МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ З МЕТОДИКОЮ ВИКЛАДАННЯ

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему

«Формування в учнів 7 – 9 класів вмінь застосовувати допоміжні елементи при розв'язуванні задач»

Виконав: здобувач ступеня вищої освіти «магістр»
Іван БУЛКА

Керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Наталія СИНІЦЬКА

Рецензент:

кандидат педагогічних наук, доцент

Юрій ЛОТЮК

Рівне – 2024 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

Наукові та технічні знання, високі моральні якості особистості, її інтелектуальний і творчий потенціал, винахідливість, ініціатива, чуття нового, а також здатність адаптуватися до змінюваних умов мають вирішальне значення для економічної ефективності та конкурентоспроможності України, а також для забезпечення її інтелектуальної самостійності і гідного місця в сучасному світі. У цих умовах особливо важливим стає завдання школи щодо розвитку учнів і залучення їх до творчої діяльності. Однак це можливо лише за умови впровадження різних евристичних методів у навчальний процес та створення спеціальних умов для розвитку індивідуальності кожного учня. Таким чином, проблема евристичного навчання стає однією з ключових у методиці викладання математики. Евристичний підхід базується на психології творчого мислення, що включає процес пошуку нових ідей та прагнення до формалізації навчальної діяльності з урахуванням індивідуальних особливостей учнів. При аналізі різних методів навчання, які стосуються розв'язання математичних задач, формування понять та навчання доведенням теорем на неалгоритмічній основі, постає питання дослідження творчої розумової діяльності.

Сьогодні питання покращення математичної підготовки та розвитку математичної культури як учителів, так і учнів набуває особливої важливості. Одним із факторів, що можуть суттєво змінити ситуацію, є перегляд теоретичних і методичних аспектів ролі та місця математичних задач у навчанні математики. Адже саме задачі можуть бути ефективно використані для: формування внутрішньої мотивації та інтересу до навчальної діяльності; ілюстрації та конкретизації вивченого матеріалу; розвитку в учнів спеціальних вмінь і навичок; контролю та оцінки результатів навчання; формування в учнів узагальненого підходу до різноманітних ситуацій і розвитку загальних умінь розв’язувати будь-які задачі.

Отже, евристична діяльність є одним із найефективніших видів діяльності, в процесі якої формуються та розвиваються відповідні знання і вміння учнів. Досвід, отриманий під час навчання математики, допомагає кожній особистості пройти всі етапи розв’язання практичних завдань — від початкової постановки задачі до аналізу отриманих результатів. Евристичні вміння, набуті під час вивчення дисципліни, реалізуються на кожному етапі створення інноваційних рішень у житті. Це створює міцну основу для досягнення зазначених цілей та подальшого навчання. Таким чином, формування евристичних вмінь учнів під час виконання практичних завдань з математики є одним із шляхів досягнення поставлених цілей [31].

Одним із ключових видів евристичних навичок є застосування допоміжних елементів при розв'язанні задач. Часто виникають ситуації, коли встановити зв'язок між відомими даними та шуканими значеннями безпосередньо з тексту завдання неможливо. Щоб прояснити цей зв'язок, необхідно використовувати кілька допоміжних елементів, зокрема шляхом заміни невизначених невідомих на конкретні величини або шляхом добудови допоміжних елементів, такими як трикутники (один, рівні, подібні) та інші геометричні фігури.

Методам і прийомам розв’язування геометричних задач присвячені дослідження В. Г. Бевз, М. Я. Ігнатенка, Ю. І. Мальованого, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця та ін. Розв’язування задач з використанням допоміжних елементів розглядалися в роботах Ф. К. Благодира (допоміжні побудови), І. А. Кушніра (допоміжні лінійні елементи, кути, площі, об’єми), Г. М. Кирилецької (допоміжні фігури), В. Є. Куценка (допоміжні кола) та ін. Проте, методика навчання учнів використовувати допоміжні елементи в процесі розв’язання геометричних задач розроблена не достатньо повно**.**

Мета дослідження полягає у вивченні проблеми формування вмінь у учнів 7-9 класів щодо розв’язування задач за допомогою методу допоміжних елементів.

Об’єктом дослідження є процес навчання учнів 7-9 класів розв’язуванню геометричних задач.

Предметом дослідження виступає використання методу допоміжних елементів при розв’язуванні задач, який є одним із основних видів евристичних вмінь.

Методи дослідження включають теоретичні, такі як аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури, а також змісту програм і підручників для глибшого розкриття теми; і емпіричні, до яких належать спостереження, бесіди, анкетування, опитування, аналіз, узагальнення та систематизація педагогічного досвіду, а також проведення педагогічного експерименту.

Завдання дослідження:

1. Вивчити питання формування вмінь учнів у розв’язуванні задач.

2. Проаналізувати поняття задачі в контексті навчання математики та сутність евристичного навчання в процесі вивчення математики.

3. Теоретично обґрунтувати метод допоміжних елементів як один із видів евристичної діяльності.

4. Розглянути практичне використання методу допоміжних елементів та побудов при розв’язуванні задач для учнів 7-9 класів.

5. Розробити методичні рекомендації щодо застосування методу допоміжних елементів та побудов для розв’язування задач для учнів 7-9 класів та їхніх вчителів.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що з точки зору системного підходу та розвивального навчання, вивчена проблема формування в учнів навичок розв’язування задач. Теоретично обґрунтовано метод допоміжних елементів як один із ключових видів евристичної діяльності..

Практичне значення дослідження полягає у впорядкуванні методу допоміжних елементів побудов та створенні на їх основі методичних рекомендацій для учнів і вчителів.

Дослідження має таку **структуру**: вступ, два розділи та висновки до кожного з них, загальні висновки, список використаних джерел та додатки.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Задачі у навчанні математики

1.1.1 Поняття «задача» і функції задач у навчанні математики

У психологічній та педагогічній літературі немає єдиного визначення терміна «задача». В залежності від підходу до взаємозв'язку між суб'єктом і задачею, автори трактують його по-різному. Г. О. Балл провів детальне дослідження цього питання в психологічній літературі. На думку науковця, термін «задача» використовується для позначення об'єктів, які належать до трьох різних категорій:

1) мети дій суб'єкта та вимог, які до нього висуваються;

2) ситуації, що, поряд із метою, включає умови, за яких її потрібно досягти;

3) словесного формулювання цієї ситуації.

Г. О. Балл зазначає, що в психологічній літературі термін «задача» найчастіше вживається для позначення об’єктів другої категорії. Водночас для об’єктів першої категорії застосовуються вирази «мета дії» та «вимога задачі», а для об’єктів третьої категорії – «формулювання задачі». [5].

Проаналізувавши різні трактування поняття задачі, можна відзначити, що погляди на взаємини між суб’єктом і задачею суттєво відрізняються. Прихильники підходу, який розглядає задачу як ситуацію, в якій має діяти суб’єкт, включають його в саме визначення задачі. Цю точку зору поділяє більшість психологів та кібернетиків. Дослідник підкреслює, що задачі не можуть існувати без суб’єкта, проте те, що одна особа вважає задачею, для іншої може не бути такою.

Прихильники третього підходу до трактування задачі не враховують суб’єкта в цьому понятті. Найбільш чітко та послідовно цю позицію викладає Л.М. Фрідман, який описує задачу як модель проблемної ситуації, що виражена через знаки певної природної або штучної мови. Як зазначає дослідник, проблемна ситуація виникає, коли суб’єкт, займаючись діяльністю, спрямованою на певний об’єкт, стикається з труднощами або перешкодами. Проте проблемна ситуація – це не лише перешкода в діяльності суб’єкта, а й усвідомлена ним проблема, для вирішення якої він прагне знайти спосіб. Таким чином, у поняття проблемної ситуації Л.М. Фрідман включає суб’єкта. Отже, задача є моделлю ситуації, елементом якої є суб’єкт, що усвідомлює труднощі своєї діяльності. Іншими словами, Л.М. Фрідман наділяє це поняття «суб'єктивними рисами», які він намагається не помічати.

Слід зазначити, що різні автори по-різному інтерпретують співвідношення між поняттями «задача» і «проблемна ситуація». Наприклад, Л.М. Фрідман та деякі інші дослідники вважають, що поняття проблемної ситуації є первинним; психологи стверджують, що суб'єкт є складовою частиною проблемної ситуації; інші науковці, зокрема С.Л. Рубінштейн, трактують проблемну ситуацію як певну об'єктивну умову, з якої починається процес мислення. Згідно з С.Л. Рубінштейном, задача є результатом аналізу проблемної ситуації людиною, що містить певні нерозкриті елементи. Таким чином, дослідник розглядає суб'єкт як частину задачі. Однак існує й протилежна точка зору, згідно з якою первинним вважається поняття задачі, а проблемна ситуація є вторинною. Остання оцінюється як фактор, що стосується суб'єкта і передбачає його обов'язкову участь. Задача визнається як така, що існує об'єктивно.

Трактування поняття задачі як специфічної взаємодії між суб'єктом і об'єктом має значне значення в дослідженнях кібернетики. У монографії В. М. Глушкова, В. І. Брановицького, А. М. Довгала та інших [28] задача визначається як задачна система, яка аналізується у зв'язку з розв'язуючою системою. Основними елементами задачної системи є предмет дії та вимога, тоді як ключовими елементами розв'язуючої системи є методи і засоби вирішення задачі. Очевидно, що елементи задачної системи є об'єктивним фактором задачі, а елементи розв'язуючої системи – суб'єктивним. Оскільки стаціонарність системи (Р) та проблемність ситуації є суб'єктивними, то й процес розв'язання буде суб'єктивним (кожен вирішуватиме його по-своєму). Проте з таким висновком не можна погодитися. Можна стверджувати, що пошук способу розв'язання має суб'єктивний характер (хоча це стосується лише певних аспектів, оскільки в психологічних дослідженнях підтверджується наявність психологічної структури розв'язування задач). Проте логічна структура розв'язання, що базується на обраному методі, не залежить від особи, яка вирішує задачу.

Виходячи з наведеного вище, можна стверджувати, що найпоширенішим є визначення задачі як системи (Г.О. Балл, Л.М. Фрідман, А.Ф. Есаулов). Автори по-різному трактують явища, що стосуються цього поняття. Деякі з них використовують термін «задача» для позначення об’єктів, які належать до категорії мети дій суб’єкта (О.М. Леонтьєв), інші ж відносять його до категорії ситуації, що включає мету та умови, в яких задача має бути розв’язана (Л.Л. Гурова, Ю.М. та ін.), а треті – до категорії словесного формулювання цієї ситуації (Л.М. Фрідман). Найчастіше термін «задача» вживається для позначення ситуації, що включає мету та умови її досягнення. Цьому поняттю притаманні дві сторони: об’єктивна та суб’єктивна. До об’єктивної належать предмет дії, вимоги, місце в системі задач, логічна структура розв’язування задачі, а також визначеність або невизначеність умов. Суб’єктивна сторона охоплює способи та засоби розв’язування задач [9].

У шкільній практиці задачами в широкому сенсі вважаються не лише текстові та сюжетні задачі, а й різноманітні вправи та приклади.

Процес розв'язування задачі як розумову діяльність вивчає психологія, а методика математики аналізує його. Останнім часом з'явилися спроби дослідити самі задачі, а не лише процес їх розв'язування. Звертається увага на необхідність чіткого розуміння структури задачі. Відомо, що кожна задача має умову (умови) та вимогу (вимоги).

Задачі в навчанні математики виконують дві важливі ролі: вони є об'єктом дослідження та інструментом навчання [50]. Вони слугують основним засобом для встановлення зв'язку між навчанням і реальним життям, сприяють політехнічному напрямку освіти та забезпечують міжпредметні зв'язки як у межах математики, так і з іншими навчальними дисциплінами [39].

Зазвичай виділяють чотири основні функції задач: навчальну, розвивальну, виховну та контрольну.

Навчальна функція полягає у формуванні у учнів системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах навчання. Завдяки системі задач учні не лише вчаться застосовувати отримані теоретичні знання, але й на етапі мотивації усвідомлюють необхідність здобуття нових знань. Під час розв'язування задач вони отримують додаткову теоретичну інформацію та знайомляться з методами розв'язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення учнів, формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, а також вміння математизувати ситуації.

Виховна функція задач полягає у формуванні наукового світогляду учнів, а також у сприянні екологічному, економічному та естетичному вихованню. Вона розвиває пізнавальний інтерес і позитивні особистісні якості, такі як наполегливість, воля та відповідальність за виконувані завдання.

Контрольна функція задач полягає в оцінці рівня навчання, загального та математичного розвитку, а також у визначенні ступеня засвоєння навчального матеріалу як окремими учнями, так і класом в цілому.

Жодна з вказаних функцій не може існувати окремо від інших, проте в кожній конкретній ситуації вчитель повинен визначити основну функцію і, за умови правильної цільової установки, прагнути насамперед до її реалізації. Усі основні функції завдань мають значення в загальному процесі навчання, але останнім часом особливу увагу приділяють розвивальній функції. Не випадково такі видатні вчені, як Д. Поя (1887-1985), Е. Резерфорд (1871-1937), Н. Бор (1885-1962), А. Ейнштейн (1879-1955) та інші, підкреслювали, що завдання повинні не лише сприяти закріпленню знань і тренуванню в їх застосуванні, а й формувати дослідницький стиль мислення та метод підходу до вивчених явищ.

Однією з ключових проблем у шкільній математичній освіті є навчання учнів методам і способам розв'язування задач, а також самостійного пошуку їх рішень. Методи та способи розв'язування залежать від характеру самих задач, а також від знань і допоміжних засобів, якими учні володіють на певному етапі навчання.

Сучасні дослідження психологів, дидактиків і методистів переконливо доводять, що вміння учнів розв'язувати задачі не завжди прямо пов'язане з кількістю розв'язаних ними задач. Навіть якщо учень вирішив багато задач, але не має сформованого загального підходу до їх аналізу та планування розв'язання, він не зможе самостійно вирішувати нові задачі.

1.1.2. Види задач з математики

В залежності від поставленої вимоги, задачі поділяються на обчислювальні, довідкові, конструктивні та дослідницькі. У обчислювальних задачах необхідно визначити число (або набір чисел) на основі заданих чисел та умов, що пов'язують їх з невідомими величинами.

До цієї категорії відносяться текстові задачі та різноманітні приклади, такі як задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей та їхніх систем.

У задачах на доведення необхідно підтвердити сформульоване в них твердження. У цьому вони не відрізняються від теорем. Тому не дивно, що одне й те саме твердження може бути представлено в різних підручниках або в розділі теорем, або в розділі задач. Теоремами зазвичай вважають найзначніші твердження, які активно використовуються при розв'язуванні різних задач і доведенні інших теорем. Водночас на деякі задачі також можуть посилатися як на теореми.

До задач на побудову відносяться як геометричні задачі, в яких необхідно створити певну фігуру, що відповідає умовам задачі, так і задачі, пов'язані з побудовою графіків функцій, діаграм, перерізів багатогранників та інших об'єктів.

У задачах на доведення потрібно провести аналіз певних аспектів. Розглянемо приклади таких задач.

1. Чи існує піраміда, в якій дві протилежні грані перпендикулярні до основи і взаємно перпендикулярні?

2. Чи може проекція паралелограма у разі паралельного проєктування бути квадратом?

3. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y=\frac{x-1}{2x+1}$.

Залежно від кількості розв'язків задачі на обчислення і побудову бувають визначені і невизначені. *Визначеними* називають задачі, які мають скінченну кількість розв'язків, а *невизначеними* - ті, які мають безліч розв'язків.

За характером даних розрізняють задачі із зайвими і суперечливими даними.

«Розв'язати задачу» для всіх задач (крім задач на доведення) означає знайти розв'язок.

Розв'язок є остаточним результатом процесу вирішення задачі. Опис цього процесу у вигляді послідовності всіх міркувань, зокрема у символічній формі, називається розв'язуванням задачі. Тому письмово оформлений процес пошуку розв'язку подається під заголовком «Розв'язування».

Необхідно погодитися з думками психологів, дидактиків і методистів щодо того, що процес розв'язання задачі складається з кількох етапів: 1) аналіз формулювання задачі, що включає в себе виділення даних і визначення того, що потрібно знайти, довести або дослідити; 2) розробка плану розв'язання; 3) реалізація плану, перевірка та аналіз отриманого розв'язку, тобто доведення того, що знайдений розв'язок відповідає вимогам задачі; 4) обговорення (аналіз) обраного методу розв'язання з метою оцінки його ефективності та можливості застосування інших методів чи способів.

Зазначимо, що не завжди і не для всіх задач необхідно проходити всі чотири етапи. Наприклад, перевірка розв'язання кожної текстової задачі за допомогою рівнянь може бути недоцільною, оскільки це вимагає значної кількості додаткового навчального часу. Проте важливо навчити учнів виконувати таку перевірку і час від часу пропонувати їм її здійснювати. Також етап дослідження не є обов'язковим при розв'язуванні задач на побудову та геометричних задач з використанням тригонометрії. Однак для деяких задач цей етап може виявитися корисним. [50].

1.1.3. Методи і способи розв'язування задач

Основним завданням навчання математики в школі є ознайомлення учнів з математичними методами, зокрема з методами доведення теорем та способами розв'язування задач. Виникає питання: що таке спосіб? У методиці математики під методом розв'язування задач (так само, як і доведення теорем) розуміють сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій та операцій, які дозволяють розв'язувати великий клас задач. Поняття «спосіб розв'язування задачі» є більш вузьким. Це набір прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, що використовуються для розв'язування конкретної задачі або невеликої групи задач певного типу.

Наприклад, у алгебрі найпоширенішим способом розв'язання текстових (сюжетних) задач є метод рівнянь. У геометрії задачі на побудову вирішуються кількома способами: методом геометричних місць, методом геометричних перетворень (таких як центральна та осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, подібність або гомотетія), а також алгебраїчним методом. Векторний метод також широко використовується для розв'язування задач на обчислення і доведення в геометрії. У курсі алгебри та початків аналізу основним методом дослідження функцій і побудови їх графіків є метод, що базується на використанні похідної, тоді як для обчислення площ плоских фігур і об'ємів геометричних тіл застосовується метод інтегралів.

У процесі пошуку рішень для багатьох обчислювальних задач використовують різні методи міркувань, зокрема синтетичний, аналітичний та інколи аналітико-синтетичний. Ці методи зазвичай називають відповідно синтетичним, аналітичним і аналітико-синтетичним методами розв'язування задач. Синтетичний метод, як правило, застосовується в початковій школі та в 5-6 класах основної школи для вирішення найпростіших задач.

При розв'язуванні задачі синтетичним методом міркування ведеться від умов до шуканого, тобто робляться висновки на основі наданих даних. Розглянемо приклад розв'язання задачі за допомогою синтетичного методу.

Задача 1.1.1. Відстань між містами *A* і *B* дорівнює 288 км. З міста *A* до міста *B* виїхав автомобіль зі швидкістю 72 км/год. Одночасно з автомобілем з міста *B* до міста *A* виїхав велосипедист, який зустрівся з автомобілем через 3 год після виїзду. За який час подолає відстань між містами автомобіль? За який - велосипедист?

Розв'язання. 1. Оскільки швидкість автомобіля і відстань між містами відомі, то можна визначити час руху автомобіля:

288:72 = 4 (год).

2. Можна знайти шлях, який автомобіль проїхав до зустрічі:

72-3 = 216 (км).

3. Обчислимо шлях, який подолав велосипедист до зустрічі:

288-216 = 72 (км).

4. Можна знайти швидкість велосипедиста, оскільки шлях завдовжки 72 км він проїхав за 3 год:

72 : 3 = 24 (км/год).

5) Знайдемо час, за який проїхав усю відстань велосипедист:

288:24 = 12 (год).

Відповідь. Автомобіль проїхав увесь шлях за 4 год, а велосипедист - за 12 год.

Пошук розв'язку цієї самої задачі *аналітичним методом* матиме такий вигляд.

Учитель. Що потрібно знати для відповіді на запитання задачі?

Учень. Потрібно знати швидкості автомобіля та велосипедиста. Швидкість автомобіля відома і відомий весь шлях, який подолав автомобіль. Тому весь час руху автомобіля дорівнює 288 : 72 = 4 (год).

Учитель. Що потрібно знати для визначення швидкості велосипедиста?

Учень. Потрібно знати шлях, який велосипедист проїхав за 3 год до зустрічі.

Учитель. Як знайти цей шлях?

Учень. Для цього досить знайти шлях, який проїхав до зустрічі автомобіль, тоді решту відстані між містами проїхав до зустрічі велосипедист.

Учитель. Знайдіть цей шлях.

Учень. 72-3 = 216 (км); 288-216 = 72 (км).

Учитель. Як знайти швидкість велосипедиста?

Учень. Потрібно шлях до зустрічі поділити на витрачений час: 72 : 3 = 24 (км/год).

Учитель. Як знайти час, за який подолав всю відстань велосипедист?

Учень. Для цього потрібно відстань між містами поділити на швидкість велосипедиста: 288 : 24 = 12 (год).

Аналітичний метод сприяє усвідомленому пошуку розв'язків задач, навчаючи учнів самостійно здійснювати цей процес. У старших класах цей метод активно застосовується для розв'язування стереометричних задач, пов'язаних з обчисленням об'ємів та площ поверхонь геометричних тіл. Розв'язування починається з запису відповідної формули, за якою обчислюється необхідна величина, після чого проводиться пошук невідомих величин, що входять до цієї формули.

1.1.4. Методика навчання учнів розв'язування задач

Ефективність методики навчання учнів розв'язуванню задач можлива лише за умови комплексного підходу до навчального процесу. Це передбачає чітке визначення мети навчання, що стосується розв'язування задач певного типу або оволодіння конкретним методом. Необхідно ретельно розробити систему задач, які будуть розв'язуватись на уроці та пропонуватись для домашнього виконання. Важливо також обрати відповідні методи та організаційні форми роботи на уроці, використовувати ефективні засоби навчання, а також здійснювати контроль за сприйняттям учнями методів і способів розв'язування, а також за набутими ними навичками та вміннями.

У процесі вирішення задач відбувається як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Багато шкільних задач, зокрема алгебраїчні вправи, опорні задачі на побудову, а також вправи на дослідження функцій, обчислення похідних і інтегралів, виконуються за певними алгоритмами. Опанування цих алгоритмів учнями є важливим аспектом навчання математики. Філософи вважають, що немає кращого способу створити умови для творчої діяльності, ніж досконале знання алгоритмів. Дійсно, розв'язування творчих і нестандартних задач врешті-решт зводиться до виконання відомих опорних задач, які розв'язуються за певними алгоритмами. На жаль, часто на уроках у школі та на вступних іспитах до вищих навчальних закладів деякі учні знаходять спосіб розв'язання складної нестандартної задачі, але не можуть довести справу до кінця, оскільки забули, як розв'язувати опорну задачу, до якої зводиться нестандартна, або не можуть правильно вирішити найпростіше, наприклад, тригонометричне, рівняння.

Одночасно навчити учнів розв'язувати задачі та вправи алгоритмічного характеру, просто надаючи їм готові алгоритми, не є ефективним. Краще організувати колективний пошук алгоритму на прикладах розв'язування однієї-двох задач. Це також стосується навчання учнів розв'язування задач і вправ певних типів за визначеними алгоритмами чи орієнтовними правилами.

Наведемо приклади. На уроці в 5 класі учні розв'язують задачі на рух двох типів: зустрічний і рух в одному напрямку.

Задача 1.1.2. З двох міст, відстань між якими 840 км, одночасно назустріч один одному виїхали два поїзди: один зі швидкістю 60 км/год, а другий - зі швидкістю 80 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться?

Задача 1.1.3. Літак вилетів з аеропорту зі швидкістю 500 км/год. Через 2 год з того самого аеропорту в тому самому напрямку вилегів другий літак зі швидкістю 700 км/год. Через скільки годин після вильоту другий літак наздожене перший? Яка відстань буде між ними через 3 год?

Розв'язавши ці дві задачі та подібні до них, учні можуть спільно дійти висновку, що при розв'язуванні задач на зустрічний рух, де потрібно визначити час, за який об'єкти зустрінуться, необхідно додати їхні швидкості та поділити відстань між початковими пунктами на загальну швидкість.

У задачах, де об'єкти рухаються від одного пункту в одному напрямку, а потрібно знайти відстань між ними через певний час, більш доцільним є метод, при якому обчислюється різниця між швидкостями об'єктів, а потім множиться на заданий час.

У задачах на спільну роботу основним орієнтиром для розв'язання є вказівка на те, що вся робота розглядається як одна одиниця. Це дозволяє виражати частку роботи, яку виконують окремі особи чи механізми за одиницю часу, або частку роботи, яку вони виконують спільно.

Схожі вказівки або правила-орієнтири доцільно надавати учням для вирішення задач на проценти, пропорційний поділ, геометричні задачі на побудову, які розв'язуються за допомогою методів геометричних місць, геометричних перетворень, задач на доведення методом від супротивного, побудови перерізів багатогранників, графіків функцій за допомогою геометричних перетворень, а також розв'язування задач векторним методом тощо.

Особливу увагу варто приділити навчанню учнів основним методам розв'язування задач. Наприклад, розглянемо методику навчання методу рівнянь для вирішення текстових (сюжетних) задач.

Шкільна практика показує, що, хоча метод рівнянь вивчається вже в 6 класі і застосовується протягом усього курсу математики, результати вступних іспитів до вищих навчальних закладів беззаперечно свідчать про те, що багато випускників недостатньо оволоділи цим методом.

Однією з причин цього, на нашу думку, є недостатня увага вчителів до розв'язування текстових задач і вправ арифметичним способом у 5-6 класах, що безпосередньо готує учнів до розуміння методу рівнянь. Крім того, необхідно спеціально контролювати, як учні засвоюють евристичну схему пошуку рівняння як моделі зв'язків між відомими і шуканими величинами.

Уміння розв'язувати задачі за допомогою рівнянь, як складова відповідної діяльності, включає такі розумові процеси: аналіз задачі (виокремлення умов і вимог); встановлення важливих зв'язків між відомими та шуканими величинами; визначення величин, які потрібно прирівняти, позначення невідомої величини та вираження необхідних величин через цю невідому; складання рівняння та його розв'язування; перевірка отриманого розв'язку. Це вміння можна сформувати, якщо попередньо відпрацьовано всі його елементи.

Учні можуть успішно аналізувати формулювання задачі лише тоді, коли вони зрозуміли її зміст. Для цього важливо правильно представити задачу. Існує кілька способів зробити це. Якщо задача взята з підручника, то найефективніше, коли її вголос читає вчитель або один з учнів, а інші уважно слідкують за формулюванням. Досвід показує, що найкраще читати задачу не менше ніж двічі. Корисно, щоб учень, який буде розв'язувати задачу, після повторення її змісту та виокремлення умови і вимоги, коротко записав їх на дошці. Перші скорочені записи на дошці доцільно робити вчителю, пропонуючи учням зразок для наслідування. Для деяких задач умову і вимогу можна подати у вигляді таблиці або графічної ілюстрації. Розглянемо приклад.

Задача 1.1.4. Один кусок дроту на 54 м довший за другий. Після того як від обох кусків відрізали по 12 м, перший виявився в 4 рази довшим, ніж другий. Знайти довжину кожного куска.

Скорочений запис змісту задачі може мати вигляд:

I	II + 54	- 12	II · 4	?
II		- 12		?

Геометричне зображення змісту задачі наочно ілюструє зв'язок між даними і шуканими, допомагає доцільно вибрати невідому *x* і скласти просте для розв'язання рівняння 3x = 54 (рис. 1.1).

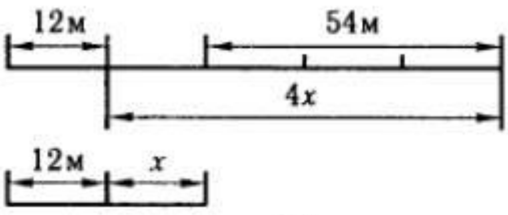


Рис. 1.1

У процесі пошуку рівняння потрібно з'ясувати, про які величини йдеться в змісті задачі, які зв'язки існують між цими величинами і шуканим, значення яких величин можна прирівняти. Залежно від цього доцільно ввести невідому і скласти рівняння.

У методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі. Першу схему застосовують до розв'язування нескладних задач, вона має такий вигляд: 1) позначити як *x* шукану величину (або одну із шуканих); 2) виразити через *x* інші величини, про які йдеться в змісті задачі; 3) ґрунтуючись на залежності між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складніших задач: 1) з'ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти; 2) вибрати невідому і позначити її буквою *x;* 3) виразити через *x* значення величин, які прирівнюватимуться; 4) скласти рівняння.

Друга евристична схема забезпечує цілеспрямований вибір невідомої та вираження через неї потрібних величин.

На початковому, підготовчому етапі навчання учнів методу рівнянь важливо нагадати про всі основні види задач, які вирішуються за допомогою арифметичних дій, а також їх буквений запис. Необхідно сформувати навички складання простих виразів з невідомими. Після цього усно розв'язуються найпростіші задачі на складання рівнянь відповідно до умов задачі. Для ілюстрації наведемо кілька прикладів.

1. До якого числа слід додати 12, щоб дістати 68? (Учні позначають як *x* невідоме число і записують рівняння: $x + 12 = 68$).

2. Число а на 7 більше за число b. Як можна записати залежність між *a* і *b* за допомогою рівності?

3. Число те втричі більше, ніж число *n.* Як можна записати залежність між те і и за допомогою рівності?

4. Купили 10 кг цукерок по *x* гривень за 1 кг. Як записати у вигляді виразу вартість покупки?

Важливо домогтися усвідомлення учнями того, що словосполучення «*a* на стільки-то більше за *b*» іноді потребує дії додавання, а іноді - віднімання залежно від того, якої з двох величин воно стосується. Це саме стосується словосполучення «*a* в стільки-то разів більше за *b*». Досвід показує, що деякі учні не реагують на слова «сума», «додано», «всього» в умові задач. Тому на першому етапі потрібно спеціально акцентувати слова, які містять інформацію для складання рівняння.

Існують різні організаційні форми щодо розв'язування задач. На уроці можливі колективне фронтальне розв'язування задач, колективна робота окремих груп і самостійне розв'язування.

Готуючись до колективної фронтальної роботи, яка іноді проводиться у формі евристичної бесіди, важливо заздалегідь продумати та записати в конспекти (особливо якщо мова йде про практиканта або вчителя-початківця) систему запитань, що стосуються пошуку способів розв'язання. Рекомендується пропонувати слабшим учням відповідати на прості запитання, щоб залучити їх до процесу пошуку розв'язання задачі. Іноді сильні учні знаходять спосіб розв'язання, а реалізацію цього способу доцільно доручити середньому чи слабкому учневі. Не слід допускати, щоб учні механічно переписували розв'язання задачі з дошки, не усвідомлюючи при цьому методику. Тому під час оформлення запису можна запропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або який має бути наступний крок у розв'язанні.

При організації розв'язування задач у груповій формі вчитель повинен підготувати для кожної групи набір завдань, що відповідають здібностям учнів. Під час уроку важливо контролювати роботу кожної групи та надавати допомогу тим, хто її найбільше потребує. Іноді доцільно провести коротку консультацію (3-5 хвилин), в якій активну участь братимуть не лише вчитель, а й сильніші учні.

Існує кілька способів організації самостійного розв'язування задач учнями під час уроку. Зазвичай це навчальні самостійні роботи, але іноді потрібні й контрольні. Самостійні роботи можуть займати весь урок, але частіше – лише його частину. В залежності від мети, такі роботи можуть проводитися на початку, в середині або наприкінці уроку. Якщо вчитель бажає перевірити виконання домашнього завдання та надати допомогу учням, які мають труднощі, він може запропонувати задачу або вправи, схожі на домашні. Якщо вивчається певний тип задач, самостійну роботу можна провести в середині або наприкінці уроку. Для ефективної та швидкої перевірки таких робіт можна запропонувати кільком учням оформити розв'язання на плівці та продемонструвати його на екрані за допомогою графопроектора. Іноді двоє учнів розв'язують задачу на відкидних дошках, і відразу після завершення аналізують допущені помилки. Також можлива усна фронтальна перевірка за етапами розв'язування задач і вправ.

Досвідчені вчителі, прагнучи інтенсифікувати навчальний процес та збільшити кількість розв'язаних задач на уроці, заздалегідь записують короткі умови чотирьох-п'яти задач на дошці. Урок починається з розв'язування першої задачі. Вчитель, спираючись на скорочений запис, читає умову задачі та організовує колективний пошук розв'язання. Один з учнів оформлює розв'язання на дошці, в той час як інші учні або записують його в зошитах, або уважно слухають та стежать за оформленням. Після завершення розв'язання дошка очищається, і учням пропонується самостійно оформити розв'язання в своїх зошитах. Далі переходять до наступної задачі, а дошка поступово звільняється, що позитивно впливає на настрій учнів [52].

Розуміння постановки задачі

I. Потрібно ясно зрозуміти задачу.

Що невідомо? Що дано? У чому полягає умова?

Чи можливо задовольнити умові? Чи достатня умова для визначення невідомого? Або недостатня? Або надмірна? Або суперечлива?

Зробіть малюнок. Введіть підходящі позначення.

Розділіть умову на частини. Постарайтеся записати їх.

Складання плану розв’язку

ІІ. Потрібно знайти зв'язок між даними і невідомим. Якщо не вдається відразу виявити цей зв'язок, можливо, корисно буде розглянути допоміжні задачі. У кінцевому результаті необхідно прийти до плану розв'язку.

Не зустрічалася вам раніше ця задача? Хоча б в дещо іншій формі?

Чи відома вам якась споріднена задача? Чи не знаєте теореми, яка могла б виявитися корисною?

Розгляньте невідоме! І постарайтеся згадати знайому задачу з тими же або подібними невідомими.

Ось задача, споріднена з даною і вже розв'язана. Чи можна скористатися нею? Чи можна застосувати її результат? Чи можна використовувати метод її розв'язування? Чи слід ввести який-небудь допоміжний елемент, щоб стало можливо скористатися колишньою задачею?

Чи можна переформулювати завдання іншим чином? А можливо, ще інакше? Зверніться до визначень. Якщо вирішити цю задачу не вдається, спробуйте спочатку розв'язати схожу. Чи можна створити більш зрозумілу аналогічну задачу? Можливо, більш загальну чи специфічну? Чи є можливість розв'язати частину задачі? Залиште лише частину умови, відкинувши інше: наскільки чітким стане невідоме в такому випадку; як воно може змінюватися? Чи можна отримати корисну інформацію з наявних даних? Чи можна вигадати інші дані, які допомогли б визначити невідоме? Чи можливо змінити невідоме, дані, або, якщо потрібно, і те, й інше, так, щоб нове невідоме і нові дані стали більш взаємопов'язаними?

Чи використані всі наявні дані? Чи враховані всі умови? Чи взяті до уваги всі важливі поняття, що містяться в задачі?

Здійснення плану

ІІІ. Потрібно здійснити план розв'язування.

Здійснюючи план розв'язку, *контролюйте кожен свій крок*. Чи зрозуміло вам, що зроблений вами крок правильний? Чи зможете довести, що він правильний?

Погляд назад

(Вивчення отриманого розв'язку)

IV. Потрібно вивчити знайдений розв'язок.

Чи можна *перевірити результат*? Чи можна перевірити хід розв'язання?

Чи можна отримати той же результат інакше? Чи можна роздивитися його з одного погляду? Чи можна в якійсь іншій задачі використовувати отриманий результат або метод розв’язку? [55]

1.2. Методика використання методів евристичного навчання при вивченні математики

1.2.1. Сутність поняття евристичного навчання

Суть евристичного навчання полягає у взаємодії між викладачем і учнями, що базується на створенні інформаційно-пізнавальної суперечності. Ця суперечність виникає між теоретично можливими способами розв'язання проблеми та практичною неможливістю їх застосування. Мета цього підходу — організувати самостійну роботу учнів над частиною програми через проблемно-пізнавальні завдання. Викладач, визначивши обсяг і рівень складності навчального матеріалу, представляє його у формі евристичної бесіди, дискусії або дидактичної гри. При цьому він поєднує часткове пояснення нового матеріалу з постановкою проблемних питань, пізнавальних завдань або експериментів. Це стимулює учнів до самостійної пошукової діяльності, розвитку навичок активного мовленнєвого спілкування, а також до постановки і розв'язання навчальних проблем.

Важливо в цьому контексті роз'яснити матеріал, який учні не здатні засвоїти самостійно, формуючи високий (дослідницько-логічний) рівень проблемності, характерний для роботи в нових ситуаціях, коли алгоритм дій невідомий. У такій діяльності повинні домінувати логічні процедури аналізу, порівняння та узагальнення.

Суть евристичного методу навчання полягає в формуванні третього типу проблемних ситуацій (іноді — другого), які характеризуються суперечністю між теоретично можливим способом вирішення проблеми та його практичною недосяжністю. Цей метод застосовується, коли учні мають достатній обсяг опорних знань і вмінь, необхідних для розв'язання навчальної проблеми.

Термін «ЕВРИСТИКА» означає «метод пошуку» (або винаходів). Основи цього методу були закладені ще в філософських ідеях Сократа. Проте лише в двадцятому столітті це поняття набуло не тільки широкого застосування, а й практичного використання – «евристичне мислення», «евристичні прийоми та методи», «евристична властивість». У будь-якому випадку «евристика» пов'язана з творчістю, зокрема з творчим пошуком.

Наукова література не має єдиного усталеного визначення терміна "евристика". У працях Р. Перельмана, присвячених інтенсифікації науково-технічної творчості, це поняття ототожнюється з психологією наукової творчості: «Психологія наукової творчості – евристика – досліджує, як вирішуються наукові задачі, які вимагають не лише знань і навичок, а й кмітливості та інтуїції».

Психолог Я. Пономарьов зазначає, що евристика є «абстрактно-аналітичною наукою, яка вивчає один із структурних рівнів організації творчої діяльності та її результатів».

Енциклопедичний словник наводить такі визначення евристики:

1. Це спеціальні методи, які застосовуються під час відкриття або створення нового (евристичні методи).

2. Це наука, що досліджує продуктивне та творче мислення (евристичну діяльність).

Представлені концепції, хоча й не є вичерпними, вказують на те, що евристика як окрема наука ще не сформувалася. Однак це, знову ж таки, є «національно-суб'єктивною» точкою зору радянських науковців. Незважаючи на велику кількість досліджень, присвячених питанням евристики, вони зазвичай охоплюють лише окремі аспекти і не надають чітких уявлень ані про об'єкт, ані про суб'єкт евристики, а також про її місце серед інших наук. Лише в працях Г. Буша та К. Буша можна помітити спробу узагальнити численні концепції та на цій основі визначити статус і предмет евристики. Вони визначають евристику як «загальнонаукову теорію розв'язання проблемних задач, що виникають у людській діяльності та спілкуванні». Предметом її є «виявлення, обробка та систематизація закономірностей, механізмів і методологічних засобів антиціпації (передбачення) та створення нового знання, а також цілеспрямованих способів діяльності та спілкування, які формуються на основі узагальнення наявного досвіду та проактивного відображення моделей майбутнього з метою більш повного задоволення потреб людей». З точки зору узагальнення окремих підходів до евристики, ця спроба є вдалою, проте, очевидно, прагнення до розмежування спільності завадило авторам виявити специфічні риси саме евристики. Внаслідок цього під дане визначення можна підвести як прогнозування, так і системний підхід, а з певними застереженнями – взагалі будь-які інші концепції з цієї сфери.

Зусилля щодо тлумачення евристики вказують на різноманітність значень цього терміна в суб’єктивному сприйнятті авторів різних концепцій. Проте спільним і беззаперечним є те, що в усіх випадках евристика тісно пов'язана з творчою діяльністю. Творчість і евристика об'єднуються через уявлення про нетривіальність, неординарність, новизну та унікальність. Що стосується поняття «творчість», то ці якості характеризують результати творчої діяльності, тоді як для евристики – це методи та засоби, які використовуються для досягнення цих результатів.

1.2.2. Методи евристичного навчання

1) Метод «мозкового штурму»

Метод і термін «мозковий штурм», або «мозкова атака» запропоновані американським вченим А.Ф. Осборном. Евристичний діалог "мозкової атаки" базується на ряді психологічних і педагогічних закономірностей.

Основні принципи і правила цього методу - абсолютна заборона критики запропонованих учасниками ідей, а також заохочення всіляких реплік, жартів.

2) Метод колективного пошуку оригінальних ідей

Метод колективного пошуку нових ідей ґрунтується на певних психолого-педагогічних закономірностях та відповідних принципах.

Перша закономірність, що відповідає принципу співтворчості, проявляється під час вирішення творчих завдань. Керівник групи, використовуючи демократичний стиль спілкування, заохочує фантазію та несподівані асоціації, що сприяє виникненню оригінальних ідей, виступаючи при цьому як співавтор. Чим більше розвинені здібності керівника до співпраці та співтворчості, тим ефективніше, за інших рівних умов, відбувається розв’язання творчого завдання.

Друга закономірність полягає в принципі довіри до творчих сил і здібностей один одного. Усі учасники мають рівні права: керівник заохочує навіть найменшу ініціативу членів творчої групи жартом або вдалою реплікою.

Третя закономірність і принцип полягають у використанні оптимального поєднання інтуїтивного та логічного мислення. У процесі генерації ідей найкращим є зменшення активності логічного мислення та активне заохочення інтуїції. Це значною мірою підтримується такими правилами, як заборона критики та відстрочений логічний і критичний аналіз створених ідей.

Які ж переваги методу колективного пошуку оригінальних ідей? Серед беззаперечних переваг цього підходу можна виділити те, що він забезпечує рівність усіх учасників групи, оскільки авторитарний стиль керівництва в цьому процесі є неприйнятним. Лінь, рутинне мислення та раціоналізм, як правило, автоматично усуваються.

Доброзичлива психологічна атмосфера сприяє розкриттю особистості, активізує інтуїцію та уяву.

Проте, недоліки та обмеження цього методу полягають у тому, що він дозволяє лише висунути та знайти творчу ідею в загальному вигляді, не забезпечуючи її детальної розробки. Крім того, метод може бути непридатним або мати обмеження в тих випадках, коли творче завдання вимагає значних попередніх розрахунків чи обчислень.

3) Метод евристичних питань

Цей метод також відомий як метод «ключових питань». Евристичні питання доцільно використовувати для збору додаткової інформації в умовах проблемних ситуацій або для упорядкування вже наявних даних під час розв’язання творчих завдань. Вони слугують додатковим стимулом, формуючи нові стратегії та тактики для вирішення творчих задач. Варто зазначити, що давньоримський філософ Квінтіліан широко застосовував евристичні питання у своїй науковій та практичній діяльності. Він радив великим політичним діячам ставити собі сім ключових (евристичних) питань для збору повної інформації про будь-яку подію: хто? що? навіщо? де? чим? як? коли?

Перевага методу евристичних питань полягає в його простоті та ефективності при вирішенні різноманітних завдань. Цей підхід особливо сприяє розвитку інтуїтивного мислення. Проте, серед недоліків і обмежень можна відзначити, що він не забезпечує надто оригінальних ідей та рішень і, як і інші евристичні методи, не гарантує повного успіху у вирішенні творчих завдань.

4) Метод багатовимірних матриць

Цей метод серед науковців і винахідників також відомий як метод «морфологічного ящика» або «морфологічного аналізу». Основна ідея методу багатовимірних матриць у вирішенні творчих завдань полягає в тому, що нове часто є результатом нової комбінації відомих елементів (пристроїв, процесів, ідей тощо) або поєднання відомого з невідомим.

Матричний метод дозволяє досягти цього не через спроби та помилки, а цілеспрямовано і системно. Отже, метод багатовимірних матриць ґрунтується на принципі системного аналізу нових зв'язків і відносин, які виявляються під час матричного аналізу досліджуваної проблеми.

Гідність: він дозволяє розв’язати складні творчі завдання і знайти багато нових, несподіваних, оригінальних ідей.

Недоліки та обмеження: навіть при розв’язуванні завдань середньої трудноші в матриці можуть виявитися сотні варіантів рішень, вибір з яких оптимального виявляється скрутним.

5) Метод вільних асоціацій

Під час формування асоціацій виникають унікальні взаємозв'язки між елементами розв'язуваної проблеми та складовими зовнішнього світу, зокрема, елементами попереднього досвіду творчої діяльності учасників колективного вирішення проблеми або творчого завдання. Саме внаслідок цього процесу формуються нові асоціативні зв'язки, які призводять до появи творчих ідей для розв'язання проблеми.

Розглянемо приклад використання методу вільних асоціацій. Уявімо, що ви очолюєте друкарню і вам потрібно знайти ідеї для вирішення проблеми підвищення ефективності реклами вашої продукції. Керівник групи пропонує слово «студент» як відправну точку. Це слово викликає кілька асоціацій, які можуть надихнути на нові ідеї для активізації реклами. На основі асоціацій, що виникають у членів групи, можна сформулювати такі пропозиції: розширити рекламні кампанії серед студентської та учнівської молоді; залучити самих студентів та учнів до процесу реклами; частіше публікувати рекламу в виданнях, які читають студенти та учні тощо.

6) Метод інверсії

Метод інверсії є одним із евристичних підходів у творчій діяльності, що спрямований на пошук ідей для вирішення творчих завдань у нових, несподіваних напрямках, часто протилежних традиційним уявленням і переконанням, які визначаються формальною логікою та здоровим глуздом.

Цей метод ґрунтується на принципі дуалізму, діалектичної єдності та оптимального використання протилежних (прямих і зворотних) процесів творчого мислення: аналізу та синтезу, логічного та інтуїтивного підходів, статичних і динамічних характеристик об'єкта дослідження, а також зовнішніх і внутрішніх аспектів об'єкта. Якщо вирішити задачу з початку до кінця не вдається, спробуйте підійти до неї з іншого боку — від кінця до початку, і так далі.

Безсумнівною перевагою методу інверсії є його здатність сприяти розвитку діалектики мислення, допомагаючи знаходити вихід із, здавалося б, безвихідних ситуацій, а також генерувати оригінальні та іноді несподівані рішення для різноманітних творчих завдань, незалежно від їх складності.

Проте його недоліком є те, що він вимагає високого рівня творчих здібностей, а також певних базових знань, навичок і досвіду.

7) Метод емпатії (метод особистої аналогії)

Емпатія найчастіше розглядається як здатність однієї людини ототожнювати себе з іншою, намагаючись уявити себе на її місці. Не випадково в контексті творчих завдань емпатія, або особиста аналогія, сприймається як ідентифікація людини з технічним об'єктом чи процесом. Коли використовується метод емпатії, людині властиво приписувати об'єкту свої власні почуття та емоції: вона ідентифікує цілі, функції, можливості, переваги та недоліки, наприклад, автомобіля, зі своїми власними. Таким чином, людина немов зливається з об'єктом.

Отже, метод емпатії (особистої аналогії) ґрунтується на принципі заміщення досліджуваного об'єкта або процесу іншим. Виходячи з цього, метод емпатії є одним із евристичних підходів до розв'язання творчих завдань, що базується на процесі емпатії, тобто на ототожненні себе з об'єктом і предметом творчої діяльності. Це передбачає осмислення функцій досліджуваного предмета через «вживання» в образ винаходу, якому надаються особисті почуття, емоції, а також здібності бачити, чути, міркувати тощо.

8) Метод синектики

Суть методу синектики полягає в наступному. На початкових етапах його використання відбувається процес навчання «механізмам творчості». Частину цих механізмів автори методики пропонують розвивати через навчання, тоді як розвиток інших не є гарантованим. Перші з них називають «операційними механізмами», до яких відносять прямі, особисті та символічні аналогії. При застосуванні методу синектики важливо уникати передчасного чіткого формулювання проблеми (творчої задачі), оскільки це може перешкодити подальшому пошуку рішення. Обговорення доцільно розпочинати не з самої задачі (проблеми), а з аналізу деяких загальних ознак, які вводять у ситуацію постановки проблеми, неодноразово уточнюючи її зміст.

Серед переваг методу синектики можна виділити практично всі характеристики, притаманні евристичним методам, на основі яких він був створений. Однак, до його недоліків і обмежень можна віднести такі моменти:

- Метод не підходить для вирішення дуже специфічних творчих завдань, а більше сприяє знаходженню найбільш оригінальних ідей;

Після використання методу протягом 30-40 хвилин ефективність генерування нових ідей поступово знижується.

9) Метод організованих стратегій

Одним із основних психологічних бар'єрів у розв'язанні творчих завдань є інерція мислення та нездатність вирішального відмовитися від найбільш очевидного підходу, щоб знайти новий шлях у пошуках ідей для розв'язання. Навіть якщо ми обираємо правильні напрямки (стратегії) для пошуку ідеї, у нас можуть виникати сумніви, що ми пропустили щось важливе, можливо, більш оригінальну стратегію чи ідею.

У певній мірі подолати цю інерцію мислення може допомогти метод організованих стратегій.

В основі цього методу лежать:

а) принцип самоврядування особистості у виборі нових стратегій розв’язування творчого завдання;

б) принцип відсторонення, тобто розгляду об'єкта, предмета, процесу, кожного разу з несподівано нової точки зору [57].

1.2.3. Евристичний підхід в навчанні математики

Евристичний підхід ґрунтується на психології творчого мислення, що включає процеси пошуку нових ідей та спроби формалізації творчої діяльності [56]. Таким чином, цей підхід може бути ефективно застосований у навчанні математики для розвитку математичних творчих здібностей учнів.

Суть евристичної освіти полягає не лише в передачі учневі досвіду минулого, а в тому, щоб він здобував власний освітній досвід, який здатен забезпечити особистісний розвиток, а в ідеалі – і загальнокультурний приріст знань, досвіду та освітніх цінностей. Діяльність, що сприяє створенню освітніх продуктів дітьми, виявляє та розвиває їхні індивідуальні здібності, а їхня унікальність допомагає формувати індивідуальні освітні траєкторії. Отже, дидактична евристика (за О. Хуторським) є теорією навчання, яка визначає систему цілей, закономірностей, принципів, змісту, технологій, форм, методів і засобів, що забезпечують самореалізацію та освітній розвиток учнів і вчителів у процесі створення освітніх продуктів у різних сферах знань та діяльності. Таким чином, дидактична евристика може бути застосована в дидактиці математики для розвитку творчих математичних здібностей учнів.

Завдання евристичної освітньої діяльності учня полягає в тому, щоб він самостійно формував свою освіту через створення продуктів, які є складовою частиною цього процесу. Зовнішній освітній продукт, що створюється учасником навчання, сприяє отриманню ним внутрішнього продукту – змін у знаннях, досвіді, можливостях, здібностях, способах діяльності та інших особистісних якостях. Внутрішній продукт освіти учня є тим новим якісним результатом, на який спрямована дидактична евристика. Отже, з огляду на вищезазначене, дидактичну евристику можна розглядати як один із шляхів розвитку творчих здібностей загалом, а також математичних творчих здібностей учнів зокрема.

Як математика, що є наукою, спирається на систему аксіом, так і дидактична евристика ґрунтується на наборі основних закономірностей і принципів. Закономірності евристичного навчання (згідно з О. Хуторським):

- освітня продуктивність учнів підвищується, коли вони активно залучені до визначення навчальних цілей, вибору технологічних елементів та формування особистісного аспекту змісту освіти.

- евристичне засвоєння учнями основних освітніх об’єктів сприяє формуванню їхньої особистісної системи знань, яка відповідає вивченій дійсності та освітнім стандартам.

- пріоритетність отримання учнем особистісного освітнього продукту в порівнянні з зовнішніми освітніми стандартами стимулює підвищення навчальної мотивації та ефективності навчання.

- динаміка творчих досягнень учнів перевищує темпи зростання рівня засвоєння базових освітніх нормативів. Творча результативність навчання більше впливає на розвиток особистісних якостей учнів, ніж на їхній рівень засвоєння освітніх стандартів.

- зміни у зовнішніх освітніх продуктах учня відображають його внутрішні освітні трансформації, зокрема розвиток креативних, когнітивних та організаційно-діяльнісних особистісних якостей.

- включення мета предметного змісту в освітній процес дозволяє учневі вийти за межі навчального матеріалу та встановити особистісно значимі зв’язки з іншими освітніми галузями, що формують цілісність його освіти.

- збільшення кількості відкритих завдань у навчальному процесі, які не мають однозначно визначених рішень, підвищує інтенсивність та ефективність розвитку креативних якостей учнів, орієнтованих на творчість.

- рівень творчої продукції учнів залежить від їх індивідуальних здібностей та ступеня засвоєння евристичних технологій діяльності.

На нашу думку, наведені вище принципи не суперечать, а навпаки, доповнюють дидактику математики, підносячи її на новий якісний рівень. Це означає перехід у математичній освіті від простого набору визначень, теорем, аксіом та їх застосування до обмеженого кола задач до формування у кожного учня власного математичного досвіду. Цей досвід включає розуміння математичних одиниць та їх конструкцій, а також вміння їх використовувати і обирати оптимальні методи для розв'язання математичних проблем. Завдяки оптимальному поєднанню «класичної» дидактики математики з дидактичною евристикою, вчитель зможе досягти не лише дидактичної мети навчально-виховної діяльності, але й виховних та розвиваючих цілей.

Аналізуючи навчання математики з акцентом на розвиток творчого мислення учнів, О. Чашечникова пропонує систему критеріїв, що оцінюють ефективність викладання предмету:

1. «Дієва обізнаність» учня: це здатність учня оволодіти системою знань та відповідними вміннями з математики, а також метазнаннями. Учень повинен мати можливість оперативно та адекватно реагувати на ситуацію, використовуючи свої знання та метазнання, а також відповідні вміння. Під метазнанням, згідно з визначенням О. Чашечникової, ми розуміємо знання ефективних методів і засобів для пошуку та обробки нової інформації, яка представлена в різних формах; раціональних і продуктивних способів опрацювання навчального матеріалу та засвоєння нових знань; можливих «підходів» до виконання нестандартних завдань.

2. Інтелектуальна самостійність учня.

3. Сформованість здатності учнів до ефективного спілкування.

4. Економічність навчального процесу: з огляду на витрати часу та зусиль як вчителя, так і учнів; раціональне використання матеріальних ресурсів для навчання.

5. Інтеграція, комплексність та безперервність (позитивний вплив знань, здобутих учнями під час вивчення математики, на освоєння інших предметів; встановлення міжпредметних зв'язків; сприяння всебічному розвитку особистості

через навчання математики; принцип безперервності також розглядається як наступність і логічна послідовність між різними навчальними дисциплінами).

6. Системність і систематичність (регулярна діагностика рівнів знань, навчуваності та інтелектуального розвитку учнів; відповідна корекція та вдосконалення навчального процесу; застосування різноманітних методів, прийомів і засобів навчання в системі, що відповідає наявним умовам).

7. Перспективність: навчання учнів з урахуванням майбутніх можливостей, потенційних змін у соціальному середовищі, а також у прагненнях і інтересах учнів; здатність учнів самостійно поповнювати та вдосконалювати свою систему знань і навичок; наявність у учнів прагнення до творчої діяльності та формування власної думки; інтерес до процесу розв’язання творчих завдань і задоволення від цього процесу.

8. Гуманність: врахування вікових, статевих та індивідуальних характеристик учнів; розвиток самоповаги та поваги до інших; здатність учнів витримувати емоційні навантаження під час навчання; адекватна реакція на критику; знання основ наукової організації праці; формування культури інтелектуальної діяльності у учнів. [56].

Отже, розвиток творчих математичних здібностей учнів тісно пов'язаний із загальним розвитком особистості, що вимагає комплексного врахування всіх критеріїв ефективності навчання. Це неможливо без урахування індивідуальних та психологічних особливостей учнів. Таким чином, евристична дидактика, поєднуючи кращі традиції «класичної» дидактики математики, сприяє підвищенню ефективності навчально-виховного процесу, розвитку творчих математичних здібностей учнів та формуванню творчого підходу до вирішення різноманітних проблемних ситуацій.

1.3. Метод допоміжних елементів

1.3.1. Метод допоміжних елементів

1)Метод допоміжного відрізка

Допоміжний елемент – відрізок (або відношення довжин відрізків). Його зручно ввести, якщо фігури подібні. Тоді за допомогою пропорцій або геометричних побудов складається рівняння, в якому цей елемент як член рівняння скорочується, а знайти шуканий стає не важко.

2)Метод допоміжної площі

Введення площі як допоміжного елемента аналогічне введенню лінійного елемента – відрізка. Порівнюючи площі фігур, можна дістати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули.

Краще знаходити чи порівнювати ті площі, сума (різниця) яких дає площу заданої фігури або відношення площ тих фігур, у яких лінійні елементи – шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули.

3)Метод допоміжного кута

Застосування кута як допоміжного елемента пов'язано з тригонометрією. Теореми синусів, косинусів, розв'язання трикутників дозволяють звести задачу до доведення тригонометричної тотожності, тригонометричних нерівностей або до розв'язання рівнянь чи нерівностей.

4)Метод допоміжного периметра

При застосуванні периметра як допоміжного елемента використовують наступні твердження:

Теорема 1.3.1. Якщо в трикутник *ABC* вписано коло, де K_1, K_2, K_3 – точки дотику кола до сторін *BC*, *AC*, *AB* (рис.1.2), то :

$$AK_3 = AK_2 = p - a;$$

$$BK_3 = BK_2 = p - b;$$

$$CK_3 = CK_2 = p - c.$$

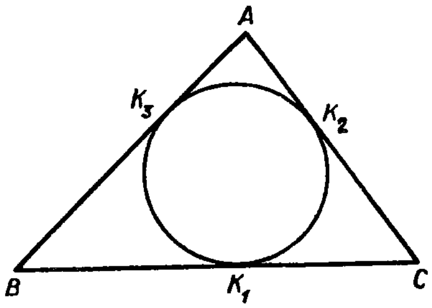


Рис. 1.2

Доведення. Нехай $AK_3 = x$, $BK_1 = y$, $CK_1 = z$. Тоді $x = c - y$; $x = b - z$; $2x = b + c + (y + z) = b + c - a = 2p - 2a$; $x = p - a$. Аналогічно доводиться, що $y = p - b$, $z = p - c$.

Теорема 1.3.2. Відстані від точок дотику зовні вписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника *ABC* до їх спільної вершини, дорівнюють півпериметру трикутника *ABC*.

Доведення. Нехай, наприклад, зовні вписане коло з центром I_a дотикається до продовжень сторін AB і AC трикутника ABC у точках T_2 і T_3 (рис. 1.3). Крім того, $CT_1 = x$, $T_1B = y$.

Маємо $AT_2 = c + y$, $AT_3 = b + x$, $2p = a + b + c = x + y + b + c = b + x + c + y = AT_2 + AT_3$. Але $AT_2 = AT_3$, тому $2AT_2 = 2p$, звідки $AT_2 = AT_3 = p$.

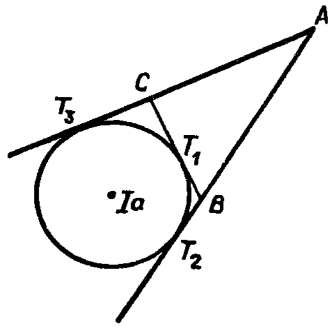


Рис. 1.3

1.3.2. Метож допоміжних побудов

1)Метод допоміжних точок

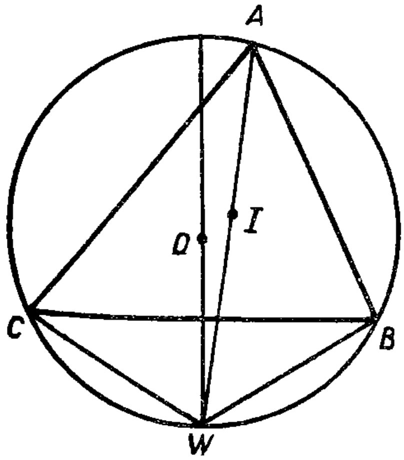
При допоміжних побудовах іноді доцільно користуватися точками, про які в умові задачі нічого не повідомляється. Ці точки називають допоміжними. Вивчення таких точок і їх властивостей збагачує досвід розв’язування задач, допомагає правильно та раціонально намітити схему розв’язування, а головне – зробити усвідомленими допоміжні побудови.

Використовують такі допоміжні точки при розв’язуванні задач:

- Допоміжна точка – центр кола. Побудова центра кола як допоміжної точки найбільш поширена. Введення цієї точки у рисунок до задачі може стати «входом» у розв’язання.
- Допоміжні точки – чудові точки трикутника: ортоцентр, центроїд, інцентр, центр зовні вписаного кола.

- Допоміжні точки – симетричні точки.

- Допоміжна точка – точка W. Точкою W ми позначили точку перетину бісектриси внутрішнього кута трикутника з віссю симетрії сторони, яку перетинає бісектриса. Використання цієї точки як допоміжної ефективне, тому що вона має такі властивості:



1) Точка W належить колу, описаному навколо

Рис. 1.4

трикутника ABC.

2) Відстані від точки W до двох найближчих вершин трикутника дорівнюють відстані до інцентра: $WB = WC = WI$ (рис. 1.4).

2)Метод допоміжних прямих

Використовують такі побудови прямих при розв’язуванні задач:

- побудова паралельних прямих;
- побудова перпендикулярних прямих;
- побудова рівних відрізків та відрізків певної довжини.

3)Метод допоміжних фігур

Найчастіше використовують такі допоміжні фігури при розв’язуванні задач:

- допоміжна фігура – трикутник (один, рівні, подібні);
- допоміжна фігура – паралелограм;
- допоміжна фігура – трапеція.

4)Метод допоміжного кола

Однією з допоміжних побудов є коло. Його радіус можна застосовувати як допоміжний елемент для доведення формул і багатьох метричних співвідношень.

За допомогою допоміжного кола розв’язуються такі види задач: задачі на доведення; задачі на побудову; задачі на обчислення [51].

Висновки до розділу I

Ефективність методики навчання учнів розв'язуванню задач можлива лише за умови комплексного підходу до навчального процесу. Це передбачає чітке визначення мети навчання, що стосується розв'язування задач певного типу або оволодіння конкретним методом. Необхідно ретельно розробити систему задач, які будуть розв'язуватись на уроці та пропонуватись для домашнього виконання. Важливо також обрати відповідні методи та організаційні форми роботи на уроці, використовувати ефективні засоби навчання, а також здійснювати контроль за сприйняттям учнями методів і способів розв'язування, а також за набутими ними навичками та вміннями.

Процес розв'язування задачі як розумову діяльність вивчає психологія, а методика математики аналізує його. Останнім часом з'явилися спроби дослідити самі задачі, а не лише процес їх розв'язування. Звертається увага на необхідність чіткого розуміння структури задачі. Відомо, що кожна задача має умову (умови) та вимогу (вимоги).

Задачі в навчанні математики виконують дві важливі ролі: вони є об'єктом дослідження та інструментом навчання [50]. Вони слугують основним засобом для встановлення зв'язку між навчанням і реальним життям, сприяють політехнічному напрямку освіти та забезпечують міжпредметні зв'язки як у межах математики, так і з іншими навчальними дисциплінами.

Зазвичай виділяють чотири основні функції задач: навчальну, розвивальну, виховну та контрольну.

Отже, розвиток творчих математичних здібностей учнів тісно пов'язаний із загальним розвитком особистості, що вимагає комплексного врахування всіх критеріїв ефективності навчання. Це неможливо без урахування індивідуальних та психологічних особливостей учнів. Таким чином, евристична дидактика, поєднуючи кращі традиції «класичної» дидактики математики, сприяє підвищенню ефективності навчально-виховного процесу, розвитку творчих математичних здібностей учнів та формуванню творчого підходу до вирішення різноманітних проблемних ситуацій.

РОЗДІЛ ІІ . ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ 7 – 9 КЛАСІВ ВМІНЬ ЗАСТОСОВУВАТИ ДОПОМІЖНІ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

2.1. Застосування методу допоміжних елементів при розв’язуванні задач в 7 – 9 класах

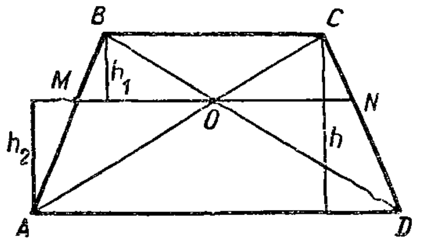
1)Метод допоміжного відрізка

Задача 2.1.1. Основи трапеції – a і b ($a < b$). Пряма, яка перетинає бічні сторони трапеції в точках M і N, проходить через точку перетину діагоналей паралельно основам. Знайти довжину відрізка MN.

Розв’язання. Введемо як допоміжні елементи h_1, h_2, h – висоти трикутників відповідно MBO, AMO і BCA (рис.2.1).

Позначимо x відрізок MO. Трикутники MBO і ABD – подібні: $\frac{x}{a}=\frac{h_1}{h}$.

З подібності трикутників AMO і ABC випливає: $\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h}$, отже $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}$. Але

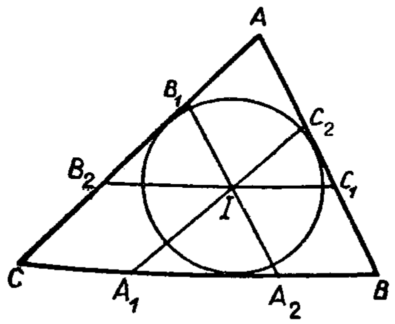


$h_1+h_2=h$, тому $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=1$; $x=\frac{a\cdot b}{a+b}$.

Маємо $ON=y=\frac{a\cdot b}{a+b}$ (обчислюється аналогічно).

Рис.2.1

Задача 2.1.2. Довести, що відрізки, які відтинаються на сторонах трикутника прямими, що проходять через інцентр і паралельні сторонам, пропорційні квадратам сторін трикутника.



Доведення. Нехай I – інцентр (центр вписаного кола). Прямі, паралельні сторонам BC, AC, AB (рис. 2.8) перетинають сторони трикутника в точках A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Трикутник A_1IA_2 – подібний трикутнику ABC: $\frac{A_1A_2}{BC}=\frac{r}{h_a}$; Рис. 2.8 n_a $\frac{a^2}{2p}$;

$C_1C_2=\frac{c^2}{2p}$; $B_1B_2=\frac{b^2}{2p}$.

Отже, $A_1A_2:B_1B_2:C_1C_2=\frac{a^2}{2p}:\frac{b^2}{2p}:\frac{c^2}{2p}=a^2:b^2:c^2$.

Задача 2.1.3. У трикутнику *ABC* на сторонах *AB* і *AC* взято відповідно точки *D* і *E* так, що $\angle ABE = \alpha_1$, $\angle CBE = \alpha_2$, $\angle DCE = \alpha_3$, $\angle BCD = \alpha_4$. Знайти $\angle CDE$.

Розв'язання. Позначимо $BC = a$, $\angle CDE = x$ (рис. 2.9). З трикутників *BCD, BCE, CDE* маємо $DC = \dfrac{a\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)}$; $EC = \dfrac{a\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}$;

$\dfrac{\sin(x+\alpha_3)}{\sin x} = \dfrac{DC}{EC}$, або $\dfrac{\sin(x+\alpha_3)}{\sin x} = \dfrac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)}$.

З останньої рівності знаходимо

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)} - \operatorname{ctg}\alpha_3.$$

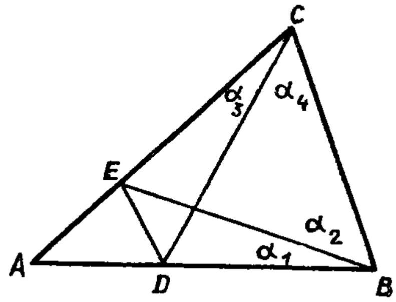


Рис. 2.9

2)Метод допоміжної площі

Задача 2.1.4. У прямокутному трикутнику *ABC* ($\angle C = 90°$) $a\cdot b = c\cdot h$ (h – висота). Довести.

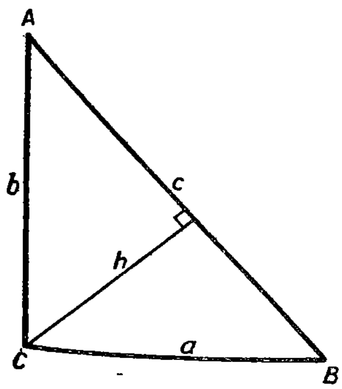


Рис. 2.13

Доведення. Позначимо S площу трикутника *ABC* (рис. 2.13). Тоді $S = \dfrac{1}{2}a\cdot b$ і $S = \dfrac{1}{2}c\cdot h$, отже, $a\cdot b = c\cdot h$.

Задача 2.1.5. У трикутник *ABC* вписано три півкола радіусів *Ra*, *Rb*, *Rc* (їх діаметри належать відповідним сторонам), *r* – радіус вписаного кола. Довести, що $\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c} = \dfrac{2}{r}$.

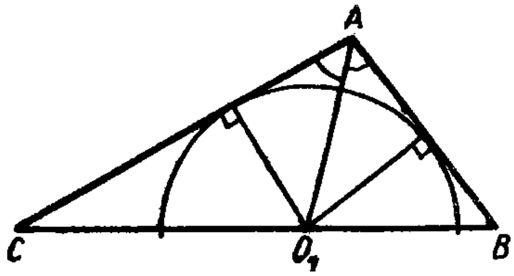


Рис. 2.15

Доведення. Доведемо, що (рис. 2.15)

$$R_a = \frac{2S}{2p-a}. \qquad (1)$$

Справді, $S = S_{AO_1C} + S_{AO_1B} = \dfrac{1}{2}R_a\cdot b + \dfrac{1}{2}R_a\cdot c = \dfrac{1}{2}R_a(b+c)$.

Звідси дістанемо формулу (1). Аналогічно, $R_b = \dfrac{2S}{2p-b}$, $R_c = \dfrac{2S}{2p-c}$ (p – півпериметр трикутника ABC). Отже, $\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c} = \left(2p-a+2p-b+2p-c\right)\dfrac{1}{2S} = \dfrac{2p}{S} = \dfrac{2}{r}$.

Задача 2.1.6. В прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CD до гіпотенузи. Відстані між центрами кіл, вписаних в трикутники CAD і CBD, дорівнює l. Знайти радіус r кола, вписаного в трикутник ABC.

Розв'язання. Нехай I_1 і I_2 – інцентри трикутників CAD і CBD (рис. 2.21), r_1 і r_2 – радіуси кіл, вписаних у ці трикутники. За допомогою площі цих трикутників ми довели в задачі 2.1.21, що

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2. \qquad (1)$$

Оскільки трикутник I_1DI_2 – прямокутний і $I_1D = r_1\sqrt{2}$, $I_2D = r_2\sqrt{2}$, то $I_1I_2^{\,2} = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right)$. За співвідношенням (1) $I_1I_2^{\,2} = 2r^2$, або $l^2 = 2r^2$, $l = \sqrt{2}r$.

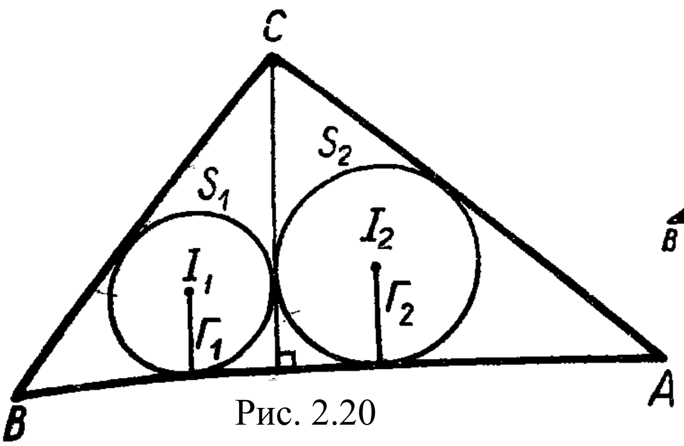


Рис. 2.20

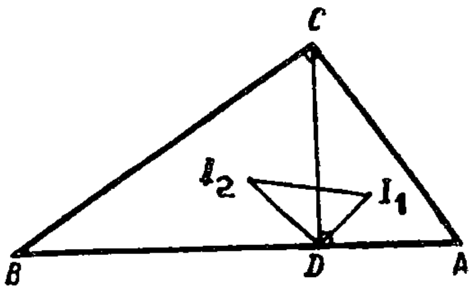
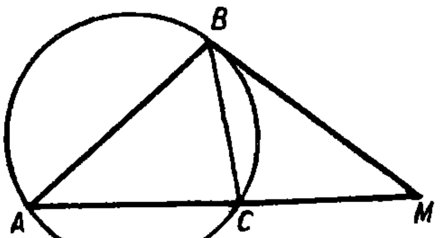


Рис. 2.21

Задача 2.1.7. Навколо трикутника ABC описано коло. Дотична до кола в точці B перетинає пряму AC в точці M. Знайти відношення $AM : MC$, якщо $AB : BC = k$.

Розв'язання. Оскільки трикутники ABM і MBC мають спільну висоту, опущену з вершини B (рис. 2.26), то



$$\frac{AM}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2}MB\cdot AB\sin\angle MBA}{\frac{1}{2}MB\cdot BC\sin\angle MBC} = = \frac{AB^2\cdot BC\sin\angle MBA}{BC^2\cdot AB\sin\angle MBC}.$$

Але $\sin\angle MBC = \sin\angle BAC$, $\sin\angle MBA = \sin\angle BCA$, і за теоремою синусів $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$, отже

Рис. 2.26 $$\frac{MA}{MC}=\frac{AB^2}{BC^2}=k^2.$$

3)Метод допоміжного кута

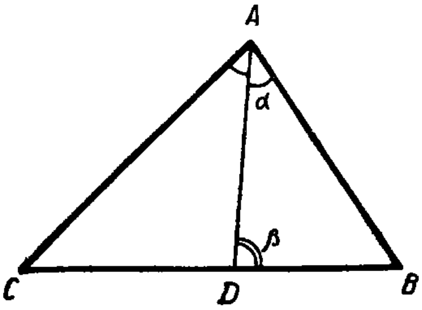


Рис. 2.30

Задача 2.1.8. Довести, що в трикутнику *ABC:* $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$, де *D* – точка перетину бісектриси кута *BAC* зі стороною *BC*.

Доведення. Введемо позначення (рис.2.30), $\angle DAB=\alpha$, $\angle ADB=\beta$.

За теоремою синусів з трикутника *ADB* дістаємо $\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. З трикутника CAD випливає $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180°-\beta)}{\sin\alpha}$, або $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Отже, $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

Задача 2.1.9. Довести, що в прямокутному трикутнику *ABC* ($\angle C=90°$) бісектриси l_a, l_b та катети *a* і *b* пов'язані співвідношенням $a\cdot l_a\sqrt{c+b}=b\cdot l_b\sqrt{c+a}$.

Доведення. Введемо позначення $\alpha=\angle CAL_1$, $\beta=\angle CBL_2$ (рис. 2.31). З трикутників AL_1C і BL_2C маємо

$$l_a=\frac{b}{\cos\alpha},\ l_b=\frac{a}{\cos\beta}\ , \qquad (1)$$

отже, $a\cdot l_a\cos\alpha=b\cdot l_b\cos\beta$ (1). Оскільки

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1+\cos2\beta}{1+\cos2\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}}=\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+b}},$$

то за

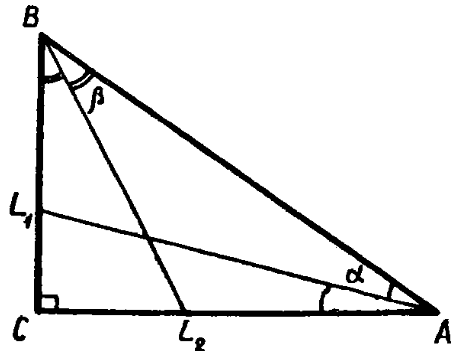
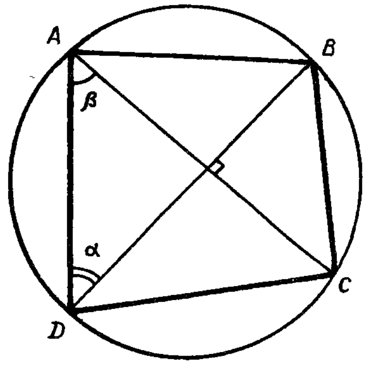


Рис. 2.31

співвідношенням (1) $a\cdot l_a=b\cdot l_b\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+b}}$, або $a\cdot l_a\sqrt{c+b}=b\cdot l_b\sqrt{c+a}$.



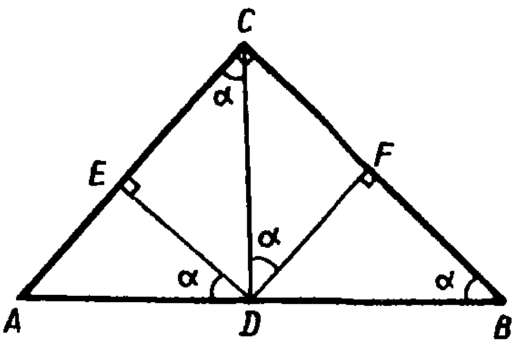
Задача 2.1.10. Довести, що якщо діагоналі вписаного в коло чотирикутника взаємно перпендикулярні, то сума квадратів протилежних сторін чотирикутника дорівнює квадрату діаметра цього кола.

Доведення. Введемо позначення у чотирикутнику $ABCD$: $\angle ADB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ (рис. 2.33). Тоді $\alpha + \beta = 90°$. З

Рис. 2.33

трикутників ABD і CAD випливає $AB = 2R \cdot \sin\alpha$; $CD = 2R \cdot \sin\beta = 2R\cos\alpha$, отже, $AB^2 + CD^2 = 4R^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\beta\right) = 4R^2$, що й треба було довести.

Задача 2.1.11. В прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C опущено висоту CD. Проекція відрізка BD на катет BC дорівнює l, а проекція відрізка AD на катет AC дорівнює m. Знайти довжину гіпотенузи AB.



Розв'язання. Проведемо $DE \perp AC$, $DF \perp BC$ (рис. 2.38). За умовою $AE = m$, $BF = l$. Введемо позначення $\angle ACD = \alpha$. Тоді $\angle ADE = \angle CDF = \angle DBC = \alpha$. Тому $BD = \dfrac{l}{\cos\alpha}$

, Рис. 2.38 $AD = \dfrac{m}{\sin\alpha}$; $CD = AD\,\mathrm{ctg}\,\alpha = BD\,\mathrm{tg}\,\alpha$. З останньої рівності

знаходимо $\mathrm{tg}\,\alpha = \left(\dfrac{m}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$. Тоді $\sin\alpha = \dfrac{m^{\frac{1}{3}}}{\left(m^{\frac{1}{3}} + l^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$ і $\cos\alpha = \dfrac{l^{\frac{1}{3}}}{\left(m^{\frac{1}{3}} + l^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$. Отже,

$$AB = AD + BD = \left(m^{\frac{1}{3}} + l^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Задача 2.1.12. В трапеції $ABCD$ бічна сторона BC перпендикулярна основам AB і CD. Бісектриса гострого кута BAD перетинає сторону BC в точці E так, що $BE = CD$. Довести, що в трапецію можна вписати коло.

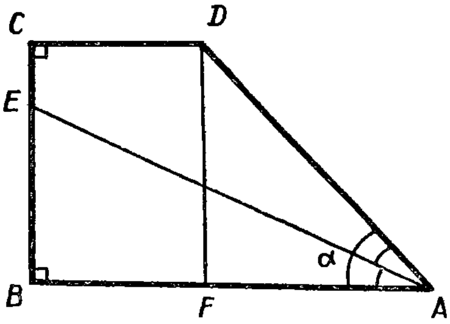


Рис. 2.40

Доведення. В трапеції $ABCD$ (рис. 2.40) введемо позначення $\angle BAD=\alpha$; $AB=a$; $CD=b$. Доведемо, що $BC+AD=CD+AB$. З точки D опустимо перпендикуляр DF на сторону AB. З трикутника DFA випливає $AD=\frac{a-b}{\cos\alpha}$; $BC=(a-b)\operatorname{tg}\alpha$;

$$AD+BC=\frac{a-b}{\cos\alpha}+(a-b)\operatorname{tg}\alpha=(a-b)\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=(a-b)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Але $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}$ (з трикутника BAE). Отже, $AD+BC=(a-b)\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=(a-b)\dfrac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}=$ $=a+b=CD+AB$.

Задача 2.1.13. Радіуси двох кіл, які не перетинаються, дорівнюють R і r. Їх спільні внутрішні дотичні взаємно перпендикулярні. Знайти площу трикутника, утвореного цими дотичними та спільною зовнішньою дотичною.

Розв'язання. Позначимо S_x шукану площу трикутника ABC (рис. 2.41); D, E, F, K – точки дотику: O_1, O_2 – центри заданих кіл. Введемо допоміжний кут $\alpha=\angle BAC$. Тоді $\angle FO_1K=90°-\alpha$;

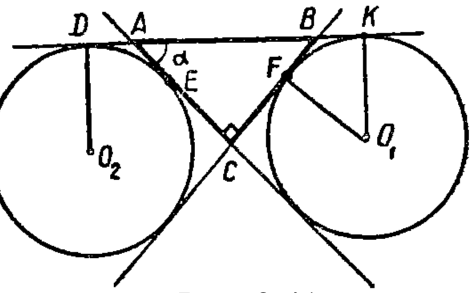


Рис. 2.41

$$S_x=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}(R+AE)(r+BF)=\frac{1}{2}\left(R+R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\left(r+r\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}Rr\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}Rr\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)=R\cdot r.$$

Задача 2.1.14. Вершини правильного трикутника ABC розташовані на трьох паралельних прямих. Відстані від середньої прямої до двох крайніх дорівнюють a і b. Знайти сторону трикутника.

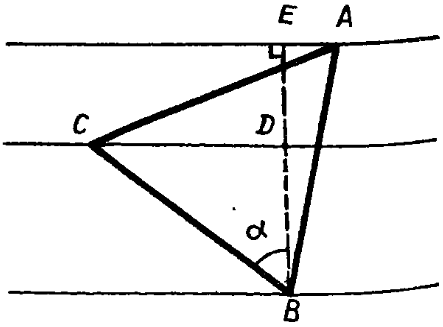


Рис. 2.45

Розв'язання. Опустимо з вершини правильного трикутника ABC (рис. 2.45) перпендикуляр BE на паралельні прямі. Нехай $AB = AC = BC = x$; $\angle CBD = \alpha$. З прямокутних трикутників BCD і ABE дістанемо $BD = b = x\cos\alpha$; $BE = a + b = x\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$. Розв’язуючи систему рівнянь $\cos\alpha = \frac{b}{x}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - b^2}$,

маємо $a + b = x\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$; $a + b = x\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$;

$a + b = x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{x}\sqrt{x^2 - b^2}\right)$; $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(x^2 - b^2\right)$; $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

Задача 2.1.15. Довести, що пряма, симетрична з медіаною відносно бісектриси внутрішнього кута трикутника, поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні квадратам прилеглих сторін.

Доведення. В трикутнику ABC (рис. 2.46) BL – бісектриса; BM – медіана; BN – пряма, симетрична BM відносно бісектриси BL. Нехай $AN = x$, $NC = y$, $BN = n$, $AM = m$. Тоді $2S_{ABN} = xh_b = nc\sin\angle ABN$, $2S_{MBC} = \frac{x+y}{2}h_b = ma\sin\angle MBC$, де h_b – висота, опущена з вершини B на AC. Оскільки $\angle ABN = \angle MBC$, то

$$x = \frac{x+y}{2}\cdot\frac{n\cdot c}{m\cdot a}. \qquad (1)$$

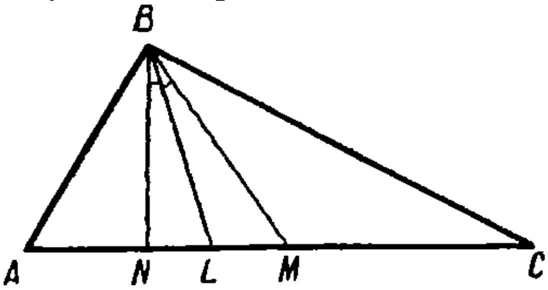


Рис. 2.46

Аналогічно, $2S_{NBC} = yh_b = na\sin\angle NBC$, $2S_{ABM} = \frac{x+y}{2}h_b = mc\sin\angle ABM$.

Оскільки $\angle NBC = \angle ABM$,то

$$y = \frac{x+y}{2}\cdot\frac{n\cdot a}{m\cdot c}. \qquad (2)$$

Поділивши (1) на (2) дістанемо $\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2}$.

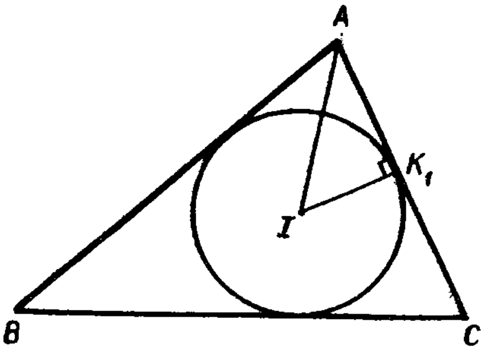


Рис. 2.47

Задача 2.1.16. Довести формулу Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Доведення. Оскільки у трикутнику ABC (рис. 2.47) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}$, то

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{r}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3},\quad \text{або}\quad (3p-2p)r^2=(p-a)(p-b)(p-c).$$

Помноживши обидві частини рівності на p, дістанемо $p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Враховуючи, що $S=pr$, маємо $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Звідси $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

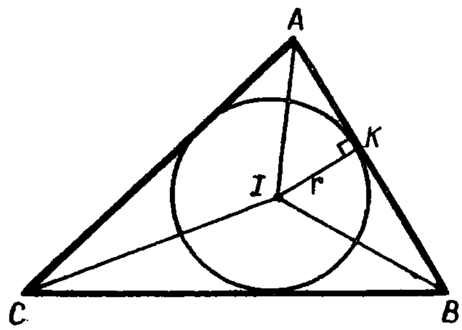


Рис. 2.49

Задача 2.1.17. Довести, що в трикутнику ABC $\frac{abc}{p}=\frac{mnl}{r}$, де p – півпериметр, m, n, l – відрізки AI, BI, CI, I – інцентр.

Доведення. Маємо $AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $BI=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $CI=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ (рис. 2.49). $AI\cdot BI\cdot CI=\frac{r^3 4R}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{4Rr^3}{r}=4Rr^2$. З іншого боку, враховуючи, що $R=\frac{abc}{4S}$, маємо $\frac{abc}{p}=\frac{4R\cdot S\cdot r}{S}=4Rr$. Отже, $\frac{abc}{p}=\frac{mnl}{r}$.

Задача 2.1.18. Довести формулу Ейлера $OI^2=R^2-2Rr$.

Доведення. З трикутника OIB (рис. 2.50) за теоремою косинусів $OI^2=OB^2+BI^2-2OB\cdot BI\cos\angle OBI$. Але $OB=R$, $BI=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $\angle OBI=\left(\frac{B}{2}-(90^\circ-A)\right)$, тому

$$OI^2=R^2+\frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}}-\frac{2Rr\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}=R^2-2Rr\cdot\left(\frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}-\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R\sin^2\frac{B}{2}}\right)=$$

$$R^2-2R\cdot r\cdot\frac{\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=R^2-2Rr\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=R^2-2Rr\,.$$

Задача 2.1.19. В коло вписаний опуклий чотирикутник *BACD*. В трикутники *BCD, CDA, DAB, ABC* вписано кола, радіуси яких відповідно r_1, r_2, r_3, r_4. Довести, що $r_1+r_3=r_2+r_4$.

Доведення. Позначимо *R* радіус кола, описаного навколо чотирикутника *ABCD* (рис. 2.51), нехай також $\angle BAC=\angle BDC=\alpha$; $\angle CAD=\angle DBC=\beta$; $\angle ACD=\angle ADB=\gamma$; $\angle ABD=\angle ACD=\varphi$.

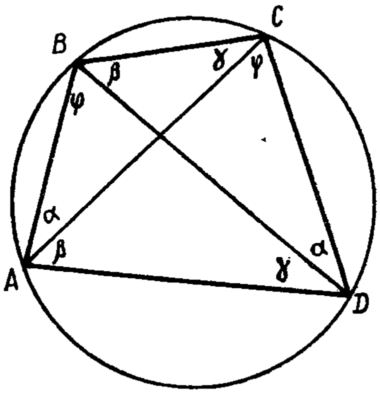


Рис. 2.51

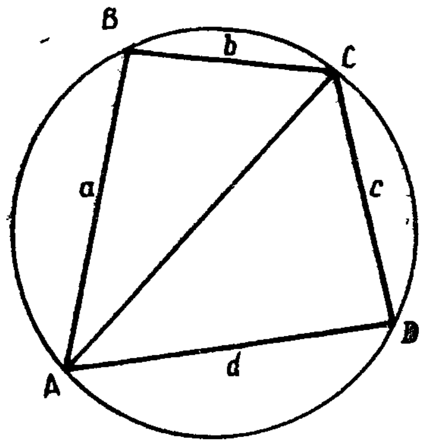
Розглянемо трикутник *BCD*: $r_1=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=R\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos C-1\right)$. Аналогічно, $r_2=R\left(\cos\beta+\cos\varphi+\cos D-1\right)$; $r_3=R\left(\cos\varphi+\cos\gamma+\cos A-1\right)$; $r_4=R\left(\cos\alpha+\cos\gamma+\cos B-1\right)$ (тут *A, B, C, D* – кути чотирикутника *ABCD*).

Оскільки $A+C=180°$, то $\cos A+\cos C=0$ і $r_1+r_2=R\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\varphi-2\right)$, $r_3+r_4=R\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\varphi-2\right)$. Отже, $r_1+r_3=r_2+r_4$.

Задача 2.1.20. Знайти площу вписаного в круг чотирикутника зі сторонами *a*, *b*, *c*, *d*.

Розв'язання. Нехай у чотирикутнику *ABCD* (рис. 2.52) $AB=a$, $CD=c$, $AD=d$, $BC=b$; *S* – площа чотирикутника *ABCD*. Тоді $S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D$. Оскільки $\angle B+\angle D=180°$, то

$$S=\frac{1}{2}\left(ab+cd\right)\sin B. \qquad (1)$$



Далі маємо $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$; $CA^2=c^2+d^2-2cd\cos B$, тому

$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$, звідки $\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$, тому

Рис.2.52

$$\sin^2 B=1-\cos^2 B=1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4(ab+cd)^2}=\frac{4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4(ab+cd)^2}=$$

$$\frac{\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)\cdot\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)}{4(ab+cd)^2}=\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{4(ab+cd)^2}.$$

Нехай $a+b+c+d=2p$, тоді

$$\sin B=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}. \qquad (2)$$

Підставляючи вираз (2) у вираз (1), дістаємо: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ [51,242].

4)Метод допоміжного периметра

Задача 2.1.21. У прямокутному трикутнику *ABC* ($\angle C=90^\circ$) $AK_3=m$, $BK_3=n$. Знайти площу трикутника *ABC*.

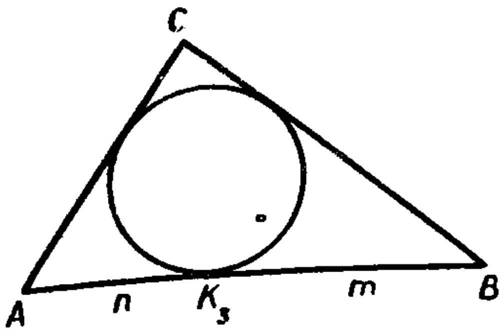


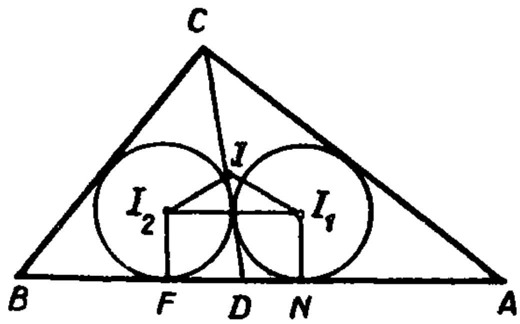
Рис. 2.53

Розв'язання. Введемо периметр *2p*. Тоді $AK_3=p-a$, $BK_3=p-b$ (рис. 2.53), $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p\cdot m\cdot n\cdot r$, $S^2=S\cdot m\cdot n$, звідки $S=m\cdot n$.

Задача 2.1.22. У прямокутному трикутнику *ABC* ($\angle C=90^\circ$) через вершину *C* проведено відрізок *CD* (точка *D* належить стороні *AB*) так, що коло вписані у трикутники *CAD* і *CBD*, рівні між собою. Довести, що $CD=\sqrt{S}$.

Доведення. Введемо позначення $CD=x$ (рис. 2.54). Очевидно, що $S=S_{ACD}+S_{DCB}=p_1r_1+p_2r_1=(p_1+p_2)r_1$, де p_1 і p_2 – півпериметри трикутників *ACD* і *DCB*; r_1 – радіус рівних кіл, вписаних у ці трикутники.

Отже, $r_1=\frac{S}{p_1+p_2}=\frac{S}{p+x}$. Позначимо I_1, I_2 інцентри трикутників *ADC* і *CBD*. Із подібності трикутників



AIB і I_1II_2 дістанемо $\frac{r}{r-r_1}=\frac{c}{I_1I_2}$. Нехай F і N – точки дотику кіл до сторони AB. Але $I_1I_2=FN=FD+DN$, де $FD=p_2-a$, $DN=p_1-b$.

Таким чином $I_1I_2=p_1-b+p_2-a=p+x-b-a$.

Отже, $\frac{\frac{S}{p}}{\frac{S}{p}-\frac{S}{p+x}}=\frac{c}{p+x-b-a}$, $x^2=p\cdot(b+a-p)=p\cdot(p-c)$. Рис. 2.54 c, отже $x^2=pr=S$. Звідси $x=\sqrt{S}$.

2.2. Застосування методу допоміжних побудов при розв’язуванні задач в 7 – 9 класах

1)Метод допоміжних точок

Допоміжна точка – центр кола

Задача 2.2.1. Довести, що в трикутнику ABC:

1) $S=r\cdot p$;

2) $S=\frac{abc}{4R}$;

3) $S=R\cdot p_H$;

4) $S=r_a(p-a)$,

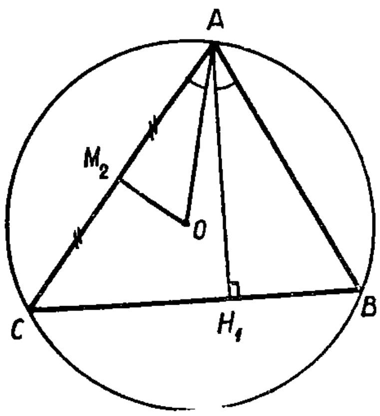


Рис. 2.58

де S – площа трикутника ABC; p – півпериметр; p_H – півпериметр трикутника $H_1H_2H_3$; r_a – радіус зовні вписаного кола, яке дотикається до сторони BC.

Доведення. Доведемо формулу $S=\frac{abc}{4R}$ (умова 2).

Опустимо висоту AH_1 і з точки O опустимо перпендикуляр OM_2 на сторону AC (рис. 2.58). Трикутники ABH_1 і AOM_2 подібні: $\frac{R}{c}=\frac{b}{2\cdot h_a}$, отже, $h_a=\frac{bc}{2R}$, $\frac{2S}{a}=\frac{bc}{2R}$, $S=\frac{abc}{4R}$.

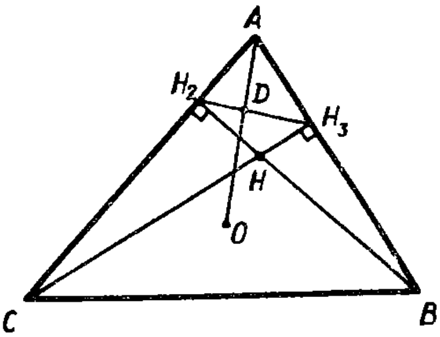


Рис. 2.59

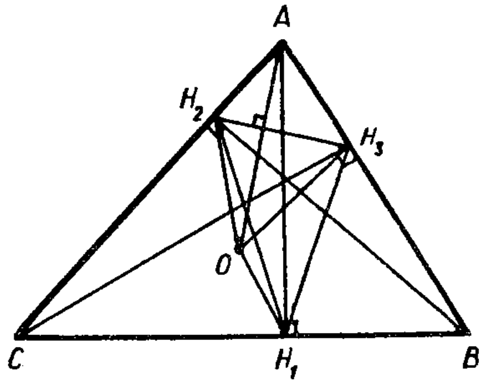


Рис. 2.60

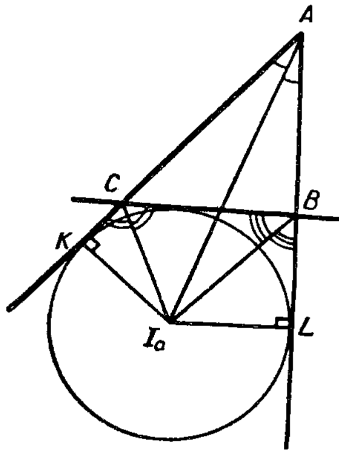
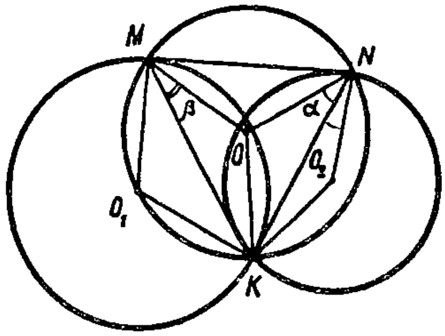


Рис.2.61

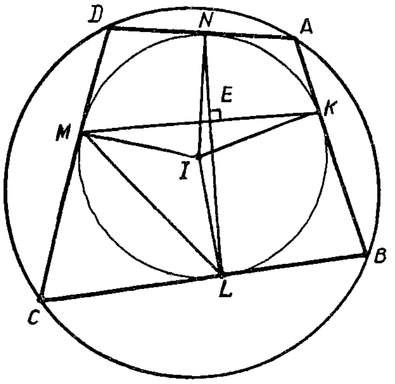
Доведемо формулу $S=R\cdot p_H$ (умова 3). Спочатку доведемо, що $OA\perp H_2H_3$ (рис. 2.59). Справді, $\angle ADH_3=\angle AH_2H_3+\angle H_2AO$. Але $\angle AH_2H_3=\angle ABC=B$, $\angle H_2AO=90°-B$, отже, $\angle ADH_3=90°$.

Позначимо S_1, S_2, S_3 відповідно площі чотирикутників AH_2OH_3, BH_1OH_3, CH_1OH_2 (рис. 2.60). Тоді $S_{ABC}=S_1+S_2+S_3$. Але $S_1=\frac{1}{2}R\cdot H_2H_3$, $S_2=\frac{1}{2}R\cdot H_1H_3$, $S_3=\frac{1}{2}R\cdot H_1H_2$ і $S_{ABC}=\frac{1}{2}R\left(H_2H_3+H_1H_3+H_1H_2\right)=R\cdot p_H$.

Доведемо тепер умову 4. Позначимо I_a центр зовні вписаного кола, K і L – його точки дотику до прямих AC і AB (рис. 2.61). Враховуючи, що $AK=AL=p$, маємо $S_{AKI_aL}=r_a\cdot p$; $S_{AKI_aL}=S+r_a\left(p-b\right)+r_a\left(p-c\right)$, звідки $r_a\cdot p=S+r_a\left(p-b+p-c\right)$, отже, $S=r_a\cdot p-r_a\cdot a=r_a\left(p-a\right)$.



Задача 2.2.2. Маємо чотирикутник вписаний в коло і описаний навколо кола. Довести, що прямі, які сполучають точки дотику протилежних сторін з колом взаємно перпендикулярні.



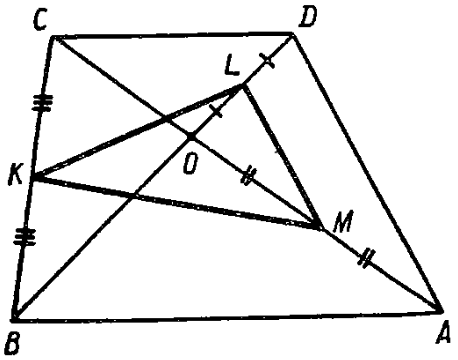
Доведення. Позначимо I центр вписаного в чотирикутник $ABCD$ кола (рис. 2.62), M, N, L, K – точки дотику кола до сторін. Маємо $\angle LMK = \frac{1}{2}\angle LIK = 90° - \frac{B}{2}$; $\angle MLN = \frac{1}{2}\angle MIN = 90° - \frac{D}{2}$ (B і D – кути чотирикутника $ABCD$), отже, $\angle LMK + \angle MLN = 90° + 90° - \frac{B+D}{2} =$

Рис. 2.63

$= 90° + 90° - 90° = 90°$, таким чином $\angle MEL = 90°$, що доводить твердження задачі.

Розглянемо задачі, в яких побудова центра O неочевидна.

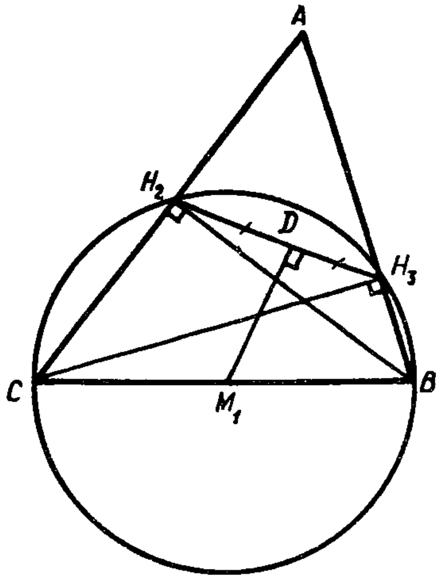
Задача 2.2.3. Нехай AB і CD – основи трапеції ($AB > CD$), O – точка перетину діагоналей AC і BD, причому трикутник COD – рівносторонній. Довести, що середини відрізків OA, BC, OD є вершинами рівностороннього трикутника.



Доведення. Нехай K, L і M – відповідно середини відрізків BC, OD і OA (рис. 2.65). Оскільки трикутник COD – правильний, то трикутник AOB теж правильний, звідки $BC = AD$. Крім того, оскільки LM – середня лінія трикутника ODA, то $LM = \frac{1}{2}BC$.

Рис. 2.65

В правильних трикутниках COD і AOB медіани CL і BM є висотами, отже, точки B, C, L, M лежать на колі з центром K і діаметром BC, звідки $KL = KM = \frac{1}{2} \cdot BC = LM$, що доводить твердження задачі.



Задача 2.2.4. Довести, що серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями в основах висот трикутника поділяє протилежну сторону навпіл.

Доведення. Описуємо навколо чотирикутника H_2H_3BC коло, діаметр якого збігається з відрізком BC, а центр – з серединою відрізка – точкою M_1 (рис. 2.66). Оскільки серединний перпендикуляр до хорди H_2H_3 проходить через центр кола, то точка M_1 належить цьому перпендикуляру, що й доводить твердження

Рис. 2.66 задачі.

Допоміжні точки – чудові точки трикутника.

Задача 2.2.5. Три кола однакового радіуса R перетинаються у спільній точці S і в точках M, N, P, причому точка S знаходиться всередині трикутника MNP. Довести, що точки M, N, P лежать на колі того ж самого радіуса R.

Доведення. Сполучимо точки M, N, P, S (рис. 2.68). Оскільки кола рівні між собою, то дуги, що сполучають точки їх перетину, рівні, а отже, рівні і пари кутів (вони позначені на рисунку). Із рівності кутів випливає, що точка S – ортоцентр трикутника MNP, а значить, коло, описане навколо трикутника MNP, має такий самий радіус, як і будь-яке із трьох даних кіл, тобто R.

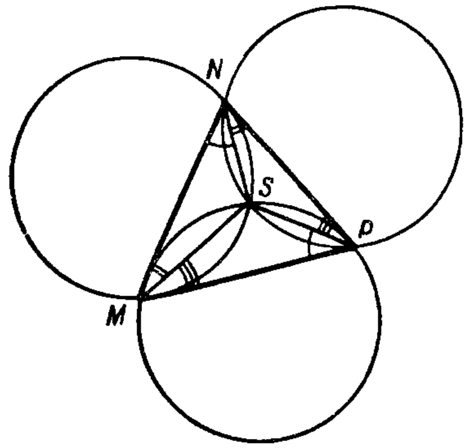


Рис. 2.68

Задача 2.2.6. У середині трикутника ABC дано деяку точку M таку, що площі трикутників AMC, BMC, AMB рівні між собою. Довести, що точки A, M, M_1 належать одній прямій.

Доведення. Нехай площа трикутника ABC дорівнює S. Тоді площі рівновеликих трикутників AMB, BMC, AMC дорівнюють $\frac{1}{3}S$ (рис. 2.70).

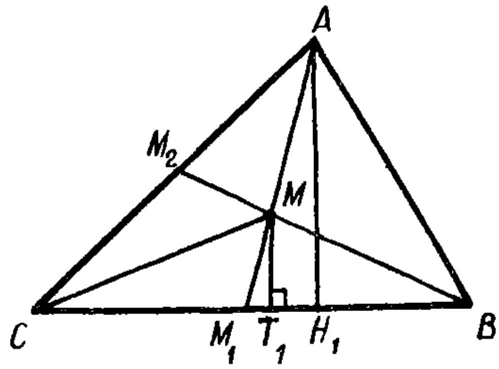


Рис. 2.70

Розглянемо трикутники ABC і BMC. Відрізки AH_1 і MT_1 – їх висоти. Тоді $\frac{MT_1}{AH_1}=\frac{1}{3}$ і $\frac{MM_1}{AM_1}=\frac{1}{3}$, звідки $\frac{AM}{MM_1}=2$. Аналогічно, $\frac{BM}{MM_2}=2$, M_1 і M_2 – точки перетину продовжень AM і BM із сторонами BC і AC, отже, AM_1 і BM_2 – медіани, тобто M – центроїд, що доводить твердження задачі.

Задача 2.2.7. Довести формулу Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Доведення. Нехай I_a – центр зовні вписаного кола, яке дотикається до сторони BC трикутника ABC; T – точка дотику до прямої AB; r_a – радіус цього кола (рис. 2.72). З прямокутного трикутника I_aTB випливає $r_a=(p-c)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$. Відомо, що

$r=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Отже, $rr_a=(p-b)(p-c)$, або $\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p}=(p-b)\cdot(p-c)$. Звідки $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, або $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

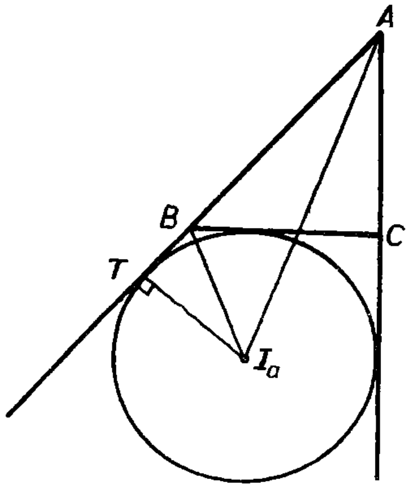


Рис. 2.72

Допоміжна точка – середина відрізка

Задача 2.2.8. Одна з діагоналей вписаного в коло чотирикутника є діаметром цього кола. Довести, що проекції протилежних сторін чотирикутника на другу діагональ рівні між собою.

Доведення. Нехай діагональ *AC* чотирикутника *ABCD* є діаметром кола (рис. 2. 73). Позначимо *M* і *L* проекції точок *A* і *C* на діагональ *BD*.

З середини *O* відрізка *AC* проведемо пряму, паралельну відрізку *LC*. Ця пряма перетне відрізок *AL* у його середині – точці *K* (теорема Фалеса). А оскільки $KO \parallel AM$, то відрізок *KO* перетне сторону *LM* трикутника *ALM* у точці *E*, яка є серединою *LM*. Отже, $LE=EM$ і $DL=BM$, що доводить твердження задачі.

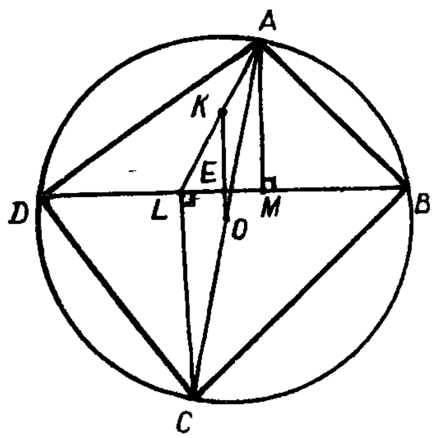
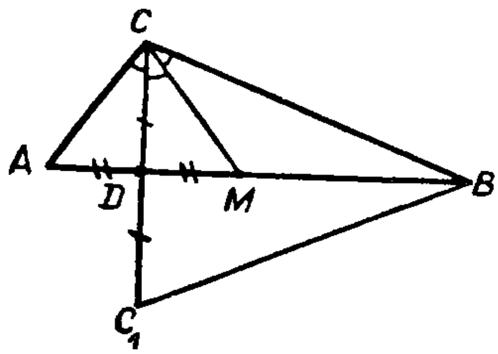


Рис. 2.73

Задача 2.2.9. Обчислити кути рівнобедреного трикутника, висота якого вдвічі менша бісектриси кута при основі.

Розв'язання. У трикутнику *ABC* маємо $AB=AC$, *AD* – висота, *LC* – бісектриса (рис. 2.74). Позначимо *E* – середину відрізка *LB*. Тоді $DE=\frac{1}{2}CL=AD$, отже, $\angle DAE=\angle AED$. Позначимо $\angle ACB=x$. Отже, $\angle EDB=\frac{1}{2}x$, $\angle EBC=x$, $\angle AED=\frac{3x}{2}$, $\angle BAC=3x$. Маємо рівняння $x+x+3x=180°$, $x=36°$.



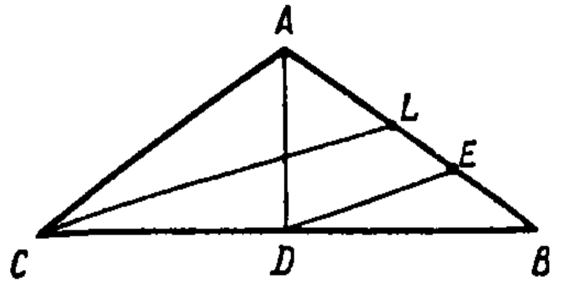


Рис. 2.74 Рис. 2.75

Допоміжні точки – симетричні точки

Задача 2.2.10. Висота і медіана трикутника, що виходять з однієї вершини, поділяють цей кут на три рівні частини. Довести, що даний трикутник прямокутний.

Доведення. Нехай $\angle ACD = \angle DCM = \angle MCB$ (рис. 2.75). Відобразимо вершину C відносно AB у точку C_1. Доведемо, що трикутник BCC_1 – рівносторонній. Оскільки $BC = BC_1$ і $2DM = BM$, то точка M у трикутнику BCC_1 є точкою перетину медіан і бісектрис. Отже, цей трикутник рівносторонній, а $\angle ACB = 90°$.

Допоміжна точка – точка W

Задача 2.2.11. У нерівнобедреному трикутнику ABC знайти кут C, якщо відомо, що центр кола, описаного навколо трикутника $M_1M_2M_3$, належить бісектрисі кута ACB.

Доведення. Нехай Q – центр кола, описаного навколо трикутника $M_1M_2M_3$ (рис. 2.76). Оскільки точка Q належить серединному перпендикуляру відрізка M_1M_2, а за умовою CQ – бісектриса кута ACB, то точка Q, як і точка W, належить колу, описаному навколо трикутника CM_1M_2. Отже, чотирикутник CM_1QM_2 є вписаним в коло. Позначимо x кут M_1CM_2. Тоді $2x + x = 180°,\ x = 60°$.

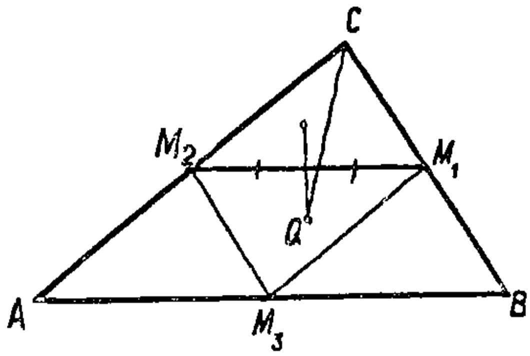


Рис. 2.76

2)Метод допоміжних прямих

Побудова паралельних прямих

Задача 2.2.12. Довести, що кут з вершиною в середині кола дорівнює півсумі дуг, що знаходяться між його сторонами.

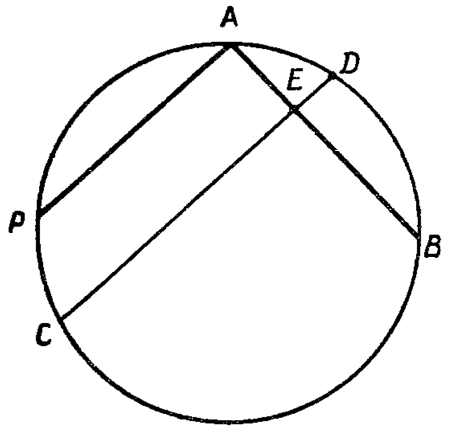


Рис. 2.79

Доведення. Нехай хорди AB і DC перетинаються в точці E (рис. 2.79). Доведемо, що $\angle BEC = \frac{\alpha+\beta}{2}$, де α і β – градусні виміри дуг BC і AD. Проведемо хорду AP, паралельну хорді DC. Оскільки дуга PC дорівнює дузі AD, то $\cup PC = \alpha$ і $\angle PAB = \frac{1}{2}\left(\cup PC + \cup BC\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Задача 2.2.13. Два кола радіусів R_1 і R_2 дотикаються зовнішньо. Відстань від точки дотику до спільної дотичної дорівнює d. Довести, що $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{d}$.

Доведення. Позначимо O_1 і O_2 центри кіл (рис. 2.80), A і B – точки дотику спільної дотичної, T – точка дотику кіл. Нехай $O_1A = R_1$, $O_2B = R_2$. Проведемо через точку O_2 пряму, паралельну дотичній AB, яка перетне відрізок TL, перпендикулярний до прямої AB, у точці D. Позначимо $DT = x$. Оскільки $O_1A \| O_2B \| TL$, маємо $\frac{x}{R_1-R_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$, $d = R_2 + x$. Отже, $d = R_2 + \frac{R_2\left(R_1-R_2\right)}{R_1+R_2} = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$, або $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{d}$.

Задача 2.2.14. На сторонах AC і BC трикутника ABC взято точки K і L так, що $CK:KA = a:b$, $CL:LB = c:d$. В якому відношенні точка перетину M відрізків AL і BK ділить ці відрізки?

Розв'язання. Проведемо $KE \| AL$ (рис. 2.82). Тоді $KM:MB = EL:LB$. Нехай $BC = l$. Оскільки $CL:LB = c:d$, то $CL = \frac{c}{c+d}l$; $LB = \frac{d}{c+d}l$.

Крім того, оскільки точка E ділить відрізок CL у відношенні $a:b$, то $EL = \frac{b}{a+b}CL = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}\cdot l$. Отже, $KM:MB = EL:LB = \frac{bc}{(a+b)d}$.

Аналогічно знайдемо, що $\frac{LM}{MA}=\frac{ad}{(c+d)b}$.

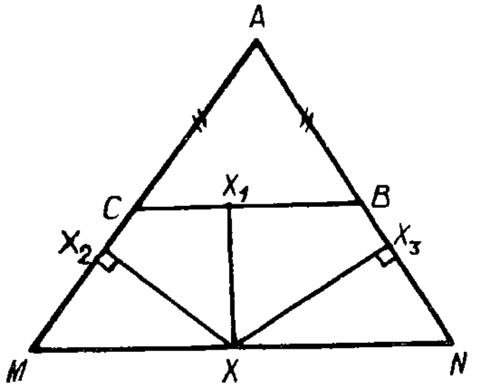


Рис. 2.81

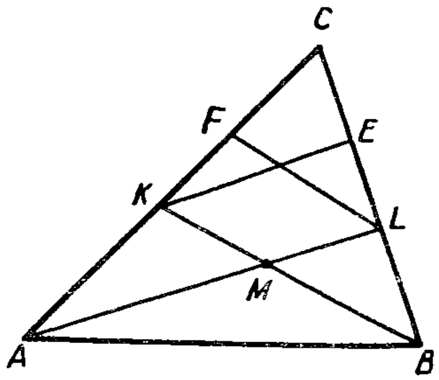


Рис. 2.82

Побудова перпендикулярних прямих

Задача 2.2.15. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні двом іншим сторонам трикутника.

Доведення. На бісектрису CL з точок A і B опустимо перпендикуляри AE і BF (рис. 2.86). Трикутники BFL і AEL подібні $\frac{BL}{AL}=\frac{BF}{AE}$. Трикутники AEC і BFC подібні: $\frac{BC}{AC}=\frac{BF}{AE}$. Порівняємо пропорції: $\frac{BC}{AC}=\frac{BL}{AL}$.

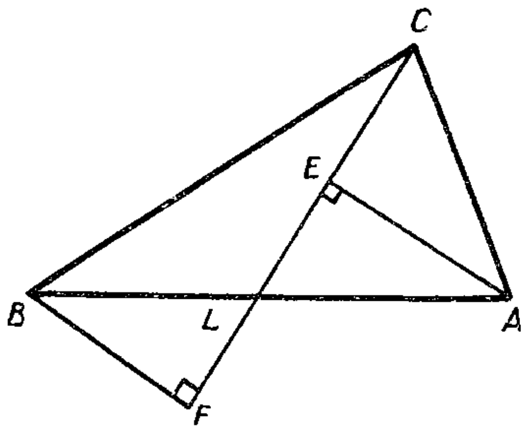


Рис. 2.86

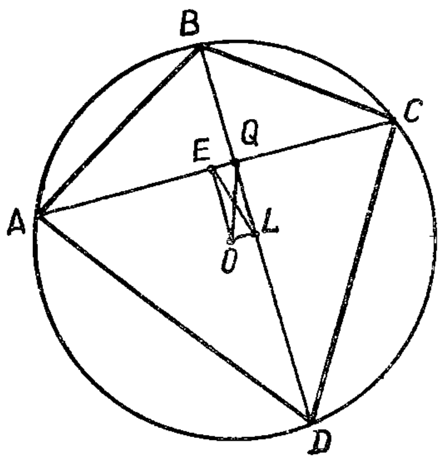
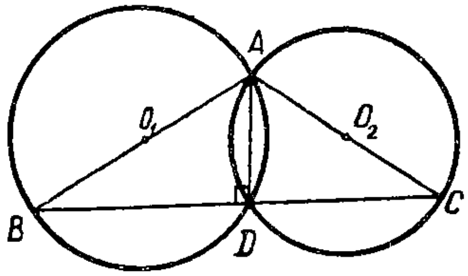


Рис. 2.87

Задача 2.2.16. Діагоналі вписаного у коло чотирикутника взаємно перпендикулярні. Відстань від центра кола до точки перетину діагоналей дорівнює t. Знайти відстань між серединами діагоналей.

Розв'язання. У чотирикутнику *ABCD* (рис. 2.87) *Q* – точка перетину діагоналей; *O* – центр описаного кола; *E* і *L* – середини діагоналей. Сполучимо точку *O* з точками *E* і *L*. Тоді $OE \perp AC$ і $OL \perp BD$, і чотирикутник *QEOL* – прямокутник. Отже, $EL = QO = t$.



Задача 2.2.17. Два кола перетинаються у точках *A* і *D*. В кожному з них проведено діаметри *AB* і *AC*. Довести, що точки *B, D* і *C* належать одній прямій.

Рис. 2.88

Доведення. Проведемо спільну хорду *AD* (рис. 2.88). Оскільки *AB* і *AC* діаметри, то $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, і твердження задачі доведено.

Побудова рівних відрізків та відрізків певної довжини

Задача 2.2.18. Два кола дотикаються зовні у точці *A*. Точки *B* і *C* – точки дотику спільної зовнішньої дотичної обох кіл. Довести, що кут *BAC* прямий.

Доведення. Проведемо через точку *A* спільну дотичну до обох кіл (рис. 2.97). Ця дотична перетне *BC* у точці *D*. Оскільки $BD = DA = DC$, то $AD = \frac{1}{2}BC$. отже, $\angle BAC = 90°$.

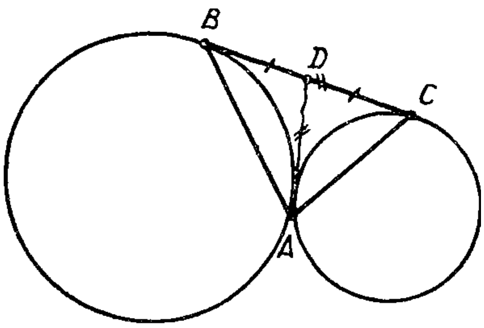


Рис. 2.97

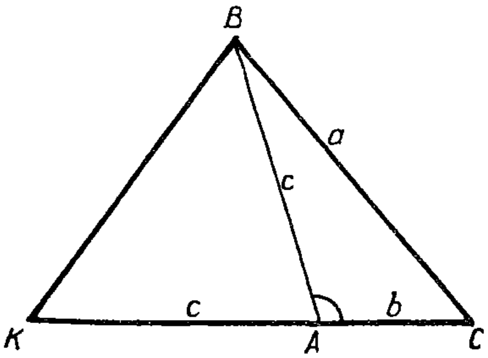


Рис. 2.98

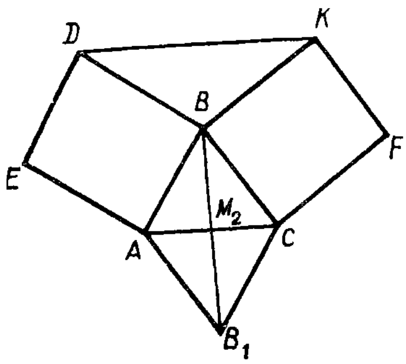


Рис. 2.99

Задача 2.2.19. Довести, що якщо між сторонами трикутника має місце залежність $a^2 = b^2 + bc$, то $A = 2B$.

Доведення. На продовженні *CA* відкладемо відрізок $AK = c$ (рис. 2.98). Розглянемо трикутники *ABC* і *KBC*. Доведемо, що їх сторони пропорційні. Справді, за умовою $a^2 = b(b+c)$ або $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$.

Ці трикутники мають спільний кут *C*, тому $\angle A = \angle CBK$, $\angle B = \angle AKB$. Отже, $\angle A = \angle B + \angle AKB = 2\angle B$, отже, $A = 2B$.

Задача 2.2.20. На сторонах трикутника поза ним побудовано квадрати. Довести, що відрізок прямої, який сполучає вершини сторін квадратів, що виходять з однієї вершини трикутника, вдвічі більший, ніж медіана трикутника, яка проведена з тієї ж вершини.

Доведення. Нехай на сторонах *AB* і *BC* побудовано квадрати *ABDE* і *BCFK* (рис. 2.99). Подвоїмо медіану BM_2. Дістанемо паралелограм $ABCB_1$. У трикутниках *BDK* і BCB_1: $DB = BA = CB_1, BK = BC$, $\angle DBK = \angle BCB_1$. Отже, ці трикутники рівні між собою і $DK = BB_1 = 2BM_2$.

Задача 2.2.21. Кут *B* при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $80°$. У площині трикутника вибрано точку *D* так, що $\angle DAC = 30°$, $\angle DCA = 10°$. Знайти кут *ADB*.

Розв'язання. Побудуємо $CK = AK = AC$ (рис. 2.100). Трикутник *AKC* – рівносторонній.

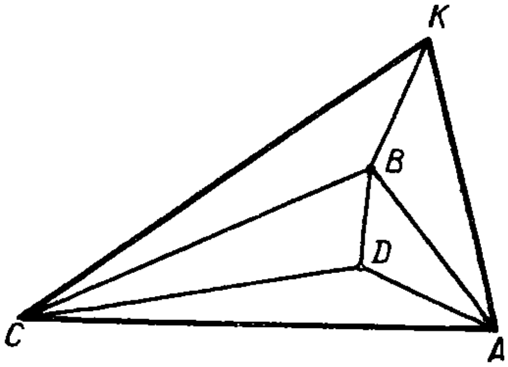


Рис. 2.100

Оскільки $\Delta CBK = \Delta CDA$, то $CB = CD$. Отже, $\angle CBD = \angle CDB = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

Таким чином, $\angle ADB = 360° - 140° - 70° = 150°$.

Задача 2.2.22. Всередині кута $60°$ знаходиться точка *M* на відстані *a* і *b* від сторін кута. Знайти відстань від цієї точки до вершин даного кута.

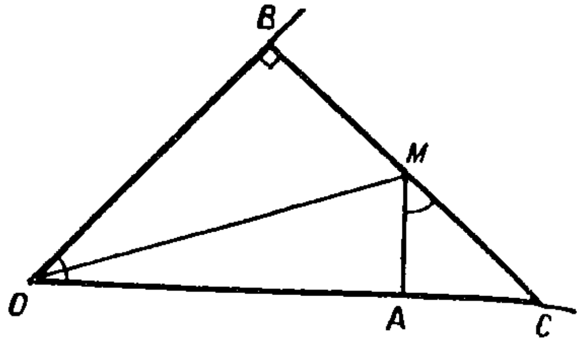


Рис. 2.101

Розв'язання. Нехай $MA = a$, $MB = b$ (рис. 2.101). Продовжимо *MB* до перетину зі стороною *OA* кута *AOB* в точці *C*. З трикутника *AMC*, де $\angle AMC = \angle AOB$, знаходимо $MC = 2AM = 2a$. Отже, $CB = CM + MB = 2a + b$.

З трикутника *COB*, $OC = 2OB$, знаходимо $(2OB)^2 - OB^2 = (2a + b)^2$. Отже,

$$OB = \frac{\sqrt{3}(2a + b)}{3}.$$

З трикутника *OBM* випливає $OM = \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ [51,277].

3)Метод допоміжних фігур

Допоміжна фігура - трикутник

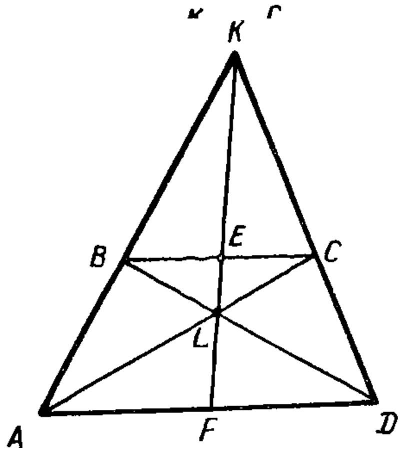
Задача 2.2.23. Чотирикутник *ABCD* – квадрат; точка *M* належить стороні *CD*, точка *K* належить стороні *BC*; *AK* – бісектриса кута *BAM*. Довести, що $AM = BK + DM$.

Доведення. На стороні *AD* поза квадратом побудуємо трикутник *ADN*, рівний трикутник *ABK* (рис. 2.102). Тоді $DN = BK$, $BK + DM = DN + DM = MN$. Нехай $\angle BAK = \alpha$. Тоді $\angle AND = 90° - \alpha$. Маємо: $\angle MAD = 90° - 2\alpha$; $\angle MAN = (90° - 2\alpha) + \alpha = 90° - \alpha$; $\angle ANM = (90° - 2\alpha) + \alpha = 90° - \alpha$.

Отже, $\angle MAN = \angle ANM$ і $AM = MN$, а тому $AM = BK + DM$.

Задача 2.2.24. В трапеції точка перетину діагоналей рівновіддалена від прямих, яким належать бічні сторони. Довести, що трапеція рівнобічна.

Доведення. Доповнимо трапецію *ABCD* до трикутника *AKD* (рис. 2.103). У цьому трикутнику точка *L* перетину діагоналей трапеції належить бісектрисі кута *AKD*. Оскільки ця бісектриса проходить через середину відрізка *AD*, то трикутник *AKD* – рівнобедрений. Твердження задачі доведено.



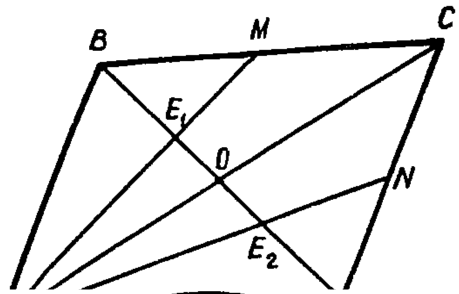
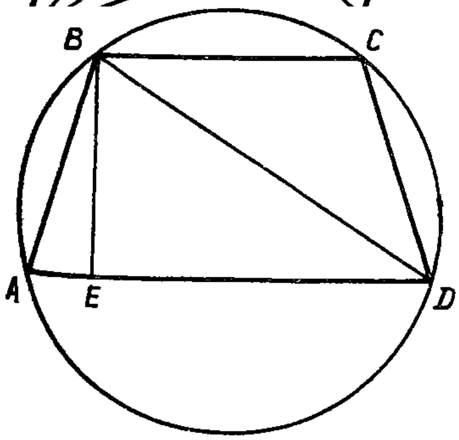


Рис. 2.102

Рис. 2.103

Рис. 2.104

Задача 2.2.25. у рівнобедреній трапеції дано основи *a* і *b* і висоту *h*. Знайти радіус описаного кола.



Розв'язання. Нехай трапеція *ABCD* (рис. 2.108) вписано в коло радіуса *R*. В це ж саме коло вписано трикутник *ABD*. Тому будемо шукати радіуса кола, описаного навколо трикутника *ABD*. Застосуємо формулу $R = \dfrac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S}$, де *S* – площа трикутника *ABD*.

Рис. 2.108

Оскільки $AB=\sqrt{h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$ і $BD=\sqrt{h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$, то

$$R=\frac{b}{4S}\sqrt{h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2h}.$$

Задача 2.2.26. Довести, що в гострокутному трикутнику ABC $a\cdot AH+b\cdot BH+c\cdot CH=4S$.

Доведення. Через вершини трикутника ABC проведемо прямі, паралельні його сторонам. Дістанемо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 2.109). Розглянемо трикутник B_1HC_1. Його площа дорівнює $a\cdot AH$, площа трикутників A_1HC_1 і B_1HA_1 дорівнює відповідно $b\cdot BH$ і $c\cdot CH$.

Оскільки площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює $4S$, то $a\cdot AH+b\cdot BH+c\cdot CH=4S$.

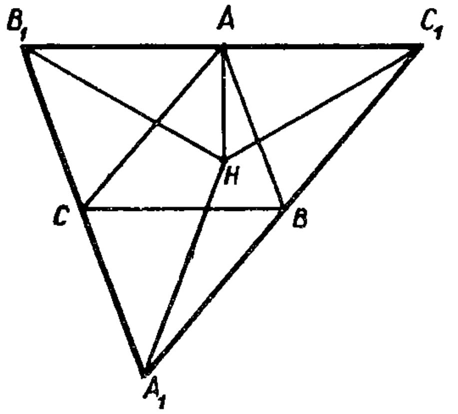


Рис. 2.109

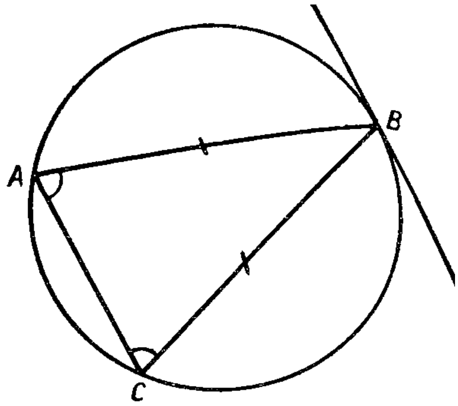
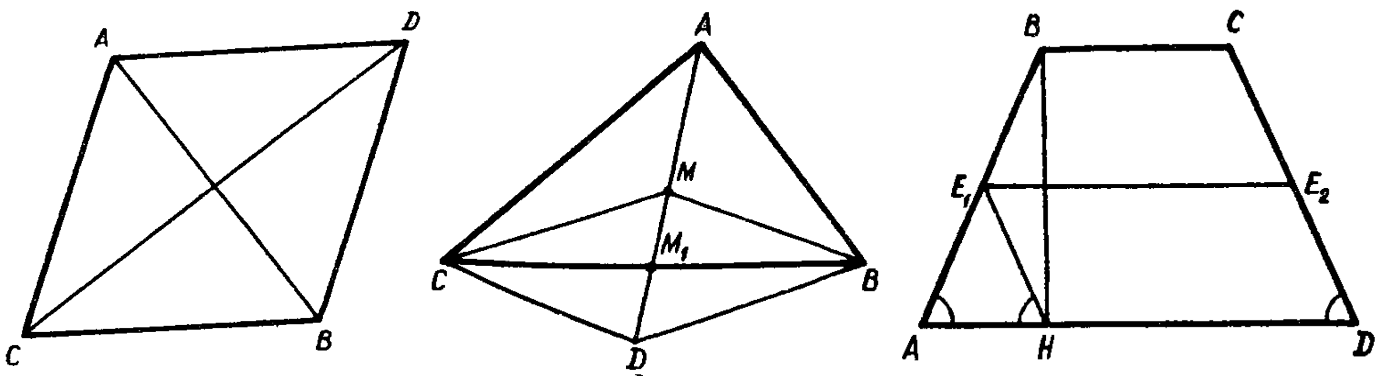


Рис. 2.110

Допоміжні фігури – паралелограм, трапеція

Задача 2.2.27. У трикутнику ABC відомі сторони a, b і медіана m_c. Знайти його площу.

Розв'язання. Доповнимо трикутник ABC до паралелограма, подвоївши медіану m_c (рис. 2.112). Площу трикутника DAC можна обчислити за формулою Герона, оскільки відомо три сторони a, b і $2m_c$. Трикутники ABC і ADC рівновеликі,



отже, можна знайти шукану площу: $S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m_c)(a+b-2m_c)(a-b+2m_c)(2m_c+b-a)}$.

Рис. 2.112 Рис. 2.113 Рис. 2.114

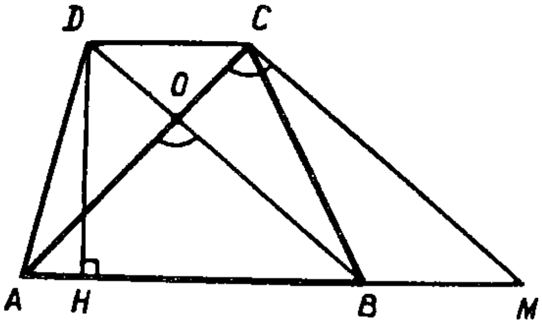
Задача 2.2.28. Довести, що існує трикутник, сторони якого рівні медіанам даного трикутника.

Доведення. Подвоїмо відрізок MM_1 (рис. 2.113). Оскільки $MM_1 = M_1D$ і $BM_1 = M_1C$, то чотирикутник $MBDC$ – паралелограм.

Розглянемо трикутник MDC. Його сторони рівні $\frac{2}{3}$ медіани даного трикутника, що доводить твердження задачі.

Задача 2.2.29. У рівнобедреній трапеції $ABCD$ ($AD > BC$) BH – висота. Довести, що відрізок HD дорівнює середній лінії трапеції.

Доведення. Нехай E_1 і E_2 – середини сторін AB і CD (рис. 2.114). Тоді E_1E_2DH – паралелограм і $E_1E_2 = HD$, що й доводить твердження задачі.



4)Метод допоміжного кола

Задачі на побудову

Задача 2.2.30. Побудувати трикутник за висотою, медіаною та бісектрисою, що проведені з однієї вершини.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, у якого з вершини A опущено висоту h_a, проведено медіану m_a та бісектрису l_a (рис. 2.121). Перш за все доведемо, що у різносторонньому трикутнику ABC $m_a > l_a > h_a$. Навколо трикутника ABC побудуємо коло з центром O і продовжимо бісектрису AL до перетину з колом у точці W. Проекція точки W (точка M_1) на відрізок BC може знаходитися тільки ліворуч від точки L, бо в іншому випадку у трикутнику WLM_1 буде прямий і тупий кути. Отже, маємо план побудови: будуємо прямокутні трикутники AH_1L, AH_1M_1. Бісектрису AL продовжимо до перетину з віссю симетрії відрізка BC, дістанемо точку W і знайдемо центр кола – точку O. Вона є перетином перпендикулярів, проведених через середини відрізків BC і AW.

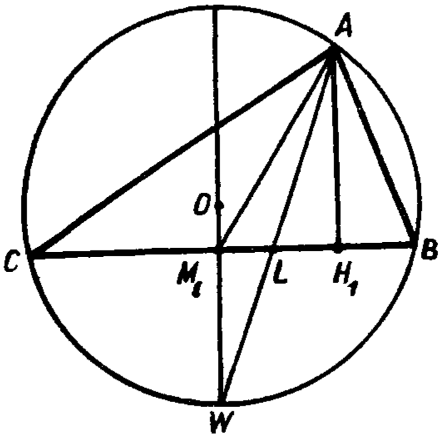


Рис. 2.121

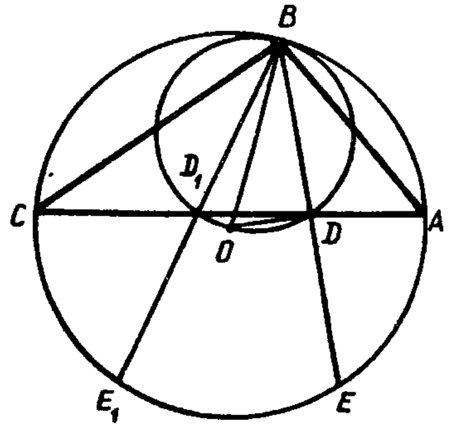


Рис. 2.122

Задача 2.2.31. Через вершину *B* трикутника *ABC* провести відрізок *BD* (точка *D* належить *AC*), довжина якого була б середньо пропорційною величиною між довжиною відрізків *AD* і *DC*.

Розв'язання. Вважаємо трикутник *ABC* заданим. Опишемо навколо нього коло з центром у точці *O* (рис. 2.122). Опишемо ще одне коло з діаметром *OB*. Це коло перетне сторону *AC* у точці *D* (і у точці D_1). Доведемо, що ці точки – шукані. Продовжимо відрізок *BD* до перетину з колом у точці *E*. Оскільки $\angle ODB = 90°$, то $BD = ED$, а $AD \cdot DC = ED \cdot DB$, то $AD \cdot DC = BD^2$. Аналогічно доведемо, що й точка D_1 – шукана. Таким чином, задача має два розв’язки (точки *D* і D_1), коли коло з діаметром *OB* перетинає основу *AC*; один розв’язок, коли воно дотикається, і не має жодного розв’язку, коли коло знаходиться поза основою.

Задача 2.2.32. Побудувати паралелограм за двома сторонами і кутом між діагоналями.

Розв'язання. У паралелограмі *ABCD* точка *O* – точка перетину діагоналей (рис. 2.123). Маючи відрізок *AD* і кут *AOD*, можна побудувати коло, в яке вписано трикутник *AOD*. Враховуючи, що точка *O* – центр симетрії паралелограма, робимо висновок, що точка *O* належить колу *AOD* і дузі радіуса $\frac{1}{2}AB$ з центром у точці *E*, що є серединою *AD*.

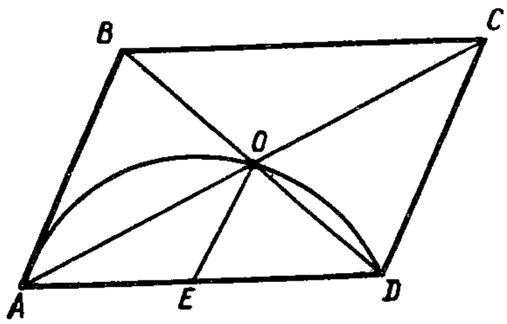


Рис. 2.123

Задача 2.2.33. На одній із сторін кута з вершиною S задано точки A і B. Знайти на другій стороні точку C, з якої відрізок AB видно під найбільшим кутом.

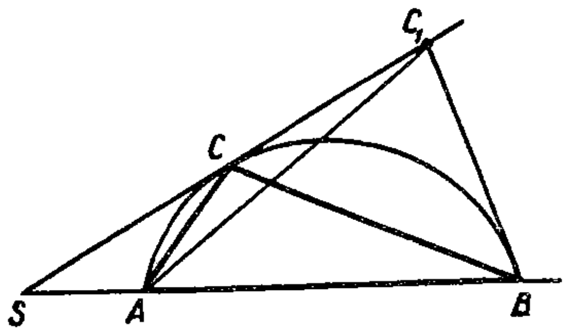


Рис. 2.124

Розв'язання. Аналіз задачі показує, що якщо провести коло, яке буде дотикатися до сторони кута, то точка дотику C буде шуканою (рис. 2.124). Справді, якщо припустити, що є інша точка, наприклад C_1, то $\angle ACB > \angle AC_1B$.

Задача 2.2.34. Побудувати квадрат за чотирма точками, кожна з яких міститься відповідно на кожній із сторін квадрата.

Розв'язання. Позначимо T_1, T_2, T_3, T_4 задані точки (рис. 2.125). Аналіз задачі показує, що відрізки T_1T_2 і T_3T_4 є діаметрами кіл, яким належать кінці діагоналі BD. Крім того, точки X і $У$, які є серединами дуг цих півкіл, теж належать цій діагоналі. Отже, проводячи пряму через точки X і $У$ до перетину з двома побудованими колами, знайдемо діагональ, а потім побудуємо квадрат.

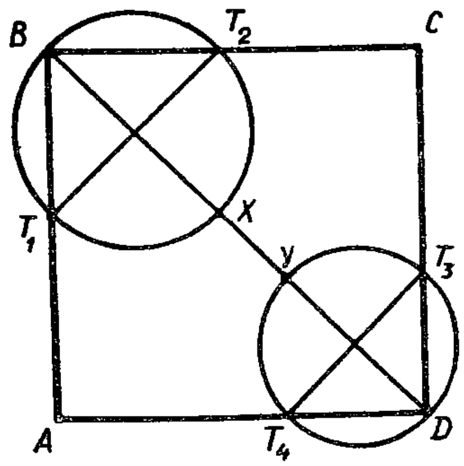


Рис. 2.125

Задачі на доведення

Задача 2.2.35. Довести, що коли H_1, H_2, H_3 – основи висот гострокутного трикутника ABC, то його висоти належать бісектрисам кутів трикутника $H_1H_2H_3$.

Доведення. Доведемо, наприклад, що висота BH_2 поділяє кут $H_1H_2H_3$ навпіл (рис. 2.126). Позначимо H точку перетину висот трикутника ABC. Опишемо навколо чотирикутників CH_2H_3B і CH_2HH_1 кола. Тоді, $\angle HCH_1 = \angle HH_2H_1$, $\angle H_3CB = \angle H_3H_2B$, тобто $\angle H_1H_2B = \angle BH_2H_3$. Отже, висота BH_2 належить бісектрисі кута $H_1H_2H_3$. Аналогічно доводимо, що дві висоти AH_1 і CH_3 належать бісектрисам двох інших кутів трикутника $H_1H_2H_3$.

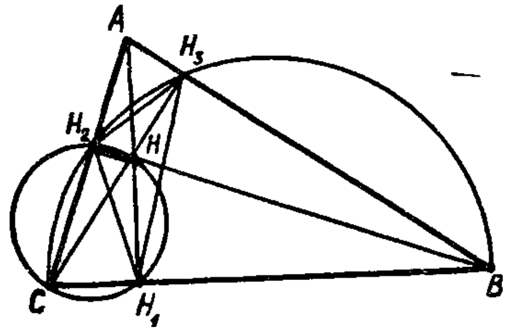


Рис. 2.126

Задача 2.2.36. На стороні квадрата зовні побудовано прямокутний трикутник, гіпотенуза якого зовні збігається з стороною квадрата. Довести, що бісектриса прямого кута цього трикутника поділяє площу квадрата навпіл.

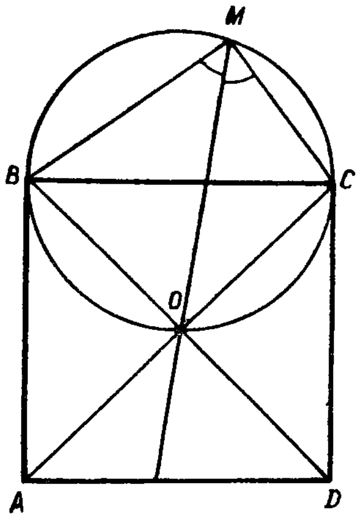


Рис. 2.127

Доведення. Якщо *ABCD* – даний квадрат, а *BMC* – прямокутний трикутник, то коло, яке описане навколо трикутника *BMC*, проходить через точку *O* – центр квадрата (рис.2.127). А оскільки $BO = CO$, то й бісектриса кута *BMC* також повинна проходити через точку *O*. Отже, вона поділяє площу квадрата навпіл.

Задачі на обчислення

Задача 2.2.37. Кути трикутника ABC – α, β, γ; *M* – довільна точка всередині трикутника. Вона проектується на сторони *BC, CA, AB* у точки A_1, B_1, C_1. Знайти кути AMB_1, AMC_1, BMC_1, якщо трикутник $A_1B_1C_1$ рівносторонній.

Розв'язання. навколо чотирикутників AB_1MC_1, BC_1MA_1, CA_1MB_1 опишемо коло (рис. 2.132).

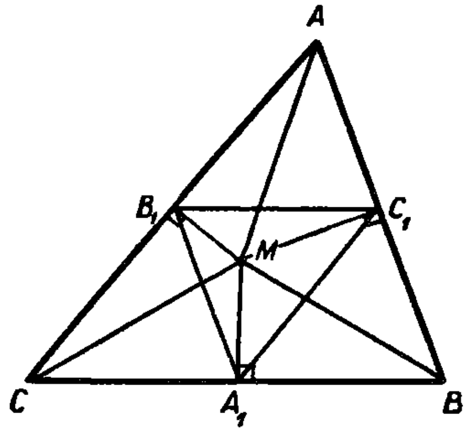


Рис. 2.132

Маємо $\angle AMB = 180° - \angle MBA - \angle BAM = 180° - \left(\angle C_1AM + \angle C_1BM\right) = 180° - 120° + {}$ $+\left(\angle MA_1B_1 + \angle MB_1A_1\right) = 60° + \angle ACB = 60° + \gamma$. Аналогічно, $\angle AMC = 60° + \beta$; $\angle BMC = 60° + \alpha$.

2.3. Аналіз результатів педагогічного експерименту

Експериментальна робота здійснювалася на базі Березнівського ліцею № 1 імені Миколи Буховича Березнівської міської ради Рівненського району Рівненської області. В експерименті було задіяно 67 учнів.

Проведена дослідницько-експериментальна робота у своїй основі передбачала перевірку ефективності методики використання методу допоміжних елементів у школі, а також для виявлення найбільш поширених допоміжних елементів, які вчителі застосовують при розв’язуванні задач у 7–9 класах. Крім того, досліджувалося, наскільки учні знайомі з методом допоміжних елементів у процесі розв'язування задач і яке в них ставлення до цього методу.

1) Було проведено опитування серед вчителів. Вчителі, що брали участь в опитуванні, повинні були відповісти на два наступних запитання:

1. Чи застосовуєте Ви на уроках геометрії у 7 – 9 класах метод допоміжних елементів при розв'язуванні задач та як часто?
2. Які допоміжні елементи Ви використовуєте найчастіше при розв'язуванні задач у 7 – 9 класах?

Після обробки даних отримали наступні результати.

На запитання «Чи застосовуєте Ви на уроках геометрії у 7 – 9 класах метод допоміжних елементів при розв'язуванні задач та як часто?» були такі відповіді (табл. 2.1):

Відповіді	***Кількість опитуваних, що дали позитивну відповідь, %***
Так, часто застосовую.	15
Так, іноді застосовую.	31
Так, дуже рідко застосовою.	52
Ні, взагалі не застосовую.	2

Таблиця 2.1

На запитання «Які допоміжні елементи Ви використовуєте найчастіше при розв'язуванні задач у 7 – 9 класах?» отримали такі результати (табл. 2.2):

Допоміжний елемент	***Рейтинг***
Відрізок	***2***
Кут	***3***
Площа	4
Периметр	5
Трикутник	***1***
Паралелограм	***3***
Трапеція	6
Прямі	7
Точка	8
Коло	5

Таблиця 2.2

Отже, результати опитування показали, що практично всі вчителі використовують метод допоміжних елементів при розв’язуванні задач 7 – 9 класів і але дуже рідко. Також було встановлено чотири допоміжних елементів, якими користуються вчителі при розв’язуванні задач найчастіше: перше місце посідає допоміжний трикутник, друге – допоміжний відрізок, а третє – допоміжний паралелограм та допоміжний кут.

2) Було проведено анкетування серед учнів. Анкета, що була запропонована учням має наступний вигляд.

Тест-анкета

*Обов’язкове поле

Введіть Ваше ім'я: *

Скільки Вам років: *

Який предмет у школі Вам подобається (подобався) більше?

- Алгебра
- Геометрія

Чи вивчали (будете вивчати) Ви у школі метод допоміжних елементів?

- Так
- Ні

Чи вмієте Ви розв'язувати задачі методом допоміжних елементів?

- Так
- Ні
- Не дуже
- Не знаю що це таке!

Виберіть 3 фігури, які на вашу думку, найчастіше використовуються при розв'язуванні задач методом допоміжних елементів.

- Трикутник

- Ромб
- Паралелограм
- Трапеція
- Квадрат
- Довільний чотирикутник

Встановіть співвідношення між допоміжними елементами та їх визначенням:

	Фігура, що складається з точок, рівновіддалених від однієї точки.	Геометрична фігура, що складається із трьох точок, які не лежать на одній прямій, і відрізків, які з'єднують ці точки.	Частина прямої, обмежена двома точками.	Фігура, утворена двома променями або відрізками, що виходять з однієї точки.	Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.
Кут	○	○	○	○	○
Коло	○	○	○	○	○
Трикутник	○	○	○	○	○
Відрізок	○	○	○	○	○
Паралелограм	○	○	○	○	○

Які допоміжні елементи, що виражають числові характеристики фігур Ви знаєте?

Виберіть правильні, на вашу думку, відповіді.

- площа
- медіана
- об'єм

- периметр
- бісектриса
- висота

Якщо в задачі дано подібні фігури, то який допоміжний елемент найдоцільніше використати?

Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

- Кут
- Пряма
- Відрізок
- Трикутник
- Коло

Застосування якого допоміжного елемента пов'язане з тригонометрією?

Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

- Кута
- Відрізка
- Трикутника
- Паралелограма
- Прямої
- Площі

Побудувати трикутник за медіаною, бісектрисою та висотою, що проведені з однієї вершини.

Який допоміжний елемент найдоцільніше використати при розв'язуванні даної задачі?

- Кут
- Трикутник

- Коло
- Трапецію
- Пряму
- Відрізок

Як Ви вважаєте, чи актуальним є вивчення методу допоміжних елементів у школі? *

Чи викликали у Вас запитання анкети труднощі? *

- Так, всі запитання складні
- Лише декотрі запитання
- Ні, запитання були легкі
- Інше:

Оброка результатів анкетування показала наступні результати:

Який предмет у школі Вам подобається (подобався) більше?

Алгебра, %	***Геометрія, %***
75	25

Чи вивчали (будете вивчати) Ви у школі метод допоміжних елементів?

Так, %	***Ні, %***
65	35

Чи вмієте Ви розв'язувати задачі методом допоміжних елементів?

Так, %	*Ні, %*	*Не дуже, %*	*Не знаю, що це таке!, %*
10	53	26	11

Як Ви вважаєте, чи актуальним є вивчення методу допоміжних елементів у школі?

Так, %	*Ні, %*	*Мені, байдуже!, %*
63	31	6

Чи викликали у Вас запитання анкети труднощі?

Так, всі запитання складні, %	*Лише декотрі запитання, %*	*Ні, запитання були легкі, %*
41	52	7

Отже, результати аналізу педагогічного експерименту свідчать про те, що учні мають недостатнє знайомство з методом допоміжних елементів, не зовсім розуміють його практичне застосування та майже не володіють основними теоретичними аспектами цього методу. Тому важливо активно впроваджувати метод допоміжних елементів у процес розв’язування задач у школі, особливо в контексті роботи вчителів математики, які повинні приділяти більше уваги як практичному використанню, так і теоретичним основам цього методу. Оволодіння загальними принципами методу допоміжних елементів сприяє розвитку у учнів розумових, свідомих і самостійних навичок розв’язування задач.

Висновки до розділу ІІ

Ефективність навчання забезпечується систематизацією задач та поділом їх на змістові блоки за рівнями складності (специфіка включення допоміжних даних) та способами розв'язання.

Проведена дослідницько-експериментальна робота у своїй основі передбачала перевірку ефективності методики використання методу допоміжних елементів у школі, а також для виявлення найбільш поширених допоміжних елементів, які вчителі застосовують при розв'язуванні задач у 7–9 класах. Крім того, досліджувалося, наскільки учні знайомі з методом допоміжних елементів у процесі розв'язування задач і яке в них ставлення до цього методу.

Експериментальна робота здійснювалася на базі Березнівського ліцею № 1 імені Миколи Буховича Березнівської міської ради Рівненського району Рівненської області. В експерименті було задіяно 67 учнів.

Опитування показало, що майже всі вчителі використовують метод допоміжних елементів при розв'язуванні задач для 7-9 класів, хоча роблять це досить рідко. Було також виявлено чотири допоміжні елементи, які вчителі застосовують найчастіше: на першому місці знаходиться допоміжний трикутник, на другому – допоміжний відрізок, а на третьому – допоміжний паралелограм і допоміжний кут.

Результати аналізу педагогічного експерименту показують, що учні недостатньо знайомі з методом допоміжних елементів, не зовсім розуміють його практичне застосування та майже не володіють основними теоретичними аспектами цього методу. Тому важливо активно впроваджувати метод допоміжних елементів у процес розв'язування задач у школі, особливо в контексті роботи вчителів математики, які повинні приділяти більше уваги як практичному використанню, так і теоретичним основам цього методу. Оволодіння загальними принципами методу допоміжних елементів сприяє розвитку у учнів розумових, свідомих і самостійних навичок розв'язування задач.

ВИСНОВКИ

Теоретичне та експериментальне дослідження проблеми формування формування вмінь у учнів 7-9 класів щодо розв’язування задач методом допоміжних елементів і побудов як одного з видів евристичної діяльності.дозволило зробити такі висновки:

1. Здійснено теоретичний аналіз досліджуваної проблеми, відображеної в методичній літературі. Вивчено питання формування вмінь учнів у розв’язуванні задач. Означено, що однією з ключових проблем у шкільній математичній освіті є навчання учнів методам і способам розв'язування задач, а також самостійного пошуку їх рішень. Методи та способи розв'язування залежать від характеру самих задач, а також від знань і допоміжних засобів, якими учні володіють на певному етапі навчання.

2. Проаналізовано поняття задачі в контексті навчання математики та сутність евристичного навчання при вивченні цього предмета. Суть евристичного навчання полягає у взаємодії між викладачем і учнями, що базується на створенні інформаційно-пізнавальної суперечності. Ця суперечність виникає між теоретично можливими способами розв'язання проблеми та практичною неможливістю їх застосування. Мета цього підходу — організувати самостійну роботу учнів над частиною програми через проблемно-пізнавальні завдання. Викладач, визначивши обсяг і рівень складності навчального матеріалу, представляє його у формі евристичної бесіди, дискусії або дидактичної гри. При цьому він поєднує часткове пояснення нового матеріалу з постановкою проблемних питань, пізнавальних завдань або експериментів. Це стимулює учнів до самостійної пошукової діяльності, розвитку навичок активного мовленнєвого спілкування, а також до постановки і розв'язання навчальних проблем.

3. Теоретично обґрунтовано метод допоміжних елементів як одного з видів евристичної діяльності. . Розв’язання задачі зводиться до її переформулювання, яке полягає в зведенні задачі до раніше розв’язаних. Задачу послідовно замінюємо еквівалентами доти, поки не одержимо задачу, яку зможемо розв’язати. В процесі розв’язання співставляємо дані умови з висновком, намагаємося зблизити їх, включити умову і висновок в одне відношення. Все це передбачає заміну понять

умови їх означеннями, виведення наслідків з умови, співвіднесення наслідків з вимогою задачі, отримання нової інформації з виведених наслідків. При переформулюванні умова і вимога варіюються (наприклад, апофема піраміди може бути медіаною або бісектрисою бічної грані). У результаті дістаємо такі дані умови: вихідні (задані безпосередньо), шукані (наслідки вихідних) і допоміжні (задані опосередковано). Вміння знаходити і застосовувати допоміжні дані полегшує розв'язання задачі. Допоміжними даними або елементами можуть бути параметри (довжина відрізка, величина кута, площа, об'єм) або геометричні фігури (трикутник, рівні та подібні трикутники, коло)

4. Розглянуто практичне застосування методу допоміжних елементів і побудов у процесі розв'язування задач для учнів 7-9 класів. Застосовуючи при розв'язуванні задач допоміжні параметри, спочатку складаємо за їх допомогою рівняння чи систему рівнянь (іноді деяке співвідношення), де невідомим є шуканий елемент або елемент, за допомого якого можна знайти шуканий. Потім шляхом перетворень виключаємо допоміжний параметр і знаходимо шуканий елемент. Це дає можливість іноді значно спростити розв'язування задач.

5. Розроблено методичні рекомендації щодо використання методу допоміжних елементів і побудов для розв'язування задач, призначені для учнів 7-9 класів та вчителів.

Метод допоміжних елементів був теоретично обґрунтований і систематизований, на основі чого були розроблені методичні рекомендації для учнів і вчителів.

Обґрунтованість і достовірність результатів, отриманих у процесі дослідження, визначається аналізом науково-методичної літератури, а також структурою і змістом учнівських робіт. Дослідження експертної оцінки продемонструвало, що метод допоміжних елементів може бути ефективно використаний для формування в учнів навичок розв'язування задач.

Результати цієї магістерської роботи стануть корисними як для учнів, так і для вчителів у процесі розв'язування задач за допомогою методу допоміжних елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівневий підручник для 8 кл. ЗНЗ. Київ: Генеза, 2008. 272 с.
2. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівневий підручник для 9 кл. ЗНЗ. Київ: Генеза, 2009. 304 с.
3. Бабій Н.М. Способи розв’язування задач із математики як засіб інтегрованого навчання в школі. *Математика в школах України.* 2019. № 13-15 (601-603) травень. С. 8- 12.
4. Бараболя М. М. Педагогічний довідник вчителя математики. Посібник для самоосвіти вчителів математики. Вінниця, 2008. 128 с.
5. Белешко Д. Т. Загальні питання теорії математичних задач. поняття задачі, класифікація задач, вправи, запитання .РДГУ. 2014. С. 3-5.
6. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. - 3-тє вид., перероб. і допов. Київ: Вища шк., 1989. 367с.
7. Бевз Г.П. Алгебра: проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. -3-є вид. Київ. Освіта , 2000. 304 с.
8. Бевз Г. Геометрія. Підручник для 7 класу. Київ: Вежа, 2007. 209 с.
9. Бурда М. І. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2007. 204 с.
10. Бурда М. І. Геометрія. Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2008. 240 с.
11. Бурда М. І. Геометрія. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. 240 с.
12. Бурда М. І. Геометрія: навч. посіб. для 8-9 класів шкіл з поглибленним вивченням математики. Київ: Освіта, 2004. 240 с.
13. Бурда М. І. Розв'язування геометричних задач підвищеної складності у 8-9 класах: посіб. для вчителя. Київ: Педагогічна думка. Ін-т педагогіки АПН України, 2003. 69 с.
14. Власенко К.В. Актуалізація евристичних ситуацій на уроках геометрії (основна школа). Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. 192 с.

15. Власенко О. І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посібник для студ. фізико-математ. факультетів пед. ін-тів. Київ: Вища шк., 1974. 208 с.

16. Возна М. Гром'як М. Про встановлення взаємоузгодженості програм математики та суміжних дисциплін . М*атематика в школі* . 2003. №6. С. 8-11.

17. Гломозда В. Взаємодія тем інтегративного характеру як спосіб здійснення міжпредметних зв'язків. Педагогіка: респ. наук.-метод. зб. Київ, 1991. №. 30. С. 17−21.

18. Гончарова І.В. Евристичні вміння: роль і значення в процесі навчання математики. Гуманізація навчально-виховного процесу*: Збірник наукових праць. Випуск XXXV*. Слов'янськ: Видавничий центр СДПІ, 2007. С.84-91.

19. Гончарова І.В. Прийоми розвитку особистості учня на евристичних факультативах з математики. *Вісник черкаського університету.* Вип.93. Черкаси, 2006. С.30-35.

20. Жук Ю.О., Шишкіна М.П. Електронний підручник та проблема систематики комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання. *Нові технології навчання*. 2000. № 25. С. 44-49.

21. Евристична діяльність учня – основний спосіб ефективного навчання шкільного курсу алгебри [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://oblosvita.com/navigaciya/skrynka/matematyka/2537evristichna- diyalnist-uchnya-osnovnij-sposib-efektivnogo-navchannyashkilnogo-kursu-algebri.html.

22. Евристичні методи пошуку способу розв'язання задач [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://referatbox.net/page,5,233022-Evristicheskie-metody-poiska-sposoba-resheniya-zadach.html.

23. Єршова А. П. Геометрія: підручник для 8 кл. ЗОНЗ .Харків: АН ГРО ПЛЮС, 2008. 256 с.

24. Єршова А. П. Геометрія. Підручник для 9 класу. Харків: Ранок, 2009. 259 с.

25. Істер О. С. Геометрія. Підручник для 7 класу. Київ: Освіта, 2007. 159 с.

26. Кирилецька Г. М. Теоретико-методичні основи викладання елементарної математики (в профільній та вищій школах). Методичні рекомендації

вивчення курсу для студентів спеціальності Математика 8010103 освітньо-кваліфікаційний рівень магістр. Частина 1. Рівне: РДГУ, 2008. 92 с.

27. Кушнір Ісаак. Задачі з однією підсказкою. - Київ: Факт, 2003. 176 с.

28. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя. Київ: Абрис, 1994. 464 с.

29. Максименко В.П. Дидактика: курс лекцій: навч. посіб.. Хмельницький: ХмЦНП, 2013. 222 с.

30. Максимова Т.С. Психолого-педагогічні передумови формування евристичних умінь майбутніх спеціалістів // Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць. Випуск XII / *За загальною редакцією проф.В.І.Сипченка. Слов'янськ:* Видавничий центр СДПІ, 2004. С.138-145.

31. Маланюк Н. М. Евристичний підхід в навчанні математики [Електронний ресурс] / Н. М. Маланюк // ПП «ОЦ «Лінгвіст» (м. Київ). Режим доступу до ресурсу: http://www.rusnauka.com/10_DN_2013/Pedagogica/5_133388. doc.htm.

32. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5 – 12 класи. Київ: Ірпінь: Перун, 2005. 64 с.

33. Максимюк С.П. Педагогіка : навч. посібн. Київ: Кондор, 2005. 667 с.

34. Малафіїк І.В. Дидактика: навчальний посібник. Київ: Кондор, 2005. 397 с.

35. Математика 5 кл. / Тарасенкова Н.А. та ін. 2-ге вид. допов. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.

36. Мерзляк А. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2007. 199 с.

37. Мерзляк А. Геометрія: Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2009. 208 с.

38. Мерзляк А. Геометрія: Підручник для класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2009. 272 с.

39. Методи і прийоми вирішення задач [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: http://referaty.net.ua/referaty/referat_66214.html.

40. Методи і способи розв'язування задач [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/6_2.htm.

41. Методика використання методів евристичного навчання при вивченні математики [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: http://freeref.ru/wievjob.php?id=23016.

42. Методика викладання математики в середній школі: навч. посібн. для пед. ін-тів за спец. 2104 «Математика» і 2105 «Фізика» / Черкасов Р.С. та ін. Харків: Основа, 1992. 304 с.

43. Моргун В.Ф. Інтеграція та диференціація освіти: особистісний та технологічний аспекти. *Постметодика.* 1996. № 4. С. 9-10

44. Насадюк Т.О. Використання прикладних задач під час вивчення довжини кола та площі круга. *Математика в школах України*. 2020. №31-33 (655-657). С. 19-20.

45. Нова українська школа. URL: https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola

46. Овчар О. Методи розв’язування прикладних задач на уроках математики. *Молодь і ринок*. 2010. № 10(69). С. 145-150.

47. Пазиненко С.В. Збірник прикладних задач ДЛЯ 5-6-Х КЛАСІВ «Математика навколо нас»: Збірник задач для вчителів математики і учнів загальноосвітніх шкіл. URL: https://naurok.com.ua/zbirnik-prikladnih-zadach-93930.html ст12- 14

48. Петрушина Л. Дидактична гра як засіб пізнавальної діяльності. *Така проста гра.* 2005. № 2. С.28-30.

49. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. - 2-ге вид., допов. і переробл. К.: Вища шк., 2006. 582 с.

50. Скафа О.І. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О.І.Скафа. Рідна школа. 2003. №6. С.43-47.

51. Скафа О. Комп’ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник. Донецьк: Вебер, 2009. 320 с.

52. Скафа О. І. Концепція формування прийомів евристичної діяльності учнів в процесі навчання [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: http://dm.inf.ua/_22/69-75%2022_2004.pdf.

53. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

54. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно-орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи. *Математика в школі.* 2003. №9. С.3-4.

55. Теоретичні основи евристичного навчання на уроках математики [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: http://freeref.ru/wievjob.php?id=23016.

56. Технології розв'язування геометричних задач [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: kolegiym.com.ua/metodika/.../__M/16.docx.

57. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. навч. посібн. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.

58. Способи розв’язування текстових задач. URL: https://studopedia.com.ua/1_212132_sposobi-rozvyazuvannya-tekstovih-zadach.html.

59. Тарасенкова Н.А. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2014. 304 с.

60. Фіцула М.М. Педагогіка: навч. посібник для студ. вищих пед. закладів освіти. Київ: вид. центр «Академія», 2000. 554 с.

61. Чашечникова О.С. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики. Монографія. Суми: ПП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б., 2011. 412 с.

ДОДАТКИ

Конспект уроку з алгебри

7 клас

Тема: Розв'язування задач за допомогою допоміжних елементів

Мета:

- **навчальна:** продовжувати формувати уявлення про прикладні задачі; сформувати вміння складати та розв'язувати рівняння до прикладних текстових задач; домогтися засвоєння схеми розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь;
- **розвивальна:** розвивати увагу, логічне мислення, пам'ять; формувати вміння вибирати і використовувати необхідну інформацію для розв'язування задач;
- **виховна:** виховувати інтерес до вивчення математики, творче ставлення до справи, віру у власні сили;

Тип уроку: урок застосування знань, умінь і навичок.

Обладнання: картки, комп'ютер, проектор, презентація Microsoft Office Power Point

План уроку

№	Назва етапу уроку	Час	Метод проведення
1	Вступне слово вчителя. Мотивація навчальної діяльності	3 хв	Звернення до класу
2	Перевірка домашнього завдання	2 хв	Оголошення результатів перевірки
3	Актуалізація опорних знань	10 хв	Тест «Інтелектуальна розминка»
4	Закріплення знань, умінь та навичок	25 хв	1. Історична хвилинка 2. Навчальна гра «Математичний переклад» 3. Навчальна гра «Рівновага» 4. Завдання для самоперевірки 5. Операція «Завгосп» 6. Обговорення результатів

5	Підсумок уроку	3 хв	Рефлексія
6	Домашнє завдання	2 хв	

Хід уроку

I. Організаційний етап

Вітання, незвичність уроку – присутність гостей, перевірка готовності до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання

Оголошення результатів перевірки зошитів

III. Актуалізація опорних знань

Тест «Інтелектуальна розминка»

1. Рівність, що містить змінну називається...
   а) виразом; **б) рівнянням;** в) нерівністю
2. Щоб знайти невідоме зменшуване, треба від'ємник і різницю...
   а) додати; б) відняти; в) поділити
3. Рівняння $3x = 0$ має...
   а) один корінь; б) два корені; в) три корені
4. Число, яке задовольняє рівняння, називається його...
   а) змінною; **б) розв'язком;** в) значенням
5. У рівнянні $4x – 15 = x + 15$ сума $x + 15$ називається його...
   а) лівою частиною; **б) правою частиною;** в) серединою
6. Коренем рівняння $–2x = 40$ є число...
   а) 20; б) 2; **в) – 20**
7. Рівняння $5 – y = 8 – y$ ...
   а) не має коренів; б) має безліч коренів; в) має один коренів
8. Число -1 задовольняє рівняння…
   а) $x + 15 = 2x$; б) $4 – 6x = 8$; **в) $10 + 7x = 3$**
9. Рівняння $0x = 0$...
   а) має один корінь**;** **б) має безліч коренів;** в) не має коренів
10. Знайти всі корені рівняння або довести, що їх немає – це означає...
    а) розв'язати рівняння; б) спростити рівняння;
    в) допустити помилку в рівнянні
11. Яке рівняння відповідає умові задачі: „Я задумала число. До числа, що вдвічі за нього більше я додала 6. Після чого отримала 18. Яке число я задумала?"
    а) $2x + 6 = 18$; б) $x + 2x + 6 = 18$; в) $2x – 6 = 18$
12. Чому дорівнює шукане число у попередній задачі?
    а) 4**;** б) 12; **в) 6**

Оцінювання

IV. Закріплення умінь і навичок

1. Теоретична хвилинка

- Що таке алгебра?

  Наука про рівняння.
- Що вивчатиметься на уроках алгебри?

  Рівняння, задачі на складання рівнянь, вирази і їх перетворення.
- Від яких слів походить цей термін?

  Арабський математик Ал-Хорезмі, його праця «Аль-джабр-аль-мукабалла» – «Вчення про перестановки, відношення і розв’язування».

- Яке ще відоме слово, математичний термін походить від прізвища цього математика?

  Алгоритм

- Нагадайте основні етапи алгоритму розв’язування задач за допомогою рівняння.

№	Фрагмент задачі	Вираження невідомих
1	У Василька і Марічки було грошей порівну	Василько -
		Марічка -
2	Один кілограм цукерок дорожчий за кілограм печива на 6 грн	
3	Пішохід прибув на 2 години пізніше, ніж велосипедист	
4	Один шматок дроту у 3 рази менший за другий	
5	Швидкість вантажівки на 48 км/год більша від швидкості легкової машини	
6	Віталій за день розв’язує 7 задач, а Мишко – 6. Скільки задач розв’яже кожен за x днів?	

Алгоритм розв'язування задачі за допомогою рівняння:
- з'ясувати, які величини невідомі;
- позначити одну з них буквою;
- виразити решту невідомих величин через ту, що позначили буквою;
- скласти рівняння (математичну модель) за умовою задачі;
- розв'язати рівняння;
- перевірити, чи задовольняють корені рівняння умову задачі;
- знайти решту невідомих величин.

2. Навчальна гра «Математичний переклад»

Назвіть невідомі величини

Позначте одну з них буквою;
Виразіть решту невідомих величин через ту, що позначили буквою

3. Навчальна гра «Рівновага»

Згадайте принци дії шалькових терез.

1. Допоможіть «відновити рівновагу» у наступних завданнях.

	Відповідь:
Вираз А на 5 більший від виразу В	А-5=В
Вираз В у 5р більший від виразу А	5А=В
Вираз А на 12 менший від виразу В	А=В+12
Вираз В у 3р менший від виразу А	А=3В
Вираз А у 10р більший від виразу В	А=10В
Вираз В на 7 менший від виразу А	А=В+7

4. Завдання для самоперевірки

Збірник Мерзляка, с.10, №23, 24,25. Скласти рівняння:

№	Задача	Рівняння
23	При якому значенні x вирази $26 - 4x$ і $12x - 7(x + 4)$ набувають рівних значень	$26 - 4x$ $12x - 7(x + 4)$
24	При якому значенні y значення виразу $4(y - 0{,}2) + 1{,}9$ на 7 більше за значення виразу $5y - 6(0{,}3 + y)$?	$4(y - 0{,}2) + 1{,}9$ $5y - 6(0{,}3 + y)$
25	При якому значенні m значення виразу $3m - 8$ у 4 рази менше від значення виразу $5m - 7$?	$3m - 8$ $5m - 7$

5. Операція «Завгосп»

Кожній групі треба розв'язати одну із задач, надавши допомогу нашому завгоспу.

Задачі 1-3 розв'язують учні на робочих місцях (в групах). Задача 4 – колективно на клас.

Задача 1

Для нового кабінету гімназії потрібно придбати комплект меблів: 15 парт та 30 стільців. Завгосп просить нас вказати ціну парти та стільця, якщо директор повідомила її, що загальна сума витрат складає 14 100 грн, а парта дорожча за стілець на 280 грн.

Товар	Ціна	Кількість	Вартість
Парта	x+280	15	15(x+280)
Стілець	x	20	20x

15(x+280)+ 20x=14100

15x+4200+30x=14100

45x=9900

x=220

x+280=220+280=500 грн

Відповідь: парта коштує 500 грн, стілець – 220 грн.

Задача 2

Для ремонту гімназії було куплено фарбу. Завгосп відзначила, що маса однієї банки акрилової емульсії «Сніжка ULTRA BIEL» на 1,6 кг більша за масу однієї банки емалі ПФ-115, хоча 6 банок «Сніжки» має таку ж масу як і 14 банок емалі. Яка маса кожної банки?

Товар	Маса 1 банки	Кількість банок	Маса всього
Сніжка	x+1,6	6	6(x+1,6)
Емаль	x	14	14x

6(x+1,6)=14x

6x+9,6=14x

-8x= - 9,6

x=1,2

x+1,6=1,2+1,6=2,8 (кг)- Сніжка

Відповідь: маса 1 банки «Сніжка» 2,8 кг, емалі – 1,2 кг.

Задача 3

У комірчині стояло 2 мішки зі стартовою та фінішною шпаклівкою по 30 кг в кожному. Для ремонту з першого мішка взяли втричі більше шпаклівки, ніж з другого, після чого в ньому стало в 2 рази менше шпаклівки. Скільки залишилось матеріалу в кожному мішку?

Товар	Було	Змінилось	Стало
Фінішна	30	3x	30 – 3x
Стартова	30	x	30 – x

2(30 - 3x) = 30 - x

60 – 6x = 30 - x

-5x= - 30

x= 6

30 – 3x=30 –3·6 = 12 (кг) – стартової шпаклівки;

30 – x = 30 – 6 = 24 (кг) – фінішної шпаклівки.

Відповідь: залишилось 12кг – стартової шпаклівки та 24кг – фінішної шпаклівки.

Задача 4

Улітку на річці Інгул Роман і Кирил брали участь у районних змаганнях з плавання…

У басейні гімназії Кирил пливе швидше на 0,2м/с ніж Роман. Відомо, що Роман за 25 с проплив на 1 м більше, ніж Кирил за 20 с. Яка швидкість кожного хлопця?

	S, м	V, м/с	T, c
Роман	25х	х	25
Кирил	20(х+0,2)	х+0,2	20

25х – 1 = 20(х + 0,2)

25х – 1 = 20х + 4

5х = 5

х = 1

х+ 0,2 = 1 +0,2 = 1,2 (м/с) – Кирил

Відповідь: швидкість Кирила 1,2 м/с, а Романа – 1 м/с.

6. Обговорення результатів

Слайд з умовою, на дошці на аркуші розв'язання + коментар.

V. Підведення підсумків

Закінчіть речення:

- Сьогодні я на уроці повторив…
- Сьогодні на уроці я навчився…
- Необхідно додатково попрацювати над…
- Найважчим для мене було…

VI. Домашнє завдання

1. Підготуватися до написання контрольної роботи.

2. Виконати завдання:

Середній рівень

Завдання «Перевір себе» с.25, №5,8. №94

Достатній рівень

Завдання «Перевір себе» с.25, №7,8. №101

Високий рівень

Завдання «Перевір себе» с.25, №8,9. №107, 118.