РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та методики її навчання

«До захисту допущено»

Завідувачка кафедри

_______Наталія ГЕНСІЦЬКА-АНТОНЮК

«______»___________2025р.

протокол №

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВО-ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА ПРИ ФАКУЛЬТАТИВНОМУ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Виконав:

здобувач другого (магістерського) рівня вищої освіти

групи М-М-21 спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Назар ЧЕРЕВКО

Науковий керівник:

кандидат технічних наук, доцент

Ігор ПРИСЯЖНЮК

Рівне – 2025

Анотація

Магістерська робота обсягом 72 сторінок, містить 9 ілюстрацій, 1 таблиця та 31 використане джерело.

Об'єкт дослідження - функція Ламберта та її застосування у розв'язанні трансцендентних рівнянь.

Метою роботи є аналіз властивостей функції та розробка методичних підходів для її застосування в шкільному курсі. Використано аналітичні та чисельні методи дослідження.

Результати роботи включають класифікацію гілок функції W, приклади розв'язання рівнянь і методичні рекомендації для факультативів.

Наукова новизна полягає у поєднанні теоретичного аналізу функції з практичними завданнями для навчання. Робота має практичне значення для поглиблення математичної підготовки учнів.

Ключові слова: функція Ламберта, трансцендентні рівняння, показникові рівняння, логарифмічні рівняння.

Abstract

The master's thesis consists of 72 pages, includes 9 illustrations, 1 table, and 31 references.

The research object is the Lambert function and its application in solving transcendental equations.

The aim of the work is to analyze the properties of the function and develop methodological approaches for its use in the school curriculum. Analytical and numerical research methods were applied.

The results include the classification of the W function branches, examples of equation solutions, and methodological recommendations for electives.

The scientific novelty lies in combining theoretical analysis of the function with practical tasks for teaching. The work has practical significance for enhancing students’ mathematical training.

Keywords: Lambert function, transcendental equations, exponential equations, logarithmic equations.

Зміст

Вступ

В умовах сьогодення вивчення та аналіз взаємозв'язків елементів різної природи є надзвичайно корисним. В шкільному курсі математики такі взаємозв'язки можна розглядати як залежності однієї змінної від іншої, або, інакше кажучи, функції. Дослідження функцій не тільки розвиває в учнів здатність аналізувати певні зміни величин та проектувати це на площину повсякденності, але й має прикладне значення в різних галузях науки, таких як: інформатика, природничі науки, економіка та інші.

Показниково-логарифмічні рівняння досить часто з'являються в прикладній математиці. Розв'язання таких рівнянь часто зводиться до застосування властивостей логарифмічних, степеневих та показникових функцій. Проте, якщо ускладнити рівняння композицією будь-яких двох функцій, що перелічені вище, то рівняння такого типу часто не можна розв'язати звичними нам методами. Саме тут і з'являється функція Ламберта.

З розвитком технологій своє «друге життя» отримала функція Ламберта, яка не є елементарною функцією, проте застосовна для чисельного, або, в деяких випадках, точного розв'язку трансцендентних показниково-логарифмічних рівнянь. Станом на сьогодні існує досить багато програмних засобів, які містять запрограмовану реалізацію функції Ламберта, наприклад: WolframAlpha, Maple, MATLAB, GeoGebra, Python-бібліотеки. Саме ці засоби можуть дозволити інтегрувати функцію в шкільний курс факультативної форми вивчення математики.

Можна зауважити і той факт, що вивчення цієї функції має низку переваг. По-перше, учні зможуть значно поглибити свої знання та розширити математичний світогляд, оскільки з такими спеціальними функціями вони ще не стикались, що дасть уявлення про необмеженість математики лише шкільною програмою. По-друге, учні будуть формувати навички застосування різних міжпредметних зв’язків. По-третє, сучасні інструменти дозвоюлять зробити процес вивчення більш наочним та дослідницьким.

Зваживши все вище перелічене, можемо дійти до висновку, що вивчення функції Ламберта в курсі факультативного вивчення математики має свої переваги. Також можна додати й те, що вивчення цієї функції дозволить учням не лише розв’язувати складні рівняння, але й ознайомить їх із різними підходами вищої математики та комп’ютерними обчисленнями.

Актуальність теми дослідження визначається необхідністю впровадження сучасних математичних методів у процесі навчання старшокласників. У шкільному курсі математики зазвичай вивчаються елементарні функції, проте з розвитком технологій з’являється все більше складніших взаємозв’яків, які можуть не підпорядковуватись елементарним методам аналізу. Тут можуть бути застосовні спеціальні функції, яким не приділяється значна увага в курсі шкільної математики. Однією з них і є функція Ламберта.

Об’єктом дослідження є трансцендентні показниково-логарифмічні рівняння та методи розв’язування.

Предметом дослідження є застосування функції Ламберта при розв’язуванні складних показникових та логарифмічних рівнянь у шкільному курсі математики 11-го класу.

Мета дослідження – з’ясувати як застосовується функція Ламберта при розв’язанні складних показниково-логарифмічних рівнянь, які не підпорядковуються звичайним методам розв’язання, а також обґрунтувати доцільність застосування цієї функції у процесі вивчення.

Завдання дослідження:

1. З’ясувати історію виникнення функції Ламберта.
2. Визначити основні властивості цієї функції.
3. Визначити та зібрати основні рівняння, для розв’язання яких застосовна W-функція.
4. Скласти методичні рекомендації для вивчення цієї теми.
5. Дослідити інструменти, які дозволять краще засвоїти властивості функції.

Теоретичне значення роботи полягає в тому, що буде:

- проаналізовано основні теоретичні відомості W-функції;
- систематизовано матеріал по темі магістерської роботи;
- створено зразок проведення факультативного уроку за даною темою.

Практичне значення полягає в створенні авторських прикладів та завдань по темі, які можуть використовуватись вчителями, студентами та викладачами для вивчення застосування функції Ламберта в розв’язанні трансцедентних показниково-логарифмічних рівнянь.

Наукова новизна роботи визначається в поєднанні аналітичних методів дослідження функції Ламберта в поєднанні з методичними рекомендаціями при її вивченні. Пропонується вивчення нової, з точки зору учнів, неелементарної функції, для якої існують свої методи застосування при розв’язанні рівнянь.

Структура роботи. Дипломна робота складається зі: вступу; трьох розділів, які включають в себе теоретичні відомості про функцію, приклади розв’язання рівнянь та доцільність і методичні рекомендації щодо вивчення функції Ламберта; висновків та списку використаної літератури.

Зв'язок роботи з науковою темою кафедри. Кваліфікаційна робота виконана на кафедрі математики та методики її навчання Рівненського державного гуманітарного університету згідно з науковою темою кафедри «Теоретико-методичні засади формування професійної компетентності майбутніх учителів математики» (державний реєстраційний номер 0125U003357).

Апробація результатів дослідження.

Кваліфікаційна робота заслуховувалась на кафедрі математики та методики її навчання, звітній науково-практичній конференції рівненського державного гуманітарного університету та XVIII Всеукраїнській науково-практичній конференції з теми «Інформаційні технології в професійній діяльності», а також на науково-методичному семінарі за темою «Формування компетентностей вчителя у здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними програмами Середня освіта (Математика, Інформатика) та Середня освіта (Математика). В електронному виданні було опубліковано дві статті за темами «Актуальність вивчення функції Ламберта при дистанційні та змішаній формах проведення факультативі з математики» та «Методичні особливості вивчення функції Ламберта з використанням інформаційних технологій при факультативному вивченні математики програми 11-го класу».

Розділ 1. Теоретичні основи функції Ламберта

1.1 Історичний екскурс становлення функції Ламберта

У 1758 році при вивченні Ламбертом рівняння (1) розпочала свій шлях однойменна функція $W(x)$[27]:

$$x^m + px = q. \tag{1.1}$$

Вчений Йоганн Генріх Ламберт встановив, що розв'язок рівняння (1) є збіжним до наступної оцінки[27]:

$$x = \frac{q}{p} - \frac{q^m}{p^{m+1}} + m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m+1}} - m\frac{3m-1}{2}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m+1}} + \cdots.$$

Проте, варто зауважити, що на той час він ще не встановив загальний розв'язок рівняння для будь-якого значення параметра m.

Через вагомі результати дослідження його запрошує до Берліна Леонард Ейлер в 1764 р.

Свого часу, Леонард Ейлер вивчав рівняння, яке було більш загальним[27]:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}. \tag{1.2}$$

З'ясуємо, як для цього рівняння застосовується функція Ламберта. Леонард вирішив розглянути випадок рівності α та β. Поділимо ліву та праву частини рівняння на $\alpha - \beta$ та здійснимо граничний перехід $\beta \to \alpha$[27]:

$$\frac{x^\alpha - x^\beta}{\alpha - \beta} = vx^{\alpha+\beta}.$$

Очевидно, що права частина рівняння набуде вигляду $vx^{2\alpha}$, а для лівої частини, вважаючи за змінну β, за правилом Лопіталя отримуємо $x^\alpha lnx$. Поділивши обидві частини рівняння на x^α, отримаємо наступне рівняння[27]:

$$lnx = vx^{\alpha}. \tag{1.3}$$

Домножимо обидві частини рівняння на α та для лівої частини рівняння використаємо логарифмічну тотожність[27]:

$$lnx^{\alpha} = \alpha vx^{\alpha}.$$

Введемо заміни: $y = x^{\alpha}, u = \alpha v$. Тоді рівняння набуде вигляду[27]:

$$lny = uy. \tag{1.4}$$

Можемо помітити, що це те ж саме рівняння (1.3), але при $\alpha = 1$. Це означає, що для розв'язку рівняння (1.2) достатньо розв'язати (1.4). Саме рівняння (1.4) приведе нас до функції Ламберта. Проекспоненціюємо обидві частини рівняння[27]:

$$y = e^{uy}, |: e^{uy}$$

$$ye^{-uy} = 1.$$

Введемо заміну: $z = -uy$, тоді

$$-\frac{z}{u}e^{z} = 1, | \cdot (-u)$$

$$ze^{z} = -u.$$

Позначивши $a = -u$, остаточно отримаємо:

$$ze^{z} = a. \tag{1.5}$$

Розв'язком цього рівняння є значення функції Ламберта $W(x)$ в точці a, тобто $W(a)$. Варто зауважити, що дане рівняння може мати багато розв'язків.

Також відмітимо те, що Леонард Ейлер вперше описав функцію W у статті, опублікованій через 2 роки після смерті Ламберта[18]. Можна зробити висновок, що Ейлер був ближчим до відкриття даної функції, але тоді чому ж функція отримала своє ім'я на честь Ламберта? Деякі дослідники дають на це декілька відповідей. Наприклад, Брайан Хейс вважає, що Ейлер дуже завдячував Ламберту за його попередній внесок для цієї функції[23]. Також дослідник мав ще одну думку стосовно цього. Він посилався на дослідників Роберта Корлеса, Дональда Кнута, Девіда Джеффрі, які дали сучасну назву даній функції. Ці дослідники назвали функцію в честь Генріха, а не Леонарда, щоб уникнути заплутаності, адже вже існувала інша функція Ейлера[23].

Виникає також і питання: чому ж саме $W(x)$? Якщо функцію було названо в честь Ламберта, то логічніше було б позначити її L. Виявляється, цьому питанню було відведено цілу статтю дослідником Хейсом[23].

Браян Хейс наводив декілька аргументів. Дослідники Р. Е. Шафер, В. П. Коулі та Ф. Н. Фрітш в своїй публікації використали позначення w для рівняння $we^w = x$[15]. Також на це позначення вплинуло ПЗ Maple, з яким працював Гастон Гоннет, а саме створював код для обчислення розв'язків рівняння $we^w = x$, проте в даному середовищі функції не можна записати малими літерами, саме тому Гастон використав велику літеру W[15].

1.1 Властивості функції Ламберта

Тут ми розглянемо рівняння, що зводяться до функції Ламберта, похідні та інтеграли, область визначення та значень, а також сталу Ω (омега)[15].

1) Рівняння, які мають зв'язок із функцією Ламберта

а) Рівняння, що визначає W

Раніше було записано рівняння

$$xe^x = a, \tag{2.1}$$

де a – параметр.

Функція Ламберта задається як розв'язок даного рівняння, тобто $x = W(a)$. Це рівняння ще називають визначним, або означальним[15].

Також оскільки $x = W(a)$, то маємо тотожність:

$$W(a)e^{W(a)} = a. \tag{2.2}$$

Функцію W можна визначити інакше. Розглянемо функцію

$$f(x) = xe^x,$$

тоді

$$f(x) = a. \tag{2.3}$$

Обернена функція f^{-1} визначається наступним чином[15]:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x, \text{ і } f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Щоб розв'язати рівняння $f(x) = a$, можна перейти до оберненої функції. Тоді отримаємо:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(a).$$

З урахуванням спрощення лівої частини, в результаті будемо мати:

$$x = f^{-1}(a).$$

Поклавши, $W(a) = f^{-1}(a)$, остаточно отримаємо

$$x = W(a).$$

б) Деякі особливі значення для функції Ламберта

Повернемось до рівняння (2.1). Покладемо $a = 0$, тоді рівняння буде мати один розв'язок $x = 0$. Отже[15]:

$$W(0) = 0.$$

Для цього ж самого рівняння покладемо $a = e$, тоді розв'язком буде $x = 1$, оскільки

$$1 \cdot e^1 = e.$$

Робимо висновок, що

$$W(e) = 1. \tag{2.4}$$

Таким же чином можна перевірити, що

$$W\left(-\frac{1}{e}\right) = -1, \tag{2.5}$$

$$W(e \cdot e^{e}) = e. \tag{2.6}$$

Користь рівняння (2.1) полягає в тому, що існує багато рівнянь, які зводяться до виду (2.1), тобто їх можна розв'язати за допомогою функції Ламберта[5].

Брайан Хейс у своїй статті згадує:

«Ті, хто захоплюється функцією W, прагнуть бачити її у списку стандартних функцій підручників поряд із логарифмом, синусом і квадратним коренем[15].

Прихильники W мають на це вагомі аргументи. У статті 2002 року Корлес і Джеффрі стверджують, що W є, в певному сенсі, найменшим кроком вперед у розвитку елементарних функцій[16]. Функція Ламберта W є найпростішим прикладом кореня з показникового многочлена; а показникові многочлени – наступний найпростіший клас функцій після многочленів.»

2) Розв'язок рівнянь виду $xb^{x} = a$

За шкільною програмою нам відомо, що показникова функція може бути визначена для будь-яких основ $b > 0$. Щоб, наприклад, розв'язати показникове рівняння $5^{x} = 2$, потрібно прологарифмувати обидві частини рівняння за основою 5, тобто $x = 2$. Але також є відома властивість для логарифмів:

(2.7)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

де $a, b, c > 0, a, c \neq 1$.

З цього можна зробити висновок, що логарифм за будь-якою можливою основою можна подати за іншою основою частки логарифмів. Тобто, для рівняння $5^x = 2$, використовуючи (2.7), отримаємо:

$$x = \frac{ln2}{ln5}.$$

Такий же висновок можемо перенести на функцію Ламберта. Нехай розв'язком рівняння[27]

$$xb^x = a \tag{2.8}$$

є функція W для основи b, позначимо це як $W_b(a)$. Спробуємо, по аналогії з логарифмом, виразити $W_b(a)$ за тією ж функцією, але з основою e, тобто $W(a)$.

Знову використаємо властивість логарифма $b^x = e^{xlnb}$. Покладемо обмеження $b > 0, b \neq 1$. Підставивши цей вираз у (2.8), отримаємо[27]:

$$xe^{xlnb} = a.$$

Виконаємо заміну $y = xlnb$, тоді:

$$\frac{y}{lnb}e^y = a, | \cdot lnb$$

$$ye^y = alnb.$$

Як було описано вище, це рівняння розв'язується застосувавши функцію Ламберта[27]:

$$y = W(alnb).$$

Також відомо, що $x = \frac{y}{lnb}, x = W_b(a)$. Тобто, отримали формулу переходу від однієї основи до класичної e.

(2.9)

$$W_b(a) = \frac{W(alnb)}{lnb},$$

де $b > 0, b \neq 1$.

3) Рівняння $x + b^x = a$

Розглянемо рівняння

$$x + b^x = a \quad (2.10)$$

Розглянемо це рівняння, як рівність показників. Тоді

$$b^{x+b^x} = b^a.$$

За властивістю степеня $b^{x+y} = b^x b^y$:

$$b^x b^{b^x} = b^a.$$

Виконаємо заміну $y = b^x$:

$$yb^y = b^a.$$

В пункті 2) було встановлено, що дане рівняння буде мати розв'язок:

$$y = W_b(b^a).$$

Повернемось до заміни $y = b^x => x = y$, тоді[27]:

$$x = W_b(b^a).$$

В пункті 6) буде показано частковий випадок, в якому можна узагальнити той факт, що логарифм функції Ламберта можна подати через функцію W. За формулою (2.19), отримуємо[27]

$$W_b(a) = log_b a - W_b(a).$$

Тобто, можемо позбутись логарифма. Застосуємо дану формулу і (2.9). Отримаємо розв'язок рівняння (2.10):

$$x = W_b(b^a) = log_b b^a - W_b(b^a) = a - \frac{W(b^a lnb)}{lnb},$$

тобто

(2.11)

$$x = a - \frac{W(b^a lnb)}{lnb}.$$

4) Рівняння $x + log_b x = a,\ xlog_b x = a$

Розглянемо

$$x + log_b x = a,$$

де a – стала.

Спробуємо дійти до цього рівняння з іншого боку. Розглянемо для цього рівняння $xb^x = a$. Прологарифмуємо обидві його частини за основою b[27]:

$$x + log_b x = log_b a,$$

де $log_b a$ також є сталою. Тобто корені рівнянь $xb^x = a$ та $x + log_b x = a$ будуть в певній мірі еквівалентними.

Для рівняння $xb^x = a => x + log_b x = log_b a => x = W_b(a)$.

Тоді для $x + log_b x = a$ отримаємо:

$$x = W_b(b^a). \qquad (2.12)$$

Загалом, рівняння можна узагальнити до виду:

$$x^c + dlog_b\left(hx^f\right) = a.$$

Розв'язком такого рівняння буде:

$$x = \left(\frac{df}{c} W_b\left(\frac{c}{df}\left(\frac{b^{\frac{a}{d}}}{h}\right)^{\frac{c}{f}}\right)\right)^{\frac{1}{c}}. \qquad (2.13)$$

Якщо ж розглянути рівняння

$$xlog_b x = a,$$

то в цьому випадку можемо виконати підстановку $x = b^y$:

$$b^y log_b b^y = a,$$

де після спрощення отримаємо:

$$yb^y = a.$$

Маємо розв'язок за функцією Ламберта з основою b[27]:

$$y = W_b(a).$$

Повернувшись до заміни $x = b^y$, отримаємо $y = log_b x$. Тоді

$$log_b x = W_b(a).$$

Розглянемо це як рівність степенів, тоді

$$x = b^{W_b(a)}.$$

Також можна і врахувати той факт, що виконується тотожність:

$$W_b(a) b^{W_b(a)} = a.$$

Тоді остаточно отримаємо:

$$x = \frac{a}{W_b(a)}. \qquad (2.14)$$

Даний вид рівнянь теж можна узагальнити до наступного:

$$x^f log_b(cx^d) = a.$$

Розв'язком цього рівняння буде:

$$x = (\frac{d}{af} W_b\left(\frac{af}{d} c^{\frac{f}{d}}\right))^{-\frac{1}{f}}. \qquad (2.15)$$

5) Рівняння $x^x = a$ та $x^a = a^x$.

Розглянемо спочатку простіше рівняння

$$x^x = a.$$

Прологарифмуємо за основою e обидві частини рівняння. Тоді отримаємо:

$$xlnx = lna.$$

Рівняння такого виду було розглянуто раніше. Використаємо формулу (2.14)[1]:

(2.16)

$$x = \frac{lna}{W(lna)}.$$

Далі розглянемо рівняння

$$x^a = a^x.$$

Знову ж прологарифмуємо за основою e обидві частини рівняння:

$$alnx = xlna.$$

Звідси маємо накласти обмеження $x, a > 0$. Тоді зможемо поділити обидві частини рівняння на ax.

$$\frac{lnx}{x} = \frac{lna}{a}.$$

Використаємо заміну $y = \frac{1}{x}$:

$$yln\frac{1}{y} = \frac{lna}{a};$$

$$ylny = -\frac{lna}{a}.$$

Знову використовуємо результат формули (2.14). Тоді:

$$y = \frac{-\frac{1}{a}lna}{W\left(-\frac{1}{a}lna\right)}.$$

Повернемось до заміни $y = \frac{1}{x} => x = \frac{1}{y}$ та отримаємо розв’язок:

$$x = -\frac{a}{lna}W\left(-\frac{1}{a}lna\right). \qquad (2.17)$$

6) Показник і логарифм від функції Ламберта

Існує чимало властивостей дій зі степенем та логарифмом, наприклад, правило додавання степенів, або правило додавання логарифмів. Для функції Ламберта також існують деякі чудові властивості. Наприклад, повернімося до самого початку та запишемо формульне визначення функції. Надалі будемо розглядати це функціонально[27]:

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Поділимо обидві частини тотожності на $W(x)$:

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}. \tag{2.18}$$

Прологарифмуємо за основою e обидві частини тотожності:

$$lne^{W(x)} = ln\frac{x}{W(x)}.$$

Врахувавши властивості логарифмів, остаточно маємо

$$W(x) = lnx - lnW(x)$$

або (2.19)

$$W(x) + lnW(x) = lnx \quad (x > 0).$$

7) Функціональні аргументи функції Ламберта

Розглянемо аргумент $xlnx$. Доведемо той факт, що [27]

$$W(xlnx) = lnx, \qquad x \geq \frac{1}{e}. \tag{2.20}$$

З (2.2), підставивши $a = xlnx$, маємо

$$W(xlnx)e^{W(xlnx)} = xlnx.$$

Тепер прирівняємо $e^{W(xlnx)} = x$. Тоді виконується $W(xlnx) = lnx$, а отже виконується і вся рівність. Тобто, таким чином ми отримуємо, що

$$W(xlnx) = lnx.$$

Ця тотожність працює не лише для $x \geq \frac{1}{e}$, але й для $x < \frac{1}{e}$. Проте, для $x < \frac{1}{e}$ функція $W(xlnx)$ стане комплексною. Щоб цього уникнути, розглядаємо саме вказані значення.

Також, з останньої рівності, заміною $x \to \frac{1}{x}$ можна отримати

$$W\left(-\frac{lnx}{x}\right) = -lnx, \qquad 0 \le x \le e.$$

8) Лінійна комбінація двох значень функції W.

Покажемо, що виконується рівність[27]

$$aW(x) + bW(y) = W\left(\left(\frac{x}{W(x)}\right)^a \left(\frac{y}{W(y)}\right)^b \left(aW(x) + bW(y)\right)\right), \tag{2.21}$$

а далі розглянемо цю рівність при фіксованих значеннях a та b.

Використаємо рівняння (2.2). Підставимо в це рівняння вираз

$$aW(x) + bW(y).$$

Тоді отримаємо

$$\left(aW(x) + bW(y)\right)e^{aW(x)+bW(y)} = f(x, y, a, b).$$

Як відомо, розв'язком такого рівняння буде:

$$W\left(f(x, y, a, b)\right) = aW(x) + bW(y). \tag{2.21}$$

Тобто, маємо рівняння:

$$W\left(\left(aW(x) + bW(y)\right)e^{aW(x)}e^{bW(y)}\right) = aW(x) + bW(y).$$

Врахуємо ще також і те, що $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, тоді остаточно отримаємо:

$$aW(x) + bW(y) = W\left(\left(aW(x) + bW(y)\right)\left(\frac{x}{W(x)}\right)^a \left(\frac{y}{W(y)}\right)^b\right),$$

що й треба було довести.

Підставивши спочатку $a = b = 1$, а потім $a = 1, b = -1$, отримаємо наступні тотожності[1]:

$$W(x) + W(y) = W\left(\frac{xy}{W(x)} + \frac{xy}{W(y)}\right), \tag{2.22}$$

$$W(x) - W(y) = W\left(\frac{x}{W(x)}\frac{W(y)}{y}\big(W(x) - W(y)\big)\right).$$

Зауваження: якщо $W(x) + W(y) = a$, то виконується рівність

$$W(x)W(y) = e^{-a}xy. \tag{2.23}$$

Доведемо це наступним чином

$$e^{a} = e^{W(x)+W(y)} = e^{W(x)}e^{W(y)} = \frac{x}{W(x)}\frac{y}{W(y)}.$$

Дійсно, перемноживши обидві частини тотожності $e^{a} = \frac{x}{W(x)}\frac{y}{W(y)}$ на $e^{-a}W(x)W(y)$, остаточно отримаємо (2.23)[27].

9) Константа Ω, як наслідок лінійної комбінації

Якщо зафіксуємо функцію Ламберта при $x = 1$, то отримаємо значення функції $W(1) = \Omega$. Це значення є особливим числом, до якого є цікавість в декількох розділах математики.

Відзначимо те, що застосувавши числові методи, математики встановили чималу кількість цифр дробової частини. Запишемо це число включно з 20 цифрами після коми:

$$\Omega = 0{,}567143290409783872999686\ldots$$

Також відомо, що це число є трансцедентним.

Запишемо деякі властивості цього числа у взаємозв’язку з функцією Ламберта.

Як було описано,

$$W(1) = \Omega. \tag{2.24}$$

Тоді виконується рівність:

$$W(1)e^{W(1)} = 1,$$

або ж

$$\Omega e^{\Omega} = 1.$$

Прологарифмувавши обидві частини, отримаємо наступну тотожність:

$$\Omega + ln\Omega = 0,$$

або

$$ln\frac{1}{\Omega} = \Omega.$$

Розглянувши суму двох значень функції Ламберта з формули (2.22), а також поклавши $x = y = 1$, отримуємо:

$$W\left(\frac{2}{\Omega}\right) = 2\Omega. \tag{2.25}$$

Якщо ж для цього рівняння покласти $x = e, y = 1$, то отримаємо:

$$1 + \Omega = W\left(e + \frac{e}{\Omega}\right).$$

Далі покладемо $x = 1, y = ze^{z}$. Врахуємо, що $W(ze^{z}) = z$. Використавши формулу (2.22), будемо мати:

$$\Omega + z = W\left(\frac{ze^{z}}{\Omega} + \frac{ze^{z}}{z}\right). \tag{2.26}$$

Покладемо $z = 2$. Тоді виконується рівність:

$$\Omega + 2 = W\left(\frac{2e^{2}}{\Omega} + e^{2}\right).$$

Також існує ще одна цікава рівність:

$$\Omega x = W\left(\frac{x}{\Omega^{x-1}}\right), \qquad x \geq -\frac{1}{e}. \tag{2.27}$$

Щоб довести цей факт, припустимо його справедливість. Тоді має виконуватись

$$\Omega x e^{\Omega x} = \frac{x}{\Omega^{x-1}}.$$

Елементарними перетвореннями отримуємо

$$\Omega^x e^{\Omega x} = 1,$$

тоді

$$(\Omega e^{\Omega})^x = 1.$$

З (2.24) маємо, що $\Omega e^{\Omega} = 1$, тобто

$$1^x = 1.$$

Це справедлива рівність для всіх значень x. Проте, покажемо, що (2.27) виконується лише для $x \geq -\frac{1}{e}$.

Аргумент функції Ламберта повинен бути більшим або рівним від $-\frac{1}{e}$, оскільки при менших значеннях функція стане комплекснозначною[13]. В такому разі ми отримаємо нерівність:

$$\frac{x}{\Omega^{x-1}} \geq -\frac{1}{e}.$$

Якщо підійти до цієї нерівності функціонально, то можна встановити, що

$\frac{x}{\Omega^{x-1}}$ є зростаючою. Тобто, для розв'язку нерівності достатньо розв'язати рівняння

$$\frac{x}{\Omega^{x-1}} = -\frac{1}{e}.$$

З якої отримуємо

$$x = -\frac{1}{e},$$

тоді розв'язком нерівності буде

$$x \geq -\frac{1}{e},$$

що і треба було довести.

Також розглянувши тотожність (2.27) при підстановці $x = e$, можемо отримати[13]

$$e\Omega = W\left(\frac{e\Omega}{\Omega^e}\right).$$

10) Похідна та інтеграл для функції Ламберта.

А) Похідна першого та другого порядків

Для стандартного аналізу функції необхідно вміти диференціювати функцію. Отже, спробуємо знайти похідні функції Ламберта. Для цього розглянемо [13,17]

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}W'^{(x)} = 1,$$

$$W'(x)\left(e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}\right) = 1, |: \left(e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}\right)$$

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1 + W(x))}.$$

Врахуємо, що $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, тоді

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\left(1 + W(x)\right)}. \qquad (2.28)$$

Можна помітити, що отримана похідна може не існувати. Наприклад, коли $1 + W(x) = 0$ (тобто, $x = -\frac{1}{e}$) або $x = 0$.

Якщо розглядати $x = -\frac{1}{e}$, то це значення називають сингулярним. Його особливість в тому, що воно розділяє гілки функції Ламберта. До цього повернемось пізніше.

Якщо розглядати $x = 0$, то в такому випадку, дослідивши ряд Тейлора в околі нуля, отримаємо $\frac{W(x)}{x} = 1$, тобто

$$W'(0) = 1.$$

Також тривіальним є випадок, коли $x = 1$. Тоді маємо

$$W'(1) = \frac{\Omega}{1 + \Omega}.$$

Знайдемо другу похідну:

$$W''(x) = \left(\frac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}\right)' =$$

$$= \frac{W'(x)x\big(1 + W(x)\big) - W(x)(1 + W(x) + xW'(x)}{x^2\big(1 + W(x)\big)^2} =$$

$$= \frac{\frac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}x\big(1 + W(x)\big) - W(x)\left(1 + W(x) + x\frac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}\right)}{x^2\big(1 + W(x)\big)^2} =$$

$$= \frac{W(x) - W(x)\left(1 + W(x) + \frac{W(x)}{1 + W(x)}\right)}{x^2\big(1 + W(x)\big)^2} =$$

$$= \frac{W(x)(1 + W(x)) - W(x)(\big(1 + W(x)\big)^2 + W(x))}{x^2\big(1 + W(x)\big)^3} =$$

$$= \frac{W(x)(1 + W(x) - 1 - 2W(x) - W^2(x) - W(x))}{x^2\big(1 + W(x)\big)^3} =$$

$$= -\frac{W^2(x)(W(x) + 2)}{x^2\big(1 + W(x)\big)^3}.$$

Тобто,

$$W''(x) = -\frac{W^2(x)(W(x) + 2)}{x^2\big(1 + W(x)\big)^3}. \qquad (2.29)$$

б) Інтеграл

Розглянемо невизначений інтеграл

$$I = \int W(x)dx.$$

Через визначення функції Ламберта можна доволі просто знайти цей інтеграл. Нехай $W(x) = t$, тоді $x = te^t, dx = (1+t)e^t dt$[27].

Отже,

$$\int W(x)dx = \int t(1+t)e^t dt.$$

Цей інтеграл можна знайти за допомогою інтегрування частинами.

$$\int t(1+t)e^t dt = e^t(t^2 - t + 1) + C.$$

Повернувшись до зворотньої заміни, а також врахувавши, що $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, остаточно отримаємо [20]

$$\int W(x)dx = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) + C. \tag{2.30}$$

З отриманої формули можна обчислювати також і визначені інтеграли, наприклад[13]:

$$\int_0^1 W(x)dx = \Omega + \frac{1}{\Omega} - 1. \tag{2.31}$$

11) Ряд Тейлора для функції Ламберта.

Розглянемо ряд Тейлора для так званої головної вітки функції Ламберта W_0, яку детальніше буде описано згодом. Для того, щоб аналітично подати цю гілку в ряд Тейлора, використаємо теорему Лагранжа про обернення рядів[19,21]. За цією теоремою маємо

$$f^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^n \Big|_{x=x_0}. \tag{2.32}$$

Врахуємо, що $f(x) = xe^x, x = W(y)$. Для розвинення в ряд оберемо точку (0,0). В такому випадку отримаємо[8]:

$$W(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{x}{xe^x}\right)^n |_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{-nx} |_{x=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} (-n)^{n-1} e^{-nx} |_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} y^n.$$

Замінивши $y = x$, отримаємо:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n.$$

Встановимо область збіжності знакозмінного ряду. Для цього скористаємось ознакою Д'Аламбера[8]:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{(-n-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = e|x|$$

Але $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, тоді

$$e|x| < 1 \quad => \quad |x| < \frac{1}{e}.$$

Тобто, в результаті маємо розвинення в ряд функції Ламберта разом із областю збіжності:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n, \qquad |x| < \frac{1}{e}. \tag{2.33}$$

Даний ряд застосовний при чисельних методах встановлення наближеного розв'язку рівняння з будь-якою точністю для відносно малих значеннях x.

Тобто, за розкладом в ряд Тейлора маємо:

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6 + O(x^7).$$

Застосувавши цей ряд, можна обчислити наступну границю, яку використовували для похідної:

$$\frac{W(x)}{x} = 1. \tag{2.36}$$

Відзначимо, що для обчислення значення функції Ламберта при великих значеннях x, використовують наближену формулу[30]:

$$W(x) = lnx - ln\,(lnx)\,.$$

12) Рівняння xe^x та його кількість розв'язків. Дійсні гілки функції Ламберта[25].

Побудуємо графік функції $f(x) = xe^x$.

- $D(f) = R$;
- Функція має єдиний нуль в початку координат;
- Для $x > 0$ $(x < 0)$ => $f > 0$ $(f < 0)$;
- Функція є ні парною, ні непарною, неперіодичною;
- $f'(x) = (x+1)e^x$, тобто $f'(x) = 0$, коли $x = -1$. Тоді $f = -\frac{1}{e}$. Маємо точку глобального мінімуму $(-1; -\frac{1}{e})$.
- $f''(x) = (x+2)e^x$, тобто $f''(x) = 0$, коли $x = -2$. Тоді $f = -\frac{2}{e^2}$. Маємо точку перегину $(-2; -\frac{2}{e^2})$.
- Функція має лише горизонтальну асимптоту $y = 0$, коли $x \to -\infty$.

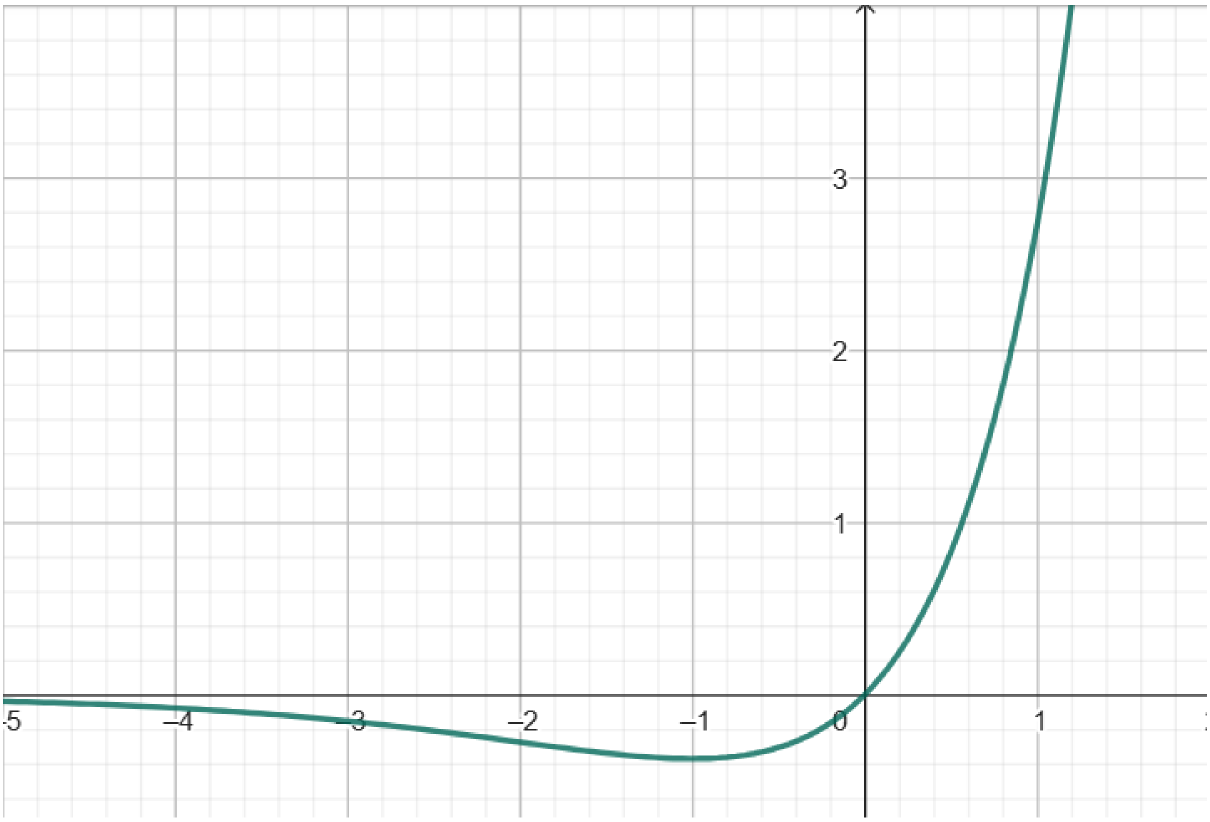


Рис.1

Покладемо $f(x) = a.$ Тоді проаналізувавши графічно рівняння $xe^x = a$ можемо побачити, що

- $x \in \emptyset,$ при $a < -\frac{1}{e};$
- $x = -1,$ при $a = -\frac{1}{e};$
- $x < 0$ (два значення), при $-\frac{1}{e} < a < 0;$
- $x \geq 0$ (єдине значення), при $a \geq 0.$

Варто зауважити, що для випадку двох розв'язків, один буде належати проміжку $(-\infty; -1)$, а інший $(-1; 0)$.

Якщо розглянути $W = f^{-1}$, то на інтервалі $(-\frac{1}{e}; 0)$ будемо мати двозначність, тому на цьому інтервалі не можна вважати W функцією. Але можна отримати дві різні гілки. Вони допоможуть відрізнити різні розв'язки, а також, якщо їх визначити, то вони будуть утворювати функції.

Перейдемо до оберненої функції, для побудови графіка функції. В середовищі Geogebra2D побудуємо $ye^y = x$, тобто $y = W(x)$.

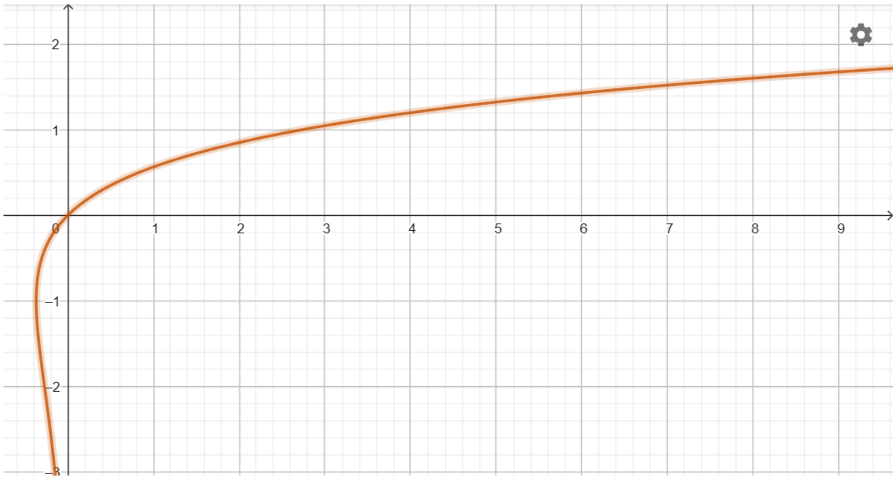


Рис.2

На півінтервалі $-\frac{1}{e} \leq x < 0$ маємо:

- Від'ємний менший розв'язок для гілки $W_{-1}(x)$;
- Від'ємний більший розв'язок для гілки $W_0(x)$.

Для $x \geq 0$ є лише одна гілка $W_0(x)$, на якій буде невід'ємний розв'язок.

Відзначимо і те, що гілку $W_0(x)$ називають *головною* для функції Ламберта, а $W_{-1}(x)$ – *другорядною.* Об'єднавши ці гілки, отримаємо *повну функцію Ламберта*[9].

Головна гілка бере свій початок з точки $(-\frac{1}{e}; -1)$ і вона вища за $y = -1$. Відповідно, другорядна гілка бере свій початок з точки $(-\frac{1}{e}; -1)$ і вона нижча за $y = -1$.

Точку $(-\frac{1}{e}; -1)$ називають *точкою розгалуження*, оскільки виконується рівність:

$$W_{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) = W_0\left(-\frac{1}{e}\right) = -1.$$

13) Опуклість та вгнутість гілок функції Ламберта

а) Головна гілка

З рис. 2 можна побачити, що головна гілка є зростаючою функцією. Повернімось до формули (2.29), яка визначала похідну функції Ламберта. Візьмемо $W_0(x)$ замість $W(x)$, тоді [30]

$$W'_0(x) = \frac{W_0(x)}{x\big(1 + W_0(x)\big)}.$$

Відзначимо, що функціонально $\frac{W_0(x)}{x}$ є додатним на всій області визначення, а при $x = 0$ раніше було встановлено, що утворюється розрив усувного типу. Також виконується нерівність $1 + W_0(x) > 0$ при $x \in (-\frac{1}{e}; +\infty)$. Таким чином ми підтвердили за допомогою похідної, що головна гілка є зростаючою на всій своїй області визначення.

Дослідимо тепер опуклість $W_0(x)$. Для цього використаємо формулу (2.30) із урахуванням головної гілки:

$$W''_0(x) = -\frac{W_0^2(x)(W_0(x) + 2)}{x^2\big(1 + W_0(x)\big)^3}.$$

Знову ж маємо, що $\left(\frac{W_0(x)}{x}\right)^2$додатний, а також

$$1 + W_0(x) > 0, W_0(x) + 2 > 0.$$

Тоді маємо, що $W''_0(x) < 0$. А сама головна гілка є увігнутою на $x \in (-\frac{1}{e}; +\infty)$.

Б) Другорядна гілка

Областю визначення цієї гілки є $x \in (-\frac{1}{e}; 0)$. Перша похідна за формулою (2.29)[9]:

$$W'_{-1}(x) = \frac{W_{-1}(x)}{x\big(1 + W_{-1}(x)\big)}.$$

Знову очевидним є те, що $\frac{W_{-1}(x)}{x}$ є додатним, але тепер $1 + W_{-1}(x) < 0$.

Таким чином $W'_{-1}(x) < 0$ на своїй області визначення, а це означає, що функція спадає.

Розглянемо другу похідну

$$W''_{-1}(x) = -\frac{W_{-1}^2(x)(W_{-1}(x) + 2)}{x^2\big(1 + W_{-1}(x)\big)^3}.$$

Очевидно, що $\left(\frac{W_{-1}(x)}{x}\right)^2 > 0, \big(1 + W_{-1}(x)\big)^3 < 0$. Розглянемо

$$W_{-1}(x) + 2 = 0 \Rightarrow W_{-1}(x) = -2 \Rightarrow x = -2e^{-2}.$$

Тоді для $x \in (-\frac{1}{e}; -\frac{2}{e^2})$, значення $W_{-1}(x) + 2$ додатні, а для $x \in (-\frac{2}{e^2}; 0)$ – від’ємні.

Таким чином, $W''_{-1}(x)$ є опуклою при $x \in (-\frac{1}{e}; -\frac{2}{e^2})$, а при $x \in (-\frac{2}{e^2}; 0)$ – увігнутою.

Розділ 2. Приклади розв'язання рівнянь з використанням функції Ламберта

2.1 Рівняння, які зводяться до функції Ламберта

В розділі 1 було наведено загальні алгоритми розв'язку типових рівнянь, які можна звести до використання W-функції. В цьому розділі наведемо приклади розв'язання типових рівнянь, а також інших рівнянь, які мають властивості функції Ламберта.

Приклад 1. $x7^x = 98$.

Розв'язання

За властивістю логарифма, перейдемо до основи e.

$$7^x = e^{xln7}.$$

Тоді

$$xe^{xln7} = 98.$$

Домножимо обидві частини рівняння на $ln7$:

$$ln7xe^{ln7x} = 98ln7,$$

звідки маємо

$$ln7x = W(98ln7),$$

$$x = \frac{W(98ln7)}{ln7} = 2.$$

Приклад 2. $x + 5^x = 1$.

Розв'язання

Будемо вважати це рівняння рівністю показників степеня з основою 5:

$$5^{x+5^x} = 5^1.$$

Використаємо властивість степеня:

$$5^x 5^{5^x} = 5.$$

Виконаємо заміну $5^x = t > 0$:

$$t5^t = 5.$$

Отримали рівняння попереднього типу, з якого

$$t = \frac{W(5ln5)}{ln5} = 1.$$

Повернемось до попередньої заміни $5^x = t = 1$.

$$x = 0.$$

Приклад 3. $x + lnx = 1$.

Розв'язання

Ідея розв'язання така ж сама, як і в прикладі 2. В прикладі 2 ми обирали основу степеня таку, що дозволить подальшу заміну. В цьому ж прикладі потрібно обирати за основу майбутнього степеня основу логарифма.

$$e^{x+lnx} = e,$$

$$xe^x = e.$$

Тоді

$$x = W(e) = 1.$$

Приклад 4. $xlnx = e^{e+1}$.

Розв'язання

Рівняння цього типу розв'язуємо заміною $x = e^t$ (знову за основу степеня заміни обираємо основу логарифма).

$$e^t lne^t = e^{e+1},$$

$$te^t = e^{e+1}.$$

Звідси

$$t = W(e^{e+1}) = e.$$

Повернемось до заміни $x = e^t \Rightarrow x = e^e$.

Приклад 5. $x^x = 49$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини за основою e:

$$xlnx = ln49.$$

Отримали рівняння з прикладу 4. Тут отримаємо

$$x = \frac{ln49}{W(ln49)} \approx 3{,}2780.$$

Приклад 6. $x^3 = 3^x$.

Тривіальним розв'язком для рівнянь цього типу є $x = a$, де $x, a > 0$. Тобто, тут маємо $x = 3$. Знайдемо інші розв'язки.

Прологарифмуємо обидві частини за основою e обидві частини рівняння:

$$3lnx = xln3,$$

$$\frac{lnx}{x} = \frac{ln3}{3}.$$

Використаємо заміну $t = \frac{1}{x}$. Тоді

$$tln\frac{1}{t} = \frac{ln3}{3};$$

$$tlnt = -\frac{ln3}{3}.$$

Звідси маємо:

$$t = \frac{-\frac{ln3}{3}}{W\left(-\frac{ln3}{3}\right)}.$$

Повернемось до заміни $t = \frac{1}{x} => x = \frac{1}{t}$.

$$x = -\frac{3}{ln3} W\left(-\frac{1}{3} ln3\right).$$

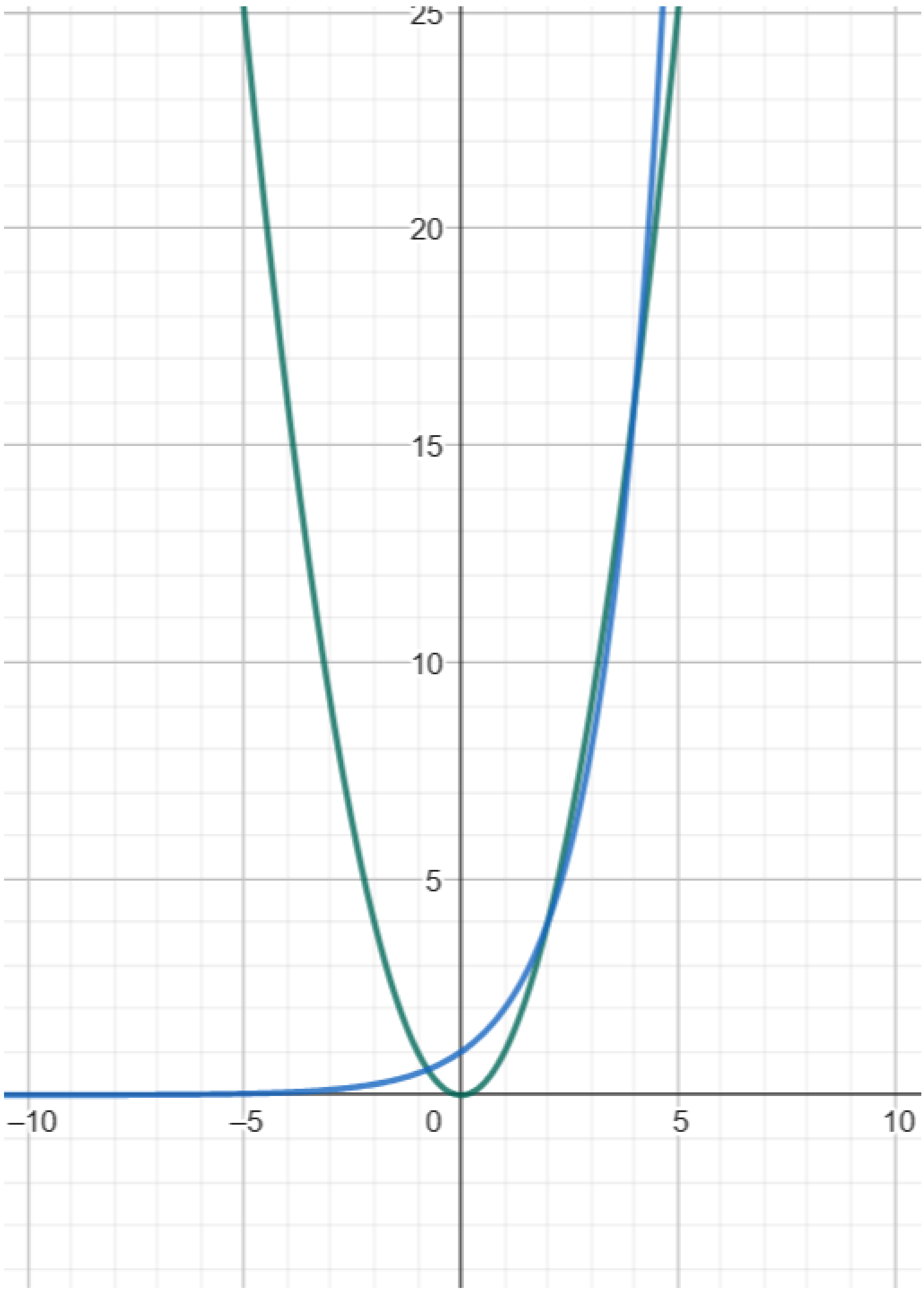
Тут маємо справу з гілками функції Ламберта, які будуть давати два значення (серед яких одне – тривіальне).

Функція Ламберта за своєю природою схожа до обернених тригонометричних функцій, оскільки вона теж є оберненою. Також шкільному курсі, при вивченні тригонометричних рівнянь існує, відносно, незначна кількість констант, які викликають зацікавленість. Наприклад, $arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ або $arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ – це значення обернених тригонометричних функцій, які можна точно визначити, але, наприклад, значення $arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ неможливо визначити точно. В таких випадках учні не продовжують шукати наближений розв'язок рівняння. Тому й надалі при розв'язанні рівнянь на застосування функції Ламберта слід звертати увагу на властивості цієї функції та її особливі значення. Якщо відповідь не можна спростити за допомогою властивостей, то наближене значення теж не слід шукати.

Приклад 7. $x^2 = 2^x$.

Розв'язання

В попередньому прикладі було розглянуто рівняння, що містить в показнику степеня лівої частини та основи степеня правої непарне число. В таких випадках коренів рівняння буде 2. Якщо ж будемо мати парне число, то в таких випадках з'явиться третій корінь. Проілюструємо це графіками двох функцій.



Для парного числа завжди будемо отримувати 3 корені за рахунок особливості швидкості зростання показникової функції відносно степеневої. Також при від’ємних значеннях аргументу завжди будемо отримувати перетин, оскільки степенева функція із парним показником степеня буде симетричною, а показникова – прямуватиме до нуля.

Повернімось до нашого прикладу. Очевидно, що $x = \{2,4\}$ є тривіальними коренями рівняння (особливо $x = 2$). Але як тоді бути з $x = 4$? Для цього перейдемо до функції Ламберта.

$$x^2 = 2^x,$$

$$lnx^2 = ln2^x,$$

$$2ln|x| = xln2, |: 2x$$

$$\frac{ln|x|}{x} = \frac{ln2}{2}.$$

Отримали рівняння з модулем. Застосуємо метод інтервалів.

А) $x > 0 => |x| = x$. Врахуємо також і те, що $\frac{1}{x} = (e^{lnx})^{-1} = e^{-lnx}$

$$e^{-lnx}lnx = ln\sqrt{2}, | \cdot (-1)$$

$$e^{-lnx}(-lnx) = -ln\sqrt{2},$$

$$-lnx = W\left(-ln\sqrt{2}\right),$$

$$lnx = -W\left(-ln\sqrt{2}\right),$$

$$x = e^{-W\left(-ln\sqrt{2}\right)} = 2.$$

Б) $x < 0 => |x| = -x$. Врахуємо також і те, що $\frac{1}{x} = (e^{lnx})^{-1} = e^{-lnx}$

$$e^{-ln\,(-x)}ln\,(-x) = ln\sqrt{2}, | \cdot (-1)$$

$$e^{-lnln\,(-x)}\ ln\,ln\,(-x)\ = -ln\sqrt{2}, | \cdot (-1)$$

$$e^{-lnln\,(-x)}(-\,ln\,ln\,(-x)\,) = ln\sqrt{2}$$

$$-ln\,(-x) = W\left(ln\sqrt{2}\right),$$

$$ln\,(-x) = -W\left(ln\sqrt{2}\right),$$

$$-x = e^{-W\left(ln\sqrt{2}\right)},$$

$$x = -e^{-W\left(ln\sqrt{2}\right)}.$$

Від'ємний корінь можна подати лише наближено, тому не будемо визначати це значення.

В ході розв'язку було встановлено тривіальний корінь $x = 2$, але все ще не зрозуміло, як встановити корінь рівняння $x = 2$. Тут потрібно використовувати гілки W-функції.

$$x = e^{-W_0\left(-ln\sqrt{2}\right)} = 2, x = e^{-W_{-1}\left(-ln\sqrt{2}\right)} = 4.$$

Приклад 8. $x^{x^2} = 3$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівняння

$$x^2 \, ln \, ln \, x \; = ln3,$$

$$e^{2lnx} \, ln \, ln \, x \; = ln3, | \cdot 2$$

$$e^{2lnx} x \; = 2ln3,$$

$$x \; = W(2ln3),$$

$$ln \, ln \, x = \frac{W(2ln3)}{2},$$

$$x = e^{\frac{W(2ln3)}{2}}.$$

Приклад 8. $x^{x^2} = 2$.

Розв'язання

Попереднє рівняння складно розв'язати без застосування функції Ламберта. Проте $x^{x^2} = 2$ можна розв'язати як із застосуванням, так і без нього.

Розв'язок 1. Аналогічно прологарифмуємо обидві частини рівняння

$$x^2 \, ln \, x \; = ln2,$$

$$e^{2lnx} \, ln \, x \; = ln2, | \cdot 2$$

$$e^{2lnx} 2lnx \; = 2ln2,$$

$$2lnx \; = W(2ln2),$$

$$ln\,x = \frac{W(2ln2)}{2},$$

$$x = e^{\frac{W(2ln2)}{2}}.$$

Зауважимо, що можемо подати $W(2ln2) = W(e^{ln2}ln2) = ln2$. Тоді

$$x = e^{\frac{ln2}{2}} = \sqrt{2}.$$

Розв’язок 2. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння

$$(x^2)^{x^2} = 2^2,$$

Звідси робимо висновок, що

$$x^2 = 2,$$

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

Піднісши до квадрату обидві частини рівняння, ми отримали сторонній корінь $x = -\sqrt{2}$. Тобто розв’язком буде $x = \sqrt{2}$.

1. Рівняння, що містять функцію Ламберта.

Приклад 1. $W(x) = 1$.

Розв’язання

Рівняння таких типів $W(x) = a$ розв’язують з використанням означення. Якщо $xe^x = a$, то $x = W(a)$. Тобто, в рівняннях такого типу потрібно використовувати означення в зворотньому вигляді:

$$W(x) = a \Rightarrow x = ae^a.$$

Звідси маємо розв’язок рівняння в нашому випадку:

$$x = e.$$

Приклад 2. $W\big(W(x)\big) = 1$.

Розв’язання

Принцип розв’язання схожий до попереднього прикладу.

$$W\big(W(x)\big) = 1,$$
$$W(x) = e,$$
$$x = e \cdot e^{e} = e^{e+1}.$$

Зауважимо, що рівняння таких типів доволі схожі до логарифмічних рівнянь. Наприклад, $ln\,(x) = 2$. Звідси $x = e^2$. Якщо розглянути $W(x) = 2$, то звідси $x = 2e^2$.

Приклад 3. $W(x) = ln\,(3x)$.

Розв'язання

Також використовуємо означення W-функції.

$$x = ln\,(3x)\, e^{ln(3x)}.$$

Пам'ятаємо про властивість логарифмів $a^{\log_a b} = b$. Тоді

$$x = 3x\; ln\,(3x)\,, \qquad x \neq 0$$
$$3\; ln\,(3x) = 1,$$
$$ln\,(3x) = \frac{1}{3},$$
$$3x = e^{\frac{1}{3}},$$
$$x = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}}.$$

Приклад 4. $W(e^{2x}) = W^{x}(e)$.

Розв'язання

Можемо помітити, що $W^{x}(e) = \big(W(e)\big)^{x} = 1^{x} = 1$.

Отже,

$$W(e^{2x}) = 1.$$

Використовуємо означення, тоді

$$e^{2x} = e,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Приклад 5. $2 + W\left((e^3 - 2)x\right) = e^3$.

Розв’язання

Завжди намагаємось звести рівняння до виду $W(x) = f(x)$. Тому

$$W\left((e^3 - 2)x\right) = e^3 - 2.$$

Використовуємо означення

$$(e^3 - 2)x = (e^3 - 2)e^{e^3 - 2},$$

$$x = e^{e^3 - 2}.$$

Приклад 6. $W(x+1)e^{W(x+1)} = \sqrt{e}$.

Розв’язання

Можна помітити те, що в лівій частині рівняння маємо однакові аргументи. Тому можемо використати властивість функції Ламберта

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

В нашому випадку отримаємо

$$x + 1 = \sqrt{e},$$

$$x = \sqrt{e} - 1.$$

Приклад 7. $W\left(e^{2e^2 + x^x}\right) = x^x$.

Розв’язання

Використовуємо означення, тоді

$$e^{2e^2 + x^x} = x^x e^{x^x},$$

$$e^{2e^2} e^{x^x} = x^x e^{x^x}, \qquad e^{x^x} \neq 0$$

$$x^x = e^{2e^2}.$$

Прологарифмуємо за основою e обидві частини рівняння

$$xln(x) = 2e^2 ln(e),$$

$$xln(x) = 2e^2.$$

Врахуємо також і властивість $a^{\log_a b} = b$, тоді

$$e^{ln(x)} ln(x) = 2e^2.$$

Розглянемо це рівняння як рівність аргументів функції Ламберта. В такому випадку

$$W\left(e^{ln(x)} ln(x)\right) = W(2e^2).$$

Тоді за властивістю функції Ламберта, отримуємо

$$W\left(e^{ln(x)} ln(x)\right) = ln(x), \qquad W(2e^2) = 2.$$

Тоді

$$ln(x) = 2,$$

$$x = e^2.$$

Приклад 8. $W\left(e^{x^2}\right) = x^2$.

Розв'язання

Аналогічно до попередній прикладів, маємо

$$e^{x^2} = x^2 e^{x^2}, \qquad e^{x^2} \neq 0$$

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Приклад 9. $W(x) = x^2$.

Розв'язання

$$x = x^2 e^{x^2},$$

$$x^2 e^{x^2} - x = 0,$$

$$x\left(x e^{x^2} - 1\right) = 0.$$

Звідси маємо $x = 0$ або $xe^{x^2} - 1 = 0$.

Розглянемо друге рівняння. З нього маємо

$$xe^{x^2} = 1.$$

Спробуємо перейти до функції Ламберта. Для цього піднесемо до квадрату обидві частини рівняння.

$$x^2e^{2x^2} = 1,$$

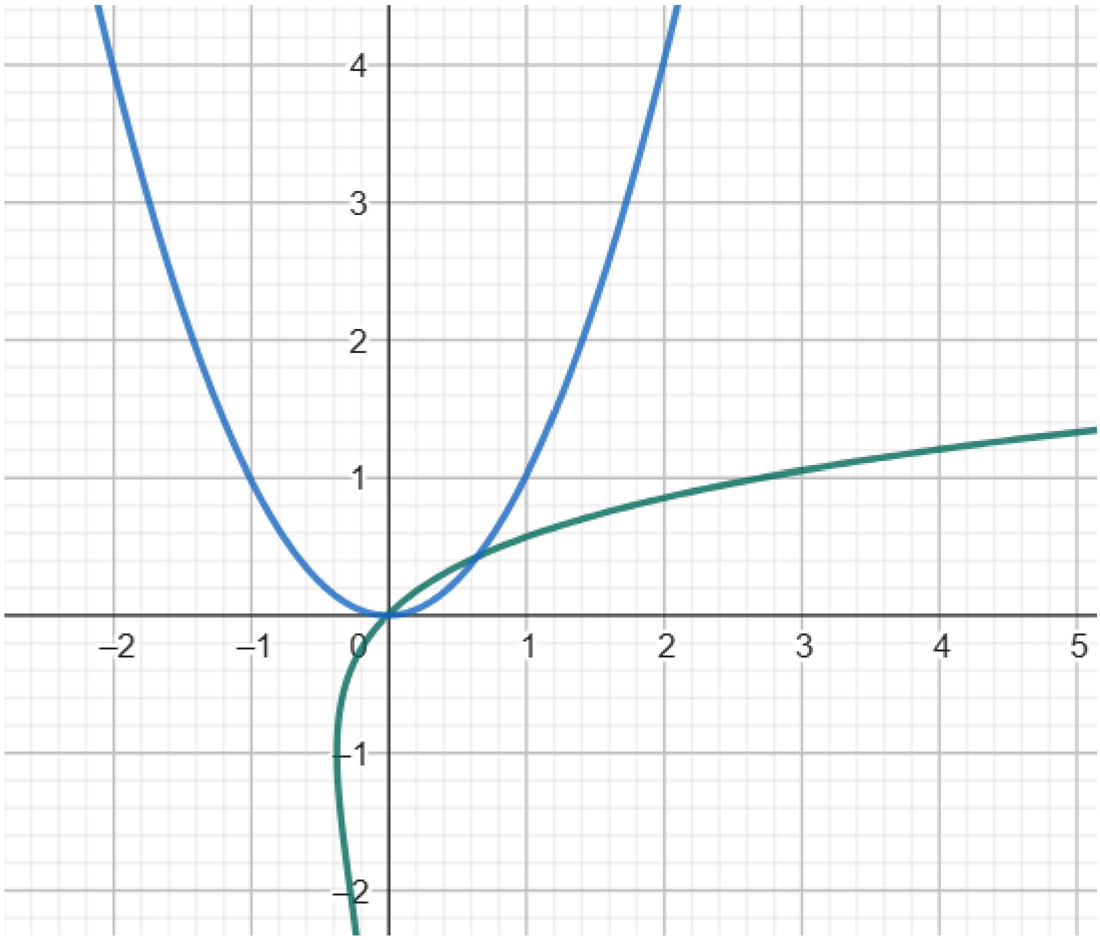
$$2x^2e^{2x^2} = 2,$$

$$W\left(2x^2e^{2x^2}\right) = W(2),$$

$$2x^2 = W(2),$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{W(2)}{2}}.$$

В цьому випадку ми отримали сторонній корінь при піднесенні до квадрату обидвох частин рівняння. Розглянемо частину графіків функцій $W(x)$ та x^2, де вони будуть перетинатись.



Бачимо, що початкове рівняння буде мати розв’язки лише при $x \geq 0$. Це дійсно так, оскільки $x^2 \geq 0$ при $x \in R$, але $W(x) \geq 0$ лише при $x \geq 0$.

Тобто, стороннім коренем буде $x = -\sqrt{\frac{W(2)}{2}}$, а розв’язками будуть

$$x = \left\{0, \sqrt{\frac{W(2)}{2}}\right\}.$$

Приклад 10. $W(x) + W(x) = 4x$.

Розв’язання

Це простий випадок, оскільки маємо однаковий аргумент W-функції.

$$2W(x) = 4x;$$

$$W(x) = 2x;$$

$$x = 2xe^{2x};$$

$$2xe^{2x} - x = 0;$$

$$x(2e^{2x} - 1) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } 2e^{2x} - 1 = 0;$$

Розглянемо друге рівняння.

$$e^{2x} = \frac{1}{2};$$

$$2x = ln\frac{1}{2};$$

$$x = ln\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 11. $W(x) + W(2x) = 3$. Знайти значення виразу $\frac{W(x)W(2x)}{2x^2}$.

Розв’язання

Тут уже маємо різні аргументи і, відповідно, розв’язати це рівняння буде набагато складніше. Проте, іноді не потрібно шукати значення змінної, щоб обчислити значення потрібного виразу. В нашому випадку, можна скористатись властивістю лінійної комбінації: якщо $W(x) + W(y) = a$, то виконується рівність

$$W(x)W(y) = e^{-a}xy.$$

Тоді

$$W(x)W(2x) = e^{-3}2x^2;$$

$$\frac{W(x)W(2x)}{2x^2} = e^{-3}.$$

2.2 Рівняння, які містять константу Ω

Приклад 1. $xe^x = 1$.

Розв’язання

Слід пам'ятати, що константа Ω утворюється, як значення виразу $W(1)$, тобто $W(1) = \Omega$.

В такому разі, якщо $W(1) = x$, то $1 = \ xe^x => x = \Omega$.

Приклад 2. $x + ln\, x \ = 0$.

Розв'язання

Проекспоненціюємо обидві частини рівняння і отримаємо

$$e^{x+lnx} = e^0;$$

$$e^{ln\, x} \cdot e^x = 1;$$

$$xe^x = 1.$$

Отримали рівняння з прикладу 1, яке має розв'язок $x = \Omega$ за визначенням цієї константи.

Приклад 3. $W\left(\frac{x}{\Omega^{x-1}}\right) = 1$.

Розв'язання

Використаємо означення функції Ламберта, тоді отримаємо

$$\frac{x}{\Omega^{x-1}} = e;$$

$$x\Omega^{1-x} = e;$$

$$-x\Omega^{1-x} = -e;$$

$$-x\Omega^{-x} = -\frac{e}{\Omega};$$

$$-xe^{-xln\Omega} \ = -\frac{e}{\Omega};$$

$$-ln\Omega xe^{-xln\Omega} \ = -\frac{eln\Omega}{\Omega};$$

$$W(-(ln\Omega)xe^{-xln\Omega}) = W(-\frac{eln\Omega}{\Omega});$$

$$-(ln\Omega)x = W(-\frac{eln\Omega}{\Omega});$$

$$x = -\frac{W\left(-\frac{eln\Omega}{\Omega}\right)}{ln\Omega}.$$

Врахуємо спрощення деяких значень, наприклад,

$$-ln\Omega = \Omega.$$

Тоді

$$x = \frac{W(e)}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}.$$

Розв'язати це рівняння можна було б і з використанням тотожності:

$$\Omega x = W\left(\frac{x}{\Omega^{x-1}}\right).$$

Тоді рівняння перетвориться на звичайне лінійне:

$$\Omega x = 1;$$

$$x = \frac{1}{\Omega}.$$

Розділ 3. Факультативний курс вивчення рівнянь, які розв'язуються за допомогою функції Ламберта у профільних класах

3.1 Факультативи та їх роль у вивченні математики

Сучасна школа вимагає від учнів швидкого опановування матеріалу з різних предметів водночас, проте для багатьох буває складно встигати за всіма предметами[7]. В таких ситуаціях допомагає факультативне вивчення того чи іншого предмету. Найчастіше їх застосовують при потребі підготовки до здачі вступних іспитів. Для талановитіших учнів факультативи грають роль підвищення обізнаності в обраному предметі.

Факультативи – це додаткові заняття або курси, які не є обов'язковими для відвідування учнями[3]. Проте це доволі ефективна форма навчання, яка дозволяє краще розвивати пізнавальні інтереси та здібності учнів.

Факультативи можуть нести в собі різний зміст. Залежно від мети, можна виокремити такі типи факультативної форми навчання[4]:

- теоретичні;
- практичні;
- комбіновані.

Теоретичні факультативи мають на меті звернути більшу увагу на вивчення та розуміння теоретичного матеріалу теми заняття[10]. При цьому головними залишаються постановка виникнення тієї чи іншої теорії, висунення гіпотез, які підштовхують учнів до течії теорії, створення проблемних завдань та шляхи їх розв'язання, самостійність учнів у розв'язанні завдань, усвідомлення головного в процесі вивчення. Також при цьому можна використовувати як традиційні методи навчання (пояснення, розповідь, бесіда), так і дослідницькі (різні експерименти, порівняння).

Практичні факультативи несуть в собі закріплення теоретичних знань та формують вміння та навички, які можна використати при розв'язанні поставлених завдань[8]. В процесі такого заняття вчитель розкриває значення проблеми, а учні, в свою чергу, шукають шляхи для розв'язку.

Комбіновані факультативи містять в собі взаємозв'язок кількох предметів[9]. Прикладом комбінованих факультативів може бути поєднання математики та фізики та інші. Такі заняття несуть велику цінність, оскільки вони відображають важливість вивчення різних предметів.

Загальною метою факультативної форми навчання є підвищення мотивації учнів, а також розвиток їх творчого мислення. Саме так вважає В. К. Кірман: «Досвід функціонування класів математичного спрямування та фізико-математичних профільних навчальних закладів показує, що факультативи стають однією з головних ланок у системі освіти. Той факт, що учні опинились у математичному класі, ще не завжди свідчить про зацікавленість учнів математикою, яка має тенденцію різко спадати, особливо при зростанні навчального навантаження на учнів та посилення складності завдань. Тому першою метою роботи факультативів повинна стати підвищення мотивації навчання. Ця мета повинна досягатися, перш за все, завдяки популяризації математичних знань та застосувань математики з одного боку, з іншого, спрямованістю факультативу на самореалізацію творчої особистості.»[2]

Немало важливими компонентами є цілі, які й формують зміст факультативних занять. В класах поглибленого вивчення математики змістова лінія формується за основними типами, наприклад, міждисциплінарні зв’язки, геометричні перетворення, уявлення, формальність та аксіоматизація, різні алгебраїчні концепції[5]. Проте сам зміст носить гнучкий характер, який може змінитись в залежності від уподобань учнів. Водночас, при факультативній формі вивчення математики можна розглянути різні теми, що не стосуються основного курсу шкільної математики. Наприклад, в курсі 11-го класу, після засвоєння матеріалу показникової та логарифмічної функцій, можна розглянути функцію Ламберта, як допоміжний засіб розв’язку деяких показникових та логарифмічних рівнянь трансцендентного типу, які часто не можна розв’язати звичними перетвореннями[4]. Для цього потрібно застосувати як теоретичний, так і практичний типи факультативів, оскільки в процесі учні дізнаються про нову для себе функцію та її властивості.

Також факультативні заняття з математики мають в собі велику цінність тим, що втілюють в життя різні форми проведення занять, наприклад, лекції, семінари, командні або індивідуальні тренінги. Популярними є також різні ігрові заняття, такі як: математичні бої, каруселі, тощо. Найважливішою формою проведення занять деякі дослідники вважають майстер-класи, на яких вчитель або інша запрошена особа, яка наперед не знає розв’язку, буде розв’язувати проблемну задачу, і тим самим продемонструє учням свій підхід і думки в ході пошуку розв’язання.

3.2 Програма факультативу з вивчення рівнянь, які розв’язуються із застосуванням функції Ламберта

Факультативний курс із методики вивчення розв’язання деяких трансцендентних показниково-логарифмічних рівнянь розроблено з урахуванням Державного стандарту профільної повної середньої освіти та чинної програми алгебри 11-класу[6].

Тема вивчення факультативу не входить до основної програми з алгебри, проте вона розширює підходи до розв’язання показниково-логарифмічних рівнянь, які не можна розв’язати звичними перетвореннями. Варто зауважити і те, що, зазвичай, в 11-му класі учні відводять свій час на підготовку до здачі сертифікаційних іспитів. Тому вивчення теми пропонується лише здобувачам освіти, які хочуть знати більше та розширити свій математичний світогляд.

Для вивчення теми факультативу здобувачам освіти необхідно володіти:

- основними методами розв’язання рівнянь шкільного курсу;
- розумінням поняття функції та дотичними до цього означеннями, властивостями;
- вмінням визначати обернену функцію;
- аналізуванням графіків та вмінням їх будувати;
- вмінням застосовувати диференціальне числення (як наслідок до попередніх двох пунктів);
- розумінням властивостей функцій, які вивчаються в шкільному курсі.

Метою вивчення курсу є:

- підвищення математичної компетентності;
- формування алгоритмічного мислення;
- формування нових вмінь та навичок;
- застосування вже набутих знань.

Очікуваними результатами є:

- знання та розуміння нової функції;

- вміння розв’язувати деякі трансцендентні показниково-логарифмічні рівняння;
- узагальнення та систематизація набутих результатів.

Актуальністю курсу слугувати можливість показати те, що:

- математика не обмежується лише шкільною програмою;
- зацікавлені здобувачі освіти можуть вивчати інші розділи математики, що сприяє популяризації науки.

Оскільки вивчення показникових та логарифмічних функцій відводиться на перший семестр 11-го класу, то для реалізації програми курсу рекомендована кількість годин: 11-й клас, 15 год на 1-й семестр.

Таблиця 3.1 - Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

№ теми	Кількість годин	Зміст навчального матеріалу	Вимоги рівня підготовки здобувачів освіти
11-й клас (15 год на 1-й семестр)			
1	5	W-функція як обернена до $\square = \square\square^{\square}$. Властивості функції Ламберта.	Здобувачі освіти повинні знати та вміти: - визначення поняття функції; - властивості показникових та логарифмічних функцій; - будувати графіки функцій за допомогою диференціального числення; - будувати обернені функції та розумітись на їх властивостях; - аналізувати графіки функцій.
2	1	Константа Ω. Її властивості.	Здобувачі освіти повинні знати про основні математичні константи та їх використання.
3	1	Гілки функції Ламберта на основі функції $\square = \square\square^{\square}$.	Здобувачі освіти повинні знати та вміти: - визначення поняття функції; - будувати графіки функцій за допомогою диференціального числення; - аналізувати графіки функцій.
4	6	Рівняння, які зводяться до використання функції Ламберта.	Здобувачі освіти повинні знати та вміти: - властивості показникових та логарифмічних функцій; - застосовувати властивості функції Ламберта при розв’язанні рівнянь;

			- методи розв'язування стандартних показникових та логарифмічних рівнянь; - виконувати елементарні алгебраїчні перетворення.
5	2	Рівняння, що містять в собі функцію Ламберта.	Здобувач і освіти повинні знати та вміти: - застосовувати властивості функції Ламберта при розв'язанні рівнянь; - виконувати елементарні алгебраїчні перетворення над оберненими функціями; - методи розв'язування стандартних показникових та логарифмічних рівнянь.

3.3 Вибрані конспекти уроків

1) Конспект уроку на тему «W-функція як обернена до $y = xe^x$. Властивості функції Ламберта.» (перший урок)

Мета уроку:

- навчальна:

- повторити означення функції та дотичних понять, етапів побудови графіків функції за допомогою диференціального числення та з допомогою програмного середовища;
- сформувати в учнів уявлення щодо функції Ламберта та її застосування.

- розвиваюча:

- розвиток критичного, логічного, алгоритмічного мислення, математичної компетентності;
- розвиток здатності аналізувати та обробляти отриману інформацію;

- виховна:

- виховання спостережливості, мотивації до навчання, самодисципліни.

Тип уроку: теоретичний з елементами практики.

Форма організації: традиційний урок.

Методи навчання:

- Пояснювально-ілюстративний:

- пояснення історії виникнення W-функції та її використання;
- візуалізація графіків.

- Частково-пошуковий:

- постановка рівнянь, які не можна розв'язати звичними методами;
- обговорення та виведення основних властивостей функції.

Обладнання: картки із запитаннями, дошка.

Хід уроку

I. Організаційний етап.

II. Актуалізація опорних знань.

1. Опитування (з використанням карток).

1) Що таке функція?
2) Як можна задавати функцію?
3) Що таке проміжки спадання та зростання функції?
4) Що таке нулі функції?
5) Що таке область визначення та множина значень?
6) Що таке максимум та мінімум функції?
7) Що таке похідна функції?
8) Як застосувати похідну функції до побудови графіка функції?
9) Якими є етапи побудови графіка функції?
10) Що таке обернена функція?
11) Назвіть приклади обернених функцій.

12) Який взаємозв’язок між показниковою та логарифмічною функцією?

13) Що таке рівняння?

14) Якою є загальна ідея розв’язання показникових та логарифмічних рівнянь?

2. Розв’яжіть рівняння.

1) $5^{2x-3} = 125.$

2) $2^x + 2^{x-2} = 9.$

3) $3 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^x = 1.$

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-8} = 5^{3x-8}.$

5) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$

6) $\log_2(x + 8\,) = 64.$

7) $\log_{12}(x^2 - 3x - 5\,) = \log_{12}(7 - 2x\,).$

8) $\log_{0,1}(x\,) + \log_{0,1}(x\; + 3) = \log_{0,1}(x\; + 1).$

9) $\log_2(x^2\; - x\; + 2) = 0.$

10) $5^{2x-3} = 124.$

11) $x^{lnx} = e.$

3. Побудуйте графік функції.

$$y = xe^x.$$

4. Побудуйте до попереднього завдання обернену функцію.

III. Вивчення нового матеріалу.

Трансцендентні показниково-логарифмічні рівняння – рівняння, що містять комбінацію декількох різнотипних функцій (показнику, логарифмічну, степеневу). Під комбінацією цих функцій будемо розуміти звичайні операції (сума, різниця, добуток, частка). Наприклад,

$xe^x = 5, x^2 + 3^x = 8, 2x - lnx = 0, x^3{:}ln\,(x^2\; + 1) = 5.$

1. *Розв'яжіть рівняння.*

$$xe^x = 5.$$

Учні розв'язують рівняння графічним методом і знаходять приблизне значення. Але як розв'язати це рівняння аналітичним способом? Для розв'язання потрібно виокремити значення x. Для цього використовуємо обернену функцію.

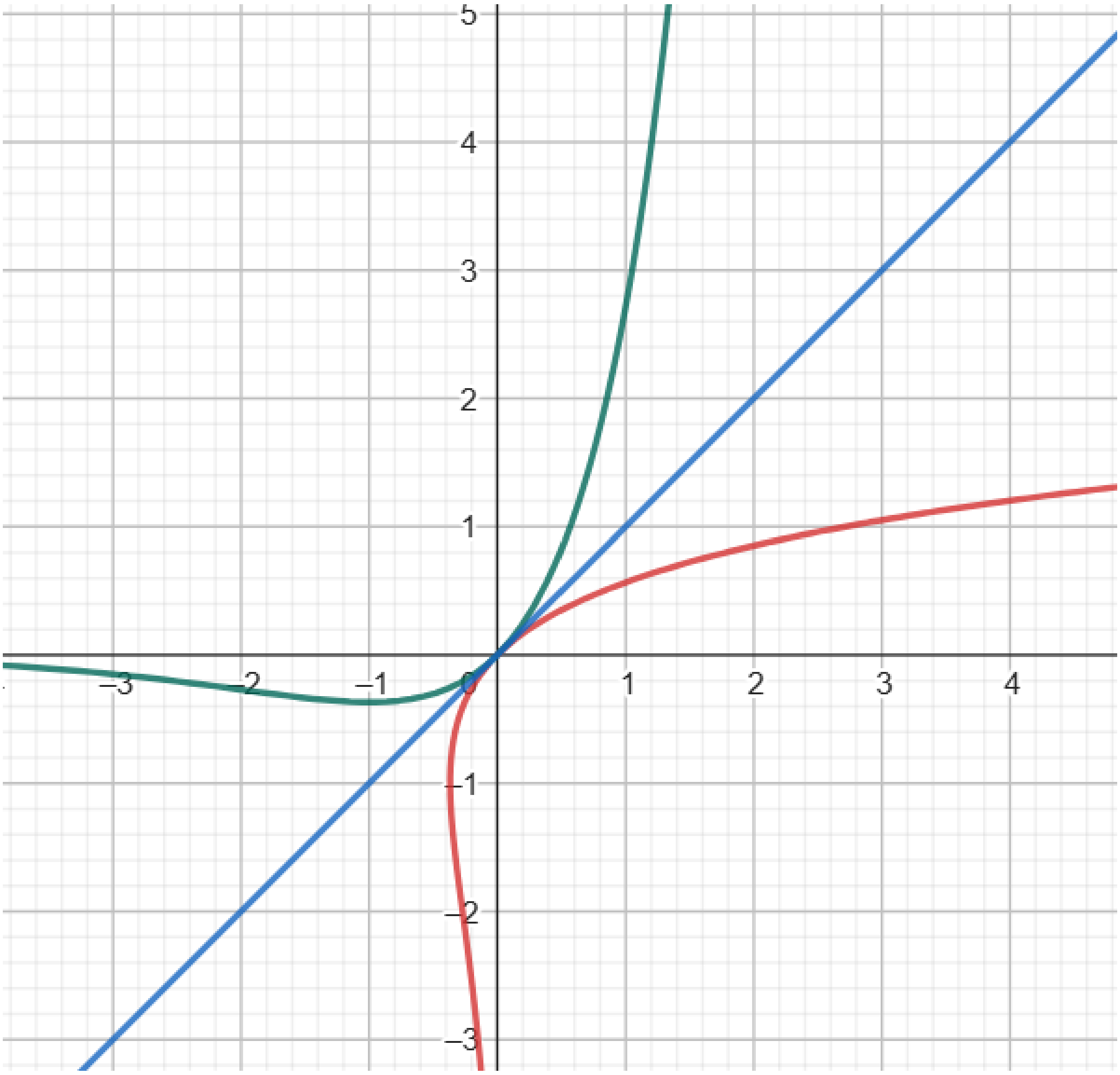
Отримана обернена функція до $y = xe^x$ має свою назву – функція Ламберта або W-функція. Вона має значне застосування, оскільки дозволяє розв'язання аналітичним способом. Визначають її таким чином: якщо $xe^x = a$, то $x = W(a)$.

Отже, для нашого рівняння розв'язком буде $x = W(5)$.

2. *Деякі властивості функції Ламберта.*

1) Графік W-функції.

Графік функції Ламберта будуємо, як графік оберненої до $y = xe^x$.



2) Основні значення.

Користуючись означенням, можна визначити, що

$$W(0) = 0.$$

Для цього ж самого рівняння $xe^x = a$ покладемо $a = e$, тоді розв'язком буде $x = 1$, оскільки

$$1 \cdot e^1 = e.$$

Робимо висновок, що

$$W(e) = 1.$$

Таким же чином можна перевірити, що

$$W\left(-\frac{1}{e}\right) = -1,$$

$$W(e \cdot e^e) = e.$$

Загалом можна визначати будь-які значення. Для цього слід пам'ятити універсальну тотожність:

$$W(x \cdot e^x) = x.$$

3) Область визначення та множина значень.

Область визначення

При побудові графіка функції $y = xe^x$ учні визначили мінімальне значення функції. Це значення допоможе знайти область визначення функції.

Учнями було встановлено, що найменшим значенням функції є $y = -\frac{1}{e}$, а найбільшого значення не існує. Також функція має єдиний екстремум. Таким чином, для W-функції областю визначення є $D(W) = [-\frac{1}{e}; +\infty)$.

Множина значень

Для визначення можливих значень функції знову скористаємось аналізом графіка функції $y = xe^x$. Ця функція має один мінімум при $x = -1$. Тобто, при $x > -1$ функція зростала, а при $x < -1$ – спадала. Обернена функція зберігає ці властивості. Але тут маємо особливість – гілки функції. Прикладом різних гілок функції може слугувати відшукання оберненої до $y = x^2$. В процесі знаходження такої функції маємо два можливі варіанти $y = \pm\sqrt{x}$. Ці гілки виходять зі спільної точки (0;0).

Якщо розглянути графік W-функції, то можемо помітити, що гілки мають спільну точку $(-\frac{1}{e}; -1)$. Нижня гілка визначена на інтервалі

$(-\frac{1}{e}; 0)$. Вона спадна містить всі значення множини $(-\infty; -1)$. Верхня гілка визначена на $(-\frac{1}{e}; +\infty)$, зростає і містить всі значення множини $(-1; +\infty)$. Таким чином, множиною значень буде $E(W) = R.$

IV. Закріплення отриманих знань.

Опитування

1) Наведіть приклад трансцендентних рівнянь.
2) Що таке функція Ламберта і для чого використовується?
3) Які основні значення має функція Ламберта?

2) Конспект уроку на тему «Рівняння, які зводяться до використання функції Ламберта.»

Мета уроку:

- навчальна:

- повторити означення функції Ламберта;
- сформувати в учнів уявлення щодо функції Ламберта та її застосування;
- показати нові для здобувачів освіти методи розв’язання деяких трансцендентних рівнянь;

- розвиваюча:

- розвиток критичного, логічного, алгоритмічного мислення, математичної компетентності;
- розвиток здатності аналізувати, обробляти, порівнювати отриману інформацію;

- виховна:

- виховання спостережливості, мотивації до навчання, самодисципліни.

Тип уроку: практичний.

Форма організації: традиційний урок.

Методи навчання:

- Пояснювально-ілюстративний:

- пояснення основних типів рівнянь, до яких можна застосувати функцію Ламберта.

Частково-пошуковий:

- формулювання здобувачами освіти гіпотез щодо пошуку розв'язання рівняння;
- обговорення та виведення загальних правил.

Метод розв'язування задач за зразком:

- вчитель пояснює кожен тип рівняння;
- учні розв'язують рівняння за зразком із послідовними ускладненнями.

Обладнання: картки із запитаннями, дошка, ноутбук, проектор або смарт-дошка.

Хід уроку

I. **Організаційний етап.**

II. **Актуалізація опорних знань.**

1. *Опитування*

1) Що таке рівняння?
2) Що таке трансцендентне рівняння?
3) Як визначається функція Ламберта?
4) Назвіть особливу константу, яку містить функція Ламберта.

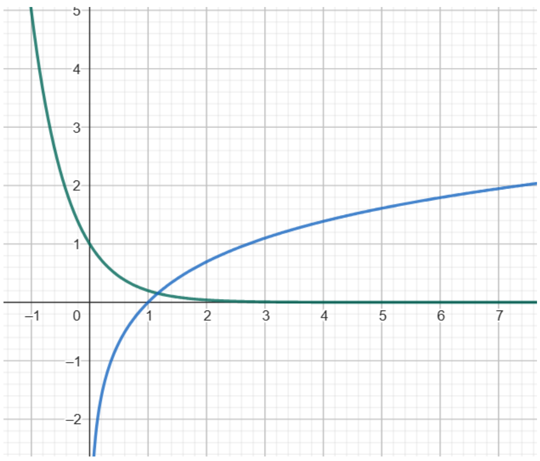
2. *Завдання на застосування властивостей функції Ламберта.*

1) Які з показниково-логарифмічних рівнянь є трансцендентними?

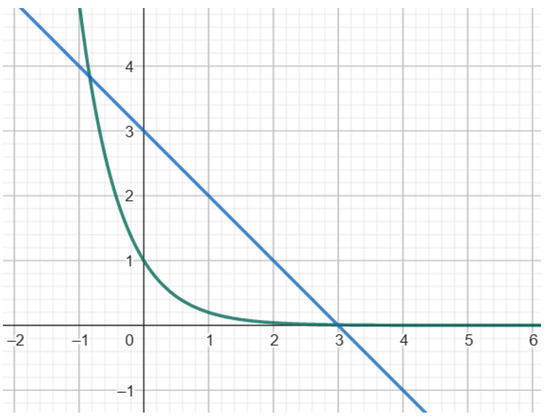
а) $\dfrac{x}{3} = 3^x$; б) $1{,}79^x = 4$; в) $e^x = 2^x$; г) $\pi^x = 2$; д) $x + lnx = 3$;

е) $x^x = 4$; є) $x \cdot ln\,(\pi + e) = e$; ж) $2^y + ln\dfrac{1}{x} = 0$; з) $2^y + ln\dfrac{1}{y} = 0$.

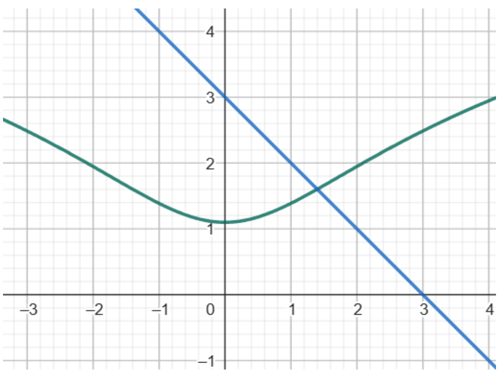
2) Визначте кількість розв'язків рівнянь та оцініть приблизне його значення.



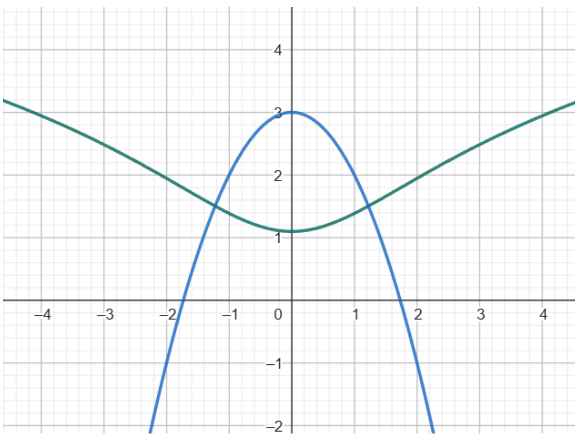
а) б)

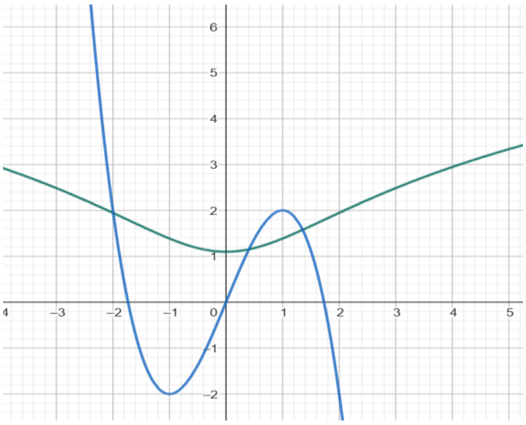


в)



г)



д) 

3) *Скільки розв'язків мають рівняння?*

а) $x = lnx$; б) $2^x = x^2$; в) $4^x - 4x = 0$; г) $3^x - 6x - 3 = 0$;

д) $lnx + 3x = 1$; е) $lg\ (2x)\ + 1 = -x$; є) $\log_2(x + 4) = x^2 - 2$.

4) *Знайдіть значення виразів.*

а) $\left(W\left(-\frac{1}{e}\right) + 1\right)^2$; б)$W(0) + W(e) + W(2e^2)$; в) $\frac{W(e^{e+1})}{e}$;

г) $W(2ln2)$; д)$e^{W(3ln3)}$; е) $e^{W(ln\sqrt{2})}$; є) $\frac{W(3^{11}ln3)}{ln3}$.

5) *Порівняти значення виразів.*

а) $W(1)$ і $W(2)$; б) $W\left(-\frac{1}{e}\right)$ і $W(e)$; в) $W(e^{e+1})$ і $W(e)$;

г) $W(2e^2) + 1$ і π; д) $W(2ln2)$ і $W(3ln3)$.

III. Вивчення нового матеріалу.

1. Рівняння $x \cdot b^x = a$.

Щоб перейти до функції Ламберта необхідно використати тотожність $e^{lnb} = b$.

Приклади.

1) $x \cdot 2^x = 3$;

$x \cdot e^{xln2} = 3$;

$x \cdot ln2 \cdot e^{xln2} = 3ln2$;

2) $x^2 \cdot 3^{x^2} = 3$;

$x^2 \cdot e^{x^2 ln3} = 3$;

$x^2 \cdot ln3 \cdot e^{x^2 ln3} = 3ln3$;

$W(x \cdot ln2 \cdot e^{xln2}) = W(3ln2);$ $W\left(x^2 \cdot ln3 \cdot e^{x^2 ln3}\right) = W(3ln3);$

$xln2 = W(3ln2);$ $x^2 \cdot ln3 = W(3ln3);$

$x = \frac{W(3ln2)}{ln2}.$ $x^2 = \frac{W(e^{ln3} ln3)}{ln3} = \frac{ln3}{ln3} = 1;$

$x = \pm 1.$

2. Рівняння $x + b^x = a$.

Потрібно звести це рівняння до виду 1. Для цього розглядаємо рівняняння, як рівність показників степеня, за основу вибираємо основу b *та виконуємо заміну* $b^x = t$.

Приклади.

1) $x + 3^x = 11;$

$3^{x+3^x} = 3^{11};$

$3^x \cdot 3^{3^x} = 3^{11};$

Заміна $3^x = t$.

$t \cdot 3^t = 3^{11};$

$t \cdot e^{tln3} = 3^{11};$

$t\, ln\, 3 \cdot e^{tln3} = 3^{11}\, ln\, 3;$

$W(t\, ln\, 3 \cdot e^{tln3}) = W(3^{11}\, ln\, 3);$

$t\, ln\, 3 = W(3^{11}\, ln\, 3);$

$t = \frac{W(3^{11} ln\, 3)}{ln\, 3} = \frac{W(3^9 ln 3^9)}{ln\, 3} = \frac{ln\, 3^9}{ln\, 3} = 9;$

$3^x = 9;$

2) $2x + 5^{2x-1} - 11 = 0;$

$2x + 5^{2x-1} = 11;$

$2x - 1 + 5^{2x-1} = 10;$

$5^{2x-1+5^{2x-1}} = 5^{10};$

$5^{2x-1} \cdot 5^{5^{2x-1}} = 5^{10};$

Заміна $5^{2x-1} = t$.

$t \cdot 5^t = 5^{10};$

$t \cdot e^{tln5} = 5^{10};$

$t\, ln\, 5 \cdot e^{tln5} = 5^{10}\, ln\, 5;$

$W(t\, ln\, 5 \cdot e^{tln5}) = W(5^{10}\, ln\, 5);$

$t\, ln\, 5 = W(5^{10}\, ln\, 5);$

$x = 2.$

$$t = \frac{W\left(5^{10}ln5\right)}{ln\,5};$$

$$2x - 1 = \frac{W\left(5^{10}ln5\right)}{ln5};$$

$$x = \frac{\frac{W(5^{10}ln5)}{ln\,5}+1}{2}.$$

Зауважимо, що в деяких рівняннях можна спрощувати значення функції Ламберта, як це сталось в прикладі 1.

3. Рівняння $x \cdot ln\,(x) = a.$

Щоб звести це рівняння до функції Ламберта, потрібно використати тотожність $e^{lnx} = x$ *і перейти до заміни* $ln\,(x) = t.$

Приклади.

1) $x \cdot ln\,(x) = \pi e^{\pi};$

$e^{lnx} \cdot ln\,(x) = \pi e^{\pi};$

Заміна $ln\,(x) = t.$

$te^{t} = \pi e^{\pi};$

$W(te^{t}) = W(\pi e^{\pi});$

$t = \pi;$

$ln\,(x) = \pi;$

$x = e^{\pi}.$

2) $3x^{3} \cdot x = 2;$

$x^{3} \cdot x^{3} = 2;$

$2^{x^{3}} \cdot x^{3} = 2.$

Заміна $x^{3} = t.$

$2^{t} \cdot t = 2;$

$e^{tln2} \cdot t = 2;$

$e^{tln2} \cdot tln2 = 2\,ln\,2\,;$

$W(e^{tln2} \cdot tln2) = W(2\,ln\,2\,);$

$t \cdot ln2 = W(2\,ln\,2\,) = ln\,2\,;$

$t = 1;$

$x^{3} = 1;$

$x^{3} = 2;$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

4. Рівняння $x + ln\,(x) = a$.

В рівняннях цього типу слід проекспоненціювати дві частини рівняння.

Приклади.

1) $x + ln\,(x) = e$;

$e^{x+ln(x)} = e^e$;

$e^x \cdot e^{ln(x)} = e^e$;

$e^x \cdot x = e^e$;

$W(e^x \cdot x) = W(e^e)$;

$x = W(e^e)$.

2) $x^2 = ln^2 x$;

$x^2 - ln^2 x = 0$;

$(x + ln\,x)(x - ln\,x) = 0$;

а) $x + ln\,x = 0$;

$e^{x+ln\,x} = e^0$;

$e^x \cdot x = 1$;

$W(e^x \cdot x) = W(1)$;

$x = W(1) = \Omega$;

Б) $x - ln\,x = 0$;

$ln\,x - x = 0$;

$e^{ln\,x - x} = e^0$;

$e^{-x} \cdot x = 1$;

$e^{-x} \cdot (-x) = -1$;

$W\left(e^{-x} \cdot (-x)\right) = W(-1)$.

$W(-1)$ – не існує. Отже, розв’язків немає.

5. Рівняння $x^x = a$.

Для такого типу рівнянь потрібно прологарифмувати обидві частини, після чого отримаємо простіше рівняння $x \cdot ln\, x\ = ln\, a$.

Приклади.

1) $x^x = 4;$

$x \cdot ln\, x\ = ln\, 4\,;$

$x \cdot ln\, x\ = 2\ ln\, 2\,.$

$x = 2;$

2) $x^{x^2} = 3;$

$x^2\ ln\, x\ = ln3;$

$e^{2lnx}\ ln\, x\ = ln3; | \cdot 2.$

$e^{2lnx} x\ = 2ln3;$

$x\ = W(2ln3);$

$ln\, x\ = \frac{W(2ln3)}{2};$

$x = e^{\frac{W(2ln3)}{2}}.$

IV. Задачі для самостійного опрацювання.

Розв'яжіть рівняння, використовуючи функцію Ламберта.

1) $x2^{3x} = 128;$
2) $e^{-x} = x;$
3) $(4x + 3)e^x = 11e^2.$
4) $x + 9^x = -\frac{16}{18};$
5) $x + \log_5(125x)\ = 3;$
6) $x^2 \log_3 x\ = 3;$
7) $\sqrt{x} \log_2 x\ = 12;$
8) $x^{2x} = 16;$
9) $x^{lnx}\ = e^{x^2};$
10) $(x^2 + x - 2)^{x^2+x-2} = 0{,}25.$

Висновки

Здобувачі освіти в шкільному курсі алгебри вивчають основні методи розв'язання показниково-логарифмічних рівнянь, такі як: елементарні перетворення, логарифмування чи експоненціювання двох частин рівняння, виділення спільної основи степеня чи логарифму, метод заміни та перехід до простішого рівняння, проте існує чимало видів рівнянь, які важко розв'язати звичними для них методами. Звідси і визначається важливе значення таких функцій, як, наприклад, функція Ламберта.

W-функція виникла завдяки праці Йоганна Генріха Ламберта та Леонарда Ейлера в другій половині XVIII століття. Їхні дослідження допомогли відшукати методи, які дозволяють розв'язувати деякі трансцендентні показниково-логарифмічні рівняння. Проте значення цієї функції значною мірою розкрилось лише із появою чисельних методів розв'язання рівнянь.

Проаналізувавши літературні джерела, мною було зібрано матеріал за темою дипломної роботи. Було вивчено властивості W-функції та її застосування при розв'язанні трансцендентних показниково-логарифмічних рівнянь; наведено приклади розв'язання різних видів рівнянь, до яких застосовується функція Ламберта; розглянуто можливості вивчення W-функції; розроблено програму факультативного курсу вивчення методів розв'язання трансцендентних показниково-логарифмічних рівнянь та приклади конспектів уроків.

Матеріали магістерської роботи можуть використовуватись здобувачами як середньої, так і вищої освіти, вчителями та викладачами при вивченні методів розв'язання трансцендентних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Вивальнюк Л. М., Шефтель З. Г., Рафаловський Е. В. Математика : посібник для факультативних занять у 9 кл. Київ : Радянська школа, 1984. 136 с.

2. Калюсенко Л. О. Інтегровані заняття як засіб підвищення інтересу учнів до вивчення математики // ІТМплюс – 2011 : матеріали конф. (м. Суми, 2011). Суми, 2011. С. 51.

3. Математика : посібник для факультативних занять у 10 кл. / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач та ін. Київ : Радянська школа, 1985. 208 с.

4. Математика : посібник для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики / Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко та ін. Київ : Освіта, 1998. 301 с.

5. Програми середньої загальної школи. Факультативний курс з математики. 7–11 класи / уклад. Л. М. Вивальнюк, В. Н. Боровик, З. Г. Шефтель та ін. Київ : Радянська школа, 1988. 24 с.

6. Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти : Постанова Кабінету Міністрів України № 851 від 25 лип. 2024 р. Режим доступу: https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724 (дата звернення: 10.11.2025).

7. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студентів вищих навчальних закладів. 2-ге вид. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.

8. Факультативи та спецкурси в школі. Режим доступу: https://navchalnovuhovna.blogspot.com/2016/05/blog-post.html (дата звернення: 10.11.2025).

9. Факультативні заняття. Режим доступу: https://megalib.com.ua/content/3939_Fakyltativni_zanyattya.html (дата звернення: 10.11.2025).

10. Факультативне заняття та його аналіз. Режим доступу: https://osvita.ua/school/method/technol/726/ (дата звернення: 10.11.2025).

11. Черевко Н. Актуальність вивчення функції Ламберта при дистанційній та змішаній формах проведення факультативів з математики // XVIII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформаційні технології в професійній діяльності» : матеріали конференції. — Рівне, 2025.

12. Черевко Н. Методичні особливості вивчення функції Ламберта з використанням інформаційних технологій при факультативному вивченні математики програми 11-го класу // XVIII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформаційні технології в професійній діяльності» : матеріали конференції. — Рівне, 2025.

13. Chapeau-Blondeau F., Monir A. Evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2. IEEE Transactions on Signal Processing. 2002. Vol. 50, No. 9. P. 233–239. DOI: 10.1109/TSP.2002.801912.

14. Chatzigeorgiou I. Bounds on the Lambert function and their application to the outage analysis of user cooperation. IEEE Communications Letters. 2013. Vol. 17, No. 8. P. 1505–1508.

15. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W function. Advances in Computational Mathematics. 1996. Vol. 5. P. 329–359.

16. Corless R. M., Jeffrey D. J. The Wright Ω function. ACM SIGSAM Bulletin. 2002. Vol. 36, No. 3. P. 2–8.

17. Corless R. M., Jeffrey D. J., Knuth D. E. A sequence of series for the Lambert W function // Proceedings of ISSAC ’97. 1997. P. 197–204.

18. Finkel B. F. Biography: Leonard Euler. The American Mathematical Monthly. 1897. Vol. 4, No. 12. P. 300.

19. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. 824 p.

20. Fritsch F. N., Schafer R. E., Crowley W. P. Algorithm 443: Solution of the transcendental equation we^w = x. Communications of the ACM. 1973. Vol. 16. P. 123–124.

21. Fukushima T. Precise and fast computation of Lambert W-functions without transcendental function evaluations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2013. Vol. 244. P. 77–89.

22. Galidakis I. N. Lambert's W function and convergence of infinite exponentials in the space of quaternions. Complex Variables and Elliptic Equations. 2006. Vol. 51, No. 12. P. 1129–1152.

23. Hayes B. Why W? American Scientist. 2005. Vol. 93, No. 2. P. 104–108.

24. Higginson W., Phillips E. Creative Mathematics. 1st ed. [Place of publication not identified] : Publisher, 2015. 192 p.

25. Hunt J. H. Designing Effective Math Interventions: An Educator's Guide to Learner-Driven Instruction. New York : Routledge, 2021. 114 p.

26. Jeffrey D. J. Branch structure and implementation of Lambert W. Mathematics in Computer Science. 2017. Vol. 11, No. 3–4. P. 341–350.

27. Mező I. The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton : CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022. 312 p.

28. Olver F. W. J., Roy R. Lambert W function // NIST Handbook of Mathematical Functions / F. W. J. Olver, D. M. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (eds.). Cambridge : Cambridge University Press, 2010. P. 111–118.

29. Thomas E. J., Brunsting J. R., Warrick P. L. Styles and Strategies for Teaching High School Mathematics. Thousand Oaks, CA : Corwin Press, 2010. 212 p.

30. Veberic D. Having fun with Lambert W(x) function. arXiv:1003.1628. 2010. Режим доступу: https://arxiv.org/abs/1003.1628 (дата звернення: 10.11.2025).

31. Woodman A., Albany E. Mathematics Through Art and Design: 6–13. 1st ed. [Place of publication not identified] : Publisher, 2011. 144 p.