Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Застосування степеневих рядів до знаходження розв'язку функціональних рівнянь

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М-М-21
Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Ажнюк Іванна Володимирівна
Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.
Рецензент ___________________

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Функціональні рівняння відіграють важливу роль у математиці, фізиці, інженерії, економіці та інших науках. Вони дозволяють описувати складні явища, що розвиваються у часі та просторі та створюють базу для моделювання різних явищ у природі та суспільстві. Однак багато функціональних рівнянь, які виникають у практичних задачах, не мають аналітичних розв'язків і їх розв'язування залишається складним завданням.

Одним із ключових інструментів для розв'язування таких рівнянь є степеневі ряди. Степеневий ряд – це функціональний ряд, членами якого є степені однієї або декількох змінних. Вони дозволяють апроксимувати функції, які не мають простого аналітичного виразу, а також розв'язувати функціональні рівняння чисельними методами.

Степеневі ряди мають широке застосування в наукових та інженерних дослідженнях, а також в практичних задачах. Вони використовуються для аналізу динамічних систем, апроксимації функцій, моделювання фізичних процесів та багатьох інших застосувань. Особливу важливість степеневі ряди відіграють у квантовій фізиці, теорії поля, теорії ймовірностей та інших розділах науки.

Актуальність теми

Застосування степеневих рядів для розв'язування функціональних рівнянь – це математичний "інструмент", який допомагає розглядати складні математичні проблеми у більш простому баченні. Це подібно до того, щоб розібрати складний механізм на менші деталі для кращого розуміння його принципу дії.

Цей підхід дозволяє апроксимувати розв’язки рівнянь, навіть якщо вони здаються надзвичайно складними та використовувати ці наближені розв'язки для передбачення різних явищ у фізиці, інженерії, економіці тощо.

Загалом, застосування степеневих рядів робить наше розуміння та моделювання складних систем більш ефективним та точним, що допомагає розв’язати складні задачі в різних галузях науки та техніки.

Мета дослідження

Метою цього дослідження є глибоке розуміння методів застосування степеневих рядів для аналізу та знаходження розв'язків функціональних рівнянь. Зокрема, розглянути та реалізувати нові методи, які дозволять точніше та швидше розв'язувати рівняння, що зустрічаються при моделюванні реальних процесів і явищ.

Об'єкт дослідження

Полягає в застосуванні степеневих рядів для отримання наближених розв'язків функціональних рівнянь у математичних, фізичних або інженерних задачах. У рамках цієї роботи досліджуються конкретні функціональні рівняння та шукаються їх розв'язки за допомогою степеневих рядів.

Предмет дослідження

Застосування степеневих рядів для отримання наближених розв'язків функціональних рівнянь. Зокрема, використання цього математичного інструмента для апроксимації розв'язків у математичних, фізичних чи інженерних задачах, де функціональні рівняння важко розв'язати аналітично або чисельно.

Методи досліджень

1. Математичний аналіз.

2. Чисельні методи.
3. Моделювання.
4. Аналіз результатів.
5. Практичні дослідження.

Практична значущість

Практична значущість магістерської роботи полягає в тому, що в ній акумульовано теоретичні відомості та приклади практичного застосування степеневих рядів до розв’язування функціональних (зокрема, диференціальних) рівнянь. Матеріал, викладений у роботі, дає розуміння того, як знаходити наближені розв’язки рівнянь, які можуть бути важкими або навіть неможливими для розв’язування іншими способами. Наприклад, це може бути корисно в фізиці, інженерії або економіці. Також, робота розвиватиме навички аналізу та обчислень, що можуть бути корисними в наукових та практичних завданнях.

Апробація

Матеріали магістерської роботи доповідалися на CXXVI Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції. – м. Львів, 12 червня 2023 року

РОЗДІЛ 1. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття

Нехай маємо задані деякі довільні числа a_1, a_2, … , a_n , … . Числовим рядом називається вираз вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{1.1}$$

де числа a_1,a_2, … , a_n , … називаються членами ряду. Загальний член ряду, представлений як функція числа n, позначається як a_n. Якщо підставляти замість n послідовно числа 1, 2, 3 і так далі у формулу загального члена ряду, то можна знайти нескінченну кількість членів цього ряду.

Приклад 1.1.1

Напишіть перші чотири члени ряду за заданим загальним членом

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Розв'язання

Підставляючи послідовно значення 1, 2, 3, 4 у формулу загального члена, ми отримаємо:

$$a_1 = \frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2*3} = \frac{1}{6}, \qquad a_3 = \frac{1}{3*4} = \frac{1}{12}, \qquad a_4 = \frac{1}{4*5} = \frac{1}{20}$$

Приклад 1.1.2.

Запишіть формули загальних членів для наступних рядів:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$

3) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\cdots$

Розв'язання

1) Оскільки в ряду використовуються натуральні числа в знаменниках, загальний член ряду може бути виражений наступним чином:

$$a_n=\frac{1}{n}$$

2) Знаменники членів цього ряду обчислюються за допомогою формули 2^{n-1}, де n = 1, 2, 3, ... З цього випливає, що загальний член ряду можна виразити так:

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

де n – натуральне число (1, 2, 3, ...), і a_n – це загальний член ряду.

3) З чисельників цього ряду можна отримати парні числа, які мають вигляд 2n, де n – це деяке ціле число. Знаменники цього ряду обчислюються за допомогою формули 3n+2, де n - це деяке ціле число. Тому загальний член цього ряду можна виразити так:

$$a_n=\frac{2n}{3n+2}$$

Сума перших p членів ряду (1.1) вважається n-ою частинною сумою ряду і позначається як S_n, де S_n обчислюється як сума членів ряду від першого до n-го включно, тобто:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

Частинна сума S_n є функцією від натурального числа n, і виходячи із визначення частинної суми, ми маємо наступне:

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3$

…………………

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

Якщо нескінченна послідовність частинних сум ряду (1.1)

$$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n,S_{n+1},\ldots$$

то це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

такий ряд вважається збіжним, і число S називається сумою цього збіжного ряду (1.1). Однак, якщо ліміту

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

не існує або він дорівнює нескінченності, то ряд (1.1) вважається розбіжним, і в такому випадку говорити про його суму не має сенсу [4].

Приклад 1.1.3.

Дослідити на збіжність ряд

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \qquad (1.2)$$

Розв'язання

Ряд (1.2) є геометричною прогресією зі знаменником, який дорівнює q. Відомо, що суму перших n членів геометричної прогресії обчислюється за допомогою формули (при q ≠1).

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Якщо знаменник прогресії q за абсолютною величиною менший за одиницю, тобто |q| < 1, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ і

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}\right] = \frac{1}{1 - q}$$

Отже, при |q| < 1 ряд (1.2) є збіжним, і його сума дорівнює $\frac{1}{1-q}$

При q=1, S_n=1+1+…+1+1=n, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$; при $q = -1$ послідовність частинних сум набуває наступний вигляд: 1,0,1,0,1,… Ця послідовність не має границі і не прямує до жодної конкретної величини [21].

Отже, при q = 1 і q > 1 ряд (1.2) не має обмеження. Якщо знаменник у геометричній прогресії перевищує 1 то

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Ряд (1.2) в цьому випадку розбігається. Якщо q < -1, то

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

не існує, тому не існує і

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

це означає, що ряд (1.2) розбіжний.

Приклад 1.1.4.

Дослідити на збіжність ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

Розв'язання

Оскільки для цього ряду $S_{2m-1}=1$, $S_{2m}=0$ при будь-якому натуральному m, то послідовність $\{S_n\}$ не має границі при $n\longrightarrow\infty$. Відповідно і ряд розбіжний. Зауважимо, що цей ряд є рядом із прикладу 1.1.3 при q = -1.

Ряд

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \tag{1.3}$$

називається n-м залишком ряду (1.1) або залишковим членом цього ряду.

Ряд (1.1) збігається або розбігається одночасно зі своїм залишком (1.3), тому часто при дослідженні питання про збіжність ряду, замість нього розглядають n-й залишок. Важливо відзначити, що якщо ряд (1.1) є збіжним і його сума дорівнює S, то $R_n=S-S_n$ так як $S=S_n+R_n$ для будь-якого натурального n.

Приклад 1.1.5.

Знайти суму ряду

$$\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}$$

Розв'язання

Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^{62}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$$

Цей ряд розглянутий в прикладі 3 при q= $\frac{1}{5}$, його сума рівна $\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$ Так, як ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}$ можна подати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ то він є залишком після четвертого члена ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ і рівний

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}-\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{500}$$

У наведених прикладах послідовність $\{S_n\}$ частинних сум ряду обчислювалась досить просто, тому існування та величина границі S_n визначалися безпосередньо.

Отже, відповідно до визначення одночасно доводилася як збіжність ряду, так і обчислювалася сума розглянутого ряду. Однак частіше безпосередній аналіз послідовності $\{S_n\}$ є дуже складним, тому основним завданням в теорії числових рядів є встановлення збіжності або розбіжності даного ряду без обчислення його суми.

1.2. Необхідна умова збіжності ряду

Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

збігається, то його загальний член a_n прямує до нуля при $n \to \infty$, іншими словами:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (1.4)$$

Це загальна властивість збіжних рядів в теорії функціональних рівнянь.

Приклад 1.2.1.

Перевірити чи виконується необхідно умова збіжності ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$$

Розв'язання

Загальний член

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Так як

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то необхідна умова (1.4) збіжності ряду не виконується. Відповідно даний ряд розбіжний.

Приклад 1.2.2.

Перевірити чи виконується необхідно умова збіжності ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Це означає що необхідна умова збіжності ряду виконується.

Зауваження.

Із виконання умови

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

не випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$$

Ряд розглянутий в прикладі 1.2.2 називається гармонічним. Хоча цей ряд розбіжний, для нього виконується необхідна умова збіжності ряду [27].

1.3. Область збіжності функціонального ряду

Нехай маємо нескінченну послідовність функцій

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

які мають спільну область визначення. Функціональний ряд – це вираз, складений із цих функцій у вигляді:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{u_n(x)}. \qquad (1.5)$$

Функціональний ряд (1.5) при одних значеннях аргументу x може бути збіжним числовим рядом, а при інших значеннях аргументу x – розбіжним числовим рядом. Якщо функціональний ряд (1.5) збігається при $x = x_0$, то його називають збіжним у точці x_0. Областю збіжності ряду (1.5) називається сукупність всіх значень аргумента x, при яких цей ряд збігається.

Приклад 1.3.1

Визначити область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{\mathrm{n}}. \qquad (1.6)$$

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду. Зокрема, знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} 5^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{\mathrm{n}}.$$

У разі, коли $5|x| \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} 5^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{\mathrm{n}} \neq 0.$$

Це означає, що необхідна ознака не виконана, тому при $|x| \geq \frac{1}{5}$ ряд розбіжний [8].

Припустимо тепер $|x| < \frac{1}{5}$. Вивчимо ряд (1.6) на абсолютну збіжність. Для цього розглянемо ряд з абсолютних величин ряду (1.6):

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\mathrm{n}}|x|^{\mathrm{n}}.$$

Використовуємо ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{\mathrm{n}}|x|^{\mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty} 5|x| = 5|x|$$

Коли $|x| < \frac{1}{5}$, то $5|x| < 1$, і ряд, утворений із абсолютних значень ряду (1.6), збігається, що означає, що ряд (1.6) при $|x| < \frac{1}{5}$ збігається абсолютно.

Отже, ряд (1.6) :

При $|x| < \frac{1}{5}$ збіжний абсолютно;

При $|x| \geq \frac{1}{5}$ розбіжний.

Отже, отримуємо область збіжності ряду (1.6):

$$|x| < \frac{1}{5}.$$

Приклад 1.3.2.

Визначити область збіжності ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n * (x+1)^n}, \qquad x \neq 1. \tag{1.7}$$

Розв'язання

Даний ряд можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n} * \frac{1}{|x+1|^n}, \qquad x \neq 1.$$

Використаємо ознаку Коші збіжності ряду.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2^n}{n}*\frac{1}{|x+1|^n}}=\frac{2}{|x+1|}.$$

Тому при значенні x < 1, що означає x =-3, ряд (1.7) збігається, а при значенні x > 1, тобто -3 < x < 1, ряд (1.7) розбігається.

Отже, при значенні x < -3, x > 1 ряд (1.7) абсолютно збігається, а при $-3 < x < 1, x \neq -1$ ряд (1.7) розбіжний.

Тепер розглянемо збіжність ряду (1.7) на межі області збіжності, тобто при x = -3 і x = 1. Нехай x = -3, тоді ряд (1.7) можна переписати як

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

За критерієм Лейбніца, цей ряд збігається.

Нехай x = 1, тоді ряд (1.7) можна переписати як

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ми отримали гармонічний ряд, який розбігається.

Отже, ряд (1.7):

при x = -3 збіжний умовно;

при -3 < x < 1 розбіжний;

при x < -3 і x > 1 збігається абсолютно.

В результаті ми отримуємо, що ряд (1.7) збігається при x < -3 і x > 1.

1.4. Степеневі ряди. Радіус збіжності степеневого ряду

Якщо члени $a_n(x)$ функціонального ряду (1.5) є степеневими функціями аргумента x, то ряд називається степеневим. Іншими словами, степеневий ряд – це ряд наступного вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots a_n(x-x_0)^n + \cdots \qquad (1.8)$$

де x_0 - стала, а a_0, a_1, a_2, a_3,... - відомі числові коефіцієнти. Зокрема, якщо $x_3 = 0$, то отримуємо степеневий ряд [13].

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots \qquad (1.9)$$

Зауважимо, що степеневі ряди (1.8) і (1.9) завжди збігаються при $x = x_0$ або $x = 0$ відповідно. Кожен степеневий ряд (1.8) збігається всередині інтервалу, який визначається областю збіжності $\{x: |x - x_0| < R\}$. Область збіжності ряду (1.8) може бути ідентичною інтервалу збіжності або може включати одну або обидві кінцеві точки цього інтервалу.

Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду. Якщо радіус збіжності $R = 0$, то множина збіжності ряду складається з однієї точки $x = x_0$. Якщо радіус збіжності $R = +\infty$, то множина збіжності ряду є всією числовою прямою, тобто ряд збігається для будь-якого $x \in (-\infty, +\infty)$. Якщо радіус збіжності $R > 0$, то множина збіжності цього ряду є інтервалом $(x_0 – R; x_0 + R)$, можливо, з додаванням однієї або обох кінцевих точок.

Радіус збіжності R визначається за допомогою формули Коші-Адамара (якщо границя існує).

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{1.10}$$

де R – радіус збіжності, a_n – коефіцієнти степеневого ряду.

Так, радіус збіжності R може бути обчислений також за допомогою формули (якщо границя існує)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{1.11}$$

де R – радіус збіжності, a_n – коефіцієнти степеневого ряду. Якщо радіус збіжності R дорівнює нулю (тобто R=0), це означає, що степеневий ряд збігається лише в точці $x = x_0$, а його збіжність в інших точках області визначення є сумнівною. Однак, зазвичай для аналізу збіжності в окремих точках від R використовують окремий розгляд, для випадку $x=x_0-R$ і $x=x_0+R$.

Щодо абсолютної збіжності ряду (1.8), важливо зазначити, що абсолютна збіжність в одному з кінців інтервалу збіжності дійсно вказує на абсолютну збіжність на іншому кінці цього інтервалу. Це випливає з властивостей степеневих рядів та рядів Тейлора, і вона називається аналітичністю цих рядів. Тобто, якщо ряд абсолютно збігається в одному кінці інтервалу, то він також абсолютно збігається в іншому конці того ж інтервалу [1].

Приклад 1.4.1.

Визначити область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$$

Розв'язання

Так як $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ то застосуємо формулу (1.10)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{3}.$$

Для того щоб повністю визначити множину збіжності цього ряду, вивчимо його поведінку в точках $x = -\frac{1}{3}$ і $x = \frac{1}{3}$.

1. $x = -\frac{1}{3}$, маємо

$$\frac{3^n}{n^2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

є знакопочережним, і він збіжний за ознакою Лейбніца.

2. При $x = \frac{1}{3}$, маємо

$$\frac{3^n}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

є ряд із додатними членами. Він збігається як узагальнений гармонічний ряд.

Отже, множина збіжності цього ряду – це відрізок $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$.

Приклад 1.4.2.

Визначити область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Розв'язання

Для даного ряду

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Застосуємо формулу(1.10). Радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

Якщо радіус збіжності R рівний +∞ або -∞ (тобто R = +∞ або R = -∞), це означає, що степеневий ряд збігається при будь-якому значенні аргументу x. У нашому випадку, якщо R = +∞ або R = -∞ для ряду, то він збіжний при будь-якому значенні x, і множина збіжності складається з усієї числової прямої [25].

1.5. Дії із степеневими рядами

У межах загального інтервалу збіжності $|x - x_0| < R$+, степеневих рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

справедливі рівності

а) Додавання степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n,$$

b) Добуток степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

де

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

c) Диференціювання степеневого ряду

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right]' = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

d) Інтегрування степеневого ряду

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

Приклад 1.5.1.

Дано

$$\ln(1 - x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \cdots - \frac{x^{3n}}{n} - \cdots \ \text{ при } |x| < 1 \qquad (1.12)$$

і

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \ \text{при } |x| < 1 \qquad (1.13)$$

Знайти розклад степеневої функції у ряд в точці x_0=x функції

$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ на інтервалі (-1;1).

Розв'язання

Подамо функцію f(x) у вигляді:

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2) = \ln\frac{1 - x^3}{1 - x} = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$$

Отже, використовуючи властивості додавання двох степеневих рядів та формули (1.12) і (1.13), отримаємо :

$$\ln(1 + x + x^2) =$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^6 - \frac{x^7}{7} - \cdots, |x| < 1$$

Приклад 1.5.2.

Розкласти функцію

$$f(x) = arctg\, x$$

в степеневий ряд з центром в точці 0 і інтервалом (-1;1) якщо відомо розклад функції

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \cdots, |x| < 1. \qquad (1.14)$$

Розв'язання

Оскільки

$$arctg\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2},$$

таким чином, застосовуючи розклад (1.14) та властивість почленного інтегрування степеневих рядів, отримаємо:

$$arctg\, x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \cdots) dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, |x| < 1.$$

Приклад 1.5.3

Розкласти функцію

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Розклад функції у степеневий ряд з центром в точці 0 на інтервалі (-1,1) може бути здійснений, використовуючи розклад функції

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Розв'язання

Використаємо те, що

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)' =$$

$$=1+2x+3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдений розклад залишається в силі для значень x, які задовольняють умові $-1 < x < 1$ [19].

Приклад 1.5.4

Знайти суму ряду

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}, \text{ при } |x| < 1.$$

Розв'язання

Для розв'язування цієї задачі використаємо наступний розклад

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ при } |x| < 1$$

який можна подати у вигляді

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{pn}, |x| < 1$$

або

$$\frac{1}{1+x^p} = \frac{1}{1-(-x^p)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{pn}, |x| < 1$$

Крім того, використовуючи властивості диференціювання та інтегрування степеневих рядів, можна далі досліджувати та обчислювати цей ряд.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots = x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) =$$

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \text{ при } |x| < 1. \qquad (1.15)$$

Продиференціюємо його

$$(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}. \qquad (1.16)$$

Послідовно враховуючи (1.15) і (1.16) отримаємо результат:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1-x^2-x*(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \qquad \text{при } |x| < 1.$$

1.6. Ряди Тейлора. Розклад функції в степеневий ряд

Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

називається рядом Тейлора для функції $f(x)$.

Зауваження. Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

радіусом збіжності якого є додатне число R, і в області збіжності $(x_0 - R; x_0 + R)$ визначає функцію.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Функції $f(x)$ і $S(x)$ не обов'язково співпадають на інтервалі$(x_0 - R; x_0 + R)$.

Можливість почленного диференціювання і інтегрування степеневого ряду всередині його інтервалу збіжності, а також відносна простота степеневої функції роблять степеневі ряди незамінними як у теоретичних, так і в практичних дослідженнях. Зрозуміло виникає питання про розкладання функції в степеневий ряд і вивчення області його збіжності [24].

Кажуть, що функцію $f(x)$ на інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна розкласти в степеневий ряд, якщо існує степеневий ряд, який збігається до $f(x)$ на цьому інтервалі, іншими словами:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n, x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

У дослідженнях щодо можливості розкладання функції в степеневий ряд основними є наступні твердження.

1. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти на інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ в степеневий ряд, то цей ряд є рядом Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0

2. Щоб функцію $f(x)$ можна було подавати степеневим рядом в околі точки x_0, необхідно, щоб на деякому околі цієї точки функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків.

3. Для того, щоб функцію $f(x)$можна було розкласти в ряд Тейлора на інтервалі$(x_0 - R; x_0 + R)$, необхідно і достатньо, щоб залишковий член у формулі Тейлора для цієї функції

$$R_n(f,x,x_0)=\frac{\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

прямує до нуля при $n\to\infty$ на вказаному інтервалі.

Існує кілька різних методів розкладання функцій в степеневий ряд.

a) Прямий розклад функції в ряд Тейлора.

У цьому випадку, шукаючи похідні функції $f^{(n)}(x_0)$, формально складають ряд.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n.$$

b) Використання основних таблиць розкладів.

Для розкладання конкретної функції $f(x)$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0=0$, користуються розкладами основних функцій. Після кожної формули наведено область збіжності ряду.

Нагадаємо, що факторіал натурального числа n визначається формулою

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

Подвійний факторіал числа n визначається наступним чином

$$n!!=n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots$$

Зокрема,

$$(2n-1)!!=(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1,$$

$$2n!!=2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2$$

c) Використання додавання та віднімання рядів.

У деяких випадках розклад функції в степеневий ряд можна отримати, сумуючи таблиці або раніше знайдені розклади.

d) Почленне інтегрування рядів.

Нехай функція $f(x)$ представлена у вигляді

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt,$$

де

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}a_n(t-x_0)^n$$

у межах інтервалу$|t-x_0|<R$. Тоді правильна рівність

$$f(x)=f(x_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \qquad |x-x_0|<R$$

e) Почленне диференціювання рядів.

Необхідно знайти розклад певної функції в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію *g(x)*, що f(x)=$g'(x)$, то, розклавши функцію *g(x)* в степеневий ряд і почленно диференціюючи його, ми отримуємо розклад функції $f(x)$. При цьому отриманий розклад вірний на тому самому інтервалі, де вірний відповідний розклад для функції *g(x)* [5].

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

2.1. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Застосування степеневих рядів дозволяє розв’язувати багато практичних задач у різних галузях. Вони використовуються для побудови апроксимацій функцій, підходять для обчислення складних інтегралів, розв'язування диференціальних рівнянь, аналізу фізичних явищ і моделювання складних систем.

Застосування степеневих рядів має великий потенціал у розв’язуванні задач, які вимагають чисельних обчислень та дозволяє зробити значний крок у напрямку зростання точності та обчислювальної ефективності. Їх використання може бути особливо корисним у наукових дослідженнях, інженерних розрахунках, комп'ютерних моделях та багатьох інших областях.

Розкладання основних елементарних функцій у степеневий ряд можна використовувати для наближеного обчислення значень цих функцій.

Нехай необхідно знайти f(x_0) для функції $f(x)$, що розкладається в степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R, \quad x_0 \epsilon (-R; R). \qquad (2.1)$$

Тоді

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

Замінивши значення f(x_0) сумою n-членів цього ряду

$$S_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1},$$

отримаємо приблизне значення f(x_0), при цьому похибка:

$$|r_n(x)| = |a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1} + \cdots|. \qquad (2.2)$$

За умови, що ряд (2.1) збігається при x=x_0, при великих значеннях n похибка стає дуже малою, і значення S_n можна обчислити з довільною заздалегідь визначеною точністю. Щоб отримати обчислення f(x_0) з заданою точністю, необхідно вміти оцінювати залишок (2.2). Це дозволить вибрати необхідну кількість членів у ряді S_n [6].

Оцінка залишку ряду особливо проста, якщо ряд задовольняє ознаку Лейбніца. У цьому випадку залишок має той же знак, що і його перший член і за абсолютною величиною менший за нього.

У разі довільного ряду абсолютна величина залишку не перевищує суму абсолютних величин членів, які входять в ряд. Для додатного ряду, який вже отримано, намагаються знайти легко сумовний ряд з додатними членами, члени якого були б принаймні не меншими, ніж абсолютні величини членів залишку, і оцінюють залишок сумою цього ряду [17].

Приклад 2.1.1.

Обчислити значення *cos18°* з точністю до 10^{-4}.

Розв'язання

$$\cos 18° = cos\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} * \frac{\pi^{2n}}{10^{2n}}$$

Оскільки цей ряд задовольняє ознаку Лейбніца, то залишок ряду, позначений як r_n, не перевищує за абсолютною величиною першого з членів ряду r_n. Знайдемо число n з умови:

$$|r_n| < 10^{-4}, \text{тобто } \frac{\pi^{2n}}{(2n)! \cdot 10^{2n}} < 10^{-4}.$$

При *n = 1*

$$\frac{\pi^2}{2!\cdot 10^2} = \frac{\pi^2}{200} > \frac{3^2}{200} > 10^{-4}.$$

При *n =2*

$$\frac{\pi^2}{4!\cdot 10^4} = \frac{1}{10^4}\cdot\frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi^2}{2\cdot 3\cdot 4} > 10^{-4}.$$

При *n =3*

$$\frac{\pi^6}{6!\cdot 10^6} = \frac{1}{10^4}\cdot\frac{\pi^6}{6!\cdot 10^2} = \frac{1}{10^4}\cdot\frac{\pi^6}{2^6\cdot 3^2\cdot 5^3} = \frac{1}{10^4}\cdot\frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi^2}{2^4\cdot 6^2\cdot 5^3} < 10^{-4}.$$

Отже, для досягнення встановленої точності достатньо взяти три члени розкладу.

Маємо:

$$\cos 18° = 1 - \frac{\pi^2}{2!\cdot 10^2} + \frac{4}{4!\cdot 10^4} \approx 0{,}951$$

Приклад 2.1.2.

Обрахувати з точністю до 10^{-4} значення $\sqrt[4]{630}$.

Розв'язання

$$\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625+5} = \sqrt[4]{625(1+0{,}008)} = 5\sqrt[4]{1+0{,}008} = 5(1+0{,}008)^{\frac{1}{4}}.$$

Використаємо розклад функції$(1+x)^m$ в ряд Маклорена. Припускаючи, що x=0.008 і m=0.25, ми отримуємо наступний розклад:

$$(1+0{,}008)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\cdot 0.008 - \frac{3}{16\cdot 2!}(0.008)^2 + \frac{3\cdot 7}{64\cdot 3!}(0.008)^3 - \cdots =$$

=1+0.002-0.000006+0.000000028-…

Цей ряд відповідає ознаці Лейбніца, отже, його залишок не перевищує за абсолютною величиною першого з членів, які входять в залишок.

У даному випадку:

$$n=3|r_3| \leq 5\cdot 6\cdot 10^{-6} = 3\cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Отже, достатньо взяти два члени ряду:

$$\sqrt[4]{630} = 5\sqrt[4]{1+0.008} = 5(1+0.002) = 5{,}01.$$

Приклад 2.1.3.

Обчисліть з точністю до 10^{-3} інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}} dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію вигляду $(1+x)^m$ в степеневий ряд (в даному випадку m=-$\frac{1}{3}$ і замінимо x на x^2.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \cdots$$

Оскільки інтервал інтегрування [0;$\frac{1}{2}$] належить області збіжності отриманого ряду (-1;1), то можна інтегрувати ряд почленно в зазначених межах.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \cdots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} - \frac{14x^7}{567} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} - \frac{7}{36288} + \cdots$$

У знайденому знакозмінному ряді четвертий член за абсолютною величиною менше 0,001. Отже, необхідна точність буде забезпечена, якщо враховувати лише перші три члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} = \frac{39}{80} = 0{,}4875.$$

Оскільки перший з відкинутих членів має від'ємний знак, то отримане наближене значення буде завищеним. Тому відповідь з точністю до 0,001 дорівнює 0,487.

Приклад 2.1.4.

Обчисліть значення ln 2 з точністю до 10^{-4}.

Розв'язання

Користуючись розкладами

$$\ln(1+\mathrm{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \qquad -1 \le x < 1$$

Отримаємо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+\mathrm{x}) - \ln(1-\mathrm{x}) =$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots + \frac{2}{2m+1}x^{2m+1} + \cdots, \qquad |x| < 1$$

Вважаючи x=$\frac{1}{3}$, маємо

$$\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \ln 2 = 2\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4^4\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}+\cdots)$$

Задану точність забезпечують чотири члени цього ряду, оскільки

$$r_5 = 2\cdot\left(\frac{1}{3^9\cdot 9}+\frac{1}{3^{11}\cdot 11}+\cdots\right) = \frac{1}{3^9\cdot 9}(1+\frac{1}{3^2\cdot 11}+\frac{1}{3^4\cdot 13}+\cdots) <$$

$$< \frac{2}{3^9\cdot 9}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right) = \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} < 10^{-4}.$$

Тому

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}) \approx 0.6931.$$

Важливо відзначити, що спроба обчислити ln 2, підставивши x=1 у ряд Тейлора для функції ln(1+x), вимагатиме громіздких обчислень, оскільки для досягнення необхідної точності доведеться брати 1000 членів ряду.

На підставі застосування степеневих рядів можна зробити наступні висновки.

1) Степеневі ряди дозволяють наближено розв'язувати різноманітні математичні та фізичні задачі, зокрема, диференціальні рівняння, аналізувати функції та моделювати складні процеси.

2) Важливою перевагою степеневих рядів є їх універсальність. Це означає, що їх можна застосовувати для різних типів функцій та рівнянь, що робить їх важливим інструментом в чисельних обчисленнях та дослідженнях.

3) За допомогою степеневих рядів можна отримувати наближені результати з будь-якою бажаною точністю, збільшуючи кількість урахованих членів ряду.

4) Іншим важливим аспектом є здатність використовувати степеневі ряди для розв'язування задач в областях, де немає аналітичних розв'язків або вони дуже складні для отримання.

5) У практичних застосуваннях степеневі ряди грають важливу роль у вирішенні складних завдань, їх використання допомагає отримувати результати з більшою точністю та ефективністю.

2.2. Застосування степеневих рядів до розв’язування диференціальних рівнянь

Степеневі ряди, одна з фундаментальних галузей математичного аналізу, виявилися надзвичайно корисними в прикладних задачах та наукових дослідженнях. Зокрема, вони дозволяють розкладати складні функції на суму простих компонентів та наближено обчислювати значення цих функцій, що важливо у багатьох областях, включаючи фізику, інженерію, економіку та багато інших [4].

Розглянемо важливість та потенціал степеневих рядів для наближених обчислень, методи створення степеневих розкладів, розширимо розуміння областей їх застосування та представимо конкретні приклади використання цих розкладів для наближених результатів у різних наукових та практичних задачах.

Розглянемо розв’язування звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y)$$

з відомими початковими умовами y=y_0 при $x = x_0$, тобто

$$y(x_0) = y_0.$$

Припустимо, що y(x) є розв'язком даного рівняння при вказаній умові. Шукатимемо розв'язок рівняння y(x) у вигляді ряду Тейлора в околі точки $x = x_0$.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \qquad (2.3)$$

Коефіцієнт вільного члена у розкладі (2.3), тобто $y(x_0)$, відомий за початковою умовою. Значення $y'(x_0)$, можна отримати, підставивши початкову умову в диференціальне рівняння. Значення $y''(x_0)$, можна отримати, диференціюючи обидві сторони диференціального рівняння, а потім підставивши вже відомі значення $y(x_0)$ і $y'(x_0)$, при $x = x_0$. Виконуючи аналогічні дії, тобто послідовно диференціюючи обидві сторони заданого диференціального рівняння по змінній *x*, можна послідовно знаходити значення $y'''(x_0), y^{IV}(x_0)$ і так далі [11].

Приклад 2.2.1.

Знайти частковий розв'язок *y(x)* диференціального рівняння

$$y' = 2xy - xcosx$$

із заданою початковою умовою

y(0)=1.

Розв’язання

Так як за умовою $x_0 = 0$, то шукане частковий розв'язок *y(x)* можна записати так:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (2.4)$$

Вільний член *y(0)=1* згідно умови. Значення *y'(0)* знаходимо, підставивши початкові умови у задане рівняння

$$y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot cos0 = 0$$

Послідовно виконуючи диференціювання заданого диференціального рівняння, знаходимо $y''(x), y'''(x), y^{IV}(x)$ і так далі, а потім обчислюємо значення похідних при *x = 0:*

$$y''(x) = 2y + 2xy' - cosx + xsinx, \qquad y''(0) = 1$$

$$y'''(x) = 2y' + 2y' + 2xy'' + sinx + sinx + xcosx =$$

$$= 4y' + 2xy'' + 2sinx + xcosx, \qquad y'''(0) = 0,$$

$$y^{IV}(x) = 4y'' + 2y'' + 2xy''' + 2cosx + cosx - xsinx, \quad y^{IV}(0) = 9$$

Підставивши знайдені значення похідних при $x = 0$ в ряд (2.4), отримаємо перші члени розкладу у степеневий ряд шуканого часткового розв'язку

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

Приклад 2.2.2.

Знайти перші три члени розкладу в степеневий ряд часткового розв'язку *y(x)* диференціального рівняння

$$y'' = xy' - y + e^x,$$

відповідно до початкових умов

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Розв'язання

Припустимо, що шукане частковий розв'язок має вигляд (2.4). З початкових умов вже відомі значення *y(0)* і *y'(0).* Підставивши ці значення в задане рівняння, обчислимо $y''(0)$.

$$y''(0) = 0 \cdot 0 - 1 + e^0 = 0$$

Послідовно диференціюючи дане рівняння, матимемо:

$$y'''(x) = y' + xy'' - y' + e^x = xy'' + e^x,$$

$$y^{IV}(x) = y'' + xy''' + e^x$$

Тепер обчислимо значення похідних при *x = 0.*

$$y'''^{(0)} = 1, y^{IV}(0) = 1$$

Відповідно

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

Маємо шукане частковий розв'язок.

Застосування степеневих рядів до розв'язування диференціальних рівнянь виявляється корисним та потужним методом. Степеневі ряди дозволяють апроксимувати складні функції за допомогою простих степеневих функцій, що часто спрощує розв'язання диференціальних рівнянь та вивчення їх властивостей. Вони є ефективними інструментами для аналізу та апроксимації функцій, які не мають аналітичних розв'язків [27].

Застосування степеневих рядів дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані з теорією керованих систем, механікою, електродинамікою та багатьма іншими галузями науки та інженерії. До переваг цього методу належать можливість точної або чисельної апроксимації розв'язків різних диференціальних рівнянь, вивчення їх поведінки, а також зручність розв'язання завдань, де важко отримати аналітичні розв'язки.

2.3. Застосування степеневих рядів для апроксимації функцій із використанням рядів Тейлора

Застосування степеневих рядів для апроксимації функцій, зокрема за допомогою рядів Тейлора, є важливою галуззю математичного аналізу та обчислювальної математики. Цей метод полягає в розкладанні складної функції у вигляді нескінченного суми степеневих членів, що дозволяє наближено аналізувати та розв'язувати різноманітні математичні задачі.

Степеневі ряди є потужним математичним інструментом, який дозволяє апроксимувати складні функції за допомогою простих степеневих функцій.

Одним з найпоширеніших методів їх використання є розкладання функцій у ряди Тейлора, які відомі також як маклоренівські ряди. Цей підхід має безліч застосувань в різних галузях математики, фізики, інженерії та інших наукових дисциплін.

Приклад 2.3.1.

Розкласти функцію $f(x) = e^x$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0 = 0$.

Розв’язання

Для обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора послідовно диференціюють функцію $f(x)$

$$f'(x) = e^x,\ \ f''^{(x)} = e^x, \ldots,\ \ f^{(n)}(x) = e^x$$

Обчислимо значення функції та її похідних при $x = 0$.

$$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = e^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \dots$$

Запишемо для функції $f(x)$ряд Тейлора

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \qquad (2.5)$$

Оскільки радіус збіжності для цього степеневого ряду дорівнює R, ми маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty$$

Ряд збігається для будь-якого x.

Тепер ми спробуємо визначити, при яких значеннях x знайдений розклад збігається до функції e^x.

$$f^{(n+1)}(x) = e^x,$$

тоді залишковий член у формі Лагранжа можна записати у вигляді:

$$R_n(e^x, x, 0) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

для деякого $\theta, 0 < \theta < 1$.

Для довільного фіксованого значення $x \epsilon (-\infty; +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(e^x, x, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$$

Отже, ряд (2.5) збігається до функції e^x при будь-якому значенні $x \epsilon (-\infty; +\infty)$

Таким чином

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

де $-\infty < x < +\infty$.

Важливо відзначити, що метод розкладання функції $f(x)$ у степеневий ряд, використовуючи безпосереднє обчислення похідних $f^{(n)}(x_0)$ при n=1,2,3,…, зазвичай дозволяє знайти лише скінченну кількість членів цього ряду. Це через те, що знаходження загальної формули для $f^{(n)}(x_0)$ може бути складним завданням. Більш того, визначити збіжність цього ряду до функції $f(x)$ може бути непростою задачею.

Тому в багатьох випадках обмежуються обчисленням перших декількох членів ряду Тейлора, оскільки вони досить точно наближають функцію в околі точки розкладу.

Приклад 2.3.2.

Розкласти функцію $f(x) = e^{1-2x^3} f(x) = e^x$, $f(x) = e^x$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання

Оскільки $e^{1-2x^3} = e \cdot e^{-2x^3}$, то, припустивши $-2x^3 = y$ і використовуючи відомий розклад для функції e^x, отримуємо такий ряд:

$$e^{1-2x^3} = e \cdot e^{-2x^3} = e \cdot e^y = \mathrm{e} \cdot \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= e \cdot \left(1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-2x^3)^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= e \cdot 2ex^3 + \frac{2^2 e}{2!} x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{2^n e}{n!} x^{3n} + \cdots$$

Оскільки розклад функції e^x можливе для будь-якого x, то розкладцієї функції в ряд Тейлора залишається справедливим для всіх значень $|x| < \infty$.

Приклад 2.3.3.

Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0 = 0$

Розв'язання

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Застосовуючи відомі розклади для функцій, $\frac{1}{1+y}$ і $\frac{1}{1-y}$, маємо

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \cdots, \qquad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

і

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \qquad |x| < 1,$$

відповідно отримаємо:

$$f(x) = -\frac{1}{12}(1 + \frac{x}{3} + (\frac{x}{3})^2 + \cdots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \cdots\Big) -$$

$$-\frac{1}{4}(1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 + \cdots + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n + \cdots \qquad (2.7)$$

Оскільки перший ряд збігається до функції $\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$ при $|x| < 3$, і другий ряд збігається до функції $\frac{1}{1+x}$ при $|x| < 1$, то ряд (2.7) представляє функцію $\frac{1}{x^2-2x-3}$ при $|x| < 1$.

Приклад 2.3.4.

Розкласти функцію$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ в степеневий ряд в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання

Представимо цю функцію у вигляді

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln\frac{1 + x^3}{1 + x} = \ln(1 + x^3) - \ln(1 + x).$$

Тепер розглянемо розклад кожної з функцій $\ln(1 + x^3)$ і $\ln(1 + x)$ у степеневий ряд:

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{3n}}{n} + \cdots, \quad |x^3| < 1, |x| < 1,$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Відповідно

$$\ln(1 - x + x^2) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - (\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^6 + \frac{x^7}{7} - \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Для розкладання функції $f(t)$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0 \neq 0$, часто використовується такий метод: вводиться нова змінна

$$t = x - x_0$$

і знаходиться розклад функції

$$f^*(x) = f(t + x_0)$$

в степеневий ряд за степенями t (з центром в точці $t_0 = 0$).

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n, \qquad |t| < R$$

з цього слідує, що

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (f^*(x))^n, \qquad |x - x_0| < R$$

Приклад 2.3.5.

Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ в степеневий ряд з центром в точці $x_0 = -3$.

Розв'язання

Введемо заміну $t = x + 3$, тоді $x = t - 3$ відповідно

$$f(x) = f^*(t) = \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3} * \frac{1}{1 - \frac{t}{3}}.$$

Припустимо, що $\frac{t}{3} = y$, і, використовуючи табличний розклад для похідної функції $\frac{1}{1-y}$, отримаємо такий ряд:

$$f^*(t) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{t}{3}\right)^n + \cdots\right),$$

$$|y| < 1, \qquad \left|\frac{t}{3}\right| < 1, \qquad -3 < t < 3.$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} - \frac{(x+3)}{3^3} - \frac{(x+3)^2}{3^3} - \cdots - \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}} - \cdots,$$

$$-3 < x + 3 < 3, \qquad -6 < x < 0$$

Застосування рядів Тейлора для апроксимації функцій дозволяє розв'язувати широкий спектр завдань.

1) Розв'язування диференціальних рівнянь. Ряди Тейлора допомагають апроксимувати розв’язок диференціальних рівнянь, дозволяючи отримати аналітичні або чисельні розв'язки.

2) Оцінка функцій. Ряди Тейлора використовуються для оцінки значень функцій в точках околу, особливо у випадках, коли аналітичний вираз для функції складно отримати.

3) Розв'язання задач оптимізації. Методи апроксимації за допомогою рядів Тейлора допомагають знаходити локальні максимуми та мінімуми функцій.

4) Моделювання. Ряди Тейлора широко використовуються в чисельних методах для моделювання фізичних явищ, наприклад, при аналізі та розв'язанні різних задач у фізиці, інженерії та інших галузях.

Загалом, ряди Тейлора є потужним інструментом для математичного аналізу та моделювання, і вони знаходять застосування в широкому спектрі наукових і інженерних задач.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВЯЗКУ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

3.1. Розрахунок зміни заряду на конденсаторі в коливальному колі LC-контура

Деякі схеми можуть використовувати коло LC для перетворення сигналів, наприклад, для зміни частоти або форми сигналу.

Розглянемо процес розв'язування задачі обчислення зміни заряду на конденсаторі в коливальному колі LC-контура з використанням степеневих рядів Тейлора. При цьому обмежимося обчисленнями для перших двох членів ряду Тейлора.

Задача

Розрахувати зміну заряду на конденсаторі в коливальному колі LC-контура, якщо є початковий заряд і різні початкові умови для кола.

Дані:

- Індуктивність LC-контура (L) = 0.1 Гн
- Ємність конденсатора (C) = 0.01 Ф
- Опір резистора (R) = 10 Ом
- Початковий заряд на конденсаторі (Q_0) = 0.001 Кл
- Початковий струм у контурі (I_0) = 0 А
- Початкова напруга на конденсаторі (V_0) = Q_0 / C = 100 В

Розвязання

Розглянемо рівняння для заряду на конденсаторі:

$$Q(t) = Q(0) + I(0)t + \frac{1}{2C}V''(0)t^2$$

та рівняння LC-контура:

$$L * \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}V = 0.$$

Знаючи, що напруга на конденсаторі є змінною з часом, можемо використати рівняння ємності конденсатора:

$$I = C * \frac{dV}{dt}.$$

Знайдемо другу похідну напруги відносно часу *t*

$$I = C * \frac{dV}{dt},$$

$$I' = C * \frac{d^2V}{dt^2}.$$

Для обчислення значення другої похідної в момент часу $t=0$ потрібно врахувати початкову напругу на конденсаторі (V_0 = 100 В) і опір резистора (R = 10 Ом). Розглянемо специфічну ситуацію, коли коло було розімкнуте, і потім в момент часу t=0 коло замкнулося.

Початкова напруга на конденсаторі: $V(0)$=100 В.

Знаючи, що коло було розімкнуте, напруга на конденсаторі залишалася сталою, і, отже, $V'(0)$=0.

З урахуванням опору резистора, струм в колі при замиканні буде обмежений

$$I(0) = \frac{V(0)}{R} = \frac{100B}{10\Omega} = 10\ A.$$

Знаючи $I(0)$ і $V'(0)=0$, можна обчислити значення другої похідної в початковий момент часу:

$$I'(0) = C * \frac{d^2V}{dt^2} = C * \frac{d^2V}{dt^2}(0) = C * \frac{dI}{dt}(0)$$

Використовуючи значення $I(0)$ і враховуючи, що індуктивність L=0.1 Гн і ємність C=0.01 Ф, отримаємо:

$$I' = 0{,}01\Phi * \frac{dI}{dt} = 0{,}01\Phi * \frac{d}{dt}(10A) = 0{,}01\Phi * 0 = 0\ A.$$

Маючи значення другої похідної $I'(0)$=0А, можемо обчислити третій член ряду Тейлора:

$$\frac{1}{2C}V''(0)t^2 = \frac{1}{2C}I'(0)t^2 = 0.$$

Таким чином, третій член ряду Тейлора дорівнює нулю.

Після обчислення значень для всіх похідних відносно часу t у початковий момент часу, можемо записати загальний вигляд розв'язку:

$$Q(t) = Q(0) + I(0) * t + 0 * t^2 + \ldots$$

Ця задача може бути корисною для розробників електронних пристроїв та систем, оскільки дозволяє прогнозувати зміни заряду в коливальних колах в залежності від різних початкових умов і параметрів компонентів кола. Це важливо для оптимізації роботи електронних систем і пристроїв, де коливання та зміни заряду грають важливу роль.

3.2. Застосування степеневих рядів для мінімізації ризику інвестиційного портфелю

У сучасному світі фінансовий аналіз та управління ризиками мають вирішальне значення для багатьох галузей бізнесу та фінансів. Розвиток математичних моделей та аналітичних інструментів дозволяє зрозуміти та передбачити фінансові ризики, що допомагає компаніям та інвесторам управляти своїми активами та інвестиціями більш ефективно.

Одним з ключових інструментів у фінансовому аналізі є розклад функцій у степеневі ряди. Цей метод дозволяє апроксимувати складні функції та використовувати їхні розклади для аналізу різних фінансових моделей та ризиків.

У даному контексті ми розглянемо практичний приклад використання розкладу функції в степеневий ряд для управління ризиком в інвестиційній стратегії. Розглянемо фінансовий інструмент, який може бути описаний складною функцією залежності дохідності від певних параметрів та ризиків.

У цьому контексті використовуватимемо методи степеневих рядів для розкладу цієї функції та аналізу отриманих розкладів для прийняття рішень щодо інвестиційної стратегії.

Нехай інвестиційний фонд розглядає можливість інвестування в портфель акцій підприємства "АГРО РІВНЕ". Проте, інвестори цього фонду стурбовані можливими коливаннями цін акцій "АГРО РІВНЕ" та бажають зменшити ризик свого інвестиційного портфеля.

Приклад. Розглянути можливість включення акцій "АГРО РІВНЕ" до інвестиційного портфеля та визначити оптимальну кількість акцій "АГРО РІВНЕ" для мінімізації ризику і забезпечення прийнятної дохідності.

Дані:

- Поточний ризик інвестиційного портфеля без акцій "АГРО РІВНЕ": 12%.
- Поточна доходність інвестиційного портфеля без акцій "АГРО РІВНЕ": 8%.
- Річна зміна ціни акцій "АГРО РІВНЕ" за останні 5 років (у відсотках): 10%, -5%, 8%, 12%, -3%.
- Максимальна кількість акцій "АГРО РІВНЕ", яку можна включити до портфеля: 1 000 акцій.
- Поточна ціна акції "АГРО РІВНЕ": $50.

Розв'язання

Фінансовий аналітик вирішує використати розклад функції в степеневий ряд для апроксимації функції дохідності і ризику інвестиційного портфеля в залежності від кількості акцій "АГРО РІВНЕ".

1) Він аналізує зміну ціни акцій "АГРО РІВНЕ" за останні 5 років і визначає середню річну зміну ціни акцій.

2) Далі він використовує розклад функції в степеневий ряд для апроксимації функції дохідності та ризику інвестиційного портфеля в залежності від кількості акцій "АГРО РІВНЕ" з урахуванням середньорічної зміни ціни акцій та поточних показників портфеля.

3) Він знаходить точку, де ризик досягає мінімального значення при певній кількості акцій "АГРО РІВНЕ", при цьому дохідність залишається на прийнятному рівні.

4) Фінансовий аналітик робить рекомендацію інвесторам щодо оптимальної кількості акцій "АГРО РІВНЕ" для мінімізації ризику при збереженні дохідності.

Для знаходження розв'язку цієї задачі, нам потрібно виконати обчислення, використовуючи зазначені дані і методи, які були наведені вище. Розглянемо детальніше кожен крок.

1) Обчислимо середню річну зміну ціни акцій "АГРО РІВНЕ". Сума змін за останні 5 років становить: 10% - 5% + 8% + 12% - 3% = 22%. Середньорічна зміна буде 22% / 5 років = 4.4% на рік.

2) Використовуючи середню річну зміну ціни та поточні показники портфеля (ризик 12% і доходність 8% без акцій "АГРО РІВНЕ"), ми можемо скласти функції дохідності і ризику в залежності від кількості акцій "АГРО РІВНЕ" та виразити їх у вигляді степеневих рядів.

3) Знайдемо точку, де ризик досягає мінімального значення, а доходність залишається на прийнятному рівні. Ця точка буде оптимальною кількістю акцій "АГРО РІВНЕ" для мінімізації ризику при досягненні цільового рівня дохідності.

4) Фінансовий аналітик робить рекомендацію інвесторам щодо оптимальної кількості акцій "АГРО РІВНЕ" на підставі результатів розрахунків.

Спробуємо провести обчислення із використанням степеневих рядів для знаходження оптимальної кількості акцій "АГРО РІВНЕ" для мінімізації ризику при досягненні певного рівня дохідності.

Представимо функцію дохідності і ризику інвестиційного портфеля у вигляді степеневого ряду в залежності від кількості акцій "АГРО РІВНЕ". Наприклад, для дохідності:

$$D(x) = D(0) + D'(0) * x + \frac{D''(0)}{2!} * x^2 + \cdots$$

де:

- $D(x)$ - доходність інвестиційного портфеля залежно від кількості акцій "АГРО РІВНЕ".
- $D(0)$ - доходність портфеля без акцій "АГРО РІВНЕ" (8%).
- $D'(0)$ - перша похідна дохідності по кількості акцій "АГРО РІВНЕ" (яку ми будемо шукати).
- $D''(0)$ - друга похідна дохідності по кількості акцій "АГРО РІВНЕ" (яку ми також будемо шукати).
- І так далі.

Тепер представимо ризик у вигляді степеневого ряду, аналогічного дохідності:

$$R(x) = R(0) + R'(0) * x + \frac{R''(0)}{2!} * x^2 + \cdots$$

де:

- $R(x)$ - ризик інвестиційного портфеля залежно від кількості акцій "АГРО РІВНЕ".
- $R(0)$ - ризик портфеля без акцій "АГРО РІВНЕ" (12%).
- $R'(0)$ - перша похідна ризику по кількості акцій "АГРО РІВНЕ" (яку ми будемо шукати).
- $R''(0)$ - друга похідна ризику по кількості акцій "АГРО РІВНЕ" (яку ми також будемо шукати).
- І так далі.

Тепер потрібно знайти значення похідних $D'(0)$, $(0)D''(0)$, $R'(0)$, $R''(0)$, і так далі, щоб розкласти функції $D(x)$ і $R(x)$ у степеневі ряди.

За допомогою розкладів степеневих рядів знайдемо оптимальну кількість акцій "АГРО РІВНЕ" для досягнення цієї точки.

Цей підхід дозволяє апроксимувати функції дохідності і ризику залежно від кількості акцій "АГРО РІВНЕ" та знаходити оптимальний розподіл акцій для досягнення цілей з управлінням ризиком і доходністю. Таким чином, розрахунки будуть вимагати проведення диференціювання та обчислень рядів, що може є складним завданням і вимагає використання пакетів математичних обчислень

Цей приклад ілюструє, як розклад функції в степеневий ряд може бути використаний для аналізу та управління ризиком в інвестиціях на реальних ринках з урахуванням конкретних даних.

3.3. Використання степеневих рядів для обчислювання задач термодинаміки

Слід зауважити, що обчислення значень параметрів та розв'язування конкретної задачі щодо теплообміну для великих та складних систем вимагають використання програм для чисельного моделювання, таких як програми для скінченних елементів чи обчислювальної гідродинаміки.

Проте, ми можемо показати загальну процедуру розв’язку задачі.

Приклад.

Знайти розподіл температури в пластині, одна сторона якої нагріта до певної температури, інша знаходиться при сталій температурі, і тепло втікає від неї в навколишнє середовище.

Параметри:

- Розміри пластини: a (ширина), b (довжина)

- Товщина пластини: d
- Температура навколишнього середовища: T0
- Температура на стороні з джерелом тепла: T1
- Коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини: k
- Густина матеріалу: ρ
- Теплоємність матеріалу: c

Рівняння теплопровідності, як відомо, має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a * \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad a = \frac{k}{\rho c},$$

де *u(x,y,z,t)* – температурний розподіл,

Умови на межі:

- Пластина знаходиться в середовищі з температурою T0.
- На одному боці (скажімо, на стороні a) пластини температура підтримується на рівні T1.
- Тепло витікає в навколишнє середовище з температурою T0.

Початкова умова:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z,)$$

Розклад в степеневий ряд:

$$u(x, y, z, t, \varepsilon) = u_0(x, y, z, t) + \varepsilon u_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, z, t) + \cdots$$

де ε - параметр, який відповідає за товщину пластини.

Спосіб розкладу:

вводиться нова змінна ξ, яка відповідає за товщину пластини:

$$\xi = \frac{z}{d}.$$

Розклад для кожного члена:

$$u(x, y, z, t, \varepsilon) = u_0(x, y, \xi, t) + \varepsilon u_1(x, y, \xi, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, \xi, t) + \cdots$$

Тепер, підставляючи цей розклад у рівняння теплопровідності та збираючи члени за однаковими ступенями ε, можна отримати систему рівнянь для кожного члена розкладу. Перший член (при ε^0) відповідає основному термодинамічному процесу, а інші члени дозволяють врахувати корекції від товщини пластини.

Для обчислення конкретних значень температури $u_0, u_1, u_2, \ldots$ необхідно враховувати конкретні значення параметрів, розміри пластини, умови на границях, початкову умову та обрану точність розкладу (в якій ступені ε розглядається).

Такий розклад дозволяє апроксимувати температурний розподіл в пластині та досліджувати вплив різних параметрів на теплові поля в системі.

Використання методу розкладу функції в степеневий ряд є дуже важливим підходом для вирішення задач теплообміну та інших подібних задач, особливо в прикладних науках і інженерії. Цей метод дозволяє розглядати складні фізичні процеси з багатьма параметрами та ураховувати різні аспекти, які впливають на розв'язок.

Важливість використання такого підходу полягає в наступному.

1) Апроксимація розв'язку: Метод степеневих рядів дозволяє апроксимувати складні функції за допомогою більш простих функцій, що полегшує обчислення та аналіз систем.

2) Урахування впливу параметрів: Важливі параметри системи можуть бути включені у розклад за допомогою ступеневих членів. Це дозволяє досліджувати вплив різних факторів на результати моделювання.

3) Аналіз розподілу та тенденцій: Метод дозволяє отримувати інформацію про тепловий розподіл та тенденції в системі. З цими даними можна визначити оптимальні умови для певних процесів або вдосконалити дизайн системи.

4) Застосування в інженерії: В інженерії, включаючи механіку, теплопровідність та інші галузі, метод степеневих рядів дозволяє моделювати та аналізувати фізичні явища в складних системах. Він застосовується для вирішення практичних завдань, таких як дизайн матеріалів, оптимізація процесів, аналіз теплових втрат тощо.

Загалом, використання методу розкладу функції в степеневий ряд допомагає покращити розуміння фізичних процесів, отримати цінні дані для прийняття рішень і оптимізації систем, що робить його незамінним інструментом для науковців і інженерів у різних галузях.

3.4. Використання степеневих рядів в задачі про осцилятор гармонічного маятника

Розглянемо гармонічний осцилятор в квантовій механіці. Гамільтоніан для гармонічного осцилятора має аналітичний вигляд, і його розв'язок може бути складним. Однак за допомогою розкладу функції в степеневий ряд, можна отримати апроксимований розв'язок для енергетичних рівнів і хвильових функцій гармонічного осцилятора. Це дозволяє наближено досліджувати властивості квантових систем та прогнозувати їхню поведінку.

Розглянемо задачу про гармонічний маятник, такий як маятник, який рухається вздовж горизонтальної осі під дією гравітації і натягнутої пружини. Математично ця система може бути описана рівнянням руху Дуффінга.

Приклад.

Розглянемо гармонічний маятник, який має масу 0.5 кг і довжину 1 метр. Маятник рухається під дією гравітації і натягнутої пружини з коефіцієнтом жорсткості 50 Н/метр. Задача полягає в апроксимації руху маятника та знаходженні апроксимованого розв'язку рівняння руху Дуффінга, яке описує динаміку маятника.

Дані для обчислень:

1. Маса маятника: 0.5 кг
2. Довжина маятника: 1 метр
3. Коефіцієнт жорсткості пружини: 50 Н/метр
4. Коефіцієнт тертя (припустимо, що тертя відсутнє).
5. Початкові умови:
    - Початковий кут відхилення: 30 градусів
    - Початкова швидкість: 0 м/с

З використанням цих даних і рівнянь руху Дуффінга, можна побудувати розклад функції в степеневий ряд, який допоможе апроксимувати динаміку маятника та аналізувати його коливання в умовах, визначених цими даними.

Розв'язання

Для виконання обрахунків, пов'язаних із задачею гармонічного маятника, нам потрібно врахувати рівняння руху Дуффінга та використовувати розклад функції в степеневий ряд. Ось кілька перших обчислень, які можна виконати.

Запишемо рівняння руху Дуффінга для гармонічного маятника:

$$m \cdot \theta^{\cdot\cdot} + k \cdot \theta - 0 = 0$$

де:

m - маса маятника (0.5 кг).

k - коефіцієнт жорсткості пружини (50 Н/метр).

θ - відхилення маятника від положення рівноваги.

$\theta^{\cdot\cdot}$ - друга похідна від θ за часом.

Розкладемо функцію $\theta(t)$ в степеневий ряд.

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 \cdot t + \theta_2 \cdot t^2 + \ldots$$

де:

θ_0 - початковий кут відхилення (30 градусів, або $\frac{\pi}{6}$ радіан).

θ_1 - початкова швидкість (0 м/с).

Так як подальші обрахунки з високою точністю вимагають використання спеціалізованих математичних програм та обладнання ми для прикладу ми виконаємо з мінімальною точністю.

Маємо рівняння руху Дуффінга для гармонічного маятника:

$$m * \ddot{\theta} + k * \theta = 0,$$

де:

m - маса маятника (0.5 кг).

k - коефіцієнт жорсткості пружини (50 Н/м).

θ - відхилення маятника від положення рівноваги.

Ми будемо наближено розв'язувати це рівняння для маленьких відхилень (до 30 градусів) і припустимо, що тертя відсутнє.

Можемо використовувати наближений степеневий розклад для малих відхилень:

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 * t.$$

Запишемо початкові умови.

Початковий кут відхилення $\theta_0=\frac{\pi}{6}$ радіан.

Початкова швидкість $\theta_1=0$ м/с.

Підставимо цей розклад у рівняння руху та залишимо тільки перші похідні:

$$m * \theta_1 + k * \theta_0 = 0$$

Розв'яжемо це рівняння для θ_1:

$$\theta_1 = -\frac{k * \theta_0}{m}$$

Підставимо значення для m, k, і θ_0:

$$\theta_1 = -\frac{\frac{50\text{Н}}{\text{м}} * \frac{\pi}{6}\text{рад}}{0{,}5\ \text{кг}} \approx -5{,}24\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Таким чином, за наближеними обчисленнями, початкова швидкість маятника становить близько -5.24 радіан на секунду.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено важливу тему степеневих рядів та їх застосування в різних прикладних задачах. У першому розділі були розглянуті основні поняття та властивості степеневих рядів, включаючи радіус збіжності та дії з рядами. Також розглянуті ряди Тейлора та методи розкладу функцій у степеневий ряд.

У другому розділі обговорено застосування степеневих рядів до наближених обчислень, розв’язування диференціальних рівнянь та апроксимації функцій за допомогою рядів Тейлора. Цей розділ показує, як степеневі ряди можуть бути корисними для обчислення складних фізичних та інженерних задач.

У третьому розділі розглянуто конкретні приклади застосування степеневих рядів до розв'язування функціональних рівнянь у різних прикладних задачах. Серед цих прикладів були розрахунки зміни заряду на конденсаторі в коливальному колі LC-контура, мінімізація ризику інвестиційного портфелю, обчислення задач термодинаміки та аналіз осцилятора гармонічного маятника.

Вивчення і застосування степеневих рядів для знаходження розв'язків функціональних рівнянь є надзвичайно важливим завданням у різних галузях науки та технологій. Ця тема має ключове значення з декількох причин.

По-перше, використання степеневих рядів є потужним інструментом для апроксимації функцій та моделювання складних систем. Це особливо важливо в економіці, інженерії, та інших галузях, де точні математичні моделі є важко реалізовуваними.

По-друге, застосування степеневих рядів дозволяє розробляти наближені методи розв'язування рівнянь, що іноді набуває вирішального значення в практичних завданнях. Це особливо важливо при обчисленнях і моделюванні складних систем, де аналітичні розв'язки недоступні.

Отже, вивчення та впровадження методів степеневих рядів має велику вагомість як у фундаментальних наукових дослідженнях, так і в практичних застосуваннях, сприяючи розвитку наукового та технологічного прогресу.

У дослідженні було проведено аналіз та вивчення степеневих рядів та їх застосування у різних галузях науки та техніки. Дослідження показало, що степеневі ряди є потужним математичним інструментом, який може бути використаний для розв'язання різноманітних завдань і задач, від обчислень до розв'язування складних диференціальних рівнянь. Важливість цього полягає у можливості дослідження та передбачення різних явищ, таких як розповсюдження хвиль, електродинамічні процеси, інтегрування фізичних систем тощо.

Застосування степеневих рядів до розв'язання функціональних рівнянь у практичних задачах показало їх універсальність та можливість використання в різних галузях. Робота над прикладами підкреслила, як степеневі ряди можуть сприяти отриманню аналітичних розв'язків та полегшити роботу над складними завданнями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Панков О.А., Панкова Т.Е. Вища математика. ВІРЕУ. 1998.

2. Badora, R., Ger, R., Páles, Z.: Additive selections and the stability of the Cauchy functional equation. 2003.

3. Castaing, C., Valadier, M.: Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

4. Васичъченко І.П., Данилов В.Я., Лобанов А.І., Таран Є.Ю. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. посіб. Либідь, 1992.

5. Kannappan, P.: Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York 2009.

6. Жильцов О.Б., Торбін Г.М. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. МАУП, 2002.

7. Кулініч Г.Л, Макасименко Л.О., Плахотнік В.В., Призва Г.Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб. Либідь, 1992.

8. Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях. МАУП, 1999.

9. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. Київ. Либідь, 2018.

10. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика. Київ. Кондор, 2007.

11. J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.

12. Н.Д. Федоренко, О.І. Баліна. І.С. Безклубенко та ін. Вища математика. Навчальний посібник. Київ. КНУБА. 246 с.

13. А.Ф. Шестопал, Конспект лекцій з криволінійних, поверхневих, кратних інтегралів та теорії рядів. Київ. КІБІ, 1993. 128 с.

14. R. Nevanlinna, Analytic functions, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

15. І.С. Безклубенко, О.І. Баліна, Б.П. Буценко. Методичні вказівки до курсу “Теорія функцій комплексної змінної”. Київ. КДТУБА, 1999. 35с.

16. Н.Д. Федоренко., О.І. Баліна. Методичні вказівки з вищої математики. ч. IV. Київ, 2000.

17. В.О. Ізварін. Застосування операційного числення до інженерних задач. Київ. ІЗМІН, 1997. 176 с.

18. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations in Several Variables. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 31. Cambridge University Press, 1989.

19. M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

20. Чубатюк В.М. Вища математика. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. Київ. ВД «Професіонал», 2006.

21. Барковський В.В., Барковська Н. В. Математика для економістів. Вища математика. Київ. Вид-во НАУ, 1999.

22. K. B. Athreya and P. E. Ney, Branching processes, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

23. H. O. Peitgen and D. Saupe, editors, The Science of Fractal Images, SpringerVerlag, New York, 1988.

24. Михайленко В.М., Овчинников П.П., Лісіцин Б.М. Вища математика. ч.ІІ. Київ. Техніка. 2002, 791 с.

25. Журавель О.О. Вища математика. Збірник завдань для курсових а самостійних робіт. Київ. КТУБА, 1998. 111с.

26. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, and R. F. Tichy, Fibonacci numbers of graphs III: Planted plane trees, in Fibonacci Numbers and Their Applications, Reidel, DordrechtrBoston, 1986.

27. Th.M. Rassias, J. Simsa, Finite Sum Decompositions in Mathematical Analysis, J. Wiley & Sons, Chichester, 1995.

28. O. Borhvka, Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, VEB Verlag, Berlin, 1967; extended English version: Linear Differential Transformations of the Second Order, English Universities Press, London, 1971.