РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та методики її навчання

«До захисту допущено»

Завідувачка кафедри

________ Наталія Генсіцька-Антонюк

«______»__________2025р.

протокол №

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТАТИКИ

Виконала:
здобувач другого (магістерського) рівня вищої освіти
групи М-М-21 спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Карлаш Ольга Андріївна……………..

Науковий керівник:
доктор технічних наук, професор
Петрівський Ярослав Борисович

Рівне – 2025

АНОТАЦІЯ

кваліфікаційної роботи магістерського рівня на тему:

Функціональні рівняння в шкільному курсі математики

здобувача другого (магістерського) рівня вищої освіти

Карлаш Ольги Андріївни

Кваліфікаційна (магістерська) робота присвячена систематизації, розвитку та удосконалення процесу вивчення теми «Функціональні рівняння» у шкільному курсі математики при вивченні алгебри, геометрії, початків математичного аналізу. Вказано на можливість застосування теорії функціональних рівнянь до розв'язування практичних задач і прикладів шкільного курсу математики та формування у учнів математичної культури з основ теорії функцій і функціонального аналізу, що постійно має необхідність удосконалення методики вивчення даної теми.

Наведено методичну розробку уроку «Функціональні рівняння та деякі методи їх розв’язування», описано основні кроки її реалізації, умови ефективного застосування та можливості використання під час вивчення тем інших дисциплін. Особливу увагу приділено розвитку пізнавальної активності учнів, формуванню інтересу до даної теми і практичних умінь розв’язувати задачі. Педагогічний експеримент підтвердив зацікавленості учнів у вивченні математики через поглиблення знань з даної теми.

Результати дослідження можуть бути використані при вивченні дисциплін математичного циклу, підготовки навчально-методичних матеріалів і вдосконалення професійної підготовки майбутніх педагогів за спеціальністю «Середня освіта. Математика», а також як між дисциплінарний зв'язок для інших спеціальностей.

Ключові слова: функціональні рівняння, аксіоматика, теорія функцій, педагогічний експеримент, математична освіта.

ABSTRACT

Master's level qualification work on the topic:

Functional equations in the school mathematics curriculum

applicants for the second (master's) level of higher education

Olga Andriivna Karlash

This master’s thesis is devoted to the systematization, advancement, and improvement of the instructional process related to the topic *“Functional Equations”* within the school mathematics curriculum, including algebra, geometry, and introductory mathematical analysis. The study emphasizes the potential of applying the theory of functional equations to solving practical problems and typical tasks encountered in secondary mathematics education. It also addresses the development of students’ mathematical culture founded on the principles of function theory and functional analysis, which necessitates the continuous refinement of teaching methodologies for this topic.

The thesis presents a methodological lesson plan entitled *“Functional Equations and Selected Methods for Solving Them,”* outlining its core implementation stages, conditions for effective application, and potential for integration into the study of other subject areas. Special attention is devoted to fostering students’ cognitive engagement, cultivating interest in the topic, and developing practical skills in problem-solving. Findings from a pedagogical experiment confirm an increased student motivation to study mathematics through the deepening of their knowledge of functional equations.

The results of the research may be applied in the teaching of mathematical disciplines, the development of educational and methodological materials, and the enhancement of professional training for future teachers specializing in *Secondary Education: Mathematics*. Furthermore, the findings may serve as an interdisciplinary resource for related academic fields.

Keywords: functional equations, axiomatic approach, function theory, pedagogical experiment, mathematics education.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Функціональні рівняння передбачають знаходження виду функцій, для яких рівняння буде виконуватись при будь-яких значеннях змінної (в заданій області). Звісно, диференціальні, різницеві, інтегральні та інші рівняння охоплюють це означення, але у вигляді функціонального рівняння зазвичай розглядаються ті, в яких до функцій застосовані лише алгебраїчні операції.

Вивчення цієї теми бере свій початок з робіт Ейлера. Функціональні рівняння розв'язував і Лобачевський при створенні неевклідової геометрії. В подальшому до них зверталось багато сучасних авторів, але вивчати дану тему було складно, через відсутність систематизованих загальних знань (як і мовою оригіналу, так і перекладених робіт), які давали б досить широке уявлення про функціональні рівняння. Значним поштовхом у розвитку, стало створення та переклад книги Я. Ацела та Ж. Домбра. На даний час, дослідження функціональних рівняння набуває популярності, розвивається та широко застосовується.

Виокремлення теми «Найпростіші функціональні рівняння» при вивченні, геометрії та алгебри, зокрема теми «Алгебра та початки аналізу» за програмою базової середньої школи, як у звичайних класах, так і спеціалізованих класах з поглибленим вивченням математики є важливим елементом акцентування навчання на ключових основах теорії функцій і можна розглядати з точки зору цілісності, або ж як інтегрований підхід, що складається з предметів «Алгебра» та елементів теми «Вступ до аналізу».

Тему «Поняття про функціональні рівняння» доцільно вивчати в сукупності понять «рівняння», «функція», з однієї точки зору, а з іншої, її можна розглядати в подальшому, як пропедевтичну тему при вивченні елементів теорії звичайних диференціальних та різницевих рівнянь вищої школи. Міжпредметні зв'язки реалізуються при вивченні теми «Функціональні рівняння» при застосуванні даної теорії для побудови моделей в екології, математичній економіці, соціології та інших галузях знань [9, 25]. В шкільній освіті функціональні рівняння, як правило, вивчаються на факультативному рівні, зокрема під час підготовки до математичних олімпіаду дослідженнях членів Малої академії наук [5, 14, 16]. Вивчення основ теорії «Функціональні рівняння» вибірковим чином очевидно звужує шкільну математичну освіту, її професійну спрямованість, а відтак набуття математичних компетентностей учнями.

На даний час дисципліна «Функціональні рівняння» є предметом вивчення студентів математичних спеціальностей. Ряд наукових праць та навчальних посібників зорієнтованих на вивчення даної дисципліни містить основні теоретичні аспекти та методи розв'язання функціональних та лінійних різницевих рівнянь. Проте викладення матеріалу є досить складним для розуміння школярами, навіть учнями старших класів [17]. Питання методів розв'язання окремих типів функціональних рівнянь, зокрема, рівнянь Коші, Даламбера, Лобачевського та найпростіших рекурентних рівнянь, досліджує В.Ф. Давидович [8]. Багато наукових досліджень сьогодні присвячені стійкості функціональних рівнянь [21, 26 – 30] та їх застосуванню [23].

На актуальність теми вказує також можливість застосування теорії функціональних рівнянь до розв'язування практичних задач і прикладів шкільного курсу математики та формування у учнів математичної культури з основ теорії функцій і функціонального аналізу, що постійно має необхідність удосконалення методики вивчення даної теми.

Метою роботи є систематизувати відомості про функціональні рівняння та їх застосування при вивченні предметів «Алгебра», «Геометрія» та елементів теми «Вступ до аналізу» шкільного курсу математики.

Об'єктом дослідження є теорія функціональних рівнянь та аксіоматика теорії функцій.

Предметом дослідження є обґрунтування методологічної цінності теорії функціональних рівнянь у шкільному курсі математики.

Завдання роботи:

1) розглянути основні поняття, пов'язанні із функціональними рівняннями, проаналізувати види функціональних рівнянь та методів їх розв'язування;

2) на основі систематизації елементів теорії функціональних рівнянь визначити основні акценти навчання ключових основ теорії функцій з точки зору цілісності та інтегрованості при вивченні предметів «Алгебра», «Геометрія» та елементів теми «Вступ до аналізу»;

3) розробити методичні матеріали з теми «Функціональні рівняння» у шкільному курсі математики.

Зв'язок роботи з науковою темою кафедри. Кваліфікаційна робота виконана на кафедрі математики та методики її навчання Рівненського державного гуманітарного університету згідно з науковою темою кафедри «Теоретико-методичні засади формування професійної компетентності майбутніх учителів математики» (державний реєстраційний номер 0125U003357).

Апробація. Результати наукової роботи були заслухані на засідані кафедри математики та методики її навчання, звітній науково-практичній конференції РДГУ (2025 р.).

Методи дослідження: аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення, індукція, дедукція, пояснення, класифікація.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що дана робота може бути використана в таких напрямках математики, як алгебра, геометрія, математичний аналіз, функціональний аналіз та теорія ймовірності, а також - із теорією інформатики, фізики, економіки, механіки тощо при вивченні математики в середні школі так і при вивченні дисциплін математичного циклу у вищий школі.

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи складає 53 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ВІДОМОСТІ

1.1. Поняття про функціональні рівняння. Історичний огляд

Функціональні рівняння виникли в результаті розвитку поняття функції. Важко інтерпретувати тексти Евкліда та Архімеда як формулювання функціональних рівнянь (принаймні неявно), в яких вони визначають властивості для заданих функцій, ідентифікують усі функції з такими властивостями та розв'язують ці рівняння, оскільки вони не містять визначень функцій.

Значення функціональних рівнянь полягає в їх використанні для визначення функцій. Однак багато робіт не довели, що ці функції є єдиними розв'язками рівнянь. Наприклад, Орезм використовував координати власного різновиду та ввів «однорідні декартові» (афінні) «якості», з яких випливало функціональне рівняння.

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}=\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3} \text{ для всіх } x_1,\ x_2,x_3 \text{ при } x_1>x_2>x_3 \tag{1.1}$$

Відповідний уривок з праці вченого звучить так: «Рівномірно змінна властивість – це така, в якій для будь-яких трьох точок відношення відстані між першою та другою точкою до відстані між другою та третьою точкою дорівнює відношенню надлишку інтенсивності першої точки порівняно з другою точкою до надлишку інтенсивності другої точки порівняно з третьою точкою... . Усі властивості, що відхиляються від описаних вище властивостей, називаються диференційно змінними і можуть бути описані за допомогою оберненого методу, а саме: ця властивість не є однаково інтенсивною в усіх своїх частинах, а відношення надлишків інтенсивності трьох точок (першої порівняно з другою та другої порівняно з третьою точкою) не дорівнює відношенню їхніх відстаней» [3].

Якщо у відношенні (1.1) x_2 взяти по середині між x_1 та x_3, то отримаємо рівняння Єнсена

$$f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}. \tag{1.2}$$

Це пов'язано з відомою «теоремою Мертона». Ця теорема була вже відома Орезму і часто повторювалася в пізніших підручниках, що підкреслює її педагогічну важливість.

Теорема стверджує: відстань, пройдена об'єктом, що рухається по прямій з постійною швидкістю, дорівнює відстані, пройденій об'єктом, швидкість якого є постійною і яка є середнім арифметичним початкової та кінцевої швидкостей першого об'єкта. У сучасних нотаціях: якщо $x(t)$ – відстань, пройдена першим об'єктом, а $v(t)$ – швидкість, то отримуємо наступне функціональне рівняння:

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}(t_2 - t_1).$$

В роботах Орезма (1352) воно використовується в вигляді

$$x(t_2) - x(t_1) = v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)(t_2 - t_1), \quad (1.3)$$

що розуміється як рівність

$$v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}. \quad (1.4)$$

У сучасній термінології теорема Мертона встановлює зв'язок між інтегральним численням та функціональним рівнянням (1.4). Орезм ввів геометричне значення цього результату, використовуючи площу трапеції та прямокутника (рис. 1.1) для доведення рівняння (1.3).

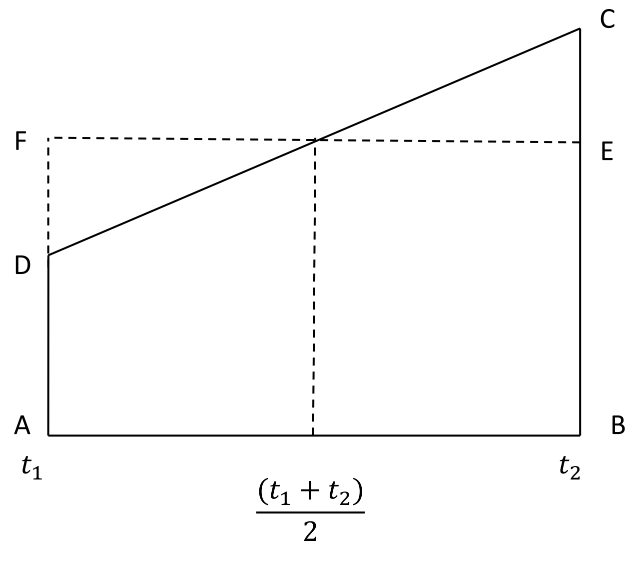

Рис. 1.1.

Рівняння (1.4) приводить до формули $v(t) = at + b$, а рівність (1.3) набуває виду

$$x(t_2) - x(t_1) = \left(a\frac{t_1+t_2}{2} + b\right)(t_2 - t_1). \qquad (1.5)$$

Раніше (в 1347 р.) Орезм увів «заключне» t_0, для якого $v(t_0) = 0$ (таким чином, в формулі (1.5) $b = -at_0$), і вибрав три точки (де тільки дві з них незалежні) так, що $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. Це перетворює (1.5) в рівність двох відношень [7]:

$$\frac{x(t_3)-x(t_2)}{x(t_2)-x(t_1)} = \frac{(t_0-t_2)+(t_0-t_3)}{(t_0-t_1)+(t_0-t_2)}. \qquad (1.6)$$

Поклавши тут $t_3 = 2t_2 - t_1$, отримаємо функціональне рівняння з двома незалежними змінними, справедливе для $x(t) = (t_0 - t)^2$. Якщо не враховувати $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, то замість (1.6) отримаємо із (1.5) рівняння

$$\frac{x(t_3)-x(t_2)}{x(t_2)-x(t_1)} = \frac{t_3^2-2t_0t_3-t_2^2+2t_0t_2}{t_2^2-2t_0t_2-t_1^2+2t_0t_1},$$

яке ще більш зрозуміло показує, що x може бути многочленом другого степеня.

Однак у 1347 році Орезм визнав квадратичну природу процесу та працював із цілочисельною версією рівняння (1.6), де $t_0 - t_1$, $t_0 - t_2$, $t_0 - t_3$ є послідовними кратними інтервалу, такими що відношення приростів дорівнює відношенню послідовних непарних чисел:

$$\frac{x(t_0-(n+1)t)-x(t_0-nt)}{x(t_0-nt)-x(t_0-(n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}. \qquad (1.7)$$

Орезм (1347) писав: «Якщо поділити річ таким чином (на рівні частини) і вважати найвіддаленішу частину першою, то співвідношення властивостей частин буде… таким самим, як і ряд непарних чисел». Щоб проілюструвати це, він намалював рисунок 1.2 нижче. У тій самій роботі Орезм дійшов висновку: «…що у випадку будь-якої речі, яка є коваріантною до нульового ступеня, співвідношення властивості цілого до властивості частини, яка опиняється в нульовому ступені, дорівнює квадрату співвідношення цілого до цієї частини». У сучасній символіці (t_0 таке, що $v(t_0)$=0):

$$\frac{x(t)}{x(t')} = \left(\frac{t_0 - t}{t_0 - t'}\right)^2,$$

або $x(t) = c(t_0 - t)^2$ (тут c виходить рівним половині величини a із (1.5). Орезм також підтвердив, що такі функції задовольняють рівняння (1.7) [22].

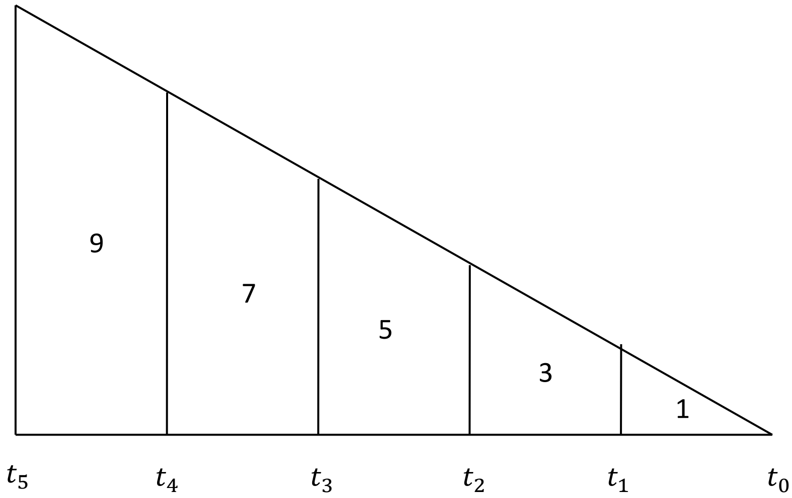

Рис. 1.2.

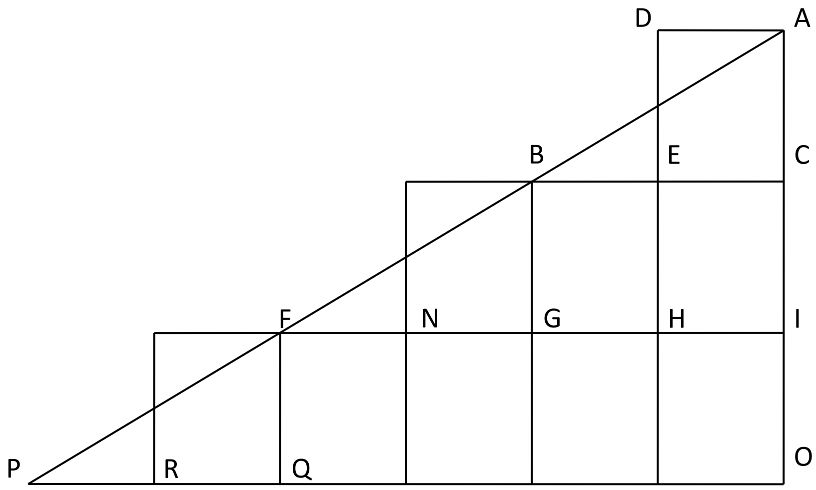

Рис.1.3.

Майже три століття потому Галілей (1638) використав варіант того ж функціонального рівняння (1.7), коли розглядав проблему падіння тіл:

$$\frac{x((n+1)t) - x(nt)}{x(nt) - x((n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}, \tag{1.8}$$

а також його розв'язок. Тому він, можливо, був першим, хто застосував функціональні рівняння у фізиці. Середньовічна класифікація «властивостей», перелічена вище, була введена теоретично, коли Галілей досліджував реальні рухи, такі як падіння тіл. Він використовував рівняння (1.8) і, відповідно, рисунок 1.3 (по суті, дзеркальне відображення рисунка 1.2), оскільки він вважав, що $t_0 = 0$ – це час, коли рух починається з нульовою швидкістю. Його опис рівняння (1.8) тісно пов'язаний з описом Орезма. А ось його висновок: якщо щось рухається зі стану спокою з рівномірним прискоренням, пройдена відстань пропорційна квадрату відношення відповідних інтервалів часу, тобто відношення квадратів у рівнянні (1.8) характеризує закон квадратів (хоча він не довів його в обох напрямках), який він ретельно перевірив у своїх експериментах з падаючими тілами (1.8), щоб підтвердити цей закон.

Галілей також надав подальші докази теореми Мертона як наслідок «методу неподільних» Кавальєрі. Він зробив відому заяву: «Закони природи записані математичною мовою» [4].

Орезм та Евклід знали та використовували властивості степенів.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ і } a^m a^n = a^{m+n}$$

для цілих додатних показників та в деяких інших часткових випадках (Орезм – навіть для деяких раціональних показників, які він ввів). Штіфель (1544) відкрив степінь і поширив ці рівняння на будь-які (не лише додатні) цілі числа.

Ці рівняння використовував Бюргі (1620); пізніше Бріггс (1624) використав відповідні властивості логарифмів:

$$\lg xy = \lg x + \lg y,$$

застосовуються для побудови логарифмів, введених цим автором і Непером. Використовуючи дуже специфічну версію неперервності, Бріггс розв'язав функціональне рівняння

$$g(xy) = g(x) + g(y). \tag{1.9}$$

Оскільки він побудував деякі з його розв'язків, це можна вважати першим прикладом визначення нової функції за допомогою функціонального рівняння (у роботах Орезма функціональні рівняння використовувалися для вже відомих лінійних та квадратичних функцій). Технічні розрахунки з логарифмами пізніше спростували цю точку зору. Однак це стало чітко очевидним, коли де Сен-Венсан (1647) зрозумів, що інтеграл від $\frac{1}{x}$ задовольняє подібне рівняння. Його учень де Сарада (1649) вивів з цього, що цей визначений інтеграл, як функція верхньої межі, дорівнює логарифму з точністю до константи. Де Сен-Венан вибрав точки $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$,… на гіперболі $y = \frac{1}{x}$ (рис. 1.4) таким чином, щоб площі під відповідними відрізками гіперболи були рівними [13].

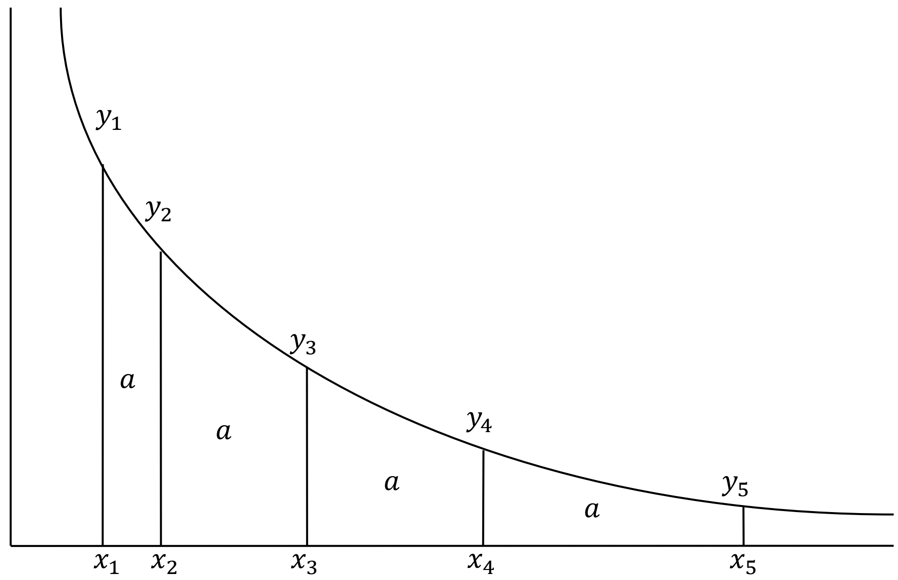

Рис. 1.4.

Архімедівським методом вичерпування він отримав, що

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \cdots \text{, тобто } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \cdots$$

Перше рівняння цього ланцюга дає $x_2^2 = x_1 x_3$ тоді як

$$g(x_2) - g(x_1) = g(x_3) - g(x_2),$$

де $g(x)$ - площа під частиною гіперболи між точками (1,1) та $\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

Звідси

$$2g(x_2) = g(x_1) + g(x_3),$$

тобто

$$2g\left((x_1 x_3)^{\frac{1}{2}}\right) = g(x_1) + g(x_3).$$

Оскільки $g(1) = 0$, то $2g\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = g(x)$ звідки отримуємо

$$g(x_1 x_3) = g(x_1) + g(x_3),$$

тобто рівняння (1.9). Далі де Сарада стверджує, що оскільки логарифм має ту саму властивість, g(x) є логарифмом з точністю до мультиплікативної константи (яка не обов'язково дорівнює 1, оскільки можливі різні основи логарифмів). За словами де Саради (1649), ці поверхні можна використовувати замість логарифмів [12].

Ньютон, Лейбніц та їхні наступники, зокрема Ейлер, чітко сформулювали аналіз нескінченно малих величин, тим самим значно розширивши цю концепцію стосовно функцій. Однак, вона застосовується переважно до диференціальних рівнянь. У роботах Ейлера (1748) та Лейбніца (1768) різні функціональні рівняння – для тригонометричних та гіперболічних функцій – узагальнено, але у вигляді формул, що описують поведінку функції при додаванні, відніманні тощо аргументів. Перехід від однієї такої властивості до іншої без використання визначень можна вважати операцією над функціональними рівняннями [20].

Крім того, Ейлер зводив функціональне диференціальне рівняння

$$g[x + g(x)g'(x)]^2 = g(x)^2[1 + g'(x)^2]$$

(яке він отримав із геометричної задачі, сформульованої для навчальних цілей) за допомогою геометричних методів до «чисто» функціонального рівняння

$$f[x + f(x)] = f(x), \tag{1.10}$$

де $f(x) = g'(x)g(x)$.

Ейлер розв'язав рівняння (1.10) за допомогою геометричних методів з нескінченно малими величинами. Пізніше він застосував ці методи до інших подібних рівнянь. Він не визнавав, що всі неперервні розв'язки є постійними, і тому навряд чи міг помітити, що знайдені ним розв'язки демонструють розриви. З іншого боку, Ейлер також розв'язував функціональні рівняння з кількома змінними. І, до речі, він зазначив (1768) те, що вважав найочевиднішим фактом: «однорідна функція нульового порядку… перетворюється на функцію u в точці $y = ux$», що відповідає випадку $n = 2$, $g(u) \equiv 1$. Для більш загального випадку $g(u) = u^c$ Ейлер (1755) навів приклад зведення функціонального рівняння до рівняння з частинними похідними: він вивів диференціальне рівняння Ейлера.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = cf \tag{1.11}$$

із рівняння

$$f(x_1 u, x_2 u, \dots, x_n u) = u^c f(x_1, \dots, x_n),$$

а також показав (1770), що загальний розв'язок рівняння (1.11) для додатних змінних має вигляд [2]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^c F\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

1.2. Класифікація функціональних рівнянь. Рівняння Коші

Розглянемо *рівняння Коші*:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ при всіх } (x,y) \in R^2, \tag{1.12}$$

а також

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ при всіх } (x,y) \in \overline{\mathrm{R}}_+^2 \tag{1.13}$$

де R - множина всіх дійсних чисел, R_+- множина всіх додатних, а $\bar{R}_+$ - всіх не від'ємних, і в усіх випадках мається на увазі звичайна топологія; для будь-якої множини S вважаємо $S^2 =: \{(x,y) | \, x \in S, y \in S\}$). Порівняння (1.12) з (1.13) виявляємо відмінність. У другому випадку рівняння виконується лише для всіх невід'ємних x та y, тоді як у першому випадку воно виконується для всіх дійсних чисел. Множина всіх значень змінної, для яких рівняння має розв'язок, називається областю визначення цього рівняння (не слід змішувати з областю визначення невідомої функції; для рівняння (1.12) областю визначення є $\mathbb{R}^2$, а для функції f - дійсна вісь). Функція, яка задовольняє рівняння в заданій області визначення, називається розв'язком рівняння в цій області визначення. Іноді (але не завжди) розв'язок рівняння можна розширити на більшу область визначення [10]. Для (1.13) це означає, наприклад, наступне.

Теорема 1.1. Для кожного розв'язку $g: \bar{R}_+ \to R$ рівняння (1.13) існує розв'язок $f: R \to R$ рівняння (1.12) такий, що

$$f(x) = g(x) \text{при всіх } x \in \bar{R}_+. \quad (1.14)$$

Доведення. Побудуємо шукану функцію f тобто продовжимо g на всю R, за допомогою формули

$$f(s-t) = g(s) - g(t) \text{ при всіх } (s,t) \in \bar{\mathrm{R}}_+^2. \quad (1.15)$$

Таке визначення є коректним (тобто дійсно є визначенням): якщо $(s-t) = (u-v)$ для деяких $s,t,u,v \in \bar{R}_+$, тоді $(s+v) = (t+u)$ з огляду на (1.13)

$$g(s) + g(v) = g(s+v) = g(u+t) = g(u) + g(t),$$

звідки

$$g(s) - g(t) = g(u) - g(v),$$

що й потрібно. Виконується і (1.14): якщо $s,t,u \in \bar{R}_+$, $s-t=u$ тоді $s=u+t$ і

$$g(s) = g(u+t) = g(u) + g(t), \quad (1.16)$$

тобто

$$f(u) = f(s-t) = g(s) - g(t) = g(u).$$

Доведемо, що функція f (1.15), задовольняє рівняння (1.12). Справді, нехай $x = s-t$, $y = u-v$ і відповідно $x+y = (s+u) - (t+v)$ де $s,t,u,v \in \bar{R}_+$. З огляду на (1.15)

$f(x) = g(s) - g(t)$ $f(y) = g(u) - g(v)$ з урахуванням рівняння (1.13)

$$f(x+y) = g(s+u) - g(t+v) = g(s) + g(u) - g(t) - g(v) = f(x) + f(y)$$

Теорема доведена [20].

Теорема 1.1 (як і її доведення) зберігається при заміні $\bar{R}_+$ на R_+ і навіть при заміні R на будь-яку абелеву групу G, вироджену під напівгрупою S, із заміною $\bar{R}_+$ (або R_+) на S. Невідома функція f також може набувати значень не з R, а з довільної комутативної групи.

Розв'язок $f: S \to R$ рівняння Коші на групоїді називається адитивним відображенням із S в R, а при $S = R$ - адитивною функцією. Така ж термінологія використовується, коли f приймає значення не з R, а з довільної комутативної групи, чи навіть групоїду ($f: S \to G$).

Лема 1.2. Якщо має місце рівняння (1.12), то справедливо також те, що

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) \tag{1.17}$$

при будь-яких $x_k \in R, r_k \in Q, k = 1,2, \dots, n$ $(n \geq 1)$.

Доведення. Підставимо в (1.12) $y = 0$ і $y = -x$, отримаємо відповідно

$$f(0) = 0 \tag{1.18}$$

і

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.19}$$

Крім того, із рівняння (1.12)

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n) \tag{1.20}$$

для всіх натуральних n і дійсних $x_1, \dots, x_n$.

Покладемо $x_1 = \cdots = x_n = x$. Отримаємо

$$f\ (nx) = nf(x) \tag{1.21}$$

при всіх дійсних x і всіх натуральних n.

Нехай m, n – натуральні числа, $r = \frac{m}{n}$, t будь-яке дійсне. Якщо $x = rt = \left(\frac{m}{n}\right) t$, тоді $nx = mt$ і з огляду на (1.21)

$$nf(x) = f(nx) = f(mt) = mf(t),$$

звідки

$$f(rt) = f(x) = \frac{m}{n} f(t) = rf(t).$$

З огляду на (1.18) і (1.19) це залишається справедливим і для від’ємних раціональних чисел та нуля, тобто

$$f(rt) = \ rf(t) \tag{1.22}$$

для всіх раціональних r і всіх дійсних t. З урахуванням (1.20) звідси слідує (1.17), і лема 2 доведена.

Нехай у (1.22) $t = 1$, $t(1) = c$. Маємо

$$f(r) = rf(1) = cr \text{ при всіх } r \in Q, \tag{1.23}$$

де Q – множина всіх раціональних чисел. Ми досліджуємо, чи можна поширити ці результати на всі дійсні числа, що можливо, якщо функція f є неперервною. Розв'язки рівнянь (1.12) та (1.13) мають вигляд за певних умов

$$f(x) = cx \text{ при всіх } x \in R, \tag{1.24}$$

де c - дійсна стала. Безсумнівно, всі функції виду (1.24) задовольняють рівняння (1.12). Наступна теорема показує, що всі інші розв'язки цього рівняння мають досить «дивний» вигляд [31].

Графіком функції f, заданої на множині S називається множина

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in S\}.$$

В нашому випадку $S = R$ $f(S) = \{f(x) | x \in S\} \subset R$ і графік є підмножиною в R^2:

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in R\}. \tag{1.25}$$

Теорема 1.3. Якщо розв'язок рівняння (1.12) не можна подати у вигляді (1.24), то його графік скрізь щільний в площині R^2.

Доведення. Якщо функцію f не можна подати в виді (1.24), то існують $x_1, x_2 \neq 0$ для яких

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2} \tag{1.26}$$

(в протилежному випадку покладемо $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$, і нехай $x_2 = x$ проходить через ненульові дійсні числа; отримуємо (1.24) для $x \neq 0$ і з огляду на (1.18) також для $x = 0$). Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, вектори $p_1 = (x_1, f(x_1))$ і $p_2 = (x_2, f(x_2))$ є лінійно незалежними і це означає, що вони породжують всю площину R^2, тобто для будь-якого $p \in R^2$ існують такі ρ_1, ρ_2, що

$$p = \rho_1 p_1 + \rho_2 p_2.$$

Далі, множина (пар) раціональних чисел скрізь щільна в множині (пар) дійсних чисел; таким чином можна знайти вектор виду $r_1 p_1 + r_2 p_2$ з раціональними r_1, r_2, довільно близький до заданого $p \in R^2$. Але

$$r_1p_1+r_2p_2 = r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) = (r_1x_1 + r_2x_2, r_1f(x_1) + r_2f(x_2)) =$$
$$= (r_1x_1 + r_2x_2, f(r_1x_1 + r_2x_2)$$

(остання рівність випливає із (1.17)). Тому, якщо $x_1(\neq 0)$ і $x_2(\neq 0)$ задовольняють умови (1.26), то множина

$$G_{1,2} = \{(x, y)|\ y = f(x), \qquad x = r_1x_1 + r_2x_2, (r_1, r_2) \in Q^2\}$$

всюди щільна в R^2.

Рівняння (1.25) показує, що граф G містить граф $G_{1,2}$ і тому є щільним в R^2. Теорему доведено [20].

Застосовуємо Теорему 1.3 для виведення рівняння $f(x) = cx$ з (1.13) та (1.14). Ми повинні переконатися, що наші міркування не містять магічного кола. Додавання векторів у наведеному вище доведенні виконується безпосередньо покоординатно:

$$q_1 + q_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Згідно з Теоремою 1.3, графік розв'язку рівняння (1.12) є всюди щільним у R^2, якщо його не можна виразити у вигляді (1.24). Однак Джонс (1942) наводить приклади, де такий графік є зв'язним.

Теорема 1.3 показує, що розв'язок рівняння (1.12) загалом нестійкий, якщо його не можна виразити у вигляді (1.24). Його часткову нестійкість легко вивести з цієї теореми.

Наслідок 1: Якщо розв'язок рівняння (1.12) не можна виразити у вигляді (1.24), то образ будь-якого інтервалу [a, b] з a < b є щільним у R.

Навпаки, цей факт показує, що певна сталість такого розв'язку вже призводить до формули (1.24).

Наслідок 2. Якщо функція f задовольняє рівняння (1.12) і є неперервною в точці, монотонною або односторонньо обмеженою на додатному інтервалі, то f має вигляд (1.24) для деякої константи c.

Насправді (див. рис. 1.5), графік функції f не містить заштрихованих областей на рисунку за жодної з цих умов і тому не є щільним скрізь у R^2. Згідно з теоремою (1.3), функція тоді повинна мати вигляд (1.24).

І навпаки, функція виду (1.24), як згадувалося вище, задовольняє рівняння (1.12) для кожного с, де умови монотонності або обмеженості функції можуть накладати обмеження на константу. Наприклад, якщо функція f невід'ємна в $\bar{R}_+$ (або на якомусь інтервалі в $\bar{R}_+$), то с ≥ 0.

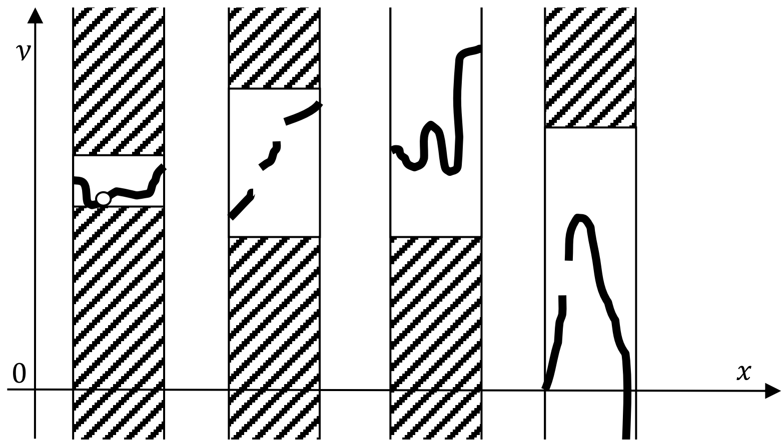

Рис. 1.5.

Узагальнюємо наслідок 2: покажемо, що розв'язок рівняння (1.12) має вигляд (1.24), якщо він односторонньо обмежений на множині додатної міри. Якщо розв'язок не можна виразити в цьому вигляді, то він не обмежений на жодній множині додатної міри [20, 24].

Теорема 1.4. Якщо S ⊂ R має додатну міру Лебега, то множина

$$S + S \coloneqq \{x + y | x \in S, y \in S\}$$

містить інтервал додатної довжини.

Доведення. Достатньо знайти такий інтервал I додатної довжини, що для всіх $z \in I$ переріз множин S і $z - S$ є непорожнім ($z - S$ складається із всіх $z - y$ де y перетинає S). Для цього достатньо показати, що $m((z - S) \cap S) > 0$.

У лемі (1.5) ми покажемо, що можна знайти інтервал додатної довжини, який має достатньо велику точку перетину з S, а саме

$$m(S \cap J) \geq \alpha m(J), \tag{1.27}$$

де $\frac{4}{5} < \alpha < 1$. Тоді для доведення теореми (1.4) можна використовувати множину $S \cap J$ замість S. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$S \subset J$, до того ж довжина інтервалу J скінченна і більша нуля. Для інтервалу $J = [a, b]$, де $a < b$, завжди знайдеться таке додатне δ що із $|a + b - z| < \delta$ випливає

$$m((z - J) \cap J) > \frac{m(J)}{2}.$$

Із (1.27) отримуємо $m\left(\frac{J}{S}\right) \leq (1 - \alpha)m(J)$ тому для таких z маємо

$$m\big((z - S) \cap S\big) > \left[\frac{1}{2} - 2(1 - \alpha)\right]m(J) > \frac{m(J)}{10}.$$

Отже, $(x - S) \cap S \neq \emptyset$ для будь-яких $z \epsilon [a + b - \delta, a + b + \delta]$. Залишається довести існування інтервалу J, для якого виконується (1.27). Це показано нижче в лемі 1.5.

Лема 1.5. Якщо $S \subset$ R має додатну лебегову міру і $0 < \alpha < 1$, то існує інтервал J, для якого виконується відношення (1.27).

Доведення. Без загальних втрат можливо «зменшити» множину S і обмежитись випадком $0 < m(S) < \alpha$. Оскільки всі відкриті множини вимірні за Лебегом, то існує відкрита множина $U \supset$ S, для якої $\alpha m(U) \leq m(S)(\leq m(U))$. Але U являє собою злічення об'єднання непересічних інтервалів J_n додатної довжини. Враховуючи σ- адитивність міри Лебега отримуємо, що

$$\alpha m(U) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(S \cap J_n) = m(S).$$

Тому, хоча б для одного натурального n_0 справедливо, що

$$\alpha m(J_{n_0}) \leq m\big(S \cap J_{n_0}\big)$$

і умова (1.27) має місце при $J = J_{n_0}$. Цим лему 1.5 доведено, а разом із нею і теорему 1.4 [31].

Теорема 1.6. Для того, щоб функція $f : R \to R$ мала вигляд (1.24) для деякого дійсного c, необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла рівняння (1.12) і була обмеженою на множині додатної міри.

Доведення. Нехай функція f(x) обмежена зверху на множині S з додатною мірою Лебега:

$$f(x) \leq M \text{ при всіх } x \in S. \tag{1.28}$$

Враховуючи (1.12), випливає, що

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \leq 2M$$

для всіх x, y ∈ S, тобто f(z) ≤ 2M для z ∈ S + S. За теоремою 1.4, множина S + S містить інтервал додатної довжини. Оскільки функція f обмежена на цьому інтервалі, вона має вигляд (1.24) згідно з наслідком 2.

Наслідок 3. Нехай функція $f : \underline{R}_+ \to R$ задовольняє рівняння (1.13) і одночасно є або неперервною в точці, монотонною, вимірною за Лебегом, або (з кожного боку) обмеженою на множині з додатною мірою. Тоді існує константа c така, що

$$g(x) = cx \text{ при всіх } x \geq 0. \quad (1.29)$$

Зокрема, якщо (1.13) виконується для $g(x) \geq 0$, то (1.29) також виконується для деякого c ≥ 0.

Як показують ці результати, іноді цікаво знайти всі розв'язки заданого рівняння в певному класі допустимих функцій (наприклад, неперервні функції в точці, обмежені функції на інтервалі або вимірні функції). Множина всіх таких розв'язків називається загальним розв'язком у заданому класі. Зокрема, можна розглянути будь-яку функцію, яка відображає задану область визначення в задану множину. Функції часто задаються формулами, які визначають усі їхні значення, коли аргументи перетинають область визначення; аналогічно, загальний розв'язок функціонального рівняння часто можна виразити формулою, яка дає всі конкретні розв'язки (у заданому класі), коли задані константи або інші невідомі елементи (наприклад, функції), що містяться в ньому. Таким чином, загальний невід'ємний розв'язок рівняння (1.13) визначається формулою (1.29) при c≥0, а загальний розв'язок рівняння (1.12), який є неперервним у точці, визначається формулою (1.24) [20].

1.3. Поняття про загальний розв'язок функціонального рівняння

Нехай x_0, y_0 – дійсні числа. За винятком випадку $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, завжди існує функція $f : R \to R$, яка задовольняє рівняння Коші (1.12) таке, що:

$$f(x_0) = y_0 \, . \quad (1.30)$$

Для $x_0 \neq 0$ можна покласти $f(x) = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)x$, а для $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ можна покласти його рівним нулю.

Неперервний розв'язок рівняння (1.12) однозначно визначається для $x_0 \neq 0$ рівнянням (1.30). Однак, це не стосується розривних розв'язків, як ми побачимо. Якщо замінити $\{x_0\}$ довільною множиною дійсних чисел E, виникає питання: на яких множинах можна довільно вибрати розв'язок рівняння (1.12)? Отже, ми шукаємо множини E⊂R такі, що для кожного відображення $g : E \to R$ існує єдине відображення f, яке задовольняє рівняння (1.12) і збігається з g на E. Для цього нам потрібен базис Гамеля. У Гамеля (1905) за допомогою аксіоми вибору було доведено, що існує підмножина H в R така, що кожне дійсне число x (за винятком нульового коефіцієнта) можна однозначно представити у вигляді [24]

$$x = \sum_{k=1}^{n} r_k h_k, \tag{1.31}$$

де $h_k \in H, r_k$ раціональне, $k = 1, \dots, n$, H - це базис Гамеля, а формула (1.31) – розклад Гамеля для x з коефіцієнтами r_k $(k = 1, \dots, n)$. Зауважимо, що кількість доданків у (1.31) скінченна, але залежить від x. Базис Гамеля – це ні що інше, як базис (у лінійній алгебрі) для R як лінійного простору над полем раціональних чисел Q.

Тепер покажемо, що множина E, що нас цікавить, є базисом Гамеля H.

Теорема 1.7. Загальний розв'язок f: R→R визначається безпосередньо розкладом Гамеля (1.31). Визначимо f довільно на множині H та покладемо

$$f(x) = F\left(\sum_{k=1}^{n} r_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(h_k). \tag{1.32}$$

Доведення. Наведене визначення функції f є доречним, оскільки нульові коефіцієнти не змінюють ні (1.31), ні (1.32). Зокрема, (1.32) дає тотожність f(h) = f(h) для x = h ∈ H, тобто вибір значень функції на множині H не обмежений. Виходячи з (1.31) та (1.17), кожен розв'язок рівняння (1.12) можна виразити у вигляді (1.32) [6].

І навпаки, всі функції $f : R \to R$ вказаного виду задовольняють рівняння (1.12). Справді, нехай маємо два дійсні числа з розкладу Гамеля

$$x = \sum_{k=1}^{m} r_k h_k \text{ і } y = \sum_{k=1}^{m} s_k h_k$$

$(h_k \in H;\ r_k, s_k \in Q; k = 1,2, \dots, m)$. Додаючи, за необхідності, члени з нульовими коефіцієнтами, ми завжди можемо припустити, що кількість членів та елементів базису Гамеля однакова в обох розбиттях. Тоді x+y має єдине розбиття в базисі H:

$$x + y = \textstyle\sum_{k=1}^{m} (r_k + s_k) h_k \quad (h_k \in H;\ r_k + s_k \in Q; k = 1,2, \dots, m),$$

з точністю до нульових коефіцієнтів. З огляду (1.32)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} r_k f(h_k), \quad f(y) = \sum_{k=1}^{m} s_k f(h_k), \quad f(x + y) = \sum_{k=1}^{m} (r_k + s_k) f(h_k),$$

тобто рівняння (1.12) дійсно має місце. Теорему доведено.

Наслідок 4. Загальний розв'язок $g : \bar{R}_+ \to R$ рівняння (1.13) отримується шляхом обмеження загального розв'язку рівняння (1.12), побудованого в теоремі (1.7), на $\bar{R}_+$.

Таким чином, теорема 1.3 показує, що графік розв'язку рівняння (1.12) є щільним всюди в $\mathbb{R}^2$, якщо його не можна виразити у вигляді (1.24). Однак це не доводить існування такого розв'язку. Теорема 1.7 та наслідок 4, однак, показують, що існують розв'язки рівнянь (1.12) та (1.13), які не можна виразити у вигляді (1.24) та (1.29) відповідно. Щоб отримати такий розв'язок, достатньо присвоїти значення функції f двом елементам h_1, h_2 базису Гамеля таким, що $\frac{f(h_1)}{h_1} = \frac{f(h_2)}{h_2}$. Згідно з наслідком 2, такі розв'язки ніде не можуть бути неперервними або монотонними. Згідно з наслідком 3, вони не є локально вимірними за Лебегом, не є універсально обмеженими на жодній множині додатної міри, а за теоремою 1.3 їхні графіки всюди щільні в R^2 [20].

Припущення. Будь-яку функцію на множині $E \subset R$ можна продовжити до адитивної функції (тобто функції, яка задовольняє рівняння (1.12)) на R тоді і тільки тоді, коли E є базисом Гамеля.

Доведення. Нехай функція $g : H \to R$ задана на базисі Гамеля H. За теоремою 1.7, її можна продовжити до адитивної функції на R. Нехай h – адитивна функція на R та h = g на H. Для кожного x ∈ R виду (1.32) виконується наступне:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k h(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) = f(x)$$

$(x_k \in H, r_k \in Q)$, тобто функція f єдина.

Нехай E ⊂ ℝ — множина, яка дозволяє однозначне розширення будь-якої функції, визначеної на E, до адитивної функції f на ℝ. Спочатку ми доведемо лінійну незалежність множини E над ℝ. Навпаки, існує нетривіальне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} r_k x_k = 0,$$

де $x_k \in E$ $(x_i \neq x_j \text{при } i \neq j)$, $r_k \in Q; (k = 1,2, \dots, n)$, і принаймні одне r_k не дорівнює нулю. Враховуючи (1.17) та (1.18), кожна адитивна функція f повинна задовольняти умови

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) = 0,$$

тобто значення $f(x_k)$ $(k = 1,2, \dots, n)$ не можуть бути довільними. Іншими словами, не кожна функція на множині E є обмеженою адитивною функцією, що суперечить нашому припущенню.

По-друге, ми показуємо, що E породжує простір R (як лінійний простір над Q). В іншому випадку, Q-незалежна множина E може бути розширена до базису Гамеля H, який містить E. Тоді для кожного відображення $g : E \to R$ існувало б два різних розширення H; ми припускаємо, що це g_1 і g_2. Відповідно до теореми 1.7 існують такі адитивні функції f_1 і f_2, що $f_i(y) = g_i(y)$ $(i = 1,2)$ для всіх y ∈ H. Отже, f_1 і f_2 – це дві різні адитивні функції, які є розширеннями g. Це суперечить припущенню, що g може містити не більше одного такого розширення.

Таким чином, ми довели, що E є незалежною над Q та продовжує R як лінійний простір над Q. Це також означає, що E є базисом Гамеля.

Наслідок. Множина $E \subset R$ містить базис Гамеля тоді і тільки тоді, коли будь-яка функція f, яка задовольняє рівняння (1.12) та дорівнює нулю на E, є тотожно нульовою [20].

З цього наслідку та теореми 1.2 випливає, що будь-який відрізок додатної довжини, і навіть будь-яка підмножина R з додатною мірою Лебега, містить базис Гамеля. Множина міри нуль також може містити базис Гамеля. Ми побудуємо таку множину.

Канторова множина C складається з усіх $t \in [0,1]$, чиї трійкові розбиття не містять одиниць:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i},$$

де всі ε_i дорівнюють 0 або 2.

Спочатку, ми показуємо, що Канторова множина містить базис Гамеля. Нехай $x \in [0,1]$, тоді

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \tag{1.33}$$

де $x_i = 0,1,2$.

Якщо x_i дорівнює 0 або 2, покладаємо $y_i = z_i = x_i$. Якщо $x_i = 1$, то при парності i покладемо $y_i = 0, z_i = 2$. Числа

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} \quad \text{і} \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{3^i}$$

належать до множини Кантора, а також:

$$x = \frac{y+z}{2}. \tag{1.34}$$

Нехай тепер адитивна функція f на C дорівнює нулю. Згідно з (1.33) та лемою 1.2, вона дорівнює нулю на [0,1], а отже, і на всій осі. Згідно з наслідком 5, множина C містить базис Гамеля.

З іншого боку, відомо, що множина Кантора має міру 0. Для повноти картини ми доведемо це, використовуючи інший метод побудови множини Кантора. Нехай E_1 – множина всіх t ∈ [0,1], для яких принаймні в одному потрійному розбитті n-та координата t_n не дорівнює 1. Множини $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ замкнені в [0,1]. Міра Лебега E_n дорівнює 2/3 від міри Лебега E_{n-1}. Множина Кантора – це перетин усіх E_n $(n \geq 1)$. Отже, ця міра менша за $\frac{2}{3}^n$ для кожного n ≥ 1 і, таким чином, дорівнює нулю [18, 20].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Графічний спосіб розв'язування функціональних рівнянь

Деякі функціональні рівняння можна розв'язати графічно. Розглянемо цей принцип на прикладі знаходження розв'язку функціонального рівняння

$$f(x) = f(f(x))$$

в класі неперервних функцій при $x \in R$.

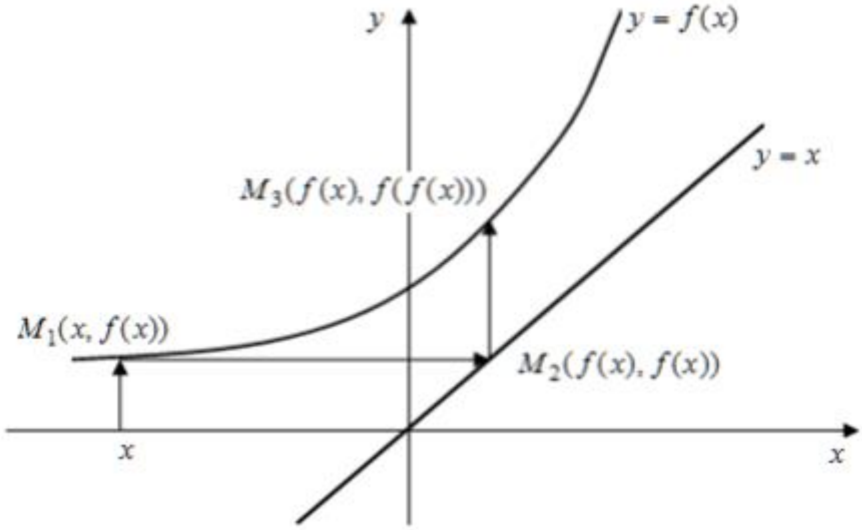

Рис. 2.1. Визначення точки з ординатою *f(f(x))*

Спочатку згадаємо, як графічно визначити точку з ординатою f(f(x)), враховуючи, що положення графіка функції y = f(x) відоме. Це ордината точки M_3 (рис. 2.1).

На рис. 2.1 ординати точок M_2 та M_3 повинні бути рівними згідно з умовою. Оскільки їхні абсциси рівні, $M_2 \equiv M_3$. Це означає, що кожна точка на графіку y = f(x), яка лежить поза прямою y = x, відповідає точці на графіку, яка лежить на прямій y = x та має ту саму ординату [11].

Якщо функція y = f(x) є неперервною вздовж усієї числової прямої та задовольняє умову y = f(f(x)), то частини її графіка повинні бути частинами прямої y = x (або вся пряма, або промінь, або відрізок прямої, або точка), а сам графік має одну з форм, показаних на рисунку 2.2.

Для підтвердження цього висновку розглянемо дві точки на графіку y = f(x), що лежать на прямій y = x: $N_1(x_1, f(x_1))$ та $N_2(x_2, f(x_2))$. Згідно з теоремою Больцано-Коші, завдяки своїй неперервності, значення функції f(x) заповнюють весь відрізок прямої з кінцевими точками $f(x_1)$ та $f(x_2)$ на осі y. Цей відрізок на прямій y = x відповідає відрізку N_1N_2 графіка y = f(x) (рис. 2.3) [31].

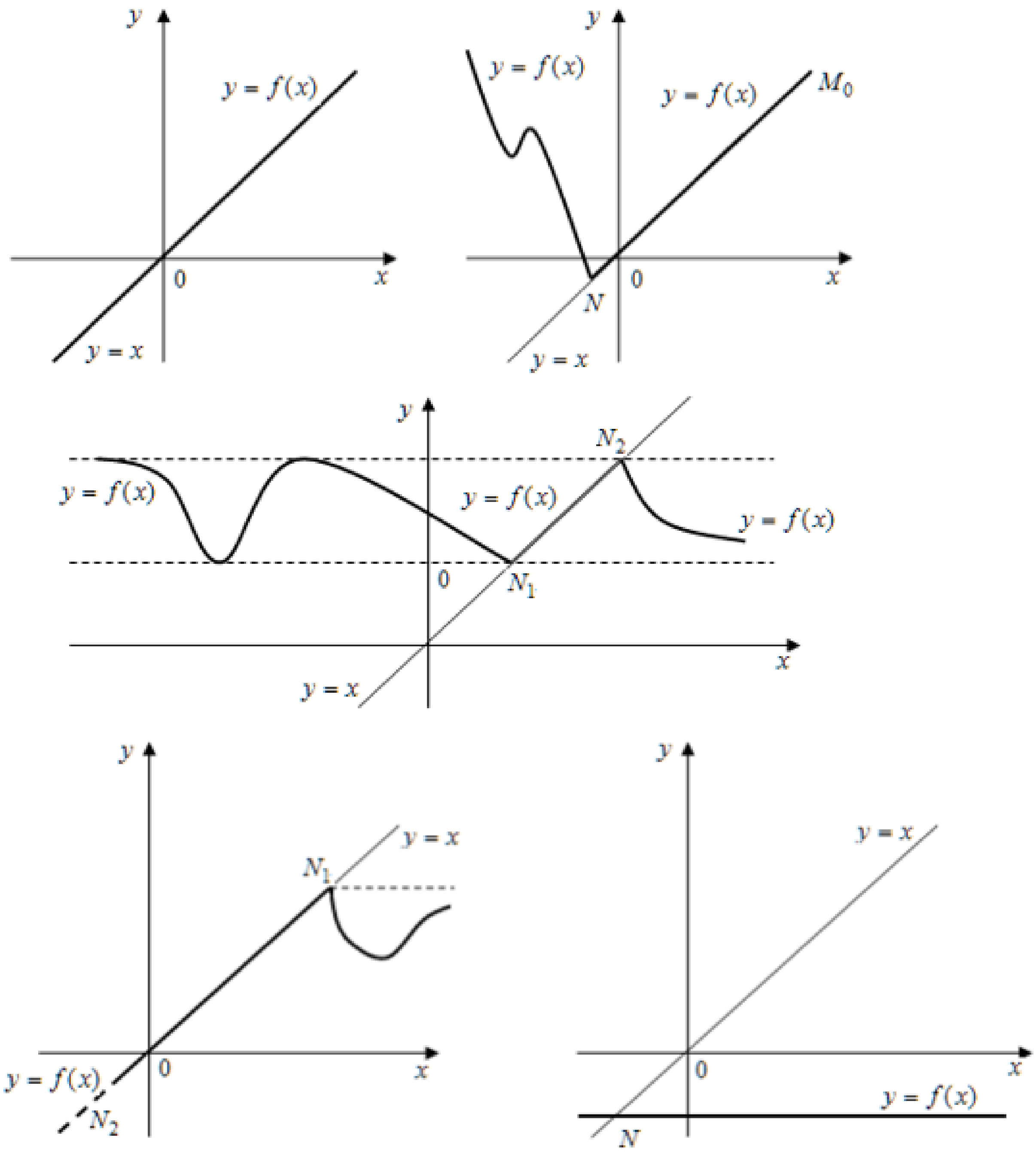

Рис. 2.2. Вигляд графіку функції *y=f(f(x))*

На прямій y = x графік функції y = f(x) належить множині, яка містить або рівно одну точку, або, разом з двома різними точками, також весь відрізок прямої, що з'єднує ці точки. Оскільки функція y = f(x) є неперервною на всій числовій прямій, ця множина також містить її границю.

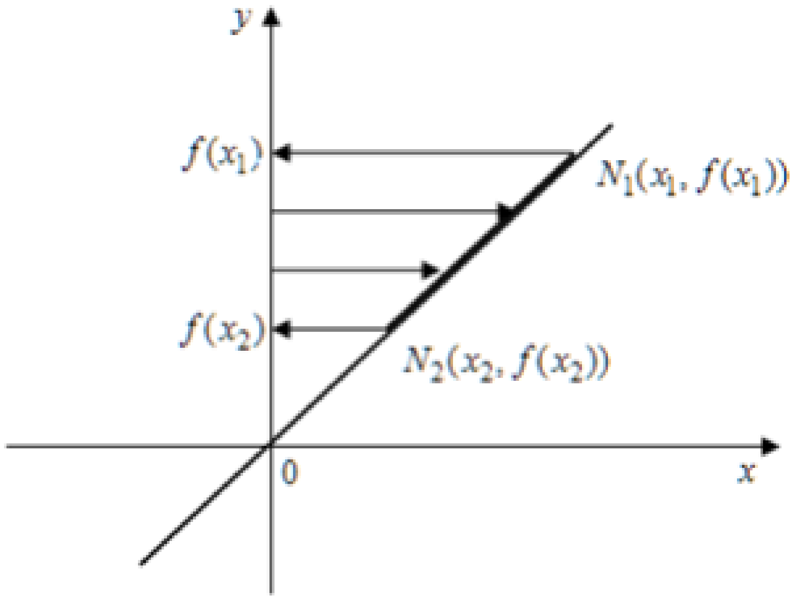

Рис. 2.3. Відрізок, що відповідає графіку функції *y=f(x)*

Частина графіка y = f(x), що лежить на прямій y = x, визначає верхню та нижню межі для частин графіка, які не належать прямій (рис. 2.3). В іншому випадку ці частини є довільними – так само, як частини графіка неперервної функції на всій числовій прямій можуть бути довільними, оскільки легко перевірити, що для будь-якої неперервної функції, графік якої належить до одного з п'яти типів, показаних на рис. 2.3, виконується рівняння [15]

$$f(x) = f\big(f(x)\big).$$

2.2. Метод підстановок: зведення функціонального рівняння до відомого за допомогою заміни змінної і функції

Розглядається специфічний тип функціонального рівняння, яке можна звести до рівнянь з відомим загальним розв'язком. Як правило, такі рівняння можна звести до фундаментальних рівнянь Коші (1.1)–(1.4). Метод базується на введенні допоміжної функції, яку необхідно вибрати так, щоб після перетворень вона очевидно задовольняла одне з відомих функціональних рівнянь [13].

Приклад 1. Визначити всі неперервні функції f(x), визначені на інтервалі (0, +∞), такі, що для будь-яких допустимих значень x_1 та x_2 вираз $f(x_1y) - f(x_2y)$ не залежить від y.

Згідно з постановкою задачі, вираз f(xy) – f(y) (тут x_1 = x, x_2 = 1) не залежить від y. Це означає, що підстановка будь-якого значення, наприклад, y = 1, не змінює значення цього виразу. Тому

$$f(x\text{y}) - f(\text{y}) = f(x) - f(1)$$

для будь-яких значень x і y. Розглянемо тепер функцію *g(x)=f(x)-f(1)*, отримаємо рівняння

$$g(x\text{y}) - g(\text{y}) = g(x),$$

або

$$g(x\text{y}) = g(\text{y}) + g(x),$$

аналогічне (1.3). Отже,

$$g(x) = f(x) - f(1) = log_{\text{a}}\, \text{x},$$

звідки, поклавши *f(1)=b,* знаходимо

$$f(x) = log_{\text{a}}\, \text{x} + b.$$

Підстановка показує, що задана функція задовольняє умову для будь-яких значень констант a та b (очевидно, a > 0, a ≠ 1).

Важливо зазначити, що перевірка є невід'ємною частиною розв'язання будь-якого функціонального рівняння. Процес розв'язання намагається знайти функцію, яка задовольняє функціональне рівняння, припускаючи, що воно існує. Якщо її форму можна визначити, це не означає, що розв'язок існує, а лише те, що якщо він існує, то він обов'язково має задану форму [17]. Перевірка показує, чи це дійсно так.

Приклад 2. Знайти неперервні *f: (0, + ∞)→**R**,* такі що вони задовольняють тотожність

$$f(xy) \equiv xf(y) + yf(x).$$

Поділивши на xy, одержимо:

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y};$$

звідки очевидно, що за допоміжну функцію слід обрати

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Тоді функція g задовольняє (1.3). Тому знаходимо $f(x)=x \log_a x$.

Приклад 3. Знайти неперервні розв'язки функціонального рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2\text{xy}.$$

Тут доцільно вибрати таку функцію як допоміжну:

$$g(x) = f(x) - \text{x2}.$$

Тоді, після підстановки у вихідне рівняння $f(x)= g(x)-x^2$, одержимо

$$g(x+y) + (x+y)2 = g(x) + x2 + g(y) + y2 + 2xy,$$

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

(рівняння Коші (1.1)).

Остаточно знаходимо

$$f(x) = x^2 + g(x) = x^2 + ax,$$

і всі такі функції задовольняють умову [13].

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння Єнсена в класі неперервних функцій

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \boldsymbol{R}$$

Замінивши у рівнянні *x* на *(x+y)*, а *y* – на 0, отримаємо:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+\text{y}) + f(0)}{2} = \frac{f(x+\text{y}) + \text{c}}{2}, \quad \text{c} = f(0).$$

Співставивши одержане та вихідне функціональні рівняння, робимо висновок, що:

$$f(x+\text{y}) + \text{c} = f(x) + f(\text{y}).$$

Це рівняння зводиться до рівняння Коші (1.1) підстановкою

$$\varphi(\text{x}) = f(x) - \text{a},$$

тоді

$$\varphi(\text{x}) = \text{ax}, \quad f(x) = \text{ax} + \text{c},$$

а ця функція справді є розв'язком рівняння Єнсена.

Основний принцип методу підстановки полягає в наступному: шляхом виконання різних підстановок (тобто заміни змінних у функціональному рівнянні конкретними значеннями або іншими виразами) рівняння або спрощується, або скорочується, щоб виявити наступний метод розв'язання. У задачах, що розв'язуються за допомогою цього методу, клас шуканих функцій часто не вказується. У цьому випадку передбачається, що всі розв'язки повинні бути знайдені без обмежень (неперервні, розривні тощо). Особливістю цього методу є те, що в деяких випадках він дозволяє шукати розв'язок у класі всіх можливих функцій [15].

Приклад 5. Знайти розв'язок функціонального рівняння

$$f(xy) = y^k\, f(x) \quad (k \in N).$$

Підставимо $x = 0$:

$$f(0) = y^k f(0).$$

Так як y – довільне, то $f(0) = 0$.

Розглянемо тепер випадок $x \neq 0$. Підставимо в рівняння $y = \frac{1}{x}$:

$$f(1) = \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot f(x)$$

або

$$f(x) = ax^k \; (a = f(1)).$$

Тепер добре видно, що функція $f(x)=ax^k$ буде розв'язком даного рівняння [19].

Приклад 6. Нехай $a \neq \pm 1$ – деяке дійсне число. Знайти функцію $f(x)$, визначену для всіх $x \neq 1$, що є розв'язком рівняння

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af\,(x) + \varphi\,(x),$$

де φ – задана обмежена при $x \neq 1$ функція.

Заміною $x \to \frac{x}{x-1}$ вираз $\frac{x}{x-1}$ зводиться до x. Тому звідси маємо

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x), \\ f(x) = af\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

розв'язком якої при $a^2 \neq 1$ є функція

$$f(x) = \frac{a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}.$$

Приклад 7. Знайти всі функції *φ(x),* які визначені на проміжку *I=(-∞, 0) U(0,1)U(1,+∞),* для яких має місце співвідношення

$$\varphi\ \left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right)+\ \varphi\ \left(\frac{\mathrm{x}-1}{1}\right)\text{- }2\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}.$$

Замінивши почергово $x \rightarrow \frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}$ і $x \rightarrow \frac{1}{1-\mathrm{x}}$, отримаємо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{x}}\right)+\varphi\left(\dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}\right)-2\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}, \\ \varphi\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{x}}\right)-2\varphi\left(\dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}\right)+\varphi(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}, \\ -2\varphi\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{x}}\right)+\varphi\left(\dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}\right)+\varphi(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{1-\mathrm{x}}. \end{cases}$$

Третє рівняння системи отримаємо, якщо додамо два її перші рівняння, а результат помножимо на -1; тобто функція φ(x) не визначається однозначно з цієї системи. З перших двох рівнянь отримуємо

$$\varphi(\mathrm{x}) = \varphi\left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right)-\ \frac{1}{3}\ \cdot\ \frac{2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}},$$

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}\ \right) = \varphi\ \left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right)-\ \frac{1}{3}\ \cdot\ \frac{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}. \qquad (2.1)$$

Можна визначити *φ(x)* довільно на одному з проміжків *(-∞, 0)U(0,1)U(1,+∞)* і формули (2.1) визначать розширення *φ(x)* на *I* [1].

2.3. Граничний перехід та похідна в теорії функціональних рівнянь

Розв'язання деяких функціональних рівнянь часто вимагає використання границь. Ідею цього методу ілюструють два наступні приклади.

Приклад 8. Визначте всі функції f, для яких f: ℝ → ℝ є неперервною в точці 0, а наступне рівняння виконується для всіх x ∈ ℝ:

$$2f(2x) = f(x) + x.$$

Нехай функція f є такою, що задовольняє умову задачі. Тоді

$$f\,(x) = \frac{1}{2}\,f\,\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,f\,\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\,f\,\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} = \cdots =$$

$$= \frac{1}{2^n}\,f\,\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \cdots + \frac{x}{4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\,\lim_{n\to\infty} f\,\left(\frac{x}{2^n}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{4^k} = \frac{x}{3}\,.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

є шуканою функцією [2].

Приклад 9. Знайти розв’язок *f(x)* функціонального рівняння

$$f(x) - \frac{1}{2}\,f\,\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2,$$

яка є обмеженою на довільному скінченному інтервалі.

Неважко переконатись, що

$$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0;$$

$$\frac{1}{2}\,f\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{4}\,f\,\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8};$$

$$\frac{1}{4}\,f\,\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{8}\,f\,\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4} - \left(\frac{x}{4}\right)^2\right) = \frac{x}{4^2} - \frac{x^2}{8^2};$$

…………………………………………………

$$\frac{1}{2^n}\,f\,\left(\frac{x}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\,f\,\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{x}{4^2} - \frac{x^2}{8^2}.$$

$$f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}\,f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = x\,\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) -$$

$$-x^{\,2}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8^n}\right).$$

Знайшовши границю обох частин при умові $x \to \infty$, скориставшись неперервністю *f(x)* та рівністю *f(0)=0*, одержимо

$$f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{7}x^2.$$

Окремі функціональні рівняння можна також розв’язувати із застосуванням похідної. Проілюструємо кількома прикладами як саме використання похідної дозволяє це робити [20].

Приклад 10. Довести, що рівняння

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right) - f(x) = x, \quad x\epsilon[0,\infty) \tag{2.2}$$

не має неперервних розв'язків.

Розв’яжемо дане завдання, міркуючи від супротивного. Припустимо, що неперервний розв'язок рівняння (2.2) все таки існує. Замінивши у (2.2) змінну x на вираз $\frac{x}{1+x}$ (бо якщо $x\geq 0$, то і $\frac{x}{1+x}\geq 0$), отримаємо

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right) - f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x}. \tag{2.3}$$

Виконаємо аналогічну заміну $x \to \frac{x}{1+x}$ у рівнянні (2.3):

$$f\left(\frac{x}{1+3x}\right) - f\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{x}{1+2x}. \tag{2.4}$$

Описану процедуру повторимо ще декілька разів. На n-ній ітерації отримуємо:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f\left(\frac{x}{1+(n-1)x}\right) = \frac{x}{1+(n-1)x}. \tag{2.5}$$

Підсумуємо усі одержані вирази, починаючи з (2.2) і закінчуючи (2.5) (всього їх буде n штук), і зведемо подібні доданки:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \cdots + \frac{x}{1+(n-1)x}. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) має місце при довільному натуральному n. Зафіксуємо x та перейдемо до границі при $n \to \infty$. Оскільки $f(x)$ в точці $x=0$ є неперервною, отримуємо, що

$$f(0) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx}, \tag{2.7}$$

де

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx}.$$

У лівій частині (2.7) для певного (фіксованого) x існує стала, тобто для заданого x ряд у правій частині (2.7) є збіжним (до цієї сталої). Покажемо тепер, що цей ряд збігається для кожного значення x > 0, що призводить до суперечності [23].

Для довільного натурального k і $x>0$ справедливо, що

$$\frac{x}{1+kx} \geq \frac{x}{k+kx} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx} = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \cdots + \frac{x}{1+nx} \geq$$

$$\geq x + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= x + \frac{x}{1+x}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Гармонічний ряд $1+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, як відомо, є розбіжним при збільшені n, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx} = \infty,$$

тобто ряд

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx}$$

теж розбігається.

Приклад 11. Знайти всі дійсні диференційовані розв'язки функціонального рівняння

$$f\,(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}. \tag{2.8}$$

Нехай f задовольняє дане рівняння. Тоді

$$f\,(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)},$$

тобто $f(0)[1+f^2(x)]=0$, і тоді, $f(0)=0$.

Після спрощень одержимо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(h)}, \tag{2.9}$$

звідки випливає (з урахуванням

$$\lim_{h\to 0} f(h) = 0),$$

що

$$f\,'(x) = C(1 + f^2(x)), \tag{2.10}$$

де $C=f\,'(0)$. Значить

$$\int_0^{f(x)} \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^x Cdx + C_1,$$

$$arctg\, f(x) = C_x + C_1,$$

$$f(x) = tg(Cx + C1).$$

Умова $f(0)=0$ означає, що $C_1=0$, тобто $f(x) = tg\ Cx$. Очевидно, що всі функції виду $tg\ Cx$ задовольняють умови даної задачі.

Слід зазначити, що роз’язання використовує лише умову диференційованості функції f(x) у нулі. Ця умова застосовувалася під час знаходження границі при h→0 у рівнянні (2.9). У лівій частині (2.9) отримуємо

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

а в правій – $C(1+ f^2(x))$, оскільки

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = C$$

і

$$\lim_{h\to 0} = f(h) = f(0) = 0$$

(тому, що f диференційована в нулі, а отже і неперервна).

Рівність (2.10) можна також отримати, міркуючи інакше [17]. Знайшовши похідну по y від обох частин рівняння (2.8), отримаємо

$$f\,'(x+y) = \frac{f'(y)[1-f(x)f(y)] + [f(x)+f(y)]f(x)f'(y)}{[1-f(x)f(y)]^2},$$

і, поклавши $y=0$ (вважаючи знову, що в точці 0 похідна існує) і враховуючи $f(0)=0$, прийдемо до (2.10):

$$f\,'(x) = C(1 + f\ 2(x)), C = f\,'(0).$$

Приклад 12. Знайти функцію *f(x),* яка є розв'язком функціонального рівняння

$$f\,'(\mathrm{x}) + xf(-x) = ax, \;\; x \in \boldsymbol{R}, a = const.$$

Легко бачити, що

$$f'(-\mathrm{x}) + xf(x) = -ax.$$

Введемо у розгляду функції

$$F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Легко бачити, що *F(x)* є парною, а *G(x)* – непарною, причому

$$f(x) = F(x) + G(x).$$

Міркуючи так, приходимо до рівнянь відносно *F(x)* і *G(x):*

$$G'(x) - xG(x) = 0, \qquad F'(x) + xF(x) = ax,$$

$$G(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}; \qquad F(x) = a + Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Так як *G(-x)=-G(x),* то *G(x)≡0* і *f(x)=* $a+Ae^{-\frac{x^2}{2}}$. Підставивши безпосередньо у вихідне рівняння, переконуємося в тому, що при довільних *a, A* функція *f(x)* є його розв'язком [16].

РОЗДІЛ 3. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ: МЕТОДОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ, АКСІОМАТИЧНА ЦІННІСТЬ ТА ПЕДАГОГІЧНА ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ

3.1.Функціональні рівняння в шкільному курсі математики

Функціональне рівняння являє собою особливий клас математичних виразів, де невідомою величиною є не число, а сама функція. Ця ключова відмінність відділяє функціональні рівняння від класичних алгебраїчних рівнянь, де потрібно знайти корінь, а також від диференціальних та інтегральних рівнянь, які зазвичай містять похідні або інтеграли невідомої функції. Функціональні рівняння виступають як потужний методологічний інструмент, що забезпечує глибокий зв'язок між алгебраїчними властивостями та аналітичними характеристиками функцій. Хоча їхнє строге вивчення традиційно належить до курсу вищої математики, а саме математичного аналізу та функціонального аналізу, найпростіші форми функціональних рівнянь є фундаментальними для шкільного курсу математики, оскільки вони лежать в основі визначення елементарних функцій та їх властивостей. Таким чином, навіть на базовому рівні функціональні рівняння відіграють роль не просто як певний вид складних задач, а як окрема аксіоматична теорія.

Поняття функції є наріжним каменем усього курсу алгебри і початків аналізу, тому функціональне рівняння є потужним засобом систематизації знань про функцію. Використання функціональних рівнянь дозволяє систематизувати та істотно поглибити знання учнів про функції, концентруючи фокус уваги з конкретної формули на її невіддільні властивості. Замість механічного запам'ятовування графіків та формул, учні змушені аналізувати такі аспекти, як область визначення, парність або непарність, та здійснювати нестандартні підстановки для визначення невідомої функції. Вирішення функціональних рівнянь вимагає від учнів застосування творчих та евристичних прийомів, що значно сприяє розвитку аналітичного та нестандартного мислення. Це виходить за рамки стандартних обчислювальних завдань і є необхідним етапом формування математичної зрілості.

Аксіоматичний підхід передбачає строге введення понять про елементарні функції, де однією з головних проблем, що виникають у стандартному шкільному курсі, є недостатня строгість при введенні деяких елементарних функцій. Наприклад, аналіз навчально-методичної літератури показує, що тригонометричні функції часто задаються геометрично, що не завжди задовольняє вимоги математичної строгості, необхідні для подальшого вивчення аналізу. Функціональні рівняння дають потужну аналітичну альтернативу. Вони розкривають можливість задати функцію через її одну або кілька характерних і незалежних одна від одної властивостей, які приймаються як аксіоми. Такий аксіоматичний підхід є значно більш строгим і європейським стандартом для математичної освіти. Використання функціональних рівнянь дозволяє аналітично ввести показникову, логарифмічну та степеневу функції як розв'язки відповідних рівнянь Коші. Якщо шкільний курс не може забезпечити належну строгість навіть при визначенні тригонометричних функцій, це вказує на методологічну прогалину у викладанні основ аналізу. Введення елементів вивчення теорії функціональних рівнянь може слугувати необхідною методичною корекцією, яка закладає міцні аналітичні основи, потрібні для абстрактніших вимог вищої освіти. Крім того, структура класичних рівнянь Коші, де функція зберігає структуру операції (наприклад, перетворює додавання на множення), є інтуїтивним знайомством з центральним у вищій алгебрі поняттям гомоморфізму. Таким чином, теорія функціональних рівнянь є інтелектуальним місточком, що підвищує загальну математичну культуру учнів.

Чотири найпростіші функціональні рівняння, що тісно пов'язані з основними елементарними функціями, отримали назву рівнянь Коші. Вони є фундаментальними «аксіомами», що визначають чотири класи функцій, які вивчаються у старшій школі: лінійну, показникову, логарифмічну та степеневу. Канонічні форми цих рівнянь та їхні елементарні розв'язки систематизовані у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1: Функціональні рівняння Коші та їх елементарні розв'язки.

Форма рівняння	Властивість (Операція)
f(x+y)=f(x)+f(y)	Адитивність
f(x+y)=f(x)f(y)	Експоненційність
f(xy)= f(x)+f(y)	Логарифмічність
f(xy)= f(x)f(y)	Гомогенність

Ця систематизація, отримана з аналізу основних форм , є критично важливою, оскільки вона візуально і логічно пов'язує абстрактну алгебраїчну властивість - ліва частина рівняння, з класом конкретних функцій -правий стовпчик.

На шкільному рівні, доведення розв'язку, наприклад, для першого рівняння Коші (f(x+y) = f(x) + f(y)), зазвичай обмежується множиною раціональних чисел Q. Це досягається послідовною підстановкою цілих чисел, нуля, та обернених дробів, що показує, що для $x \in Q$, функція має вигляд f(x) = ax, a=const. Однак, для розширення розв'язку на всю множину дійсних чисел R, необхідно ввести додаткові аналітичні умови. Якщо функція f(x) неперервна або монотонна, або обмежена на довільному інтервалі, тоді і тільки тоді розв'язок є лінійним: f(x)=ax. Якщо таке припущення відсутнє, існують інші, неперервні, особливі розв'язки. Це свідчить про те, що строге розв'язання функціональних рівнянь Коші міститься в теоретичних основах та використання понять математичного аналізу.

Оскільки шкільний курс не містить достатнього апарату для строгого доведення неперервності чи монотонності, методичний висновок полягає в тому, що вчителі повинні чітко розмежовувати знаходження розв'язку, а це евристичні, алгебраїчні методи і доведення його єдиності на множині дійсних чисел R (строгість, що вимагає аналізу). Введення елементів теорії функціональних рівнянь на шкільному рівні вимагає використання неявного припущення про неперервність. Педагогічна мета полягає в тому, щоб навчити учнів, що математична строгість часто залежить від чітко заданих умов, от як область визначення, властивостей функції, навіть якщо повне аналітичне доведення цих умов відкладається до вивчення вищої математики.

Основним методом розв'язування функціональних рівнянь на базовому шкільному рівні є метод спеціальних підстановок. Цей метод полягає у виборі конкретних числових значень або функціональних виразів, які спрощують рівняння або дозволяють знайти значення функції у певних точках. Типові підстановки включають:

1.Числові значення: підстановка x=0, y=0 або x=1, y=1 для знаходження f(0) або f(1).

2.Рівність аргументів: підстановка y=x для спрощення виразів з двома змінними.

3.Протилежні аргументи: підстановка y=-x або -x замість x для використання властивостей парності або непарності функції. Задачі, де в умові сказано, що функція f(x) є непарною, вимагають саме такого підходу.

4.Метод послідовного обчислення: використання індукції для знаходження f(n), f(1/n) та розширення розв’язку на множину раціональних чисел Q.

На поглибленому рівні та у контексті підготовки до математичних олімпіад, методи розв'язання функціональних рівнянь стають значно складнішими і часто вимагають знань, які виходять за межі стандартної шкільної програми. Ці методи включають:

1. Використання властивостей функції.

Задачі вимагають використання властивостей монотонності, періодичності або припущень про неперервність, що дозволяє застосувати аналітичні міркування.

2. Графічний аналіз.

Важливим елементом є здатність побудувати графік функції, визначеної рівністю, і проаналізувати її симетрію, перетин з осями та обмеження області визначення. Наприклад, в олімпіадних завданнях може вимагатися побудова графіка, що існує лише у першій чверті (x $\geq$0), а потім його симетричне відображення відносно осі OY для отримання повного розв’язку. Такий підхід вимагає глибокого розуміння трансформації графіків і властивостей парності.

3. Зведення до рівнянь Коші.

Складніші функціональні рівняння часто розв'язуються шляхом заміни змінних, логарифмування або застосування спеціальних перетворень, які зводять їх до однієї з чотирьох канонічних форм функціонального рівняння Коші.

Наведемо приклади найпростіших функціональних рівнянь та їх відповідні розв’язки.

Таблиця 3.3. Приклади найпростіших функціональних рівнянь та їх розв’язків [29].

Функціональне рівняння	Елементарний розв’язок
$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)$	$f(x)=k\cdot x+b$
$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot f(y)$	$f(x)=\cos(k\cdot x)$

$f(x+y)+f(x-y) = 2\cdot(f(x)+f(y))$	$f(x)=k\cdot x^2$
$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(y)$	$f(x)=k\cdot x$
$f(x+y)+f(x-y)=(f(x))^2$	$f(x)=c$
$f(x+y)+f(x-y) = 4\cdot\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$	$f(x)=k\cdot x^2$
$f(x+y)\cdot f(x-y) = \left(f(x)\right)^2-(f(y))^2$	$f(x)=k\cdot x, f(x)=c\cdot\sin(k\cdot x)$
$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$	$f(x)=x^n$
$f(x\cdot y)=x\cdot f(y)+y\cdot f(y)$	$f(x)=x\cdot lnx$
$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$	$f(x)=x^n$
$f(x+y)=f(x)+f(y)$	$f(x)=f(1)\cdot x$
$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$	$f(x)=(f(1))^x$
$f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=1\pm x^n$

Зауважимо також, що якщо області визначення x, y та f(x), f(y)не вказані, то в процесі вивчення цього матеріалу вважається, що $x\in\mathbb{Q}$ та $f(x)\in\mathbb{Q}$, $y\in\mathbb{Q}$ та $f(y)\in\mathbb{Q}$.

Приклад.

Функція $u(x)$ задовольняє співвідношення:

$$kx + u(x) = u(u(x)),\ \forall x\in\mathbb{R},\ k\neq 0.$$

Знайти розв’язок рівняння

$$u(u(x))=0.$$

З умов задачі знайдемо $kx = u(u(x)) - u(x)$, звідки

$$x = \frac{u(u(x)) - u(x)}{k}$$

Якщо виконується умова для будь якого y $\forall y \in \mathbb{R}$ $u(x)= u(y)$, тоді

$$x = \frac{u(u(x)) - u(x)}{k} = \frac{u(u(y)) - u(y)}{k} = y$$

Виконання останньої умови означає Це означає, що із виконання рівності u(x)=u(y)) випливає рівність x = y, що свідчить про ін'єктивність функції u(x) у цьому функціональному рівнянні.

З умови ін'єктивності функції u(x) випливає, що $u(u(x)) = u(u(y))$ і рівняння $u(u(x))$=0 може мати не більше одного кореня. Очевидний корінь рівняння $kx + u(x) = u(u(x))$ дорівнює x = 0. Дійсно:

$k \cdot 0 + u(0) = u(u(0))$, $u(0) = u(u(0))$, $u(0) = 0$. Таким чином $u\big(u(0)\big) = 0$, що випливає з попередніх міркувань і це єдиний корінь рівняння.

Існування задач, що вимагають позашкільних знань, та їх активне використання в олімпіадній математиці демонструє необхідність розмежування навчальних траєкторій. Базовий курс фокусується на ілюстративних підстановках, тоді як поглиблений курс вимагає комплексного застосування аналітичних та графічних методів для знаходження функцій.

З точки зору методичних рекомендацій та практичної імплементації у шкільному курсі функціональні рівняння доцільно інтегрувати у навчальний процес у 10 класі в рамках курсу «Алгебра і початки аналізу». Вони можуть бути введені як у розділі «Функції, їх властивості та графіки», так і безпосередньо при вивченні конкретних трансцендентних функцій. Ефективна презентація елементів теорії функціональних рівнянь значно підсилює навчальний матеріал і дозволяє використовувати їх як теми для проектних робіт, стимулюючи самостійне опанування складніших методів і позашкільних знань.

В таблиці 3.2. наведено рекомендації щодо інтеграції елементів теорії функціональних рівнянь у шкільний курс математики.

Таблиця 3.2. Елементи теорії функціональних рівнянь у шкільному курсі математики.

Розділ шкільного курсу математики	Рекомендований клас вивчення
Властивості функції. Парність, непарність , періодичність, графіки.	9-10 класи
Показникова та логарифмічна функції та їх властивості	10 клас
Степенева функція	10 клас

Ці рекомендації надають чіткі інструкції для вчителя, демонструючи, як функціональні рівняння можуть бути трансформовані з абстрактних завдань на інструменти для поглиблення розуміння базових класів функцій.

У підготовці до олімпіад, функціональні рівняння є незамінним інструментом для тренування нестандартного мислення. Олімпіадні завдання часто вимагають від учнів поєднання декількох методів: алгебраїчних підстановок, логічних висновків про властивості (наприклад, визначення непарної функції, що задовольняє певну рівність) , та аналізу області визначення. Особливу увагу слід приділяти завданням, що вимагають знаходження функції та подальшої побудови її графіка, де аналітичні та візуальні навички об'єднуються. Прикладом є задачі, де розв'язок обмежується лише деякою частиною координатної площини (наприклад, першою чвертю), а потім відображається симетрично відповідно до знайдених властивостей.

Задачі з елементів теорії функціональних рівнянь, особливо на поглибленому рівні, слугують високоякісним діагностичним інструментом для оцінки рівня математичної зрілості. Вони перевіряють не лише навички обчислень, але й здатність учнів до абстрактного мислення, логічного виведення та інтеграції знань з різних розділів математики.

ВИСНОВКИ

Введення елементів теорії функціональних рівнянь та основних методів їх аналізу підтверджує значні педагогічні переваги вивчення шкільного курсу математики, що дозволяє підвищити математичну строгість курсу «Алгебра і початки аналізу» та є особливо важливим при аксіоматичному введенні показникових, логарифмічних та степеневих функцій. Завдяки вивченню елементів теорії функціональних рівнянь учні отримують глибше розуміння фундаментальних властивостей елементарних функцій та їх властивостей і є ефективною підготовкою до вищої математики.

Разом із тим головним методичним викликом залишається проблема недостатньої строгості при розширенні розв'язків рівнянь Коші з множини раціональних чисел Q на дійсні множину дійсних чисел R. Оскільки цей перехід вимагає припущення про неперервність (яке строго не доводиться у школі), необхідно, щоб вчителі чітко обговорювали з учнями ці неявні аналітичні умови. Рекомендується розробка спеціалізованих методичних посібників, які чітко розмежовують евристичні методи (для базового рівня) і аналітичні підходи (для поглибленого та олімпіадного рівнів), забезпечуючи методичну підтримку викладачам при роботі з цими складними темами.

Перспективні напрямки досліджень, на нашу думку, мають включати аналіз ефективності впровадження аксіоматичного підходу через теорію функціональних рівнянь на прикладі тригонометричних функцій, як було запропоновано у зв'язку з проблемою геометричної строгості. Також доцільною є розробка стандартизованого та диференційованого набору завдань з функціональних рівнянь для інтеграції у державні підсумкові атестації, що дозволить використовувати функціональні рівняння як надійний індикатор математичної зрілості учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Брайман, В., Кукуш, О. (2015). Відкриті студентські олімпіади механікоматематичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: 1995-2014. Навчальний посібник. Київ : ВПЦ «Київський університет». 188 с.
2. Бродський, Я., Сліпенко, А. (2000). Граничний перехід і функціональні рівняння. *Математика (газета для освітян)*. №20 (80).
3. Войцехівська, В. (2012). Функціональні рівняння. Київ : ТОВ «Праймдрук». 48 с.
4. Вороний, О. (2007). Застосування методу Коші до розв'язування функціональних рівнянь. *Математика в школі*. №7.
5. Вороний, О. (2010). Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: методичний посібник. Кіровоград : РВВ КДПУ імені В. Винниченка. 68 с.
6. Гопаченко, В. (2002). Функціональні рівняння. *Математика (газета для вчителів)*. №12 (168).
7. Гринчук, Л., Сорока, О. (2012). Функціональні рівняння та методи їх розв'язування. Хмельницький : ОІППО. 40 с.
8. Давидович, В. (2018). Функціональні рівняння: приклади, застосування, методи розв'язування. Матеріали Сьомої міжнародної науково-практичної конференції «Математика у сучасному технічному університеті». Вінниця.
9. Жебка, В., Тихонова, В., Лещинський, О., & Гроза В. (2006). Диференціальні рівняння в економіці. Навчальний посібник. Київ: Дельта.
10. Курченко, О., Рабець, Л. (2008). Задачі студентських олімпіад з математики: навчальний посібник. Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ». 166 с.
11. Лейфура, В., Мітельман, І., & Радченко, В. (2008). Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рр. Львів : Каменяр. 348 с.
12. Мітельман, І. (2014). Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного. Одеса : ТЕС. 67 с.

13. Недокіс, В. (2002). Розв’язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановки. *У світі математики*. Т. 8, в. 4.

14. Піхтар, М. (2015). Деякі особливості проведення гурткових занять з розв’язання олімпіадних задач з математики в педагогічних університетах. Науковий журнал Національного педагогічного університету ім. Драгоманова. Номер 3. Фізика та математика у вищій та старшій школі.

15. Сарана, О. (2005). Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посіб. Київ : АСК. 344 с.

16. Сердюк, З. (2019). Факультативний курс «Функціональні рівняння» для учнів старшої профільної школи. *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького*. *Серія*: *Педагогічні науки, 3. 103-107.*

17. Федак, І. (2018). Функціональні рівняння. Навчальний посібник. Івано-Франківськ: ПНУ.

18. Харкевич, Ю. (2017). Функціональний аналіз (теорія і вправи): навч. посіб. Луцьк : Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки. 247 с.

19. Ясінський, В. (2005). Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан. 207 с.

20. Aczel, J., Dhombres, J. (2008). Functional Equations in Several Variables. Cambridge University Press. 480 p.

21. Brzdek, J., Chudziak, J., & Pales, Z. (2011) A fixed point approach to stability of functional equations. *Nonlinear Analysis: Methods &Applications.* https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.052.

22. Chung, J., Ebanks, B. (1994). On a Functional Equation of Abel, Results in Mathematics. Vol. 26, pp. 241-252.

23. El-Hady, E.-S. (2019). On Some Functional Equations with Applications in Networks. *In book: Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities*. Springer, 295-308. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28950-8_17.

24. Kuczma, M. (1990). Iterative Functional Equations. New York : Cambridge University Press. 654 p.

25. Matvieieva, I., Tykhonova, V., & Groza, V. (2019). Application of Box Models in Radioecology. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 14, 53-57. https://doi.org/10.31392/iscs.2019.14.053.

26. Moslelehian, M.S., & Russias, T.M. (2007). Stability of Functional Equations in Non-Archimedean Spaces. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1, 325-334.

27. Moszner, Z. (2009). On the stability of functional equations. *Aequantiones Mathematica*, 77.

28. Noori, B., Moghimi, V.B., Najati, A., Park, C., & Lee, J.R. (2021). On superstability of exponential functional equations. *Journal of Inequalities and Applications*. https://doi.org/10.1186/s13660-021-02615-w.

29. Russias, T.M., & Brzdek, J. (2012). *Functional Equations in Mathematical Analysis*. New York, NY, USA: Springer.

30. Saadati, R., Zohdi, M.M., & Vaezpour, S.M. (2011). Nonlinear L-Random Stability of an ACQ Functional Equation. *Journal of Inequalities and Applications*. https://doi.org/10.1155/2011/194394.

31. Venkatachala, B. (2002). Functional Equations. Bangalore : Prism Books Pvt Ltd. 219 p.