РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та методики її навчання

«До захисту допущено»
Завідувачка кафедри
________ Наталія Генсіцька-Антонюк
«______»__________2025р.
протокол №

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В СЕРЕДНІЙ ТА ВИЩІЙ ШКОЛІ

Виконав:

здобувач другого (магістерського)
рівня вищої освіти
групи М-М-21
спеціальності А4.04 Середня
освіта (Математика)
Кравчик Нікіта Юрійович

Науковий керівник:
канд. техн. наук, доцент
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне-2025 р.

Анотація

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню методичних аспектів викладання інтегрального числення функції однієї змінної в середній та вищій школі. У роботі проаналізовано історичні передумови становлення інтегрального числення, здійснено огляд сучасних підходів до вивчення цієї теми у шкільних і університетських підручниках, а також розглянуто типові задачі на застосування визначених і невизначених інтегралів.

Особливу увагу приділено методичним аспектам навчання інтегрального числення в умовах компетентнісного підходу та цифровізації освіти. Проаналізовано можливості використання сучасних педагогічних технологій і цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos, MATLAB, Python) для підвищення наочності та практичної спрямованості навчання.

У практичній частині роботи розроблено методичні рекомендації щодо пояснення основних понять інтегрального числення, а також конспекти уроків для середньої школи і конспекти практичних занять для вищої школи. Результати дослідження можуть бути використані вчителями та викладачами математики з метою вдосконалення процесу навчання інтегрального числення та підвищення рівня математичної підготовки здобувачів освіти.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of methodological aspects of teaching integral calculus of a single variable in secondary and higher education. The work analyzes the historical background of the development of integral calculus, reviews contemporary approaches to studying this topic in school and university textbooks, and considers typical problems involving the application of definite and indefinite integrals.

Particular attention is paid to the methodological aspects of teaching integral calculus in the context of a competency-based approach and the digitization of education. The possibilities of using modern pedagogical technologies and digital tools (GeoGebra, Desmos, MATLAB, Python) to improve the clarity and practical orientation of teaching are analyzed.

The practical part of the work develops methodological recommendations for explaining the basic concepts of integral calculus, as well as lesson plans for secondary school and practical lesson plans for higher education. The results of the study can be used by mathematics teachers and lecturers to improve the teaching of integral calculus and raise the level of mathematical training of students.

ЗМІСТ

ВСТУП……………………………………………………………………...5
Розділ 1. Теоретичні основи викладання інтегрального числення………10
1.1 Історичний розвиток інтегрального числення……………………………10
1.2 Огляд підходів до вивчення теми "Інтегральне числення" в сучасних підручниках для вивчення математики в середній та вищій школі………… 12
1.3 Задачі на застосування визначених і невизначених інтегралів…………..22
Висновок до розділу 1……………………………………………………...24
Розділ 2. Методичні аспекти вивчення теми "Інтегральне числення" в середній та вищій школі……………………………………………………...26
2.1. Мета та завдання вивчення інтегрального числення в середній школі... 26
2.2. Мета та завдання вивчення інтегрального числення у вищій школі……31
2.3. Аналіз сучасних методик і технологій навчання……………………... 36
2.4. Використання графічних і цифрових інструментів для пояснення інтегралів………………………………………………………………………...42
Висновки до розділу 2……………………………………………………..44
Розділ 3. Розробка методичних рекомендацій для вивчення теми "Інтегральне числення"……………………………………………………...46
3.1 Методичні прийоми пояснення основних понять: первісної, визначеного інтеграла, формули Ньютона-Лейбніца………………………………… 46
3.2. Розробка конспектів уроків на тему "Інтегральне числення" в середній школі та вищій школі………………………………………………………...53
Висновки до розділу 3……………………………………………………..59
Висновки………………………………………………………………… 60
Список використаних джерел…………………………………………62
Додатки…………………………………………………………………66

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасний етап розвитку науки й техніки, швидкі зміни у сфері економіки, технологій та інформаційних систем вимагають від суспільства підготовки компетентних фахівців, здатних аналізувати процеси, моделювати явища та приймати обґрунтовані рішення.

Виклики, які стоять перед українською освітою вимагають від викладачів зосередити свої зусилля на підготовці фахівців, які вміють аналізувати та розв’язувати складні задачі зі своєї професійної області.

Зараз в старшій та вищій школах відбувається процес реформування. В середній школі розробляються та впроваджуються нові Державні стандарти освіти. Перед вищою школою постає питання щодо відповідності програм вимогам ринку праці. Все це власне і вимагає від вчителів застосування нових методик навчання математиці, як на базовому, так і на поглибленому рівнях; застосування сучасних освітніх технологій, спрямованих на активізацію пізнавальної діяльності здобувачів освіти. Тому одним із завдань, що посатє перед учителем, є організація ефективних, універсальних способів та методів навчання для досягнення учнями особистісних, предметних та міжпредметних результатів на різних етапах процесу навчання математики.

Інтегральне числення виступає важливим розділом математики, що формує основи аналітичного мислення та забезпечує практичні навички, необхідні для подальшого навчання та професійної діяльності.

На жаль, освітні втрати внаслідок пандемії та широкомасштабного вторгнення суттєвим чином впливають на здатність школярів та студентів сприймати складні абстрактні конструкції, тому дана тема викликає у здобувачів освіти серйозні проблеми.

Знайомство з математичним аналізом є основою, на якій можна будувати інші навички та професійні компетентності майбутніх фахівцем. Інтегральне числення пов’язує абстрактні математичні поняття з реальними задачами – від розрахунку площ та об’ємів до економічних і фізичних моделей.

Сучасна школа й університети функціонують у добу цифрової трансформації, коли інформаційні технології стають невід'ємною частиною освітнього процесу. Використання цифрових інструментів та інноваційних педагогічних технологій є не лише даниною часу, а й необхідною умовою для підвищення ефективності навчання, розвитку компетентностей та формування у студентів здатності працювати з великими масивами даних, застосовувати математичні методи у цифровому середовищі.

Інтеграція таких інструментів, як GeoGebra, Desmos, MATLAB, Python, у навчальний процес дозволяє забезпечити наочність, міждисциплінарні зв'язки та практичну спрямованість викладання. Використання інтерактивних середовищ і систем динамічної математики дає змогу учням і студентам не лише спостерігати результати, а й експериментувати з параметрами задач, що сприяє глибшому розумінню теорії.

Не менш значущою є роль інноваційних педагогічних технологій – фліп-технології, змішаного навчання, проєктного підходу та гейміфікації. Вони дозволяють організувати активну діяльність студентів, розвивати критичне мислення, комунікаційні навички й здатність застосовувати математику для вирішення реальних проблем.

Таким чином, поєднання цифрових інструментів із сучасними методиками навчання є необхідною передумовою якісної математичної освіти, яка відповідає вимогам XXI століття та готує молодь до ефективної діяльності в умовах швидкоплинних змін у науці, економіці та технологіях.

Вивчення інтегралів у середній та вищій школі має на меті досягнення таких цілей:

набуття системи компетентностей, необхідних для розв'язання прикладних задач у природничих, технічних та економічних науках;

інтелектуальний розвиток особистості, формування ясності та точності мислення, уміння аналізувати та узагальнювати інформацію;

розуміння фундаментальних ідей і методів математичного аналізу, зокрема зв'язку похідної й інтеграла, що є ключовим у науковій та інженерній діяльності;

виховання математичної культури, уміння застосовувати інтегральне числення як інструмент дослідження та частину загальнолюдської математичної спадщини.

Таким чином, інтегральне числення посідає важливе місце в системі освіти, оскільки воно не лише забезпечує прикладні вміння, а й формує ширший світогляд, необхідний сучасному учневі та студентові для успішної самореалізації в умовах глобальних змін.

Наукова новизна полягає у дослідженні доцільності використання інноваційних педагогічних технологій у процес вивчення курсу "Інтегральне числення".

Об'єктом дослідження є процес викладання теми "Інтегральне числення" в старшій та вищій школі.

Предметом дослідження є узагальнення та систематизація основних складових теми "Інтегральне числення", а також розробка методичних матеріалів для проведення занять з даної теми.

Мета дослідження: розробити ефективні методичні підходи до навчання інтегрального числення функції однієї змінної в шкільному курсі математики з акцентом на практичне застосування, а також у вищій школі.

Для досягнення даної мети були поставлені такі **завдання:**

– Проаналізувати історичний розвиток інтегрального числення та визначити основні етапи становлення даної математичної галузі.

– Здійснити огляд підходів до вивчення теми «Інтегральне числення» у сучасних підручниках для середньої та вищої школи.

– Розглянути приклади задач на застосування визначених і невизначених інтегралів у навчальному процесі.

– Визначити мету та завдання вивчення інтегрального числення у середній та вищій школі.

– Проаналізувати сучасні методики і технології навчання інтегрального числення.

– Дослідити можливості використання графічних і цифрових інструментів для пояснення інтегралів.

– Розробити методичні рекомендації щодо пояснення основних понять інтегрального числення (поняття первісної, визначеного інтеграла, формули Ньютона – Лейбніца).

– Скласти конспекти уроків для вивчення теми «Інтегральне числення» у середній школі.

– Розробити конспекти практичних занять з інтегрального числення для студентів вищої школи.

При написанні роботи використовувались такі наукові **методи дослідження** як аналіз, систематизація, узагальнення, системний підхід тощо. Також використовувались специфічні методи: аналіз навчальних програм і підручників, метод вивчення та узагальнення педагогічного досвіду, метод програмування навчального процесу, компетентнісний підхід.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що результати аналізу та узагальнення, висновки та методичні розробки можуть бути корисними для проведення занять з школярами та студентами з теми "Інтегральне числення".

Зв'язок роботи з науковою темою кафедри. Кваліфікаційна робота виконана на кафедрі математики та методики її навчання Рівненського державного гуманітарного університету згідно з науковою темою кафедри "Теоретико-методичні засади формування професійної компетентності майбутніх учителів математики" (державний реєстраційний номер 0125U003357).

Апробація. Результати наукової роботи були заслухані на засіданні кафедри математики та методики її навчання, звітній науково-практичній конференції РДГУ (2025). Основні результати магістерської роботи були апробовані та оприлюднені у вигляді тез доповіді на XVIII Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності» (м. Рівне, 2025 р.).

Структура роботи зумовлена загальною метою та конкретними завданнями дослідження. Дослідження складається зі вступу, трьох розділів, висновків, додатків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 125 сторінок.

Розділ 1. Теоретичні основи викладання інтегрального числення

1.1 Історичний розвиток інтегрального числення

Ідеї, що закладені в основі інтегрального числення, зародилися ще в глибоку давнину, задовго до формального виникнення самого поняття інтегралу. Практична потреба в обчисленні площ, об’ємів і довжин кривих стимулювала розвиток відповідних методів у різних культурах.

У Стародавньому Єгипті та Вавилоні існували примітивні, але дієві підходи до визначення площі земельних ділянок і об’єму ємностей. Хоча ці методи були більше емпіричними, ніж теоретичними, вони демонструють перші кроки до обчислення інтегралів через розбиття фігур на частини.

В Стародавній Греції для обчислення площ та об’ємів використовувався метод вичерпання, який був розроблений Евдоксом Кнідським (бл. 408 – 355 до н.е.) і пізніше вдосконалений Архімедом [2,3,9].

У XX та XXI століттях інтегральне числення зазнало кардинальних змін, перетворившись з інструменту для розв’язання геометричних та фізичних задач на фундаментальну основу для багатьох розділів сучасної математики та науки. Розвиток йшов двома основними шляхами: поглиблення теоретичних основ та створення нових видів інтегралів для розв’язання складніших, раніше недоступних проблем.

На початку 20 століття французький математик А.нрі Лебег створив нову теорію інтегрування, яка значно розширила та узагальнила класичний інтеграл Рімана. Якщо інтеграл Рімана "ріже" область визначення (вісь X) на маленькі шматочки і підсумовує площі відповідних прямокутників, то Лебег запропонував інший підхід. Він "ріже" область значень (вісь Y) і підсумовує "міри" множин, на яких функція набуває близьких значень.

За аналогією при підрахунку грошей, метод Рімана означає виймання купюри по одній і додавання їх номіналу. Метод Лебега означає, що спочатку всі купюри одного номіналу (всі 10, всі 20, всі 50) групуються, а потім рахується їх кількість у кожній групі, перемножується та складається результат [2].

Інтеграл Лебега дозволив інтегрувати набагато "гірші", дуже розривні функції, для яких інтеграл Рімана не існував. Це виявилося критично важливим для функціонального аналізу та теорії ймовірностей. Теорія Лебега дозволила довести потужні теореми про границі інтегралів, які значно спростили роботу з послідовностями функцій. Також робота Лебега формалізувала поняття міри – узагальнення довжини, площі та об’єму, що стало фундаментом для сучасної теорії ймовірностей, де ймовірність розглядається як міра.

Класичне числення описує плавні, передбачувані процеси, але не підходить для опису скачкоподібних процесів, наприклад, руху акцій на біржі, дифузії частинок пилку у воді (броунівський рух) або шуму в електронних системах. Для цього було створено стохастичне числення. Японський математик К. Іто розробив стохастичний інтеграл (інтеграл Іто). Він дозволяє інтегрувати по траєкторіях випадкових процесів, які є вкрай нерегулярними та "зубчастими" та не мають похідної в жодній точці. Стохастичне числення стало незамінним інструментом у фінансовій математиці (наприклад, у формулі Блека-Шоулза для оцінки опціонів), фізиці, біології та інженерії.

З появою та розвитком комп’ютерів стався прорив у застосуванні чисельних методів інтегрування. Багато інтегралів, які неможливо взяти аналітично (тобто записати відповідь у вигляді формули), можна з високою точністю обчислити на комп’ютері.

Були розроблені квадратурні формули високого порядку (наприклад, адаптивні квадратури), які автоматично налаштовують точність обчислень, роблячи процес швидким та ефективним.

А. Робінсон розробив теорію, яка строго обґрунтувала використання "нескінченно малих" величин (інфінітезималей), повернувши до життя інтуїцію Лейбніца, але вже на новому, логічно бездоганному рівні.

Інтеграл став розглядатись як особливий вид лінійного функціоналу в нескінченновимірних просторах функцій. Це дозволило застосовувати геометричні та алгебраїчні ідеї до вивчення функцій та рівнянь.

Таким чином, у XX-XXI століттях інтеграл перестав бути просто "площею під кривою". Він став універсальною мовою для опису накопичення, усереднення та ймовірності у найрізноманітніших системах різної природи від детермінованої до стохастичної.

1.2 Огляд підходів до вивчення теми "Інтегральне числення" в сучасних підручниках для вивчення математики в середній та вищій школі

Тема "Інтегральне числення" вивчається в українській школі в 11 класі. Вона є завершенням функціональної ліній вивчення математики в старшій школі.

Для аналізу підходів до викладення теми "Інтегральне числення" були обрані підручник Неліна Є., Долгової О. "Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)" [18] та Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. "Алгебра і початки аналізу : проф. рівень"[1].

В підручнику Неліна та Долгової тема "Інтегральне числення "складається з таких підтем:

1) Первісна та її властивості
2) Визначений інтеграл та його застосування

Поняття інтегралу вводиться як обернена дія по відношенню до знаходження похідної.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Далі наводиться приклад, який пояснює це означення для функції $f(x) = 3x^2$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^3$, оскільки $F'(x) = f(x)$.

В підручнику наводиться твердження щодо загального вигляду первісної та його доведення.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C – довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$.

При цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Наводиться геометричний зміст основної властивості первісної. Множина функцій $y = F(x) + C$ – це нескінченна кількість кривих. Кожна з них має абсолютно однакову форму. Зміна константи C просто зсовує графік вгору (якщо $C > 0$) або вниз (якщо $C < 0$) вздовж осі OY (рис.1.1).

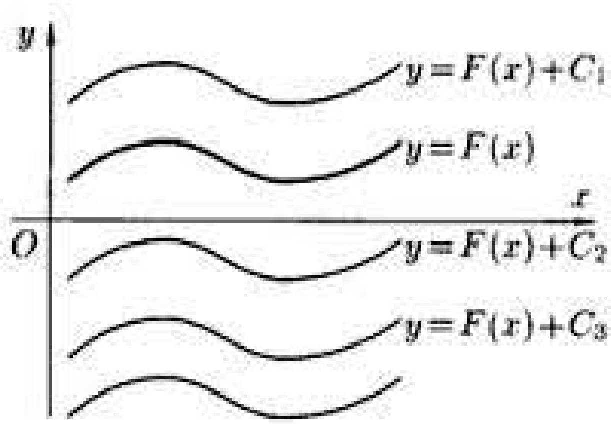


Рис. 1.1

Автори вводять поняття невизначеного інтегралу як сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$. Вводиться позначення інтегралу, підінтегральної функції, змінної інтегрування та наводиться приклад запису інтегралу від функції [18].

Відмітимо, що оскільки для учнів в 10-му класі не вводилось поняття диференціалу функції, то автори не роз’яснюють символ dx і залишають його як частину позначення інтегралу.

Далі в підручнику наводяться з доведенням правила знаходження первісних.

Правило 1. Якщо F – первісна для f, а G – первісна для g, то $F + G$ – первісна для $f + g$.

Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.

Правило 2. Якщо F – первісна для f, а c – стала, то cF – первісна для функції cf.

Правило 3. Якщо F – первісна для f, а k і b – сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.

Для кожного правила наводиться доведення з використанням правил обчислення похідних. Так, третє правило доводиться таким чином:

Якщо F – первісна для f, то $F'(x) = f(x)$. За правилами обчислення похідної складної функції отримаємо

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b)$$

А це і показує, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції $f(kx+b)$.

Потім для учнів вводиться таблиця первісних, правильність якої пропонується перевірити за допомогою операції диференціювання. В списку наведені основні елементарні функції, які учень 11-го класу вивчив до даного моменту. Основний наголос авторами робиться на інтегралі вигляду $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Для таких інтегралів наведені приклади обчислення інтегралів. Такий наголос зумовлений тим, що комбінації степеневих функцій найчастіше зустрічається в шкільному курсі математики.

Інші інтеграли, наведені в підручнику:

$$\int 0dx = C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int 1dx = \int dx = x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

Для введення поняття визначеного інтегралу автори підручника спочатку наводять геометричний зміст інтегралу, пояснюючи зв'язок інтегрування з обчисленням площі. Для цього вводиться поняття криволінійної трапеції.

Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$*, відрізком* $[a;b]$ *осі Ox і прямими x=a і x=b називається криволінійною трапецією* (рис.1.2).

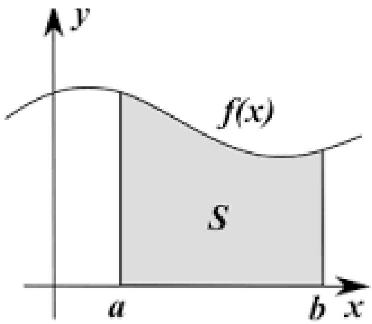


Рис. 1.2

Доведення твердження, що функція $S(x)$ – площа криволінійної трапеції – є первісною для функції $f(x)$, тобто $S' = f(x)$.

Для доведення використовується співвідношення $\frac{S(x)}{\Delta x} = f(x)$

Обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

На основі викладених міркувань вводиться означення визначеного інтегралу та його позначення.

Різниця $F(b) - F(a)$ називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Також пояснюється, що отримана формула є формулою Ньютона-Лейбніца.

Автори наводять основні властивості визначеного інтегралу, а саме

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Крім того, в підручнику наводяться приклади застосування інтегрального числення в різних сферах: фізиці (обчислення роботи, кількості теплоти, заряду, переміщення), економіці (дисконтована вартість грошового потоку, продуктивність, точка рівноваги економічної системи).

Отже, проведений аналіз засвідчує, що тема "Інтегральне числення" у підручнику Неліна Є., Долгової О. представлена послідовно та методично обґрунтовано, із поступовим переходом від базових понять до прикладних застосувань. Логіка побудови курсу зберігає історичну послідовність: спочатку первісна як обернена дія до диференціювання, потім невизначений інтеграл, далі визначений інтеграл через геометричний зміст і формулу Ньютона–Лейбніца.

Використано інтуїтивні пояснення (геометричний зміст, ілюстрації, приклади) без перевантаження формальною строгістю.

Для правил знаходження первісних наведено доведення на основі вже відомих учням правил диференціювання.

Таблиця первісних обмежена елементарними функціями, що відповідає шкільному рівню.

Поняття визначеного інтеграла вводиться через задачу знаходження площі криволінійної трапеції, що допомагає закріпити геометричний сенс інтегралу. Наведені приклади застосувань інтегралів у фізиці (робота, теплота, заряд, переміщення) та економіці (дисконтована вартість, продуктивність, точка рівноваги) формують міжпредметні зв’язки та демонструють значення інтегралів у реальних задачах.

Проведемо аналіз змісту підручника Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. за темою "Інтегральне числення". Дана тема в підручнику розбита на 4 параграфи:

1) Первісна.
2) Правила знаходження первісної.

3) Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл.

4) Обчислення об’ємів тіл.

Викладання понять інтегрального числення і в цьому підручнику починається з нагадуванням учням задачі знаходження похідної та формулювання оберненої задачі, вводячи таким чином поняття операції інтегрування. Формулюється означення.

Означення. Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$F'(x) = f(x)$.

Автори наводять декілька прикладів, демонструючи поняття первісної. Також на прикладі демонструється наявність нескінченної множини первісних для однієї функції.

Так, для функції $y = 2x$ первісними є $y = x^2 + 1$ та $y = x^2 - \sqrt{2}$. Таким чином автори підводять учні до наступної теореми.

Теорема (основна властивість первісної). Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C – деяке число.

Доведення проводиться за допомогою диференціювання функції $y = F(x) + C$.

На основі доведеної теореми автори вводять поняття загальний вигляд первісної та невизначеного інтервалу $\int \quad f(x)dx$ та спосіб читання цього виразу без уточнення поняття диференціалу dx.

В підручнику наводяться приклади знаходження первісних для елементарних функцій, що задовольняють певним умовам, наприклад, проходять через певну точку.

Підручник Щерби А., Нестеренка А., Мірошкіної І. "Математичний аналіз" розрахований для студентів технічних спеціальностей [26]. Темі

"Інтегральне числення" присвячено 3 розділи книги: в четвертій главі вивчається невизначений інтеграл, в п’ятій главі розглядається визначений інтеграл, в сьомій главі – інтегральне числення функції багатьох змінних.

Автори досить коротко визначають поняття невизначеного інтегралу через первісну функції. Операція інтегрування дається як обернена операція до диференціювання. Наводиться основна теорема про первісну. Також наводяться без доведення основні властивості невизначеного інтеграла. Приводиться розширена таблиця інтегралів. Крім того автори згадують про існування первісних, які не можна виразити через скінчену кількість арифметичних дій: інтегральні синус та косинус, інтеграл Пуассона, еліптичний інтеграл, інтегральний логарифм.

Значна увага в підручнику відводиться методам інтегрування. Для кожного методу наводиться формула загального вигляду та приклади. Розглянуті такі методи:

– метод інтегрування за допомогою введення нового аргументу;
– метод розкладання;
– метод виділення цілої частини підінтегрального дробу;
– метод інтегрування по частинах;
– метод заміни змінної.

Крім того, в окремих параграфах розглядаються підходи до інтегрування раціональних дробів. Ірраціональних функцій, тригонометричних функцій, квадратичних ірраціональностей. Кожен парграф містить детальний опис підходів до рішення таких інтегралів та приклади, які їх ілюструють.

Два окремих параграфи в підручнику присвячені невласним інтегралам першого та другого роду. Розглядаються властивості таких інтегралів та ознаки порівняння, які дозволяють виконати обчислення таких інтегралів, наводяться приклади.

В підручнику приділяється велика увага практичному застосуванню інтегралів. Наводиться багато прикладів для обчислення площ складних фігур, заданих декількома кривими, рівняннями кривих в параметричному вигляді та в полярних координатах. Також наводяться твердження (теореми та наслідки) щодо обрахування довжини кривої за допомогою інтегралі. Розглядається декілька прикладів, які демонструють використання цих теорем. В підручнику багато уваги приділено питанням використання інтеграла для обчислення об’єму і поверхні тіл обертання, моментів, координат центру мас. В усіх випадках наводяться загальні формули без доведення.

Окремий розділ підручника присвячений інтегральному численню функцій багатьох змінних.

Перш за все, автори пропонують студентам ознайомитись з криволінійними інтегралами: першого роду по довжині дуги та другого роду по координатах. Студентам наводяться основні властивості криволінійних інтегралів (умови існування, адитивність лінійність) та способи їх обчислення. Всі твердження наводяться без доведення. Розгляд інтервалів супроводжується прикладами.

Далі в підручнику розглядаються подвійні інтеграли, їх властивості (достатня умова інтегрованості функції, лінійність, адитивність, монотонність, оцінка інтегралу, фізичний та геометричний зміст), правила обчислення подвійних інтегралів. Також наводяться приклади обчислення подвійних інтегралів.

Останнім в підручнику розглядається тема потрійних інтегралів. Наводяться необхідна та достатня умови існування таких інтегралів, фізичний та геометричний зміст, правила обчислення. Також наприкінці наводяться приклади обчислення потрійних інтегралів.

Таким чином, для студентів технічних спеціальностей в підручнику більш детально розглядаються способи обчислення інтегралів. Крім того, в підручнику студентів технічних спеціальностей знайомлять з інтегральним численням функцій багатьох змінних (криволінійні, подвійні та потрійні інтеграли). Такий підхід обумовлений тим, що досить багато технічних задач зводиться до використання інтегралів такого виду, тому студенти повинні вміти працювати з таким математичним апаратом.

Для аналізу підручників для студентів спеціальності "Математика" був обраний підручник Курченка О. "Інтегральне числення функцій однієї змінної" [14]. В ньому міститься навчальний матеріал модуля "Первісна та невизначений інтеграл. Інтеграл Рімана" нормативного курсу “Математичний аналіз: функції однієї змінної”, що викладається для студентів спеціальностей математика та статистика.

Автор вводить поняття первісної через операцію диференціювання. Також автори формулюють та доводять теорему про структуру множини первісних. В підручнику обговорюється умови існування первісних і на основі цього формулюється математично коректне означення невизначеного інтегралу.

Означення 1.1.3. Нехай J − проміжок, A − скінченна підмножина проміжка J, функція $f: J \to R$. Функція $F: J \to R$ називається первісною у широкому сенсі функції *f* на проміжку *J*, якщо:

1) функція F неперервна на *J* ;

2) функція F диференційовна на $J\backslash A$ і $\forall x \in J\backslash A: F'(x) = f(x)$.

Означення 1.1.4. Нехай функція $f: J \to R$ має первісну у широкому сенсі на проміжку *J*. Множина всіх її первісних у широкому сенсі на проміжку *J* називається невизначеним інтегралом у широкому сенсі функції f на J або просто невизначеним інтегралом функції *f* на *J*.

Далі наводяться властивості невизначеного інтеграла. Для кожного з них наводиться доведення або студентам пропонується провести доведення самостійно за аналогією.

Значна увага приділяється методам інтегрування. Для кожного з них автори наводять теоретичне обгрунтування. Розглядаються всі основні методи інтегрування, а також підходи до інтегрування раціональних функцій, раціональних функцій від синусів та косинусів, ірраціональних функцій.

Для формування поняття про визначений інтеграл або інтеграл Рімана автори вводять в розгляд поняття інтегральної суми. Далі доводяться леми щодо обмеженості інтегрованої за Ріманом функції.

Для формулювання умов інтегрування функцій вводяться верхня та нижня суми Дарбу. Тоді критерієм інтегрованості функції можна записати таким чином.

Функція $f(x)$, обмежена на відрізку $[a,b]$, є інтегрованою за Ріманом на цьому відрізку тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ існує розбиття відрізка $[a,b]$ таке, що різниця між верхньою та нижньою сумами Дарбу для цього розбиття менша за ε.

На основі сформульованого критерія в підручнику доводиться інтегровність за Ріманом на відрізку $[a, b]$ таких класів функцій:

– сімейство монотонних на відрізку $[a, b]$ функцій;
– сімейство неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій;
– сімейство обмежених функцій $f\colon [a, b] \to R$, кожна з яких має не більше скінченної множини точок розриву на відрізку $[a, b]$.

В підручнику формулюється та доводиться формула Ньютона-Лейбніца для різних класів функцій на основі оцінок інтеграла.

Далі автори переходять до методів обчислення інтеграла Рімана. Для кожного методу наводиться його загальна формула, її доведення та приклади використання.

Розглядається використання інтегралів для обчислення площі, довжини дуги, об’єму, площі поверхні тіл обертання та центрів ваг і моментів.

Загалом, аналіз підручників для вищої школи показує, що вони всі мають подібну чітку послідовність викладу. Якщо в підручнику для економістів більша увага сконцентрована на економічному застосуванні інтегралів без доведення більшості тверджень, то в підручниках для інженерних та математичних спеціальностей автори наводять доведення певних тверджень та більш детально описують формалізацію поняття визначеного інтегралу. Також в останніх двох підручниках більше уваги приділено різним підінтегральним функціям та способам їх інтегрування. Останній підручник має найбільшу теоретичну складність, що і зрозуміло, оскільки він забезпечує курс для підготовки фахівців в області математики.

Загалом, можна стверджувати, що всі підручники дотримуються стандартної лінії викладання теми "Інтегральне числення": починаючи з невизначеного інтеграла, і завершуючи використанням визначеного інтеграла для практичних завдань.

1.3 Задачі на застосування визначених і невизначених інтегралів

В шкільних підручниках весь комплекс задач з теми "Інтегральне числення" можна поділити на такі групи:

1. Завдання на встановлення того, що деяка функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$.

2. Знаходження первісної функції.

3. Практичне застосування первісної.

4. Обчислення невизначених інтегралів.

5. Обчислення визначених інтегралів.

5. Обчислення площ з допомогою інтегралу.

6. Практичне застосування інтегралів.

Розглянемо приклади задач кожного типу.

Задачі першого типу.

Задача 1. (Підручник Неліна Є., Долгової О.)

Доведіть, що функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку.

$$F(x) = x^{-3}, f(x) = -3x^{-4}, x \in (0; +\infty)$$

Рішення.

Враховуючи, що $F'(x) = f(x)$, отримаємо

$$F'^{(x)} = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = f(x)$$

Що і потрібно довести

Задача 2. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Установіть, чи є функція F первісною функції f:

$F(x) = 3x^2 + x - 2, f(x) = 6x + 1;$

Рішення.

Оскільки $F'(x) = (3x^2 + x - 2)' = 6x + 1 = f(x)$, то функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$.

Задачі другого типу.

Задача 3. (Підручник Неліна Є., Долгової О.)

Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x)$

$f(x) = x + cos\,cos\,x$

Рішення.

Використовуючи властивість суми первісних та таблицю первісних, отримаємо

$F(x) = \frac{x^2}{2} + sin\,sin\,x\ + C$, де C – довільна константа

Задача 4. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

$f(x) = x^2$, A(–1; 3).

Рішення.

Застосуємо таблицю первісних.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$F(A) = \frac{(-1)^3}{3} + C = -\frac{1}{3} + C = 3$$

Звідси

$$C = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Отже, задана первісна має вигляд

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{1}{3}$$

Задача 5. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Укажіть на рисунку 9.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)$ = cos3.

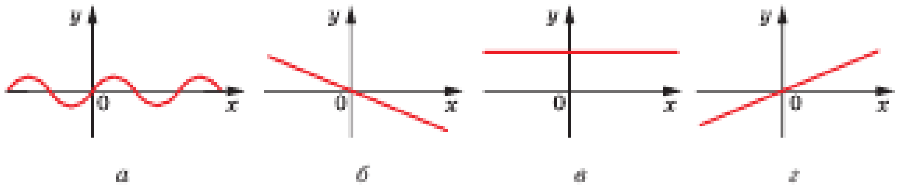


Рис.1.7

Рішення.

Оскільки $f(x)$ = cos3 є константною функцією, то по таблиці первісних можемо записати одну з первісних даної функції $F(x) = xcos3$.

Дана функція є лінійною, її кутовий коефіцієнт $k = cos\, cos\, 3 < 0$. Отже, графік, що відповідає первісній, зображений на рис.б.

Таким чином в підручниках представлені задачі різних типів, які дозволяють тим, хто навчається отримати всебічне розуміння поняття інтеграла.

Висновок до розділу 1

Аналіз історії формування основ інтегрального числення показує, що це був послідовний процес від практичних геометричних методів через аналітичні інтуїції до формальних математичних конструкцій (суми Рімана, міра і інтеграл Лебега). Сьогодні інтеграл розглядається як:

- фундаментальний зв'язок між локальною зміною (похідною) і глобальною сумою (інтегралом);
- лінійна функціональна оцінка на просторах функцій (функціональний аналіз).

Інтеграл виступає універсальним інструментом у фізиці, статистиці, ймовірностях, інженерії та чисельних обчисленнях, тому вивчення теми "Інтегральне числення" стає важливим як у старшій, так і у вищій школі.

Аналіз підходів у викладанні "Інтегрального числення" в підручниках для старшої школи показує, що для всіх підручників характерним є чітка послідовність викладу, баланс між теоретичними визначеннями й прикладними задачами, використання наочності (рисунки, графіки).

Для підручників для вищої школи характерним є певна відмінність в обсягу викладеного матеріалу в залежності від типу спеціальності, для якої розрахований підручник. В будь-якому разі для всіх підручників характерним чітка структура з наростанням складності: від базових понять до просторових задач, наявність доведень та завдань для самостійного доведення, використання алгоритмів обчислення інтегралів та візуалізації.

Аналіз задач, які наведені від підручниках, показує, що їх обсяг та складність відповідають змісту теоретичних відомостей та допомагають сформувати навички роботи з інтегралами у школярів та студентів.

Розділ 2. Методичні аспекти вивчення теми "Інтегральне числення" в середній та вищій школі

2.1. Мета та завдання вивчення інтегрального числення в середній школі

Вивчення інтегрального числення в курсі математики середньої школи має важливе значення для формування цілісного математичного світогляду учнів.

Науково-технічних прогрес призвів до підвищених вимог до людей, які мають математичну компетентність, майже у всіх нових професіях. Ці тенденції сприяли включенню математичного аналізу до програми з математики у старших класах середньої школи.

Методи математичного аналізу часто потрібні для визначення та розуміння взаємозв’язків між спостереженнями та максимізацією ефективності даних для предметів повсякденного вжитку, наприклад, під час будівництва доріг та дамб, і базове знайомство з математичним аналізом є важливим для учнів, які готуються вступати до вищих навчальних закладів. Більшість спеціальностей вимагають сильних математичних навичок, і тому розуміння математичного аналізу стає важливим.

Згідно Державного стандарту середньої освіти в сучасній школі основною парадигмою став компетентнісний підхід. Використання цього підходу передбачає цілеспрямовану орієнтацію освітнього процесу на розвиток у здобувачів освіти ключових та предметних компетентностей, що є динамічним поєднанням знань, умінь, навичок, досвіду та якостей, необхідних для успішної діяльності в сучасному світі. Власне це системний підхід, що ставить на перше місце не просто запам’ятовування інформації, а здатність застосовувати її в конкретних життєвих ситуаціях, готуючи учнів до викликів суспільства, ринку праці та подальшого навчання [12,13].

При використанні компетентнісного підходу передбачається перехід від оцінки окремих знань до оцінки інтегрованих результатів, які визначають готовність до певних видів діяльності. У здобувачів освіти формуються вміння та навички, що дозволяють аналізувати, синтезувати інформацію, розв'язувати проблеми та створювати новий продукт. Для досягнення таких результатів використовуються практико-орієнтовані завдання, проєкти, навчальні ігри та інші форми роботи, що стимулюють пошукову діяльність учнів. Таким чином, забезпечується всебічний розвиток особистості, формування відповідальності та здатність навчатися протягом життя [12,13].

Результатом компетентістного підходу є підготовка учнів до успішної адаптації в сучасному, конкурентному світі, включаючи ринок праці та соціальне життя.

Компетентнісний підхід у сучасному викладанні математики в школі спрямований на формування в учнів не лише знань, умінь і навичок, а й здатності застосовувати їх у різних життєвих і професійних ситуаціях. Математика розглядається як засіб розвитку критичного та логічного мислення, уміння аналізувати інформацію, робити висновки та приймати обґрунтовані рішення. Такий підхід передбачає активну діяльність учнів, у якій важливе місце займають дослідницькі та практичні завдання, робота з моделями, використання міжпредметних зв'язків і сучасних інформаційних технологій. Значна увага приділяється формуванню математичної грамотності – уміння читати, інтерпретувати та створювати математичні моделі для опису реальних процесів і явищ. Учитель у цьому контексті виступає не лише джерелом знань, а й організатором освітнього процесу, фасилітатором, який допомагає учням самостійно здобувати нову інформацію, розвивати пізнавальну активність і вміння співпрацювати. Компетентнісний підхід у навчанні математики сприяє підготовці школярів до життя в сучасному суспільстві, де від них вимагається здатність швидко орієнтуватися в інформаційному середовищі, ефективно використовувати математичний апарат для розв'язування проблем і знаходити творчі рішення в різних сферах діяльності [22].

Поняття інтеграла завершує розгляд основ математичного аналізу, логічно поєднує диференціювання та інтегрування, забезпечує глибше розуміння зв'язку між геометричними образами, фізичними процесами та їх математичними моделями [17].

Інтегральне числення в курсі математики виконує важливу роль не лише як елемент теоретичної підготовки, а й як інструмент формування ключових компетенцій учнів. Насамперед воно розвиває математичну компетентність, адже знайомить школярів із фундаментальними ідеями аналізу, формує вміння працювати з поняттями первісної та визначеного інтеграла, бачити їхній зв'язок із похідною та геометричними чи фізичними образами. Засвоєння методів інтегрування і застосування інтегралів до розв'язування прикладних задач формує здатність моделювати реальні процеси, інтерпретувати результати та оцінювати їх доцільність, що сприяє розвитку дослідницької й аналітичної компетентності.

Розв'язування задач на знаходження площ, об'ємів, довжин кривих чи роботи змінної сили стимулює розвиток природничо-наукової компетентності, адже учні вчаться бачити зв'язок математики з фізикою, геометрією, економікою. Інтегральне числення також сприяє формуванню інформаційно-цифрової компетентності, оскільки потребує використання таблиць інтегралів, математичного програмного забезпечення, вміння працювати з графіками та візуалізаціями. Водночас систематичний пошук раціональних способів інтегрування, перевірка правильності розв'язків і аналіз результатів виховують уважність, логічність і критичне мислення.

Таким чином, інтегральне числення є потужним засобом формування не лише спеціальних математичних знань, а й універсальних компетенцій, необхідних сучасному учневі для орієнтації в інформаційному середовищі, прийняття рішень і застосування математики для пояснення й розв'язання реальних проблем.

Загалом, метою вивчення інтегрального числення є [17]:

– ознайомлення учнів із фундаментальними поняттями первісної та визначеного інтеграла;

– формування уявлень про інтеграл як універсальний математичний інструмент для розв’язування прикладних задач;
– розвиток навичок застосування інтегралів у геометрії, фізиці, економіці та інших галузях знань;
– підготовка учнів до подальшого вивчення вищої математики та дисциплін природничо-наукового циклу.

Завдання вивчення теми "Інтегральне числення" полягають у тому, щоб:

1. Сформувати поняття первісної функції, невизначеного й визначеного інтеграла.

2. Ознайомити учнів із основними властивостями інтегралів і правилами знаходження первісних.

3. Навчити використовувати таблицю первісних та найпростіші методи інтегрування.

4. Розкрити геометричний і фізичний зміст інтеграла (площа криволінійної трапеції, шлях, робота сили).

5. Ознайомити з прикладами застосування інтегралів у прикладних задачах.

6. Розвивати вміння аналізувати та інтерпретувати результати інтегрування.

Таким чином, вивчення інтегрального числення у середній школі сприяє не лише засвоєнню важливих математичних знань і навичок, але й розвитку логічного мислення, здатності моделювати реальні процеси та усвідомленню ролі математики в описі навколишнього світу.

Державний стандарт середньої освіти передбачає розділення вивчення математики в старшій школі на два рівні: профільний та стандарт. На рівні стандарт для вивчення інтегралів відводиться 10 годин, на профільному рівні – відповідно 30 годин.

Порівняльний аналіз освітніх програм рівня стандарт та профільного рівня наведений в табл.2.1.

Таблиця 1.1

Порівняльний аналіз програм з математики в розрізі теми "Інтегральне числення" рівнів стандарт та профільний

	Рівень стандарт	**Профільний рівень**
Обсяг і глибина теоретичного матеріалу	Інтеграл вводиться у мінімально необхідному обсязі. Зазвичай обмежується поняттям визначеного інтеграла та його геометричним змістом (площа під графіком). Формули та техніка інтегрування подаються схематично або зовсім без деталізації.	Дається системне розуміння первісної, невизначеного та визначеного інтеграла з формулою Ньютона–Лейбніца. Є таблиця первісних, основні правила інтегрування, властивості інтегралів. Однак наголошується, що техніка інтегрування – не самоціль, основна увага на моделювання реальних процесів.
Практична спрямованість	Мінімальний набір прикладів – обчислення площ плоских фігур через інтеграл. Фізичні задачі здебільшого відсутні.	Виконуються прикладні задачі**:** обчислення площ, об’ємів тіл обертання, задачі з фізичним змістом. Мета – показати інтеграл як інструмент у моделюванні, але з обмеженим набором методів інтегрування.
Рівень вимог до учнів	Розуміти геометричний зміст інтеграла та вміти застосувати його для знаходження площ.	Вміти формулювати визначення та властивості первісної, невизначеного й визначеного інтегралів; знаходити інтеграли за основними правилами; вирішувати задачі прикладного характеру.

Аналіз свідчить, що на рівні стандарт відбувається зосередження на ілюстрації інтегралу як ідеї площі під кривою, а формальне інтегрування майже не вивчається. Практичні задачі обмежуються тільки обчисленням площі найпростіших фігур.

Профільний рівень представляє собою баланс між технікою інтегрування та прикладними задачами, інтеграл подається як важливий інструмент для моделювання.

Загалом, тема інтегрування викладається в шкільному курсі математики таким чином.

1) розглядаються приклади взаємно зворотних операцій;

2) запроваджується інтегрування як операція, зворотна диференціюванню, а первісна як наслідок операції інтегрування;

3) ознайомлюють учнів з основною властивістю первісної;

4) складається таблиця первісних;

6) ознайомлюють учнів із правилами знаходження первісних;

7) вирішують завдання із застосуванням первісної.

Всі поняття запроваджуються на дедуктивній основі, дається ілюстрація використання визначення основного поняття, його властивостей за допомогою конкретних прикладів. Завдання, крім використання їх як засобу ілюстрації теоретичного матеріалу, що вводиться в розгляд, служать засобом його закріплення, про що свідчать і їх формулювання. Наприклад: знайти таку первісну функцію, графік якої проходить через дану точку.

Потрібно відзначити, що тема "Інтегральне числення" є складною для розуміння учнями, оскільки вона містить поняття високого рівня абстракції.

2.2. Мета та завдання вивчення інтегрального числення у вищій школі

Слід зазначити, що інтегрування служить основою для різноманітних застосувань у реальному світі. Вивчаючи інтегральне числення, студенти бакалаврату повинні створювати ментальні структури, які дозволять їм вирішувати задачі застосування інтегрального числення до різних практичних задач.

Математичний аналіз є тією галуззю математики, яка виходить далеко за рамки того, що вивчається в геометрії та алгебрі. Він спрямований на вивчення функціональних змін, і, як наслідок, багато коледжів та закладів вищої освіти вносять дисципліну "Вища математика" до переліку обов’язкових, враховуючи широке використання диференційного та інтегрального числення в галузях інженерії, економіки, технологій, архітектури та природничих наук.

В інтегральному численні студенти знайомляться з правилами, процедурами та алгоритмічними формулами для стандартних функцій, наприклад, з підстановкою, інтегруванням частинами, правилами роботи з раціональними дробами та ірраціональними виразами, а також логарифмічними та тригонометричними підстановками. Студенти мають змогу вільно володіти символьними методами інтегрування, але їм може бракувати концептуального розуміння, що стає проблемою, коли вони намагаються застосувати інтегрування до реальних задач

Для вивчення математичних, природничих та фізичних дисциплін необхідна міцна основа в знаннях з границь послідовностей, функцій та інших складових математичного аналізу, і, отже, це обов’язкова умова для студентів, які бажають здобути бакалаврський ступінь в області інженерії, біології, хімії. Крім того, математичний аналіз став важливим базовим курсом для студентів, які вивчають економіку, оскільки він є основною для дослідження операцій, бізнес-аналітики, економетрики тощо [28,30].

Таким чином, інтегральне числення виступає важливим інструментом для формування прикладних компетентностей студентів у різних сферах знань.

У студентів економічних спеціальностей викладання теми "Інтегральне числення" розвиває компетенції, необхідні для їх майбутньої професії завдяки використанню інтегралів у задачах, пов’язаних із граничними величинами, доходами та витратами, визначенням сукупного прибутку чи продуктивності виробництва. Студенти бачать, як математичні моделі описують реальні економічні процеси: обчислення інтегралів дозволяє знаходити сумарний дохід на інтервалі часу, оцінювати дисконтовану вартість грошових потоків, визначати рівень нерівномірності розподілу доходів, що, у свою чергу, допомагає усвідомити практичну значущість математики для аналізу економіки.

Для студентів, що спеціалізуються в природничих науках, вивчення теми "Інтегральне числення" формує практичну компетентність, оскільки за їх допомогою розв’язуються задачі на обчислення шляху за змінної швидкості, роботи сили, маси тіла змінної густини, розподілу речовини або енергії в середовищі. Студенти вчаться пов’язувати абстрактні математичні вирази з конкретними природними явищами, розуміти закономірності розвитку процесів у часі та просторі.

Завдяки математичним моделям з використанням інтегралів студенти отримують уявлення про розрахунки, необхідні для проєктування конструкцій, визначення стійкості споруд чи аналізу руху механізмів. Це створює основу для подальшого професійного навчання на технічних і природничих спеціальностях.

Таким чином, інтеграли допомагають студентам побачити універсальність математики: від економічних процесів до законів природи та інженерних розрахунків, сприяючи формуванню практичних компетентностей, що поєднують знання, уміння та їх реальне застосування [28].

Аналіз навчальних прогам дисципліни "Вища математика", яка викладається для студентів економічних спеціальностей, дає змогу сформулювати мету вивчення інтегрального числення: сформувати у студентів систему знань і практичних умінь, необхідних для аналізу й моделювання економічних процесів. Інтеграл розглядається як універсальний інструмент кількісних досліджень, що дозволяє описувати та прогнозувати зміни в економіці, визначати сукупні показники, оптимізувати ресурси та приймати обґрунтовані управлінські рішення.

У процесі вивчення інтегрального числення студенти повинні:

–опанувати поняття первісної, невизначеного та визначеного інтеграла, їхні властивості та основні методи обчислення;

–навчитися застосовувати інтеграли для обчислення площ, об’ємів та інших геометричних характеристик, що мають економічну інтерпретацію;

–сформувати вміння використовувати визначений інтеграл для обчислення економічних показників: доходу, витрат, прибутку, продуктивності, нерівномірності розподілу ресурсів;

–оволодіти прийомами використання інтегралів у задачах фінансової математики, зокрема при обчисленні дисконтованих грошових потоків, приросту капіталу, інвестиційних оцінок;

–розвинути навички інтерпретації результатів інтегрування з погляду економічного змісту та прийняття рішень на їх основі;

–набути досвіду застосування математичних пакетів і комп’ютерних програм для чисельного інтегрування та економічних розрахунків.

На основі аналізу навчальних програм для студентів інженерних спеціальностей можна сформувати мету вивчення теми "Інтегральне числення" для студентів інженерних спеціальностей таким чином: виробити уявлення про інтеграл як універсальний інструмент опису, аналізу та розрахунків у природничих і технічних науках. Інтеграл виступає базовим апаратом для визначення характеристик конструкцій, розрахунку фізичних величин і моделювання інженерних процесів, що забезпечує підготовку майбутніх фахівців до використання математичного аналізу в професійній діяльності.

У процесі вивчення теми студенти повинні:

– засвоїти поняття первісної, невизначеного й визначеного інтеграла, їхні властивості та основні методи обчислення;
– навчитися застосовувати інтеграли до обчислення площ, об’ємів, довжин кривих, площ поверхонь та інших геометричних характеристик, що мають практичне значення в інженерних розрахунках;
– оволодіти використанням інтегралів у механіці для визначення роботи змінних сил, енергії, моментів інерції, центрів мас;
– розвинути вміння застосовувати інтеграли для аналізу теплових, електричних, гідравлічних та інших процесів;

– ознайомитися з методами чисельного інтегрування та програмними засобами, що застосовуються для інженерних розрахунків;
– сформувати навички інтерпретації математичних результатів у контексті конкретних технічних задач та прийняття обґрунтованих інженерних рішень.

Вивчення теми "Інтегральне числення" для студентів математичного напряму має на меті сформувати глибокі теоретичні знання та практичні навички роботи з інтегралами як фундаментальним розділом математичного аналізу. Особлива увага приділяється строгим означенням, доведенням основних теорем і розвитку умінь застосовувати інтеграли до розв’язування широкого спектра як теоретичних, так і прикладних задач у різних галузях математики.

У процесі вивчення теми студенти повинні:

– засвоїти строгі означення первісної, невизначеного та визначеного інтеграла, а також умови інтегрованості функцій;
– оволодіти різними методами інтегрування (заміна змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональних і трансцендентних функцій, застосування рекурентних формул);
– вивчити критерії інтегрованості (зокрема через суми Дарбу) та теоретичні основи обчислення інтегралів;
– ознайомитися з поняттям невласних інтегралів, умовами їх збіжності та прикладами застосування;
– навчитися застосовувати визначений інтеграл у класичних задачах геометрії та механіки, а також у більш абстрактних математичних контекстах (аналіз рядів, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей);
– сформувати вміння доводити та використовувати основні теореми інтегрального числення (теорему Ньютона–Лейбніца, середні теореми інтегрального числення, властивості інтеграла Рімана);

– розвинути здатність до абстрактного мислення та строгих математичних міркувань, необхідних для подальшої наукової та дослідницької діяльності.

Отже, проведений аналіз показує, що при навчанні студентів економічних спеціальностей акцентується увага на прикладних економічних інтерпретаціях, також більшість тверджень наводиться без доведення. Для студентів, що навчаються на інженерних спеціальностях достатньо багато уваги приділяється практичним навичкам обчислення інтегралів та практичним розрахункам у техніці та фізиці. Студенти-математики мають значну теоретичну підготовку в області математичного аналізу, тому викладання теми "Інтегральне числення" здійснюється зі строгим математичним обґрунтуванням.

2.3. Аналіз сучасних методик і технологій навчання

Педагогічна технологія дає відповідь на питання, як, яким способом (методи, прийоми, засоби) досягти поставленої педагогічної мети, встановлюючи порядок використання різноманітних моделей навчання.

Технологія - сукупність методів та інструментів для досягнення бажаного результату; у широкому значенні - застосування наукового знання для вирішення практичних завдань.

Головним зсувом у сучасній педагогіці є перехід від накопичення знань до розвитку навичок. Якщо раніше цінувалася здатність запам'ятати дати, формули та факти, то сьогодні на перший план виходять так звані "soft skills" (м'які навички).

Відхід від традиційного уроку через використання у процесі навчання нових технологій дозволяє усунути одноманітність освітнього середовища та монотонність навчального процесу, створити умови для зміни видів діяльності учнів, дозволить реалізувати принципи здоров'язберігаючих технологій.

Для вибору педагогічних технологій для необхідно враховувати предметний зміст, цілі уроку, рівень підготовленості учнів, можливості задоволення освітніх запитів, вікові категорії учнів.

В сучасній освіті існує велика кількість різних технологій та методик, які направлені на розвиток пізнавальної діяльності учнів та заохочення їх до розумової діяльності. Зупинимось на деяких з них.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) в навчанні – це комплексне використання цифрових інструментів, програм та мереж для покращення, модернізації та розширення можливостей освітнього процесу.

Впровадження ІКТ спрямоване не на те, щоб замінити традиційне навчання, а на те, щоб його доповнити та посилити.

Використання ІКТ дозволяє надати учням важливі для XXI століття навички. Вони вчаться шукати та критично оцінювати інформацію, працювати з цифровими інструментами, співпрацювати онлайн – це ключові компетенції для майбутньої кар’єри.

Однією з сучасних методик викладання останнім часом є і методика інтегрованого навчання. Інтеграція є об’єднання елементів у ціле, але з механічне, а взаємопроникнення, взаємодія [15,21].

Для успішного проведення інтегрованих уроків необхідно створити атмосферу зацікавленості та творчості. Завдання інтегрованих уроків – сприяти активному та усвідомленому засвоєнню учнями навчального матеріалу, розвитку логічного мислення, дати можливість використовувати під час навчання сучасні інтерактивні методики, дозволяють просто та об’єктивно оцінювати досягнення учнів.

На інтегрованому уроці учні мають можливість отримання глибоких і різнобічних знань, використовуючи інформацію з різних предметів, по-новому осмислюючи події, явища.

Інтегровані уроки можна проводити протягом усього навчального року, використовуючи велику кількість прийомів. Можливе проведення уроків у рамках цілої теми. Ведуть уроки кілька освітян. Більшість уроку відводиться творчості учнів.

Групова технологія – це така технологія навчання, коли провідною формою навчально-пізнавальної діяльності учнів є групова. При груповий формі діяльності клас ділиться на групи на вирішення конкретних навчальних завдань, кожна група отримує певне завдання (чи однакове, чи диференційоване) і виконує його спільно під безпосереднім керівництвом лідера групи чи вчителя. Мета технології групового навчання – створити умови для розвитку пізнавальної самостійності учнів, їх комунікативних умінь та інтелектуальних здібностей через взаємодію у процесі виконання групового завдання для самостійної роботи [15,21].

Групова технологія дозволяє організувати активну самостійну роботу на уроці. Учень при цьому почувається розкуто, розвивається відповідальність, формується адекватна оцінка своїх можливостей, кожен має можливість перевірити, оцінити, підказати, виправити, що створює комфортну обстановку.

Групова форма несе у собі ряд недоліків – це проблеми комплектування груп та організації роботи у них; включення одразу всіх учнів у роботу, робочий шум на уроці.

Незважаючи на зазначені труднощі застосування групової роботи при навчанні математики ефективно. Групова робота сприяє більш міцному та глибокому засвоєнню знань, розвитку індивідуальних здібностей, розвитку самостійного творчого мислення. Також за спільної роботи учні привчаються співпрацювати друг з одним під час виконання спільної справи, формуються позитивні моральні якості особистості.

Потрібно відмітити, що викладання у вищій школі також потребує певних новітніх технологій навчання. Серед головних проблем, з якими стикаються в останні роки викладачі математичних дисциплін, працюючи на молодших курсах, слід назвати, падіння базового рівня знань, з яким студенти приступають до вивчення математичних дисциплін, втрату навичок логічного мислення.

Серед таких технологій можна виділити проєктне навчання. Воно успішно застосовуються як у старшій, так і у вищій школі.

В основі методу лежить центральне питання або проблема, яка є значущою, актуальною і не має єдиної простої відповіді. Щоб розв’язати цю проблему, учні повинні самостійно шукати інформацію, застосовувати знання з різних предметів, співпрацювати, планувати свою роботу та, зрештою, створити конкретний продукт.

Можна визначити такі ключові моменти проєктного навчання. Проєкт починається з реалістичної проблеми, яка мотивує учнів до дослідження (наприклад, "Як зробити наш заклад більш екологічним?"). Оскільки готової відповіді немає, то починається етап дослідження. Учні самостійно шукають інформацію, проводять експерименти, аналізують дані. Протягом усього проєкту учні аналізують свою роботу, отримують відгуки від викладача та одногрупників і вдосконалюють свій продукт [15].

Особливістю проєктів повинен бути зв’язок з реальним світом, тобто його результати повинні мати значення не лише для отримання оцінки, а й для спільноти навчального закладу.

Кінцевий продукт (дослідження, модель, вебсайт, соціальна кампанія, виставка) презентується для реальної аудиторії (інших груп, викладачів, експертів).

Переваги проєктноє технології полягають в наступному:

1. Розвиток "м’яких навичок". Під час роботи над проєктом розвиваються критичне мислення, креативність, комунікація та колаборація.

2. Глибше засвоєння знань. Самостійний пошук та застосування отриманої інформації на практиці сприяють кращому запам’ятовуванню.

3. Підвищення мотивації. Робота над реальною проблемою є значно цікавішою, ніж розв’язування абстрактних задач з підручника.

Вивчення інтегралів часто зводиться до механічного запам’ятовування формул та правил. Проєктний підхід кардинально змінює цю динаміку. Він ставить на перше місце не питання "Як знайти цей інтеграл?", а питання "Яку реальну проблему я можу розв’язати за допомогою інтеграла?". Інтеграл за своєю суттю – це інструмент для підсумовування нескінченної кількості нескінченно малих частин. Це дозволяє знаходити площі, об’єми, накопичені зміни та багато іншого. Саме на цих ідеях і можуть будуватися проєкти для вивчення інтегралів.

Досить потужним є інструментом, що активізує навчальну діяльність є кейс-технологія, метод активного навчання на основі реальних ситуацій. Вона поєднує в собі одночасно і рольові ігри, і метод проектів, і ситуативний аналіз.

Кейс-технології в математиці мають ряд переваг. По-перше, учні бачать, як математичні знання використовуються для розв’язання реальних проблем, що підвищує їхню мотивацію до навчання. По-друге, робота в групі над кейсом допомагає учням розвивати навички співпраці, комунікації та лідерства. Крім того, учні вчаться не просто застосовувати формули, а й обирати правильний метод для конкретної ситуації, аналізувати умови та інтерпретувати результати.

Загалом, кейси часто вимагають інтеграції знань з різних розділів математики та інших предметів. Наприклад, кейс про будівництво мосту може вимагати знань з геометрії, фізики (сила, тиск) та математичного аналізу.

Основна ідея "перевернутого класу" полягає в тому, щоб перенести процес передачі знань з аудиторії до індивідуальної роботи учня вдома. Це зазвичай реалізується за допомогою попередньо записаних відеоуроків, подкастів, презентацій або інших цифрових матеріалів, які учні вивчають у зручний для них час.

Коли учні приходять на урок, вони вже мають базове розуміння теми. Це дозволяє викладачу використовувати час у класі для глибинного аналізу матеріалу, розв’язання проблемних завдань. Також викладач може організовувати в аудиторії дискусії та обмін думками, проводити індивідуальні консультації. Учні в аудиторії можуть витрачати час на групову роботу та роботу над проєктами.

Такий підхід робить навчання більш інтерактивним і персоналізованим, оскільки вчитель стає не стільки лектором, скільки фасилітатором, що допомагає учням засвоювати матеріал через практику.

При навчанні математиці використання технології "перевернутого класу" є досить ефективним, оскільки багато математичних концепцій базуються на послідовному засвоєнні формул, правил і алгоритмів, які можна ефективно подати у відеоформаті.

Сама технологія складається з таких етапів:

1. Домашня робота – етап, на якому учні дивляться короткі відеоуроки, де викладач пояснює нову тему. Наприклад, як розв’язувати квадратні рівняння, обчислювати невизначені інтеграли або застосовувати тригонометричні тотожності. Відео супроводжуються тестовими запитаннями для самоперевірки.

2. Робота в класі. На занятті викладач може перевірити розуміння за допомогою короткого опитування або обговорення, розв’язати з учнями складніші завдання, що вимагають застосування декількох правил, організувати групові проєкти, наприклад, створення моделі, яка демонструє геометричну теорему, надати індивідуальну допомогу тим, хто не зрозумів матеріал. Наприклад, викладач може приділити час учню, який плутається у знаках при розв’язанні рівнянь, тоді як решта класу працює над практичними завданнями.

Основною перевагою такого підходу є гнучкість. Учень може зупинити, перемотати або переглянути відео стільки разів, скільки йому потрібно, щоб зрозуміти складну тему, наприклад, обчислення невизначених інтегралів. Це особливо корисно для тих, хто засвоює матеріал повільніше. Також такий підхід є більш персоналізованим, оскільки викладач має більше часу для індивідуальної роботи, що дозволяє швидко виявляти і виправляти помилки, які часто залишаються непоміченими у традиційному класі. Урок математики перетворюється з пасивної лекції на динамічний семінар, де учні не просто слухають, а практикують свої навички під керівництвом викладача. Це сприяє глибшому засвоєнню матеріалу, а не простому запам'ятовуванню.

Останніми роками спостерігається значне поширення такої технології, як STEM-освіта. Він є сучасним підходом до навчання, який об'єднує чотири дисципліни: Science (природничі науки), Technology (технології), Engineering (інженерія) та Mathematics (математика). Головна мета STEM-освіти – навчити учнів застосовувати знання з цих галузей для розв'язання реальних, практичних проблем, розвиваючи критичне мислення, креативність та навички командної роботи. На відміну від традиційного навчання, де предмети вивчаються окремо, STEM-освіта зосереджується на міждисциплінарних проєктах, які показують взаємозв'язок науки, техніки та математики [21].

У межах STEM-освіти математика перестає бути просто набором абстрактних формул і теорем. Вона стає інструментом для розв'язання практичних завдань з інших STEM-дисциплін. Наприклад, учні можуть використовувати математику для аналізу даних експериментів з фізики або хімії для побудови графіків і розрахунку статистичних показників.

Математичні алгоритми є основою для програмування, створення програмного забезпечення та моделювання. Учні можуть застосовувати їх для чисельного розв'язку тих чи інших задач. Математичні розрахунки є критично важливими для проєктування, наприклад, мостів, будівель, роботів. Розробка програм для рішення інженерних задач може показати учням необхідність вивчення математики. Таким чином, STEM-освіта робить математику актуальною та зрозумілою, показуючи, як вона використовується в реальному світі.

Використання STEM-підходу у викладанні інтегрального числення робить його менш абстрактним і більш практичним. Це допомагає учням усвідомити, що інтегрування – це не просто математична вправа, а потужний інструмент, який дозволяє розв'язувати складні завдання у науці, техніці та інженерії.

Попри очевидні переваги, впровадження нових методик стикається з низкою викликів: нерівний доступ до техніки ("цифровий розрив"), необхідність масштабної перепідготовки вчителів, а також інерційність самої системи освіти, яка часто орієнтована на стандартизовані тести (ЗНО/НМТ), а не на розвиток навичок.

Проте рух у цьому напрямку неминучий. Сучасні методики й технології – це не просто мода, а необхідна відповідь на вимоги часу. Їхня мета – не замінити вчителя чи скасувати фундаментальні знання, а створити гнучке, цікаве та ефективне освітнє середовище, в якому кожен учень зможе розкрити свій потенціал і стати успішним у майбутньому.

2.4. Використання графічних і цифрових інструментів для пояснення інтегралів

Вивчення інтегралів є одним із найскладніших етапів шкільного та університетського курсу математики. Інтеграл має як абстрактне аналітичне тлумачення, так і наочне геометричне, тому важливим є використання сучасних графічних і цифрових інструментів для пояснення цього поняття.

Традиційно невизначений інтеграл пояснюють як "зворотну дію" до диференціювання, а визначений – як площу під кривою функції на певному відрізку. Використання графіків функцій дозволяє візуалізувати цю площу, показати, як вона залежить від меж інтегрування, та продемонструвати ідею граничного переходу в процесі інтегрування. Застосування графічних методів робить абстрактне поняття більш зрозумілим, оскільки студенти можуть співвіднести алгебраїчні вирази з реальними геометричними образами.

Найбільш поширене застосування графічних інструментів – це візуалізація. Визначений інтеграл часто асоціюється з площею під кривою. За допомогою програмного забезпечення можна легко побудувати графік функції та візуалізувати цю площу. Це допомагає студентам побачити, як сума площ нескінченно малих прямокутників, що апроксимують фігуру, наближається до точного значення інтеграла.

Цифрові інструменти дозволяють створювати інтерактивні симуляції. Замість статичних графіків, можна дозволити користувачам змінювати межі інтегрування або саму функцію і одразу бачити, як це впливає на площу. Така динамічна взаємодія допомагає зрозуміти, що інтеграл – це не просто число, а функція від меж. Крім того, можна візуалізувати, як змінюється невизначений інтеграл (антипохідна) у міру руху вздовж кривої. Спеціалізовані 3D-інструменти можуть візуалізувати, як обертання двовимірного графіка навколо осі створює тривимірний об’єкт.

Поєднання аналітичних розрахунків і візуалізації допомагає учням та студентам краще зрозуміти сутність інтеграла, побачити зв’язок між формулами та геометричними образами. Це особливо корисно для тих, хто сприймає інформацію переважно візуально. Крім того, цифрові інструменти дозволяють швидко перевіряти гіпотези, експериментувати з функціями та формувати інтуїтивне розуміння складних математичних явищ.

В той же час, графічні й цифрові інструменти не замінюють традиційних методів навчання, але значно підсилюють їх. Вони роблять процес вивчення інтегралів більш наочним, доступним і цікавим, сприяють формуванню глибшого розуміння як математичної теорії, так і її практичних застосувань.

Висновки до розділу 2

Проведений аналіз мети та завдань викладання теми "Інтегральне числення" показує, що профільний рівень націлений не лише на засвоєння техніки інтегрування, а й на практичне застосування інтегралів, зокрема для моделювання. В той же час, стандартний рівень має більш формалізований та обмежений підхід, без широкого прикладного контексту. В профільному рівні інтеграли подаються як інструмент міжпредметного аналізу, а не лише як математична процедура.

Нині виникає необхідність використання спеціальних педагогічних технологій, які сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів та студентів. Тема "Інтегральне числення" є досить складною, внаслідок своє абстрактності. Існує цілий набір сучасний педагогічних технологій, які можна використовувати при викладанні математики: проєктне навчання, перевернутий клас, кейс-технологія. За допомогою сучасних інструментів ці технології досить ефективно можуть бути використані в системі навчання вищої математики.

Вони будуть сприяти розвитку в учнів та студентів самостійного мислення, вміння вислуховувати і враховувати альтернативну думку, аргументовано висловити свою.

Використання графічних та цифрових інструментів забезпечує можливість учням та студентам краще зрозуміти тему "Інтегральне числення". Їх аналіз показав, що он-лайн інтерактивні дошки краще використовувати як спосіб організації он-лайн освітнього простору. Вони можуть забезпечити місце збереження матеріалів для вивчення та повторення учнями та студентами, допомагають організувати спільну діяльність.

В той же час, GeoGebra та Desmos є ефективними інструментами для візуалізації та дослідження поняття теми "Інтегральне числення". GeoGebra є одним із найбільш ефективних цифрових інструментів для викладання інтегрального числення. Воно забезпечує динамічну візуалізацію, інтерактивність і доступність, що значно спрощує засвоєння складних абстрактних понять і розкриває практичну цінність інтегралів. Завдяки своїй безкоштовності та універсальності GeoGebra може стати базовим інструментом у курсах математичного аналізу як у середній, так і у вищій школі.

Desmos є ефективним засобом візуалізації та динамічного моделювання в курсі інтегрального числення. Він забезпечує швидкий доступ до графічних інтерпретацій інтегралів, дозволяє створювати інтерактивні вправи й робить навчальний процес більш інтуїтивним і захопливим. Попри обмеження в символьних обчисленнях, Desmos можна розглядати як доповнення до класичних CAS-систем, орієнтоване насамперед на розвиток геометричного та інтуїтивного розуміння інтегралів.

Таким чином, сучасні інструменти дають викладачу можливість ознайомити учнів та студентів з поняттями первісної, визначеного та невизначеного інтегралів та пояснити їм важливість даної теми.

Розділ 3. Розробка методичних рекомендацій для вивчення теми "Інтегральне числення"

3.1 Методичні прийоми пояснення основних понять: первісної, визначеного інтеграла, формули Ньютона-Лейбніца

Проведене вище дослідження показує, що загалом у старшій та вищій школі вивчення теми "Інтегральне числення" вибудовано за такою схемою:

1. Розгляд прикладів взаємно зворотних операцій.

2. Формування у учнів уявлення про операцію інтегрування – операції, зворотної диференціювання, а "первісну" як результат операції інтегрування.

3. Виконання вправ на доказ, що деяка функція $F(x)$ є першорядною для функції $f(x)$, розв’язування задач на віднайдення первинної.

4. Ознайомлення учнів з основною властивістю первісної.

5. Складання таблиці первісних.

6. Ознайомлення учнів із правилами знаходження первісних.

7. Розв’язання задач на геометричний та фізичний зміст первісної та інтеграла.

У математичному аналізі інтегрування має подвійну природу: як первісна, що вимагає використання методів інтегрування, та як інструмент обчислення в прикладних задачах. Цей складний характер інтегрування призвів до поширення помилок виконання у студентів та учнів.

Для багатьох студентів та учнів старших класів тема "Інтеграл" стає справжньою проблемою. Аналіз їхніх труднощів дозволяє виділити кілька ключових категорій помилок: концептуальні, технічні (алгебраїчні) та методологічні.

Концептуальні помилки утворюють найглибший і найскладніший пласт проблем, оскільки вони пов’язані із браком розуміння самої суті інтеграла. Студенти часто сприймають невизначений інтеграл (сукупність первісних) та визначений інтеграл (число, що представляє площу) як дві абсолютно не пов’язані теми. Вони механічно завчають формулу Ньютона-Лейбніца, не усвідомлюючи, що вона є містком між цими двома поняттями.

Класична помилка при знаходженні невизначених інтегралів – це опускання довільної сталої *C*. Це свідчить про нерозуміння того, що похідна від константи дорівнює нулю, а отже, первісних для даної функції існує нескінченна множина, що відрізняються одна від одної на довільну сталу.

Багато учнів не можуть чітко пояснити, що таке визначений інтеграл з геометричної точки зору. Вони знають, що це "площа під кривою", але не розуміють процесу наближення цієї площі сумами прямокутників (інтегральними сумами), що і лежить в основі поняття інтеграла. Це призводить до труднощів у застосуванні інтегралів для обчислення площ фігур, об’ємів тіл обертання та розв’язання фізичних задач.

Технічні та алгебраїчні помилки складають групу помилок пов’язаних з невпевненим володінням базовим математичним апаратом, необхідним для процесу інтегрування. Часто проблема полягає не в самому інтегруванні, а в попередніх кроках. Неправильне розкриття дужок, помилки при роботі зі степенями та дробами, невірне застосування тригонометричних формул – усе це унеможливлює правильне знаходження інтеграла.

На початкових етапах студенти та учні часто плутають правила. Наприклад, інтегруючи степеневу функцію x^n, вони можуть помилково застосувати правило для похідної і отримати nx^{n-1} замість правильного $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Такі техніки, як інтегрування по частинах або заміна змінної, вимагають чіткого алгоритму дій. Поширеними помилками є неправильний вибір функцій u та dv, помилки при знаходженні диференціала dx при заміні змінної, або забування повернутися до початкової змінної після знаходження інтеграла.

Методологічні проблеми пов’язані зі стратегією та підходом до розв’язання задач. Зустрівшись із інтегралом, який не є табличним, учень або студент часто не може визначити, який саме метод (заміна, інтегрування частинами, розклад на прості дроби) слід застосувати. Це свідчить про відсутність системного бачення теми та практики розв’язування різнотипних завдань. Спроба вивчити напам'ять якомога більше формул інтегралів без розуміння їх походження та взаємозв'язків є програшною стратегією. Математика вимагає логіки та гнучкості мислення, а не простого відтворення завчених шаблонів.

Подолання цих труднощів вимагає комплексного підходу. З боку викладача потрібно робити акцент на концептуальному розумінні, візуалізації та зв'язку інтеграла з реальними задачами.

Для цього введення первісної повинно починатися з практичних завдань, які демонструють зв'язок між оберненими операціями.

Наприклад, операція додавання дозволяє за двома числами знайти третє число – їхню суму $a + b = c$. Якщо ж відомий перший доданок і сума, то другий доданок може бути "відновлено" виконанням операції віднімання $b = c - a$. Отже, віднімання – операція, обернена до операції додавання, що призводить до єдиного результату. Однак таке буває не завжди. Наприклад, піднесення до квадрату числа 5 дає число 25 $5^2 = 25$. Нехай тепер відомо, що число 25 є квадратом деякого числа. Виконавши зворотну операцію – видобування квадратного кореня $\sqrt{25}$ – отримуємо два значення: 5 та -5.

Задача виконання операції, оберненої до диференціювання, може бути показана, наприклад, як практична задача механіки.

В початковий момент часу $t = 0$ швидкість тіла дорівнює 0, тобто $v(0) = 0$. Нехай тіло падає у вільному падінні. Тоді за час t воно пройде шлях: $S(t) = \frac{gt^2}{2}$. Учні та студенти вміють знаходити за цим рівнянням прискорення: $S'(t) = v(t) = gt$ та $S''(t) = v'(t) = a(t) = g$.

Однак в реальності, перед дослідниками, стоїть інша задача: знаючи прискорення, необхідно знайти шлях, який пройде тіло за час t. Тобто для вирішення даної задачі необхідно здійснити операцію, обернену до операції диференціювання. Саме така операція і буде називатися інтегруванням.

Введення поняття інтегрування таким чином дає можливість учням та студентам краще зрозуміти практичну цінність операції інтегрування.

Наприклад, ми маємо функцію $F(x) = x^4$, При проведенні операції диференціювання ми отримаємо нову функцію, похідну $f(x) = F'(x) = 4x^3$

Операція знаходження функції за її похідною називається інтегруванням. Виконуючи інтегрування, можемо отримувати такі результати: $F(x) = x^4$; $F(x) = x^4 + 2$; $F(x) = x^4 - 7$ тощо. Всі ці функції при виконанні операції диференціювання дають шукану функцію $f(x) = 4x^3$. Функції виду $F(x) = x^4 + C$ називаються первісними функції.

Після цього вводиться формалізоване поняття первісної: функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Таким же чином первісна вводиться для студентів економічних та інженерних спеціальностей. Це утворює зв’язок з тими знаннями, які студенти отримали в школі, що створює ефект закріплення.

Увагу і школярів, і студентів необхідно зосередити на неоднозначності операції інтегрування. Для цього можна на декількох різних функціях показати, що операція диференціювання приводить до однакової відповіді, і нагадати студентам, що похідна сталої дорівнює 0.

Загальний вид первісної $F(x) + C$, з одного боку, вказує на довільне значення сталої, а з другого боку, залежно від умови задачі, може мати конкретне значення. Для цього задаються додаткові умови, які дозволяють однозначно визначити конкретне значення сталої.

Врахування конкретних умов можливе, якщо, наприклад в задачі на рух ввести інформацію, що за 3 секунди тіло пройшло 20 м.

Задачі на пошук конкретної первісно, наприклад первісної, що проходить через конкретну точку, повинні переконувати учнів та студентів у тому, що їх рішення пов’язане з виділенням з безлічі первісних даної функції цілком певних конкретних первісних.

Аналогічно до введення поняття первісної вивчення правил відшукання первісних природно пов’язати також з двома взаємооберненими операціями: диференціювання та інтегрування.

Наприклад, правило знаходження первісної для функції $f(kx+b)$ може передувати прикладами знаходження похідних для функцій $\cos\cos x$, $\cos\cos 5x$,$\cos\cos(5x-2)$.

Отримавши похідні $x, -5\sin\sin x, -5\sin\sin(5x-2)$, учень підходить до формулювання правила, що первісна для функції $f(kx+b), k\neq 0$ має вигляд $\frac{1}{k}F(kx+b)$.

На закріплення можна дати задачу знаходження первісної для функцій $\sin\sin 5x$,$\sin\sin(5x-2)$.

Бажано давати учням та студентам можливість або довести властивості первісної самостійно, або ознайомитися з доведенням. Оскільки це допомагає краще зрозуміти дії з інтегралами.

Щодо визначеного інтеграла, то він вводиться як границя нескінченної інтегральної суми. Учням і студентам можна навести також приклади фізичних задач, які приводять до поняття визначеного інтегралу.

Наприклад, задача про обчислення маси неоднорідного стрижня.

Приклад 21. Обчислення маси неоднорідного стрижня

Нехай маємо неоднорідний стрижень, щільність якого в точці *x* обчислюється за формулою $p=p(x)$. Знайти масу стрижня.

Рішення.

Розглянемо масу стрижня на відрізку $[a;b]$. Розіб’ємо відрізок на n рівних частин. Для спрощення будемо вважати, що щільність на кожній ділянці незмінна та дорівнює значенню функції $p(x)$ в певній точці кожного відрізку $[x_k;x_{k+1}]$, наприклад x_k. Тоді масу на k-му відрізку наближено можна представити як $p(x_k)\Delta x_k$, а на всьому відрізку

$$m_n=p(x_1)\Delta x_1+p(x_2)\Delta x_2+\cdots+p(x_n)\Delta x_n$$

Таким чином масу стрижня можна розрахувати за цією формулою. Точне значення можемо визначити як $m=m_n$. Якщо n→∞ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума m_n буде прямувати до деякого числа. Це число і називають інтегралом від функції $p(x)$ на відрізку $[a; b]$ та позначають $\int_a^b \quad p(x)dx$.

Потім вводиться задача про площу криволінійної трапеції. Після цього, узагальнивши отримані результати, можна перейти до визначення інтеграла як границі інтегральних сум. Хоча подібне визначення є громіздким, але геометрична та фізична інтерпретації є досить наочними. Також учні бачать, що інтегральне числення може застосовуватися не тільки для обчислення площі, але й для інших фізичних задач.

Аналогічно можемо ввести поняття визначеного інтеграла через задачу з економічним змістом.

Для закріплення теми "Інтегральне числення" можна запропонувати учням та студентам прийняти участь в розробці проєктів на практичні теми.

Проєкт "Дизайн форми".

Даний проєкт присвячений створенню вази найкращої форми з заданою ємністю.

Перед школярами постає питання: Як, використовуючи математичні функції, спроєктувати вазу заданого об’єму та естетичної форми?

Математична суть.

Дана задача розрахунок об’єму тіл обертання. Учням пояснюється, що об’єм складної фігури можна знайти, обертаючи криву (графік функції) навколо осі. Для обчислення об’єму буде використовуватись визначений інтеграл

$$V = \int_a^b \quad S(x)dx$$

де S(x) – площа фігури, яка обертається.

Етапи роботи:

Дослідження: Учні вивчають різні форми ваз, шукають математичні криві, які могли б їх описати (параболи, синусоїди, експоненти).

Проєктування: Учні обирають або створюють функцію $y = S(x)$, графік якої стане профілем їхньої вази. Вони експериментують з параметрами, щоб досягти бажаної форми.

Розрахунок: За допомогою визначеного інтеграла вони обчислюють об'єм майбутньої вази. Якщо він не відповідає заданому (наприклад, 1 літр), вони повертаються до попереднього етапу і змінюють функцію або межі інтегрування.

Візуалізація: Створюють 2D та 3D моделі своєї вази за допомогою програмного забезпечення (наприклад, GeoGebra, Desmos).

Кінцевий продукт: Інженерний звіт, що містить: ескіз вази, функцію, що її описує, повний розрахунок об'єму за допомогою інтеграла, 3D-модель.

Завдяки роботі над даним проєктом учні можуть оволодіти складною темою обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла. Крім того, для обчислення даного інтегралу учням потрібно буде використати техніки обчислення, вивчені на попередніх уроках.

Наведемо часткову реалізацію проєкту, а саме розрахунки визначеного інтеграла за заданими параметрами та візуалізацію отриманої фігури.

Нехай під час дослідницького етапу учні обрали функцію, що описує радіус вази r(x) залежно від висоти x:

$$r(x) = 4 - 2\, sin\, sin\, (0.4x)$$

4 – це середній радіус у сантиметрах, що забезпечує загальну ширину вази;

2 – амплітуда "хвилі", що визначає, наскільки звужується та розширюється ваза;

0.4 – коефіцієнт, що впливає на "частоту" вигинів по висоті.

Висоту вази було обрано рівною 20 см. Таким чином, межі інтегрування будуть від x=0 до x=20.

$$V = \int_0^{20} \pi(4 - 2\,sin\,sin\,(0.4x)\,)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{20} (16 - 16\,sin\,sin\,(0.4x) + 4sin^2(0.4x)\,)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^{20} (16 - 16\,sin\,sin\,(0.4x) + 4\frac{1 - cos\,cos\,(0.8x)}{2})^2 dx =$$

$$= \pi \left(18x|_0^{20} + \frac{16}{0.4} cos\,cos\,(0.4x)\,|_0^{20} - \int_0^{20} 2\,cos\,cos\,(0.8x)\,dx \right) =$$

$$= \pi \left(18x|_0^{20} + \frac{16}{0.4} cos\,cos\,(0.4x)\,|_0^{20} - \frac{2}{0.8} sin\,sin\,(0.8x)\,|_0^{20} \right) \approx 989.1$$

Таким чином, об’єм вази становить 989,1 мл, що майже відповідає умові задачі.

Учні можуть обрати інший вигляд функції для обчислення об’єму вази. Також вони можуть продовжувати підбирати параметри.

Візуалізація вази в GeoGebra наведена на рис.

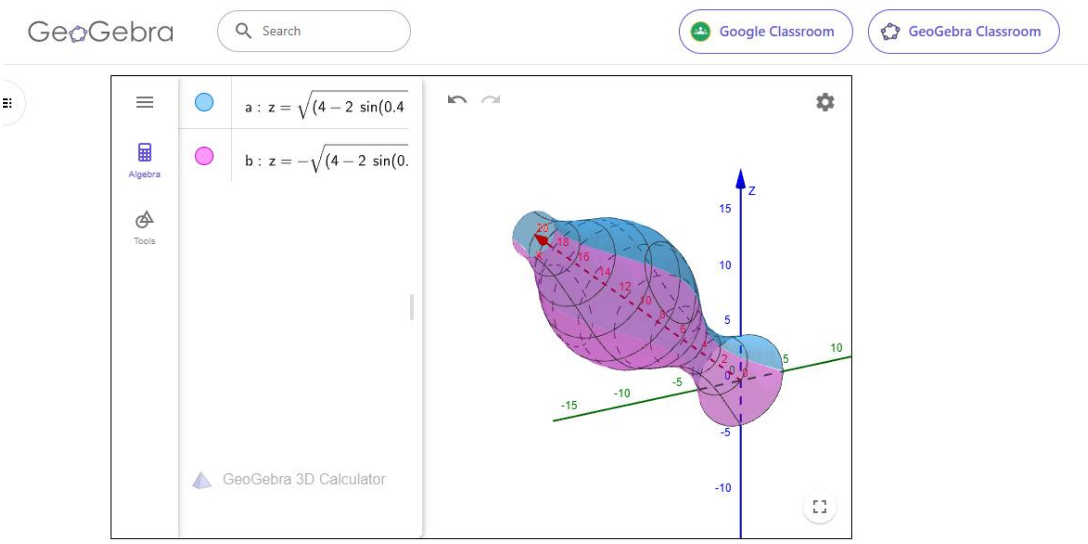


Рис.3.1

В результаті виконання проєкту будуть досягнуті цілі, щодо підвищення пізнавальної активності учнів, оскільки вони побачать, що інтеграл – це не просто невідомий символ в зошиті, а потужний інструмент для інженерів.

Використання тригонометричних формул та способів обчислення інтегралів буде сприяти їх кращому розумінню. До того ж учні зможуть побачити, що тригонометрія, яку вони вивчали раніше, також має прикладне значення.

Такі проєкти природним чином поєднують математику з різними сферами людської діяльності, забезпечуючи підсилений комплексний результат навчання та підвищення компетентності учнів.

3.2. Розробка конспектів уроків на тему "Інтегральне числення" в середній школі

Тема уроку: Визначений інтеграл та його геометричний зміст

Клас: 11 (рівень стандарт)

Тривалість: 45 хв

1. Мета уроку

Навчальна:

- ввести поняття визначеного інтеграла;
- показати його геометричний зміст як площу криволінійної трапеції;
- навчити знаходити площі простих фігур за допомогою визначеного інтеграла.

Розвивальна:

- формувати вміння пов’язувати алгебраїчні обчислення з геометричною інтерпретацією;
- розвивати навички логічного та образного мислення.

Виховна:

- виховувати інтерес до математики через прикладні задачі;
- розвивати уважність, наполегливість у пошуку розв’язання.

2. Тип уроку

Комбінований (вивчення нового матеріалу з елементами практичної роботи).

3. Обладнання та технології

Інтерактивна дошка/проєктор;

Програмне середовище GeoGebra;

Робочі аркуші для учнів.

4. Хід уроку

1. Організаційний момент (2 хв)

Привітання, налаштування на роботу.

Коротке нагадування: на минулому уроці вчилися знаходити первісні.

2. Мотивація (3 хв)

Учитель ставить питання:

"Як знайти площу фігури під кривою, наприклад, $y = 16 - x^2, x = 0, x = 3$?" (рис.3.2), демонструючи візуаліцію в GeoGebra/

Учні пропонують ідеї (наближення прямокутниками, формули).

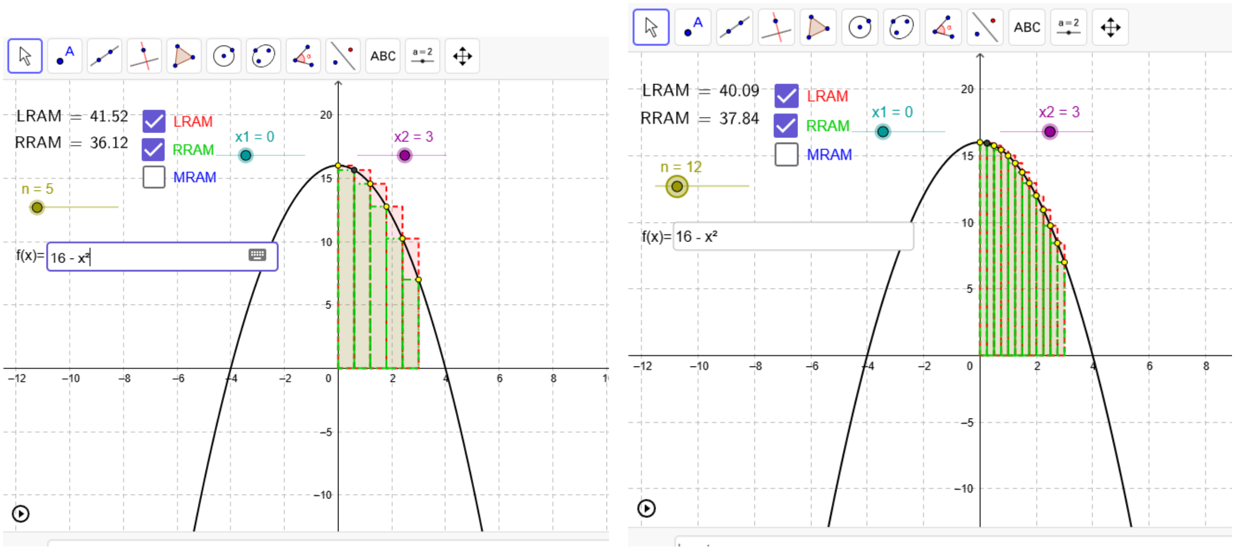


Рис. 3.2

<u>3. Вивчення нового матеріалу (15 хв)</u>

Викладається ідея обрахування площі на основі наближених сум (Дарбу/Рімана). Пропонується учням зробити висновок, що площа під кривою ≈ сума площ прямокутників.

При збільшенні кількості відрізків ми отримуємо точне значення площі, яка є визначеним інтегралом. Запис

$$\int_a^b f(x)dx$$

означає площу криволінійної трапеції під графіком $y = f(x)$ від x=a до x=b.

Наводяться приклади використання визначеного інтеграла для обчислення руху матеріального тіла (фізика, задача 23), сукупного продукту фірми (економіка, задача 22), зміна кількості популяції (біологія, задача 26).

На основі наведених прикладів учням викладається формула Ньютона–Лейбніца (без доведення):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Ще раз вчитель повертається до візуалізації у GeoGebra, демонструючи графік функції та виділення площі під кривою в залежності від меж інтегрування (рис.3.3).

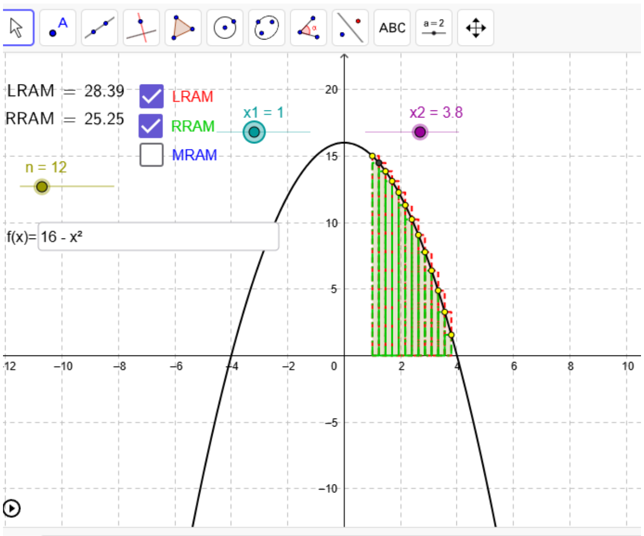


Рис.3.3

<u>4. Первинне закріплення (10 хв)</u>

Для закріплення матеріалу пропонується розв’язати декілька прикладів

Приклад 1

$\int_0^2 \quad xdx$ – площа трикутника.

Рішення

$$\int_0^2 \quad xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 2$$

Візуалізація результату в GeoGebra (рис.3.4)

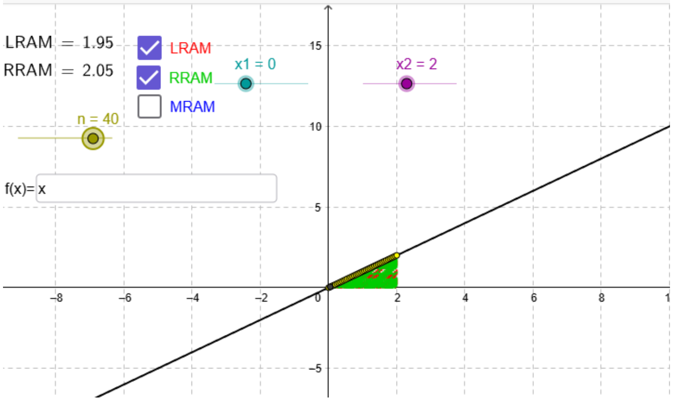


Рис.3.4

Приклад 2

$\int_{-1}^{2} \quad x^3 dx$

Рішення

$$I = \int_{-1}^{2} \quad x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Приклад 3

$\int_{\pi}^{2\pi} \quad \sin \sin x \, dx$

Рішення

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \quad \sin \sin x \, dx = -\cos \cos x \, |_{\pi}^{2\pi} = (-\cos \cos 2\pi \ + \cos \cos \pi) = (-1 + (-1)) = -2$$

Учитель розв'язує перший приклад разом із класом, два наступні розв'язують учні в групах. Також за допомогою візуалізації вчитель демонструє правильність роз'вязання прикладу.

<u>5. Практична робота (10 хв)</u>

Учні отримують завдання (на вибір):

Приклад 4

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \quad \cos \cos x \, dx$

Рішення

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \quad \cos \cos x \, dx = \sin \sin x \, |_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\sin \sin \frac{\pi}{4} - \sin \sin 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Приклад 5

$\int_{-2}^{-1} (x^{-3} - x)dx$

Рішення

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^{-3} - x)dx = \int_{-2}^{-1} x^{-3}dx - \int_{-2}^{-1} xdx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^{1+1}}{1+1}\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{x^{-2}}{2}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^{2}}{2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(-2)^2}\right) + ((-1)^2 - (-2)^2) =$$

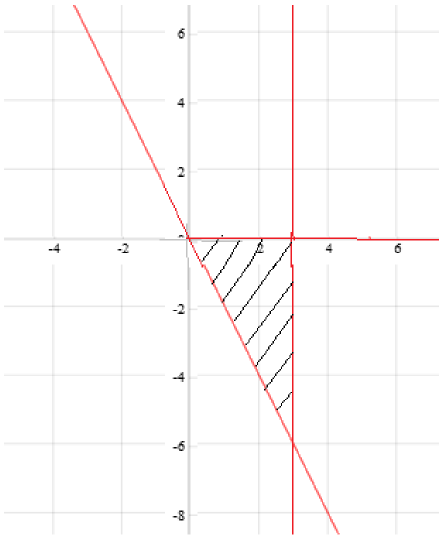
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + (1 - 4) = -\frac{27}{8}$$

Приклад 6

Обчислити площу фігури, обмежену лініями (попередньо виконавши рисунок)

$y = -2x, y = 0, x = 3$

Рішення



$$S = -\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{0}^{3} (-2x)dx = \int_{0}^{3} 2xdx = \frac{2x^2}{2}\Big|_{0}^{3} =$$

$$= x^2\Big|_0^3 = (3^2 - 0^2) = 9$$

6. Підсумок уроку (5 хв)

Вчитель підводить підсумки уроку. Нагадує, що визначений інтеграл має геометричний зміст: площа під кривою. Для обчислення визначеного інтегралу використовується формула Ньютона–Лейбніца. Нагадує приклади практичних задач з використанням інтеграла, наголошуючи, що інтеграл пов’язує алгебру з геометрією та прикладними задачами

5. Домашнє завдання

Виконати 7.2 (1, 4), 7.3(1, 2), 7.5(1, 2) – підручник Неліна Є., Долгової О.

Підготувати приклад прикладної задачі (з фізики чи економіки), яку можна розв’язати інтегралом.

Ознайомитись з симуляцією, пояснити результат

https://phet.colorado.edu/sims/html/calculus-grapher/latest/calculus-grapher_all.html?locale=uk

6. Використані методи і технології

Пояснювально-ілюстративний метод.

Візуалізація у GeoGebra (динамічна демонстрація площ).

Групова робота.

Проблемно-пошуковий метод (через мотиваційне запитання).

Для проведення

Висновки до розділу 3

Розробки уроків і практичних занять з теми "Інтегральне числення" показали, що найбільш ефективним підходом у старшій школі є поєднання інтуїтивного введення поняття інтеграла з його наочними геометричними та прикладними інтерпретаціями. Використання прикладів із площами, швидкістю і шляхом, а також задач з економіки та природничих наук дозволяє учням краще зрозуміти сенс інтеграла як "накопиченої величини". Такі розробки сприяють формуванню стійкої мотивації до навчання математики.

Практичні заняття для студентів економічних та інженерних спеціальностей, побудовані на основі проєктної технології, виявили значний потенціал у розвитку професійних компетентностей. Використання реальних прикладів – розрахунок прибутку, енергії, роботи газу, моментів інерції – дозволяє інтегрувати математичні знання з фаховими дисциплінами. Такий підхід забезпечує не лише тренування навичок обчислення інтегралів, а й розвиток уміння застосовувати математику як інструмент для розв’язування практичних завдань.

Розроблені уроки та заняття також показали важливість використання цифрових і графічних інструментів (GeoGebra, Desmos) та інтерактивних технологій (фліп-уроки, тесті, симуляцій). Вони підсилюють наочність матеріалу, стимулюють активність учнів і студентів та сприяють кращому засвоєнню теми. Отже, методичні підходи, що поєднують традиційний виклад, практичні приклади та сучасні інноваційні інструменти, забезпечують найбільш ефективне навчання інтегрального числення.

Висновки

Відповідно до мети та завдань дослідження зробимо такі висновки.

Інтегральне числення є одним з головних розділів математичного аналізу, який забезпечує учнів і студентів інструментами для вивчення геометричних, фізичних, економічних та інженерних задач. Його вивчення формує не лише математичні знання, але й прикладні компетентності.

Методика викладання теми повинна враховувати рівень навчання: у середній школі інтеграл подається інтуїтивно й наочно (через площі, прикладні задачі), тоді як у вищій школі акцент робиться на строгих означеннях, методах обчислення та широкому спектрі застосувань.

Використання історичного та прикладного підходу сприяє кращому розумінню матеріалу: учні легше сприймають ідею інтеграла як "накопиченої величини" (дохід, кількість, шлях), а не лише як абстрактну математичну конструкцію.

Цифрові інструменти (GeoGebra, Desmos) та інноваційні педагогічні технології (фліп-технологія, проєктне навчання, інтерактивні тести) істотно підвищують наочність і мотивацію до навчання, дозволяючи інтегрувати математику з іншими дисциплінами.

Компетентнісний підхід у навчанні інтегралів забезпечує розвиток математичної, економічної, природничої та інженерної компетентностей, формуючи здатність учнів і студентів застосовувати інтеграли в реальних умовах та майбутній професійній діяльності.

Результатом проведеного дослідження стали розробки конспектів уроків та практичних занять для викладання теми "Інтегральне числення". Щодо цього можна зробити такі висновки:

Під час вивчення інтегралів важливо чергувати формальні означення та доведення з прикладними задачами з фізики, економіки чи біології, щоб учні й студенти бачили практичний сенс.

Впровадження GeoGebra, Desmos робить процес навчання інтегралів більш наочним і дозволяє швидко візуалізувати площі, об’єми та прикладні процеси.

Розвиток міжпредметних зв’язків дозволяє показати застосування інтегралів у фізиці, економіці та інженерії. Це варто підкреслювати у вправах та проєктних завданнях, щоб математика сприймалася як універсальний інструмент.

Використання інноваційних педагогічних технологій (фліп-уроки, гейміфікація і проєктне навчання) сприяє формуванню компетентностей та активному залученню учнів і студентів у навчальний процес.

Розроблені конспекти можуть бути використанні при проведенні уроків та практичних занять з учнями старшої школи та студентами закладів вищої освіти при вивченні теми "Інтегральне числення".

Список використаних джерел

1. Алгебра і початки аналізу : профільний рівень: підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.

2. Бевз В. . Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. Київ : НПУ імені Драгоманова, 2005. 360 с.

3. Ботузова Ю. Методичні особливості вивчення теми "Визначений інтеграл" у старшій школі з використанням онлайн-сервісів і програмних продуктів. Педагогіка вищої та середньої школи. 2015. Вип. 46. С. 100–107.

4. Гонік Л. Наука в коміксах. Матан. Київ : Рідна мова, 2020. 239 с.

5. Грисенко М. В. Вища математика для економістів : підручник. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2022. 687 с.

6. Дубовик В., Рудницький С. Візуалізація навчального матеріалу в процесі підготовки майбутніх учителів математики засобами середовища GeoGebra. Фізико-математична освіта. 2022. Т. 34, № 2. С. 33–37. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-005 (дата звернення: 22.09.2023).

7. Загородня А. А. Система профільного навчання у старшій школі у добу незалежності. Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. 2020. № 69, т. 1. С. 163–167.

8. Закон України "Про загальну середню освіту" [Електрон. ресурс]. URL: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/651-14 (дата звернення: 04.10.2023).

9. Закон України "Про освіту" [Електрон. ресурс]. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#n1479 (дата звернення: 04.10.2023).

10. Інтегральне числення : навч. посіб. / Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитонова М. О. Київ : КНУТД, 2021. 216 с.

11. Коваль Л. В. Методика навчання математики: теорія і практика : підруч. 2-ге вид., перероб. та допов. Харків : Принт-Лідер, 2021. 417 с.

12. Компетентнісний підхід у сучасній освіті [Електрон. ресурс]. URL: https://magnolia.lviv.ua/wp-content/uploads/2024/09/Vozniak-_uryvok.pdf (дата звернення: 14.09.2023).

13. Концепція профільного навчання [Електрон. ресурс]. URL: http://www.uazakon.com/document/fpart86/idx86618.htm (дата звернення: 14.09.2023).

14. Курченко О. О. Інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. Київ, 2016. 140 с.

15. Лебедик Л. В., Стрельніков В. Ю., Стрельніков М. В. Сучасні технології навчання і методики викладання дисциплін : навч.-метод. посіб. Полтава : АСМІ, 2020. 303 с.

16. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях : навч.-метод. посіб. / уклад. Л. А. Благодир. Умань : ВПЦ "Візаві", 2018. 144 с.

17. Навчальні програми для 10–11 класів [Електрон. ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 23.09.2023).

18. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2019. 304 с.

19. Ніколаєнко М. С., Синько Л. С. Використання програмного засобу GeoGebra на уроках математики [Електрон. ресурс]. URL: https://conference.vntu.edu.ua/eir/eir2015/pdf/000-291-302.pdf (дата звернення: 25.09.2023).

20. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. ; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.

21. Паламарчук В., Барановська О. Педагогічні технології навчання в умовах нової української школи: вектор розвитку. Український педагогічний журнал. 2018. № 3. С. 60–66. DOI: https://doi.org/10.32405/2411-1317-2018-3-60-66 (дата звернення: 17.09.2023).

22. Рудніцька К. В. Сутність понять "компетентнісний підхід", "компетентність", "компетенція", "професійна компетентність" у світлі сучасної освітньої парадигми. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота. 2016. Вип. 1 (38).

23. Саєнко Л. М. Особливості навчання математики у класах математичного та філологічного профілю старшої школи [Електрон. ресурс]. URL: https://naurok.com.ua/osoblivosti-navchannya-matematiki-u-klasah-matematichnogo-ta-filologichnogo-profilyu-starsho-shkoli-219296.html (дата звернення: 17.09.2023).

24. Смолінчук Л. С. Компетентнісний підхід до оцінювання освітніх результатів [Електрон. ресурс]. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/714568/1/pspo_2012_37%281%29__48.pdf (дата звернення: 14.09.2023).

25. Сукач Т. М., Чуйков А. С., Бірюкова Т. В. Застосування визначеного інтеграла у формуванні професійних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти. Вісник Університету імені Альфреда Нобеля. Серія "Педагогіка і психологія". Педагогічні науки. 2020. № 1 (19). С. 289–297.

26. Щерба А. І., Нестеренко А. М., Мірошкіна І. В., Щерба В. О. Математичний аналіз : навч. посіб. Черкаси : ЧДТУ, 2023. 513 с.

27. Alam A. Challenges and Possibilities in Teaching and Learning of Calculus: A Case Study of India. Journal for the Education of Gifted Young Scientists. 2020. Vol. 8, № 1. P. 407–433. DOI: http://dx.doi.org/10.17478/jegys.660201.

28. Bressoud D., Ghedamsi I., Martinez-Luaces V., Törner G. Teaching and Learning of Calculus. Springer, 2016. 44 p.

29. Zakaria E. Enhancing Students' Understanding in Integral Calculus through the Integration of Maple in Learning. Procedia – Social and Behavioral Sciences. 2013. Vol. 102. P. 10–16. DOI: 10.1016/j.sbspro.2013.10.734.

30. Tatira B. Undergraduate students' understanding of the application of integral calculus in kinematics. Eurasia Journal of Mathematics, Science and

Technology Education. 2025. Vol. 21, № 3. eM2601. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/16049.

Додатки

Додаток А. Теоретичні основи та підручникові матеріали з інтегрального числення

Також в підручнику наведена таблиця інтегралів елементарних функцій.

Наступний параграф присвячений правилам обчислення первісного. Наводиться три основні правила для обчислення інтегралів, а саме

Теорема 10.1. Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Теорема 10.2. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k – деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.

Теорема 10.3. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k – деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.

В підручнику наводиться доведення першої та третьої теорем, а другу теорему пропонується довести самостійно.

В прикладах показується використання правил для обчислення інтегралів, причому один з прикладів має фізичний зміст.

Третій параграф підручника присвячений введенню поняття криволінійної трапеції та обчислення визначеного інтегралу. Автори відразу вводять поняття криволінійної трапеції та наводять теорему

Теорема 11.1. Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими y=0, x=a і x=b (a<b), можна обчислити за формулою

$$S = F(b) - F(a)$$

де F – будь-яка первісна функції f на відрізку [a; b].

В підручнику наведене доведення даної теореми з використанням обчислення площі прямокутника, побудованого на прирості аргументу та значенні функції.

Далі вводиться поняття визначеного інтегралу через функцію Ньютона-Лейбніца.

Означення. Нехай F – первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(a) - F(b)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$. Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

де F – довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Також наводиться алгоритм обчислення визначеного інтегралу.

В подальшому в підручнику розширюється використання інтегралів для обчислення площі складних фігур, які обмежені двома лініями $f(x)$ та $g(x)$.

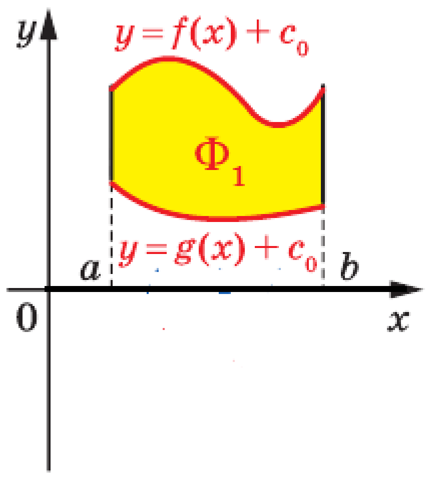


Рис. 1.3

Шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$, де:

S_f – площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 1.4, а);

S_g – площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 1.4, б).

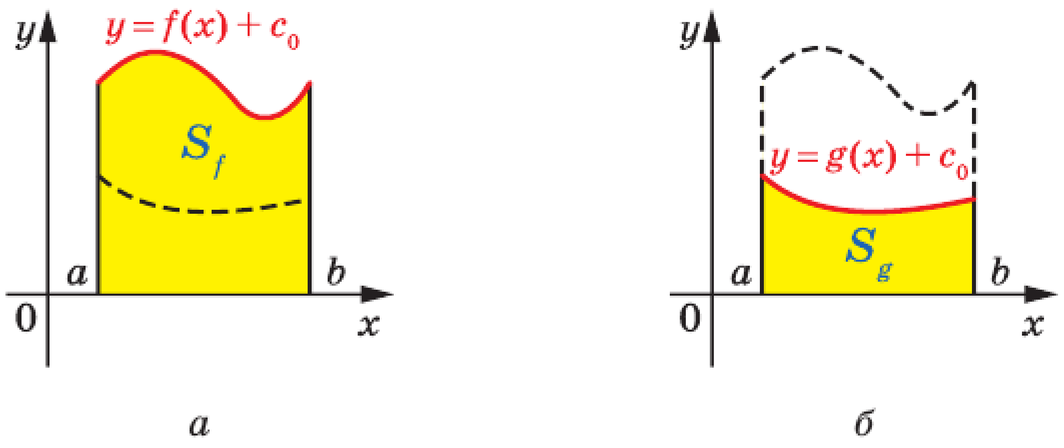


Рис. 1.4

Отже,

$$S = S_f - S_g = \int_a^b (f(x) + c_0)dx - \int_a^b (g(x) + c_0)dx =$$

$$= \int_a^b \big(f(x) + c_0 - (g(x) + c_0)\big)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Наведений приклад обчислення площі фігури, обмеженої двома лініями.

В четвертому параграфі розглядається використання інтегралів для обчислення об’ємів фігур. За аналогією з обчисленням площі наводиться формула для обчислення об’єму фігури і пропонується учням довести її самостійно.

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглядається тіло Ф, об’єм якого дорівнює *V*. Нехай площина $x = x_0$ перетинає тіло Ф по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Ф на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$. Якщо $y = S(x)$ – неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, то об’єм тіла Ф можна обчислити за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

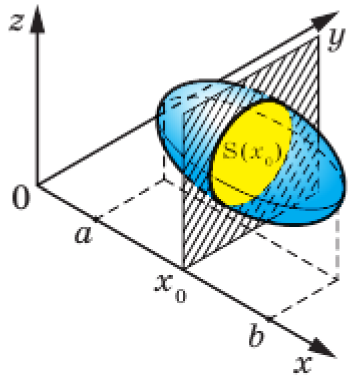


Рис. 1.5

Авторами також наводиться обчислення об’єму фігури обертання на прикладі обертання частини гілки параболи (рис.1.6)

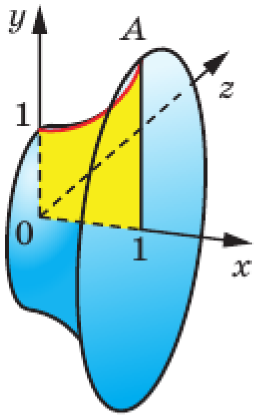


Рис.1.6

Загалом пропонується формула обчислення фігури обертання

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В підручнику Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. поняття первісної подається після нагадування про похідну, що забезпечує логічний перехід до інтегрування. Ключові твердження мають доведення, а деякі відводяться для самостійної роботи, що забезпечує розвиток аналітичних навичок.

В підручнику використовуються приклади задач фізичного змісту, також застосовуються алгоритми (для визначеного інтеграла), здійснюється поетапний розбір прикладів.

Підручник має прикладну спрямованість, оскільки містить геометричні застосування інтегралу для розрахунку площі криволінійної трапеції, площі між двома кривими та об’єму тіл загальної форми та тіл обертання.

Таким чином, обидва підручника дотримуються однієї лінії викладання теми "Інтегральне числення", а саме від введення поняття первісної до поняття визначеного інтегралу через площу криволінійної трапеції.

В підручнику Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. учні активніше залучаються до самостійних доведень, а в підручнику Неліна Є., Долгової О. даються готові доведення. Такий підхід обумовлюється тим, що підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. орієнтований на учнів, що поглиблено вивчають математику.

В той же час підручник Неліна Є., Долгової О. ширше охоплює міжпредметні приклади (особливо економіку). Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. більше фокусується на геометричних і фізичних задачах та розглядаються додаткові застосування інтегралів в математиці.

Обидва підручники подають тему "Інтегральне числення" послідовно, але з різними акцентами – перший більше інтегрує міжпредметні приклади (включно з економікою), а другий – глибше структурує теоретичний матеріал і вводить окремий розділ про об’єми тіл.

Для викладання вищої математики в навчальних закладах використовується велика кількість підручників, навчальних посібників, конспектів лекцій та методичних рекомендацій, які розроблені викладачами різних університетів та рекомендовані Методичними Радами університетів та МОН.

Проаналізуємо підручник Грисенка М. "Вища математика для економістів" в розрізі теми "Інтегральне числення"[5]. Підручник містить 2 розділи, які присвячені цій темі. В першому з них розглядається поняття інтегралу та способи обчислення інтегралів. Другий розділ присвячений використання інтегралів для рішення практичних задач.

Вивчення інтегралу починається після того, як студенти ознайомилися з диференціальним численням функцій з однією та багатьма змінними.

Спочатку автор знайомить студентів з поняттям первісна та демонструється те, що знаходження первісної не є однозначною операцією. На основі цього формулюється теорема щодо загального вигляду первісної. Також вводиться поняття невизначеного інтегралу як множини всіх первісних для функції $y = f(x)$.

Наступним наводяться основні властивості невизначеного інтеграла. До тих, що студенти вчили в старшій школі додаються властивості щодо диференціювання невизначеного інтегралу.

Властивість 1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Властивість 2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Таблиця інтегралів вводиться авторами як висновок з означення інтегрування та таблиці похідних. Порівняно з шкільним курсом ця таблиця розширена додатковими табличними інтегралами для обернених тригонометричних функцій та натурального логарифму.

На відміну від шкільного курсу значно розширений матеріал щодо методів обчислення інтегралів. Крім методу безпосереднього інтегрування, який пропонувався у школі, автори пропонують ще декілька методів, які загалом складають комплексний інструментарій для обчислення інтегралів:

- метод заміни змінних, який є розширенням відомої з шкільного курсу формули щодо обчислення інтегралу від функції вигляду $f(ax + b)$. Для деяких інтегралів також наводяться стандартні підстановки.
- метод інтегрування по частинах;

– метод побудови рекурентної формули.

Наведені методи супроводжуються прикладами, що повинно допомогти студентам зрозуміти принципи їх застосування.

Поняття визначеного інтегралу в підручнику вводиться через інтегральні суми.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми $S(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \quad f(c_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$, яка не залежить ані від вибору подрібнення T_n, ані від вибору проміжних точок $c_k, k = \underline{1, n}$ то її називають визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ на відрізку $[a\ ;b]$ і позначають:

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \quad f(c_k)\Delta x_k$$

Формулюється без доведення теорема про умову існування інтегралу.

Теорема (ознака існування визначеного інтеграла). Якщо y=f(x) – визначена та неперервна або обмежена на відрізку $[a\ ;b]$ функція, то існують скінченна границя інтегральної суми та визначений інтеграл від функції $y = f(x)$на відрізку $[a; b]$.

Окремий параграф підручника відведений для прикладів задач, які приводять до поняття визначеного інтегрування: задача пошуку площі криволінійної трапеції, задача про роботу змінної сили, задача про обсяг продукції.

В підручнику приводяться властивості визначеного інтегралу і основна теорема інтегрального числення у вигляді формули Ньютона-Лейбніца.

Автор також формулює у вигляді теорем методи обчислення визначеного інтеграла, а саме, метод заміни змінної та метод інтегрування по частинах.

Також окремий параграф виділяється для знайомства студентів з поняттям невласного інтегралу. Вводиться його означення та наводяться приклади обчислення таких інтегралів.

Особливістю даного підручника є знайомство студентів з наближеними формулами обчислення інтегралів: формулою прямокутників, формулою трапецій, що власне є ефективним для розуміння студентами, як працюють програмні засоби, які використовуються для численного рішення різних задач.

В наступному розділі підручника розглядаються питання застосування інтегралів для вирішення практичних задач. Перш за все, наводиться використання інтегралів для обчислення площ різних фігур, довжини дуги і ліній та об'ємів тіл обертання та їх площ поверхонь.

Застосування інтегрального числення для вирішення задач з фізики обмежується стандартним прикладом обчислення довжини шляху.

В підручнику наведено багато прикладів економічних задач, для яких застосовується інтеграл.

Економічний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством або фірмою із продуктивністю праці $f = f(t)$ за проміжок часу [0;T]

$$q = \int_0^T f(t)dt$$

Також показується, що визначений інтеграл використовується:

- для обчислення середніх значень витрат, доходу та прибутку підприємства;
- для визначення приросту капіталу при відомих інвестиціях;
- при розрахунку коефіцієнта Джіні для оцінки ступеня нерівномірності розподілу доходів;
- для обчислення дисконтованих сум;
- в задачах обчислення доданої вартості при реалізації товару.

Таким чином, розглянутий підручник для студентів економічних спеціальностей має логічну послідовність викладення матеріалу, де враховуються особливості підготовки студентів економічних спеціальностей. Містить широкий спектр прийомів обчислення інтегралів та прикладів їх застосування, що робить його хорошим інструментом для самостійної підготовки студентів. В підручнику відсутні складні математичні викладки та доведення, що може бути його позитивною стороною, оскільки для студентів економічних спеціальностей більш важливим є саме практичне застосування математичного апарату.

Додаток Б. Використання GeoGebra для побудови візуалізацій інтегральних сум

Візуалізація визначеного інтеграла в GeoGebra Classic (

1. Побудова графіка функції

У полі вводу (знизу) введіть функцію, наприклад:

f(x) = x^2

На екрані з’явиться графік параболи.

2. Виділення області під графіком

Введіть команду:

Integral[f, 0, 2]

GeoGebra одразу зафарбує площу під кривою від x=0 до x=2 і обчислить її значення.

3. Динамічна зміна меж інтегрування

Створіть повзунки для a і b:

В меню "Інструменти" → "Повзунок".

Задайте: a=0…5, b=0…5.

У полі вводу напишіть:

Integral[f, a, b]

Тепер можна рухати повзунки і бачити, як змінюється площа під графіком.

4. Порівняння з наближеними сумами (метод Рімана)

Введіть команду:

UpperSum[f, a, b, 10]

LowerSum[f, a, b, 10]

GeoGebra покаже прямокутники Дарбу (верхні і нижні суми).

Можна збільшувати кількість відрізків (наприклад, 50) для демонстрації того, як площі прямокутників наближаються до точного інтеграла.

Додаток В. Приклад тестового завдання для учнів старшої школи з теми "Визначений інтеграл" з використанням засобів інтерактивного навчання

Частина 1. Побудова інтеграла

Введіть у GeoGebra функцію

$f(x) = x^2$

Побудуйте графік.

Запитання:

1. Як виглядає графік?
2. Які точки він проходить?

Відповідь: ____

Виділіть площу під графіком від x=0 до x=2:

Integral[f, 0, 2]

Запитання:

3. Яке число показав GeoGebra?
4. Як ви думаєте, чому це саме площа?

Відповідь: ____

Частина 2. Інші функції

Побудуйте інтеграл для g(x)=2x+1 від 0 до 3.

g(x) = 2x+1

Integral[g, 0, 3]

Запитання:

1. Яке значення ви отримали?
2. Намалюйте просту фігуру, площа якої відповідає цьому інтегралу.

Відповідь: ____

Побудуйте інтеграл для h(x)=sin(x) від 0 до π.

Запитання:

3. Яке число вийшло?
4. Чому воно співпадає з площею під кривою синуса?

Відповідь: ____

Частина 3. Динамічні межі

Створіть два повзунки a та b (наприклад, від –5 до 5).

Введіть:

p(x) = cos(x)

Integral[p, a, b]

Запитання:

1. Як змінюється площа, коли ви рухаєте повзунки?
2. Чому при різних межах інтеграл може бути від'ємним?

Відповідь: ____

Частина 4. Наближені суми

Для $f(x)=x^2$ введіть:

UpperSum[f, 0, 2, 6]

LowerSum[f, 0, 2, 6]

Запитання:

1. Що показали прямокутники?
2. Що зміниться, якщо вказати замість 6 – 50?

Відповідь: ____

Підсумкове запитання

Поясніть своїми словами:

Що означає визначений інтеграл і чому він пов'язаний із площею?

Відповідь: ____

Додаток Г. Задачі на застосування визначених і невизначених інтегралів

Задача 6.

Знайти всі первісні для функції

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Рішення.

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

Рішення.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-\frac{4}{5}}$

$F(x) = \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + C = 5x^{\frac{1}{5}} + C$

Задачі на використання первісної, які наведені в шкільних підручниках, зазвичай мають фізичний зміст, який знайомий учням з курсу фізики.

Задача 7. (Підручник Неліна Є., Долгової О.)

Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу (t = 0 с) точка перебувала в початку координат (v вимірюється у метрах на секунду).

Рішення.

Необхідно знайти первісну від швидкості

$$S(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} - t + C = \frac{t^3}{3} + t^2 - t + C$$

$$S(0) = \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0 + C = 0$$

Звідси C=0.

Отже, $S(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} - t$

Задача 8. (Підручник Неліна Є., Долгової О.)

Матеріальна точка масою m рухається по осі Ох під дією сили $F(t)$, напрямленої вздовж цієї осі. Запишіть формулу залежності $x(t)$, якщо відомо, що при $t=t_0$ швидкість точки дорівнює v_0, а координата – x_0 ($F(t)$ вимірюють у ньютонах, t – у секундах, v – у метрах на секунду, m –у кілограмах):

$F(t)=6-9t$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$.

Рішення.

За другим законом Ньютона

$$a(t)=\frac{F(t)}{m}=\frac{6-9t}{3}=2-3t$$

Знаходимо швидкість як первісну для $a(t)$

$$v(t)=2t-\frac{3t^2}{2}+C$$

Константу знаходимо з умови

$$v(1)=2\cdot 1-\frac{3\cdot 1^2}{2}+C=\frac{1}{2}+\mathrm{C}=4$$

Звідси

$$\mathrm{C}=3{,}5$$

Отже,

$$v(t)=-1{,}5t^2+2t+3{,}5$$

Координата є первісною для швидкості.

$$x(t)=-1{,}5\frac{t^3}{3}+2\frac{t^2}{2}+3{,}5t+C_1=-0{,}5t^3+t^2+3{,}5t+C_1$$

Константу знаходимо з умови

$$x(1)=-0{,}5\cdot 1^3+1^2+3{,}5\cdot 1+C_1=4+C_1=-5$$

Звідси

$$\mathrm{C}_1=-9$$

Отже, формула залежності має вигляд

$$x(t)=-0{,}5t^3+t^2+3{,}5t-9$$

Задача 9. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка в будь-який момент часу t визначається за формулою $v(t)=6t^2+1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t=3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

Рішення.

Координата є первісною від швидкості

$$x(t) = 6\frac{t^3}{3} + t + C = 2t^3 + t + C$$

Знаходимо константу з умови

$$x(3) = 2 \cdot 3^3 + 3 + C = 57 + C = 10$$

Звідси *C*=-47.

Отже, $x(t) = 2t^3 + t - 47$

В підручнику профільного рівня Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В. також присутні задачі на обчислення невизначеного інтеграла в явному вигляді.

Задача 10. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Знайдіть

$$\int \sin\sin 5x \cos\cos 3x\, dx$$

Рішення.

Скористаємось формулою добутку тригонометричних функцій, а потім властивостями обчислення інтегралів

$$\int \sin\sin 5x \cos\cos 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(\sin\sin 2x + \sin\sin 8x)dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin\sin 2x + \frac{1}{2}\sin\sin 8x\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\sin\sin 2x\, dx + \int \frac{1}{2}\sin\sin 8x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\sin 2x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin\sin 8x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\cos 8x}{8} + C = -\frac{\cos\cos 2x}{4} - \frac{\cos\cos 8x}{16} + C$$

На відміну від невизначеного інтегралу, учням в шкільному курсі пропонується достатня велика кількість задач на обчислення визначеного інтеграла.

Задача 11. (Підручник Неліна Є., Долгової О.)

Обчислити

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx$$

Рішення.

Використаємо таблицю первісних. Отримаємо

$$I = \int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Задача 11. (Підручник Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)

Обчислити

$$\int_{0}^{6} (3x^2 - x)dx$$

Рішення.

Використаємо таблицю первісних та правила обчислення інтеградів. Отримаємо

$$I = \int_{0}^{6} (3x^2 - x)dx = \left(3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{6} = \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{6} =$$

$$= \left(6^3 - \frac{6^2}{2}\right) - \left(0^3 - \frac{0}{2}\right) = 298$$

Значну частину задач також складають задачі на використання інтегралів.

Задача 13.

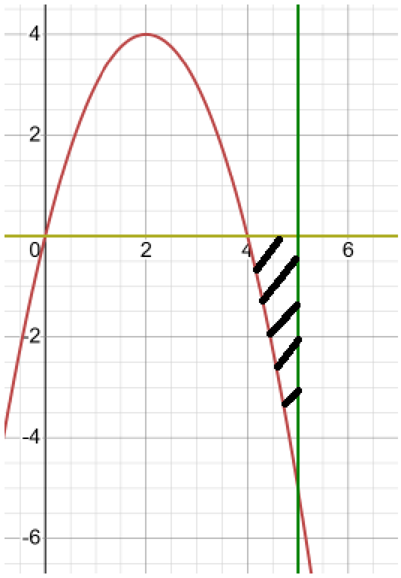
Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2, y = 0, x = 5$

Рішення.

Знайдемо точки перетину функції $y = 4x - x^2$ з віссю Ох.

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=4$

Використовуючи отриману інформацію, зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти



Площа фігури обчислюється таким чином

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx = \int_4^5 (0 - (4x - x^2))dx = \int_4^5 (x^2 - 4x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_4^5 = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_4^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 2 \cdot 5^2\right) - \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2\right) = \frac{7}{3}$$

Задача 14.

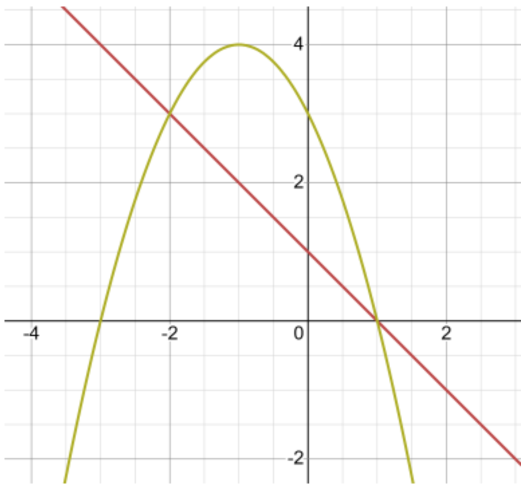
Знайти площу фігури, обмеженою лініями $y = 1 - x, y = 3 - 2x - x^2$

Рішення.

Знайдемо абсциси точок перетину двох ліній

$$1 - x = 3 - 2x - x^2$$
$$1 - x - 3 + 2x + x^2 = 0$$
$$x_1 = -2, x_2 = 1$$

Зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти



Отже, площа фігури обчислюється за формулою

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2-(1-x))dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2-1+x)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(2\cdot 1-\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(2\cdot(-2)-\frac{(-2)^2}{2}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=$$

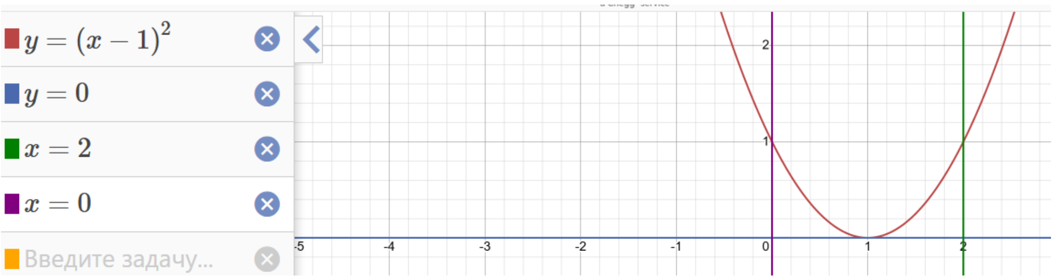
$$=\left(2\cdot 1-\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(2\cdot(-2)-\frac{(-2)^2}{2}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=4\frac{1}{2}$$

Задача 15. (Обчислення об’ємів тіл)

Обчислити об’єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=(x-1)^2, x=2, y=0$ навколо очі Ох.

Рішення.

Зобразимо переріз фігури, об’єм якої потрібно знайти



Фігуру, що утворюється при обертанні можна розглядати як дві фігури однакового об’єму. Тому знайдемо об’єм однієї з цих фігур

$$V_1=\pi\int_{1}^{2}f^2(x)dx=\pi\int_{1}^{2}(x-1)^5dx=\pi\frac{(x-1)^5}{5}\Big|_{1}^{2}=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}-0\right)=\frac{\pi}{5}$$

$$V=V_1+V_2=2V_1=\frac{2\pi}{5}$$

В підручниках для вищої школи наводяться задачі, в яких використовуються більш складні методи інтегрування.

Задача 16. (Метод заміни змінної та інтегрування по частинах)

Обчислити

$$\int arctg\sqrt{x}dx$$

Рішення.

$$\int arctg\sqrt{x}dx=\int arctg\sqrt{x}dx=\left|x=t^2\ dx=2tdt\right|=2\int tarctgtdt$$

$$2\int tarctgtdt = \left| u = arctgt \quad dv = tdt\, du = \frac{dt}{1+t^2} \quad v = \frac{t^2}{2} \right|$$

$$= t^2 arctgt - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

$$= t^2 arctgt - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = t^2 arctgt - \int (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt$$

$$= t^2 arctgt - t +$$

$$+ \int \frac{1}{1+t^2} dt = t^2 arctgt - t + arctgt + C = (x+1) arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

Задача 17. (Інтегрування раціональних дробів)

Обчислити

$\int \frac{dx}{x^3+8}$

Рішення.

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A+2B+C)x + 4A + 2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Звідси

A=1/12, B=-1/12, C=1/3

$$\int \frac{dx}{x^3+8} = \int \left(\frac{1}{12(x+2)} + \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2-2x+4} \right) dx = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{24}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\ln(x+2) - \frac{1}{24}\int \frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \frac{1}{12}\ln(x+2) -$$

$$- \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+3} = \frac{1}{12}\ln(x+2) - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Тема "Інтегральне числення" також входить в тематику задач, що виносяться на ЗНО та НМТ. Аналіз відкритого банку завдань показав, що туди потрапляють такі типи задач:

1) знаходження первісної;

2) обчислення визначених інтегралів;

3) знаходження площі фігури за допомогою інтеграла.

Наведемо приклади таких задач.

Задача 18. (Питання закритого типу)

Укажіть первісну $F(x)$ функції $f(x) = \frac{1}{2x}$

А $F(x) = \frac{1}{x^2}$

Б $F(x) = \frac{1}{2} ln\ |x|$

В $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$

Г $F(x) = 2\ ln\ ln\ |x|$

Д $F(x) = ln\ ln\ |2x|$

Рішення.

Згідно таблиці первісних та правил знаходження первісних отримаємо $F(x) = \frac{1}{2} ln\ |x|$. Отже, правильна відповідь Б.

Задача 19. (Питання відкритого типу)

Обчисліть інтеграл $\int_3^5 \frac{x^2+2x+1}{x+1} dx$

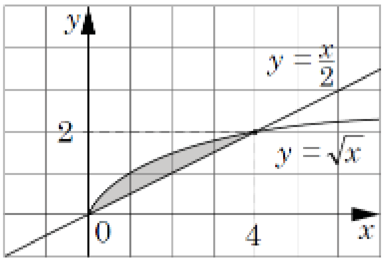
Рішення.

$$\int_3^5 \frac{x^2+2x+1}{x+1} dx = \int_3^5 \frac{(x+1)^2}{x+1} dx = \int_3^5 (x+1) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_3^5 = \left(\frac{5^2}{2} + 5\right) - \left(\frac{3^2}{2} + 3\right) = 10$$

Задача 20.

На рисунку зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \dfrac{x}{2}$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А	Б	В	Г	Д
$\int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_0^4 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{x}\right)dx$

Рішення.

Відповідь: Г

Додаток Ґ. Приклади задач для вивчення теми "Інтегральне числення"

Задача 22. Визначення загального доходу підприємства

Нехай підприємство продає продукцію, і швидкість отримання доходу в момент часу t описується функцією R=$R(t)$ (наприклад, у гривнях за одиницю часу). Потрібно знайти загальний дохід за інтервал часу $[a;b]$.

Розглянемо дохід підприємства на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок на n рівних частин. Для спрощення будемо вважати, що дохід підприємства на кожному інтервалі незмінний та дорівнює значенню функції $R(t)$ в певній точці кожного інтервалу $[t_k; t_{k+1}]$, наприклад t_k. Тоді дохід на k-му інтервалі наближено можна представити як $R(t_k)\Delta t_k$, а на всьому проміжку часу

$$R_n = R(t_1)\Delta t_1 + R(t_2)\Delta t_2 + \cdots + R(t_n)\Delta t_n$$

Таким чином дохід підприємства можна розрахувати за цією формулою. Точне значення можна визначити як $R = R_n$. Якщо $n\to\infty$ і довжини інтервалів розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума R_n буде прямувати до деякого числа. Це число і називають інтегралом від функції $R(t)$ на відрізку $[a; b]$ та позначають $\int_a^b R(t)dt$.

Однією з проблем для учнів та студентів є відсутність співвідношення між первісною та визначеним інтегралом. Особливо це стосується для учнів які навчаються за стандартним рівнем або для студентів економічних спеціальностей. Тому їм можемо запропонувати завдання, де інтеграл визначається як приріст первісної.

Приклад 23. Задача про переміщення точки.

Нехай $v = v(t)$ швидкість прямолінійного руху точки, задана на деякому проміжку часу $[t_1; t_2]$. При цьому нехай $v(t) > 0$. Необхідно визначити шлях, який пройшла точка за цей час?

Рішення.

Позначимо координату точки, що рухається в момент t через $S(t)$. Тоді, оскільки рух при $v > 0$ відбувається у додатному напрямі (або, оскільки $S(t)$ – функція зростаюча, зважаючи на те що $S'(t) = v(t) > 0$), то шукана відстань буде виражатися числом $S(t_2) - S(t_1)$. З іншого боку, $S(t)$ є первісною функцією $v(t)$ ($S'(t) = v(t)$). Таким чином, обчислення довжини шляху, пройденого точкою за даний проміжок часу, зводиться до пошуку первісної $S(t)$ функції $v(t)$, тобто до інтегрування функції $v(t)$.

Різниця $S(t_2) - S(t_1)$ називають інтегралом від функції $v(t)$ на відрізку $[t_1; t_2]$ і позначають так: $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = S(t_2) - S(t_1)$.

Задача 24. Визначення кількості електрики.

Нехай по провіднику тече змінний струм. Необхідно обчислити кількість електрики, що протікає за інтервал часу [a; b] через переріз провідника.

Рішення.

Якби сила не змінювалася з часом, зміна кількості електрики q дорівнювала б добутку І$(b - a)$. Нехай заданий закон зміни струму в часі $I = I(t)$. Тоді кількість електрики, що протікає за інтервал часу $[a;\ b]$, дорівнює

$q(b) - q(a)$. З іншого боку, на малому проміжку часу можна вважати силу струму постійною і рівною $I(t)$, а $dq = I(t)dt$, отже, обчислення кількості електрики за цей проміжок часу зводиться до пошуку первісної функції $I(t)$.

Різниця $q(b) - q(a)$ називають інтегралом від функції $I(t)$ на відрізку $[a;\ b]$ і позначають так: $\int_a^b I(t)dt = q(b) - q(a)$

Наведемо ще задачі, які демонструють введення поняття інтеграл.

Задача 25. Прибуток підприємства.

Прибуток підприємства з одиниці продукції в момент часу t задається функцією $P(t)$ (наприклад, у гривнях на день). Потрібно знайти загальний накопичений прибуток за проміжок часу [a;b].

Рішення.

Якби прибуток був постійним, то загальний прибуток за проміжок [a;b] дорівнював би P(b–a). Насправді ж P=$P(t)$ змінюється. На малому проміжку часу можна вважати його сталим, тоді $dQ = P(t)dt$

Узагальнюючи на весь інтервал, отримуємо: $Q = \int_a^b P(t)dt$

Таким чином, накопичений прибуток за час $[a;\ b]$ обчислюється як інтеграл від функції поточного прибутку $P(t)$.

Задача 26. Зміна чисельності популяції

Швидкість приросту популяції (наприклад, риб у водоймі) описується функцією $N'(t) = r(t)$, де $r(t)$ – кількість особин, що додаються за одиницю часу. Потрібно визначити зміну чисельності популяції на відрізку часу $[a; b]$.

Рішення.

На малому проміжку часу Δt приріст чисельності приблизно дорівнює $r(t)\Delta t$. При зменшенні проміжку, отримаємо: $dN = r(t)dt$.

Інтегруючи на проміжку $[a; b]$, маємо:

$$\Delta N = \int_a^b r(t)dt$$

Отже, інтеграл від функції швидкості росту популяції визначає загальну зміну її чисельності за даний період.

Таким чином, можна підвести учнів та студентів до думки, що в фізиці, економіці та природничих науках інтеграл завжди інтерпретується як накопичення певної величини (дохід, прибуток, кількість особин, енергія тощо).

Додаток Д. Розробка конспектів уроків на тему "Інтегральне числення" в середній школі

Наступний конспект буде орієнтований на клас з профільним рівнем вивченням математики. Для проведення уроку буде використовуватися фліп-технологія ("

Тема: Введення поняття невизначеного інтегралу

Клас: 11 (профільний рівень)

Тривалість: 45 хв

1. Мета уроку

Навчальна:

– ознайомити учнів з поняттям первісної та невизначеного інтеграла;
– сформувати вміння знаходити прості первісні за таблицею;
– показати зв’язок між похідною та інтегралом.

Розвивальна:

– розвивати вміння аналізувати функції та узагальнювати знання;
– формувати навички самостійного навчання через використання цифрових ресурсів.

Виховна:

– виховувати інтерес до математики як до інструменту для пояснення природних і прикладних явищ;
– формувати культуру роботи з цифровими технологіями.

2. Тип уроку

Комбінований, з елементами дослідницької діяльності та групової роботи.

3. Попередня підготовка (фліп-етап, до уроку)

Учні самостійно опрацьовують матеріал вдома (10–15 хв):

– переглядають коротке відео (5–7 хв), у якому пояснюється ідея первісної: функція, похідна, яка також є функцією, поняття оберненої операції та первісної;
– працюють із візуалізацією у Phet з інтерактивним графіком функції та її похідної

https://phet.colorado.edu/sims/html/calculus-grapher/latest/calculus-grapher_all.html?locale=uk;

– виконують кілька тестових завдань у LearningApp типу "Вкажіть функцію, похідною якої є…".

Завдання для самоперевірки:

1) Яка функція є похідною до x3x^3x3?
2) Чому до інтеграла додається "+ C"?
3) Як пов’язаний похідний і інтеграл?

План створення відео

Слайд 1. Вступ (0:20 хв).

Заголовок: "Первісна – зворотна дія до похідної"

Коротка фраза: "Ми вже знаємо, як знаходити похідну функції. Але чи можна повернутися назад?"

Ілюстрація: стрілка "Функція → Похідна → ?".

Слайд нагадує учням про похідну функцію і також мотивує їх замислитися над можливістю оберненої операції.

Слайд 2. Повторення: функція та похідна (0:40 хв)

На слайді нагадується поняття похідної на прикладі швидкості та прискорення $v(t) = s'(t)$. Наводиться графік функції та її похідної.

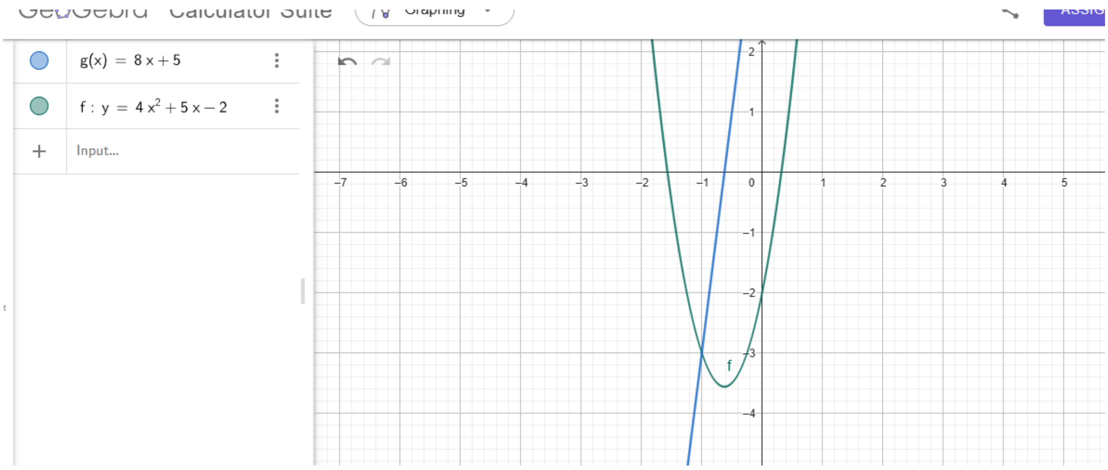


Рис.3.5

Слайд 3. Проблемне запитання (0:30 хв)

Текст: "Якщо відома швидкість $v(t)$, чи можемо відновити шлях $s(t)$?"

Наводяться приклади обернених операцій: додавання – віднімання, піднесення до степеню – видобування кореня.

Таким чином учнів підводять до розуміння змісту первісної як оберненої операції та до того, що результат цієї операції може бути неоднозначним.

Слайд 4. Ідея первісної (1:00 хв)

Наводиться означення: "Первісна – це функція, похідна якої дає задану функцію".

Приклад:

$$f(x) = 2x \ \rightarrow F(x) = x^2$$

Слайд 5. Неєдиність первісної (0:50 хв)

Приклад: $x^2, x^2 + 3, x^2 - 1$ мають однакову похідну $2x$.

Висновок: первісних безліч, вони відрізняються на константу.

Візуалізація: кілька парабол, зміщених по вертикалі.

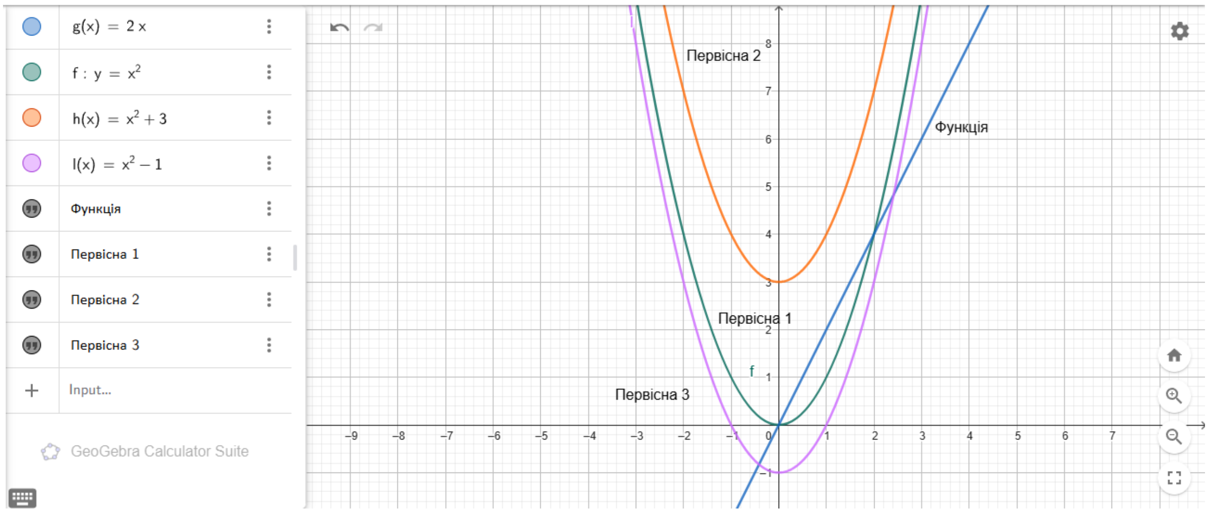


Рис.3.6

Учні знайомляться з прикладами первісних для однієї функції і таким чином розуміють неоднозначність операції інетгрування

Слайд 6. Запис через інтеграл (1:00 хв)

Запис

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Пояснення "Це запис усіх первісних разом".

Приклади:

$$\int \quad 2xdx = x^2 + C$$

$$\int \quad \cos\cos x\, dx = \sin\sin x\ + C$$

Слайд 7. Приклад із фізики (0:50 хв)

Якщо $v(t)$=2t, то шлях $s(t) = t^2 + C$.

Константа C залежить від початкових умов (де тіло було в момент часу t=0).

Наприклад, якщо в момент часу t=0, тіло знаходилось в 3 одиницях від т.0, то маємо $s(0) = 3$.

Отже, $s(0) = 0^2 + C = 3 \ \Rightarrow \ s(t) = t^2 + 3$ – конкретна первісна (виділена жирним шрифтом)

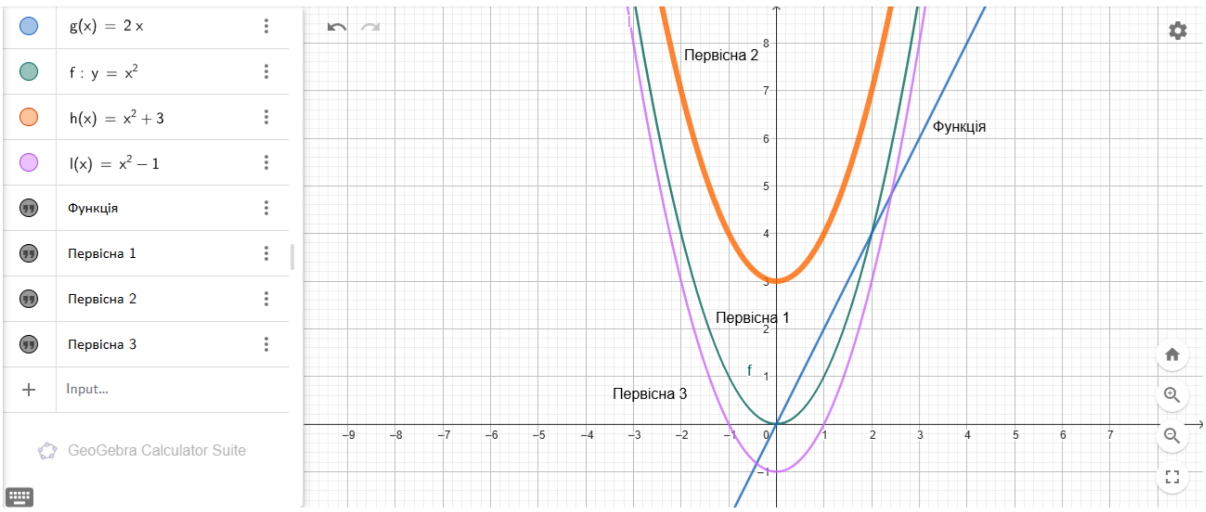


Рис.3.7

Таким чином, учні знайомляться з тим, що значення константи С залежить від конкретних умов.

Слайд 8. Висновок (0:30 хв)

Первісна – це "зворотна операція" до похідної.

Невизначений інтеграл – це сукупність усіх первісних.

Фраза для запам’ятовування: "Похідна розкриває швидкість, інтеграл повертає шлях".

Слайд 9. Тестові завдання (0:30 хв)

Тестові завдання для підготовки до уроку знаходяться за посиланням https://learningapps.org/25471971 (рис.3.8)

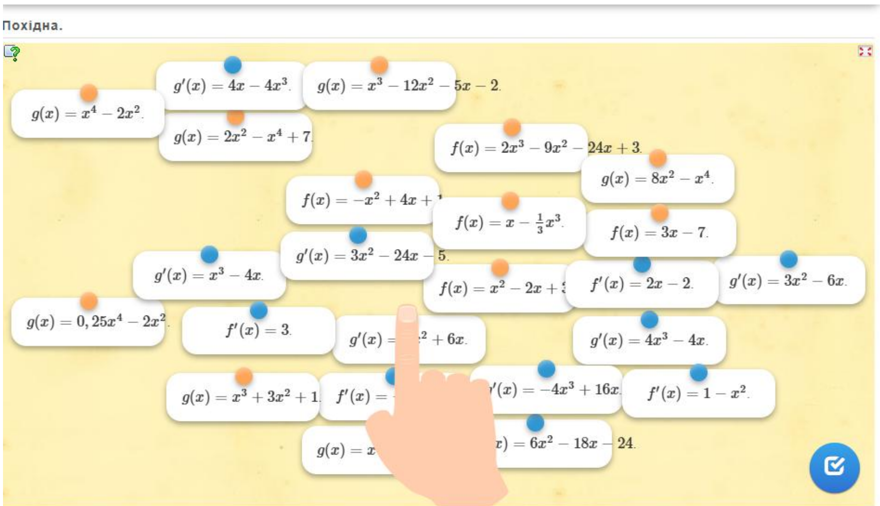


Рис.3.8

4. Хід уроку (в класі)

1. Організаційний момент (2 хв)

Вчитель нагадує, що учні вже переглядали матеріал.

Коротка бесіда: "Що нового ви дізналися з відео?".

2. Актуалізація знань (5 хв)

Обговорення: які приклади первісних ви вже бачили вдома?

Міні-вікторина LearningApp (запитання на відповідність функції та її первісної). https://learningapps.org/8010077

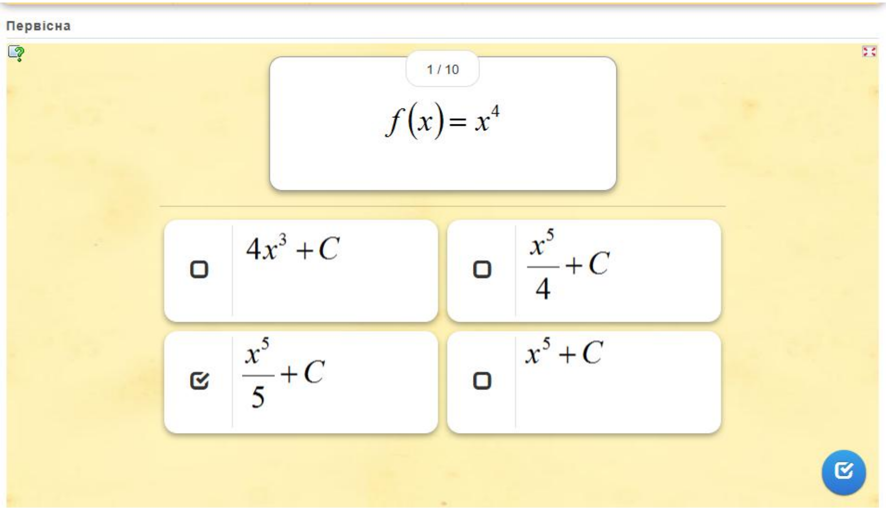


Рис.3.9

3. Вивчення нового матеріалу (10 хв)

Вчитель узагальнює:

Означення первісної: функція $F(x)$, для якої $F'(x) = f(x)$.

Означення невизначеного інтеграла: $\int \quad f(x)dx = F(x) + C$.

Таблиця основних інтегралів (лінійність, степенева функція, експонента, синус, косинус).

4. Практична робота (15 хв)

Учні працюють у групах (по 3-4 особи), виконуючи різнорівневі завдання.

Група 1 (базовий рівень):

Знайти загальний вигляд первісної

Приклад 1. $f(x) = x^6$

Рішення.

$F(x) = \frac{x^7}{7} + C$

Приклад 2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

Рішення.

$F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$

Приклад 3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Рішення.

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

Приклад 4. $f(x) = cos\, cos\, (4x - \frac{\pi}{8})$

Рішення.

$F(x) = \frac{1}{4}(4x - \frac{\pi}{8}) + C$

Група 2 (середній рівень):

Знайдіть загальний вигляд первісної

Приклад 1. $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$

Рішення.

$F(x) = \frac{x^{4+1}}{4+1} + ln\, ln\, |x| + C = \frac{x^5}{5} + ln\, ln\, |x| + C$

Приклад 2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

Рішення

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-\frac{4}{5}}$

$F(x) = \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + C = 5x^{\frac{1}{5}} + C$

Приклад 3. $f(x) = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^5$

Рішення.

$F(x) = \frac{\left(\frac{1}{6}x-1\right)^{5+1}}{5+1} : \frac{1}{6} = \frac{6\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6}{6} = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^6 + C$

Приклад 4.

Для функції f(x) знайдіть первісну, графік якої проходить через точку А.

$f(x) = sin\, sin\, x \quad A(\frac{\pi}{3}; -1\frac{1}{2})$

$F(x) = -\, cos\, cos\, x + C$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\, cos\, cos\, \frac{\pi}{3} + C = -1\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}+C=-1\frac{1}{2}$

$C=-1$

Отже, $F(x)=-\cos\cos x\ -1$

Група 3 (поглиблений рівень):

Знайдіть загальний вигляд первісної

Приклад 1. $f(x)=\frac{6}{(5x-7)^3}$

Рішення.

$f(x)=\frac{6}{(5x-7)^3}=6(5x-7)^{-3}$

$F(x)=6\frac{(5x-7)^{-3+1}}{-3+1}\cdot\frac{1}{5}+C=-\frac{3(5x-7)^{-2}}{5}+C=-\frac{3}{5(5x-7)^2}+C$

Приклад 2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$

Рішення.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=(3x-2)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{(3x-2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{1}{3}+C=\frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}+C$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$\int(1-2\sqrt{x})^3dx$

Рішення.

$$\int(1-2\sqrt{x})^3dx=\int(1-6\sqrt{x}+6(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x})^3)dx=\int(1-6\sqrt{x}+6x-(\sqrt{x})^3)dx$$

$$=\int(1-6\sqrt{x}+6x-(\sqrt{x})^3)dx=x-\frac{6}{2\sqrt{x}}+\frac{6x^2}{2}-\frac{2x^{5/2}}{5}+C=$$

$$=x-\frac{3}{\sqrt{x}}+3x^2-\frac{2x^{5/2}}{5}+C$$

Приклад 4. Для функції f(x) знайдіть первісну, графік якої проходить через точку А.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}A(9;-2)$

Рішення.

$F(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C$

$F(9)=2\sqrt{9}+C=-2$

$C=-2-2\sqrt{9}=-8$

$F(x)=2\sqrt{x}-8$

Кожна група презентує розв'язки з коротким поясненням.

5. Підсумок уроку (8 хв)

Рефлексія: учні відповідають на запитання "Що сьогодні стало для мене новим?".

Проводиться обговорення питань

1. Що таке первісна функції $f(x)$?

A: Будь-яка функція, похідна якої дорівнює $f(x)$

B: Будь-яка функція, інтеграл якої дорівнює $f(x)$

C: Будь-яка функція, яка дорівнює $f(x)$

D: Будь-яка константа

2. Який символ використовується для позначення невизначеного інтеграла?

A: $\sum$

B: $\int$

C: Δ

D: ∞

3. Чому до результату невизначеного інтеграла додається "+C"?

A: Це помилка, додавати не потрібно

B: Тому що існує багато первісних, які відрізняються на константу

C: Це означає нескінченність інтеграла

D: Це умовна позначка кінця інтеграла

4. Що спільного між похідною та невизначеним інтегралом?

A: Вони обидва зменшують функцію

B: Вони обидва стосуються меж і площ

C: Вони є оберненими операціями

D: Нічого спільного

5. Яке твердження правильне?

A: Первісна завжди єдина

B: Первісних може бути нескінченно багато

C: Первісна завжди дорівнює похідній

D: Інтеграл не має зв’язку з похідною

Вчитель узагальнює: інтеграл – це "зворотна операція до похідної", а невизначений інтеграл – це сукупність усіх первісних.

5. Домашнє завдання

Розв’язати номери 10.2, 10.6(з підручника Мерзляка А., Номіровського Д., Полонського В.)).

6. Використані технології

Відеоурок (фліп-технологія).

GeoGebra для візуалізації.

LearningApp для інтерактивного тестування.

Додаток Е. Розробка конспектів практичних занять з теми "Інтегральне числення" у вищій школі

Було розроблено два конспекти практичних занять.

Тема: Невизначений інтеграл.

Напрямок: економіка

1. Мета заняття

Навчальна:

– закріпити знання про поняття первісної та невизначеного інтеграла;
– навчити застосовувати інтегрування до елементарних функцій;
– розглянути приклади економічних моделей, що потребують використання інтегралів.

Розвивальна:

– сформувати вміння пов’язувати математичні обчислення з економічними процесами;
– розвивати аналітичне та логічне мислення.

Практична:

– показати застосування інтегралів у задачах на обчислення витрат, доходів, накопичених величин.

2. Структура заняття

Тривалість – 90 хв

Організаційний момент і мотивація (5 хв)

Актуалізація знань (короткий фронтальний опит) (10 хв)

Розгляд теоретичних положень (15 хв)

Практичні завдання (базові) (20 хв)

Прикладні економічні задачі (робота в групах) (30 хв)

Підсумок та рефлексія (10 хв)

3. Хід заняття

<u>1. Організаційний момент і мотивація (5 хв)</u>

Викладач ставить проблемне питання: "Ми знаємо, що похідна описує швидкість зміни. А як знайти *накопичену* величину – наприклад, загальні витрати чи дохід компанії за певний час?"

Студенти висловлюють припущення.

2. Актуалізація знань (10 хв)

Фронтальне опитування:

- Що таке похідна?
- Як знайти похідну від x^n,$sin\ sin\ x, e^x$?
- Що таке первісна функції?
- Чому до інтегралу додають константу "+C"?

3. Теоретичний блок (15 хв)

Для організації теоретичного блоку викладач може використати презентацію, в якій відображенні основні теоретичні питання, що виносяться на заняття.

Структура презентації

Слайд 1. Тема заняття

Заголовок: "Невизначений інтеграл та його застосування в економіці"

Ілюстрація: схема "Похідна ↔ Інтеграл".

Ключове питання: "Як перейти від граничних величин до загальних?"

Слайд 2. Повторення: похідна

Похідна = швидкість зміни.

Приклад: $C'(q)$ – граничні витрати.

Графік функції витрат та її похідної.

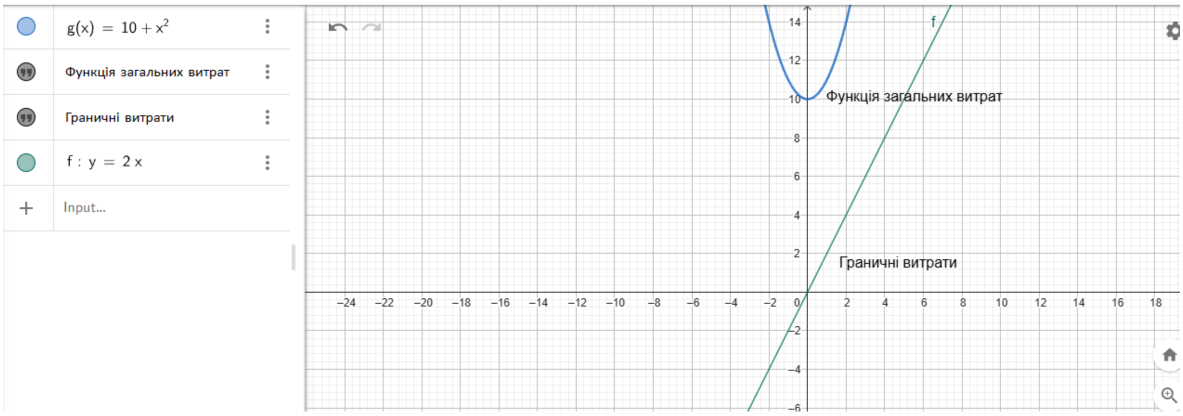


Рис.3.9

Слайд 3. Ідея первісної

Первісна $F(x)$ – функція, для якої $F'(x)=f(x)$.

Неєдиність: x^2, x^2+5, x^2-10 мають похідну $2x$.

Висновок: завжди додається +C.

Слайд 4. Запис інтеграла

Символ:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Наводиться таблиця базових інтегралів.

Слайд 5. Властивості невизначеного інтеграла

Лінійність: $\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

Дана властивість використовується при побудові функцій у моделях.

Слайд 6. Економічна інтерпретація

Граничні витрати ⟶ загальні витрати:

$C'(q) \to C(q)$

Граничний дохід ⟶ загальний дохід:

$R'(x) \to R(x)$

Отже, можна узагальнити:

"Граничні показники (похідна) ⟶ Загальні показники (інтеграл)".

Слайд 7. Приклад 1 (Витрати)

$C'(q) = 5q + 10$

Знайти C(q).

Відповідь: $C(q) = \frac{5}{2}q^2 + 10q + C$.

Графік кривої витрат.

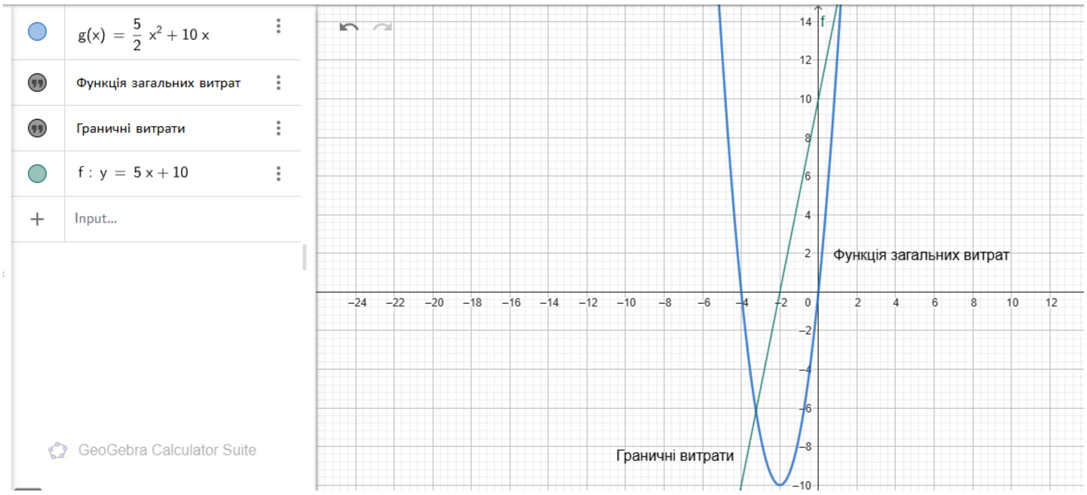


Рис.3.10

Слайд 8. Приклад 2 (Доходи)

$$R'(x) = 100 - 2x$$

Знайти $R(x)$, якщо $R(0)=0$.

Відповідь: $R(x) = 100x - x^2$.

Інтерпретація: залежність доходу від кількості продукції.

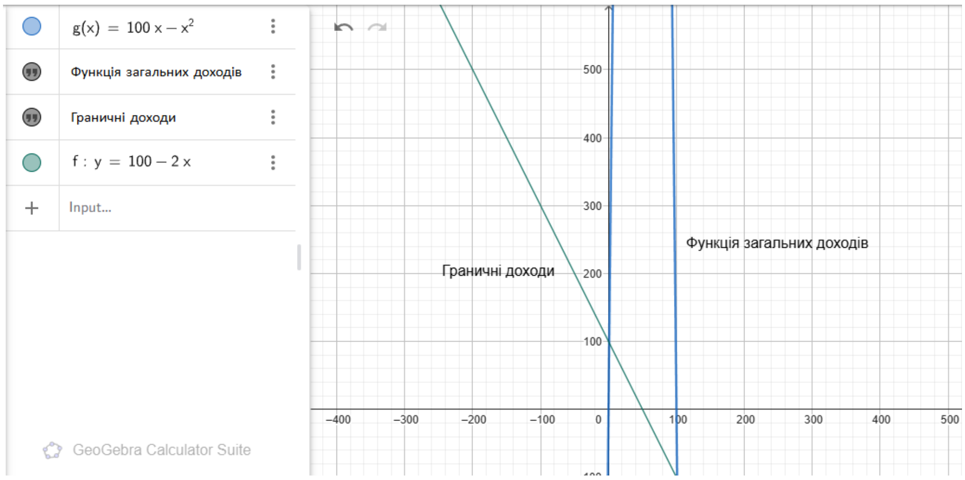


Рис.3.11

Слайд 9. Завдання для груп

Група 1: витрати $C'(q) = 4q^2 + 10$.

Група 2: дохід $R'(x) = 50 - x$.

Група 3: попит $D'(p) = \frac{100}{p+1}$.

Група 4: інвестиції $I'(t) = 200e^{0.05t}$.

Кожна група відновлює функцію, додаючи константу.

Слайд 10. Висновок

Невизначений інтеграл – обернена операція до похідної.

Дозволяє відновлювати загальні показники з граничних.

У економіці інтеграли використовуються для:

– аналізу витрат і доходів;

– моделей попиту;

– фінансових прогнозів.

4. Базові завдання (20 хв)

Студенти розв'язують індивідуально, з подальшою перевіркою.

Мета: закріплення базової техніки.

А) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$

$F(x) = \frac{x^{4+1}}{4+1} + ln\, ln\, |x| + C = \frac{x^5}{5} + ln\, ln\, |x| + C$

Б) $f(x) = 7e^x$

$F(x) = 7e^x + C$

В) $f(x) = cos\, cos\, (4x - \frac{\pi}{8})$

$F(x) = \frac{1}{4}(4x - \frac{\pi}{8}) + C$

Г) $f(x) = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^5$

$F(x) = \frac{\left(\frac{1}{6}x-1\right)^{5+1}}{5+1} : \frac{1}{6} = \frac{6\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6}{6} = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^6 + C$

Д) $f(x) = \frac{2}{3x}$

$F(x) = \frac{2}{3} ln\, ln\, |x| + C$

Е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}} = (3x-2)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(3x-2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x-2} + C$

Є) $f(x) = \frac{6}{(5x-7)^3}$

$f(x) = \frac{6}{(5x-7)^3} = 6(5x-7)^{-3}$

$F(x) = 6\frac{(5x-7)^{-3+1}}{-3+1} \cdot \frac{1}{5} + C = -\frac{3(5x-7)^{-2}}{5} + C = -\frac{3}{5(5x-7)^2} + C$

Ж) $f(x) = e^{2x-3}$

$F(x) = \frac{e^{2x-3}}{2} + C$

З) $f(x) = 2^{0,5x+1}$

$F(x) = \frac{2^{0,5x+1}}{ln ln\, 2} \cdot \frac{1}{0,5} + C = \frac{2 \cdot 2^{0,5x+1}}{ln ln\, 2} + C = \frac{2^{0,5x+2}}{ln ln\, 2} + C$

И) $f(x) = \frac{2}{4x-1}$

$F(x) = \frac{2}{4} ln\, ln\, |4x-1| + C = \frac{1}{2} ln\, ln\, |4x-1| + C$

5. Прикладні економічні задачі (30 хв)

Групова робота (по 3–4 студенти). Кожна група отримує задачу економічного змісту:

А. Витрати компанії.

Граничні витрати описуються функцією $C'(q)$=5q+10

Знайти функцію загальних витрат $C(q)$ за умови, що на початок виробництва вони становлять 50 у.од.

Б. Дохід підприємства.

Граничний дохід $R'(x)$=100−2x.Знайти функцію доходу $R(x)$, якщо R(0)=-200.

В. Сукупний попит.

Функція граничного попиту: $D'(p)$=100p+1

Знайти функцію попиту $D(p)$ за умови, що попит становитиме 400 од. при нульовій ціні.

Г. Модель інвестицій.

Швидкість приросту інвестицій $I'(t)$=200e$^{0.05t}$

Знайти функцію інвестицій $I(t)$ за умови, що на початку вони становлять 1000 у.о.

Кожна група розв’язує задачу, коротко презентує результат (усно чи на дошці).

6. Підсумок та рефлексія (10 хв)

Обговорення: "Де ще в економіці може застосовуватися інтеграл?" (прибуток, амортизація, кредитні моделі).

Викладач підкреслює: інтеграл дозволяє перейти від миттєвої характеристики (граничних величин) до накопичених величин (загальних).

Коротке тестове запитання: "Що означає +C у невизначеному інтегралі?"

4. Домашнє завдання

Обчислити:

A. $\int \quad e^{-x} \sin \sin x \, dx$

B. $\int \quad \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

C. $\int \quad \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

D. $\int \quad x\sqrt{1+x}dx$

Розроблено конспект практичного заняття для студентів інженерних спеціальностей.

Тема: Обчислення визначених інтегралів методом заміни змінної

Тривалість: 2 академічні години (90 хв)

1. Мета заняття

Навчальна:

– закріпити знання студентів про метод заміни змінної у визначених інтегралах;

– навчити застосовувати метод до обчислення складних інтегралів, що зустрічаються у прикладних інженерних задачах;

– показати зв’язок з реальними задачами механіки, фізики та електротехніки.

Розвивальна:

– сформувати навички роботи з математичними моделями;

– розвивати аналітичне та критичне мислення;

– навчити працювати в команді над проєктними завданнями.

Практична:

– відпрацювати використання заміни змінної у практичних інженерних розрахунках;
– продемонструвати застосування методу у розрахунках площ, моментів інерції, електричних процесів.

2. Метод і форма проведення

Метод: проєктна технологія (групова робота над міні-проєктами).

Форма: практичне заняття з елементами дискусії, презентації результатів групами.

Інструменти: дошка/мультимедійний проєктор, GeoGebra або WolframAlpha/Mathematica (за можливості), калькулятори.

3. Хід заняття

1. Організаційний момент і мотивація (5 хв)

Викладач ставить проблемне питання: "Уявіть, що вам потрібно обчислити площу деталі складної форми або знайти момент інерції балки. Як можна спростити інтеграл, щоб він став обчислюваним?"

2. Коротке теоретичне повторення (10 хв)

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Схема застосування:

1) Вибір нової змінної.
2) Вираз підінтегральної функції через нову змінну.
3) Перетворення меж інтегрування.
4) Обчислення нового інтеграла.

3. Базові приклади (25 хв)

Приклад 1.

$$\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}dx}{x-6}$$

Рішення.

$$\int_{25}^{49}\frac{\sqrt{x}dx}{x-6}=\left|\begin{matrix} t=\sqrt{x} & t^2=x \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} & \end{matrix}\right|=\int_{25}^{49}\frac{2x}{x-6}\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2\int_5^7\frac{t^2dt}{t^2-6}=2\left(\int_5^7\frac{t^2-6}{t^2-6}dt+\right.$$

$$\left.+\int_5^7\frac{6dt}{t^2-6}\right)=2\left(\int_5^7 dt+6\int_5^7\frac{dt}{t^2-6}\right)=2\left(t\Big|_5^7+\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}}\right|\Bigg|_5^7\right)=$$

$$=2\left((7-5)+\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}\right|-\ln\left|\frac{5-\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}\right|\right)=4+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}\right|-\ln\left|\frac{5-\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}\right|$$

Приклад 2.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos x\ln(\sin x)dx$$

Рішення.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos x\ln(\sin x)dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\ln(\sin x)d(\sin x)=\int_{\sqrt{3}/2}^{1}\ln t dt=t\ln t\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1}-\int_{\sqrt{3}/2}^{1}dt=$$

$$=t\ln t\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1}-t\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1}=\ln 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Обговорення з класом, чому заміна спрощує обчислення.

4. Проєктна робота в групах (30 хв)

Студенти поділяються на 4 групи. Кожна отримує міні-проєкт (задачу прикладного змісту):

Група 1. Механіка

Обчислити момент інерції стержня довжиною L=2 м з лінійно змінною густиною ρ(x)=1+x

Обчислити момент інерції стержня довжиною L=2 м з лінійно змінною густиною ρ(x)=1+x відносно осі, що проходить через його кінець.

$$I=\int_0^L x^2\rho(x)dx$$

Обчислити роботу сили $F(x)=xe^x$ при переміщенні матеріальної точки від 0 до 1.

Група 2. Електротехніка

Обчислити заряд, що пройшов крізь провідник

$$Q = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

Знайти кількість тепла, що виділяється у провіднику при струмі $I(t)$=sin$t$, опір R=2, час від 0 до π:

$$Q = R\int_0^{\pi} I^2(t) dt$$

Обчислити енергію, накопичену в котушці індуктивності L=1, якщо струм змінюється за законом $I(t)=t$, на інтервалі [0,2]:

$$W = \frac{L}{2}\int_0^2 \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 dt$$

Група 3. Теплотехніка

Обчислити роботу газу при $p(v) = \frac{1}{1+v^2}$11, v∈[0,1].

Газ розширюється за законом $p(v)$=e^{-v}, знайти роботу при збільшенні об’єму від 0 до 2:

$$A = \int_0^2 e^{-v} dv$$

Обчислити роботу при ізотермічному процесі, якщо $p(v) = \frac{1}{v}$, об’єм змінюється від 1 до 3:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{v} dv$$

Група 4. Будівельна механіка

Обчислити площу арки $y = \sqrt{4 - x^2}$, x∈[0,2].

Знайти площу сегмента параболи y=4−x^2 на відрізку [−2,2].

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

Обчислити об’єм тіла обертання, утвореного обертанням кривої $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ навколо осі Ox на відрізку [0,4].

$$V = \pi\int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right)^2 dx$$

5. Презентація результатів (15 хв)

Кожна група коротко презентує розв’язання на дошці або у вигляді слайду.

Викладач уточнює, підсумовує, демонструє правильний підхід.

6. Підсумок та рефлексія (5 хв)

Обговорення: "Де ще ви зустрінете інтеграли в інженерних розрахунках?"

Підкреслюється значення методу заміни змінної для розв’язування практичних задач.

5. Домашнє завдання

Обчислити інтеграли із заміною змінної.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3sinsin\,x}$

B. $\int_2^5 \frac{3x^4+9x^3+5x^2+7x+4}{(x^2+x-8)(-x+9)}dx$

Скласти власний приклад інженерної задачі, що приводить до такого інтеграла.

Додаток Є.

Метод вичерпання полягає в наближенні криволінійної фігури (наприклад, круга або параболи) послідовністю вписаних і описаних многокутників або тіл, площа (чи об'єм) яких обчислюється точно. Ідея полягає в тому, що чим більше сторін у вписаному або описаному многокутнику, тим ближче його площа до площі самої фігури.

Фактично, при наближенні знизу і зверху фігура "вичерпується" зсередини (вписані фігури) або охоплюється зовні (описані фігури), і для обох випадків обчислюється площа.

Коли число сторін вписаних/описаних многокутників прямує до нескінченності, їх площа/об'єм прямує до площі/об'єму фігури з криволінійними межами.

Евдокс своєю чергою застосовував логічний доказ від супротивного (редукцію до абсурду), щоб показати, що різниця між площею фігури й площею вписаного многокутника може бути меншою за будь-яке задане число (аналог сучасної границі ε).

Щоб обчислити площу круга, Евдокс (а згодом Архімед) вписував у нього правильні многокутники (наприклад, шестикутник, дванадцятикутник, 24-кутник і т.д.) і знаходив їх площу. Зі збільшенням кількості сторін площа многокутника ставала дедалі ближчою до площі круга.

У Стародавньому Китаї (у працях Лю Хуея та інших) також застосовували аналогічні ідеї для наближеного обчислення площ і об'ємів. Наприклад, обчислення площі круга через послідовне вписування багатокутників нагадує метод вичерпування [2,9].

В Індійській математичній традиції (наприклад, у працях Бхаскари II, XII ст.) з'являлися перші натяки на нескінченні ряди та обчислення площ під кривими, що теж свідчить про зародження інтегральної інтуїції.

У середньовічний період, особливо в Європі, математичні знання значною мірою зберігалися та передавалися завдяки працям арабських та індійських учених. Арабська наука відіграла роль моста між античною математикою та математикою Нового часу.

Видатні арабські математики, такі як Аль-Хорезмі, Ібн аль-Хайсам (Альхазен), Омар Хайям, досліджували геометричні задачі, що потребували обчислення площ і об’ємів. Ібн аль-Хайсам, зокрема, аналізував суму степенів натуральних чисел – проблему, тісно пов’язану з інтегруванням степеневих функцій. У зазначений період продовжували вдосконалювати методи, подібні до методу вичерпування. Деякі з них мали ознаки переходу до загальніших підходів, хоча й не досягли формалізму, притаманного пізнішим епохам [3].

У середньовічній Європі математичні дослідження були обмежені через загальне домінування схоластичної філософії. Проте в період пізнього Середньовіччя, з розвитком університетів та перекладом праць античних і арабських вчених латинською мовою, відновився інтерес до математичних задач, що і створило передумови для математичного відродження в епоху Відродження.

Отже, хоча в давні часи не існувало формального апарату інтегралів, прикладні задачі з геометрії та астрономії призвели до створення методів, які пізніше стали основою інтегрального числення. Середньовіччя стало перехідним етапом, під час якого античні ідеї інтегрування зберігалися, переосмислювалися й готували ґрунт для подальшого прориву в XVII столітті, коли виникли основи математичного аналізу.

Для вирішення задач про обчислення квадратури у XVII ст. низка математиків запропонувала декілька способів, які сформували основу для появи інтегрального числення. Так, Н. Ферма застосовував прийоми нескінченних підстановок і алгебри, щоб обчислювати площі під кривими (квадрування) і знаходити екстремуми. Барроу висунув ідею щодо зв’язку між площею під кривою і похідною. Це стало першим кроком до фундаментальної теореми аналізу [2].

Основний вклад в появу та розвиток інтегрального числення зробили Ньютон і Лейбніц в кінці XVII – на початку XVIII ст. Незалежно один від одного Ісаак Ньютон і Готфрід Лейбніц формалізували основні ідеї інтегрального числення.

Головна заслуга Ньютона полягає у тому, що він чітко усвідомив і математично довів фундаментальний зв’язок між диференціюванням та інтегруванням, що стало підгрунттям усього сучасного аналізу. Його праця перетворила інтегрування з набору окремих прийомів для обчислення площ на потужну і систематичну галузь математики [2].

Ключовим досягненням Ньютона є формулювання та доведення основної теореми аналізу, яка сьогодні відома як формула Ньютона-Лейбніца. Ця теорема встановлює, що інтегрування та диференціювання є взаємно оберненими операціями.

Простими словами, теорема стверджує дві речі:

1. Щоб знайти площу під кривою (визначений інтеграл), можна знайти первісну функції (антипохідну) і обчислити різницю її значень на межах інтегрування.
2. Похідна від інтеграла функції зі змінною верхньою межею дорівнює самій цій функції.

Якщо f неперервна на $[a; b]$ і визначена $F(x) = \int_a^x \quad f(t)dt$, то $F'(x) = f(x)$

Це відкриття кардинально спростило обчислення площ і об’ємів, які до того вимагали складних і громіздких геометричних методів.

Ньютон розробив власне числення, яке він назвав "методом флюксій". У його термінології будь-яка змінна величина (наприклад, відстань, площа, об’єм) розглядалася як флюента (від лат. fluens – "текуча"). Швидкість зміни цієї величини він називав флюксією (по суті, похідною) [2].

У рамках цього методу задача інтегрування полягала у зворотньому: маючи флюксію (швидкість зміни), знайти флюенту (саму величину). Наприклад, якщо відома швидкість руху тіла в кожен момент часу (флюксія), то інтегрування дозволяє знайти пройдений шлях (флюенту). Такий підхід, що спирався на інтуїтивні фізичні уявлення про рух, виявився надзвичайно плідним.

Ще одним потужним інструментом, який Ньютон активно застосовував для інтегрування, було розкладання функцій у нескінченні степеневі ряди. Він виявив, що багато складних функцій можна представити у вигляді суми нескінченного числа простих степеневих членів.

Перевага цього методу полягала в тому, що інтегрувати степеневий ряд було значно простіше, ніж вихідну функцію. Ньютон розробив техніку почленного інтегрування таких рядів, що дозволило йому знаходити інтеграли від функцій, які не інтегрувалися в елементарних функціях. Наприклад, він зміг обчислити інтеграл від $\frac{sin sin\,(x)}{x}$, розклавши синус у ряд.

Незалежно від Ньютона розвитком інтегрального числення також займався Ґ. В. Лейбніц. Він створив універсальну та надзвичайно зручну систему позначень і формалізації методів, що зробило математичний аналіз доступним для широкого кола науковців і прискорило його розвиток у континентальній Європі. Якщо Ньютон розглядав числення через призму фізики (швидкості та руху), то Лейбніц підходив до нього з більш геометричної та формальної точки зору.

Найбільш видимим і довговічним внеском Лейбніца є його система нотації, яка використовується і сьогодні. Саме Лейбніц ввів знак інтеграла ∫. Він утворив його від першої літери слова summa (сума), оскільки розглядав інтеграл як суму нескінченно малих площ (прямокутників) під кривою. Він також запровадив позначення dx для нескінченно малого приросту (диференціала) змінної x. Запис $\int \quad ydx$ чітко показував, що інтегрування є операцією підсумовування добутків значення функції y на нескінченно малі відрізки осі dx. [2]

Ця система позначень виявилася набагато гнучкішою та зручнішою, ніж ньютонівський "метод флюксій", що значною мірою сприяло швидшому поширенню та розвитку аналізу в роботах математиків на континенті, таких як брати Бернуллі та Ейлер.

Лейбніц, незалежно від Ньютона, усвідомив і чітко сформулював зворотний зв'язок між диференціюванням та інтегруванням. Він зрозумів, що задача обчислення площі під кривою (інтегрування) є оберненою до задачі знаходження дотичної (диференціювання). Цей фундаментальний зв'язок сьогодні відомий як формула Ньютона-Лейбніца [2,9]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

де $F(x)$ є первісною для $f(x)$.

На відміну від Ньютона, який не поспішав з публікаціями, Лейбніц опублікував свої результати раніше. Його перша праця з диференціального числення вийшла у 1684 році, а з інтегрального – у 1686 році. Це забезпечило йому пріоритет у поширенні нових ідей та закріпило його термінологію та позначення в науковому світі [2,9].

У XVIII столітті відбулась систематизація технік обчислення. Інтегрування стало "ремеслом": з'явилися численні прийоми (підстановка, частинне інтегрування, дробове розкладання, редукційні формули), що використовувалися для розв'язування диференціальних рівнянь, теоретичної механіки й фізики.

Леонард Ейлер перетворив інтегральне числення, яке до нього було набором геніальних, але подекуди розрізнених методів, на струнку, логічну та універсальну систему. Його праці стали основою викладання аналізу на століття вперед.

Ейлер написав фундаментальну трьохтомну працю "Основи інтегрального числення" (1768–1770). У цих книгах він зібрав, упорядкував і розвинув практично всі відомі на той час методи інтегрування. Він перетворив числення на мову, якою можна було описати фізичний світ. Ейлер розробив безліч нових методів для взяття інтегралів, зокрема для раціональних дробів, і ввів поняття інтегруючого множника для диференціальних рівнянь [9].

Також він відкрив і дослідив цілий клас невласних інтегралів, які не виражалися через елементарні функції. Сьогодні вони відомі як Бета-функція та Гамма-функція. Ці "Ейлерові інтеграли" виявилися надзвичайно важливими у теорії ймовірностей, статистиці та інженерії.

Ейлер також заклав основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, розробивши методи розв’язання рівнянь першого та другого порядків, зокрема лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Це дозволило застосовувати інтегральне числення для розв’язання величезної кількості задач фізики та механіки.

Також він першим почав систематично розв’язувати задачі на знаходження екстремумів (максимумів та мінімумів) функціоналів, тобто величин, що залежать від цілої функції, а не від одного числа. Він вивів ключове рівняння Ейлера, яке є необхідною умовою екстремуму.

Ж.-Л. Лагранж прагнув звести всю механіку та математичний аналіз до загальних алгебраїчних формул, звільнивши їх від геометричних міркувань.

Лагранж надав варіаційному численню досконалої форми. Він розробив строгий аналітичний апарат, заснований на понятті "варіації" (позначається символом δ), що дозволило перетворити варіаційні задачі на системне розв’язання диференціальних рівнянь. Спільно виведене ними рівняння сьогодні носить назву рівняння Ейлера-Лагранжа.

У своїй праці "Аналітична механіка" (1788) Лагранж показав, що рух будь-якої механічної системи можна описати за допомогою варіаційних принципів, таких як принцип найменшої дії. Він продемонстрував, що складні задачі механіки зводяться до розв’язання рівнянь Ейлера-Лагранжа. Таким чином інтегральне та варіаційне числення стали центральними інструментами в аналітичному підході до рішення практичних задач [2].

Таким чином, Лагранж надав інтегральному численні аналітичної строгості та створив на його основі нові, ще потужніші розділи математики, зокрема варіаційне числення та аналітичну механіку.

В XIX столітті продовжилась формалізація інтегрального числення. Відбувається перехід від інтуїтивного до строгого, формального розуміння математичного аналізу.

О.-Л. Коші здійснив революцію, поширивши ідеї диференціювання та інтегрування з дійсної осі на комплексну площину. Це відкрило абсолютно нову, потужну галузь – теорію функцій комплексної змінної (комплексний аналіз).

Коші визначив, що таке інтеграл від функції комплексної змінної не на відрізку, а вздовж кривої (контуру) на комплексній площині. Інтегральна теорема Коші є основою комплексного аналізу. Теорема стверджує, що якщо функція є аналітичною (диференційовною в комплексному сенсі) всередині деякої замкненої області, то її інтеграл вздовж межі цієї області дорівнює нулю [2].

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Інтегральна формула Коші показує, що значення аналітичної функції в будь-якій точці всередині замкненого контуру повністю визначається її значеннями на самому контурі. Це дозволяє обчислювати складні інтеграли та розкладати функції в ряди.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Робота Коші дозволила обчислювати багато "важких" дійсних інтегралів за допомогою елегантних методів комплексного аналізу, зокрема через теорію лишків, яка є прямим наслідком його теорем.

Науковець Б. Ріман звернув увагу на логічні прогалини в основах аналізу. До нього поняття інтеграла як "площі під кривою" було інтуїтивним, але не мало чіткого математичного означення, яке б працювало для широкого класу функцій, зокрема для розривних. У 1854 році Ріман дав перше строге означення визначеного інтеграла, яке сьогодні є класичним і вивчається в усіх університетських курсах аналізу [2].

Його основна ідея полягає в наступному. Відрізок інтегрування $[a; b]$ розбивається на багато маленьких підвідрізків. На кожному підвідрізку обирається довільна точка, і обчислюється значення функції в цій точці. Будуються прямокутники, основами яких є підвідрізки, а висотами – обчислені значення функції. Сума площ цих прямокутників називається інтегральною сумою.

Інтеграл визначається як границя цієї інтегральної суми, коли довжина найбільшого підвідрізка прямує до нуля.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Означення Рімана дозволило чітко встановити, які функції можна інтегрувати, а які – ні. Наприклад, він показав, що будь-яка неперервна функція є інтегровною. Він також дослідив умови інтегровності для функцій з розривами.

Додаток Ж. Огляд цифрових інструментів для викладання інтегрального числення.

Розглянемо більш детально основні графічні та цифрові інструменти.

Інтерактивні онлайн дошки є засобом для організації дистанційного та змішаного навчання у режимі реального часу з великою кількістю учасників. У процесі навчання математики онлайн-дошка також грає чималу роль і є засобом: оцінки психологічного стану на будь-якому етапі уроку математики (дошка настроїв); візуалізації математичної інформації; навчання навичкам співробітництва; створення кластерів, опорних конспектів; стінгазет, плакатів з математики тощо.

Використання інтерактивних дошок у викладанні інтегрального числення дозволяє поєднати традиційний підхід до пояснення матеріалу (побудова графіків, розв’язання прикладів, покрокове виведення формул) із можливостями цифрових технологій, такими як спільна робота у реальному часі, інтеграція з програмними пакетами та мультимедійний супровід.

Викладач може наочно пояснити геометричний зміст визначеного інтеграла як площі під кривою, будуючи графіки у процесі лекції. Онлайн-дошка дозволяє демонструвати обчислення в режимі реального часу, що наближає формат занять до традиційної роботи з класичною дошкою.

Студенти можуть взаємодіяти з дошкою, пропонуючи власні рішення, доповнюючи побудови, змінюючи межі інтегрування тощо, що сприяє активізації навчального процесу та розвитку колаборативних навичок.

Наведемо основні приклади платформ з реалізацією он-лайн дошок.

Padlet – це он-лайн платформа для створення інтерактивних "дошок" (*collaborative boards*), де користувачі можуть розміщувати текст, зображення, посилання, відео та інші мультимедійні матеріали. На відміну від класичних інтерактивних дошок (наприклад, Miro), Padlet орієнтований не стільки на синхронне "малювання" чи обчислення, скільки на організацію навчального простору для спільного обміну ідеями, результатами та навчальними матеріалами (рис.2.2).

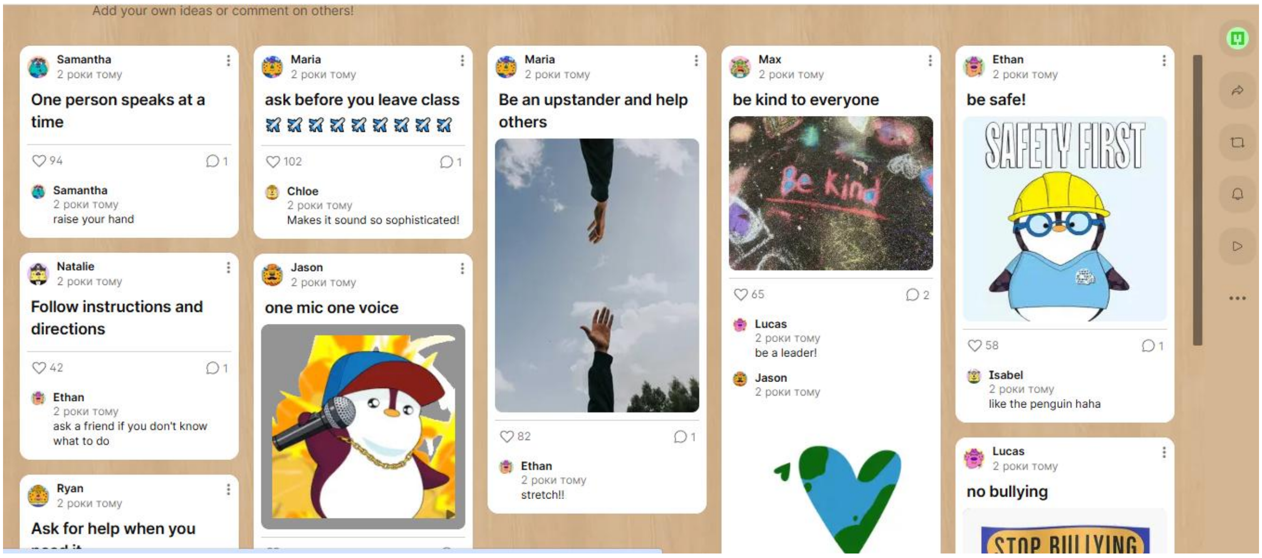


Рис.2.2

Padlet дозволяє викладачу створити "стіну" з прикладами задач на обчислення інтегралів, теоретичними довідками, графіками та інтерактивними симуляціями. На заняттях учні та студенти отримують доступ до дошки, додають власні розв’язання задач (у вигляді рукописних нотаток, фото, PDF чи відео пояснень).

Padlet дозволяє формувати групові "портфоліо", де студенти можуть публікувати різні способи розв’язання однієї задачі з інтегралами та обговорювати їх.

Також Padlet дозволяє викладачу отримувати зворотній зв’язок від своїх учнів, організувавши спеціальний розділ, де студенти можуть записувати свої питання, ідеї тощо.

Одним з варіантів використання дошки може бути розміщення на ній графіків функцій і завдання "визначте площу під кривою". Студенти додають свої варіанти розв’язань у вигляді формул чи малюнків.

Дошку можна використовувати для пояснення методів чисельного інтегрування. Для цього викладач створює інтерактивну дошку, де студенти публікують приклади використання методу трапецій, методу прямокутників тощо, порівнюючи точність результатів.

У Padlet можна створити колекцію міждисциплінарних завдань (обчислення роботи сили, об’ємів тіл обертання, середніх значень функцій), які студенти аналізують і пропонують власні розв’язання. Кожен студент додає скріншоти побудов із GeoGebra чи Python (Matplotlib), що показують інтегральні області. У результаті формується інтерактивний каталог ідей.

Перевагами Padlet є простота використання та доступність у браузері або мобільному додатку, підтримка різних форматів контенту (текст, графіка, відео, інтерактивні ресурси, можливість асинхронної та синхронної роботи.

Основним недоліком даного сервісу є відсутність повноцінних інструментів для побудови графіків чи обчислень (для цього потрібно інтегрувати сторонні ресурси, наприклад GeoGebra або WolframAlpha) та обмежена кількість дошок у безкоштовній версії.

Використання онлайн-дошок у процесі навчання математики сприяє збільшенню можливостей процесу навчання та підвищенню ефективності як індивідуальної, так і колективної діяльності учнів.

Більш складними інструментами є спеціалізовані математичні платформи. Серед них окремо виділяються GeoGebra та Desmos.

GeoGebra – це безкоштовне інтерактивне програмне забезпечення для вивчення та викладання математики, яке поєднує геометрію, алгебру, таблиці, графіку, статистику й математичний аналіз в єдиній системі. Завдяки своїй функціональності та доступності GeoGebra широко використовується у школах і закладах вищої освіти. При використання GeoGebra для викладання інтегрального числення важливим є поєднання алгебраїчного й геометричного підходів (рис.2.3).

Платформа дозволяє будувати графіки функцій і динамічно виділяти площі під кривими, що дає наочне уявлення про визначений інтеграл. У GeoGebra можна реалізувати наближення інтегралів за допомогою сум Рімана, методу трапецій чи Монте-Карло, що формує інтуїтивне розуміння граничних процесів. Також інструменти 3D-графіки дають змогу створювати моделі тіл, утворених обертанням кривих, та обчислювати їх об’єми через інтеграли. У версії GeoGebra 3D можна візуалізувати поверхні , виділяти інтегральні області та демонструвати відповідні об’єми.

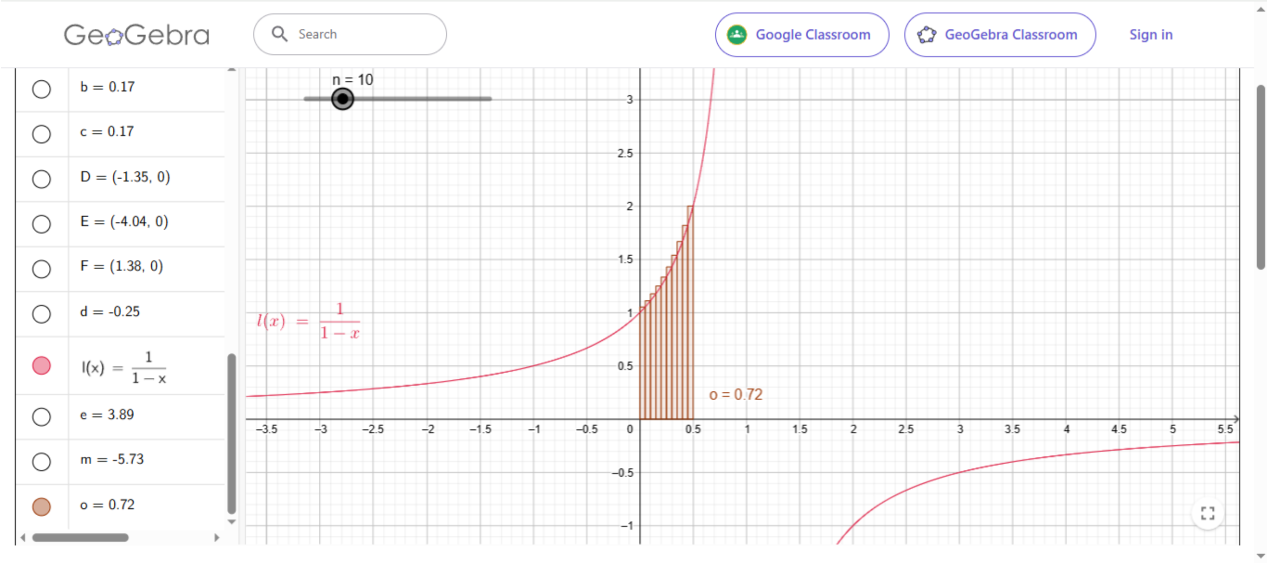


Рис.2.3

За допомогою GeoGebra викладач може побудувати графік функції, виділити інтегральну область і продемонструвати залежність площі від меж інтегрування. Використання динамічних інструментів GeoGebra дозволяє створити модель, де при збільшенні кількості прямокутників у сумі Рімана результат поступово наближається до точного значення інтеграла.

Також GeoGebra дозволяє створювати прикладні задачі, що дозволяє зацікавити учнів темою "Інтегральне числення".

GeoGebra повністю безкоштовна та доступна онлайн (браузерна версія) і як мобільний застосунок. Вона зручна для візуалізації як простих, так і складних інтегральних обчислень, дає можливість студентам інтерактивно взаємодіяти з моделями.

Основним обмеження даного програмного продукту є відсутність повноцінних символьних обчислень на рівні спеціалізованих CAS-систем (наприклад, Mathematica чи Maple), у деяких випадках потребує базових навичок роботи з інтерфейсом.

Desmos – це безкоштовний онлайн-графічний калькулятор, орієнтований на інтерактивну візуалізацію математичних функцій. Він має простий інтерфейс, працює у веббраузері та як мобільний застосунок, не потребує спеціального обладнання чи складної інсталяції. У викладанні інтегрального числення Desmos виконує роль інтуїтивно зрозумілого інструмента для динамічного моделювання та аналізу функцій і їхніх інтегралів.

Desmos дозволяє підсвічувати площу під кривою між заданими межами, що формує наочне розуміння інтеграла як "накопиченої площі". Завдяки повзункам можна змінювати параметри та межі інтеграла в реальному часі, спостерігаючи, як змінюється інтегральна площа (рис.2.4).

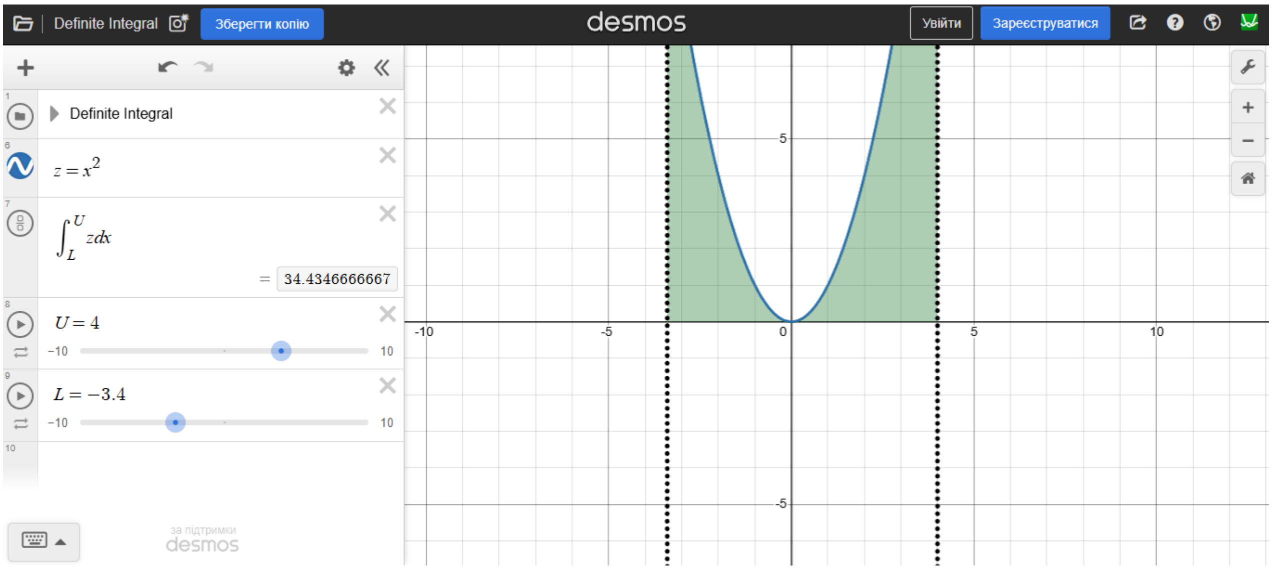


Рис.2.4

Desmos викладач використовує для пояснення сум Рімана. Для цього він може продемонструвати побудову прямокутників (лівосторонніх, правосторонніх або середніх) і показати, як при збільшенні кількості підінтервалів наближення прямує до точного значення інтеграла. Також Desmos можна використовувати для знаходження площі між двома кривими чи обчислення роботи змінної сили через графічну інтерпретацію. Крім того, платформа Desmos Classroom (Activity Builder) дозволяє викладачам створювати інтерактивні вправи, де студенти експериментують із графіками та інтегралами. Хоча Desmos не виконує символьне інтегрування, викладач може накладати похідну на функцію й показати зв'язок між інтегралом і первісною.

Desmos є повністю безкоштовним ресурсом, доступним онлайн і на мобільних пристроях, що робить його зручним інструментом для шкільної освіти з врахуванням її недофінансування. Платформа має дуже простий інтерфейс, не потребує спеціальної підготовки, підтримує колективну роботу через Desmos Classroom, та має високу швидкодію.

Як і в GeoGebra, в Desmos відсутнє повноцінне символьне інтегрування, обмежена робота з 3D-графікою, а для складних багатокрокових обчислень система вимагає поєднання з іншими інструментами.

Розвиток технологій призвів до впровадження в педагогічну практику різних інструментів для симуляцій.

PhET Interactive Simulations – це освітня платформа, створена в Університеті Колорадо (Boulder), що надає безкоштовні інтерактивні симуляції з фізики, математики, хімії та інших наук. Основна мета ресурсу полягає в тому, щоб забезпечити наочне та динамічне пояснення складних понять через моделювання та експерименти в інтерактивному середовищі.

PhET не є вузькоспеціалізованим інструментом для символьних чи чисельних обчислень (як, наприклад, GeoGebra). Його перевага полягає у створенні інтуїтивних візуальних моделей, які допомагають студентам зрозуміти інтеграл як площу під кривою, дослідити процес накопичення величини (наприклад, швидкість → шлях, густина → маса, сила → робота), спостерігати зв’язок між границею суми Рімана та інтегралом. Таким чином, застосування даного інструменту дозволить учням та студентам будувати уявлення про прикладні задачі інтегрального числення в природничих науках.

“Area Model” (Модель площі) студенти можуть використовувати, щоб інтерактивно змінювати функцію $f(x)$ і бачити, як площа під кривою змінюється при русі меж інтегрування.

“Calculus Grapher” дозволяє дослідити зв’язок між похідною та інтегралом, зокрема поняття "антипохідної".

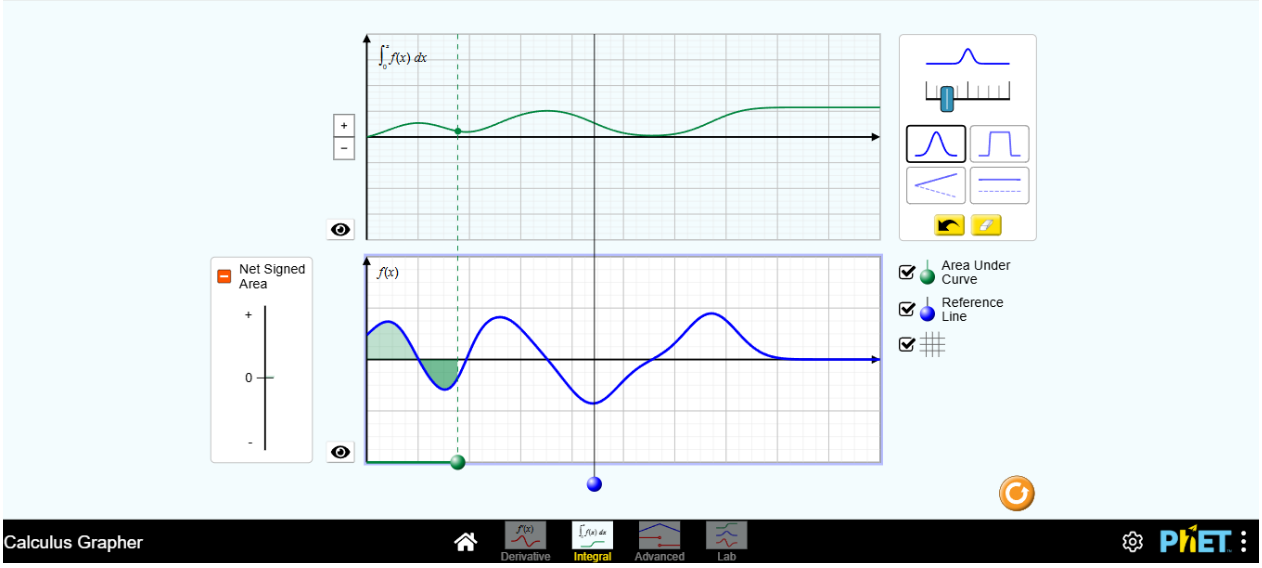


Рис.2.5

Також для викладання теми "Інтегральне числення" є можливість використовувати фізичні симуляції. Наприклад, при моделюванні руху об’єктів студенти та учні спостерігають, як інтегрування швидкості дає шлях, або як інтегрування сили за відстанню дає роботу.

Основними перевагами платформи є безкоштовність і відкритий доступ (онлайн і офлайн-версії), візуалізація та ігрова форма, що полегшує розуміння складних абстрактних понять. Платформа – інтерактивна, тобто студент сам експериментує з функціями, межами інтеграції та параметрами.

Однак, система має обмежений набір симуляцій, спеціально пов’язаних із інтегралами (більшість орієнтовані на прикладні дисципліни). В ній відсутні символьні і чисельні обчислення, отже, вона має меншу придатність для поглибленого аналізу, ніж у професійних математичних систем.