дослідження було проведено на базі Рівненського ліцею №22 Рівненської міської ради в 10 класі. Під час проходження педагогічної практики для учнів класу проводились уроки, на яких використовували матеріали роботи, задачі різної складності з теми дослідження, підібрано завдання для самостійної роботи. Після завершення вивчення теми учням було запропоновано виконати тестові завдання, які дали змогу оцінити рівень засвоєння знань з теми дослідження (представлені в додатку А).

За результатами тестування учнів 10-Б класу були отримані такі результати, представлені в таблиці 3

Таблиця 3

Результати тестування учнів 10-Б класу

	Кількість учнів	%
Високий рівень	2	9,52
Достатній рівень	11	52,38
Середній рівень	8	38,10

Результати перевірки показали, що рівень знань учнів класу з теми «Координати, вектори» вище середнього. Більшість учнів класу засвоїли основні поняття теоретичного матеріалу і сформували вміння застосовувати координатний, векторний методи до розв’язування задач.

Отже, використання великого обсягу завдань і задач на уроках математики з теми дослідження сприяє підвищенню рівня знань учнів.

Висновки

Метою даної роботи було дослідження методичних особливостей вивчення й використання координатного, векторного та координатно-векторного методів у шкільному курсі геометрії. Для цього були виконані наступні завдання: проаналізовано науково-методичну, шкільну літературу, зміст програм з математики по даній темі; описано координатний, векторний і координатно-векторний метод та способи застосування до розв’язування планіметричних і стереометричних задач; наведено приклади математичних задач, які розв’язуються координатним, векторним і координатно-векторним методами; проаналізовано завдання для підготовки до НМТ.

Координатно-векторний метод – один із важливих методів розв’язування задач. Має велике практичне значення, так як застосовується не лише в математиці, а й у фізиці, картографії, інженерній практиці, геодезії, обробці даних і комп’ютерній графіці.

Координатний метод спрощує і скорочує розв’язування задач, не потребує побудови складних малюнків, але водночас іноді слід виконувати багато обчислень.

Векторні методи застосовуються для обчислення відстаней, площ, обсягів у тривимірному просторі, наприклад, для навігації роботів. Він забезпечує точність і надійність розрахунків, дозволяє розв’язувати багатовимірні задачі і спрощує роботу з напрямленими величинами. Можна застосовувати й до розв’язування алгебраїчних задач. Але в шкільному курсі математики ця тема вважається складною. На вивчення координат на площині та в просторі відводиться мало часу. Тому важливу роль відіграє навчання розв’язуванню задач координатно-векторним методом.

Поєднуючи координатний і векторний методи, можна розв’язувати задачі пов’язані з знаходженням кутів. [21]

Однією з головних особливостей вивчення даної теми є необхідність поєднання повторення матеріалу про вектори та координати на площині з узагальненням матеріалу у просторі.

Використання координатного і векторного методів у навчанні математики дає змогу доповнити алгоритмічну складову навчання математики евристичною. Алгоритмічна складова полягає в певній алгоритмізації застосування координатного і векторного методів до розв’язування задач. Складність для учнів становить не стільки застосування правил-орієнтирів даних методів до розв’язування задач, а саме відбір тих задач, які розв’язуються за допомогою координат або векторів. Уникнути цього можна, ознайомивши учнів з ознаками геометричних задач, які раціонально розв’язувати за допомогою координат або векторів. До ознак геометричних задач, що розв’язують координатним методом, відносять наступні: вимога задачі пов’язана з обчисленням довжин деяких відрізків і величин кутів; можна раціонально вибрати прямокутну систему координат, пов’язавши осі координат з елементами даної фігури. Геометричні задачі, що розв’язуються векторним методом, мають такі ознаки: вимога задачі пов’язана із знаходженням довжин відрізків, відношенням відрізків паралельних прямих, знаходженням величин кутів, з’ясуванням взаємного розташування прямих (паралельність, перпендикулярність тощо). Евристична складова вчить знаходити нестандартне розв’язання, сприяє розвитку інтелектуальних умінь та творчих здібностей учнів.

Для перевірки ефективності було проведено дослідження з метою виявлення рівня засвоєння даної теми учнями, розроблено тестові завдання, підібрано завдання для самостійної та контрольної роботи. Результат показав, що рівень знань учнів вище середнього. Цьому сприяло розв’язування великої кількості задач різної складності.

Слід звернути увагу учнів на те, що координатний і векторний методи доведення теорем не універсальні, векторний метод зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів. Інколи для розв’язування деяких геометричних задач буває зручно поєднувати координатний і векторний методи (використовувати при цьому координати відповідних векторів), а на деяких етапах розв'язування — застосовувати відомі геометричні співвідношення.

Особливого значення векторно-координатний метод набув у теперішній час як складова у моделюванні простору засобами комп'ютерної візуалізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антонов В. В. Векторний аналіз і його застосування в фізиці та техніці. Київ: Вища школа, 2005.

2. Апостолова Г. В. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень. Київ: Генеза, 2013. 304 с.: іл.

3. Апостолова Г.В. Геометрія: 9: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2009. 304 с.: іл.

4. Бевз Г.П. Метод координат і його вивчення в школі. URL: http://dm.inf.ua/_34/c.82-86.pdf (дата звернення 01.03.2024)

5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

6. Бродський Я.С., Гречук В.Ю, Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Стереометрія у старшій школі: посібник для вчителя. Тернопіль: Начальна книга – Богдан, 2005. 404 с.

7. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія: підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Оріон, 2022. 223 с.

8. Великий довідник школяра з тестовими завданнями / [авт. тексту Г.П.Бевз]. Київ: Махаон-Україна, 2007. 864 с.

9. Гельфанд І. М., Глаголєва О.Г., Кирилов О.О. Метод координат: навч. посіб. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 216 с.

10. Геометрія: 11 клас: [підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень] / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. 3-те видання. Київ: Генеза, 2014. 310 с.: іл.

11. Готуємося до нового навчального року / А.Г.Мерзляк [та ін.]. *Математична газета*. 2009. № 7-8. С. 16-35.

12. Декартові координати і вектори на площині. URL: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/12_9.htm (дата звернення 5.07.2024)

13. Дерев'яненко Н. Декартові координати на площині. *Математика.* 2011. № 46-47. С. 45-47.

14. Єременко А. В. Основи векторного аналізу. Дніпро: Дніпровський університет, 2008.

15. Єршова А.П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов. Харків: Ранок, 2009. 256 с.: іл.

16. Жученко, І.М. Вектори на площині. *Математика в школах України*. 2012. №6 (лютий) С.24-27.

17. ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ. URL: https://ir.stu.cn.ua/jspui/bitstream/123456789/12140/1/Збірник%20задач%20до%20практ.%20занять%20і%20сам.роботи%20з%20математики.pdf (дата звернення 15.11.2024)

18. Істер О. Геометрія: підручн. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. 2-ге видання, перероблене. Київ: «Генеза», 2022. 239 с.

19. Істер О. Математика: підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. 2-ге видання. Київ: Генеза, 2023. 304 с.

20. Істер О. Математика: підруч. для 6 кл. закладів загальної середньої освіти. (У 2 ч.). Ч. 2. Київ: Генеза, 2023. 208 с.

21. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: профіл. рівень: підручн. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: «Генеза», 2019. 368 с.

22. Крайзман М. Л. Деякі методи та прийоми розв'язування задач із математики: навч.-метод. посіб. / М. Л. Крайзман ; пер. і ред. канд. фіз.-мат. наук Т. С. Кудрика. Львів: Чижиков І. Е. [вид.], 2015. 238 с.

23. Крайзман М.Л. Розв'язування геометричних задач методом векторів: Навч.-метод. посібник. Київ: Рад. шк., 1980. 96 с.

24. Краснов М. Л., Кисельов А. І. Вектори і матриці в задачах і прикладах. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2010.

25. Кудрявцев Л. Д. Вектори в обчисленнях і геометрії. Київ: Наукова думка, 2015.

26. Кузьмук І.В. Координати середини відрізка. *Математика в школах України.* 2019. № 19-21. С. 47-50.

27. Мазур Н. В. Прямокутна система координат у просторі. Математика в школах України. 2012. № 22-24 (358-360). С. 41-43.

28. Маркевич І. О. Навчання учнів методам розв’язування планіметричних задач: методичний посібник / І. О. Маркевич, Г. Я. Клекоць, Д. Т. Белешко. Рівне, 2013. 35 с.

29. Маскаєва І.А. Розв’язування геометричних задач векторним методом. *Математика в школах України.* 2019. №19-21 (607-609). С. 41-46.

30. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО (НМТ)/ уклад. А.М. Капіносов та ін. Тернопіль: Підручники і посібники, 2024. 448 с.

31. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Харків : Гімназія, 2018. 240 с. : іл.

32. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручн. для 9 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2021. 335 с.: іл.

33. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручн. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2021. 255 с.: іл

34. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти автор Істер О.С.

35. Навчальна програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з математики // Міністерство освіти і науки України. URL: http://www.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869088/. (дата звернення 20.03.2024)

36. Навчальна програма з математики (рівень стандарт) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/ zagalna-serednya-

osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11- klasiv.(дата звернення 20.03.2024)

37. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень). затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv. (дата звернення 20.03.2024)

38. Навчальна програма з математики. Профільний рівень для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018 № 406. URL: https://mon.gov.ua/ua/ osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10- 11-klasiv (дата звернення 20.03.2024)

39. Нелін Є.П. Геометрія в таблицях: Навчальний посібник для учнів 7-11 класів. Харків: Світ дитинства, 2001. 64 с. + Додат. (32 с.)

40. Попова Ю.А., Беседін Б.Б. Використання координатного та векторного методу в шкільному курсі геометрії URL: https://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/2013/150.pdf. (дата звернення 2.03.2024)

41. Роєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. геометрія у таблицях. 10-11 класи: Навч. посібник. Харків: Видавнича група «Академія», 2001. 152 с.

42. Скрипник О. П., Григоренко В. М. Векторний метод у задачах фізики. Одеса: Одеський політехнічний університет, 2011.

43. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ: Вища шк., 2006. 582 с: іл.

44. Старова, О.О. Вектори на площині. *Математика в школах України*. 2015. №7-8. С.67-72.

45. Тадеєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних

закладів / За ред. М.Й. Ядренка. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. 480 с.

46. У 2025 році все ще буде НМТ і не буде ДПА, Рада ухвалила ... URL: https://suspilne.media/868399-vru-uhvalila-vstup-2025-nmt-zalisaetsa-dpa-poki-ne-povertaut/ (дата звернення 10.10.2024)

47. Філіпповський Г.Б. Рене Декарт. Декартова система координат. *Математика в школах України*. 2011. № 35-36. С. 22-27.

48. Шевчук Л.В. Декартові координати на площині. *Математика в школах України*. 2011. № 35-36. С. 30-32.

49. Що таке НМТ і для чого він потрібний? Основні зміни 2025.

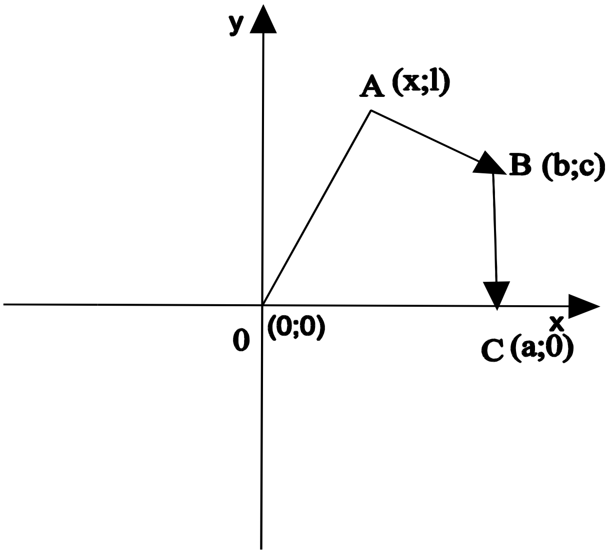
Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1.

Якщо сума квадратів діагоналей чотирикутника дорівнює сумі квадратів його сторін, то чотирикутник є паралелограм.

Довести це.

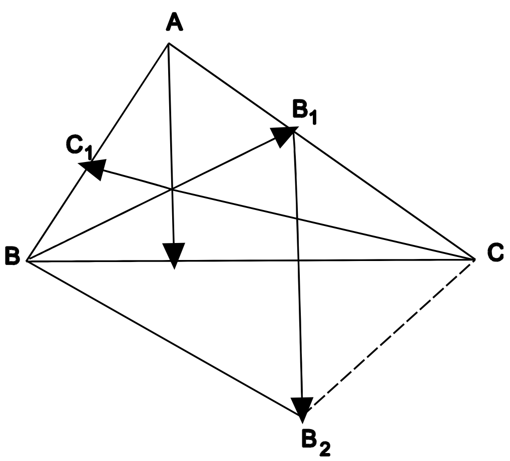
Вказівка: Вибрати систему координат, як показано на малюнку і довести, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.



Задача 2.

Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти трикутника ABC. Довести, що рівність $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли ΔABC рівносторонній.

Вказівка: B_1 і B_2 симетричні відносно BC. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$



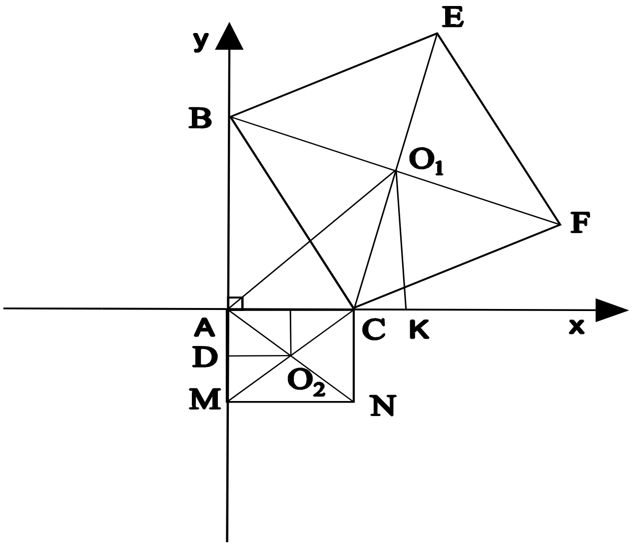
Задача 3.

На діаметрі круга, радіус якого дорівнює R, дано дві точки, рівновіддалені від центра. Через одну з них проведено хорду, кінці якої сполучено з другою точкою. Довести, що сума квадратів сторін утвореного трикутника є величина стала.

Задача 4.

Прямокутний трикутник ABC ($\angle A=90°$) і два квадрати BEFC і AMNC розміщено так, що точки E і A лежать з різних боків від прямої BC, а точки M і B – з різних боків від прямої AC. Знайти відстань між центрами квадратів, якщо AB=a; AC=b.

Вказівка: AO_1 -бісектриса $\angle A$. Навколо ABO_1C – можна описати коло, т. B буде серединою дуги BO_1C, що випливає з рівності хорд O_1B і O_1C.



Відповідь: $O_1O_2=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+2ab+2b^2\right)}$