Шевцова Н.В., Петрівський Я.Б., Бабич С.М.

ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ

Частина I

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра інформаційних технологій та моделювання

Шевцова Н.В., Петрівський Я.Б., Бабич С.М.

ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ

Частина І

Навчальний посібник

Рівне-2026

УДК 517-022.334:519.854 (075.8)
Ш 37

Рекомендовано Вченою радою Рівненського державного гуманітарного університету (протокол №1 від 29 січня 2026 р.)

Укладачі:

- *Шевцова Н. В.*, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ;
- *Петрівський Я. Б.,* кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ
- *Бабич С. М.*, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та моделювання РДГУ

Рецензенти:

Юрій ТУРБАЛ – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування;

Ігор ПРИСЯЖНЮК – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій РДГУ.

Шевцова Н. В. Дискретний аналіз : [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів вищ. освіти спец. F2 Інженерія програмного забезпечення, F3 Комп'ютерні науки. Ч. І. / Н. В. Шевцова, Я. Б. Петрівський, С. М. Бабич. – 2-ге вид., перероб. і допов. – Рівне : РДГУ, 2026. – 112 с.

ПЕРЕДМОВА

Дискретний аналіз є однією з фундаментальних дисциплін у підготовці фахівців із галузі F Інформаційні технології. Його методи та результати широко застосовуються при проєктуванні алгоритмів, розробці програмного забезпечення, моделюванні дискретних процесів, а також у теорії кодування, криптографії, штучному інтелекті та багатьох інших сучасних галузях.

Навчальний посібник «Дискретний аналіз. Частина І» укладено відповідно до робочих програм дисципліни «Дискретний аналіз» для здобувачів вищої освіти спеціальностей F2 «Інженерія програмного забезпечення» та F3 «Комп’ютерні науки». У ньому систематизовано матеріал із змістовних модулів: «Теорія множин», «Відношення. Відображення. Потужність множин», «Комбінаторика» та «Булеві функції».

Навчальний матеріал змістовного модуля «Теорія множин» є основою для розуміння структур даних, реляційних баз даних і об'єктно-орієнтованого програмування. «Відношення. Відображення. Потужність множин» формує базові уявлення про зв'язки між об'єктами, необхідні для проєктування баз даних, побудови графових моделей і формалізації алгоритмів. «Комбінаторика» застосовується при розробці алгоритмів перебору, оптимізації, криптографічних перетворень та оцінці складності обчислень. «Булеві функції» є теоретичним підґрунтям для проєктування логічних схем, роботи з умовними конструкціями в коді, а також для формальної верифікації програм і синтезу цифрових пристроїв.

Кожен розділ посібника має чітку структуру:

- стислий виклад основних теоретичних відомостей;
- контрольні питання для самоперевірки;

- приклади типових задач із детальним поясненням;
- вправи для самостійного виконання, які дозволяють закріпити набутий матеріал.

Така побудова сприяє поступовому засвоєнню складних логічних конструкцій і дає змогу здобувачам вищої освіти ефективно працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно.

Матеріали посібника апробовані в освітньому процесі Рівненського державного гуманітарного університету. Друге видання перероблене та доповнене з урахуванням сучасних вимог до підготовки ІТ-фахівців, а також відгуків студентів і викладачів.

Автори щиро вдячні рецензентам – доктору технічних наук, професору Юрію Турбалу і кандидату технічних наук, доценту Ігорю Присяжнюку – за цінні поради, що сприяли вдосконаленню посібника.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття теорії множин.

Теорія множин, створена в кінці XIX століття Георгом Кантором, стала фундаментом сучасної математики, забезпечуючи мову та базові принципи для більшості її розділів. У цьому розділі розглянемо основи так званої інтуїтивної (або «наївної») теорії множин, яка, не вдаючись до формальної аксіоматики, розвиває ключові ідеї Кантора та забезпечує надійну основу для подальшого вивчення.

В інтуїтивній теорії множин поняття "***множина***" належить до первинних невизначальних понять, тобто воно не може бути означено через інші більш прості терміни або об’єкти, а пояснюється на прикладах, апелюючи до нашої уяви та інтуіції. Такими поняттями в математиці є також поняття "число", "пряма", "точка", "площина" тощо.

Канторівський вираз: «*Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається* ***множиною***. *Предмети, які входять до складу множини, називаються її* ***елементами***» – є поясненням поняття множини, яке заміняє термін "множина" на термін "зібрання". Іншими синонімами основного слова "множина" є "сукупність", "набір", "колекція", "об’єднання" тощо.

Для позначення конкретних множин використовують великі латинські літери A, M, X... Елементи множин позначатимемо малими літерами латинського алфавіту. Той факт, що об’єкт a є елементом множини M записується так: $a \in M$ (читається: "a належить M" або"a є елемент M"). Для того, щоб підкреслити, що деякий елемент a не належить множині M, вживають позначення $a \notin M$ або $a \overline{\in} M$.

Запис $a,b,c,... \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$,....

Множину називають ***скінченною***, якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k, що є числом елементів цієї множини. У противному разі множина є ***нескінченною***. Якщо множина S скінчена, то кількість елементів в множині позначається $|S|$. Наприклад, для $S = \{a, b, c\}$ $|S| = 3$.

Множина, яка складається з елементів деякої множини S так, що ці елементи можуть входити до складу цієї множини в якій завгодно кількості екземплярів, будемо називати ***мультимножиною*** множини S і позначати її $M(S)$. З точки зору теорії множин, множина і її мультимножина – це один і той самий об'єкт, і вони можуть між собою не розрізнятися. Але часто, особливо коли мова заходить про представлення множини в пам'яті ЕОМ, виникає потреба відрізняти мультимножину від множини.

Для ***задання множини***, утвореної з будь-яких елементів, будемо використовувати наступні способи.

1. *Вербальний (словесний).* Елементи множини визначаються за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множин. *Наприклад,* множина K – усіх країн, що межують з Україною.

2. *Список (перелік) елементів.* Якщо $a_1, a_2, ..., a_n$ – деякі об'єкти, то множина цих об'єктів позначається через $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. З останнього зауваження випливає, що в такий спосіб можуть бути задані тільки скінченні множини. Порядок запису елементів множини при цьому позначенні є неістотним.

Наприклад, множина десяткових цифр записується $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множина основних арифметичних операцій – {+, -, *, /} або {*, /, +, -}.

3. *Предикатний (характеристичний).* Елементи множини визначаються за допомогою характеристичного предикату – деякої умови, вираженої у формі логічного твердження або процедури, яка повертає логічне значення, і дозволяє перевіряти, належить чи ні будь-який об'єкт множині. Якщо для даного об'єкта ця умова виконується, то він належить визначеній множині, у протилежному випадку – не належить.

Тобто множина задається у вигляді $M = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ – характеристичний предикат. Цей вираз читається так: "множина M – це множина всіх таких елементів x, для яких виконується властивість P". Замість вертикальної риски іноді записують двокрапку.

Наприклад,

$S = \{ n \mid n$ - непарне число $\}$ або $S = \{ n \mid n = 2k+1, k\in Z \}$,

$X = \{ x \mid x = \pi k, k\in Z \}$,

$F = \{ f_i \mid f_{i+2} = f_{i+1} + f_i, i\in N, f_1 = f_2 = 1 \}$.

З метою зручності та одностайності при проведенні математичних викладок вводиться поняття множини, яка не містить жодного елемента. Така множина називається ***порожньою*** множиною і позначається $\varnothing$, наприклад: $\varnothing=\{x \mid x\neq x\}$. Разом із тим, твердженням "множина M – непорожня" можна замінювати рівносильне йому твердження "існують елементи, які належать множині M".

Дві множини A і B називаються ***рівними*** (записується $A=B$), якщо вони складаються з тих самих елементів.

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Leftrightarrow x\in B).$$

Наприклад, $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 2, 3\}$.

Множина A називається ***підмножиною*** множини B (записується $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$) тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B. Кажуть також, що множина A міститься у множині B. Знаки $\subseteq$ і $\supseteq$ називаються ***знаками включення***. При цьому множина В буде називатися ***надмножиною*** множини А.

Якщо $A \subseteq B$, однак $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину A ***власною*** (*строгою* або *істинною*) ***підмножиною*** множини B. Знак $\subset$ (або $\supset$), на відміну від знака $\subseteq$ (або $\supseteq$), називається ***знаком строгого включення***.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується $A \subseteq A$. Крім того, прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини A, тобто $\varnothing \subseteq A$ (зокрема, $\varnothing \subseteq \varnothing$).

На основі визначення включення та рівності множин легко доводяться такі фундаментальні властивості, які зручно подати у вигляді лем.

Лема 1.1 (Критерій рівності множин). Дві множини рівні тоді й лише тоді, коли кожна з них є підмножиною іншої.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A$$

Лема 1.2 (Транзитивність відношення включення). Для будь-яких множин A, B і C справедливе твердження:

Якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Лема 1.3 (Єдиність порожньої множини). Порожня множина єдина.

Універсум **(*універсальна множина*)** U – множина з такою властивістю, що всі множини, які розглядаються, є її підмножинами.

Треба зазначити, що універсум однозначно не визначений, якщо точно не вказана область визначення (предметна область). У теорії чисел універсум зазвичай співпадає із множиною всіх цілих або натуральних чисел, у математичному аналізі – множина всіх дійсних чисел, в планіметрії – множина всіх точок на площині.

Множину, елементами якої є всі підмножини A, називають ***булеаном*** (множиною підмножин) множини A і позначають $P(A)$. *Наприклад*, для триелементної множини $A = \{a, b, c\}$ маємо

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

У випадку скінченної множини A, що складається з n елементів, її булеан $P(A)$ містить 2^n елементів. Доведення ґрунтується на підсумовуванні всіх коефіцієнтів розкладу бінома Н'ютона або на поданні підмножин n-розрядними двійковими числами, в яких 1 (або 0) відповідає елементам підмножин.

1.2. Операції над множинами.

Розглянемо дві множини A та B і введемо операції над ними. До основних операцій теорії множин належать чотири *бінарні* операції (об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця) та одна *унарна* (доповнення). Для графічної ілюстрації будемо використовувати так звані діаграми Венна або кола Ейлера. Діаграма Венна являє собою схемне зображення множин у вигляді множин точок: універсум U зображується множиною точок деякого прямокутника, а його підмножини – у вигляді кіл або інших простих областей у цьому прямокутнику.

Об'єднанням множин A і B ($A \cup B$) називається множина тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Наприклад, $\{a, b, c\} \cup \{a, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.

Результат операції об'єднання $A \cup B$ можна проілюструвати діаграмою Венна, зображеною на рисунку 1.1.

Перетином множин A і B ($A \cap B$) називається множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам A і B одночасно:

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ і } x \in B \}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$, $\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \varnothing$. Кажуть, що множини A і B ***не перетинаються***, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Результат операції перетину $A \cap B$ можна проілюструвати діаграмою Венна, зображеною на рисунку 1.2.

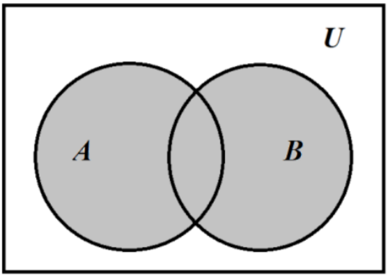


Рис. 1.1. $A \cup B$.

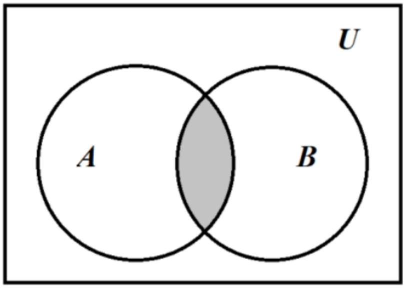


Рис. 1.2. $A \cap B$.

Різницею множин A і B ($A \setminus B$) називається множина тих елементів, які належать множині A і не належать множині B:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \text{ і } x \notin B \}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$,
$\{a,c,d,e\} \setminus \{a,b,c\} = \{d,e\}$,
$\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \varnothing$.

Результат операції різниці $A \setminus B$ можна проілюструвати діаграмою Венна, зображеною на рисунку 1.3.

Симетричною різницею множин A і B ($A \div B$ або $A \Delta B$, $A \oplus B$) називається множина, що складається з усіх елементів множини A, які не містяться в B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A:

$$A \div B = \{\, x \mid (\, x \in A \text{ і } x \notin B \,) \text{ або } (\, x \in B \text{ і } x \notin A \,)\}.$$

Наприклад, $\{a,b,c\}\div\{a,c,d,e\} = \{b,d,e\}$, $\{a,b\}\div \{a,b\} = \varnothing$.

Результат операції симетричної різниці $A \div B$ можна проілюструвати діаграмою Венна, зображеною на рисунку 1.4.

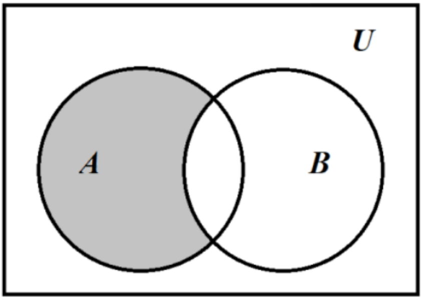


Рис. 1.3. $A \setminus B$.

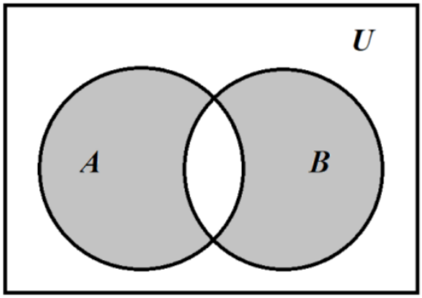


Рис. 1.4. $A \div B$.

Якщо зафіксована універсальна множина U, то ***доповненням*** множини A ($\overline{A}$) – називається множина всіх елементів універсальної множини, які не належать множині A:

$$\overline{A} = \{\, x \mid x \in U \text{ і } x \notin A \,\}.$$

Очевидно, що $\overline{A} = U \setminus A$.

Результат операції доповнення $\overline{A}$ можна проілюструвати діаграмою Венна, зображеною на рисунку 1.5.

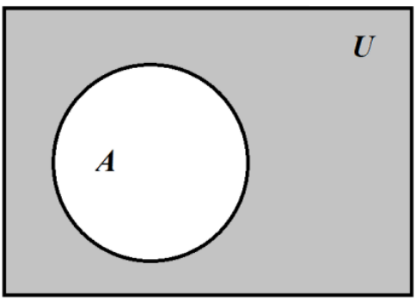


Рис. 1.5. $\overline{A}$.

1.3. Основні закони множинних операцій.

Операції над множинами мають деякі властивості, які виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного вмісту множин, що входять у них, і є підмножинами деякого універсуму U. Для будь-яких множин A, B та C справедливі наступні властивості:

- *ідемпотентність* (*самопоглинання*)
  $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
- *комутативність*
  $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
- *асоціативність*
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *дистрибутивність*
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *поглинання*
  $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
- *властивості* $\varnothing$ *та* U
  $\mathrm{A} \cup \varnothing = \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing$
  $\mathrm{A} \cup \overline{A} = \mathrm{U}$ $\mathrm{A} \cap \overline{A} = \varnothing$
  $\mathrm{A} \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$ $\mathrm{A} \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$
  $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$ $\overline{U} = \varnothing$
- *закони де Моргана*
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *властивості доповнення, різниці, симетричної різниці*
  $\overline{\overline{A}} = \mathrm{A}$ (*інволютивність*)
  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
  $A \div B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
  $A \div B = B \div A$
  $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$
  $A \div \varnothing = \varnothing \div A = A$

Доведення цих співвідношень можна ґрунтувати на критерій рівності множин (лемі 1.1) або доводити за допомогою побудови діаграм Венна для лівої та правої частин співвідношень.

Наприклад, доведемо асоціативний закон операції перетину: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Доведення.

Нехай $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ і $x \in B$ і $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B)$ і $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$, звідси випливає включення $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Аналогічно доводиться обернене включення: нехай $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A$ і $x \in B$ і $x \in C \Rightarrow x \in A$ і $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$, звідси випливає $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

З обох отриманих включень за критерієм рівності множин (див. лему 1.1) слідує, що $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. *Рівність доведено*.

1.4. Контрольні питання до розділу 1.

1. Що таке множина?
2. Що таке елемент множини? Які позначення використовують для запису належності та неналежності елемента множині?
3. Дайте означення рівних множин. Як довести, що дві множини рівні?
4. Дайте означення підмножини, власної підмножини та надмножини. Які символи використовуються для їх позначення?
5. Що таке порожня множина? Сформулюйте та обґрунтуйте її ключові властивості.
6. Що таке універсальна множина (універсум)? Чому її вибір залежить від контексту? Наведіть приклади універсумів з різних розділів математики.
7. Що таке булеан деякої множини *A*?
8. Які існують способи задання множин? Наведіть конкретні приклади для кожного способу.

9. Чи може одна й та сама множина бути задана різними способами? Наведіть приклад.
10. Наведіть приклади різних нескінченних множин, задавши їх за допомогою характеристичної властивості.
11. Дайте означення бінарних операцій над множинами. Назвіть їх. Дайте означення унарної операції. Яка операція є унарною?
12. Дайте означення об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці та доповнення. Як позначається кожна з цих операцій?
13. Що таке діаграми Венна (Ейлера) та для чого вони використовуються теорії множин?
14. Які закони операцій над множинами ви знаєте?
15. Що таке діаграми Венна (Ейлера) та для чого вони використовуються?

1.5. Приклади типових задач до розділу 1.

Приклад 1. Довести, що множина *A* всіх додатних парних цілих чисел дорівнює множині *B* усіх додатних цілих чисел, що подаються у вигляді суми двох додатних непарних цілих чисел.

Розв'язування.

Припустимо, що $x \in A$ і доведемо, що $x \in B$. Якщо $x \in A$, то $x = 2m$, або $x = (2m-1)+1$. Це і означає, що $x \in B$.

Припустимо тепер, що $x \in B$ і виведемо звідси, що $x \in A$. Якщо $x \in B$, то $x = (2p-1)+(2q-1)$, звідки $x = 2(p+q-1)$, з чого випливає, що $x \in A$.

Таким чином, ми довели, що множини *A* і *B* складаються з одних і тих самих елементів.

Приклад 2. Чи існують підмножини *A*, *B* і *C* універсальної підмножини *U*, для яких одночасно мали б місце такі співвідношення:

$$C \neq \varnothing, \quad A \bigcap B \neq \varnothing, \quad A \bigcap C = \varnothing, \; (A \bigcap B) \setminus C = \varnothing.$$

Розв'язування.

З другої умови випливає, що A і B перетинаються, з чого стає зрозумілим, що обидві множини не порожні. Четверта умова говорить про те, що $A \bigcap B \subseteq C$. З цього видно, що перша умова зайва. З одного боку, $A \bigcap B$ входить до C, а з іншого – $A \bigcap C$ є порожньою множиною. Це суперечність. Отже, множини, що задовольняють усім наведеним умовам, не існують.

Приклад 3. Використовуючи діаграми Венна, перевірити чи виконується рівність: $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Розв'язування.

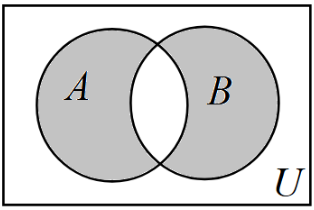


Рис. 1.6. $A \div B$

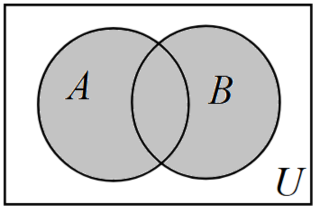


Рис. 1.7. $A \cup B$

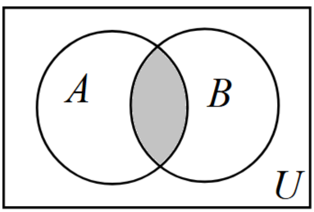


Рис. 1.8. $A \cap B$

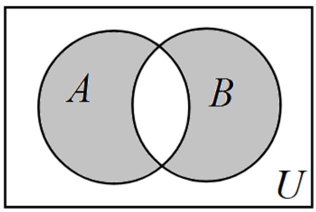


Рис. 1.9. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Оскільки графічне представлення множин у лівій (рис. 1.6) та правій (рис. 1.9) частинах рівності є однаковим, можна зробити висновок, що рівність виконується.

Приклад 4. Довести тотожність: $A \cup A = A$.

Розв'язування.

$$A\cup A=(A\cup A)\cup U=(A\cup A)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup(A\cap\overline{A})=A\cup\varnothing=A.$$

Приклад 5. Використовуючи основні закони алгебри множин, спростити вираз:

$$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}.$$

Розв'язування.

$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}=$ *дистрибутивний закон*

$=\left[(B\cap C)\cap(A\cup\overline{A})\right]\cup\overline{B}\cup\overline{C}=$ *закон виключення третього*

$=\left[(B\cap C)\cap U\right]\cup\overline{B}\cup\overline{C}=$ *закон де Моргана*

$=\left[(B\cap C)\right]\cup\overline{B\cap C}=U.$ *закон виключення третього*

Приклад 6. У групі із 100 туристів 70 людей знають англійську мову, 45 знають французьку мову і 23 – знають дві мови. Скільки туристів в групі не знають ні англійської, ні французької мови?

Розв'язування.

Позначимо: U – універсальна множина, тобто множина усіх туристів; A – множина туристів, як знають англійську мову; B – множина туристів, які знають французьку мову.

Необхідно знайти кількість туристів, які не знають жодної мови, тобто кількість елементів множини $D = U \setminus (A\cup B)$ (заштриховано на рисунку 1.10).

Тоді за умовою: $|U|$ = 100 (люд.); $|A|$= 70 (люд.); $|B|$= 45 (люд.); $|A\cap B|$ = 23 (люд.). Необхідно знайти $|D|=|U|-|A\cap B|$.

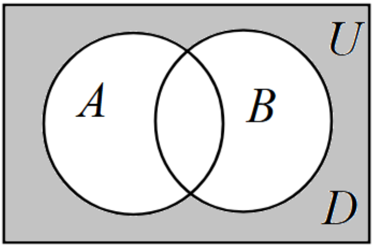


Рис. 1.10. Діаграма Венна до прикладу 5.

Використовуючи формулу, знаходимо кількість туристів, які знають хоча б одну мову:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 70 + 45 - 23 = 92 \text{ (люд.)}.$$

Отже кількість туристів, які не знають жодної мови:

$$|D| = 100 - 92 = 8 \text{ (люд.)}.$$

1.6. Вправи до розділу 1.

1. Які з поданих тверджень вірні для всіх множин A, B і С?
   a) якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$;
   b) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$;
   c) якщо $A \in B$ і невірно, що $B \subseteq C$, то $A \in C$;
   d) якщо $A \subset B$ і $B \subseteq C$, то невірно, що $C \subseteq A$;
   e) якщо $A \subseteq B$ і $B \in C$, то $A \not\subset C$?

2. Перелічити всі елементи множини $A = \{\{1,2\},\{3\},1\}$.

3. Довести істинність кожного з поданих тверджень для довільних множин A, B і C:
   a) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
   b) якщо $A \subseteq B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;
   c) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

4. Які з наведених нижче співвідношень хибні і чому?
   a) $x \in \{2, a, x\}$;

b) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$;

c) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$.

5. Чи рівні між собою множини *A* і *B*?

a) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;

b) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$;

c) $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 3\}$;

d) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}, 6\}$;

e) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

6. Чи пов'язані множини *A* і *B* відношенням включення?

a) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, c, d\}$;

b) $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{a, e, c\}$;

c) $A = \{c, d, e\}$, $B = \{c, a\}$.

7. В яких відношеннях перебувають між собою множини: $A = \{1, 3\}$; *B* – множина непарних додатних чисел; *C* – множина розв'язків рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$?

8. Для множини перших 20 натуральних чисел запишіть такі її підмножини: *A* – парних чисел; *B* – непарних чисел; C – квадратів чисел; *D* – простих чисел. В яких відношеннях перебувають ці підмножини?

9. Довести, що для будь-яких множин *A* і *B* справедливе твердження: $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B$.

10. Нехай *A* – довільна множина. Що являють собою такі множини: $A \cap \varnothing$, $A \cup \varnothing$, $A \setminus \varnothing$, $A \setminus A$, $\varnothing \setminus A$?

11. Визначити: $\varnothing \cap \{\varnothing\}$; $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$; $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$; $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$.

12. Нехай *A* і *B* – підмножини множини *U*. Покажіть, що для наведеної нижче системи співвідношень (*a*, *b*, *c*) зі справедливості одного співвідношення системи випливає справедливість інших співвідношень даної системи:

a) $A \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$;

b) $A\cap B=\varnothing, A\subseteq \overline{B},\ B\subseteq \overline{A}$;

c) $A\cup B=U,\ \overline{A}\subseteq B,\ \overline{B}\subseteq A$.

13. Довести, що для довільних множин A, B і C виконується рівність: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

14. Довести, що для довільних множин A, B і C виконується рівність: $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

15. Побудувати діаграму Венна, що відповідає симетричній різниці $A\div\overline{B}=(A\setminus\overline{B})\cup(\overline{B}\setminus A)$.

16. За допомогою діаграм Венна довести комутативність і асоціативність операції симетричної різниці.

17. Показати, що для будь-якої множини A виконуються рівності: $A\setminus A=\varnothing,\ A\div\varnothing=A,\ A\div A=A$.

18. За допомогою діаграм Венна довести, що для довільних множин A, B і C виконується твердження:

Якщо $A\cap B\subseteq\overline{C}$ і $A\cup C\subseteq B$, то $A\cap C=\varnothing$.

19. Доведіть, що множини A і B рівні тоді й лише тоді, коли їх симетрична різниця дорівнює порожній множині: $A\div B=\varnothing$.

20. Як за допомогою операцій об'єднання, перетину та доповнення виразити операцію різниці $A\setminus B$? Операцію симетричної різниці $A\div B$?

21. Чи може симетрична різниця трьох множин $(A\div B)\div C$ бути порожньою, якщо всі три множини A, B, C різні та непорожні? Наведіть приклад або доведіть неможливість.

22. Довести, що для довільних множин A, B, C, D і X виконуються рівності:

a) $\overline{(\overline{A}\cap X)\cup(\overline{B}\cap X)}=(A\cup\overline{X})\cap(B\cup\overline{X})$;

b) $(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X})\cup(C\cap X)\cup(D\cap\overline{X})=$

$=[(A\cup C)\cap X]\cup[(B\cup D)\cap\overline{X}]$;

$$\text{c)}\ [(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X})]\cap[(C\cap X)\cup(D\cap\overline{X})]=$$
$$=[(A\cap C)\cap X]\cup[(B\cap D)\cap\overline{X}].$$

23. Записати за допомогою операцій над множинами вирази для множин, що відповідають заштрихованим областям діаграм Венна на рисунках 1.11 *а, б*, *в*.

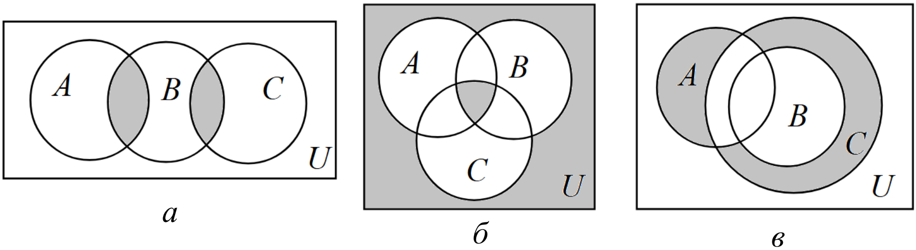


Рис. 1.11. Діаграми Венна для трьох множин *A, B, C*

24. З 40 речень 30 містять прийменник «в», 27 прийменник «на», в п'яти реченнях немає ні того, ні іншого. Скільки речень містять обидва прийменники?

25. У кондитерському магазині відвідувачі зазвичай купують або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. В один із днів було продано 57 тортів і 36 коробок цукерків Скільки було покупців, якщо 12 чоловік купили і торт, і коробку цукерків?

26. У 92-процесорній ЕОМ 19 мікропроцесорів обробляють текстову інформацію, 17 – графічну, 11 – символьну, 12 – мікропроцесорів одночасно обробляють графічну та текстову, 7 – текстову та символьну, 5 – графічну та символьну, а частина мікропроцесорів одночасно обробляє графічну, текстову і символьну інформацію. Скільки мікропроцесорів є універсальними, якщо при розв’язуванні задачі не задіяні 67 мікропроцесорів.

27. В олімпіаді з іноземної мови брали участь 40 студентів, для них було запропоновано відповісти на одне питання з лексикології, одине з країнознавства і одне по стилістиці. Результати перевірки відповідей представлені в таблиці:

Отримані правильні відповіді на питання	Кількість відповівших
з лексикології	
з країнознавства	18
з стилістики	18
з лексикології і країнознавства	7
з лексикології і стилістики	8
з країнознавства і стилістики	9

Відомо також, що троє не дали правильних відповідей ні на одне питання. Скільки студентів правильно відповіли на всі 3 питання? Скільки студентів правильно відповіли на 2 питання?

28. Скільки з 30 студентів групи за вільним навчальним планом вивчають три дисципліни, якщо відомо, що 19 студентів вивчає теорію алгоритмів (ТА); 17 – теорію випадкових процесів (ТВП); 11 – теорію складності обчислень (ТСО); 12 – ТА і ТВП; 7 – ТА і ТСО; 5 – ТВП і ТСО і 5 студентів навчається за типовим планом.

РОЗДІЛ 2
ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартовий добуток множин.

Декартовим (***прямим***) ***добутком*** множин A і B ($A\times B$) називається множина всіх пар (a, b), в яких перший компонент належить множині A ($a\in A$), а другий – множині B ($b\in B$):

$$A\times B = \{(a, b) \mid a\in A \text{ і } b\in B \}.$$

Декартовий добуток природно узагальнюється на випадок довільної скінченної сукупності множин. Якщо A_1, A_2,..., A_n – множини, то їх декартовим добутком називається множина

$$D = \{ (a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1\in A_1, a_2\in A_2,..., a_n\in A_n \},$$

яка складається з усіх наборів (a_1, a_2, ..., a_n), в кожному з яких i-й член, що називається ***i-ю координатою*** або ***i-м компонентом*** набору, належить множині A_i, i=1, 2,..., n. Декартовий добуток n множин позначається через $A_1\times A_2\times...\times A_n$.

Набір (a_1, a_2, ..., a_n), щоб відрізнити його від множини, яка складається з елементів a_1, a_2, ..., a_n, записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають ***кортежем***, ***вектором*** або ***впорядкованим набором***. ***Довжиною*** кортежу називають кількість його координат. Два кортежі (a_1, a_2, ..., a_n) і (b_1, b_2, ..., b_n) однакової довжини вважаються ***рівними*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати, тобто $a_i=b_i$, i=1, 2, ..., n.

Декартовий добуток множини A на себе n разів: $A\times A\times...\times A$ називають ***n-м декартовим*** (або ***прямим***) ***степенем*** множини A і позначають A^n.

Вважають, що $A^0 = \varnothing$ (n=0) і $A^1 = A$ (n=1).

Якщо R – множина дійсних чисел або множина точок координатної прямої, то R^2 – це множина пар (a,b), де $a,b\in R$, або множина точок координатної площини.

Скінченна множина A, елементами якої є символи (літери, цифри, спеціальні знаки тощо), називається ***алфавітом***. Елементи декартового степеня A називаються ***словами*** довжини n в алфавіті A. Множина всіх слів в алфавіті A – це множина $A^* = \{e\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup ... = \{e\} \cup \bigcup_{i \in N} A^i$, де e – порожнє слово (слово довжини 0), тобто слово, яке не містить жодного символу алфавіту A.

Замість запису слів з A^n у вигляді кортежів $(a_1, a_2, ..., a_n)$ частіше використовують традиційну форму запису слів у вигляді послідовності символів $a_1a_2...a_n$, $a_j \in A$, $j=1,2,...,n$. *Наприклад*, 010111, 011, 0010, 100, 010 – слова в алфавіті $B = \{0,1\}$, а 67-35, (450+12)/27, 349*2+17 – це слова в алфавіті $C = \{0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9,+,-,*,/,(,)\}$.

Операція декартового добутку неасоціативна і некомутативна, тобто множини $(A \times B) \times C$ і $A \times (B \times C)$, а також множини $A \times B$ і $B \times A$, в загальному випадку нерівні між собою.

Для декартового добутку справедливі властивості дистрибутивності відносно операцій об'єднання та перетину:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

2.2. Основні поняття теорії відношень.

Довільна підмножина R множини $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називається ***відношенням***, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, ..., A_n$. Якщо $A_1=A_2=...=A_n=A$, тобто річ йде про декартовий добуток n-ого степеня множини A, то відношення R, яке задано на множинах $A_1=A_2=...=A_n$, називається n-арним відношенням на множині A.

Коли $(a_1, a_2, ..., a_n)\in R$, то говорять, що елементи a_i (i=1, .., n) знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для $a_1, a_2, ..., a_n$. Якщо $(a_1, a_2, ..., a_n)\notin R$, то вважають, що R хибне для $a_1, a_2, ..., a_n$.

При n=1 відношення називається унарним, при n=2 – бінарним, при n=3 – тернарним.

Загалом відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. У математиці та інформатиці найчастіше вивчають та використовують саме бінарні (двомісні) відношення. Приклади бінарних відношень: відношення належності, включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Частіше за все бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень aRb, де R – відношення, яке встановлює зв'язок між елементами $a\in A$ та $b\in B$.

Область визначення відношення R на A та B є множина всіх $a\in A$ таких, що для деяких $b\in B$ маємо $(a, b)\in R$. Іншими словами, область визначення R є множина всіх перших координат впорядкованих пар із R. ***Множина значень*** відношення R на A та B є множина всіх $b\in B$ таких, що $(a,b)\in R$ для деяких $a\in A$. Іншими словами, множина значень R є множина всіх других координат впорядкованих пар із R.

Якщо область визначення відношення R співпадає з A, то відношення R називається ***всюди*** або ***повністю визначеним***. У противному разі – ***частково визначеним***.

Оскільки відношення є множинами, то для їх задання використовують ті самі методи, що й для довільних множин.

Крім того, відношення можна задавати за допомогою так званого ***графіка відношення***. Нехай $A=\{1,2,3,4,5\}$ і $B=\{a, b, c, d\}$, а $C = \{(1,a),(1,d),(2,c),(2,d),(3,b),(5,a),(5,b)\}$ – відношення між A і B. Позначимо через 1,2,3,4,5 вертикальні прямі, а через a, b, c, d – горизонтальні прямі на координатній площині (рис. 2.1). Тоді виділені вузли на перетині цих прямих позначають елементи відношення C і утворюють графік відношення.

Зручним методом задання невеликих скінчених відношень є ***графи відношень***. В одній колонці розташовують точки, позначені елементами множини A, у колонці праворуч – точки, позначені елементами множини B. З точки a першої колонки проводимо стрілку в точку b другої колонки тоді і тільки тоді, коли пара (a, b) належить заданій відповідності. На рисунку 2.2 зображено граф відношення C із попереднього абзацу.

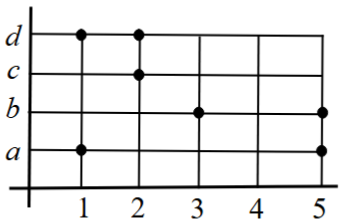


Рис. 2.1. Графік відношення C.

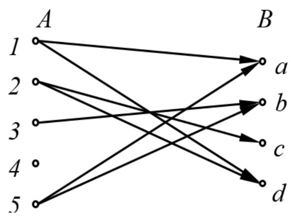


Рис. 2.2. Граф відношення C.

Відношення можна задавати, визначаючи співвідношення, яким мають задовольняти її обидві координати. *Наприклад*, якщо розглянемо класичну координатну площину $R^2=R\times R$, то маємо такі відношення $C_1=\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $C_2 = \{(x,y) \mid y = x^2\}$, $C_3 = \{(x,y) \mid |x|\leq 1 \ i \ |y|\leq 1\}$. Графіком відношення C_1 є коло радіуса 1 з центром у початку координат, графіком C_2 – квадратична парабола, а графіком C_3 – всі точки квадрата з вершинами (-1,-1), (-1,1), (1,1) і (1,-1).

Зручним способом задання бінарного відношення R на скінченній множині $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ є задання за допомогою ***матриці бінарного відношення***. Це квадратна матриця Δ

порядку n, в якій елемент δ_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, визначається так

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a_i \, R \, a_j; \\ 0, \text{ якщо } a_i \text{ та } a_j \text{ не перебувають у відношенні } R. \end{cases}$$

Наприклад, матриця бінарного відношення C, розглянутого вище, матиме порядок 5×4 (5 рядків для елементів A, 4 стовпці для елементів B) і виглядатиме наступним чином:

$$\Delta = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Цікавими є такі окремі випадки відношень, заданих на множині A:

Повне (універсальне) відношення $U=A\times A$, яке справджується для будь-якої пари (a_1, a_2) елементів з A. *Наприклад*, U – відношення «вчитися в одній групі» у множині A, де A – множина студентів групи КН-11.

Тотожне (діагональне) відношення I, що виконується тільки між елементом і ним самим. *Наприклад*, рівність на множині дійсних чисел.

Порожнє відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з A. *Наприклад*, R – відношення «бути братом» у множині A, де A – множина жінок.

Оскільки відношення є множинами, то до довільних відношень можуть бути застосовані всі відомі теоретико-множинні операції: об’єднання, перетин, різниця тощо.

Додатково для відношень визначають дві специфічні операції.

Відношенням, ***оберненим*** (***симетричним***) до заданого відношення R між множинами A і B, називається відношення R^{-1} між множинами B і A таке, що

$$R^{-1} =\{ (b,a) \mid (a,b)\in R \}.$$

Наприклад, A={1, 2, 3 ,4, 5}, B={a, b, c, d}, а відношення $R\subseteq A\times B$ задано так: $R=\{(1,a), (1,d), (2,c), (2,d), (3,b), (5,a), (5,b)\}$.

Знайдемо обернене відношення $R^{-1}\subseteq B\times A$:

$$\mathrm{R}^{-1}=\{(a,1), (d,1), (c,2), (d,2), (b,3), (a,5), (b,5)\}.$$

Якщо задано відношення $R_1\subseteq A\times B$ і $R_2\subseteq B\times C$, то ***композицією*** відношень R_1 і R_2 ($R_1\circ R_2$) називається відношення R між множинами A і C таке, що

$$R = \{ (a,c) \mid \text{існує елемент } b\in B \text{ такий, що } (a,b)\in R_1 \text{ і } (b,c)\in R_2 \}.$$

Наприклад, на множинах $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{x, y, z\}$, $C=\{a, b, c\}$ задано відношення:

$R_1\subseteq A\times B=\{(1,x), (2,y), (2,z), (3,y)\}$;

$R_2\subseteq B\times C=\{(x,a), (y,b), (z,c)\}$.

Знайдемо композицію відношень $R=R_1\circ R_2\subseteq A\times C$:

$$R_1\circ R_2=\{(1,a), (2,b), (2,c), (3,b)\}.$$

Слід зазначити, що операція композиції відношень може бути і невизначеною, якщо в множині B для заданих елементів a із A та c із C не існує відповідного елемента b. Але якщо $A=B=C$, то ця операція завжди визначена.

Крім того операція композиції не є комутативною. Загалом, $R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$. Навіть якщо множини дозволяють виконати обидві композиції, результати будуть різними.

Нехай R – відношення на множині A. Ступенем відношення R на множині A є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R\circ\ldots(n \text{ разів})\ldots\circ R.$$

Відповідно, $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R\circ R$ і взагалі $R^n = R^{n-1}\circ R$.

Теорема 2.1. Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то виконуються наступні тотожності (властивості операцій обернення та композиції):

а) $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$;

б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

в) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) $(R \circ R_1) \circ R_2 = R \circ (R_1 \circ R_2)$.

2.3. Властивості та спеціальні типи відношень.

Нехай R – бінарне відношення у множині A ($R \subseteq A \times A$). Тоді відношення R є:

1) ***Рефлексивним***, якщо для всіх $a \in A$ має місце aRa. Іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим. Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

2) ***Антирефлексивним*** (***іррефлексивним***), для жодного $a \in M$ не виконується aRa. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення «бути старшим» у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

3) ***Симетричним***, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення $a\,R\,b$ виконується співвідношення $b\,R\,a$. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення «бути братами» на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці відносно головної діагоналі. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

4) ***Асиметричним***, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень $a\,R\,b$ та $b\,R\,a$ щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення «бути батьком» у множині людей, відношення строго включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані тільки однією спрямованою дугою.

5) ***Антисиметричним***, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a\,R\,b$ та $b\,R\,a$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a = b$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

5) ***Транзитивним***, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто зі співвідношень aRb і bRc випливає виконання aRc. Як приклад можна навести відношення «бути дільником» на множині цілих чисел, «бути старшим» на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли δ_{ij}=1 й δ_{jk}=1, то δ_{ik}=1, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці. Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цією сукупністю в напрямку шляху.

Для довільного відношення R на множині A можна побудувати нові відношення, які є його *замиканнями* щодо основних властивостей:

- ***Рефлексивним замиканням*** R називається найменше рефлексивне відношення на A, яке містить R як підмножину;
- ***Симетричним замиканням*** R називається найменше симетричне відношення на A, яке містить R як підмножину;
- ***Транзитивним замиканням*** R називається найменше транзитивне відношення на A, яке містить R як підмножину.

Бінарне відношення на множині А називається ***відношенням еквівалентності***, якщо це відношення є *рефлексивним, симетричним* та *транзитивним*. Відношення еквівалентності будемо позначати символом "≡".

Прикладом відношення еквівалентності є відношення рівності чисел чи множин, геометричне відношення подібності трикутників, відношення паралельності прямих у евклідовому просторі. Відношення «жити в одному місті» є також відношенням еквівалентності. Множина всіх громадян (або мешканців) України, розбивається останнім відношенням на підмножини, що не перетинаються. Два мешканця вважаються еквівалентними по цьому відношенню, якщо вони живуть в одному й тому самому місті, тобто вони мають одну й ту саму властивість – «мешкати у місті Х». З іншого боку не можна жити одночасно в двох різних містах, тому множини мешканців різних міст не перетинаються. Таким чином відношення «жити в одному місті» розбиває множину всіх мешканців України на ряд підмножин, що не перетинаються, таких, що у кожній підмножині всі мешканці еквівалентні по цьому відношенню і жодні два мешканці різних підмножин не знаходяться у цьому відношенні, тобто не еквівалентні один одному. Такі підмножини мають назву класів еквівалентності.

Нехай $\equiv$ – відношення еквівалентності на A і $x \in A$. Тоді підмножина елементів множини A, які еквівалентні x, називається класом еквівалентності для x:

$$[x]_{\equiv} = \{y \mid y \in A, x \equiv y\}.$$

Лема 2.1 (Рефлексивність класу). Будь-який елемент належить своєму класу еквівалентності: для всіх $a \in A$, $a \in [a]$.

Лема 2.2 (Критерій рівності класів). Два елементи еквівалентні тоді й лише тоді, коли їхні класи еквівалентності збігаються: $a \equiv b \Leftrightarrow [a]=[b]$.

Лема 2.3 (Неперетинність різних класів). Різні класи еквівалентності не перетинаються: $a \not\equiv b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$.

Теорема 2.2. Всяке відношення еквівалентності на множині A визначає розбиття множини A, притому серед елементів розбиття немає порожніх. Це розбиття єдине. Зворотно, всяке розбиття множини A, яке не містить порожніх елементів, визначає відношення еквівалентності на множині A.

Бінарне відношення на множині A називається ***відношенням нестрогого порядку***, якщо воно *рефлексивне*, *антисиметричне* та *транзитивне*.

Часто відношення нестрогого порядку позначають як "$\leq$", оскільки нестрога нерівність є прикладом відношення нестрогого порядку в множині цілих чисел Z або дійсних чисел R. Як приклад відношення нестрогого порядку в множині людей можна назвати відношення «бути не старшим» або «бути не молодшим».

Бінарне відношення на множині A називається ***відношенням строгого порядку***, якщо воно *асиметричне* та *транзитивне*.

Для позначення відношення строгого порядку зазвичай використовується символ "<". Як приклад відношення строго порядку можна навести відношення строгої нерівності на множинах цілих або дійсних чисел, а також відношення «бути молодшим» або «бути старшим» у множині людей. Якщо виконується співвідношення $x<y$ (або $x\leq y$), то кажуть що елемент x передує y, а y іде за x.

Множина, в якій визначено відношення порядку (строгого або нестрогого), називається ***упорядкованою***, і кажуть, що порядок уведено цим відношенням.

Множина A називається ***лінійно*** (***абсолютно***) ***впорядкованою***, якщо для будь-яких двох її елементів x та y виконується $x<y$ або $y<x$ ($x\leq y$ або $y\leq x$). Лінійно впорядкована множина зі строгим порядком також називається ***ланцюгом***.

Наприклад, множина дійсних чисел з відношенням порядку "<" є лінійно впорядкованою.

Може виявитись, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x<y$ або $y<x$ не виконується. Такі елементи x та y називаються ***незрівнянними***. У цьому випадку кажуть, що множина є ***частково впорядкованою***.

2.4. Контрольні питання до розділу 2.

1. Дайте означення декартового добутку двох множин. Що таке впорядкована пара? У чому її відмінність від множини?
2. Що таке декартовий степінь множини A^n?

3. Чи виконуються властивості комутативності та асоціативності декартового добутку? Проілюструйте на прикладах.
4. Сформулюйте та проілюструйте прикладами властивості дистрибутивності декартового добутку відносно об'єднання та перетину множин.
5. Дайте загальне означення *n*-арного відношення. Що таке унарне, бінарне та тернарне відношення? Наведіть приклади для кожного типу.
6. Які є основні способи задання бінарного відношення на скінченних множинах? У яких випадках кожен із цих способів є найзручнішим?
7. Як задається бінарне відношення за допомогою матриць? Як задається бінарне відношення за допомогою графу?
8. Дайте означення та наведіть характерні приклади для кожного з понять: область визначення відношення; область значень; повністю визначене та частково визначене відношення; універсальне, діагональне та порожнє відношення.
9. Як виглядає матриця та граф:

   a) тотожного відношення;

   b) повного (універсального) відношення:

   c) порожнього відношення?
10. Назвіть основні властивості бінарних відношень.
11. Сформулюйте означення наступних властивостей бінарного відношення на множині *A*: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність. Для кожної властивості наведіть декілька прикладів.

12. Які особливості матиме матриця та граф рефлексивного, антирефлексивного, симетричного, асиметричного, антисиметричного, транзитивного відношення?
13. Дайте означення операцій обернення та композиції відношень. Проілюструйте кожну операцію конкретним прикладом.
14. Чому операція композиції, загалом кажучи, не є комутативною? Наведіть приклад, який це демонструє.
15. Що таке степінь відношення R^n? Як він пов'язаний з операцією композиції?
16. Що таке рефлексивне, симетричне та транзитивне замикання відношення?
17. Сформулюйте необхідні та достатні умови того, що відношення є відношенням еквівалентності. Наведіть 3-4 різних приклади відношень еквівалентності з різних галузей.
18. Дайте означення класу еквівалентності $[a]$. Сформулюйте та поясніть зміст основних лем про класи еквівалентності.
19. Сформулюйте теорему про взаємно однозначну відповідність між відношеннями еквівалентності на множині та її розбиттями на класи.
20. Дайте означення відношень нестрогого порядку та строгого порядку. У чому їхня принципова відмінність? Як вони пов'язані між собою?
21. Що таке лінійно впорядкована множина? Що таке частково впорядкована множина? Наведіть приклади обох типів.
22. Що означає, що елементи частково впорядкованої множини є незрівнянними? Наведіть приклад.

2.5. Приклади типових задач до розділу 2.

Приклад 1. Дати геометричну інтерпретацію відношення:

$$Q=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 4 \;\; i \;\; |x|\ge 1\right\}.$$

Розв'язування.

У цьому прикладі розглядаємо відношенням, яке задане системою двох умов, з'єднаних логічним сполучником «*і*». Розглянемо кожну умову окремо.

- На координатній площині зображаємо множини точок: $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4\right\}$ – круг з центром у початку координат і радіусом 2.
- $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\ge 1\right\}$ – зовнішність вертикальної смуги між прямими x = -1 та x = 1.

Оскільки у заданні є сполучник «*і*», то шукаємо перетин множин A і B. Результат продемонстровано на рисунку 2.3.

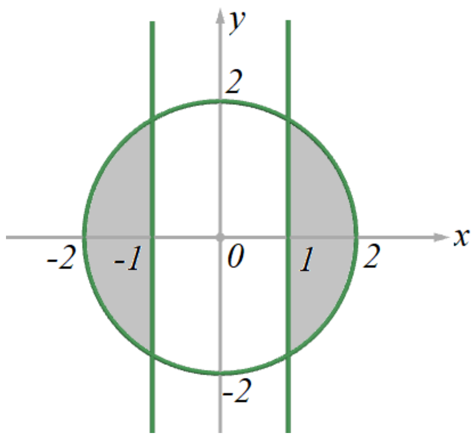


Рис. 2.3. Графічна інтерпретація відношення.

Приклад 2. Визначити, чи відношення R на множині A={0, 1, 2, 3} рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне.

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)\}.$$

Розв'язування.

Відношення є *рефлексивним*, якщо для кожного елемента a з множини $\{0,1,2,3\}$ пара (a, a) міститься у заданому відношенні, що справджується для всіх чотирьох випадків: (0,0), (1,1), (2,2) та (3,3) присутні у R.

Відношення є *симетричним*, якщо для кожної пари $(a,b) \in R$ обернена пара (b,a) також належить R. Маємо $(1,2) \in \mathrm{R}$, але $(2,1) \notin \mathrm{R}$. Це контрприклад, тому симетричність не виконується.

Відношення є *антисиметричним*, якщо $a \neq b$, то не може бути одночасно $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$. Маємо $(0,1) \in R$ і $(1,0) \in R$. Це є порушенням умови, тому антисиметричність не виконується.

Відношення є *транзитивним*, якщо для будь-яких трьох елементів з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, випливає, що $(a,c) \in R$. Маємо $(2,0) \in R$ і $(0,1) \in R$, але $(2,1) \notin R$. Це контрприклад, тому транзитивність не виконується.

Отже, відношення R володіє лише однією з чотирьох розглянутих властивостей – рефлексивністю.

Приклад 3. Побудуйте на множині $A = \{a, b, c, d\}$ відношення R, яке рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне.

Розв'язування.

Оберемо всі діагональні пари (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) для виконання умови рефлексивності.

Для виконання властивості антисиметричності додамо пари елементів: $(a,b) \in R$, але $(b,a) \notin R$; $(b,c) \in R$, але $(c,b) \notin R$; $(c,a) \in R$, але $(a,c) \notin R$. Таким чином жодні два різні елементи не мають взаємних пар, тому антисиметричність виконується.

Перевіряємо чи виконується умова транзитивності. Маємо $(b,c) \in R$ і $(c,a) \in R$. За транзитивністю має бути $(b,a) \in R$, але такої пари немає. Отже, відношення не транзитивне.

В результаті отримали відношення із заданим переліком властивостей:

$$R = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c), (c,a) \}.$$

Приклад 4. На множині $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано відношення:

$$R = \{ (x, y) \mid x>y \};$$

$$Q = \{ (x, y) \mid x \text{ і } y \text{ непарні}\}.$$

Побудувати матрицю та граф відношення $R^{-1} \cup Q^{-1}$.

Розв'язування.

Визначаємо пари (x, y), які належать відношенням R і Q:

$R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$;

$Q = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$.

Знаходимо обернені відношення R^{-1} і Q^{-1}:

$R^{-1}=\{(1,2), (1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\}$;

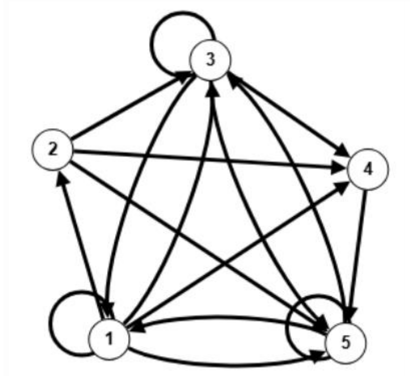
$Q^{-1}=\{(1,1), (1,3) ,(1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$.

Виконуємо операцію об'єднання:

$R^{-1} \cup Q^{-1}=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,3), (3,4), (3,5), (4,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$.

Матриця та граф відношення $R^{-1} \cup Q^{-1}$ матимуть вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.6. Вправи до розділу 2.

1. Дайте геометричну інтерпретацію відношень:

$a)\ \{(x,y)\in R^2\,|\,y=x\};$

$b)\ \{(x,y)\in R^2\,|\,y\geq x\};$

$c)\ \{(x,y)\in R^2\,|\,0\leq x\leq 1\ \textit{або}\ 0\leq y\leq 1\};$

$d)\ \{(x,y)\in R^2\,|\,0\leq x\leq 1\ i\ 0\leq y\leq 1\}.$

2. Доведіть, що

$a)\ (A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D);$

$b)\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C);$

$c)\ (A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D);$

$d)\ A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C).$

3. Знайти $R^{-1}, R\circ R, R\circ R^{-1}, R^{-1}\circ R$ для відношень:

$a)\ R=\{(x,y)\,|\,x,y\in N;\ x\textit{ділить}y\};$

$b)\ R=\{(x,y)\,|\,x,y\in D; x+y\leq 0\}.$

4. На множині $X = \{a, b, c, d\}$ задані відношення:

R={(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (c,c), (d,d)};

Q={(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (d,a), (d,b), (d,c)}.

Побудуйте матриці та графи відношень:

$a)\ (R\cup Q)\setminus(R\cap Q);$

$b)\ (R\cap Q)^{-1};$

$c)\ (R\cup Q)^{-1}.$

5. Побудуйте бінарні відношення, їх матриці та графи:

a) рефлексивне, симетричне, не транзитивне;

b) рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне;

c) рефлексивне, транзитивне, антисиметричне;

d) антисиметричне, транзитивне, іррефлексивне.

6. Побудуйте граф і список елементів для відношень, визначених на множині $A=\{a,b,c,d\}$ матрицями. Визначте характеристики відношень.

$a)\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ $c)\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

7. Знайдіть відношення R^{-1}, якщо відношення R задане таким чином:

a) $(a,b)\in R$, якщо $a,b\in N$, $a>b$;

b) $(a,b)\in R$, якщо $a,b\in N$, a – дільник b;

c) A – множина країн світу; $(a,b)\in R$, якщо $a,b\in A$ і країна a межує з b.

8. Визначити, чи відношення R на множині усіх людей рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне, де $(a,b)\in R$, якщо:

a) a вищий, ніж b;

b) a та b народилися в один і той самий день;

c) a має те саме прізвище, що і b;

d) a та b мають спільних дідуся і бабусю.

9. На множині M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} задано відношення:

$(m, n)\in R_1 \Leftrightarrow m+n$ парне число;

$(m, n)\in R_2 \Leftrightarrow m*n$ непарне число.

Побудувати графи, матриці та визначити вид відношень:

a) $R_1\cup R_2$;

b) $R_1\div R_2$;

c) $R_1\circ R_2$;

d) $R_1^{-1}\backslash R_2$.

10. Визначити, чи відношення R на множині цілих чисел

рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, де $(x, y) \in R$, якщо:

a) $x \neq y$;

b) $xy \leq 1$;

c) $x = y + 1$ або $x = y - 1$;

d) x та y обидва від’ємні чи невід’ємні;

e) $x = y^2$;

f) $x \geq y^2$.

11. Довести, що відношення R на множині A рефлексивне тоді і лише тоді, коли обернене відношення R^{-1} рефлексивне.

12. Які з наведених нижче відношень на множині A={0, 1, 2, 3} являють собою відношення еквівалентності? Зазначити чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

a) R_1 = {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)};
b) R_2 = {(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,0), (2,3), (3,2), (3,3)};
c) R_3 = {(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)};
d) R_4 = {(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)}.

13. На множинах N і $N \times M$ визначено відношення R_m, Q, S наступним чином:

a) $(a,b) \in R_m \Leftrightarrow (a-b) / m (m > 0)$;

b) $\big((a,b),(c,d)\big) \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$;

c) $\big((a,b),(c,d)\big) \in S \Leftrightarrow$

$$\Big[\big((a \cdot d = b \cdot c)\ i\ b \neq 0\ i\ d \neq 0\big)\ \textit{або}\ (a = c, b = 0, d = 0)\Big].$$

Довести, що R_m, Q, S – відношення еквівалентності.

14. Нехай A – не порожня множина, f – функція, означена на множині A. Відношення R складається з усіх упорядкованих пар

(x, y) таких, що $f(x) = f(y)$:

a) довести, що R – відношення еквівалентності на A;

b) які класи еквівалентності породжує відношення R?

15. Нехай A – не порожня множина, R – відношення еквівалентності на A. Довести, що існує така функція, означена на множині A, що $(x, y) \in R$ тоді і лише тоді, коли $f(x) = f(y)$.

16. Які з наведених нижче матриць подають відношення еквівалентності:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

РОЗДІЛ 3
ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН

3.1. Відображення. Типи відображень.

Бінарне відношення f на множині A називається ***функціональним***, якщо для всіх $a, b, c \in A$ виконується:

$$(a,b) \in f \;\; i \;\; (a,c) \in f \;\Rightarrow\; b = c.$$

Іншими словами: відношення f не повинно містити різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами.

Наприклад:

1) $R = \{(a,b), (c,d), (q, h), (f,h)\}$ – функціональне відношення;
$S = \{(a,b), (c,d), (e,d), (c,b)\}$ – не функціональне відношення.

2) $R = \left\{ \left(x,\ x^2\right) \mid x \in A \right\}$ – функціональне відношення;

$R^{-1} = \left\{ \left(x^2, x\right) \mid x \in A \right\}$ – не функціональне відношення .

Якщо відношення $f \subset A \times B$ – функціональне, то згідно з означенням кожний елемент $a \in A$ може перебувати у відношенні f лише з одним елементом множини B. Іноді функціональне відношення f також позначають у префіксному записі: $b = f(a)$, де $a \in A$, $b \in B$. Елементи a та b при цьому називаються ***функціонально залежними***.

Усяке функціональне відношення можна розглядати як функцію. При цьому перша координата a впорядкованої пари $(a, b) \in f$ є ***прообразом*** (аргументом, змінною), а друга b – ***образом*** (значенням). Потрібно розрізняти функцію f як множину впорядкованих пар (відношення) і значення функції $b = f(a)$ як другу координату однієї з таких пар.

Областю (***множиною***) ***визначення*** функції буде наступна множина:

$$\mathrm{Dom}\, f = \{a \in A \mid \exists\, b \in B,\ b = f(a)\}.$$

Областю **(*множиною*)** ***значень*** функції буде наступна множина:

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid \exists\, a \in A,\ b = f(a)\}.$$

Якщо $\operatorname{Dom} f = A$, то функціональне відношення f називається ***всюди визначеним***. Матриця функціонального відношення містить у кожному рядку не більше як один одиничний елемент, а його граф характеризується тим, що з кожної вершини може виходити тільки одна дуга (враховуючи й петлі).

Якщо функціональне відношення $f \subset A \times B$ всюди визначене на A, то його називають ***відображенням*** множини A в B і записують $f : A \to B$.

Відображення $f : A \to B$ називається (рис.3.1):

1) ***сюр'єктивним***, якщо для відображення $f : A \to B$ будь-який елемент b з B є образом принаймні одного елементу a з A, тобто:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A : b = f(a);$$

2) ***ін'єктивним***, якщо для відображення $f : A \to B$ для будь-яких двох різних елементів a_1 та a_2 з A їх образи b_1 та b_2 також різні, , тобто:

$$b = f(a_1) \text{ та } b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2;$$

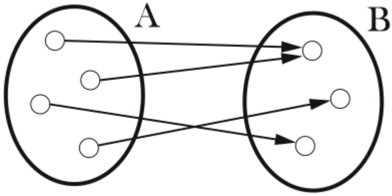
3) ***бієктивним*** (***взаємно однозначним***), якщо воно одночасно сюр'єктивне та ін'єктивне.

Іншими словами:

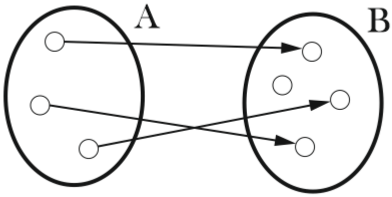
1) якщо відображення f – *сюр'єктивне*, то для всіх $b \in B$ існує хоча б один прообраз a із множини A;

2) якщо відображення f – *ін'єктивне*, то для всіх $b \in B$ існує не більше одного прообразу $a \in A$;

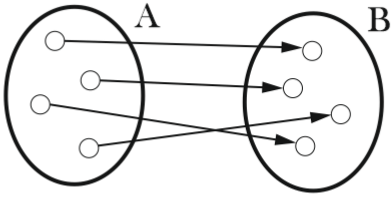
3) якщо відображення f – *бієктивне*, то для всіх $b \in B$ існує єдиний прообраз $a \in A$.



a) сюр'єкція



b) ін'єкція



c) бієкція

Рис. 3.1. Види відображень.

Теорема 3.1. Нехай f є відображення $f : A \to B$. Тоді справедливі наступні властивості відображень:

1) Якщо $X \subset Y$, то $f(X) \subset f(Y)$, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$,

2) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,

3) $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$, $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$,

4) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

5) $f^{-1}(\bar{X}) = \overline{f^{-1}}(X)$.

Якщо $f : A \to B$, $g : B \to C$, то їх композиція $(g \circ f)$: $A \to C$, причому $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Іншими словами, якщо існує множина пар $(a,b) \in f$ та $(b,c) \in g$, то множина пар $(a,c) \in f \circ g$ утворює композицію $(g \circ f)$. Запис $(g \circ f)$ проводиться в порядку, який є зворотнім до того, в якому виконується операції $f : A \to B$, $g : B \to C$. Таким чином, в математиці прийнято правило, згідно з яким композицію відображень $(g \circ f)$ треба починати з виконання операції f, яка розташована справа.

Наприклад, якщо $f = sin$, $g = ln$, то $(g°f)(a) = (ln°sin)(a) = ln(sin(a))$.

Легко показати, що композиція відображень асоціативна, тобто $(h°g)°f = h°(g°f)$ і записується у вигляді $h°g°f$. Так само легко з'ясувати, що композиція відображень не комутативне (це випливає з означення композиції відображень).

Теорема 3.2. Функція f є взаємно однозначним функціональним відношенням тоді і тільки тоді, коли f^{-1} – взаємно однозначне відношення.

Теорема 3.3. Композиція двох функціональних відношень є функціональним відношенням.

Теорема 3.4. Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тоді

а) якщо f і g – сюр'єкції A на B та B на C відповідно, то $g°f$ є сюр'єкцією A на C. Іншими словами, композиція двох сюр'єкцій – сюр'єкція.

б) якщо f і g – ін'єкції, то $g°f$ є ін'єкцією. Іншими словами, композиція двох ін'єкцій – ін'єкція.

в) якщо f і g – бі'єкції, то $g°f$ є бі'єкцією. Іншими словами, композиція двох бі'єкцій – бі'єкція.

Функція, що утворюється з функцій f_1, f_2,..., f_n деякою підстановкою їх одна в одну і перейменуванням аргументів, називається суперпозицією f_1, f_2,..., f_n.

Наприклад, Нехай $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$. Тоді суперпозиція $(g \circ f)(x) = \sin (x^2)$. Ще можливий варіант $(f \circ g)(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2 x$.

3.2. Визначення потужності множин.

Поняття потужності множин пов'язано з оцінкою кількості елементів у них. У скінченій множині кількість елементів можна перерахувати. Кількість елементів у множині A позначається як $|A|$. Наприклад, якщо $A=\{a, b, c\}$, то $|A|=3$. Якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі скінчені множини, які мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні по кількості елементів у них і визначають один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності може бути позначений натуральним числом, яке визначає кількість елементів у множині. Всі одноелементі множини утворюють один клас еквівалентності, двоелементі – другий і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, який об'єднує всі скінчені множини із кількістю елементів, що дорівнює даному числу.

Відношення еквівалентності, яке визначається взаємно однозначною відповідністю двох множин, називається ***рівнопотужністю***, а клас еквівалентності рівнопотужних множин називається ***потужністю*** цих множин або ***кардинальним числом***.

Потужність множини A позначається card$A$. Кількість елементів скінченої множини також називається потужністю, тоді card$A$=$|A|$. Очевидно, що потужність скінченної множини дорівнює нулю: $|\varnothing| = 0$.

Множини A і B називаються ***рівнопотужними (еквівалентними)***, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність (бієктивне відображення) $f : A \to B$.

Рівнопотужні множини позначають: A~B, або $|A|=|B|$.

Теорема 3.5 (Кантора-Бернштейна). Нехай A та B – дві довільні нескінченні множини. Тоді:

а) або існує ін'єкція із A в B, або існує ін'єкція із B в A (одне не виключає інше),

б) якщо існують ін'єкції $A \to B$ та $B \to A$, то існує бієкція із A в B.

Іншими словами, якщо множина A рівнопотужна деякій підмножині множини B, а множина B рівнопотужна деякій підмножині множини A, то A та B рівнопотужні.

Ця теорема має наступні наслідки.

1) Якщо існує ін'єкція $A \to B$, але не існує ін'єкція $B \to A$, то множина B має потужність, яка строго більша потужності A:

$$\mathrm{card}B > \mathrm{card}A.$$

2) Якщо існує ін'єкція $B \to A$, але не існує ін'єкція $A \to B$, то множина B має потужність, яка строго менша потужності A:

$$\mathrm{card}B < \mathrm{card}A.$$

3) Якщо існує бієкція із A в B, то множини A та B рівнопотужні:

$$\mathrm{card}B = \mathrm{card}A.$$

Потужність нескінченої множини називається ***трансфінітним кардинальним числом***, або просто ***трансфінітним числом***.

3.3. Зліченні множини.

Потужністю зліченої множини називається потужність множини натуральних чисел N. ***Зліченою*** називається всяка множина A, рівнопотужна множині натуральних чисел N. Потужність зліченої множини позначається кардинальним трансфінітним числом $\aleph_0$ (читається: *алеф-нуль*).

Наприклад, зліченним є множини:

1) $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ – парних натуральних чисел;

2) $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ – цілих чисел;

Інакше злічену множину можна визначити як множину, елементи якої можна розташувати у вигляді списку (навіть, якщо цей список буде нескінченним). Тоді кожному елементу множини можна поставити у відповідність його порядковий номер у цьому списку, тобто може бути побудоване відображення із N в A $f(n)$: $N \to A$, де $n \in N$. Таке відображення називається ***нумерацією***. Очевидно, що пронумерувати можна будь-яку скінчену множину.

Теорема 3.6. Множина цілих чисел Z злічена.

Теорема 3.7. Множина раціональних чисел Q злічена.

Теорема 3.8. Потужність зліченої множини $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним кардинальним числом. Це означає, що будь-яка нескінчена множина A має принаймні одну злічену частину підмножину.

Теорема 3.9 (характеристична властивість нескінченних множин). Множина A тоді і лише тоді є нескінченною, коли вона еквівалентна деякій своїй підмножині, що не співпадає з A.

Зауваження. Остання теорема показує, що у випадку нескінченних множин порівнювати потужності не можна так, як це робиться для скінчених множин. Дійсно, це привело би до того, що кожна нескінченна потужність виявилась би меншою за саму себе.

На множині кардинальних чисел можна визначити операції додавання, добутку та піднесення у степінь:

1. *Додавання*. Нехай α та β кардинальні числа, а множини A та B мають відповідно потужності card$A=\alpha$ та card$B=\beta$. Якщо множини A та B не перетинаються, то потужність їх об'єднання дорівнює $\alpha+\beta$.

2. *Добуток.* Через $\alpha\cdot\beta$ позначається потужність декартового добутку $A\times B$. Іншими словами, добуток $\alpha\cdot\beta$ – це кардинальне число об'єднання α частин, які не перетинаються та кожна з яких має потужність β.

3. *Піднесення у степінь*. Через α^{β} позначається потужність множини A^B, тобто потужність множини усіх функціональних

відображень із B в A: $\mathrm{card}(B \to A) = \mathrm{card}(A^{\mathrm{B}}) = \mathrm{card}A^{\mathrm{card}B}$.

Теорема 3.10. Для будь-якого скінченого числа $m \geq 1$ виконуються рівності:

$$m \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{та} \quad \aleph_0{}^m = \aleph_0.$$

Наслідок теореми 3.10. Декартовий добуток скінченної або зліченної кількості зліченних множин – множина злічення.

Теорема 3.11. Об'єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин – множина злічення. Тобто якщо A_1, A_2, …, A_n, … – зліченні множини, то

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \text{– злічення множина.}$$

Теорема 3.12. Якщо α та β – кардинальні числа, такі що $\alpha \neq 0$ та $\beta \neq 0$, і якщо принаймні одне з них є трансфінітним, то сума $\alpha + \beta$ та добуток $\alpha \cdot \beta$ дорівнюють найбільшому з них, тобто:

$$\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}, \qquad \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}.$$

3.4. Незлічені множини.

Теорема 3.13. Якою б не була множина A, множина її підмножин має потужність, яка строго більша потужності A.

Ця теорема показує, що послідовність трансфінітних кардинальних чисел не обмежена.

Теорема 3.14 (Кантора). Множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незлічена.

Доведення. Для доведення скористаємось діагональним методом Кантора. Будемо представляти будь-яке число з інтервалу (0, 1) у вигляді нескінченого десяткового дробу. Скінчені дроби також можна представити у такому вигляді, наприклад, число 0.5 може бути записано як 0.49999...

Припустимо, що множина цих чисел злічена. Тоді їх можна записати у вигляді списку. Побудуємо цей список і запишемо його у вигляді таблиці, де представлені десяткові частини чисел:

	1	2	3	…	k	…
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1k}	…
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2k}	…
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3k}	…
…	…	…	…	…	…	…
a_k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	…	a_{kk}	…
…	…	…	…	…	…	…

Утворимо тепер нескінчене антидіагональне число $b = b_1b_2\ldots b_k\ldots$ за правилом: i-й розряд числа $b_i \neq a_{ii}9$. Якщо множина чисел з (0, 1) злічена, то побудоване число b повинно увійти у цей список з яким-небудь номером, наприклад, з номером k: $b=a_k$. Але це неможливо, тому що число b відрізняється від a_k діагональним елементом $b_k \neq a_{kk}$. Відповідно, множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незлічена. *Доведено*.

Потужність множини дійсних чисел інтервалу (0, 1) називається ***потужністю континууму***. Потужність континууму позначається $\aleph_1$ (алеф-один).

Наприклад, множини потужності континууму:

1) R – множина дійсних чисел;

2) IR – множина ірраціональних чисел;

3) множина всіх точок n-вимірного куба: $[0,1]^n$.

Теорема 3.15. Мають місце рівності:

$$m\cdot\aleph_1 = \aleph_0\cdot\aleph_1 = \aleph_1\cdot\aleph_1 = \aleph_1^m = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1, \text{ де } m\geq 1 \text{ – ціле число.}$$

При дослідженні потужностей нескінчених множин був встановлений той факт, що множина кардинальних чисел є лінійно впорядкованою. Лінійна впорядкованість означає, що для кожного кардинального числа існує кардинальне число, яке безпосередньо слідує за ним. $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним числом. Але нічого невідомо про те, яке трансфінітне число є наступним за $\aleph_0$. Існує тільки припущення, яке називається континуум-гіпотезою.

Континуум-гіпотеза. Кардинальне число $2^{\aleph_0}$ безпосередньо слідує за $\aleph_0$. Це означає, що $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ і між ними немає жодного іншого кардинального числа.

Намагання довести континуум-гіпотезу в якості теореми були безуспішні, а у 1963 році Коен довів, що континуум-гіпотеза нерозв'язана – її неможливо ні довести, ні спростувати, можна тільки прийняти її або протилежне їй твердження в якості аксіоми.

3.5. Контрольні питання до розділу 3.

1. Сформулюйте означення функціонального відношення. Чим воно відрізняється від звичайного бінарного відношення?
2. Що таке образ та прообраз елемента при відображенні? Наведіть приклад.
3. Дайте означення ін'єктивного відображення. Яку властивість має матриця (або граф) такого відношення?
4. Дайте означення сюр'єктивного відображення. Чи може воно бути не всюди визначеним?
5. Поясніть, чому бієктивне відображення є ключовим для поняття рівнопотужності множин.
6. Сформулюйте теорему Кантора-Бернштейна. Наведіть приклад її практичного застосування для доведення рівнопотужності двох множин.
7. Що таке кардинальне число? Тринсфінітне кардинальне число? Чим кардинальна арифметика відрізняється від звичайної?
8. Дайте два еквівалентні означення зліченної множини: одне через бієкцію, інше – через практичну нумерацію.

9. Доведіть, що множина цілих чисел Z є зліченною, явно побудувавши бієкцію з N або описавши алгоритм нумерації.
10. Доведіть, що множина раціональних чисел Q є зліченною.
11. Чому множина $N \times N$ є зліченною? Як цей факт використовується для доведення зліченності інших множин?
12. Сформулюйте та доведіть теорему: об'єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченним.
13. Сформулюйте та доведіть теорему: декартовий добуток двох (або скінченного числа) зліченних множин є зліченним.
14. Наведіть приклад нескінченної множини, яка не є зліченною.
15. Що таке характеристична властивість нескінченних множин? Наведіть приклад.
16. Чи може власна підмножина множини бути їй рівнопотужною? У яких випадках так, а в яких ні?
17. Що таке потужність континууму? Як вона позначається?
18. Детально поясніть діагональний метод Кантора для доведення незліченності інтервалу (0, 1).
19. Доведіть, що будь-який інтервал (a, b) на числовій прямій має потужність континууму, побудувавши явну бієкцію з (0, 1).
20. Доведіть, що вся множина дійсних чисел R має потужність континууму.
21. Чому множина ірраціональних чисел є незліченною? Якої вона потужності?
22. Наведіть приклад множини, потужність якої більша за континуум. Обґрунтуйте.

23. Що стверджує континуум-гіпотеза? Чому її неможливо ні довести, ні спростувати?
24. Чому множина точок квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ має потужність континууму, а не більшу?
27. Якщо множина A має потужність континууму, а B – зліченна, яку потужність має множина $A \setminus B$? Доведіть.

3.6. Приклади типових задач до розділу 3.

Приклад 1. Довести, що об'єднання скінченої кількості зліченних множин A_i , що не перетинаються ($A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$), є зліченною множиною.

Доведення.

Якщо елементи множини можна перенумерувати, то вона є зліченною. Тобто для доведення зліченності достатньо вказати спосіб, яким можна впорядкувати множину і призначити номер кожному її елементу.

Нехай n зліченних множин задано переліком елементів $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}$, …, $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\}$.

Спосіб нумерування зазначимо стрілками:

$$\begin{array}{lllll}
A_1 = \{ & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \ldots\} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
A_2 = \{ & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \ldots\} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
A_n = \{ & a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, \ldots\}
\end{array}$$

При нумерації по колонках спочатку нумеруємо перші елементи всіх n множин, потім другі елементи і так далі. Оскільки множини не перетинаються, кожному елементу a_{ij} відповідає єдиний номер. Така нумерація охоплює всі елементи об'єднання, доводячи його зліченність.

Приклад 2. Довести, що множина раціональних чисел Q зліченна.

Доведення.

Раціональне число – це число виду $\frac{p}{q}$, де $p \in Z$ (ціле число), $q \in N$ (натуральне). Спочатку покажемо, що множина додатних раціональних чисел Q^+ зліченна.

Запишемо нескінченну таблицю дробів $\frac{p}{q}$:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Для нумерації елементів використаємо діагональний обхід (нумерація за сумою $p+q$):

$p+q=2$: $\frac{1}{1}$;

$p+q=3$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$;

$p+q=4$: $\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$;

$p+q=5$: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$ і так далі.

Щоб уникнути повторень одних і тих же раціональних чисел (наприклад, $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$ або $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$) при нумерації можна пропускати дроби, які вже зустрічалося раніше (в іншому вигляді).

Таким чином, ми отримуємо список, що містить кожне додатне раціональне число рівно один раз. Цей список можна пронумерувати натуральними числами, а отже множина $Q+$ є зліченною.

Множина раціональних чисел $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q+$.

З теореми 3.11 відомо, що об'єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин зліченне.

Ми довели, що множина додатних раціональних чисел $Q+$ зліченна. Множина від'ємних раціональних чисел Q^- знаходиться у бієкції з $Q+$ через відображення $f{:}x \to -x$,отже Q^- також зліченна. {0} – скінченна множина.

Звідси, Q як об'єднання зліченних множин зліченна.

Приклад 3. Показати, що [0; 1] ~ [a; b] де $a \neq b$ – довільні дійсні числа.

Розв'язування.

Взаємно однозначне відображення з [0;1] на [a;b] показано на рисунку 3.2:

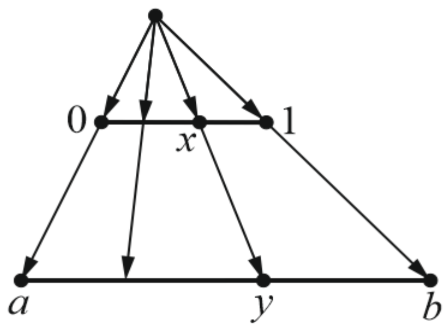


Рис. 3.2.

Зокрема, якщо сумістити точку a з точкою 0 на числовій осі, то таку взаємно однозначну відповідність здійснює, наприклад, лінійна функція вигляду $y=bx$ ("розтягування" або "стискання" відрізка).

Приклад 4. Довести, що множина дійсних чисел R має потужність континууму.

Доведення.

Досить показати, що інтервал дійсних чисел $(-\infty; +\infty)$ рівнопотужний інтервалу (0; 1), який має потужність континууму згідно теореми 3.14 (Кантора).

Спочатку знайдемо бієктивне відображення між множинами дійсних чисел $(0; 1) \to (0; \pi)$. Це буде лінійна функція $y = \pi x$.

Далі знайдемо бієктивне відображення між множинами дійсних чисел $(0; \pi) \to (-\infty; +\infty)$. Для цього підходять тригонометричні функції, які відображає скінчений інтервал на всю числову пряму, наприклад котангенс: $y=\mathrm{ctg}x$.

Для побудови відображення $(0; 1) \to (-\infty; +\infty)$, виконаємо суперпозицію отриманих функцій: $y=\mathrm{ctg}\,(\pi x)$.

Отримане взаємно однозначне відображення доводить рівнопотужність множин, а отже множина дійсних чисел R має потужність континууму

Приклад 5. Показати, що $(0;1) \sim (0;1)\times(0;1)$.

Розв'язування.

Нехай (x, y) – точка квадрата $(0;1)\times(0;1)$ (рис. 3.3).

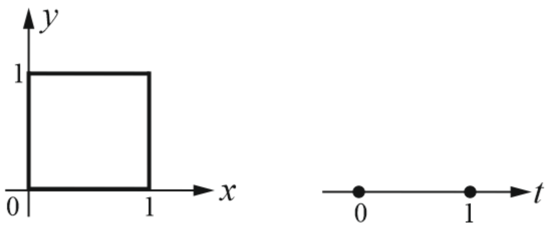


Рис. 3.3.

Тоді координата $x \in (0;1)$ і можна записати її як нескінченний десятковий дріб $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ Аналогічно $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$

Поставимо парі $(0.x_1x_2x_3\ldots; 0.y_1y_2y_3\ldots)$ у відповідність число $t = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots \in (0;1)$. Звідси отримуємо бієкцію між множинами $(0;1)\times(0;1)$ та $(0;1)$, що доводить рівнопотужність.

Отже, $(0;1)\times(0;1)$ – множина потужності континууму.

3.7. Вправи до розділу 3.

1. Які з наступних відповідностей на множині дійсних чисел R є функціональними?

a) $\left\{ (x,y) \middle| (x-3)^2 + (y-2)^2 \le 1 \right\}$;

b) $\left\{ (x,y) \middle| y^2 = x \right\}$

c) $\left\{ (x,y) \middle| y = x^2 \right\}$

d) англо-український словник (відповідність між словами);

e) позиція на шахівниці;

f) різні види кодування;

g) $\left\{ (x,y) \middle| y = \sin x \right\}$;

h) $\left\{ (x,y) \middle| x = \arcsin x \right\}$.

2. Нехай $|A|=m$, $|B|=n$. Визначити кількість ін'єктивних та кількість сюр'єктивних відображень з множини A в множину B.

3. Які з наступних відображень множини натуральних чисел в себе є ін'єктивними, сюр'єктивними, бієктивними:

a) $I(n)=n$;

b) $f(n)=2n+1$;

c) $g(n)=n+(-1)^n$;

d) $h(n)=\min\{n,100\}$;

e) $k(n)=\max\{0, n=3\}$.

4. Нехай A одна з трьох множин: раціональних, дійсних або комплексних чисел. $f:A\to A$ одна з чотирьох функцій: $f(x)=2x+3$; x^3-2; $(x-2)^3$; $x^{\frac{1}{3}}+7$. Які з цих 12 функцій є відображеннями? Для яких з цих відображень існують обернені?

5. Доведіть, що:

a) будь-яка підмножина зліченної множини – скінчена або зліченна;

b) об'єднання скінченого числа зліченних множин є зліченним;

c) об'єднання зліченного числа скінчених множин є зліченним;

d) об'єднання зліченного числа зліченних множин є зліченним.

6. Доведіть, що множина всіх дійсних алгебраїчних чисел (коренів многочленів з цілими коефіцієнтами) є зліченною.

7. Чи є множина всіх многочленів з цілими коефіцієнтами зліченною? Довести.

8. Доведіть, що множина всіх точок на площині з раціональними координатами $Q\times Q$ є зліченною.

9. Визначте потужність множини:

a) всіх зліченних послідовностей дійсних чисел;

b) всіх неперервних функцій на R

10. Доведіть рівнопотужність множин:

$a)$ $\left(0,1\right) \sim \left[0,1\right]$;

$b)$ $[0,1] \sim [a,b]$;

$c)$ $[a,b] \sim [c,d]$;

$d)$ $[a,b] \sim R$.

11. Доведіть, що множина всіх підмножин натуральних чисел $P(N)$ не рівнопотужна множині N.

12. Визначте потужність множини всіх нескінченних послідовностей, елементи яких натуральні числа.

13. Нехай A – нескінченна множина, B – скінченна. Довести, що $A \cup B$ рівнопотужна A.

14. Довести, що множина всіх точок на площині R^2 має потужність континууму.

15. Довести, що множина всіх обмежених послідовностей дійсних чисел має потужність континуум.

16. Порівняйте потужності множин дійсних чисел R та ірраціональних чисел $R \backslash Q$. Чи існує бієкція між ними? Обґрунтуйте.

РОЗДІЛ 4
ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ

4.1. Елементи комбінаторики: розміщення, комбінації, перестановки.

Комбінаторика – розділ дискретної математики, присвячений вивченню скінченних множин та комбінаторних конфігурацій, утворених з елементів заданої скінченної множини. Основним завданням є підрахунок кількості способів розміщення, впорядкування або вибору елементів за наперед заданими правилами.

Предмет комбінаторного аналізу – дослідження структур, які виникають в результаті дискретних перетворень, та встановлення кількісних співвідношень між ними. Комбінаторика дозволяє оцінити складність алгоритмів та обсяг операцій пошуку при роботі з великими даними.

Правила суми та добутку є фундаментальними принципами комбінаторики, які дозволяють підраховувати кількість можливих сполучень об'єктів.

Правило суми: Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а об'єкт y – n_2 способами, причому ці способи не перетинаються, то вибір "або x , або y" можна здійснити $n_1 + n_2$ способами.

Приклад 4.1. У студентській групі 10 хлопців і 15 дівчат. Потрібно вибрати одного делегата на конференцію. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. За правилом суми маємо: 10 + 15 = 25 способів.

Правило добутку: Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, і після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то впорядковану пару (x, y) можна вибрати $n_1 \times n_2$ способами.

Приклад 4.2. Скільки різних шифрів можна скласти, якщо шифр має містити дві літери українського алфавіту (33 літери) та три цифри (0–9), причому літери та цифри можуть повторюватися?

Розв'язання. За правилом добутку, загальна кількість шифрів дорівнює: $33 \times 33 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\ 089\ 000$.

Розглянемо основні комбінаторні об'єкти – розміщення, комбінації та перестановки – попередньо означивши важливе поняття вибірки.

Нехай маємо скінченну множину $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ з n елементів. Якщо з цієї множини за k кроків обрати елементи a_{i1}, a_{i2}, …, a_{ik}, то отримана послідовність називається **вибіркою обсягу *k*** (або k-*вибіркою*).

У комбінаториці розрізняють два основні способи формування вибірок:

1. Вибірки без повторень: після вибору елемента на кожному кроці він вилучається з початкової множини. Таким чином, один і той самий елемент не може зустрічатися у вибірці більше одного разу. Усі елементи вибірки є різними.

2. Вибірки з повтореннями: на кожному кроці елемент обирається з усієї початкової множини (вибраний елемент не вилучається). Отже, один і той самий елемент може зустрічатися у вибірці декілька разів.

Розглянемо основні типи вибірок: впорядковані та невпорядковані.

Впорядкована вибірка – це вибірка, у якій порядок розташування елементів має значення, тому зміна порядку призводить до утворення іншої вибірки. *Наприклад*, числа 123 і 132 вважаються різними, оскільки їхні цифри розташовані в різному порядку.

Невпорядкована вибірка – це вибірка, у якій порядок елементів не має значення, тому дві вибірки, що відрізняються лише порядком, вважаються однаковими. *Наприклад*, при виборі двох чергових з групи пара {Іван, Петро} є тотожною парі {Петро, Іван}.

Розглянемо три фундаментальні типи комбінаторних елементи, які різняться за двома ознаками: наявністю чи відсутністю повторень, а також урахуванням порядку елементів.

Розміщення – це впорядковані k-вибірки з n-елементної множини. У розміщеннях порядок елементів має значення, тому дві вибірки з однаковим складом, але різним порядком, вважаються різними.

Сполучення – це невпорядковані k-вибірки з n-елементної множини. У сполученнях порядок елементів не має значення, тому вибірки з однаковим складом, але різним порядком, є тотожними.

Перестановки – це окремий випадок розміщення, коли $k = n$, тобто впорядкована n-вибірка, яка містить усі елементи початкової множини.

Кількість усіх **розміщень без повторень** з n елементів по k позначається як A_n^k, де k і n – невід'ємні цілі числа, причому $k \leq n$, і обчислюється за формулою:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad \text{де} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

З останньої формули слідує рівність: $A_n^n = n!$

Приклад 4.3. Скільки різних тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?

Розв'язання. Маємо множину з п'яти елементів: {1, 2, 3, 4, 5}. Потрібно утворити впорядковану вибірку без повторень, тобто розміщення з 5 елементів по 3 без повторень.

У нашому випадку n=5, k=3:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ чисел.}$$

Кількість різних **розміщень із повтореннями** з n елементів по k позначається як $\overline{A}_n^k$, де k і n – невід'ємні цілі числа, і обчислюється за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k .$$

Приклад 4.4. Скільки існує чотиризначних PIN-кодів, які складаються з цифр 0-9?

Розв'язання. Маємо 10 цифр {0, 1, 2, …, 9}. PIN-код – це впорядкована четвірка цифр, де цифри можуть повторюватися. Кількість таких кодів обчислюється за формулою розміщень з повтореннями:

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000 \text{ кодів.}$$

Кількість різних **перестановок без повторень** позначають як P_n. Формулу для обчислення одержують із формули для розміщень:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Приклад 4.5. Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

Розв'язання. Перестановка з 7 елементів – це будь-яке впорядкування всіх 7 книг. Кількість способів:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Число **перестановок з повтореннями** n-елементної множини позначається $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ і визначається за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}, \quad \text{де } n_1 + n_2 + ... + n_k = n .$$

Приклад 4.6. Скількома способами можна розставити на полиці 3 однакові сині книжки, 2 однакові червоні та 4 однакові зелені?

Розв'язання. Загалом книжок: 3 + 2 + 4 = 9. Оскільки книжки однакового кольору не відрізняються між собою, маємо перестановки з повтореннями. Кількість різних розташувань обчислюється за формулою:

$$P_9(3,\ 2,\ 4) = \frac{9\ !}{3!\ \cdot\ 2!\ \cdot 4!} = \frac{362880}{6 \cdot 2 \cdot 24} = 1260 \text{ способів.}$$

Число **комбінацій без повторень** з n елементів по k позначається C_n^k і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 4.7. У вазі є 10 квіток (всі квітки різні). Скількома способами можна скласти букет із 5 квіток?

Розв'язання. Оскільки квітки різні і порядок розташування квіток у букеті не має значення (важливо лише, які саме квітки увійшли до букета), то це задача на комбінації без повторень.

Маємо $n = 10$ різних квіток, вибираємо $k = 5$ квіток. Кількість способів обчислюється за формулою комбінацій без повторень:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ способи.}$$

Число **комбінацій з повтореннями** з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і визначається за формулою:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (\mathrm{n}-1)!}.$$

Приклад 4.8. У кондитерському магазині є 4 види тістечок: еклери, безе, наполеони та корзиночки. Скількома способами можна купити 6 тістечок (порядок не важливий, тістечка одного виду не відрізняються)?

Розв'язання. В цій задачі потрібно використати комбінації, оскільки порядок вибору тістечок не має значення. Більше того, потрібно обрати комбінації з повтореннями, тому що видів тістечок (n=4) менше, ніж тістечок, які потрібно обрати (k=6), і доведеться обов'язково повторювати деякі види, щоб набрати необхідну кількість.

Кількість способів обчислюється за формулою:

$$\overline{C}_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!3!} = 84 \text{ способи.}$$

4.2. Формула бінома Ньютона та її узагальнення.

Кількість комбінацій C_n^k називають також **біноміальними коефіцієнтами**. Зміст цієї назви встановлює наступна теорема, відома також як формула **бінома Ньютона**.

Теорема 4.1 (біноміальна). Нехай x та y – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j .$$

Наслідок 1. $$\sum_{j=0}^{n} C_n^j = 2^n .$$

Доведення: $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j 1^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j$.

Наслідок 2. $$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j = 0.$$

Доведення: $0^n = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j$.

Наслідок 3. $$(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^j y^{n-j} .$$

Наприклад, запишемо розклад вигляду (x+y)^4. Скориставшись біноміальною теоремою отримаємо:

$$(x+y)^4 = C_4^0 x^4 y^0 + C_4^1 x^3 y^1 + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x^1 y^3 + C_4^4 x^0 y^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти мають цілий ряд важливих властивостей:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – симетричність;
2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ – рекурентне співвідношення;
3. $\sum_{j=0}^{n} jC_n^j = n2^{n-1}$;
4. $C_{n+m}^k = \sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$.

З рекурентного співвідношення випливає ефективний спосіб обчислення значень біноміальних коефіцієнтів, який можна зобразити в графічному способі, відомий як **трикутник Паскаля**.

```
                 1
                / \
               1   1
              / \+/ \
             1   2   1
            / \+/ \+/ \
           1   3   3   1
          / \+/ \+/ \+/ \
         1   4   6   4   1
        / \+/ \+/ \+/  \+/ \
       1   5   10  10   5   1
      / \+/ \+/  \+/  \+/ \+/ \
     1   6   15  20   15  6   1
```
.... і так далі.

В цьому рівносторонньому трикутнику кожне число (окрім одиниць збоку) є сумою двох чисел, які стоять над ним. Трикутник Паскаля дозволяє швидко знаходити біноміальні коефіцієнти без використання факторіалів, що особливо зручно при невеликих значеннях n.

Як узагальнення біному Ньютона розглянемо вираз у вигляді $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

Теорема 4.2 (поліноміальна).

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{\substack{n_1\geq 0,\ldots,n_k\geq 0\\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)\,x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}.$$

4.3. Принцип включення-виключення.

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об’єднані множин. Для двох множин справджується формула

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

Наприклад, знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та ділять на 7 або на 11. Позначимо як A множину чисел, які діляться на 7, B – множину чисел, які діляться на 11. Тоді

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{11}\right]-\left[\frac{1000}{7\cdot 11}\right]=$$

$$=142+90-12=220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об’єднанні ускладнюється:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

Теорема 4.3 (принцип включення-виключення). Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

4.4. Твірні функції.

Нехай a_0, a_1, a_2, …, a_n,… – послідовність дійсних чисел. Вираз

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

називається **твірною (продуктивною) функцією** цієї послідовності.

З формули бінома Ньютона при $y = 1$ маємо

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i .$$

Таким чином, $(1+x)^n$ являється твірною функцією для біноміальних коефіцієнтів.

Твірні функції є ефективним засобом у комбінаторних обчисленнях. Вони дозволяють замінити перебір варіантів пошуком коефіцієнтів многочленів.

Приклад 4.9. В урні знаходиться 4 червоних, 5 синіх і 2 зелених кульки. Потрібно визначити кількість способів вибору кульок за різними умовами:

а) вибрати 7 кульок з урни;

б) вибрати 7 кульок, при умові, що хоча б 1 кулька червона і 2 сині.

Розв'язування.

а) Кожному кольору кульок відповідає свій многочлен, степінь якого вказує на кількість кульок цього кольору, що можуть бути вибрані, а коефіцієнти показують кількість способів вибору.

Для червоних кульок (їх 4): $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

Для синіх кульок (їх 5): $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$.

Для зелених кульок (їх 2): $1+x+x^2$.

Твірна функція для загальної кількості способів вибору кульок є добутком цих многочленів:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

і кількість способів вибору 7 кульок дорівнює коефіцієнту при x^7 у розкладі цієї функції.

Перемноживши многочлени і звівши подібні доданки, отримаємо: $1+3x+6x^2+9x^3+12x^4+14x^5+14x^6+12x^7+9x^8+6x^9+3x^{10}+x^{11}$, коефіцієнт при x^7 дорівнює 12, отже існує 12 способів вибору.

б) у цьому випадку необхідно врахувати що хоча б 1 кулька червона, відповідний поліном буде мати вигляд $(x+x^2+x^3+x^4)$ і 2 синіх кульки, що відповідає виразу $(x^2+x^3+x^4+x^5)$. Отже, твірна функція матиме вигляд:

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

і кількість способів вибору 7 кульок дорівнює коефіцієнту при x^7 у розкладі цієї функції.

Для знаходження числа упорядкованих вибірок (розміщень, перестановок) більш зручною є експоненціальна твірна функція. Експоненціальні твірні функції мають вигляд

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

Оскільки $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ з формули бінома Ньютона при y=1 маємо біноміальну формулу:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_n^i x^i}{i!},$$

яку можна вважати розкладанням в ряд експоненціальної твірної функції для послідовності A_n^0, A_n^1, … A_n^n чисел k-розміщень n-множини.

Приклад 4.10. Знайти експоненціальну функцію для опису кількості способів розміщення n гостей в трьох кімнатах за умови, що в першій кімнаті знаходиться хоча б один гість, непарна кількість гостей знаходиться в другій кімнаті і парна кількість – в третій кімнаті.

Розв'язування.

Для розв'язання задач використаємо експоненціальні твірні функції, оскільки гості є різними (впорядковані об'єкти), а розміщення по кімнатах — це фактично розбиття множини гостей на три підмножини із заданими властивостями.

1. Твірна функція для першої кімнати (хоча б один гість) задається виразом: $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$
2. Твірна функція для другої кімнати (непарна кількість гостей): $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$
3. Твірна функція для третьої кімнати (парна кількість гостей, не включаючи 0): $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$

Оскільки гості розподіляються по кімнатах незалежно, загальна експоненціальна твірна функція є добутком функцій для кожної кімнати:

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...\right)$$

Кількість способів розміщення n гостей за заданих умов дорівнює відповідному коефіцієнту при x^n.

4.5. Контрольні питання до розділу 4.

1. Що вивчає комбінаторика? Яке місце вона займає в дискретній математиці?
2. У чому полягають правила суми та добутку? Наведіть приклади їх застосування.
3. Що називають вибіркою? Які види вибірок існують?
4. Чим відрізняються впорядковані вибірки від невпорядкованих? Наведіть приклади.
5. Поясніть різницю між вибірками з повтореннями та без повторень.
6. Що називають розміщеннями з n елементів по m? Чим вони відрізняються від перестановок?
7. Що називають розміщеннями з повтореннями? Наведіть приклад задачі.
8. Що називають перестановкою n-елементної множини? Наведіть приклад.
9. Що називають перестановками з повтореннями? У яких випадках вони застосовуються?
10. Що називають комбінаціями з n елементів по m? Поясніть їх відмінність від розміщень.
11. Що називають комбінаціями з повтореннями? Коли вони використовуються?
12. За якими формулами обчислюють кількість:
    a. перестановок без повторень та з повтореннями?
    b. розміщень без повторень та з повтореннями?
    c. комбінацій без повторень та з повтореннями?
13. Як пов'язані між собою числа розміщень, перестановок та комбінацій?
14. Запишіть формулу бінома Ньютона. Поясніть її зміст.
15. Чому числа комбінацій називають біноміальними коефіцієнтами?
16. Перелічіть основні властивості біноміальних коефіцієнтів. Доведіть властивість симетричності.
17. Що таке трикутник Паскаля? Як він будується і для чого використовується?

18. Запишіть поліноміальну формулу. Як вона пов'язана з біномом Ньютона?
19. Сформулюйте принцип включення-виключення для двох, трьох та n множин.
20. Запишіть формулу включень та виключень для об'єднання трьох множин. Зобразіть її за допомогою діаграм Ейлера-Венна.
21. Запишіть формулу включень та виключень для об'єднання чотирьох множин.
22. Що називають твірною функцією послідовності? Наведіть приклад.
23. Яку твірну функцію мають біноміальні коефіцієнти?
24. У чому полягає сутність методу твірних функцій? Для розв'язання яких задач він застосовується?
25. Чим звичайні твірні функції відрізняються від експоненціальних? У яких випадках застосовують кожен із цих типів?

4.6. Приклади типових задач до розділу 4.

Приклад 1. Припустимо, що потрібно сформувати команду космічного корабля з трьох осіб: командира, інженера і лікаря. На місце командира є 4 кандидати, на місце інженера – 3, а на місце лікаря – 5. Скількома способами може бути сформовано команду корабля?

Розв'язання.

Для розв'язання задачі застосуємо правило добутку. Вибір кожного члена команди є незалежним етапом, причому кількість способів на кожному етапі відома:

- вибір командира може бути здійснений 4 способами;
- для кожного вибору командира інженера можна вибрати 3 способами;
- для кожної сформованої пари (командир, інженер) лікаря можна вибрати 5 способами.

За правилом добутку, загальна кількість способів сформувати команду дорівнює добутку кількостей способів на кожному етапі:

$$4\times3\times5=60 \text{ способів.}$$

Приклад 2. З 10 різних троянд і 8 різних гербер потрібно скласти букет, що містить 2 троянди і 3 гербери. Скільки різних букетів можна скласти?

Розв'язання.

Оскільки порядок квітів у букеті не має значення і всі квіти різні, використовуємо комбінації без повторень. Обчислимо окремо кількість способів вибору для кожного виду квітів:

- 2 троянди з 10 можна вибрати C_{10}^{2} способами;
- 3 гербери з 8 можна вибрати C_{8}^{3} способами.

Квіти вибираються незалежно з множини троянд і гербер. За правилом добутку загальна кількість способів дорівнює добутку кількостей способів вибору троянд і гербер:

$$C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{3}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2!\cdot3\cdot2\cdot1}=7\cdot4\cdot9\cdot10=2520 \text{ букетів.}$$

Приклад 3. Скількома способами можна розкласти 10 однакових цукерок у 4 різні коробки, якщо:

a) коробки можуть бути порожніми;

b) жодна коробка не може бути порожньою?

Розв'язання.

a) Коробки можуть бути порожніми

Маємо 10 однакових цукерок (об'єкти не розрізняються) та 4 різні коробки. Кількість способів розподілу n однакових предметів у k різних ящиків (ящики можуть бути порожніми) визначається формулою комбінацій з повтореннями.

У нашому випадку n = 4, k = 10:

$$\overline{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!(13-10)!} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286 \text{ способів.}$$

b) Жодна коробка не може бути порожньою

Коли коробки не можуть бути порожніми, спочатку кладемо по 1 цукерці в кожну з 4 коробок (оскільки цукерки однакові, це можна зробити єдиним способом). Залишається 10−4=6 цукерок, які потрібно розкласти в 4 коробки вже без обмежень.

Знову застосовуємо формулу комбінацій з повтореннями для $n = 4$, $k = 6$:

$$\overline{C}_4^{6} = C_{4+6-1}^{6} = C_{9}^{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 \text{ способи.}$$

Приклад 4. У змаганнях беруть участь 12 спортсменів. Скількома способами можна розподілити золоту, срібну та бронзову медалі?

Розв'язання.

Маємо 12 різних спортсменів. Потрібно обрати трьох із них і розподілити між ними три різні медалі (золото, срібло, бронза). Оскільки порядок важливий (кожна медаль унікальна), це задача на розміщення без повторень із 12 елементів по 3.

Кількість способів обчислюється за формулою:

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \cdot$$

Приклад 5. У театрі 5 місць у першому ряду. Скількома способами можна розсадити 3 хлопців і 2 дівчат, якщо:

a) обмежень немає (сидять як хочуть);

b) хлопці мають сидіти поруч;

c) дівчата не можуть сидіти поруч.

Розв'язання.

a) без обмежень

Оскільки всі 5 осіб різні, то будь-яке їх розміщення на 5 місцях є перестановкою з 5 елементів без повторень. Кількість способів посадки обчислюється за формулою:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ способів.}$$

b) хлопці мають сидіти поруч

Розглядаємо трьох хлопців як один неподільний блок. Усередині цього блоку вони можуть мінятися місцями. Кількість способів переставити хлопців усередині блоку: $P_3 = 3! = 6$.

Тепер маємо такі три об'єкти для розсаджування: 1 блок хлопців та 2 окремі дівчини. Їх можна переставити між собою: $P_3 = 3! = 6$ способами. За правилом добутку загальна кількість способів: 6×6=36 способів.

c) дівчата не можуть сидіти поруч

Від загальної кількості віднімаємо випадки, коли дівчата поруч. Загальна кількість розсадок без обмежень: 5!=120.

Обчислимо кількість розсадок, коли дівчата сидять поруч. Об'єднуємо 2 дівчат в один блок. Усередині блоку вони можуть мінятися місцями: 2!=2 способи. Маємо об'єкти: 1 блок дівчат + 3 хлопці = 4 об'єкти. Їх перестановки: 4!=24 способи. Разом: 24×2=48 способів, коли дівчата сидять поруч.

Кількість способів, коли дівчата не сидять поруч:

120 – 48 = 72 способи.

Приклад 6. Розкрити дужки: $(x-2)^7$.

Розв'язання.

За формулою бінома Ньютона:

$$(x-2)^7 = \sum_{i=0}^{7} C_7^i x^i (-2)^{n-i}.$$

Обчислимо значення біноміальних коефіцієнтів (використаємо правило симетрії):

$$C_7^0 = C_7^7 = \frac{7!}{0!7!} = 1; \qquad C_7^1 = C_7^6 = \frac{7!}{1!6!} = 7;$$

$$C_7^2 = C_7^5 = \frac{7!}{2!5!} = 21; \qquad C_7^3 = C_7^4 = \frac{7!}{3!4!} = 35.$$

Для визначення біноміальних коефіцієнтів можна було скористатися трикутником Паскаля. Підставимо знайдені значення у формулу бінома Ньютона, одержимо:

$$(x-2)^7 = C_7^0 x^0 (-2)^7 + C_7^1 x^1 (-2)^6 + C_7^2 x^2 (-2)^5 + C_7^3 x^3 (-2)^4 +$$

$$+ C_7^4 x^4 (-2)^3 + C_7^5 x^5 (-2)^2 + C_7^6 x^6 (-2)^1 + C_7^7 x^7 (-2)^0 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-128) + 7 \cdot x \cdot 64 + 21 \cdot x^2 (-32) + 35 \cdot x^3 \cdot 16 +$$

$$+ 35 \cdot x^4 \cdot (-8) + 21 \cdot x^5 \cdot 4 + 7 \cdot x^6 (-2) + 1 \cdot x^7 \cdot 1 =$$

$$= -128 + 448x - 672x^2 + 560x^3 - 280x^4 + 84x^5 - 14x^6 + x^7.$$

Приклад 7. Знайти коефіцієнт при x^3y^2z у розкладі $(2x-y+3z)^6$.

Розв'язання.

Використаємо поліноміальну теорему. Потрібно розглянути доданок, у якому: степінь x дорівнює 3; степінь y дорівнює 2; степінь z дорівнює 1. Перевіряємо суму показників: 3+2+1=6, умова виконується. Відповідний член многочлена матиме вигляд:

$$P_6(3,2,1)(2x)^3(-y)^2(3z)^1 = \frac{6!}{3!2!1!} 2^3 \cdot 3 \cdot x^3 y^2 z =$$

$$= 60 \cdot 8 \cdot 3 \cdot x^3 y^2 z = 1440 x^3 y^2 z.$$

Отже, шуканий коефіцієнт дорівнює 1440.

4.7. Вправи до розділу 4.

1. Скільки номерів, що складаються з двох букв, за якими йде п'ять цифр, можна скласти, використавши 26 латинських букв і 10 цифр?

2. Скількома способами можна впорядкувати чотирьохелементну множину $A = \{1, 2, 3, 4\}$, або скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 так, щоб цифри не повторювалися? Розв'яжіть попередню задачу, якщо множина $A=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

3. Скільки різних трицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 4, 6?

4. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити наряд, який складається із трьох солдат і одного офіцера?

5. Є n_1 різних книжок одного автора, n_2 – другого і n_3 – третього. Скількома способами можна вибрати: а) дві книги одного автора? б) три книги одного автора? в) одну книгу першого автора, дві – другого і три – третього?

6. Скількома способами можна заповнити анкету, яка містить n питань, якщо на кожне питання можна відповісти:

a) "так" або "ні"?

b) "так", "ні", "не знаю"?

7. Скільки слів довжини n можна скласти, якщо в алфавіті q букв? Скільки серед них паліндромів (слів, що читаються однаково зліва на право і справа на ліво)?

8. Скільки матриць з m рядками і n стовпцями можна скласти з елементів 0 і 1?

9. Скільки слів довжини n в q-буквеному алфавіті, в яких будь-які дві сусідні літери різні?

10. Скількома способами можна на звичайній шаховій

дошці розмістити білу і чорну тури так, щоб вони не атакували одна одну?

11. Скількома способами можна вибрати трьох призерів серед n учасників конкурсу: a) із зазначенням займаних ними місць? b) без зазначення місць?

12. Скількома способами можна розмістити 8 шахових тур на звичайній шаховій дошці так, щоб вони не загрожували одна одній, тобто щоб ніякі дві з них не стояли на одній вертикалі або горизонталі.

13. На площині розташовані n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки може існувати трикутників з вершинами в даних точках?

14. Скількома способами можна розділити 10 юнаків на дві баскетбольні команди по 5 чоловік у кожній?

15. Скількома способами можна розташувати n нулів і k одиниць в послідовність так, щоб ніякі дві одиниці не стояли поруч?

16. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви в словах: a) "ПАРАЛЕЛЬ"? b) "СТАТИСТИКА"?

17. Скількома способами можна розбити 14 осіб на 7 пар?

18. Скількома способами можна розмістити 7 студентів у трьох кімнатах гуртожитку: одно-, дво- і чотиримісній?

19. Код замка складається з п'яти десяткових цифр. Відомо, що серед них один раз зустрічається цифра 0 і двічі цифра 3. Скільки комбінацій треба перебрати, щоб відкрити замок?

20. Скількома способами можна з 10 чоловік вибрати три комісії, якщо в першій і в другій повинно бути по 3 людини, а в третій – 5 чоловік, і жоден з членів першої комісії не повинен входити в другу і третю?

21. Траєкторією назвемо ламану лінію на площині, що

складається з відрізків, паралельних координатним осям, причому довжини відрізків – цілі числа, а при русі вздовж ламаної від початкової точки кожен вертикальний відрізок проходиться знизу вгору, а горизонтальний – зліва направо. Знайдіть число траєкторій, що починаються в точці (0,0), а закінчуються: *a*) в точці (m, n); *b*) на прямій $x + y = n$.

22. Є колода з 4карт чотирьох мастей, по n карт кожної масті, занумеровані числами 1, 2, ..., n. Скількома способами можна вибрати п'ять карт так, щоб серед них виявилися:

a) п'ять карт однієї масті з послідовними номерами;

b) чотири карти з однаковими номерами;

c) три карти з одним номером і дві з іншим;

d) п'ять карт однієї масті;

e) п'ять карт з послідовними номерами;

f) три карти з однаковими номерами;

g) дві карти з однаковими, інші з різними номерами?

23.Скільки є шестизначних десяткових чисел, у яких:

a) є однакові цифри;

b) цифри йдуть у зростаючому порядку;

c) рівно три цифри парні;

d) не менше двох парних цифр;

e) усі цифри різні, причому перша – не 9, а остання – не 0;

f) сума цифр парна?

24. Скільки діагоналей у опуклого n-кутника? Знайдіть число точок перетину цих діагоналей (не рахуючи вершин), якщо відомо, що в кожній з цих точок перетинаються лише дві діагоналі?

25. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 3 англійців, 3 німців і 3 французів, щоб ніякі два співвітчизники не сиділи поруч?

26. Скількома способами 6 чоловік можуть вибрати 6 пар рукавиць різного розміру по правій і лівій рукавиці так, щоб ні один не отримав пари одного розміру?

27. Комісія складається з n осіб. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба зробити і як розподілити серед членів комісії, щоб доступ до сейф був тоді і тільки тоді, коли збереться не менше ніж k членів комісії?

28. Довести тотожності для біноміальних коефіцієнтів:

$a)$ $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$;

$b)$ $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{m(m-1)...(m-k+1)} = \frac{m+1}{m-n+1}$;

$c)$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{2n-1}^{k}} = \frac{2}{n+1}$;

$d)$ $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^1 C_n^r}{C_{2n}^{k+r}} = \frac{2n+1}{n+1}$;

$e)$ $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^k)^k + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

29. Розв’язати рівняння:

$a)$ $A_n^3 - \overline{C_{n-2}^3} = 10C_{n-1}^3$;

$b)$ $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$.

30. Знайти коефіцієнти при:

$a)$ x^5 в розкладі $(1 + x)^7$;

$b)$ x^{15} в розкладі $(1 + x^5)^7$;

$c)$ x^5y^8 в розкладі $(x-y)^{13}$;

$d)$ $x^{14}y^{11}$ в розкладі $(x-y)^{25}$;

$e)$ $x^5y^3z^2$ в розкладі $(x + y + z)^{10}$;

$f)$ $x^3y^2z^2$ в розкладі $(x - 2y + z)^7$;

$g)$ x^6 в розкладі $(1+2x+3x^2)^4$.

31. Перетворити вирази (записати у вигляді многочлена):

a) $(2x + 3)^6$;

b) $(1 - 2x)^9$;

c) $(x + 2y)^8$;

d) $(1 + x + x^2)^3$;

e) $(y + 2x - x^2)^4$;

f) $(1 - x - 2x^2)^5$.

32. Знайти остачу від ділення 17^{25} на 16, використовуючи біном Ньютона.

33. У групі з 25 студентів 15 захоплюються математикою, 10 – фізикою, 8 – нічим не захоплюються. Скільки студентів захоплюються і математикою і фізикою?

34. У групі кожен студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів. 12 студентів захоплюються детективами, серед них 5 блондинів і 7 брюнетів. Скільки студентів у групі, якщо 2 брюнети не захоплюються детективами?

35. Нехай універсальна множина U містить 20 елементів. Відомо, що: 8 елементів мають властивість A; 7 елементів мають властивість B; 6 елементів мають властивість C; 4 елементи мають властивості A і B одночасно; 3 елементи мають властивості A і C одночасно; 2 елементи мають властивості B і C одночасно; 1 елемент має всі три властивості. Знайти кількість елементів, які не мають жодної з властивостей A, B, C.

36. Записати рекурентну формулу:

a) для числа розміщень з n елементів по m;

b) для числа комбінацій з n елементів по m.

37. Знайти число комбінацій, використовуючи твірні функції:

а) з трьох елементів {a, b, c} зі специфікацією {3, 1, 2};

б) з двох елементів{0,1 } зі специфікацією {3, 2}.

38. Визначити найменше значення показника n у розкладі

$(1+x)^n$, за якого відношення двох сусідніх коефіцієнтів дорівнює 7/15.

39. У розкладі бінома $(a\sqrt[5]{a/3}-b/\sqrt[7]{a^3})^n$ визначити член, що містить a^3, якщо сума біноміальних коефіцієнтів на непарних місцях у розкладі дорівнює 2048.

40. Скільки раціональних членів містить розклад $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

41. Знайти кількість членів (доданків) у розкладі $(x_1+x_2+...+x_k)^n$.

42. Записати твірні функції для комбінацій та розміщень з n елементів по k без повторень у яких кожен елемент зустрічається:

a) не менше двох разів;

b) точно два рази;

c) не більше двох разів;

d) парну кількість разів;

e) непарну кількість разів.

43. У кондитерській є 4 види тістечок (доступні в необмеженій кількості). Скількома способами можна купити 10 тістечок, якщо тістечок першого виду має бути не менше 2?

44. Скількома способами можна розмістити n гостей у 3 кімнатах, якщо в першій кімнаті має бути не менше 2 гостей, у другій – парна кількість, у третій – не більше 3?

45. Скількома способами можна розкласти 10 однакових кульок у 5 різних ящиків, якщо в кожному ящику має бути не більше 3 кульок?

РОЗДІЛ 5
БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

5.1. Булеві функції: основні означення та огляд.

Булеві функції – найпростіший і найважливіший клас функцій, які використовуються для опису скінченних автоматів та ЕОМ, що призначаються для оброблення дискретної інформації. Як модель засобів перероблення такої інформації застосовується поняття автомата, для формального опису якого слугує так звана алгебра логіки (булева алгебра).

Розглянемо множину B={0,1}. Сукупність значень аргументів функції $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in B^n$, де $B^n = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n}$ називається *кортежем* або *булевим вектором*.

Функція $f : B^n \to B$ називається **булевою функцією** від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n \in B$ і позначається $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Іншими словами, **булевими** (або, як ще кажуть, *функціями алгебри логіки*) називають функції, значення яких рівні 0 або 1, і аргументи яких приймають ті ж два значення 0 і 1.

Функція, що залежить від n аргументів, називається n-місною і є повністю визначеною, якщо задано її значення для всіх наборів (кортежів) значень аргументів.

Теорема 5.1. Кількість кортежів булевої функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Кількість булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Існує **три способи задання** булевої функції: *вербальний* (або словесний), *аналітичний* і *табличний*. Аналітичне задання функції – опис її аналітичним виразом (формулою). *Наприклад,* $f_1(x,y,z) = x \wedge (y \vee z)$. Одним із поширених способів задання булевої функції є її задання за допомогою таблиці істинності.

Змінна x_i називається **несуттєвою (фіктивною)** для булевої функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо виконується рівність:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для всіх значень змінних $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. У цьому випадку функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ фактично не залежить від змінної x_i і може розглядатись, як функція n-1 булевої змінної.

Дві булеві функції f_1 і f_2 називаються **рівносильними** між собою, якщо f_2 може бути отримана з f_1 долученням або вилученням несуттєвих змінних.

Для однієї булевої змінної $f(x)$ існує 4 можливі функції. Загальна таблиця істинності для булевих функцій однієї змінної наведена в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1. Булеві функції однієї змінної

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1

Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – це функції-константи (*тотожна нулю* та *тотожна одиниці* відповідно); функція $f_4(x)$ – змінна x (*тотожна* змінній x); $f_3(x)$ – функція логічного заперечення (*інверсія x,* зображується $\overline{x}$).

Булевих функцій від двох змінних є 16. З них шість є константами або функціями одного аргументу, інші 10 функцій залежать від двох змінних і мають свої загальноприйняті позначення та назви. В таблиці 5.2 наведено всі функції від двох змінних $f(x, y)$ з назвами.

Таблиця 5.2. Булеві функції двох змінних

x_1	x_2	f_0 0	f_1 $\wedge$	f_2 $\overline{\rightarrow}$	f_3 x	f_4 $\overline{\leftarrow}$	f_5 y	f_6 $\oplus$	f_7 $\vee$	f_8 $\downarrow$	f_9 $\leftrightarrow$	f_{10} $\overline{y}$	f_{11} $\leftarrow$	f_{12} $\overline{x}$	f_{13} $\rightarrow$	f_{14} $\vert$	f_{15} 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Назви функцій		Константа 0	Кон'юнкція	Запереч.імплікації	Тотожна *x*	Запереч.антиімпл.	Тотожна *y*	Сума за модулем 2	Диз'юнкція	Стрілка Пірса	Еквівалентність	Заперечення *y*	Антиімплікація	Заперечення *x*	Імплікація	Штрих Шеффера	Константа 1

Таблиця 5.2 містить усі 16 булевих функцій від двох змінних. Кожна функція визначається унікальним набором значень на чотирьох можливих комбінаціях аргументів. Для побудови логічних схем та аналізу алгоритмів використовують окремі функції, які утворюють **базиси** – множини функцій, через які можна виразити будь-яку булеву функцію.

Функції $f_{10} = \overline{y}$ та $f_{12} = \overline{x}$ – **заперечення** *y* та *x* відповідно (логічне НЕ, інверсія). Вони застосовуються до однієї змінної, інша є несуттєвою. Заперечення змінює значення змінної на протилежне, тобто воно істинне тоді, коли змінна є хибною, і хибне тоді, коли вона є істинною.

Функція $f_1 = x \wedge y$ – **кон'юнкція** (логічне множення) істинна тоді, коли *x* і *y* істинні. Кон'юнкцію називають функцією **І / AND**.

Функція $f_7 = x \vee y$ – **диз'юнкція** (логічне додавання) істинна тоді, коли істинними є або x, або y, або обидві змінні. Диз'юнкцію називають функцією **АБО / OR**.

Від диз'юнкції потрібно відрізняти функцію $f_6 = x \oplus y$, яка називається **додаванням (сумою) за модулем 2**, яка є істинною, коли істинні або x, або y окремо.

Функція $f_{13} = x \rightarrow y$ – **імплікація**, яка є хибною тоді й тільки тоді, коли x є істинним, а y – хибним.

Функція $f_9 = x \leftrightarrow y$ – **еквівалентність** (рівно-значність). Вона істинна тоді й тільки тоді, коли значення x та y збігаються (обидва істинні або обидва хибні). Еквівалентність є запереченням суми за модулем 2.

Функція $f_8 = x \downarrow y$ – **стрілка Пірса** (або функція Вебба) є запереченням диз'юнкції, а функція $f_{14} = x \mid y$ – **штрих Шеффера** є запереченням кон'юнкції.

5.2. Рівносильні формули булевої алгебри.

Як і в елементарній алгебрі, в булевій алгебрі, виходячи з елементарних булевих функцій, можна будувати формули. Нехай L – це набір булевих функцій (базис). **Формула** – це будь-який вираз, утворений із змінних за допомогою функцій із заданого набору L.

Формули F_1 та F_2 називаються **рівносильними**, якщо при будь-яких значеннях змінних $x_1,\ldots,x_n$, що входять у ці формули, вони набувають однакових значень.

Використовуючи закони булевих функцій, можна частину формули або всю формулу замінити рівносильною їй формулою. Такі перетворення формул називаються рівносильними. При проведенні рівносильних перетворень кожний крок ґрунтується на використанні того або іншого закону.

Рівносильні перетворення використовуються для доведення тотожностей, для зведення формул до заданого вигляду, для спрощення формул.

Формула A вважається простішою за рівносильну їй формулу B, якщо вона містить менше булевих змінних або менше логічних операцій. При цьому звичайно операції еквівалентність і імплікація замінюються операціями диз'юнкція і кон'юнкція, а заперечення відносять до елементарних висловів.

Теорема 5.2. Для булевих функцій виконуються наступні рівності:

1. $x \vee x = x; \quad x \wedge x = x$; – ідемпотентність.
2. $x \vee y = y \vee x; \quad x \wedge y = y \wedge x$; – комутативність.
3. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
   $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$; – асоціативність.
4. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; – дистрибутивність.
5. $x \vee 1 = 1; \quad x \wedge 1 = x$;
   $x \vee 0 = x; \quad x \wedge 0 = 0$; – закони зі сталими.
6. $x \vee (y \wedge x) = x; \quad x \wedge (y \vee x) = x$; – закони поглинання.
7. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}; \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; – закони де Моргана.
8. $x \wedge \overline{x} = 0$; – закон суперечності.
9. $x \vee \overline{x} = 1$; – закон виключення третього.
10. $\overline{\overline{x}} = x$ – закон подвійного заперечення.

Теорема 5.3. Для булевих функцій справедливі рівності:

1. $x \leftrightarrow x = 1; \quad x \leftrightarrow \overline{x} = 0$;
2. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$ – комутативність еквівалентності;
3. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ – асоціативність;
4. $1 \leftrightarrow x = x; \quad 0 \leftrightarrow x = \overline{x}$;
5. $\overline{x} \leftrightarrow \overline{y} = x \leftrightarrow y$;

6. $\overline{x} \to \overline{y} = x \to y$;

7. $x \to x = 1$;

8. $x \to \overline{x} = \overline{x}$; $\overline{x} \to x = x$;

9. $1 \to x = x$; $x \to 1 = 1$;

10. $x \to 0 = \overline{x}$; $0 \to x = 1$;

11. $x \vee y = \overline{x} \to y$;

12. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

13. $\overline{x} = x \mid x$; $\overline{x} = x \downarrow x$;

14. $x \mid y = \overline{x \wedge y}$;

15. $x \downarrow x = \overline{x \vee y}$.

Зауваження. Доведення всіх цих рівностей можна здійснити за допомогою таблиць істинності.

5.3. Нормальні форми булевих функцій.

Серед усіх можливих способів аналітичного задання булевих функцій особливе місце посідають **нормальні форми** – такі формули булевих функцій, які будуються за єдиним принципом і мають стандартну структуру. Залежно від того, яка логічна операція є зовнішньою (головною), розрізняють два типи нормальних форм: диз'юнктивні та кон'юнктивні. Розглянемо спочатку **диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ)**.

Кон’юнкція будь-якої кількості різних незалежних змінних (літер), що входять із запереченням або без нього, називається **елементарною кон’юнкцією**. Кількість змінних, що входять до складу елементарної кон’юнкції називається її **рангом**.

Наприклад, $x \wedge y \wedge z$ та $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$ є елементарними кон’юнкціями, а $x \wedge \overline{y \wedge z}$ – ні. Ранг обох наведених елементарних кон’юнкцій дорівнює 3.

Якщо функцію задано формулою у вигляді диз’юнкції елементарних кон’юнкцій, то її задано **диз’юнктивною нормальною формою**.

Наприклад: $f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z})$.

Конституентою одиниці (**мінтермом**) називають булеву функцію, що представлена у вигляді елементарної кон’юнкції, яка набуває значення 1 тільки на одному з кортежів своїх змінних.

Досконалою диз’юнктивною нормальною формою (**ДДНФ**) булевої функції називається диз’юнкція тих конституент одиниці, які перетворюються в одиницю на тих самих наборах змінних, що й задана функція.

Будь-яка булева функція має єдину ДДНФ (кількість її членів дорівнює кількості одиничних значень функції) і декілька ДНФ. Будь-яка ДНФ утворюється внаслідок більшого або меншого скорочення ДДНФ, причому від будь-якої ДНФ можна перейти до ДДНФ. Такий перехід називається розгортанням.

Можна навести такі властивості ДДНФ, що виділяють її з усіх ДНФ:

- в ній немає однакових доданків;
- жоден із доданків не містить двох однакових співмножників;
- жоден із доданків не містить змінну разом з її запереченням;
- в кожному окремому доданку є як співмножник або змінна x_i, або її заперечення для будь-якого i=1, 2, …, n.

Аналогічно до диз'юнктивних нормальних форм вводяться **кон'юнктивні нормальні форми (КНФ)**, які будуються на основі елементарних диз'юнкцій, об’єднаних операцією кон'юнкції.

Так само, як і для диз'юнктивних нормальних форм, для КНФ існує **досконала кон'юнктивна нормальна форма**

(**ДКНФ**), яка будується за нульовими значеннями функції та задовольняє умови, подібні до умов ДДНФ.

Теорема 5.4. Будь-яка булева функція, крім абсолютно істинної й абсолютно хибної, може бути подана в ДКНФ і ДДНФ:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_0 (\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee ... \vee \tilde{x}_n) \text{ – ДКНФ;}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_1 (\tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge ... \wedge \tilde{x}_n) \text{ – ДДНФ,}$$

де $\bigwedge_0$ і $\bigvee_1$ – символи узагальненої кон'юнкції та диз'юнкції конституент нуля й одиниці відповідно, а $\tilde{x}_i$ – це x_i або $\bar{x}_i$ (i=1,…,n).

Доведення. В якості доведення, представимо кроки алгебраїчних перетворень, які дозволяють переводити довільну функцію у ДДНФ. Представлення функції у ДКНФ випливає автоматично за принципом двоїстості.

Елімінація операцій. Будь-яка булева функція може бути реалізована формулою за допомогою лише тільки кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення (базисні операції). Таким чином, довільна підформула у формулі із головною операцією, яка відмінна від кон'юнкції, диз'юнкції або заперечення, може бути замінена на підформулу, що містить тільки ці три базисні операції. В результаті цього кроку у формулі лишаться тільки базисні операції.

Протягування заперечень. За допомогою інволютивності заперечення та правил де Моргана заперечення "протягуються" до змінних. В результаті цього кроку заперечення будуть присутні тільки безпосередньо над змінними.

Розкриття дужок. За дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції розкриваються усі дужки, які є операндами кон'юнкцій. В результаті цього кроку формула отримає вигляд диз'юнктивної нормальної форми.

Приведення змінних. За допомогою ідемпотентності кон'юнкції видаляються повторні входження змінних у кожну кон'юнкцію, а потім за допомогою ідемпотентності диз'юнкції видаляються повторні входження однакових кон'юнкцій у диз'юнкцію. В результаті цього кроку формула не містить "зайвих" змінних та "зайвих" кон'юнктивних доданків.

Розвинення змінних. По правилу розвинення у кожну кон'юнкцію, яка містить не всі змінні, додаються змінні, яких не вистачає. В результаті цього кроку формула стає "досконалою", тобто кожна кон'юнкція містить всі змінні.

Сортування. За допомогою комутативності змінні у кожній кон'юнкції, а потім кон'юнкції у диз'юнкції сортуються в одному порядку. В результаті цього кроку формула набуває вигляду ДДНФ.

Наведемо приклад перетворення формули до ДДНФ за допомогою алгоритму, наведеного вище.

Приклад 5.1. $((x \oplus y) \vee y) \wedge (\overline{y \to z}) \underset{1}{=}$

$$\underset{1}{=} ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee y) \wedge (\overline{\overline{y} \vee z}) \underset{2}{=}$$

$$\underset{2}{=} ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee y) \wedge (y \wedge \overline{z}) \underset{3}{=}$$

$$\underset{3}{=} (\overline{x} \wedge y \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge y \wedge \overline{z}) \underset{4}{=}$$

$$\underset{4}{=} (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge 0 \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge \overline{z}) \underset{4}{=} (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge \overline{z}) \underset{5}{=}$$

$$\underset{5}{=} (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \underset{4}{=} (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) .$$

5.4. Перехід від табличного подання булевої функції до алгебраїчного.

Мінтерми (конституенти 1) та макстерми (конституенти 0) використовуються для переходу від табличного подання функції до алгебраїчного. Щоб здійснити такий перехід і представити формулу у ДДНФ, кожному кортежу ставиться у відповідність мінтерм – кон'юнкція всіх змінних, які входять у прямому вигляді, якщо значення заданої змінної в наборі дорівнює одиниці, або в інверсному вигляді, якщо воно дорівнює нулю. Для представлення формули у ДКНФ використовуються макстерми – диз'юнкції всіх змінних, які входять у прямому вигляді, якщо значення заданої змінної дорівнює 0, або в інверсному вигляді, якщо воно дорівнює 1

Таблиця 5.3. Мінтерми та макстерми для функції двох змінних

x	y	Мінтерм	Макстерм	Значення функції $f(x,y)$
0	0	$m_0 = \bar{x} \wedge \bar{y}$	$M_0 = x \vee y$	$\varphi_0 = 1$
0	1	$m_1 = \bar{x} \wedge y$	$M_1 = x \vee \bar{y}$	$\varphi_1 = 0$
1	0	$m_2 = x \wedge \bar{y}$	$M_2 = \bar{x} \vee y$	$\varphi_2 = 0$
1	1	$m_3 = x \wedge y$	$M_3 = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\varphi_3 = 1$

Усі мінтерми та макстерми функції двох змінних наведено в табл. 5.3. Значення функції f, що відповідає заданому i-му набору змінних, будемо позначати φ_i.

Алгебраїчне подання функції f у вигляді ДДНФ є диз'юнкцією мінтермів, що відповідають наборам змінних, для яких φ_i=1. В прикладі функції, що наведена у табл. 5.3, маємо:

$$\text{\textit{ДДНФ}}\ f(x, y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)\,.$$

Алгебраїчне подання функції f у вигляді ДКНФ є кон'юнкцією макстермів, що відповідають наборам змінних, для яких φ_i=0. Для функції, наведеної в таблиці 5.3, маємо:

$$\text{\textit{ДКНФ}}\ f(x, y) = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)\,.$$

Таким чином здійснюється перехід від таблиці істинності до алгебраїчного подання булевої функції, завдяки чому будь-яка булева функція може бути подана у вигляді ДДНФ або ДКНФ.

5.5. Мінімізація нормальних форм булевих функцій.

Мінімізацією називається перетворення булевої функції, яке веде до зменшення кількості символів у формулі, а отже, до спрощення її аналітичного виразу. Мінімізація дозволяє зменшити складність логічних схем та кількість використовуваних елементів. Найпростішим методом мінімізації є **алгебраїчний метод**, який ґрунтується на застосуванні законів булевої алгебри. Розглянемо детальніше метод Квайна, призначений для побудови скороченої ДНФ.

Метод Квайна скорочення ДДНФ

При мінімізації за методом Квайна передбачається, що початкова функція задана в досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ). Виконується перетворення ДДНФ за допомогою операцій *неповного склеювання* і *поглинання*.

В операції неповного склеювання

$$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) = y \wedge (x \vee \overline{x}) = y,$$

$$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) = y \vee (x \wedge \overline{x}) = y$$

дві елементарні кон'юнкції $(x \wedge y)$ та $(\overline{x} \wedge y)$ склеюються за змінною x.

В операції поглинання

$$(x \wedge y) \vee y = y,$$

$$(x \vee y) \wedge y = y$$

вираз $(x \wedge y)$ поглинається змінною y.

Теорема 5.5. (Квайна). Якщо в ДДНФ булевої функції виконати всі можливі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то отримаємо скорочену ДНФ.

Приклад 5.2. Нехай задано булеву функцію у вигляді ДДНФ:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) .$$

Проведемо всі можливі операції неповного склеювання:

$(\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) = \overline{x} \wedge z$ (склеювання за змінною y);

$$(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) = x \wedge \bar{y} \text{ (склеювання за змінною } z\text{);}$$

$$(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = \bar{y} \wedge z \text{ (склеювання за змінною } x\text{).}$$

Таким чином скорочена ДНФ заданої функції набуває вигляду:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge z).$$

Метод Квайна дає теоретично обґрунтований спосіб отримання мінімальних форм, але для ручних обчислень при $n \le 4$ зручнішим є метод мінімізаційних карт (Карно-Вейча), який забезпечує наочність і простоту виконання операцій склеювання та поглинання.

Метод мінімізаційних карт (діаграми Карно-Вейча)

Спрощення булевих функцій можна здійснювати за допомогою законів булевої алгебри, однак такий алгебраїчний шлях мінімізації є трудомістким. Тому часто використовують графічні методи мінімізації – **діаграми Вейча** або **карти Карно**. Перевагою таких методів є наочність і простота використання при невеликій кількості змінних ($n \le 4$).

Діаграми Карно-Вейча – це спеціальні таблиці, що використовуються для задання булевих функцій і дають змогу спростити процес пошуку мінімальних форм. Передбачається, що функція подана в ДДНФ. Процес пошуку реалізується таким чином, що визначають елементарні кон'юнкції, які входять у ДДНФ і відрізняються тільки одним символом (цей символ в одну кон'юнкцію входить із запереченням, а в іншу – без). Далі виконують спрощення згідно з тотожністю неповного склеювання.

На діаграмі змінні, що склеюються, розташовані в сусідніх комірках. Сусідніми вважаються комірки, які відрізняються значенням лише однієї змінної.

Карта Карно для двох змінних та її відповідність таблиці істинності показана на рисунку 5.1.

x	y	Мінтерми
0	0	$\overline{x} \wedge \overline{y}$
0	1	$\overline{x} \wedge y$
1	0	$x \wedge \overline{y}$
1	0	$x \wedge \overline{y}$

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$ 00	$\overline{x} \wedge y$ 01
x	$x \wedge \overline{y}$ 10	$x \wedge y$ 11

Рис.5.1. Карта Карно для двох змінних.

На рисунку 5.1 зображено карту Карно для функції двох змінних $f(x, y)$. Вона являє собою таблицю розміром 2×2.

Рядки відповідають значенням змінної *x*, а стовпці відповідають значенням змінної *y*. Кожна клітинка карти відповідає одному мінтерму як показано на рисунку.

Така організація карти забезпечує те, що будь-які дві сусідні клітинки (по горизонталі або вертикалі) відповідають мінтермам, які відрізняються лише однією змінною, що дозволяє виконувати операцію склеювання.

Алгоритм мінімізації булевої функції за допомогою карт Карно:

1. Зведення булевої функції до ДДНФ (або побудова таблиці істинності).

2. Нанесення одиниць на карту Карно відповідно до наборів, на яких функція дорівнює 1.

3. Об'єднання сусідніх одиниць контурами, що охоплюють 2^k клітинок (1, 2, 4, 8 або 16). Контури мають бути прямокутними (або квадратними) і максимально можливого розміру. Побудова контурів продовжується доти, поки всі одиниці не опиняться всередині контурів. Кожний контур відповідає новому доданку спрощеної функції.

4. Виключення змінних, які змінюють своє значення в межах контуру (тобто входять як із запереченням, так і без нього).

5. Запис виразів, що залишилися для кожного контуру (це

будуть елементарні кон'юнкції, що складаються лише з тих змінних, які не змінюються в межах контуру).

6. Об'єднання отриманих виразів операцією диз'юнкції.

Карта Карно для трьох змінних та її відповідність таблиці істинності показана на рисунку 5.2.

	$\bar{y}$		y	
$\bar{x}$	$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$ 000	$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$ 001	$\bar{x}\wedge y\wedge z$ 011	$\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z}$ 010
x	$x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$ 100	$x\wedge\bar{y}\wedge z$ 101	$x\wedge y\wedge z$ 111	$x\wedge y\wedge\bar{z}$ 110
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

Рис.5.2. Карта Карно для трьох змінних.

Розглянемо застосування карти Карно для мінімізації конкретної булевої функції.

Приклад 5.3. Нехай булеву функцію трьох змінних задано у вигляді ДДНФ:

$$f(x,y,z)=(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\bar{z}).$$

Карта Карно для цієї функції показана на рисунку 5.3.

	$\bar{y}$		y	
$\bar{x}$	1			
x	1		1	1
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

Рис.5.3. Карта Карно для функції $f(x,y,z)$.

Після групування одиниць, отримали два контури по дві одиниці. Спростимо кожен контур окремо. Клітинки у вертикальному контурі відрізняються лише змінною x, тому x

виключається, а залишається $\overline{y} \wedge \overline{z}$. Аналогічно, клітинки в горизонтальному контурі відрізняються лише змінною z, тому z виключається, а залишається $x \wedge y$. Об'єднуємо отриманий результат операцією диз'юнкцію і отримаємо мінімальну ДНФ булевої функції:

$$f(x, y, z) = (\overline{y} \wedge \overline{z}) \wedge (x \wedge y).$$

Для функцій від чотирьох змінних $f(x, y, z, w)$ карта Карно будується аналогічно до карт для двох і трьох змінних, але має розмірність 4×4 (16 клітинок). Кожна клітинка відповідає одному набору значень змінних, тобто одному мінтерму.

Контур, що охоплює 2^k клітинок, дозволяє виключити k змінних. Відповідно, чим більший контур, тим простіший доданок: контур із $2=2^1$ клітинок виключає 1 змінну, контур із $4=2^2$ клітинок виключає 2 змінні, контур із $8=2^3$ клітинок виключає 3 змінні.

5.6. Контрольні питання до розділу 5.

1. Дайте означення булевої функції. Яка множина її значень та аргументів?
2. Що таке кортеж (булевий вектор) значень аргументів?
3. Сформулюйте теорему про кількість кортежів та кількість булевих функцій від n змінних.
4. Скільки існує різних булевих функцій від 3 змінних?
5. Які способи задання булевих функцій ви знаєте? Охарактеризуйте кожен із них.
6. Яку змінну називають несуттєвою (фіктивною)? Наведіть приклад.
7. Які функції називають рівносильними?
8. Скільки існує булевих функцій від однієї змінної? Назвіть їх.

9. Скільки існує булевих функцій від двох змінних? Які з них є константами або функціями одного аргументу?
10. Дайте означення кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення. За яких умов вони істинні?
11. Чим відрізняється додавання за модулем 2 від диз'юнкції?
12. Сформулюйте означення імплікації. За яких умов вона хибна?
13. Дайте означення еквівалентності. Як вона пов'язана з додаванням за модулем 2?
14. Які функції називають стрілкою Пірса та штрихом Шеффера? Чому вони утворюють самостійні базиси?
15. Що таке базис булевих функцій? Наведіть приклади різних базисів.
16. Дайте означення формули булевої алгебри.
17. Які формули називаються рівносильними?
18. Що таке рівносильні перетворення формул? Для чого їх використовують?
19. Сформулюйте основні закони булевої алгебри (ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, закони зі сталими, закони поглинання, закони де Моргана, закон суперечності, закон виключеного третього, закон подвійного заперечення).
20. Сформулюйте закони для еквівалентності.
21. Що таке нормальна форма булевої функції? Які два типи нормальних форм розрізняють?
22. Дайте означення елементарної кон'юнкції та її рангу. Наведіть приклади.
23. Що таке диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)? Наведіть приклад.
24. Що таке конституента одиниці (мінтерм)?

25. Дайте означення досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ). Які властивості її характеризують?
26. Як будуються кон'юнктивні нормальні форми (КНФ)?
27. Що таке конституента нуля (макстерм)?
28. Дайте означення досконалої кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ).
29. Сформулюйте теорему про подання булевої функції у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
30. Опишіть алгоритм переходу від довільної формули до ДДНФ / ДКНФ.
31. Як здійснити перехід від табличного подання булевої функції до ДДНФ?
32. Як здійснити перехід від табличного подання булевої функції до ДКНФ?
33. Що таке мінімізація булевих функцій? З якою метою її виконують?
34. Охарактеризуйте метод Квайна мінімізації булевих функцій.
35. У чому суть операцій неповного склеювання та поглинання?
36. Сформулюйте теорему Квайна.
37. Які переваги та недоліки методу Квайна?
38. Що таке карти Карно (діаграми Вейча)? Для якої кількості змінних їх доцільно використовувати?
39. Поясніть принцип сусідності клітинок на карті Карно.
40. Опишіть алгоритм мінімізації булевої функції за допомогою карти Карно.
41. Як будується карта Карно для двох змінних? Яке розташування мінтермів?

42. Як будується карта Карно для трьох змінних? Поясніть відповідність клітинок наборам змінних.
43. Як будується карта Карно для чотирьох змінних?
44. Як визначити, які змінні виключаються при об'єднанні клітинок у контур?
45. Поясніть залежність між розміром контуру та кількістю змінних, що виключаються.
46. Як правильно об'єднувати крайні клітинки на карті Карно? Чому вони вважаються сусідніми?
47. Чи можна за допомогою карт Карно мінімізувати функції з кількістю змінних більше чотирьох? Якщо ні, то чому?

5.7. Приклади типових задач до розділу 5.

Приклад 1. Побудуйте таблицю істинності для функції:

$$f\left(x, y, z\right) = (x \vee \overline{z}) \,|\, ((x \wedge y) \to (y \wedge z))$$

Розв'язання.

Складемо таблицю істинності для заданої функції, враховуючи пріоритет булевих операцій:

x	y	z	$\overline{z}$	$A = x \vee \overline{z}$	$B_1 = x \wedge y$	$B_2 = y \wedge z$	$B = B_1 \to B_2$	$A \,|\, B$
0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0

Приклад 2. Покажіть, що функції f_1 та f_2 рівносильні:

$$f_1\left(x, y, z\right) = x \to (y \wedge z); \qquad f_2\left(x, y, z\right) = \left(x \to y\right) \wedge \left(x \to z\right).$$

Розв'язання.

Побудуємо таблиці істинності для обох функцій і порівняємо отримані значення.

x	y	z	$y \wedge z$	$f_1 =$ $x \to (y \wedge z)$	$x \to y$	$x \to z$	$f_2 =$ $(x \to y) \wedge (x \to z)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Два стовпці значень функції f_1 та f_2 збігаються для всіх кортежів *x*, *y*, *z*. Отже, булеві функції f_1 та f_2 рівносильні.

Приклад 3. Використовуючи закони булевої алгебри, спростити вирази:

$$f(x, y) = (x \to y) \wedge (x \leftrightarrow y).$$

Розв'язання.

Виразимо імплікацію та еквівалентність через базисні операції:

$x \to y = \bar{x} \vee y$;

$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$.

Отже: $f(x, y) = (\bar{x} \vee y) \wedge \left[(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)\right]$.

Скористаємося асоціативністю та ідемпотентністю кон’юнкції:

$$f(x, y) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x);$$

$$f(x, y) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x).$$

Застосуємо дистрибутивність:

$$f(x, y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge x) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y);$$

$$f(x, y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (x \wedge y);$$

$$f(x, y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y).$$

Впізнаємо відому функцію:

$$f(x, y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) = x \leftrightarrow y.$$

Приклад 4. Побудуйте КНФ для функції

$$f(x, y, z) = ((x \to y) \vee \overline{z}) \wedge (\overline{(y \wedge z)} \to x).$$

Розв'язання.

Позбудемося імплікацій

$$x \to y = \overline{x} \vee y;$$

$$\overline{(y \wedge z)} \to x = \overline{\overline{(y \wedge z)}} \vee x = (y \wedge z) \vee x.$$

Отже, $f(x, y, z) = ((\overline{x} \vee y) \vee \overline{z}) \wedge ((y \wedge z) \vee x)$.

Застосуємо асоціативний закон в перших дужках і дистрибутивний в других:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (y \vee x) \vee (z \vee x).$$

Отримали КНФ, яка складається з трьох елементарних диз'юнкцій: одна з них має ранг 3, а дві – ранг 2.

Приклад 5. Побудуйте ДДНФ для булевої функції:

$$f(x, y, z) = \overline{(\mathrm{x} \leftrightarrow \mathrm{y})} \vee (\mathrm{y} \wedge \overline{\mathrm{z}}).$$

Розв'язання.

Позбуваємося еквівалентності

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x).$$

Звідси маємо $f(x, y, z) = \overline{(\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)} \vee (\mathrm{y} \wedge \overline{\mathrm{z}})$.

Застосуємо закон де Моргана:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x}) \vee (y \wedge \overline{z}).$$

Отримали ДНФ, але три елементарні кон'юнкції не є мінтермами. Необхідно, щоб кожна кон'юнкція містила всі змінні, від яких залежить функція (в даному прикладі x, y, z).

Виконаємо розвинення змінних в кожній елементарній кон'юнкції – доповнимо кожну з них змінними, яких у ній немає, використовуючи правило: $\mathrm{A} = \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \overline{\mathrm{B}})$

В першу кон'юнкцію $x \wedge \overline{y}$ додаємо z:

$$x \wedge \overline{y} = x \wedge \overline{y} \wedge (z \vee \overline{z}) = (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}).$$

Аналогічно перетворюємо другу і третю:

$$y \wedge \overline{x} = \overline{x} \wedge y \wedge (z \vee \overline{z}) = (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z});$$

$$y \wedge \overline{z} = y \wedge \overline{z} \wedge (x \vee \overline{x}) = (y \wedge \overline{z} \wedge x) \vee (y \wedge \overline{z} \wedge \overline{x}).$$

Об'єднуємо диз'юнкцією всі отримані мінтерми, виконуючи сортування за змінними в дужках:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}).$$

Видаляємо дублікати дужок за правилом ідемпотентності (четверта і шоста дужки співпадають). Отримаємо ДДНФ:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}).$$

Приклад 6. Довести повноту системи булевих функцій $\{\wedge, \neg\}$.

Розв'язання.

Система функцій називається повною, якщо будь-яку булеву функцію (від довільної кількості змінних) можна виразити у вигляді суперпозиції функцій із цієї системи. Для доведення повноти достатньо показати, що через $\{\wedge, \neg\}$ можна виразити відому повну систему, наприклад $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Для цього достатньо безпосередньо виразити диз'юнкцію. Виразимо диз'юнкцію через $\neg$ та $\wedge$, використовуючи закон де Моргана: $x \vee y = \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})}$.

Приклад 7. Для функції, заданої таблицею істинності, запишіть ДДНФ та мінімізуйте її за допомогою карти Карно.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Розв'язання.

Обираємо рядки таблиці, де $f(x, y, z) = 1$, і записуємо відповідні мінтерми:

1. $(0,0,0) \to \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$;
2. $(0,0,1) \to \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$;
3. $(0,1,0) \to \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$;
4. $(1,0,0) \to x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$;
5. $(1,0,1) \to x \wedge \overline{y} \wedge z$;
6. $(1,1,0) \to x \wedge y \wedge \overline{z}$.

Запишемо ДДНФ булевої функції, об'єднавши мінтерми диз'юнкцією. Отримаємо:

$$f(x,y,z)=\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\right)\vee\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z\right)\vee\left(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z}\right)\vee$$
$$\vee\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}\right)\vee\left(x\wedge\overline{y}\wedge z\right)\vee\left(x\wedge y\wedge\overline{z}\right)$$

Виконаємо мінімізацію булевої функції, використовуючи карти Карно. Відповідна карта Карно матиме вигляд:

	$\overline{y}$		y	
$\overline{x}$	1	1		1
x	1	1		1
	$\overline{z}$	z		$\overline{z}$

Згрупуємо одиниці двома контурами по 4 одиниці як показано на карті. Суцільному контуру відповідає вираз $\overline{y}$, тому що x і z виключаються як такі що мають протилежні значення в межах розглянутої ділянки. Аналогічно, розірваному контуру відповідає $\overline{z}$, а x і y виключаються. Об'єднаємо результат скорочення кожного контуру операцією диз'юнкції і отримаємо мінімальну ДНФ функції: $f(x,y,z)=\overline{y}\vee\overline{z}$.

5.8. Вправи до розділу 5.

1. Побудуйте таблиці істинності для функцій:

a) $f\left(x,y\right)=x\wedge(y\vee\overline{x})$;

b) $f\left(x,y,z\right)=(x\vee y)\wedge(\overline{z}\vee x)$;

c) $f\left(x,y\right)=\left(x\rightarrow y\right)\leftrightarrow(x\vee y)$;

d) $f\left(x,y\right)=\left(\left(\overline{x}\downarrow y\right)\wedge\left(z\leftrightarrow\overline{y}\right)\right)\downarrow\left(\left(x\wedge\overline{z}\right)\leftrightarrow\left(y\downarrow z\right)\right)$;

e) $f\left(x,y\right)=\left(\left(x\rightarrow y\right)\oplus\left(\overline{z}\vee x\right)\right)\rightarrow\left(\left(y\oplus\overline{x}\right)\vee\left(z\rightarrow\overline{y}\right)\right)$;

f) $f\left(x,y\right)=\left(\left(x\,|\,\overline{y}\right)\rightarrow\left(z\oplus x\right)\right)\left(\left(z\rightarrow y\right)\oplus(x\,|\,z)\right)$;

g) $f\left(x,y\right)=\left(\left(x\rightarrow y\right)\oplus\overline{z}\downarrow z\right)\wedge\left(\left(\left(x\vee\left(z\,|\,x\right)\rightarrow x\right)\vee z\right)\wedge x\right)$.

2. Доведіть за допомогою таблиць істинності тотожності:

$a)$ $x \to y = \bar{x} \vee y$;

$b)$ $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

$c)$ $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

3. Визначте, чи є змінна у фіктивною для функції

$$f(x, y) = x \wedge (y \vee \bar{y}).$$

4. Покажіть, що функції рівносильні:

$a)$ $f(x, y) = (x \vee y) \wedge \overline{(x \wedge y)}$ і

$g(x, y) = x \oplus y$;

$b)$ $f(x, y) = (x \vee y) \wedge (x \to y) \wedge (x \vee \bar{y})$ і

$g(x, y) = x \wedge y$;

$c)$ $f(x, y) = ((x \oplus y) \to (x \vee y)) \wedge ((\bar{x} \to y) \to (x \oplus y))$ і

$g(x, y) = x \,|\, y$;

$d)$ $f(x, y, z) = x \to (x \wedge y \to ((x \to y) \to y) \wedge z)$ і

$g(x, y, z) = y \to (x \to z)$.

5. Виразити функції за допомогою заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції функції:

$a)$ $f(x, y) = x \to y$;

$b)$ $f(x, y) = x \leftrightarrow y$;

$c)$ $f(x, y) = x \oplus y$;

$d)$ $f(x, y) = x \,|\, y$;

$e)$ $f(x, y) = x \downarrow y$;

$f)$ $f(x, y) = \overline{x \leftrightarrow y}$.

6. Застосовуючи закони де Моргана, запишіть заперечення для функцій:

$a)$ $(x \wedge y) \vee z$;

$b)$ $(x \vee y) \wedge (z \vee w)$.

7. Використовуючи закони булевої алгебри, спростити вирази:

$a)$ $x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge \bar{y} \wedge z \vee x \wedge y \wedge z$;

$b)$ $(\overline{(x \vee y)} \to (x \wedge y \wedge \bar{z})) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$;

$c)$ $((x \to y) \to x) \to y$;

$d)$ $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$;

$e)$ $(x \leftrightarrow y) \to (x \to y)$;

$f)$ $\overline{(x \to y)} \vee \overline{(z \to y)} \vee \bar{y}$;

$g)$ $(x \vee y) \wedge (y \to x) \vee \overline{(x \to z)}$.

8. Для функцій, заданих таблицею істинності запишіть ДДНФ та ДКНФ:

x	y	z	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

9. Розв’язати булеві рівняння:

$a)$ $(x \to \bar{x}) \to (\bar{x} \to x) = 0$;

$b)$ $\overline{(x \wedge \bar{y})} \vee (\bar{x} \wedge y) = 0$;

$c)$ $(x \to (y \to z)) \to ((x \mid y) \mid z) = x \mid z$.

10. Розв’язати системи булевих рівнянь:

$a)$ $\begin{cases} x \leftrightarrow y = x; \\ x \vee y = x; \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} x \to y = x \wedge y; \\ y \to x = x \vee y; \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} x \wedge y = \bar{x} \to y; \\ x \vee y = x. \end{cases}$

11. Побудуйте ДНФ для функцій:

$a)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\leftrightarrow y)\to\overline{(z\to x)}$;

$b)$ $f(x,\ y,\ z)\ =\ \overline{(x\to y)}\leftrightarrow(x\wedge\overline{y})$;

$c)$ $f(x,\ y,\ z,\ w)=(x\oplus y)\wedge(z\oplus w)$.

12. Побудуйте КНФ для функцій:

$a)$ $f(x,\ y,\ z)=\overline{(x\ \wedge\ y)}\wedge\overline{(\overline{y}\ \wedge\ z)}\wedge\overline{(z\ \vee\ \overline{x})}$;

$b)$ $f(x,\ y,\ z)\ =(x\to y)\to(\overline{x}\to z)$

$c)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\to y)\oplus(y\to z)$.

13. Побудуйте ДДНФ для функцій:

$a)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\to y)\wedge(y\to z)\wedge(z\to x)$;

$b)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\to y)\leftrightarrow(y\to z)$;

$c)$ $f(x,\ y,\ z)=x\oplus y\oplus z$.

14. Побудуйте ДКНФ для функцій:

$a)$ $f(x,\ y,\ z)=\overline{(x\ \wedge\ y)}\vee(y\ \wedge\ \overline{z})\vee(z\ \wedge\ \overline{x})$;

$b)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\to y)\to(y\to z)$;

$c)$ $f(x,\ y,\ z)=(x\downarrow y)\vee(y\downarrow z)$.

15. Побудуйте таблицю істинності та запишіть ДДНФ та ДКНФ для функції $f(x,\ y,\ z)=(x\leftrightarrow\overline{y})\wedge(y\leftrightarrow\overline{z})\wedge(z\leftrightarrow\overline{x})$.

16. Для функції $f(x,\ y,\ z)$, що дорівнює 1 на кортежах 000, 011, 101, 110, запишіть ДДНФ та ДКНФ.

17. Використовуючи метод Квайна, мінімізуйте функцію:

$a)$ $f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge y\ \wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\ \wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)$;

$b)$ $f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})$.

18. Застосовуючи операції неповного склеювання та поглинання, знайдіть скорочену ДНФ для функцій з попередньої вправи.

19. За допомогою карти Карно мінімізуйте функцію трьох змінних, задану таблицею істинності:

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

20. Мінімізуйте булеві функції, задані на картах Карно:

	$\overline{y}$		y	
$\overline{x}$	1	1		1
x			1	1
	$\overline{z}$	z		$\overline{z}$

	$\overline{y}$		y	
$\overline{x}$	1			1
x	1			1
	$\overline{z}$	z		$\overline{z}$

	$\overline{y}$		y	
$\overline{x}$	1	1		1
x		1	1	1
	$\overline{z}$	z		$\overline{z}$

	$\overline{y}$		y	
$\overline{x}$	1	1	1	1
x			1	1
	$\overline{z}$	z		$\overline{z}$

21. Мінімізуйте функції за допомогою карти Карно:

a) $f(x,y,z) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$;

b) $f(x,y) = x \vee (\overline{x} \wedge y)$.

22. Мінімізуйте функцію $f(x,y,z,w)$, яка дорівнює 1 на кортежах: 0000, 0010, 0100, 0110, 1000, 1010, 1100, 1110.

23. Довести повноту наступних систем булевих функцій:

a) $\{\neg, \rightarrow\}$; *c*) $\{\vee, \neg\}$;

b) $\{\,|\,\}$; *d*) $\{\downarrow\}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дискретна математика : підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина; за наук. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Пасічника. 7-ме видання, випр. та допов. Львів : ПП «Магнолія 2006»; ЛНУ ім. Івана Франка, 2024. 432 с.
2. Гнатів Б. В., Гладун В. Р., Гнатів Л. Б. Дискретна математика: навч. посіб. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2021. 400 с.
3. Висоцька В.А., Литвин В.В., Лозинська О.В. Дискретна математика : практикум (Збірник задач з дискретної математики) : навчальний посібник. Львів: Видавництво «Новий Світ – 2000», 2020. 575 с.
4. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Підручник. Вид. 2-ге перероб. і доп. Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. 324 с.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика: підручник для студентів вищ. навч. закл. Чернівці-Київ: Видавничий дім «Букрек», 2014. 568 с.
6. Журавчак Л.М. Дискретна математика для програмістів. Львів: Львівська політехніка, 2019. 420 с.
7. Журавчак Л. М., Мельникова Н. І., Сердюк П. В. Практикум з комп'ютерної дискретної математики. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2020. 316 с.
8. Epp S. Discrete Mathematics with Applications. 5th ed. Cengage Learning, 2018. 1056 p.
9. Jech T. Set Theory. 3rd ed. Springer, 2016. 634 p.
10. Crama Y., Hammer P.L. Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications. Cambridge University Press, 2018. 712 p.