

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математика

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

**Застосування теорії нелінійних звичайних диференціальних рівнянь
другого порядку до моделювання малих коливань**

Виконав: студент 2 курсу магістратури
Групи М-М-2
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Кузьміч Олег Васильович

Керівник: доктор технічних наук, професор

Бичков Олексій Сергійович

Рецензент: доктор технічних наук, професор,
директор ННІ автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки Національного
університету водного господарства та
природокористування

Мартинюк Петро Миколайович

Рівне 2024 року

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП..... | 3 |
| РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ..... | 5 |
| 1.1. Лінійна система без тертя (гармонічний осцилятор)..... | 5 |
| 1.2. Поняття про фазову площину. Подання сукупності рухів гармонійного осцилятора на фазовій площині..... | 8 |
| 1.3. Стійкість стану рівноваги | 17 |
| РОЗДІЛ 2. КОНСЕРВАТИВНІ НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ..... | 43 |
| 2.1. Загальні поняття та означення..... | 43 |
| 2.2. Найпростіша консервативна система..... | 44 |
| 2.3. Дослідження фазової площини поблизу станів рівноваги..... | 50 |
| 2.4. Дослідження характеру рухів на всій фазовій площині..... | 60 |
| РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ... .. | 69 |
| 3.1. Приклади коливних систем які є математичними моделями нелінійних коливань..... | 69 |
| 3.2. Дослідження нелінійних коливних систем методом розкладу в ряд за параметром нелінійності..... | 72 |
| ВИСНОВКИ..... | 78 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 79 |
| ДОДАТОК А..... | 81 |

ВСТУП

Актуальність теми. При дослідженні широкого кола процесів (механічних, фізичних, біологічних, економічних, хімічних тощо), явищ у різних галузях мають місце закономірності, що є коливаннями довільної природи, параметри яких змінюються з часом.

Математичними моделями такого роду в загальному випадку є нелінійні динамічні системи або нелінійні осцилятори. Такі моделі розкривають широкий діапазон важливих особливостей, які є фундаментальними для зображення та аналізу поведінки нелінійних систем, таких як регулярні та хаотичні рухи, атрактори та їх співіснування, регулярні та фрактальні межі басейну та локальні та глобальні біфуркації. Експерименти аналогового та цифрового моделювання виявили найбільш характерні типи поведінки, проте результатів самих експериментів недостатньо, що потребує глибинної теоретичної інтерпретації динамічних систем.

Розвиток таких сучасних напрямків наукових теоретичних досліджень, як квантова електроніка, фізика твердого тіла, астрофізика, біофізика та ін. суттєво розширили сферу застосування теорії нелінійних коливань. Розвиток інформаційних та програмних технологій. комп'ютерної техніки дозволяє формулювати і розв'язувати задачі, здатні описувати складну, в тому числі й хаотичну, поведінку.

Одним із відомих прикладів в теорії нелінійних коливань є рівняння Дуфінга, розв'язок якого у замкнутій формі отримати не вдається. З його допомогою описуються коливання математичного маятника при невеликих кутах відхилення, рухи частинки в потенціальному полі та інші системи з нерегулярними коливаннями. Крім того, з допомогою рівняння Дуфінга зручно вивчати такі ефекти коливань систем як ангармонічність, неізохронність та мультистабільність [8].

Метод якісного аналізу, методу малого параметру, застосування чисельного експерименту та інше дає можливість здійснювати глибокий та всебічний аналіз нелінійних динамічних систем типу нелінійного осцилятора

та використовувати отримані результати в практичних дослідженнях та освітній практиці.

Об'єкт дослідження. Математичні моделі нелінійних динамічних систем.

Предмет дослідження. Методи якісного аналізу моделей нелінійного осцилятора.

Мета роботи. З'ясувати суть та систематизувати методи якісного аналізу, можливості їх використання до дослідження математичних моделей нелінійних коливних процесів.

Завдання дослідження:

- ▶ виявити та опрацювати фахову літературу з теми магістерської роботи;
- ▶ узагальнити та систематизувати наявний теоретичний матеріал з теми;
- ▶ систематизувати інформацію про методологію якісного аналізу нелінійних динамічних систем та пошуку розв'язків відповідних задач ;
- ▶ підібрати комплекс вправ за вказаною методикою для практичного застосування в освітньому процесі;

Обсяг роботи. Робота складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

Апробація роботи. Результати дослідження доповідались на звітних науково-практичних конференціях співробітників, студентів та аспірантів РДГУ.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

1.1. Лінійна система без тертя (гармонічний осцилятор)

Ми розпочнемо наш розгляд із найпростішою автономною коливальною системою, рух якої описується лінійним диференціальним рівнянням виду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1)$$

і яку у фізиці називають гармонічним осцилятором. Прикладом такої системи є (за відповідних припущень), наприклад, тіло маси m , яке може здійснювати горизонтальні рухи вздовж стрижня під дією двох пружин (рис. 1.1).

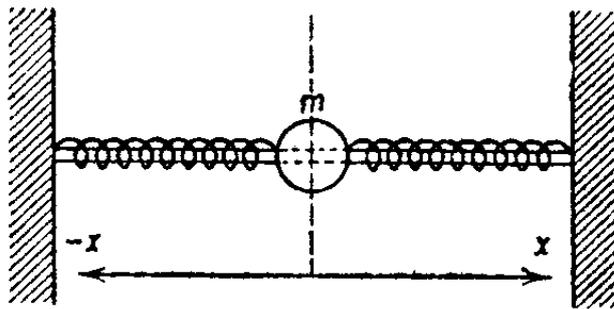


Рис. 1.1. Схема горизонтального руху вздовж стрижня під дією двох пружин.

Зробимо наступні спрощення, у відповідності до загальноприйнятої концепції математичного моделювання складних систем. Припустимо, по-перше, що сили, з якими діють пружини на тіло, пропорційні його зсуву x щодо положення рівноваги. Насправді це з певним ступенем точності виконується лише за досить малих зрушеннях (тільки за малих деформаціях пружина підпорядковується закону Гука). По-друге, ми будемо припускати, що система при русі не відчуває тертя (немає тертя ні об повітря, ні об стрижень, що підтримує, пружини не володіють внутрішнім тертям). Це друге припущення про відсутність тертя у системі, звичайно, ще з меншим ступенем точності виконується у реальних фізичних системах. При зроблених припущеннях рух такої системи відображається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

де k – позитивний коефіцієнт, залежний від пружності пружин. Припускаючи $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо рівняння гармонійного осцилятора (1.1) [11].

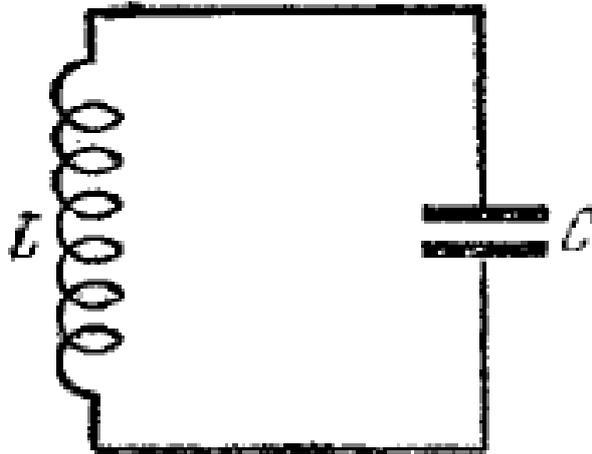


Рис.1.2. Приклад коливного контуру у вигляді електричної системи.

Прикладом електричної системи цього може бути коливальний контур, що складається з ємності C і самоіндукції L (рис. 1.2); такі контури ми будемо називати «томсонівськими». Щоб дійти до ситуації лінійної системи без тертя, ми маємо, звичайно, ідеалізувати властивості цього контуру. Перш за все треба припустити, що в контурі не відбувається втрат енергії, тобто відповідні провідники не мають опору, що в діелектриці енергія також не розсіюється і, нарешті, що немає випромінювання електромагнітної енергії. Ці припущення ніколи не здійснюються з достатньою точністю в реальних системах, про що свідчить хоча б той факт, що у будь-якому контурі завжди відбувається більш менш сильне, але принаймні помітне (якщо почекати досить довго) згасання коливань. Ідеалізуючи коливальний контур як систему без втрат енергії, ми вже не можемо передати жодну з найбільш типових характеристик будь-якої реальної системи згасання власних коливань; і в цьому сенсі припущення про відсутність втрат енергії є набагато більш далекосяжною ідеалізацією, ніж припущення про лінійність контуру, яке в реальних системах досить добре дотримується. Однак така ідеалізація дозволяє все ж таки досить задовільно відповісти на деякі основні питання теорії коливань, наприклад на питання про частоту і форму власних

коливань (звичайно, тільки в тих випадках, коли згасання коливань досить мало). Крім того, треба вважати, що ємність C конденсатора не залежить від його заряду, а індуктивність L котушки - від сили струму, що протікає через неї. При зроблених припущеннях електрична система також підпорядковується до рівняння виду (1.1); саме, якщо позначити заряд конденсатора через q , то отримаємо:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1.3)$$

Позначаючи $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, знову приходимо до рівняння гармонійного осцилятора (1.1).

Нагадаємо тепер характерні властивості рухів гармонійного осцилятора. Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.1), як відомо, має вигляд

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.4)$$

де A і B - постійні інтегрування, що визначаються початковими умовами. Якщо $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \quad \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t \quad (1.5)$$

Цей же розв'язок може бути записано у вигляді

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad \dot{x} = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha); \quad (1.6)$$

де

$$\left. \begin{aligned} K + \sqrt{A^2 + B^2} &= + \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \quad i \quad tg \alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \\ \left(\cos \alpha = \frac{x_0}{K}, \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 K} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Ми бачимо, що залежність усунення чи заряду від часу (осцилограму коливань) можна зобразити у вигляді добре відомої «синусоїди». Для характеристики такого «синусоїдального» або гармонійного коливання потрібно задати три величини: K - максимальне відхилення, або амплітуду коливань, ω_0 - кількість коливань в 2π секунд, або кутову частоту, α - так звану початкову фазу коливань, яка грає дуже істотну роль, коли ми маємо справу одразу з кількома процесами [2].

Справді, оскільки вибір фази коливання цілком визначає початковий момент відліку часу, її не можна вибирати довільно, якщо початковий момент відліку часу вже заданий якимось іншим процесом. Але фаза коливань не відіграє будь-якої фізичної ролі, коли ми маємо справу тільки з одним «ізолюваним» процесом. Отже, гармонійний осцилятор здійснює періодичні синусоїдальні (гармонічні) руху (звідси його назва). Коливальний рух не виникає лише у разі $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$, тобто коли осцилятор в початковий момент перебуває в стані рівноваги; Якщо він продовжує і далі в ньому залишатися. Амплітуда і фаза гармонійного коливального руху визначаються початковими умовами. Кутова частота, а отже, і період процесу не залежать від початкових умов і визначаються параметрами коливальної системи.

Формули (1.5) або (1.6) і (1.7) дають точну кількісну відповідь на питання, як відбуваються рухи в системі, що визначається рівнянням (1.1). Вони дозволяють визначати «майбутнє з сьогодні», тобто дозволяють обчислювати значення x і \dot{x} для кожного моменту часу t , якщо вони відомі для моменту часу $t = 0$ [20].

1.2. Поняття про фазову площину. Подання сукупності рухів гармонійного осцилятора на фазовій площині

Фазова площина. Покладемо $\dot{x} = y$ і вивчатимемо рух гармонійного осцилятора, зображуючи цей рух на площині x, y де x і y — прямокутні декартові координати. Кожному стану нашої системи, кожній парі значень координати x і швидкості y відповідає точка на площині x, y . Назад, кожній точці на площині x, y відповідає одне і тільки один стан системи. Площина x, y називається площини станів або, інакше, фазової площини; вона зображує сукупність всіх можливих станів нашої системи. Кожному новому стану системи відповідають нові і нові точки фазової площини. Таким чином, зміні станів системи можна підпорядкувати рух деякої точки на фазовій площині, яка носить назву «зображуючої» або «точки, що представляє». Траєкторія

такої зображувальної точки називається фазовою траєкторією; її не слід змішувати із дійсною траєкторією руху. Швидкість такої точки, що зображає, називається фазовою швидкістю; Знову ж таки її не слід змішувати з дійсною швидкістю. Цілою фазовою траєкторією ми називатимемо ту криву, яку описує зображувальна точка за весь час свого руху (від $t = -\infty$ до $t = +\infty$).

Метод відображення стану системи з π ступенями свободи завданням Однієї точки в просторі 2π вимірювань вже давно застосовується у фізиці. Цей 2π -мірний простір станів (фаз) системи отримав назву фазового простору. Звідси терміни «фазовий простір» і, зокрема, «фазова площина» перейшли до теорії коливань [1].

Для цілей вивчення динаміки коливальних систем фазовий простір був вперше застосований Леоте [15], який досліджував роботу деякого пристрою автоматичного регулювання шляхом побудови у фазовому просторі цього пристрою інтегральних кривих та граничних циклів (не даючи їм цієї назви; він, мабуть, не був знайомий з опублікованою дещо раніше роботою Пуанкаре [7], в якій граничні цикли вперше з'явилися в математиці). На жаль, чудові роботи Леоте були згодом майже повністю забуті.

Знаючи розв'язок диференціального рівняння гармонійного осцилятора (1.1), неважко знайти рівняння траєкторії фазової площині. Саме, рівняння

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha) ; y = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.6)$$

є параметричними рівняннями фазової траєкторії; виключаючи з цих рівнянь t , знайдемо координатне рівняння траєкторії:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega_0^2} = 1 \quad (1.8)$$

Неважко побачити, що це рівняння сімейства подібних (з постійним ставленням осей) еліпсів, причому через кожен точку площини проходить один і лише один еліпс, що відповідає певному значенню K , тобто певному класу початкових умов, тим самим початковим значенням повної енергії системи. Вся площина x, y у цьому випадку заповнена вкладеними один в

одного еліпсами, за винятком точки $x=0, y=0$; «Еліпс, що проходить» через цю точку, сам вироджується в точку (рис. 1.3).

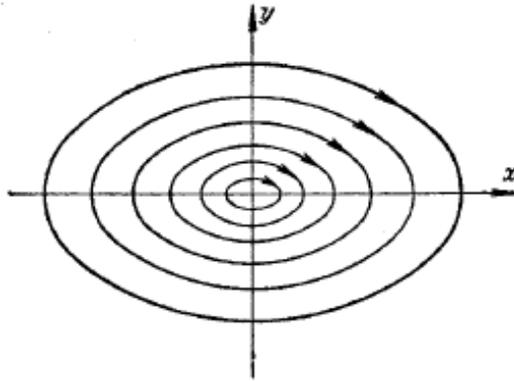


Рис. 1.3. Система еліпсів. Що вироджуються в точку.

Всі ці еліпси є траєкторію руху представляючої точки [5].

Подивимося, як рухатиметься зображувальна точка по якомусь із цих еліпсів. Легко бачити, що при вибраному нами напрямку осей координат рух, що представляє точки буде завжди, по будь-якій траєкторії, відбуватися за годинниковою стрілкою, так як у верхній півплощині $\dot{x} = y > 0$ і x збільшується з часом, а в нижній півплощині $\dot{x} = y < 0$ і, отже, x зменшується з часом.

Для того, щоб знайти величину фазової швидкості, введемо, як це зазвичай робиться в механіці, фазовий радіус-вектор

$$r = ix + jy$$

У такому разі фазова швидкість зобразиться у вигляді:

$$v = \frac{dr}{dt} = i\dot{x} + j\dot{y}$$

або (1.6) у вигляді:

$$v = i\{-K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)\} + j\{-K\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)\} \quad (1.9)$$

Неважко побачити, що фазова швидкість, за винятком випадку $K=0$, ніколи не перетворюється на нуль, оскільки синус і косинус одночасно ніколи не перетворюються на нуль.

Ми досліджували характер фазової площини і виявили, що періодичним рухам, що відбуваються в системі, на фазовій площині відповідають замкнуті траєкторії представляючої точки в нашому випадку еліпси, по яких рухається

зображувальна точка з фазовою швидкістю, що не звертається в нуль (рис. 12), здійснюючи повний оборот в $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ одиниці часу. Стан рівноваги осцилятора відповідає на фазовій площині фазова траєкторія, що виродилася в точку.

Допустимо тепер, що нам не відомий характер рухів у системі, але якимось чином став відомий характер фазових траєкторій та величини фазових швидкостей. Чи можемо ми, користуючись цим знанням, робити висловлювання щодо відображених цими кривими рухів? Як побачимо далі, загальний характер руху, якісні його риси, виявляються вже у характері фазових траєкторій. Фазова площина, розбита на траєкторії, дає доступний для огляду «портрет» динамічної системи; вона дає можливість відразу, одним поглядом охопити всю сукупність рухів, що можуть виникнути за всіляких початкових умов.

Ми отримали для розглянутого випадку гармонійного осцилятора картину фазової площині, виходячи з готового розв'язку (1.6) рівняння осцилятора. Можна, однак, не користуючись цим розв'язком безпосередньо з рівняння (1.1) вивести висновки про рух зображувальної точки на фазовій площині. Саме цей другий шлях і представляє особливий інтерес, оскільки він дозволяє вивести відомі висновки про характер руху без знання аналітичних виразів інтегралів вихідного рівняння і, отже, застосовується і в тих випадках, коли такі аналітичні вирази, подібні (1.6), не можуть бути знайдені [11].

Рівняння, що не містить часу. Щоб від початкового рівняння (1.1), не інтегруючи цього рівняння, безпосередньо перейти до картини на фазовій площині, надійдемо наступним чином. Замінімо вихідне рівняння другого порядку двома еквівалентними рівняннями першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \quad (1.10)$$

Ділячи одне з цих рівнянь на інше, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y} \quad (1.11)$$

Це рівняння визначає так звані інтегральні криві - криві, у кожній точці яких дотична має нахил (кутовий коефіцієнт $\frac{dy}{dx}$), що обчислюється за рівнянням (1.11). Ми бачимо, що, у той час як залежність x від t виражається диференціальним рівнянням другого порядку (1.1), залежність y від x виражається диференціальним рівнянням першого порядку. Проінтегрувавши рівняння (1.11), ми отримали б рівняння інтегральних кривих не в диференціальній, а кінцевій формі. У цьому, найпростішому випадку інтегральні криві, як неважко бачити, збігаються з фазовими траєкторіями. Однак надалі нам доведеться розрізнити інтегральні криві та фазові траєкторії, оскільки може статися, що одна інтегральна крива складається не з однієї, а з кількох фазових траєкторій [7].

Особливі точки. Центр. Рівняння (1.11) безпосередньо визначає V у кожній точці площини єдину дотичну до відповідної інтегральної кривої, за винятком точки $x = 0, y = 0$, де напрям дотичної стає невизначеним. Як відомо зі звичайної теорії диференціальних рівнянь, через ті точки, для яких дотримуються умови теореми Коші (у числі останніх є умова, що диференціальне рівняння дає певний напрямок дотичної до інтегральної кривої), проходить одна і тільки одна інтегральна крива; щодо точок, у яких напрям дотичної стає невизначеним і в яких, отже, умов теореми Коші не дотримуються, вже не можна стверджувати (на підставі цієї теореми), що через них проходить одна і лише одна інтегральна крива. Такі точки, у яких напрям дотичної невизначено, зветься особливих точок даного диференціального рівняння. Однак теорема Коші не дає права стверджувати, що через особливу точку проходить більше або менше однієї інтегральної кривої (тобто або жодної кривої або багато). Але для тих найпростіших спеціальних точок (особливих точок першого порядку), з якими нам доведеться головним чином стикатися, це зворотне твердження виявляється правильним. Саме, як ми переконаємося під час розгляду цих особливих

точок, через особливу точку першого порядку або проходить жодної, або проходить більше ніж інтегральна крива.

Диференціальне рівняння може мати, взагалі кажучи, багато особливих точок. У нашому випадку є єдина особлива точка $x = 0, y = 0$. Існують різні типи спеціальних точок, що розрізняються за характером поведінки інтегральних кривих поблизу цієї особливої точки. У цьому випадку через особливу точку не проходить жодна інтегральна крива. Така ізольована особлива точка, поблизу якої інтегральні криві являють собою замкнуті криві, які не мають особливостей, зокрема, наприклад, еліпси, «вкладені» один в одного і охоплюють особливу точку, називається центром. З іншими типами найпростіших спеціальних точок ми познайомимося під час розгляду подальших прикладів. Поки що обмежимося лише вказівкою, що оскільки різним типам інтегральних кривих відповідають різні типи рухів системи, класифікація спеціальних точок безпосередньо пов'язані з поведінкою системи поблизу особливої точки [16].

Ізокліни. Отже, рівняння (1.11) визначає поле дотичних фазової площині. Неважко усвідомити характер цього поля, якщо побудувати сімейство ізоклін, які в даному будуть просто прямими, що проходять через початок координат (рис. 1.4.).

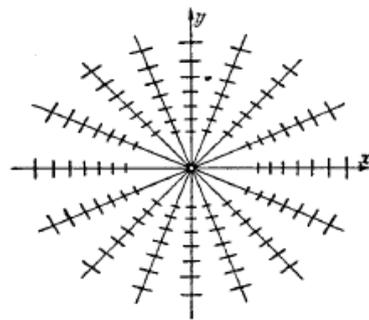


Рис. 1.4. Сімейство ізоклін, які є прямими

Справді, нехай ми шукаємо всі ті точки фазової площини, де нахил інтегральних кривих дорівнює $x = \left(\frac{dy}{dx} = x\right)$. Тоді згідно з (1.11) рівняння цієї ізокліни буде:

$$-\omega_0^2 \frac{x}{y} = x \quad \text{або} \quad y = \sigma x$$

де

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{x} \quad (1.12)$$

Неважко бачити (даючи σ різного значення при фіксованому ω_0^2) що досліджуване поле складається з лінійних елементів, симетрично розташованих щодо осей x і y , що поступово (зі зміною нахилу ізокліни σ) змінюють свій напрямок від горизонтального (вздовж осі y , де $x = 0$) до вертикального (вздовж осі x , де $x = \infty$).

Рівняння (1.11) не дає, однак, відповіді на питання про те, в яку сторону і з якою швидкістю рухатиметься зображувальна точка на фазовій площині. Рівняння (1.10) визначають фазову швидкість як за величиною, так і за напрямком; справді,

$$v = i\dot{x} + j\dot{y} = iy + j(-\omega_0^2 x) \quad (1.13)$$

Якщо взяти до уваги і напрям, то доцільно замість поля лінійних елементів (рис. 1.4.) розглядати векторне поле (рис. 1.4), яке характеризує не тільки напрямок дотичної до інтегральної кривої в даній точці, а й напрямок руху по фазовій траєкторії.

Як ми вже вказували, фазова швидкість $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$ перетворюється в нуль тільки на початку координат, тобто тільки в особливій точці.

Неважко, глянувши на рис. 13 і 14, переконатися, що метод ізоклін в даному випадку дозволяє відразу отримати відоме уявлення про характер траєкторій на фазовій площині. Звичайно, застосування методу ізоклін у найпростішому випадку, коли вихідне диференціальне рівняння (1.11) допускає поділ змінних і, отже, легко інтегрується, навряд чи представляє якісь переваги. Справді, інтегруючи рівняння

$$x dx + \frac{1}{\omega_0^2} y dy = 0$$

отримаємо:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C$$

або, вважаючи $2C = K^2$, знаходимо, як і слід очікувати, на фазовій площині, як і раніше, рівняння сімейства еліпсів:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2\omega_0^2} = 1$$

Не слід забувати, що ми його отримали зовсім іншим шляхом, не знаючи рішень диференціального рівняння (1.1). У тих же випадках, коли рівняння, подібне (1.11), не може бути проінтегровано, метод ізоклін дозволяє отримати досить точне уявлення про характер інтегральних кривих на фазовій площині, незважаючи на те, що аналітичний вираз цих інтегральних кривих не може бути знайдено. У цих складніших випадках застосування методу ізоклін, як ми побачимо надалі, може принести суттєву користь [4].

Стан рівноваги та періодичні рухи. Зробимо тепер зворотні висновки стосовно тих, які ми робили на початку цього параграфа, коли, знаючи рух, знаючи залежність x від t , шукали вид фазової площини. Подивимося, що можна сказати про характер руху, знаючи характер інтегральних кривих на фазовій площині і знаючи вираз для фазової швидкості.

По-перше, ми стверджуємо, що всі фазові траєкторії у нашому випадку (крім траєкторії $x = 0$, $y = 0$, яка виродилася в точку) відповідають періодичним рухам. Справді, всі ці траєкторії – еліпси, тобто замкнуті криві. Якщо наша зображувальна точка рухається замкненою кривою і якщо вона повертається через деякий час, здійснивши «обхід», в ту ж саму точку фазової площини, тобто має через деякий час те саме положення і ту ж саму швидкість, то подальший рух буде точно співпадати з попереднім, процес буде повторюватися.

Неважко бачити, що час повернення, або, інакше, період руху, є кінцевим. Справді, довжина нашого еліпса є кінцевою; з іншого боку, фазова швидкість при русі еліпсом ніде не наближається до нуля (оскільки вона дорівнює нулю тільки в початку координат, а наші еліпси не проходять через

початок координат). Тому зображуюча точка обходить весь еліпс у кінцевий час, тобто період процесу закінчений.

По-друге, ми стверджуємо, що траєкторія $x = 0$, $y = 0$, що виродилася, або, інакше, особлива точка $x = 0$, $y = 0$, відповідає стану рівноваги. Справді, фазова швидкість точки $x = 0$, $y = 0$ дорівнює нулю; зображуюча точка, що знаходиться у вихідний момент на початку координат, там і залишиться, якщо якісь випадкові відхилення і поштовхи не виведуть зображувальну точку з точки $x = 0$, $y = 0$.

Взагалі станам рівноваги відповідають такі точки фазової площини, для яких одночасно $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$. Це неважко зрозуміти із фізичних міркувань. Наприклад, для механічного випадку $\frac{dx}{dt} = 0$ говорить про те, що швидкість дорівнює нулю, а $\frac{dy}{dt} = 0$ вказує, що прискорення або, що байдуже, сила дорівнює нулю.

Взагалі, станам рівноваги динамічної системи відповідають на фазовій площині особливі точки рівняння інтегральних кривих і, навпаки, особливі точки відповідають станам рівноваги.

Розглянемо динамічну систему, що відображається рівняннями $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$. Якщо $P(x, y)$, $Q(x, y)$ мають загальний множник, що обертається в нуль, то можуть бути стани рівноваги, які не є особливими точками рівняння інтегральних кривих $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ мають загальний множник, що обертається в нескінченність в особливих точках рівняння інтегральних кривих, ці особливі точки можуть не бути станами рівноваги.

Таким чином, не знаючи ще можливих рухів з кількісного боку, ми знаємо якісну характеристику можливих рухів. Результати якісного дослідження лінійної системи без тертя (гармонічного осцилятора) можуть бути сформульовані таким чином: така система за будь-яких початкових умов здійснює періодичні рухи навколо стану рівноваги $x = 0$, $y = 0$, за

винятком того єдиного випадку, коли початкові умови якраз відповідають стану рівноваги [22].

1.3. Стійкість стану рівноваги

Інтуїтивно ми уявляємо сенс слів «стійкість стану рівноваги». Однак такого інтуїтивного уявлення, звичайно, недостатньо, і потрібно, щоб воно перетворилося на суворе поняття, яким ми зможемо скористатися надалі.

Почнемо наш розгляд із найпростішого прикладу: уявімо математичний маятник без тертя.

Очевидно, можливі два стани рівноваги маятника: 1) коли ми його поміщаємо, не повідомляючи початкової швидкості, в найнижчу точку a ; 2) коли ми його поміщаємо, знов-таки не повідомляючи швидкості, у верхню точку b . Очевидно також, що нижній стан рівноваги є стійким, верхнє нестійке. Дійсно, якщо маятник знаходиться в точці b , то досить скільки завгодно малого поштовху (якщо навіть припустити, що маятник спочатку точно знаходився в точці b), щоб маятник почав рухатися зі зростаючою швидкістю від точки b і пішов з безпосередньої близькості до цієї точки. Інакше поводитиметься маятник, що лежить у точці a . Отримавши поштовх, він почне рухатися з швидкістю, що зменшується, причому чим менше буде поштовх, тим на меншу відстань він відійде від точки a , а потім поверне назад і коливатиметься навколо точки a . При досить малому поштовху маятник не вийде з будь-якої заданої області навколо точки a швидкість його не перевищить будь-якої заданої величини [17].

Виходячи з цього прикладу, ми спробуємо дати визначення стійкості стану рівноваги, використовуючи для цієї мети вже введене нами уявлення про фазову площину. Нехай аналізована система знаходиться в стані рівноваги. Тоді зображуюча точка на фазовій площині знаходиться в нерухомості в одній з особливих точок рівняння інтегральних кривих. Якщо тепер ми виведемо нашу систему зі стану рівноваги, повідомивши їй, наприклад, деякий поштовх, то точка, що зображає зміститься з особливої

точки і почне рухатися по фазовій площині. «Пофарбуємо» для стислості мови зображуючу точку в чорний колір, особливу точку залишимо світлою. Ми можемо тоді охарактеризувати стійкий стан рівноваги таким чином: якщо при досить малому початковому зміщенні чорна точка ніколи не піде далеко від світлої, то світла точка є стійким станом рівноваги.

Зрозуміло, що і ця характеристика неповна. По-перше, чи назвемо ми світлу точку стійкою, якщо чорна точка не йде далеко при початкових зміщеннях в одних напрямках і йде далеко, як би мало ми не змістили її в інших напрямках? Очевидно, що така світла точка не буде стійкою; вона, так би мовити, лише «умовно» стійка при забороні деякого класу зсувів. Потрібно вимагати, щоб чорна точка не йшла далеко від світлої в результаті досить малого зміщення в будь-якому напрямку.

По-друге, і це найважливіше, не є достатньо визначеними певні терміни: «не піде далеко», «залишається поблизу» тощо. Зрозуміло, що поняття «близько», «далеко» залежить від конкретних фізичних умов завдання. Тому слова «далеко», «близько» не означають нічого іншого, як піде чи ні чорна точка з певної заданої області, що оточує світлу точку, причому ця область може бути більшою або меншою залежно від умов завдання.

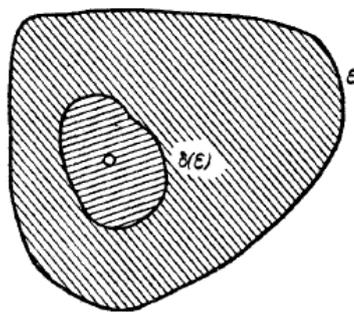


Рис. 1.5. Зображення стійкого стану рівноваги.

Тому остаточно ми зупинимося на такому визначенні (рис. 1.5.): стан рівноваги є стійким, якщо по будь-якій заданій області допустимих відхилень від стану рівноваги (область ϵ) ми можемо вказати область $\delta(\epsilon)$, що оточує стан рівноваги та має властивість, що жоден рух, що починається всередині δ , ніколи не досягне межі області ϵ . Навпаки, стан рівноваги нестійкий, якщо

може бути зазначена така область відхилень від стану рівноваги (область ε), для якої не існує області $\delta(\varepsilon)$, навколишнього стану рівноваги і що володіє тим властивістю, що жоден рух, що починається всередині δ , ніколи не досягне межі області ε [5].

Ці визначення пов'язані з уявленням про фазову площину аналізованої системи. Однак воно може бути сформульоване і без застосування уявлення про фазову площину.

Можна також перевести це визначення стійкості на математичні нерівності, позначивши через $x(t)$ і $y(t)$ рух чорної точки після зміщення і припустивши для простоти, що область допустимих відхилень ε являє собою квадрат (рис. 1.6).

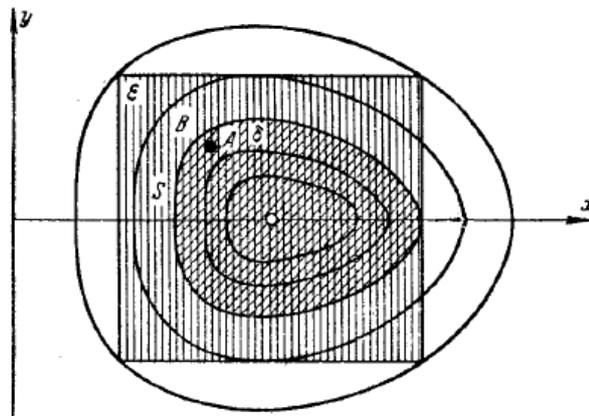


Рис. 1.6. Зображення області допустимих відхилень у вигляді квадрату

Ми отримаємо тоді такий запис нашого визначення: стан рівноваги: $x = \bar{x}$, $y = 0$ називається стійким, якщо, задавши наперед скільки завгодно мале $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, можна знайти таке $\delta(\varepsilon)$, що якщо для $t = 0$.

$$|x(0) - \bar{x}| < \delta \text{ і } |y(0)| < \delta,$$

то тоді для $0 < t < \infty$

$$|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon \text{ і } |y(t)| < \varepsilon,$$

Певну таким чином стійкість ми називатимемо «стійкістю по Ляпунову» і саме її матимемо у вигляді, коли говоритимемо просто про стійкість. Надалі ми познайомимося з іншими визначеннями стійкості та зі значенням робіт Ляпунова [2] у вченні про стійкість.

Тепер ми перейдемо до аналізу стійкості стану рівноваги гармонійного осцилятора. Цей розгляд до речі дасть нам можливість наочно уявити, чому необхідно говорити у визначенні стійкості про дві сфери ε та δ .

Неважко переконатись, що особлива точка типу центру відповідає стійкому стану рівноваги. Нехай задана скільки завгодно мала область ε , наприклад, квадратна (вертикальна штрихування на рис. 1.6). Виберемо із замкнутих кривих, що оточують особливу точку, ту замкнуту криву S , яка стосується заданого квадрата і вся лежить усередині нього. Зауважимо, що це завжди можна зробити незалежно від того, чи мають замкнуті інтегральні криві в безпосередньому сусідстві з особливою точкою форму еліпсів або якусь іншу. Для наявності такої кривої необхідне лише існування континууму замкнутих кривих, що не мають особливостей, вкладених один в одного і стягуються до точки, що ми завжди маємо у випадку центру. Область всередині кривої S (подвійне штрихування) і буде областю $\delta(\varepsilon)$, оскільки якщо початкове положення чорної точки буде всередині цієї області (точка A), вона ніколи не піде з квадрата ε , а буде здійснювати періодичний рух навколо стану рівноваги. Ми могли б, звичайно, за область δ вибрати будь-яку іншу область, що лежить усередині кривої S , наприклад область усередині квадрата, що лежить усіма своїми точками всередині кривої A , крім вершин, які можуть лежати на кривій S . Таким чином, ми можемо стверджувати, що стан рівноваги типу центру є стійким станом рівноваги [3, 18].

1.4. Лінійний осцилятор за наявності тертя

Для відповіді ті питання, котрим тертя грає істотну роль, ми маємо відмовитися від однієї ідеальної риси нашого гармонійного осцилятора відсутності тертя, зберігши решту ідеалізацію. Приймемо, що сила тертя пропорційна швидкості. Це припущення також є ідеалізацією, а саме, ідеалізацією реальних законів тертя, яка знаходиться в задовільній згоді з досвідом, коли йдеться про рідке тертя або тертя про повітря при досить

малих швидкостях. Будь-який інший закон тертя порушив би лінійність осцилятора, тим часом ми поки що обмежуємо наш розгляд тільки лінійними системами.

Рівняння руху при зробленому припущенні про закон тертя запишеться так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (1.14)$$

де b - коефіцієнт тертя, тобто сила тертя для швидкості, що дорівнює одиниці. Електричним аналогом такої механічної системи тертям, пропорційним швидкості, є «томсонівський контур» з омичним опором. Такий контур підпорядковується рівнянню

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1.15)$$

де q - заряд на обкладках конденсатора, а L , R і C , як звичай-індуктивність, опір та ємність.

Позначаючи $\frac{b}{m} = 2h$, $\frac{k}{m}\omega_0^2$ (або відповідно $\frac{R}{L} = 2h$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$), отримаємо рівняння (1.14) та (1.15) у звичайному вигляді

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.16)$$

Розв'язок цього рівняння, як відомо, має вигляд:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (1.17)$$

де λ_1 та λ_2 корені квадратного рівняння:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (1.18)$$

Як відомо, при $h^2 > \omega_0^2$ це коріння дійсне, а при $h^2 < \omega_0^2$ - комплексне. Відповідно до цього в залежності від знака $h^2 - \omega_0^2$ ми отримаємо два типи рішень і два різні процеси: при $h^2 < \omega_0^2$ згасаючий осциляторний процес, при $h^2 > \omega_0^2$ згасаючий аперіодичний процес [8].

Згасаючий осциляторний процес. При досить малому терті, коли $h^2 < \omega_0^2$, коріння характеристичного рівняння (1.18) мають значення:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega$$

де

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.19)$$

та для загального розв'язку рівняння (1.16) отримуємо:

$$x = e^{-ht}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad (1.20)$$

де A і B визначаються початковими умовами. Саме якщо для $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-ht} \left\{ x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right\}, \\ \dot{x} &= e^{-ht} \left\{ x_0 \cos \omega t - \frac{\omega_0^2 x_0 + h\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Розв'язок (1.20) може бути записано у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x &= K e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \\ \text{де } K &= +\sqrt{A^2 + B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega}\right)^2}, \\ \text{tg } \alpha &= -\frac{A}{B} = -\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \\ \left(\cos \alpha &= \frac{x_0}{K}, \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega K} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

До аналогічного виду можна привести і вираз швидкості:

$$\dot{x} = -K\omega_0 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha + \theta) \quad (1.23)$$

де θ визначено співвідношеннями:

$$\left. \begin{aligned} h &= \omega_0 \sin\theta \\ \omega &= \omega_0 \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Формули (1.22) і (1.23) визначають один з типів загасаючого коливального руху, саме осциляторний загасаючий процес, в якому загасання амплітуди відбувається за показовим законом.

Отримані функції $x(t)$, як і функція $\dot{x}(t)$, є періодичними функціями. Справді, періодичними функціями називаються, як відомо, такі функції $f(t)$, для яких можна вказати певну величину τ , отже

$$f(t + \tau) = f(t)$$

за будь-якого значення аргументу t . Найменша величина називається періодом функції $f(t)$. Функції (1.22) і (1.23) не підходять під це визначення, бо для них наведена умова не задовольняється для будь-яких значень аргументу t . Тому періоду в строгому значенні цього слова в цьому випадку

не існує. Однак проміжок часу між двома послідовними проходженнями системи через положення рівноваги (в одному і тому ж напрямку) або між двома послідовними максимальними відхиленнями (в один і той же бік) постійний і дорівнює $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Цей проміжок часу ми називатимемо «умовним періодом» загасаючого осциляторного процесу. Залежність координати іноді має вигляд, зображений на рис. 1.7 [4].

Швидкість згасання аналізованого осциляторного процесу може бути охарактеризована величиною h , так званим показником згасання. Чисельне значення h залежить від вибору одиниць часу. Однак можна дати іншу характеристику загасання такого процесу, яка не залежить від вибору одиниць виміру.

Візьмемо відношення двох послідовних екстремумів, спрямованих в ту саму сторону, наприклад двох послідовних максимумів:

$$\frac{x'_{max}}{x''_{max}} = e^{hT} = e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$$

Логарифм цієї величини, або, інакше кажучи, різницю логарифмів двох послідовних максимумів, зветься логарифмічного декременту згасання d , причому

$$d = hT = \frac{2\pi h}{\omega} \quad (1.25)$$

Щоб ще інакше пояснити фізичний зміст логарифмічного декременту d , зауважимо, що обернена величина $\frac{1}{d}$ дає число розривних періодів, після якого амплітуда зменшується в e разів (e основа натуральних логарифмів).

Легко бачити, що отриманий закон загасання коливань тісно пов'язаний із прийнятою нами ідеалізацією закону тертя. Тільки припустивши, що сила тертя пропорційна швидкості, ми отримали закон зменшення максимумів по геометричній прогресії з показником прогресії e^{-d} .

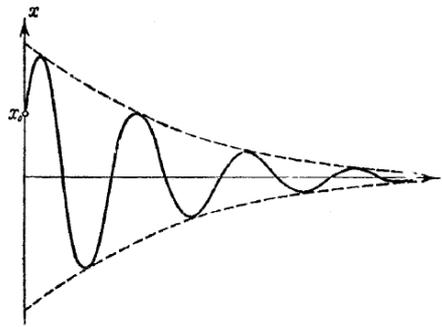


Рис. 1.7. Згасаюча амплітуда коливань.

Зрозуміло, з іншого боку, що саме логарифмічний декремент загасання має певний сенс тільки при цьому законі загасання і втрачає свій зміст, якщо закон загасання такий, що відношення двох послідовних максимумів не залишається постійним. Отже, без спеціальних застережень поняття логарифмічного декременту загасання застосовується лише до лінійних систем. Визначення логарифмічного декременту загасання може бути зроблено по кривій, що зображена на рис. 1.7, або за отриманою з цієї кривої залежності екстремумів від часу, нанесеної в напівлогарифмічному масштабі (замість відхилень по осі ординат відкладаються логарифми найбільших відхилень). У цьому останньому випадку залежність набуває вигляду прямої лінії, кут нахилу якої дає безпосередньо показник загасання h , звідки множенням на умовний період T виходить логарифмічний декремент загасання d (проте практично замість цього прямого методу частіше застосовується більш зручний метод визначення загасання по кривій резонансу).

Ми бачимо, що загасаючий коливальний рух характеризується чотирма величинами: умовним періодом T (або відповідною умовною кутовою частотою ω), логарифмічним декрементом загасання d , амплітудою K та фазою α .

Властивості системи визначають умовний період і логарифмічний декремент загасання коливань; довільними залишаються амплітуда та фаза, які визначаються початковими умовами [5, 22].

Зображення загасаючого осциляторного процесу на фазовій площині. Перейдемо тепер до дослідження фазової площини системи, до побудови її «портрета», що відображає всю сукупність можливих рухів.

Знаючи розв'язок диференціального рівняння (1.16), можна знайти рівняння сімейства фазових траєкторій. Згідно (1.22) параметричні рівняння траєкторій на фазовій площині x, y мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} x &= Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \\ y = \dot{x} &= -Ke^{-ht} [h \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Покажемо, що це сімейство спіралей, що мають асимптотичну точку на початку координат.

З цією метою скористаємося лінійним перетворенням координат прийомом, якого ми й надалі неодноразово вдаватимемося. Саме, перейдемо від змінних

$$u = \omega x, \quad v = y + hx \quad (1.27)$$

які ми інтерпретуватимемо як декартові координати на іншій площині (так звана «активна» інтерпретація перетворення координат). Очевидно, якщо позначити $\omega K = C_1$, то

$$u = C_1 e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \quad v = -C_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha).$$

Ще більш простий вид рівняння фазових траєкторій на площині u, v і отримують у полярних координатах ρ, φ ($u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$):

$$\rho = C_1 e^{-ht}, \quad \varphi = -(\omega t + \alpha)$$

або, виключивши час,

$$\rho = C e^{\frac{h}{\omega} \varphi} \quad (1.28)$$

(тут $C = C_1 e^{\frac{h}{\omega} \varphi}$ - нова довільна стала) [10].

Таким чином, на площині u, v фазовими траєкторіями буде сімейство логарифмічних спіралей з асимптотичною точкою в початку координат (рис. 1.8.).

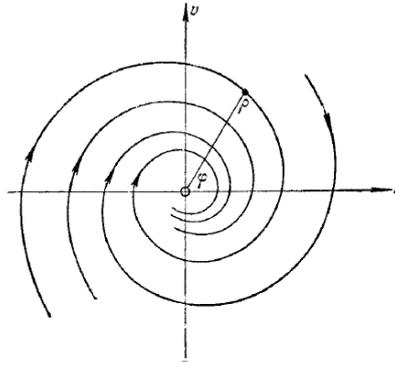


Рис. 1.8. Сімейство логарифмічних спіралей з асимптотичною точкою в початку координат.

При цьому, оскільки φ убуває з часом, а $\rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, що зображує точка, рухаючись по спіралях на площині u, v , асимптотично наближається до початку координат.

Перейдемо назад на площину x, y . З (1.28), помітивши, що

$$\rho^2 = u^2 + v^2 = \omega^2 x^2 + (y + hx)^2 = y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \operatorname{arctg} \frac{y+hx}{\omega x},$$

отримуємо координатне рівняння (з виключеним часом) фазових траєкторій:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C^2 e^{\frac{h}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y+hx}{\omega x}} \quad (1.29)$$

Так як деформація фазових траєкторій при зворотному перетворенні (від u, v до x, y) не може змінити їх якісного характеру, то ми можемо стверджувати, що сімейство фазових траєкторій (1.29) на площині x, y також є сімейством спіралей з асимптотичною точкою на початку координат.

Щодо характеру цих спіралей можна побачити таке. При малих $\frac{h}{\omega}$ тобто малих логарифмічних декрементів загасання, логарифмічна спіраль (1.28) протягом кожного обороту близька до відповідного колу $u^2 + v^2 = \text{const}$. Це коло при лінійному перетворенні (1.27) перетворюється на еліпс $y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const}$. Звідси ми можемо зробити висновок, що при малих $\frac{h}{\omega}$ спіраль (1.29), що досліджується, близька протягом кожного обороту до еліпса (з відповідним чином обраним значенням константи)

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const} \quad (1.30)$$

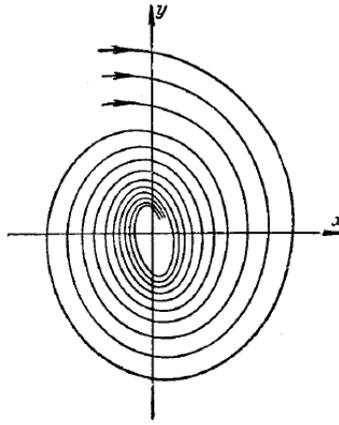


Рис. 1.9. Сімейство логарифмічних спіралей з асимптотичною точкою в початку координат

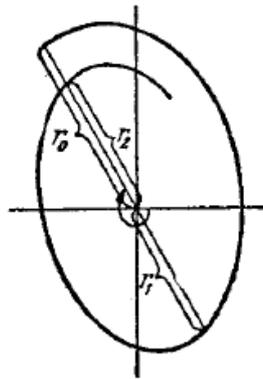


Рис. 1.10. Сімейство спіралей фазових траєкторій на площині.

На рис. 1.10 зображено сімейство досліджуваних нами спіралей фазових траєкторій на площині x, y . Зображувальна точка, рухаючись по будь-якій спіралі, буде асимптотично (при $t \rightarrow +\infty$) наближатися до початку координат, що є станом рівноваги. Радіус-вектор зображувальної точки зменшуватиметься (за довжиною) за кожен оберт.

Підрахуємо величину цього зменшення при напівобороті, обороті і т. д. Для цієї мети проведемо на площині x, y довільну пряму, що проходить через початок координат, і позначимо через r_0, r_1, r_2, \dots відстані до початку координат точок перетину деякої спіралі (1.29) з проведеною прямою (рис. 22). При перетворенні (1.27) проведена пряма разом з точками перетину перетворюється також на пряму, яка проходить через початок координат, причому, як ми вказували вище,

$$r_0 : r_1 : r_2 : \dots = \rho_0 : \rho_1 : \rho_2 : \dots,$$

де через $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ позначені відстані на площині і перетворених точок перетину до початку координат.

Звідси випливає, що кожному півобігу радіуса-вектора r зображуючої точки, що рухається на площині x, y по спіралі (1.29), відповідає також напівобіг радіуса-вектора ρ на площині u, v (зі зменшенням кута φ на π за інтервал часу, рівний $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$). Згідно (1.28), очевидно маємо:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_0 e^{-\frac{hx}{\omega}}, \\ \rho_2 &= \rho_0 e^{-2\frac{hx}{\omega}}, \dots\end{aligned}$$

Так як відстані r_0, r_1, r_2, \dots і $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ пропорційні один одному, то, очевидно, довжина радіуса-вектора зображувальної точки на площині x, y , після півоберту дорівнює

$$r_1 = r_0 e^{-\frac{hx}{\omega}} = r_0 e^{-\frac{d}{2}} \quad (1.31)$$

після повного оберту

$$r_2 = r_0 e^{-\frac{2hx}{\omega}} = r_0 e^{-d}$$

і після n оборотів

$$r_{2n} = r_0 e^{-nd} \quad (1.32)$$

Ми бачимо, що зменшення радіуса-вектора відбувається за знайденим раніше показовим законом з логарифмічним декрементом загасання $d = hT$ [13].

Таким чином, ми з'ясували характер фазових траєкторій. Можна показати, що через кожну точку фазової площини проходить одна і лише одна спіраль, яка відповідає певному значенню константи C або, інакше кажучи, відповідає певним початковим умовам. Вся площина заповнена рядами, вкладеними один в одного, за якими зображуюча точка асимптотично (при $t \rightarrow +\infty$) наближається до початку координат. Виняток становить лише стан рівноваги точка $x = 0, y = 0$, яку слід розглядати як окрему фазову траєкторію. При русі зображувальної точки по спіралі фазова

швидкість ніколи не звертається в нуль, поступово зменшується з кожним оборотом, так що час кожного обороту залишається незмінним рівним $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Фазова швидкість завжди дорівнює нулю для руху, що відображається траєкторією $x = 0, y = 0$.

Безпосереднє вивчення диференціального рівняння. Ми досліджували характер рухів на фазовій площині для випадку лінійного осцилятора за наявності тертя, пропорційного швидкості, і з'ясували, що процесам при малому згасанні ($h^2 < \omega_0^2$) відповідає рух зображувальної точки спіралеподібної фазової траєкторії, що має асимптотичну точку на початку координат. Саме початок координат у разі є станом рівноваги. Однак ми одержали цю картину на фазовій площині, виходячи із заздалегідь знайденого розв'язку (1.20). Ми могли б отримати цю картину безпосередньо з (1.16), не знаючи розв'язку (1.20).

Замінімо, як ми вже це робили, вихідне рівняння другого порядку (1.16) двома еквівалентними рівняннями першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -2hy - \omega_0^2 x \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ділячи одне рівняння на інше, отримаємо диференціальне рівняння інтегральних кривих як:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} \quad (1.34)$$

Неважко бачити, що це рівняння, подібно до рівняння (1.11), визначає на фазовій площині деяке поле дотичних, а разом з рівнянням (1.33) деяке векторне поле з єдиною особливою точкою $x = 0, y = 0$.

Легко досліджувати приблизно за допомогою ізоклін характер цього поля. Рівняння ізокліни, для точок якої інтегральні криві мають нахил x , напишеться так:

$$\frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} = x \text{ або } y = \sigma x$$

де

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{x+2h} \quad (1.35)$$

ізокліни і в цьому випадку є прямі, що проходять через початок координат. Задавши, наприклад, досить великий ряд значень x (при фіксованих h і ω_0 , які визначаються системою), отримаємо сімейство ізоклін. За допомогою їх із потрібним ступенем точності зможемо побудувати векторне поле 1).

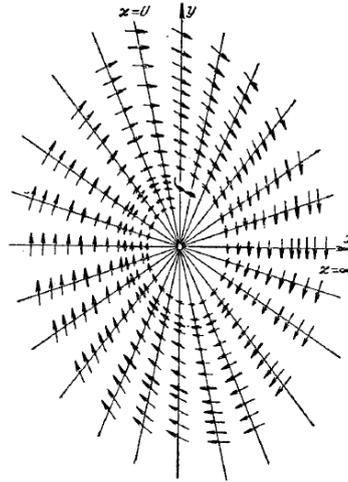


Рис. 1.11. Векторне поле, побудоване з допомогою кількох ізоклін.

На рис. 1.11. зображено таке векторне поле, побудоване з допомогою кількох ізоклін. З даного креслення можна передбачити характер інтегральних кривих.

Отримане після вилучення часу рівняння (1.34) допускає інтегрування, оскільки воно належить до класу однорідних рівнянь.

Інтегруючи за звичайними правилами (підстановка $z = \frac{y}{x}$ отримаємо для нашого випадку ($h^2 < \omega_0^2$) рівняння інтегральних кривих:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C e^{2\frac{h}{\omega} \arctg \frac{y+hx}{\omega x}}$$

вивченням якого вже займалися. Тепер ми це рівняння одержали іншим шляхом, не знаючи розв'язку рівняння (1.16). Вираз фазової швидкості v знаходиться з рівняння (1,13) і (1.33):

$$v = i \cdot y + j(-2hy - \omega_0^2)$$

і

$$|v|^2 = \omega_0^4 x^2 + 4h\omega_0^2 xy + (1 + 4h^2)y^2 \quad (1.36)$$

Ми бачимо при цьому способі розгляду відразу, майже без будь-яких обчислень, що фазова швидкість ніде не звертається в нуль, за винятком початку координат $x = 0, y = 0$, але зменшується в міру наближення точки, що представляє, до початку координат [2, 13].

Що можна сказати про характер рухів у нашій системі, знаючи характер інтегральних кривих на фазовій площині та знаючи вираз для фазової швидкості?

По-перше, можна стверджувати, що всі фазові траєкторії відповідають осцилюючим, але загасаючим рухам, що прагнуть до положення рівноваги (за винятком «руху» по траєкторії $x = 0, y = 0$). Справді, ці траєкторії спіралі; так як при русі точки, що представляє, по спіралі координата і швидкість системи багаторазово проходять через нуль, то спіралі на фазовій площині відображають осциляторний процес. Далі радіус-вектор точки, що представляє, що рухається по спіралі, зменшується після кожного обороту; це означає, що Ми маємо справу з загасаючим процесом, максимальні значення x і \dot{x} зменшуються від обороту до обороту. По-друге, очевидно, що особлива точка $x = 0, y = 0$ відповідає стану рівноваги.

Результати, отримані з аналізу характеру рухів на фазовій площині, можна сформулювати так: наша система за будь-яких початкових умов здійснює загасаючі осциляторні рухи навколо положення рівноваги $x = 0, y = 0$, за винятком того єдиного випадку, коли початкові умови якраз відповідають стану рівноваги.

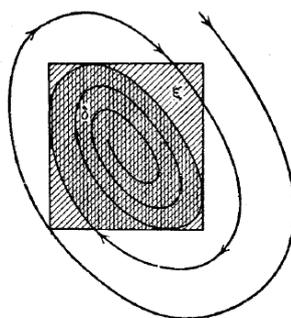


Рис. 1.12. Асимптотична особлива точка фокус.

У даному випадку ми маємо лише одну особливу точку системи інтегральних кривих, яка є асимптотичною точкою для всіх інтегральних кривих. Така особлива точка, яка є асимптотичною точкою всіх інтегральних кривих, що мають вигляд спіралей, вкладених один в одного, називається фокусом [1].

З'ясуємо тепер питання, чи є у цьому випадку особлива точка типу фокусу стійкою. Беручи до уваги, що точка, що представляє, по будь-якій інтегральній кривій буде рухатися, наближаючись до особливої точки, легко переконатися в тому, що умова стійкості стану рівноваги, сформульована нами вище, в цьому випадку дотримується. Дійсно, ми завжди можемо вибрати таку область δ (рис. 2.4, подвійне штрихування), щоб точка, що представляє, не вийшла за межі області ε (просте штрихування). Отже, у наведеному випадку стан рівноваги стійкий і особлива точка - стійкий фокус. Стійкість особливої точки типу фокусу, очевидно, пов'язана з тим, розкручуються або скручуються інтегральні криві, вважаючи за напрямом руху точки, що представляє. Оскільки напрямок руху точки, що представляє, однозначно визначено вибором координат (точка повинна рухатися за годинниковою стрілкою), то разом про те (оскільки напрям відліку часу може бути змінено) однозначно встановлюється і стійкість особливої точки у аналізованому випадку. Навпаки, якби спіралі розкручувалися (вважаючи в тому ж напрямі), то особлива точка була б нестійка. Як легко переконатися, наприклад, з рівняння (1.28), скручування інтегральних кривих обумовлено тим, що $h > 0$, так як тільки в цьому випадку радіус-вектор при русі за годинниковою стрілкою зменшується.

Таким чином, особлива точка типу фокусу, взагалі кажучи, може бути як стійкою, так і нестійкою (на відміну від особливої точки типу центру, яка, як ми бачили, завжди стійка). У цьому випадку фокус стійкий, тому що $h > 0$. Фізичний зміст цієї умови стійкості зрозумілий: тертя має бути позитивно, тобто має перешкоджати руху та споживати енергію. Таке позитивне, що перешкоджає руху тертя, подолання якого витрачається робота, неспроможна

викликати нестійкості, і якщо положення рівноваги у системі було стійке за відсутності тертя (в гармонійному осциляторі), воно залишиться стійким і за наявності позитивного тертя. Під час подальшого розгляду ми зустрінемося з нестійкими особливими точками типу фокуса.

Розглянутий нами стійкий фокус має «сильнішу» стійкість, ніж розглянутий у попередньому параграфі центр. Справді, у разі стійкого фокусу буде виконано не лише умову стійкості за Ляпуновим, а й жорсткішу вимогу. Саме, при будь-яких початкових відхиленнях система після довгого проміжку часу повернеться як завгодно близько до положення рівноваги. Таку стійкість, коли початкові відхилення як не наростають, але, навпаки, згасають, ми називатимемо абсолютної стійкістю. У розглянутому нами випадку лінійного осцилятора фокус є абсолютно стійким [4, 14].

Загасаючий аперіодичний процес. Розглянемо тепер випадок, коли коріння характеристичного рівняння дійсне, тобто коли $h^2 > \omega_0^2$. У цьому випадку, позначаючи

$$q = +\sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad (1.37)$$

отримаємо корінь характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = -h + q = -q_1, \quad \lambda_2 = -h - q = -q_2 \quad (1.38)$$

($q_2 > q_1 > 0$). Тому загальний розв'язок рівняння (1.16) може бути записано у вигляді

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t} \\ \dot{x} &= -q_1 A e^{-q_1 t} - q_2 B e^{-q_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Тут А та В визначаються початковими умовами. Саме якщо для $t = 0$ $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$x = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t} \quad (1.40)$$

Нашим завданням є дослідити характер можливих рухів, залежно від початкових умов.

По-перше, очевидно, що за будь-яких початкових умов рух згасає, тому що $q_1 > 0$ і $q_2 > 0$, отже, при $t \rightarrow +\infty$ $x(t) \rightarrow 0$. Щоб докладніше з'ясувати характер загасання, знайдемо t_1 і t_2 моменти часу (тобто проміжки часу після

початкового моменту), для яких відповідно звертаються в нулі x і \dot{x} . Скориставшись (1.40), знаходимо такі рівняння визначення t_1 і t_2 :

$$e^{(q_2-q_1)t_1} = \frac{x_0+q_1x_0}{\dot{x}_0+q_2x_0} = 1 - \frac{x_0(q_3-q_1)}{x_0+q_3x_0} \quad (1.41)$$

$$e^{(q_2-q_1)t_2} = \frac{q_3(x_0+q_1x_0)}{q_1(\dot{x}_0+q_2x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0(q_2-q_1)}{q_1(\dot{x}_0+q_2x_0)} \quad (1.42)$$

З цих рівнянь відразу видно, що з них має трохи більше одного кореня; таким чином, осциляторне згасання неможливо, Ми маємо справу з так званим аперіодичним процесом [18].

З'ясуємо, коли рівняння, що визначає t_2 , немає жодного позитивного кореня. У цьому випадку рух монотонно згасає, асимптотично прагнучи нуля. Як видно з виразу для t_2 (1.42), це буде, якщо

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0+q_2x_0} < 0 \quad (1.43)$$

На рис. 2.5 вказана область початкових значень, які задовольняють цій нерівності (область II). Для решти початкових значень $\frac{\dot{x}_0}{x_0+q_2x_0} > 0$ рівняння, що визначає t_2 , має позитивний корінь; це означає, що зміщення не зменшується монотонно, спочатку зростає по абсолютній величині і, лише досягнувши деякого екстремуму, починає зменшуватися, асимптотично досягнувши нуля.

Тут слід розрізнити два випадки, дивлячись з того, чи має за початкових умов рівняння, що визначає t_1 , позитивний корінь або такого кореня немає. Якщо такого кореня немає, то зміщення протягом усього часу руху ($0 < t < \infty$) зберігає свій знак; система віддаляється від положення рівноваги, досягає деякого максимального відхилення і потім монотонно наближається до положення рівноваги (але не проходить через положення рівноваги). За (1.41) цей випадок має місце, якщо

$$\frac{x_0}{x_0+q_2x_0} > 0. \quad (1.44)$$

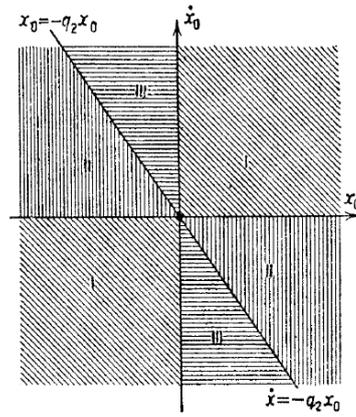


Рис. 1.13. Области початкових значень, що монотонно наближається до положення рівноваги рухів.

На рис. 1.13 цифрою *I* відзначені області початкових значень, що призводять до рухів такого типу.

Якщо рівняння, що визначає t_1 , має позитивний корінь, система спочатку наближається до положення рівноваги, в момент $t = t_1$ проходить через положення рівноваги, далі в момент $t = t_2$ досягає деякого Максимального відхилення в напрямку, протилежному початковому відхилення, і, нарешті, монотонно наближається до положення рівноваги, не досягаючи, однак, його в кінцевий час.

На рис. 1.13 область *III* відповідає початковим значенням, що призводять до такого роду рухів.

Зв'язок між характером руху та початковими умовами можна уявити графічно ще й в іншому вигляді, саме зобразити залежність усунення від часу для всіх трьох випадків *I*, *II*, *III*; це виконано на рис. 1.14, причому передбачається, що у всіх випадках початкове усунення $x_0 > 0$ [2].

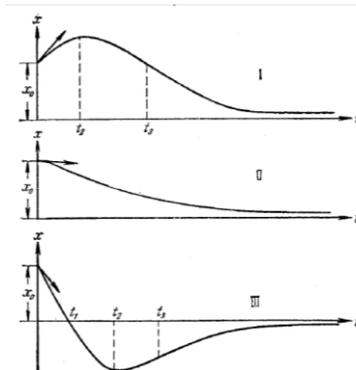


Рис. 1.14. Зв'язок між характером руху та початковими умовами

Зображення аперіодичного процесу на фазовій площині. Перейдемо тепер дослідження фазових траєкторій на фазовій площині $x, y (y = \dot{x})$. Рівняння (1.39) є параметричними рівняннями фазових траєкторій У цьому випадку. Виключаючи час t_1), неважко отримати координатне рівняння інтегральних кривих:

$$(y + q_1x)^{q_1} = C(y + q_2x)^{q_2}. \quad (1.45)$$

Щоб дослідити це сімейство кривих, знову скористаємось лінійним перетворенням координат:

$$y + q_1x = v; \quad y + q_2x = u$$

Після цього перетворення рівняння (1.45) набуде нових змінних простий вигляд:

$$v = Cu^\alpha \quad \text{де } \alpha = \frac{q_2}{q_1} > 1 \quad (1.46)$$

Пояснюючи u і v як прямокутні координати, ми можемо сказати, після перетворення отримали сімейство «парабол», причому, оскільки $\alpha > 1$: 1) всі інтегральні криві, за винятком кривої, що відповідає $C = \infty$, стосуються початку координат осі u , так як $\frac{dv}{du} = C\alpha u^{\alpha-1}$, відповідно $\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=0} = 0$; 2) інтегральні криві при $C = 0$ і $C = \infty$ вироджуються в прямі: при $C_1 = 0$ маємо $v = 0$, тобто вісь u ; при $C_1 = \infty$ маємо $u = 0$, тобто вісь v ; 3) інтегральні криві звернені опуклістю до осі u^1), ординати їх монотонно зростають по абсолютній величині зі збільшенням u . Сімейство таких парабол зображено на рис. 1.15 [20].

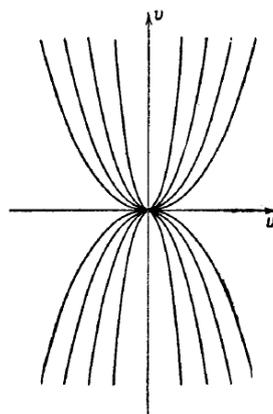


Рис. 1.15. Сімейство парабол

Перейдемо тепер назад на площину x, y . Осі v на площині u, v відповідає пряма $y + q_2x = 0$ на площині x, y ; осі u пряма $y + q_1x = 0$. Інші інтегральні криві або, точніше, інші криві сімейства (1.45) на площині x, y , представляють собою деформовані параболи, що стосуються прямої $y = -q_1x$ («колишньої» осі u). Для того щоб зобразити це сімейство кривих, потрібно врахувати ще такі обставини: 1) криві сімейства мають горизонтальні дотичні в точках перетину з прямою $y = -\frac{q_1q_2}{q_1+q_2}x$ ($\frac{q_1q_2}{q_1+q_2} < q_1$); 2) криві сімейства мають вертикальні дотичні в точках перетину з віссю x ; 3) нахил кривих, що перетинають вісь x , монотонно збільшується на ділянці від стану рівноваги до осі x і міняється від $-q_1$ до $+\infty$; 4) криві сімейства мають параболічні нескінченні гілки з осями, паралельними прямій $y = -q_2x$ (при відході в нескінченність нахил кривих $\frac{dy}{dx} \rightarrow -q_2$). Це сімейство кривих зображено на рис. 1.16.

Подібно до попереднього випадку ми можемо і в цьому випадку дійти отриманих результатів, не інтегруючи диференціального рівняння (1.16), а замінюючи це рівняння другого порядку двома еквівалентними рівняннями першого порядку і виключаючи з них час. Ми отримаємо те ж саме рівняння інтегральних кривих, як і в попередньому випадку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} \quad (1.34)$$

Єдина особлива точка цього сімейства кривих є точка $x = 0, y = 0$, що відповідає стану рівноваги системи. Ізокліни і в цьому випадку будуть прямими, певними рівняннями (1.35).

Але оскільки в аналізованому випадку $h^2 > \omega_0^2$, то розташування ізоклін буде дещо іншим. У цьому випадку є дві прямолінійні інтегральні криві, що проходять через початок координат. Для їх відшукування підставимо рівняння прямої $y = \beta x$ рівняння інтегральних кривих. Тоді для кутового коефіцієнта β прямокутної інтегральної кривої отримаємо рівняння $\beta^2 + 2h\beta + \omega_0^2 = 0$, що збігається з характеристичною (1.18). У нашому випадку воно має дійсні

корені: $\beta_1 = -q_1$, $\beta_2 = -q_2$ тобто інтегральними кривими будуть прямі $y = -q_1x$, $y = -q_2x$.

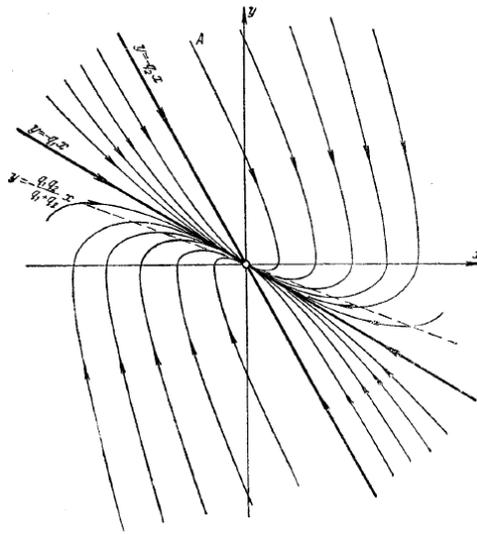


Рис. 1.16. Сімейство кривих.

Це відразу виключає існування спіральних фазових траєкторій, що охоплюють початок координат, і, отже, існування рухів, що осциляторно загасають, в системі.

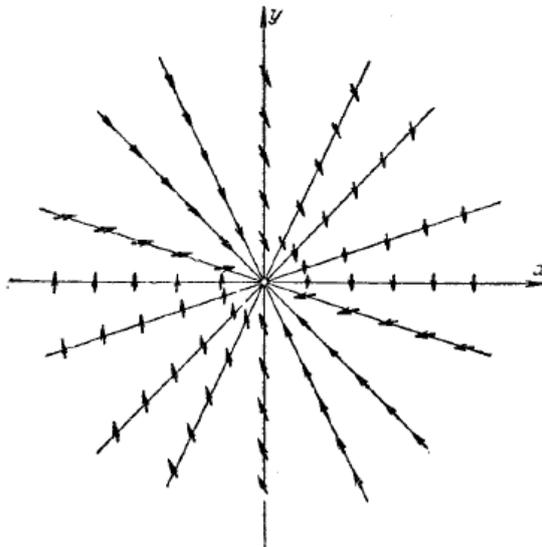


Рис. 1.17. Сімейство кривих біля особливої точки типу центр.

Так само інтегруванні при рівняння (1.34) підстановкою $z = \frac{y}{x}$ ми отримаємо (внаслідок того, що $h^2 > \omega_0^2$) результат, відмінний від

попереднього випадку, саме рівняння сімейства інтегральних кривих «параболічного типу»:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C \left[\frac{\frac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}{\frac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - \omega_0^2}}}$$

або

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2} \quad (1.45)$$

де $q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ і $q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$, тобто те ж рівняння, яке було нами вище отримано іншим шляхом (виключенням t з рішень вихідного диференціального рівняння) [7, 20].

Напрямок руху точки, що представляє, визначається за допомогою тих же міркувань, що і в попередніх випадках, саме з умови, що при $y = \dot{x} > 0$ значення x повинно зростати. Так як тангенс кута дотичної до інтегральної кривої з віссю x змінює знак лише один раз при перетині з віссю x , то відразу видно, що точка, що представляє, буде рухатися по інтегральним кривим у напрямках, зазначених на рис. 1.17 стрілками, тобто завжди наближатиметься початку координат. Швидкість руху представляє точки, як I В попередніх випадках, звертається в нуль тільки там, де одночасно $\dot{x} = 0$ і $y = 0$, тобто в особливій точці диференціального рівняння, що розглядається.

Як ми вже говорили, ми робитимемо різницю між інтегральними кривими і фазовими траєкторіями, тому що однією інтегральною кривою може відповідати кілька істотно різних рухів або, інакше кажучи, кілька різних фазових траєкторій. Наприклад, в даному випадку, задаючи певне значення константи C , ми ще не фіксуємо єдину траєкторію, тому що в нашому випадку кожна інтегральна крива проходить через особливу точку і, отже, складається з трьох фазових траєкторій (дві з них відповідають рухам, асимптотичним до стану рівноваги, третьою є стан рівноваги). У нашому випадку всі інтегральні криві проходять через особливу точку. Така особлива точка, через яку проходять інтегральні криві, подібно до того, як сімейство парабол $y = Cx^2 (\alpha > 0)$ проходить через початок координат, зветься вузлом.

Неважко бачити, що стан рівноваги, що відповідає в нашому випадку особливій точки вузла, є стійким по Ляпунову, так як точка, що зображує, по всіх інтегральних кривих рухається у напрямку до початку координат. Стійкий стан рівноваги, який відповідає особливій точці типу вузла, ми надалі називатимемо стійким вузлом. Як ми переконаємося надалі, вузол може бути й нестійким, навіть достатньо, щоб h було негативне. Як і у випадку фокусу, фізичний зміст цієї обставини полягає в тому, що якщо стан рівноваги в системі без тертя одним ступенем свободи стійкий, то додавання позитивного тертя, тобто тертя, на подолання якого повинна витратитися робота, не може порушити стійкості (навіть позитивне тертя повідомляє положення рівноваги абсолютну стійкість).

Розглянемо дещо докладніше фізичні риси трьох типів аперіодичних рухів, зображених на рис. 1.13. Перш за все, якщо початкова швидкість і початкове відхилення одного знаку (якщо точка, що представляє, лежить в області I на рис. 1.13), то система спочатку буде віддалятися від положення рівноваги, причому швидкість її буде поступово зменшуватися (початкова кінетична енергія витрачається збільшення потенційної енергії і подолання тертя). Коли швидкість падає до нуля (точка t_2), система почне рухатися назад до положення рівноваги, причому спочатку швидкість зростатиме, оскільки сила, що відновлює, більше сили тертя. Але при русі сила тертя зростає (оскільки швидкість зростає), а сила, що відновлює, зменшується (оскільки система наближається до положення рівноваги), і, отже, починаючи з якогось моменту (точка t_3 на рис. 26, I), швидкість, що досягла до цього моменту максимуму, почне знову зменшуватися. Система буде асимптотично наближатися до положення рівноваги.

Інший випадок, коли початкова швидкість і початкове відхилення різних знаків, тобто початковий поштовх направлений у бік, протилежний початковому відхилення, призводить до двох різних типів рухів (II і III). Якщо початковий поштовх малий за порівнянням відхиленням, то система внаслідок наявності великого тертя не може перейти через положення

рівноваги і асимптотично наближатися до положення рівноваги (крива *II*). Якщо ж початкова швидкість досить велика, то система в певний момент t_1 пройде через положення рівноваги (крива *III*) і після цього ще матиме деяку швидкість, спрямовану від положення рівноваги, тобто в ту ж сторону, в яку відхилена система. У цьому виходить вже розглянуте рух типу *I*; система досягає деякого найбільшого відхилення і потім асимптотично наближається до положення рівноваги. Таким чином, рух типу *III* тільки в першій своїй частині (до точки t_1) відрізняється від руху типу *I*. Після точки t_1 рух *III* аналогічно руху типу *I*. З іншого боку, рух типу *I* після точки t_2 аналогічно руху типу *II*. І дійсно, рух точки, що представляє, за деякими фазовими кривими, що проходять через усі три області *I*, *II* і *III* (наприклад, по кривій, зазначеній буквою *A* на рис. 1.13), буде належати або до *III*, або до *I*, або до типу *II* залежно від того, в якій області буде лежати точка, що представляє, в початковий момент.

Граничний випадок (коли $h^2 = \omega_0^2$) ми не розглядатимемо докладно, а обмежимося лише короткими вказівками, бо цей випадок (як, втім, і всякий випадок, коли співвідношення між параметрами системи точно фіксоване) не може бути точно реалізовано у фізичній системі і має значення лише як межа між двома різними типами загасаючих процесів осциляторним та аперіодичним. У разі $h^2 = \omega_0^2$, як відомо, розв'язок вихідного диференціального рівняння (1.16) потрібно шукати у вигляді [3, 4, 11]:

$$x = (A + Bt)e^{-qt}.$$

Можна й у разі не шукати розв'язок диференціального рівняння другого порядку, а перейти до рівняння першого порядку, що визначає фазові криві. Ми і в цьому випадку отримаємо сімейство інтегральних кривих параболічного типу і особливу стійку точку типу вузла, так що з точки зору поведінки інтегральних кривих і типу особливої точки цей граничний випадок слід віднести до випадку $h^2 > \omega_0^2$, а не до випадку $h^2 < \omega_0^2$. Випадок $h^2 = \omega_0^2$, не маючи фізичного значення, є цікавим, так як часто буває вигідно так підібрати згасання системи, щоб h^2 було можливо ближче до ω_0^2 . Цим, з

однієї сторони, усуваються коливання в системі, які неминучі при h^2 , багато меншому, ніж ω_0^2 , а з іншого боку, швидкість аперіодичного повернення системи до нуля виходить найбільша (більше, ніж при великих величин h). Такі умови є найвигіднішими для низки вимірювальних приладів, наприклад, для гальванометрів. Але за будь-якої малої зміни параметрів системи цей граничний випадок перетвориться на один із двох інших, розглянутих раніше. Тому не представляє фізичного інтересу і відбиває характерних рис реальної фізичної системи. Граничний випадок має значення лише як межа, що формально поділяє системи на коливальні та аперіодичні. Необхідно, однак, мати на увазі, що поділ систем на коливальні та аперіодичні, який у разі лінійної системи хоча і може бути математично проведено цілком строго, по суті кажучи, не має великого фізичного змісту, бо при великих значеннях h система втрачає свої найбільш характерні «Коливальні риси» ще до того, як h^2 досягає величини ω_0^2 . Дійсно, якщо h^2 лише трохи менше ω_0^2 , то згасання системи дуже велике, і вже другий максимум, що йде за початковим відхиленням, може бути практично зовсім не помітний. Так само стає непомітним і явище резонансу одне з найбільш характерних явищ у неавтономних коливальних системах.

Таким чином, хоча формально випадок $h^2 = \omega_0^2$ і є граничним, але фактично межа між коливальним і аперіодичним процесами розмита і не може бути проведена різко. Зауважимо, до речі, що з деяких нелінійних систем (наприклад, Систем з «постійним», «кулонівським» тертям, чи з «квадратичним» тертям), як побачимо, поділ на коливальні і періодичні втрачає сенс [17].

РОЗДІЛ 2. КОНСЕРВАТИВНІ НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

2.1. Загальні поняття та означення

При макроскопічному розгляді ми зустрічаємося завжди з неконсервативними системами, тобто системами, у яких повна енергія залишається постійною, а розсіюється під час руху. Однак у багатьох випадках цей процес розсіювання енергії відбувається настільки повільно і вплив його на характер руху системи настільки незначний, що на низку питань, що цікавлять нас, ми можемо відповісти, не враховуючи цього впливу і вважаючи, що сума потенційної і кінетичної енергії в системі залишається постійною. В результаті такої ідеалізації ми приходимо до уявлення про консервативні системи [6].

В інших випадках розсіювання енергії в системі відбувається настільки швидко, що ми вже не можемо нехтувати цією обставиною і повинні розглядати систему як неконсервативну, для того щоб (з заданим ступенем точності) відповісти на ті ж самі питання, на які в першому випадку ми могли відповісти, вважаючи систему консервативною. Як уже неодноразово вказувалося, до поділу систем на консервативні та не консервативні ми приходимо в результаті ідеалізації властивостей реальних фізичних систем, а характер припустимої ідеалізації залежить не лише від властивостей системи, а й від характеру тих питань, які нас цікавлять. Так, наприклад, для вирішення питання про рух маятника, що зазнає дуже малого тертя (маятник підвішений на дуже гострих призмах і поміщений у посудину, з якої видалено повітря), ми можемо для невеликих проміжків часу (наприклад, сотень періодів) з дуже великою точністю розглядати його як консервативну систему, тобто, вважати, що сума кінетичної та потенційної енергії залишається постійною. Якщо нас цікавить питання характері рухів маятника протягом дуже великого проміжку часу, то, розглядаючи систему як консервативну, ми не зможемо отримати правильної відповіді це питання. Незважаючи на те, що енергія розсіюється дуже повільно, за досить великий проміжок часу її розсіється стільки, що енергія, що залишилася в системі

буде помітно менше тієї, яку мала система в початковий момент. Так само рух планет, наприклад Землі, ми можемо розглядати як рух консервативний, знову ж таки якщо цікаві для нас проміжки часу не надто великі. При дуже великих проміжках часу, що охоплюють геологічні епохи, ми для розгляду руху Землі маємо враховувати так зване приливне тертя, при обліку якого ми вже не можемо вважати систему консервативною.

Допустимість консервативної ідеалізації, як зазначалося, залежить від характеру питання, і від властивостей системи. На те саме питання про рух маятника протягом проміжку часу, що дорівнює сотні періодів, ми при консервативній ідеалізації нічого не зможемо відповісти, якщо маятник рухається в середовищі з великим опором. У цьому випадку він уже протягом одного розмаху витрачає значну частку повідомленої йому спочатку енергії, і для проміжку часу, що дорівнює 100 періодам, суму кінетичної і потенційної енергії маятника навіть приблизно не можна вважати постійною.

Розгляд консервативних систем крім того, що воно може дати безпосередню відповідь на низку питань, представляє для нас особливий інтерес через такі причини. По-перше, ми отримуємо можливість вже досить глибоко підійти до з'ясування тих понять (фазової площині, особливих точок, періодичних рухів, стійкості, залежності динамічної системи від параметра), які знадобляться для розгляду нашої Основної задачі теорії автоколивальних систем. По-друге, консервативні системи цікаві ще й тому, що ми в деяких випадках зможемо вивчати автоколивальні системи лише доти, оскільки вони близькі до консервативних систем.

Зауважимо, що з фізики загалом теорія консервативних систем має дуже велику самостійну цінність [6, 19].

2.2. Найпростіша консервативна система

Розглянемо найпростішу автономну консервативну систему з одним ступенем свободи: рух матеріальної точки прямо під дією сили, що залежить

тільки від відстані. Положення матеріальної точки цілком визначається завданням одного числа - абсциси x . Механічний стан системи визначається завданням становища точки x та швидкості точки $\dot{x} = y$. Масу точки для простоти викладок приймемо рівної одиниці; Очевидно, що це припущення не зменшить спільності нашого дослідження. Рівняння руху такої системи може бути написано за другим законом Ньютона у вигляді одного рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

де $f(x)$ - сила, або у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \text{та} \quad \frac{dy}{dt} = f(x) \quad (2.2)$$

У всьому подальшому, за винятком спеціально обумовлених випадків, ми припускатиемо, що $f(x)$ — аналітична функція на всій прямій $x(-\infty < x < +\infty$ або, інакше кажучи, що $f(x)$ голоморфна в кожній точці прямої x).

Диференціальне рівняння, що визначає інтегральні криві на фазовій площині, як ми знаємо, виходить у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (2.3)$$

де $\varphi(x, y) = \frac{f(x)}{y}$. Як буде рухатися зображувальна точка по інтегральним кривим на фазовій площині? Ми вже вказували, що так як y є швидкість, то при $y > 0$, тобто у верхній фазовій півплощині, що зображує точка рухається так, що x зростає, а при $y < 0$, тобто в нижній напівплощині, так, що x зменшується. Таким шляхом визначиться напрямок руху по фазових траєкторіях. Швидкість руху зображувальної точки v можна виразити так:

$$v = \frac{ds}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}$$

Нагадаємо ще раз, що слід розрізняти швидкість зміни положення, швидкість матеріальної точки і швидкість зміни стану швидкості руху зображуючої точки на фазовій площині. Перша швидкість $\frac{dx}{dt} = y$ - у дорівнює ординаті, друга

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.4)$$

дорівнює довжині нормалі до аналізованої інтегральної кривої у вибраній точці. З виразу (2.4) безпосередньо випливає вже зазначене нами обставина, що у будь-якій точці фазової площини зображуюча точка має кінцеву і відмінну від нуля швидкість, крім станів рівноваги (особливих точок), у яких одночасно

$$y = 0 \quad \text{та} \quad f(x) = 0 \quad (2.5)$$

У силу цих умов усі стани рівноваги розташовані на фазовій площині на осі x , причому їх абсциси задовольняють рівняння $f(x) = 0$ [1, 6].

Нехай нам задана на фазовій площині точка (x_0, y_0) . Постає питання, чи можна завжди знайти інтегральну криву, яка проходила б через задану точку, і чи буде така крива єдиною? Рівняння (2.3) визначає у кожній точці фазової площини єдиний напрям дотичної, за винятком особливих точок, де $y = 0$ і $f(x) = 0$.

Доведемо, що в нашому випадку через кожну неособливу точку фазової площини проходить одна і лише одна інтегральна крива. Ми знаємо, що така крива існує і буде єдиною, якщо дотримано умов теореми Коші. Ми розглядали y як функцію x і мали справу з рівнянням випадку $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} =$

$\varphi(x, y)$; у цьому випадку $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{f(x)}{y^2}$ і отже, $y = 0$ має геометричне місце точок

на фазовій площині, де умови Коші порушені. Розглянемо тепер x як функцію y . Тоді диференціальне рівняння (2.3) слід записати у вигляді:

$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x)} = \varphi(x, y)$. У цьому випадку $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{yf'(x)}{|f(x)|^2}$ Умова $f(x) = 0$ дає

порушення умов безперервності, і отже, для цього рівняння умови теореми Коші порушені на прямих $f(x) = 0$. Ми розглядаємо те саме диференціальне рівняння (2.3), лише з різних точок зору. Отримані нами у своїй різні результати зовсім не суперечливі, оскільки умови Коші лише достатні, але не необхідні єдності. Отже, ми можемо стверджувати, що через кожну точку

фазової площини проходить одна і тільки одна інтегральна крива, за винятком, можливо, точок, де одночасно $y = 0$ і $f(x) = 0$, тобто за винятком особливих точок. Як ми побачимо далі, для даного випадку консервативної системи в спеціальних точках інтегральні криві або перетинаються і мають, взагалі кажучи, різні дотичні, або вироджуються в ізольовані точки і зовсім не мають. Швидкість зображувальної точки

$$v = iy + jf(x) \quad (2.6)$$

всюди визначено однозначно і, як ми вже бачили, звертається в нуль лише в особливій точці. Звідси через безперервність випливає, що поблизу особливої точки зображуюча точка уповільнює свій рух [9].

Нехай для системи рівнянь (2.2) у певній області (при нашому припущенні про аналітичність $f(x)$ на всій прямій x цією областю є вся площина) виконані умови теореми Коші. Звідси випливає, що з аналізованої динамічної системи минуле і майбутнє однозначно визначається реальним, оскільки значення початкових умов однозначно визначає рух, інакше кажучи, розв'язок системи (2.2).

Чи залишиться це справедливим під час руху по інтегральних кривих, що перетинаються в особливих точках? Або що те саме може зображуюча точка, поміщена в початковий момент на інтегральну криву, що проходить через особливу точку (але не в особливу точку), досягти цієї особливої точки в кінцевий час? Ми покажемо, що це неможливо: зображуюча точка, що знаходилася в початковий момент у точці фазової площини, що не є особливою точкою для рівняння (2.3), може лише асимптотично наближатися до особливої точки при t .

Зробимо насамперед таке зауваження. Картину кривих на фазовій площині ми можемо, як ми вже бачили, описувати або одним рівнянням (2.3) та вивчати за його допомогою інтегральні криві, або описувати системою рівнянь (2.2) та вивчати фазові траєкторії. По суті можна сказати, що у другому випадку ми після розв'язування отримуємо рівняння тих самих інтегральних кривих, але в параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, інакше

отримуємо закон руху зображувальної точки по інтегральній кривій на фазовій площині. Відмінність цих двох способів зображення однієї й тієї ж сімейства кривих особливо яскраво проявляється у наступному. Нехай $x = x_0$, $y = y_0$ координати особливої точки рівняння (2.3), тобто координати точки, де порушуються умови теореми Коші для одного рівняння (2.3); тоді $x = x_0$, $y = y_0$ у нашому випадку буде точкою, в якій виконуються умови теореми Коші для системи рівнянь (2.2).

Неважко переконатися безпосередньою підстановкою, що система функцій $x = x_0$, $y = y_0$ є розв'язок системи рівнянь (2.2), тобто, як про це ми вже говорили, що точка x_0 , y_0 є для системи (2.2) станом рівноваги. Зауважимо, що оскільки в цьому випадку розв'язок системи (2.2) не залежить від t , то, задаючи початкові значення $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$ ми при будь-якому t_0 отримаємо розв'язок у вигляді $x = x_0$, $y = y_0$ [6, 9].

Розглянемо зображувальну точку, що рухається інтегральною кривою, що проходить через особливу точку, у напрямку до особливої точки. Швидкість її руху, як ми вже говорили, зменшується і прагне до нуля при необмеженому наближенні до стану рівноваги. Постає питання, чи може зображуюча точка в кінцевий час досягти стану рівноваги або вона, як ми вказали, може лише асимптотично до нього наближатися, ніколи його не досягаючи? Припустимо, що має місце перший випадок, т. е. що точка, що зображає, рухаючись за законом $x = x(t)$, $y = y(t)$, знаходиться стану рівноваги в момент часу $t = t_0$ і досягає стану рівноваги з координатами $x = x_0$, $y = y_0$ в деякий певний момент часу t_1 ($t_1 > t_0$), тобто що $x_0 = x(t_1)$, $y_0 = y(t_1)$. Але тоді ми отримали б два розв'язки, що задовольняють одним і тим самим початковим умовам: при $t = t_1$, $x = x_0$, $y = y_0$ одне $x = x_0$, $y = y_0$, інше $x = x(t)$, $y = y(t)$. Останнє неможливо, оскільки у точці x_0 , y_0 , як це щойно зазначалося для системи рівнянь (2.2), виконуються умови теореми Коші.

Зауважимо, що надалі нам доведеться зустрітися із системами рівнянь (подібних (2.2) або більш загального виду), для яких умови теореми Коші в

деяких точках фазової площини порушуються, наприклад, з такими динамічними моделями реальних фізичних систем, для яких праві частини рівнянь руху розривні (Такі, наприклад, коливальні системи з сухим, кулонівським тертям). Для таких моделей наше твердження про визначення минулого справжнім, загалом кажучи, несправедливе. Так само ми вже не можемо в таких випадках, взагалі кажучи, стверджувати, що система не досягає стану рівноваги в кінцевий час. Зауважимо ще, що у випадках особливі точки одного рівняння (подібного (2.3)) який завжди відповідають станам рівноваги [12].

2.3. Дослідження фазової площини поблизу станів рівноваги

Якщо ми знаємо сукупність інтегральних кривих на фазовій площині для будь-якої динамічної системи, ми отримуємо можливість відразу охопити всю картину можливих рухів за різних початкових умов. Для консервативної системи дослідження цих інтегральних кривих надзвичайно полегшується тим, що рівняння (2.7) легко може бути проінтегроване, оскільки змінні поділяються. Отриманий інтеграл має вигляд

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h, \quad (2.7)$$

де $V(x)$ таке, що $V'(x) = -f(x)$, а h - константа інтеграції.

Це рівняння виражає для нашого випадку закон збереження енергії. Справді, $\frac{y^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ є кінетична енергія, $V(x) = -\int_0^x f(x)dx$ є взята зі зворотним знаком робота діючих в системі сил або потенційна енергія системи, h - так звана константа енергії, яка залежить від початкових умов. Певним початковим умовам (при $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$) відповідає певне h .

Якщо ж ми задамо h , то тому самому значенню h відповідає нескінченна безліч станів системи (x, y) - ціла крива $y = \Phi(x)$ на площині x, y (яка може мати ряд ізольованих гілок), називається кривою рівної енергії. По одній з гілок цієї кривої і рухатиметься точка, що зображає, якщо повна енергія аналізованого руху дорівнює h . Може бути, що, задавши h , ми не знайдемо

дійсних значень x і y , які б задовольняли рівнянню (2.7). Це означає, що НІ за якогось дійсного руху нашої системи енергія її не може мати цієї величини [21].

Надалі дослідження ми будемо припускати, що $f(x)$, а значить, і $V(x)$ аналітичні функції на всій прямій x .

Нам буде зручніше проводити дослідження, припускаючи, що функція $V(x)$ задана. Зауважимо, що значення $x = x_1, \dots, x = \bar{x}_i$ (абсциси особливих точок), які перетворюють $f(x)$ на нуль, перетворюють на нуль і $V'(x)$. Отже, ці значення відповідають екстремальним значенням потенційної енергії $V(x)$, тобто або мінімуму, або максимуму, або точці перегину з горизонтальною дотичною. Можна провести класифікацію характеру спеціальних точок рівняння (2.3), з екстремальних властивостей потенційної енергії у спеціальних точках.

Перш ніж перейти до цього завдання, зробимо кілька загальних зауважень щодо виду інтегральних кривих на фазовій площині:

1) Рівняння (2.7) не змінюється від заміни y на $-y$. Отже, всі криві цього сімейства симетричні щодо осі x .

2) Геометричне місце точок, де дотичні до інтегральних кривих вертикальні, це, як легко бачити з (2.2), вісь x , за винятком, можливо, особливих точок.

3) Геометричне місце точок, де дотичні до інтегральних кривих горизонтальні, це прямі, паралельні осі y , рівняння яких $x = \bar{x}_i$, де x_i - коріння рівняння $f(x) = 0$, крім, можливо, точок перетину цих прямих з віссю x , які є особливими точками.

Можна вказати простий спосіб побудови інтегральних кривих на фазовій площині, якщо нам задана, як ми припускатимемо надалі, потенційна енергія $V(x)$. З цією метою скористаємося допоміжною «площиною балансу енергії» з прямокутними осями x, z , на якій відкладемо потенційну енергію $z = V(x)$.
Бо

$$\frac{y^2}{2} = h - V(x)$$

то якщо задана h - повна енергія, то кінетична енергія буде як різниці h і $V(x)$. Як ми вже говорили, якщо кінетична енергія є негативною, то відповідний рух неможливий.

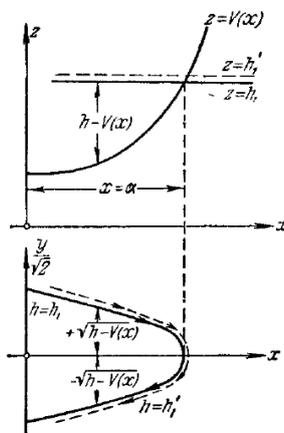


Рис. 2.1. Діаграма балансу енергії для частинного виду кривої $z = V(x)$.

На рис. 2.1 зображено ділянку діаграми балансу енергії для частинного виду кривої $z = V(x)$. Щоб отримати інтегральну криву на фазовій площині, яка для зручності зображена безпосередньо під діаграмою балансу енергії, потрібно послідовно витягувати з різниць $h - V(x)$ квадратне коріння і відкладати їх на фазовій площині вниз і вгору від осі x . При побудові не слід забувати, як це щойно було зазначено, що всі інтегральні криві на фазовій площині перетинають вісь x , маючи дотичну вертикальну, якщо тільки вони її не перетинають в особливій точці.

Рух по отриманій таким чином ділянці кривої легко знайдеться за допомогою міркувань, що вже неодноразово застосовувалися. Змінюючи кілька h , отримаємо сусідню близьку криву на фазовій площині [3, 9].

Скористаємось цим способом для вирішення нашого завдання - дати картину інтегральних кривих на фазовій площині поблизу станів рівноваги. Почнемо з того випадку, коли стан рівноваги відповідає мінімуму потенційної енергії.

Нехай мінімум потенційної енергії має місце для $x = \bar{x}$ і хай $V(x) = h_0$. Діаграма балансу енергії поблизу $x = \bar{x}$ матиме вигляд, зображений на рис.

58. Інтегральна крива для $h = h_0$ вироджується в ізольовану точку з координатами $x = \bar{x}$, $y = 0$. Для близького значення $h = h_1$ ($h_1 > h_0$) будемо мати замкнуту інтегральну криву. Напрямок руху цією замкненою кривою легко знайдеться звичайним методом.

При цьому русі замкненою інтегральною кривою дійсна швидкість, тобто швидкість матеріальної точки, двічі обертається в нуль: при $x = \alpha$ і $x = \beta$ (рис. 2.1); швидкість зображуючої точки на фазовій площині ніде не дорівнює нулю, так як наша крива не проходить через особливу точку. Точка, що представляє, рухаючись по замкнутій кривій, повертатиметься на колишнє місце через кінцевий проміжок часу. Звідси випливає, що маємо справу з періодичним рухом. Неважко бачити, що проміжні значення h ($h_0 < h < h_1$) дають знову замкнуті інтегральні криві, які також відповідають періодичним рухам.

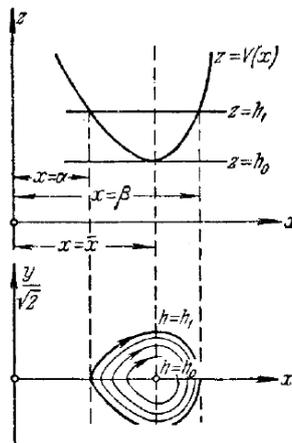


Рис. 2.2. Фазова площина цілого континууму замкнутих кривих.

На фазовій площині ми отримуємо цілий континуум замкнутих кривих, вкладених одна в іншу і що охоплюють інтегральну криву, що виродилася в точку $x = \bar{x}$, $y = 0$. Особливу точку диференціального рівняння з таким характером поведінки навколишніх інтегральних кривих ми вже зустрічали при розгляді лінійної консервативної. Така точка, як вказувалося, називається центром.

Особлива точка типу центру, як ми вже переконалися під час розгляду приватного прикладу, відповідає стійкому стану рівноваги. Знайдемо тепер

аналітичні умови наявності такої особливої точки та наближені рівняння замкнутих кривих поблизу неї.

Поблизу особливої точки з координатою \bar{x} розкладання $f(x)$ і $V(x)$ у ряди мають вигляд

$$f(x) = a_1(x - \bar{x}) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \dots, \quad (2.8)$$

$$V(x) = h_0 - \left\{ \frac{a_1}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x - \bar{x})^4 + \dots \right\} \quad (2.9)$$

Де $a_1 = f'(\bar{x}) = V''(\bar{x})$, $a_2 = f''(\bar{x}) = V'''(\bar{x})$, і т. д. Перенесемо початок координат в цю особливу точку, поклавши $x = \bar{x} + \xi$; $y = 0 + \eta$, і підставимо до рівняння досліджуваного сімейства (2.7) вираз $V(\bar{x} + \xi)$ як ряду. Тоді рівняння досліджуваного сімейства кривих може бути записано так:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h. \quad (2.10)$$

Розглянемо спочатку випадок $a_1 \neq 0$. У цьому випадку на нашій діаграмі балансу енергії пряма $z = h_0$ має зіткнення першого порядку з кривою $V(x)$ у точці $x = \bar{x}$. Оскільки $V(x)$ для $x = \bar{x}$ має мінімум, то $V''(\bar{x}) > 0$ і $a_1 < 0$. Крива (2.10) для $h = h_0$ має в точці $\xi = 0$, $\eta = 0$ ізольовану особливу точку.

Для досить малого $\alpha = h - h_0$ ($\alpha > 0$) виходять замкнуті криві, близькі до еліпсів, оскільки приблизно вони можуть бути описані рівнянням

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (2.11)$$

де $b^2 = 2\alpha$, $a^2 = \frac{2\alpha}{|a_1|}$.

Рух, що зображується на фазовій площині еліпсом, є гармонійним рухом. Таким чином, для досить малих початкових відхилень рух буде близьким до гармонійного. При збільшенні початкових відхилень рух, взагалі кажучи, буде все сильніше і сильніше відрізнятися від гармонійного, причому період також змінюватиметься в залежності від величини початкових відхилень, оскільки час звернення точки, що представляє, по різних інтегральних кривих, взагалі кажучи, по-різному.

Якщо лише якась $a_k \neq 0$, тоді як $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_{k-1} = 0$, то на діаграмі балансу енергії пряма $z = h_0$ має дотик k - порядку з кривою потенційної енергії в точці $x = \bar{x}$. Оскільки $V(x)$ для $x = \bar{x}$ має мінімум, то k обов'язково непарне і $a_k < 0$. Крива (2.10) для $h = h_0$ знову має ізольовану точку; для досить малого $\alpha = h - h_0 (h > h_0)$ ми отримаємо замкнуті інтегральні криві види:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k| \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots k(k+1)} = \alpha \quad (2.12)$$

Замкнуті криві навколо особливої точки навіть у безпосередній близькості до неї вже не будуть схожі на еліпси, і відповідні рухи вже не будуть близькі до гармонійних навіть при дуже малих відхиленнях.

Однак загальна топологічна картина рухів на фазовій площині від цього не зміниться: будь-яку особливу точку, що відповідає мінімуму потенційної енергії, оточує континуум замкнутих кривих, вкладених один в одного і відповідних періодичним рухам [3, 6].

Розглянемо тепер випадок, коли стан рівноваги відповідає максимуму потенційної енергії. Діаграма балансу енергії зображено на рис. 59 вгорі, а внизу зображена фазова площина. На фазовій площині значення $h = h_0$ ми отримаємо чотири гілки кривої із загальною точкою. Ці гілки ми перенумеруємо *I, II, III, IV* і будемо для стислості називати «вусами» особливої точки. Характер вусів поблизу особливої точки легко досліджувати аналітично, як це буде зроблено нижче. Для значень h , близьких до $h_0 (h_1 > h_0 \text{ і } h_2 < h_0)$, ми матимемо ділянки інтегральних кривих, схожі на гілки гіпербол (рис. 60). Варіюючи h між h_1 і h_2 , отримаємо континуум проміжних кривих. Легко знайти рух за цим інтегральним кривим, користуючись методом, що вже неодноразово застосовувався.

По-перше, розглянемо рух по ділянках (рис. 2.3). Зображаюча точка, потрапивши на ділянки *II* і *IV* стану поблизу стану рівноваги, асимптотично до нього наближається, потрапивши на вуса *II* та *III* - віддаляється від рівноваги. Зауважимо, що при зміні t на $-t$ ділянки змінюються місцями.

Рух, що характеризується рештою інтегральних кривих, має ту властивість, що якщо зображувальна точка потрапить на будь-яку з таких кривих поблизу стану рівноваги, вона в кінцевий час піде досить далеко від цього стану рівноваги .

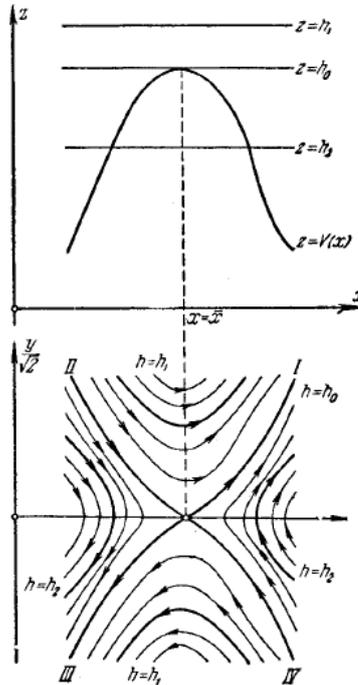


Рис. 2.3. Діаграма руху по ділянках

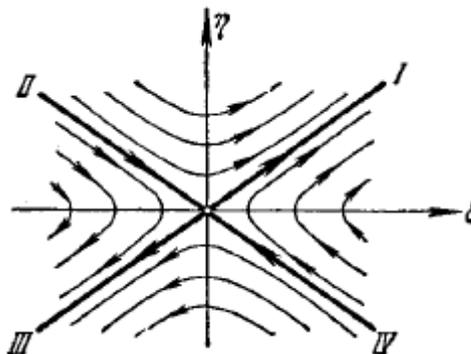


Рис. 2.4. Діаграма руху по ділянках біля особливої точки типу сідло

Особливу точку диференціального рівняння з таким характером поведінки інтегральних кривих зустрічали при розгляді систем з силою, що відштовхує - особлива точка типу сідло.

Як ми бачили при розгляді лінійної системи з відштовхувальною силою, особлива точка типу сідла завжди відповідає нестійкому стану рівноваги. Знайдемо тепер аналітичні умови існування такої особливої точки та

наближені рівняння інтегральних кривих у безпосередній близькості до стану рівноваги. Вчиняючи так само, як і у випадку центру, ми знову прийдемо до рівняння (2.10):

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h$$

Знову почнемо з нагоди простого дотику прямої $z = h_0$ і кривою $V(x)$ у точці $x = \bar{x}$, тобто з випадку, коли $a_1 \neq 0$. Так як $V(x)$ для $x = \bar{x}$ має максимум, то $V''(\bar{x} < 0)$ і $a_1 > 0$. Вважаючи $h = h_0$, ми отримаємо рівняння вусів. Не важко побачити, що початок координат ($\xi = 0, \eta = 0$) є вузловою точкою вусів, причому рівняння дотичних до вусів в цьому вузлі мають вигляд

$$\eta = +\sqrt{a_1 \xi} \quad \text{і} \quad \eta = -\sqrt{a_1 \xi} \quad (2.13)$$

Для малих значень $h - h_0 = \alpha$ ми отримаємо сімейство кривих, які поблизу особливої точки поведуться подібно до гіпербол, що визначаються рівнянням

$$\frac{\eta^2}{2\alpha} - \frac{a_1 \xi^2}{2\alpha} = 1 \quad (2.14)$$

Вид ділянок та характер інтегральних кривих у безпосередній близькості до особливої точки зображено на рис. 2.4. Ми вже досліджували в попередній главі характер руху представляє точки по цій родині гіпербол. Зрозуміло, що ці результати приблизно справедливі для руху по інтегральним кривим поблизу особливої точки і в даному випадку. При віддаленні від особливої точки ці результати, отримані нами для лінійної системи, взагалі кажучи, дедалі менш точно описують досліджувані рухи.

У тому випадку, коли пряма $z = h_0$ і крива $V(x)$ мають зіткнення k порядку, $a_1 = 0, a_2 = 0$ і т. д. і лише якесь $a_k \neq 0$. Так як для $x = \bar{x}$ $V(x)$ має максимум, то k обов'язково непарне і $a_k > 0$. Вважаючи $h = h_0$, ми знову отримаємо рівняння вусів. Неважко бачити, що початок координат ($\xi = 0, \eta = 0$) є точкою самодотику ділянок (рис. 61), які поблизу особливої точки близькі до кривої $\eta^2 = \frac{a_k}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} \xi^{k+1}$ і мають спільну торкаючу вісь ξ . Для

малих значень $\alpha (\alpha = h - h_0)$ ми отримаємо сусідні інтегральні криві, які поблизу особливої точки поведуться подібно до кривих

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} = \alpha \quad (2.15)$$

Інтегральні криві навколо особливої точки вже відрізняються від гіпербол, і досліджувані рухи вже навіть приблизно не можуть бути описані за допомогою тієї картини, яка була отримана для лінійної системи з силою, що відштовхує. Однак загальна топологічна картина рухів на фазовій площині тотожна з попереднім випадком і, отже, цілком визначається тим, що маємо справу з максимумом потенційної енергії [6, 11, 20].

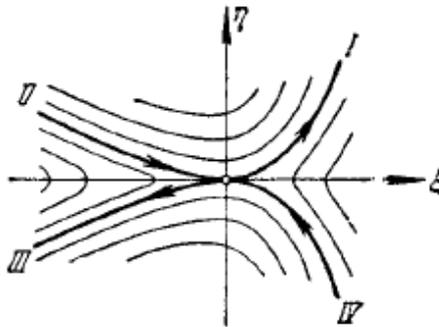


Рис. 2.5. Зображення точки самодотику ділянок.

Розглянемо тепер третій та останній випадок, коли стану рівноваги на кривій потенційної енергії відповідає точка перегину з горизонтальною дотичною.

Діаграма балансу енергії і вид фазової площини зображено на рис. 2.6.

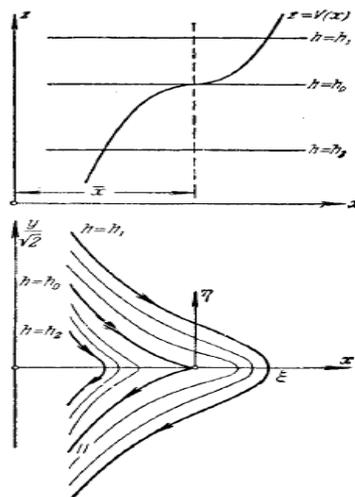


Рис. 2.6. Діаграма балансу енергії і вид фазової площини.

Побудова інтегральних кривих на фазовій площині не викликає жодних труднощів для всіх значень h , за винятком значення $h = h_0$, яке дає дві гілки кривої із загальною $x = \bar{x}, y = 0$. З'ясування характеру цих двох вусів поблизу особливої точки становить деякі труднощі, і цього потрібно аналітичний розгляд. Перш ніж перейти до такого дослідження, яке проводиться так само, як у попередніх двох випадках, помітимо, що ми маємо справу з точкою перегину, то неодмінно $a_1 = 0$ (так, як $a_1 = -V''(x)$, то перший коефіцієнт a_k не рівний нулю, має k парних). Рівняння (2.15) у цьому випадку набуває вигляду

$$\frac{\eta^2}{2} - \left[\frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \frac{a_{k+1} \xi^{k+2}}{1 \cdot 2 \dots (k+2)} + \dots \right] = h - h_0. \quad (2.16)$$

Криву, що проходить через особливу точку, ми отримаємо, вважаючи $h = h_0$. Неважко бачити, що ця крива має в точці $\xi = 0, \eta = 0$ точку повернення першого роду. Зображуюча точка, потрапивши на вус I , асимптотично прагне стану рівноваги, потрапивши на вус II віддаляється від стану рівноваги. Стан рівноваги, як і у випадку сідла, очевидно, є нестійким, так як після досить великого проміжку часу точка, що була в початковий момент кінцевої області $\delta(\varepsilon)$, неодмінно вийде за межі кінцевої області ε . Рух за вусом I до стану рівноваги не порушує нашого твердження про нестійкість станів рівноваги, так само як і аналогічні рухи у разі сідла [3].

Ми розглянули три можливі випадки екстремальних значень потенційної енергії системи та пов'язали їх з типом особливих точок та з питанням про стійкість станів рівноваги. Ми переконалися в тому, що у разі мінімальної потенційної енергії стан рівноваги є особливою точкою типу центру та стійким; якщо потенційна енергія має максимум, стан рівноваги є особливою точкою типу сідла і нестійко. Стан рівноваги нестійкий і у разі, коли потенційна енергія має точку перегину. На цій підставі для розгляду випадку найпростішої консервативної системи можна сформулювати дві основні теорії стійкості: по-перше, теорему Лагранжа, яка говорить: Якщо в

стані рівноваги потенційна енергія є мінімум, то стан рівноваги стійкий, і, по-друге, зворотну теорему Ляпунова:

Якщо стані рівноваги потенційна енергія щонайменше, то стан рівноваги нестійкий [6].

2.4. Дослідження характеру рухів на всій фазовій площині

Перейдемо тепер від локального дослідження рухів поблизу особливих точок до вивчення кривих по всій площині. При цьому ми знову користуватимемося площиною балансу енергії і виходитимемо з припущення, що $V(x)$ — функція, аналітична на всій прямій x . Потім, ми перейдемо до прикладів, ми розглянемо кілька випадків, коли $V(x)$ допускає розриви.

Отже, припустимо, що на площині x, z нам дано крива $z = V(x)$, яка відповідає зазначеним вимогам, і деяка пряма $z = h$. Побудуємо на фазовій площині сукупність всіх рухів, що характеризуються заданою константою енергії. Можуть зустрітися такі основні випадки:

1) Пряма $z = h$ ніде не перетинає кривої $V(x)$. Якщо в цьому випадку точки кривої $z = V(x)$ лежать вище від точок прямої $z = h$, то на всій фазовій площині не існує рухів з такою повною енергією, оскільки швидкості таких рухів були б уявними. Якщо ж пряма $z = h$ лежить вище за криву $z = V(x)$, то на фазовій площині ми матимемо дві симетрично розташовані гілки фазової траєкторії (рис. 2.7). Зображувальна точка, що почала рухатися з будь-якого місця як верхньої, так і нижньої гілки, буде рухатися одному напрямку, не зупиняючись, і піде в нескінченність.

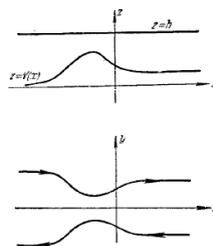


Рис. 2.7. Фазова площина двох симетрично розташовані гілок фазової траєкторії.

Якщо замінимо t на $-t$, тобто змусимо час «текти у напрямі», то характер руху зображуючої точки не порушиться, зміниться лише напрям руху. Такі рухи, такі фазові траєкторії, для яких зображуюча точка при будь-якому початковому положенні йде в нескінченність, Ми називатимемо рухами і траєкторіями, що тікають. Розглядаються рухи, що тікають як при $t \rightarrow +\infty$, так і за $t \rightarrow -\infty$. Легко бачити, що для сусідніх значень h ми отримуємо ту саму картину, у нас будуть абсолютно аналогічні фазові траєкторії.

2) Пряма $z = h$ перетинає криву $z = V(x)$, ніде її не торкаючись (рис. 2.8). Для тих значень x , для яких $V(x) > h$, немає фазових траєкторій, для решти значень x існують фазові траєкторії, причому вони бувають двох пологів: це або гілки, що йдуть в нескінченність (число яких не більше двох), або це замкнуті гілки (число яких може бути будь-яким). Гілки, що йдуть у нескінченність, знову-таки відповідають рухам, що тікають як при $t \rightarrow +\infty$, так і за $t \rightarrow -\infty$. Замкнуті гілки відповідають періодичним рухам.

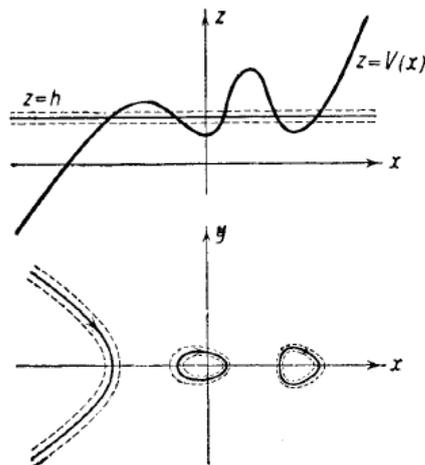


Рис. 2.8. Фазовий портрет проекції інтегральної кривої

Для близьких значень h ми матимемо ту саму картину, причому біля замкнутих кривих ми отримуємо замкнуті фазові криві, а біля нескінченних гілок нескінченні гілки.

3) Пряма $z = h$ стосується кривої $z = V(x)$. Тоді всі фазові криві можна розбити на такі класи:

а) Ізольовані точки, поблизу яких (при цьому h) немає гілок фазових кривих. Це стійкі стани рівноваги, про які ми вже говорили. Якщо ми будемо

змінювати h , то при збільшенні h отримаємо замкнуту криву, що охоплює ізольовану точку, що розглядається, при зменшенні h поблизу ізольованої точки ми не отримаємо дійсних гілок кривої.

б) ізольовані кінцеві шматки фазових кривих. Вони можуть бути двох пологів: або це просто замкнуті криві, що відповідають періодичним рухам, про які у нас вже йшлося, або це фазові криві з самоперетином, що належать до так званих сепаратрис, тобто до кривих, що проходять через особливі точки. Ці точки самоперетину або особливі точки типу сідла, як ми вже знаємо, відповідають тим точкам на діаграмі x, z , де пряма $z = h$ стосується максимумів кривої $z = V(x)$ (рис. 2.9). Ті сепаратриси, про які зараз йдеться, складаються з одного (у разі виродження), а взагалі, з кількох «ланок» [5, 17].

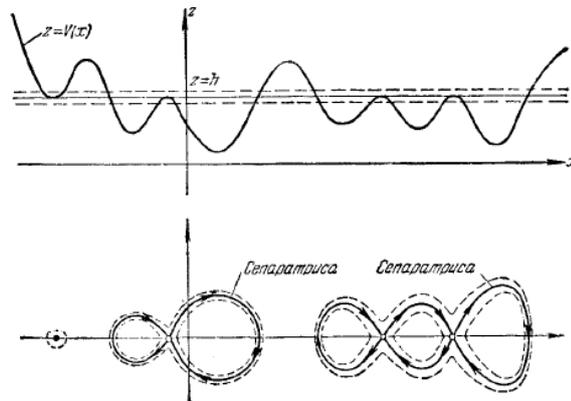


Рис. 2.9. Точки самоперетину або особливі точки типу сідла

Кожна ланка є окремою фазовою траєкторією (якщо вона гранична) або складається з двох фазових траєкторій (якщо воно не граничне). Рух якоюсь із траєкторій, про які йшлося, є асимптотичним до стану рівноваги. Такі рухи називаються лімітаційними рухами. Наприклад такого руху ми вже вказували при розгляді маятника, що знаходиться у верхньому положенні рівноваги. Розглянуті зараз рухи є лімітаційними як при $t \rightarrow +\infty$, так і за $t \rightarrow -\infty$. Сепаратриси - це, у певному сенсі, виняткові інтегральні криві, оскільки їм відповідають точки дотику прямої $z = h$ з кривою $z = V(x)$ на площині балансу енергії. Знання їх є надзвичайно важливим для з'ясування загальної картини інтегральних кривих на фазовій площині.

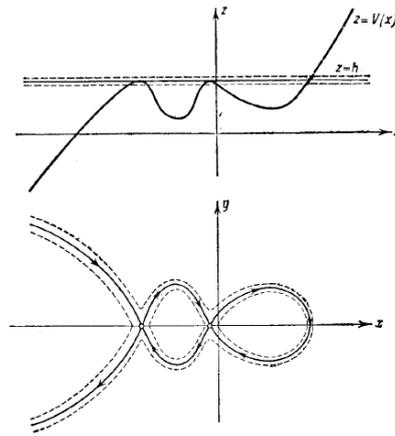


Рис. 2.10. Замкнуті інтегральні криві всередині кожної ланки

При зміні h характер сусідніх кривих істотно залежатиме від того, чи будемо ми збільшувати h або зменшувати. При збільшенні h ми отримаємо інтегральну криву, що охоплює всю досліджувану сепаратрису, весь «ланцюжок» лімітаційних траєкторій. При зменшенні ми отримаємо замкнуті інтегральні криві всередині кожної ланки (рис. 2.10). Звідси зрозуміла роль сепаратрису як кривих, що «відокремлюють», які поділяють області, заповнені траєкторіями різних типів.

в) Нескінченні шматки фазових кривих. В цьому випадку можливо кілька типів кривих. По-перше, це можуть бути траєкторії того типу, який ми вже розглядали в п. 2. По-друге, це може бути сепаратриса у вигляді нескінченного ланцюжка, що простягається в одну або в обидві сторони. Істотно новими тут будуть траєкторії, які тікають при $t \rightarrow +\infty$ і які є лімітаційними при $t \rightarrow -\infty$ або навпаки. Такі траєкторії ми також назвемо сепаратрисами, оскільки на них неодмінно є особливі точки, яким відповідає торкання прямої $z = h$ з кривою $z = V(x)$, і оскільки особливо істотно, характер сусідніх кривих істотно змінюється в залежності від того, чи будемо ми збільшувати або зменшувати h .

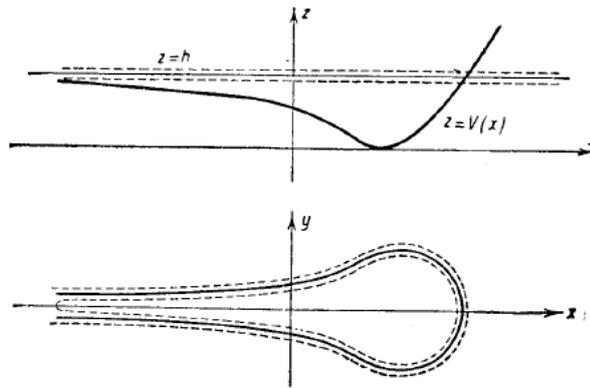


Рис. 2.11. Рух віднесений до сепаратриси

Зауважимо, що до сепаратриси можуть бути віднесені іноді і рухи, які є тікаючими як при $t \rightarrow +\infty$ так і при $t \rightarrow -\infty$. Саме це може бути тоді, коли для даного випадку пряма $z = h$ є асимптотою кривої $z = V(x)$, тому що в цьому випадку ми можемо отримати істотну зміну характеру фазової траєкторії при зміні h .

Подібний приклад для наочності подано на рис. 2.11. При зменшенні h траєкторія, що втікає, перетворюється на періодичну [5].

Отже, резюмуючи отримані результати, дамо перелік можливих рухів:

- 1) Стан рівноваги.
- 2) Періодичні рухи.
- 3) Двічі лімітаційні рухи (як при $t \rightarrow +\infty$ так і при $t \rightarrow -\infty$).
- 4) Двічі тікаючі рухи (як при $t \rightarrow +\infty$ так і при $t \rightarrow -\infty$).

5) Рухи лімітаційно-тікаючі (при $t \rightarrow +\infty$ лімітаційні, при $t \rightarrow -\infty$ тікають, або навпаки). Можна показати [13] (про це ми ще поговоримо), що для консервативних систем майже всі рухи або періодичні, або двічі тікають, тобто якщо ми вважатимемо всі початкові значення на фазовій площині рівноймовірними, то ймовірність потрапити на початкові умови, що відповідають рухам типу 1), 3), 5), що дорівнює нулю, «рідко» вони розташовані. Однак фазові траєкторії, що відповідають цим рухам, відіграють велику роль на фазовій площині: вони є сепаратрисами - кривими, якими відокремлюють один від одного на фазовій площині траєкторії різних видів.

Також потрібно дослідити закон розподілу особливих точок по прямій $y = 0$, де вони в нашому випадку тільки і можуть бути розташовані, і закони співіснування особливих точок і замкнутих фазових траєкторій. І перше і друге питання було вирішено Пуанкаре для загального випадку неконсервативної системи, і ми дамо цей розв'язок надалі. Для аналізованого окремого випадку відповідь ці питання виходить із найпростіших міркувань. Відповімо спершу на перше запитання. Очевидно, що максимуми та мінімуми кривої $z = V(x)$ чергуються між собою. Звідси випливає, що особливі точки типу сідла і центру також чергуються між собою на осі абсцис фазової площини.

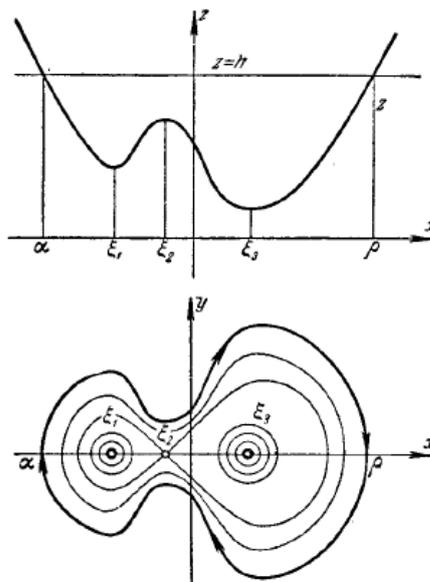


Рис. 2.12. Фазовий портрет співіснування замкнутих фазових траєкторій та особливих точок

Щоб відповісти на друге питання про співіснування замкнутих фазових траєкторій та особливих точок, потрібно також звернутися до площини балансу енергії (рис. 2.12) [9].

Нехай у нас є на фазовій площині замкнута крива $\alpha\rho$. Тоді на площині балансу енергії точкам α, ρ відповідають точки, в яких пряма $z = h$ перетинає криву $z = V(x)$. Розглянемо функцію $\Phi(x) = h - V(x)$. Для нашого випадку $\Phi(\alpha) = 0, \Phi(\rho) = 0$ і $\Phi(x) > 0$ для $\alpha < x < \rho$. Тому на підставі теореми Роля

ми можемо стверджувати, що існує таке значення $x = \xi$ ($\alpha < \xi < \rho$), для якого $\Phi'(\xi) = 0$ або, що все одно, $V'(\xi) = 0$.

Таким чином, ми довели, що всередині замкнутої фазової траєкторії неодмінно є принаймні одна особлива точка або, інакше кажучи, періодичний рух неодмінно відбувається навколо положення рівноваги. З геометричних міркувань видно, що й ця особлива точка єдина, вона відповідає мінімуму потенційної енергії і є особливою точкою типу центра;

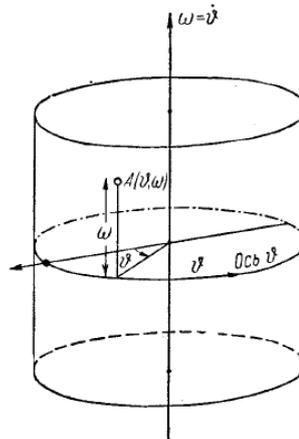


Рис. 2.13. Фазова поверхня маятника у вигляді циліндра

якщо ж таких особливих точок кілька, то центри і сідла завжди чергуватимуть, причому число центрів завжди на одиницю більше числа сідел. Ми можемо сформулювати таку теорему: у разі консервативної системи всередині замкнутої фазової кривої неодмінно є непарне число спеціальних точок, причому кількість центрів на одиницю більше числа сідел [6, 11].

В якості підсумку розглянемо звичайний маятник (з одним ступенем свободи), нехтуючи силами тертя і не обмежуючись малими кутами відхилення від вертикалі. Ця консервативна система дещо виходить за межі щойно викладеного, оскільки як фазова поверхня не може бути взята площину. У дійсності положення маятника визначається кутом (позначимо його через ϑ) і значення ϑ , що відрізняються на 2π , визначають те саме його положення. Тому, якби ми взяли як фазову поверхню маятника звичайну площину з декартовими координатами ϑ , $\dot{\vartheta}$, то точки цієї площини ($\vartheta +$

$2\pi k, \vartheta$), де k - будь-якого цілого числа, відповідали б тому ж стану, що й точка $(\vartheta, \dot{\vartheta})$, тобто було б порушено вимогу взаємно-однозначної та безперервної відповідності між станами системи та точками її фазової поверхні. Ця вимога буде виконана, якщо як фазова поверхня маятника ми візьмемо не площину, а циліндр (рис. 2.13). Циліндричність фазової поверхні маятника, очевидно, пов'язана з наявністю двох різних типів рухів маятника: рухів без провороту навколо осі та рухів з проворотами. Рівняння маятника, як відомо, може бути записане у вигляді

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mgl \sin \vartheta = 0 \quad (2.17)$$

де I момент інерції, l відстань від центру тяжіння до точки підвісу, $P = mg$ вага маятника (кут ϑ відраховується від вертикалі, спрямованої вниз). Рівняння (2.17) можна привести до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{mgl}{I} \sin \vartheta \quad (2.18)$$

Для отримання диференціального рівняння інтегральних кривих на фазовому циліндрі (або його розгортці) розділимо друге з рівнянь (2.18) на перше:

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = -\frac{mgl}{I} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\omega} \quad (2.19)$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо інтеграл енергії (або, інакше, рівняння сімейства інтегральних кривих рівняння (2.19)):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - mgl \cos \vartheta = h (= const) \quad (2.20)$$

Для побудови інтегральних кривих скористаємося прийомом, вказаним вище. Побудувавши на допоміжній площині ϑ, z криву

$$z = V(\vartheta) = -mgl \cos \vartheta \quad (2.21)$$

і розташували під нею розгортку фазового циліндра, неважко на останній побудувати сімейство інтегральних кривих, користуючись тим, що згідно (2.20)

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{h - V(\vartheta)}}$$

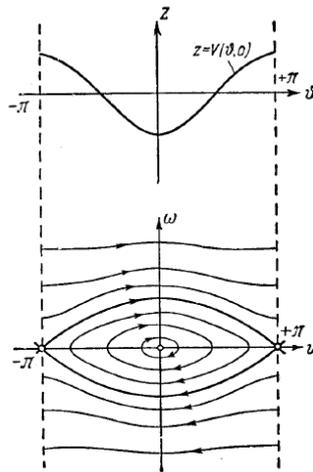


Рис. 2.14. Фазовий портрет спеціальної точки $(0, 0)$ типу центр.

Така побудова дана на рис. 2.14 Спеціальна точка $(0, 0)$ центр (їй відповідає константа інтегрування $h = -mgl$). Вона охоплюється континуумом замкнутих фазових траєкторій, для яких $-mgl < h < +mgl$. Ці фазові траєкторії, очевидно, відповідають періодичним коливанням маятника біля нижньої рівноваги без провороту навколо осі. При константі інтегрування $h = +mgl$ виходить інтегральна крива, що проходить через сідло $\pm\pi, 0$, тобто складається з сідла та його сепаратрис (першому відповідає верхнє, нестійке положення рівноваги, лімітаційні рухи маятника, при яких маятник асимптотично при $t \rightarrow +\infty$ наближається до верхнього положення рівноваги). Для $h > +mgl$ отримуємо траєкторії, що лежать поза сепаратрисом і охоплюють циліндр.

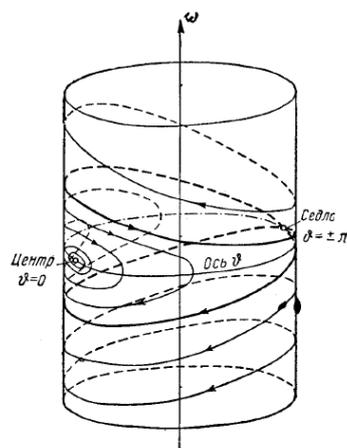


Рис. 2.15. Фазовий портрет маятника - фазовий циліндр, розбитий на фазові траєкторії.

Оскільки для кожної такої траєкторії значення ω при $\vartheta \rightarrow +\pi$ при $\vartheta \rightarrow -\pi$ збігаються, то Ми можемо стверджувати, що ці траєкторії також замкнуті (вони відповідають періодичним оберտальним рухам маятника). «Склеївши» розгортку циліндра по лінії розрізу $\vartheta = \pm\pi$, ми отримаємо фазовий портрет маятника - фазовий циліндр, розбитий на фазові траєкторії (рис. 2.15). Таким чином, всі фазові траєкторії консервативного маятника, крім особливих точок - центру і сідла і сепаратрис сідла, замкнуті, причому є два якісно відмінні типи фазових траєкторій: що охоплюють і не фазовий циліндр [4, 6].

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

3.1. Приклади коливних систем які є математичними моделями нелінійних коливань

Нелінійні явища можуть проявлятися різноманітними способами. Класичний приклад – це нелінійна пружина, у якої відновлювальна сила нелінійно залежить від розтягу.

Осцилятор із кубічною нелінійністю або коливна система Дуфінга є однією із найбільш поширених моделей нелінійних коливань, прикладним застосуванням якої є можливість опису процесів нелінійної хаотичної динаміки. Нелінійна математична модель для осцилятора з степеневою особливістю уперше було виведене 1918 року німецьким інженером Георгом Дуфінгом. В подальшому для багатьох науковців та інженерів дана прикладна модель стала предметом теоретичних і експериментальних досліджень [8].

Задача для коливної системи із кубічною нелінійністю формулюється наступним чином:

$$u'' + au' + bu + gu^3 = f(x), \quad (3.1)$$

$$u(0) = g_1, \quad u'(0) = g_2. \quad (3.2)$$

В нелінійній моделі (3.1) – рівняння Дуфінга, (3.2) – початкові умови, a, b, g – деякі сталі, $f(x)$ – функція, яка характеризує зовнішній вплив, g_1, g_2 – задані функції.

Рівняння (3.1) є математичною моделлю:

- коливань математичного маятника при невеликих кутах відхилення;
- коливань вантажу розміщеного на плоскій горизонтальній поверхні на пружині з нелінійною відновлювальною силою;
- руху частинки в потенціалі із двох діючих центрів;
- коливних систем з особливостями такими як не ізохронність, відсутність гармонічності і мульти стабільність.

Зазначимо, що стан стійкої рівноваги нелінійного рівняння (3.1) зображує періодичний рух, основний період якого дорівнює періоду зовнішньої сили або її цілочислового множнику. У багатьох інших стандартних динамічних системах стійкий стан може бути квазіперіодичним рухом, але у випадку моделі Дуфінга значення додатного коефіцієнту згасання унеможливує таку можливість. Таким чином для даних систем регулярний рух є періодичним стійким станом. Регулярний рух широко вивчається протягом багатьох років, але, через повністю детерміновану природу рівняння, на існування хаотичного руху довгий час не звертали уваги. Характерною особливістю хаотичного руху є його довгострокова поведінка. Ця поведінка не може бути не відтворена у повторних дослідах при абсолютно однакових початкових умовах. Ця обставина суттєво відрізняється від ідеального короткочасного передбачуваного результату, який гарантується детермінованістю природи рівняння (3.1) [14].

У минулому столітті діяла теорія про існування лише трьох класичних типів динамічного руху:

- 1) рівновага;
- 2) періодичний рух;
- 3) квазіперіодичний рух.

Дані стани називаються атракторами, оскільки при наявності будь-якого згасання перехідні відхилення знищуються і система притягується до одного із трьох перерахованих станів.

Схожа теорія існувала також і серед фізиків. Припускалось, що завихрення або турбулентність рідких середовищ є складною формою квазіперіодичного руху. Це твердження було піддано сумніву у 1971 році Руелом і Такенсом, які припустили, що нерегулярні рухи керуються дивними атракторами, які не зводяться до жодного з перерахованих вище класичних атракторів. Дана обставина дає найкраще пояснення турбулентності.

Класичним атракторам відповідають класичні геометричні об'єкти у фазовому просторі: стану рівноваги – точка, періодичному руху – замкнена

крива, а квазіперіодичному – поверхня у тривимірному фазовому просторі. Теорія дивних атракторів широко використовується у синергетиці і сучасній прикладній теорії керування [13].

Іншим важливим класом нелінійних явищ є коливання із властивістю самозбурення, а саме це коливні процеси, які відбуваються у системах без зовнішніх сил періодичної природи. Класичним прикладом самозбурюючої системи є математична модель нелінійних коливань Ван дер Поля, у якій існують стаціонарне джерело енергії і джерело розсіювання (джерелом енергії є стала напруга). У математичну модель осцилятора Ван дер Поля входить ланцюг джерела енергії у вигляді від’ємного опору:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (3.3)$$

Система отримує енергію при малих амплітудах, але при збільшенні амплітуди її ріст обмежується нелінійним згасанням. Нелінійна модель Ван дер Поля має два режими при відповідних значеннях коефіцієнта μ : $\mu = 0$ і при $\mu > 0$. Зрозуміло третього режиму - $\mu < 0$ не існує, оскільки тертя в системі не може бути від’ємним.

При $\mu = 0$ осцилятор розраховується без згасання і тоді рівняння (3.3) набуває вигляду

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (3.4)$$

Як відомо рівняння (3.4) є математичною моделлю гармонійних коливань.

При $\mu > 0$ система має деякі граничні цикли які з віддаленням від початку координат втрачають властивість гармонічності.

У випадку маятника Фроуда, підведення енергії здійснюється стаціонарним обертанням осі. При малих коливаннях нелінійне тертя здійснює роль від’ємного згасання. У той час як при сильних коливаннях амплітуда обмежується нелінійним членом $b\dot{q}^2$:

$$\ddot{q} + a \sin q = T_0 + g\dot{q}(1 - b\dot{q}^2).$$

Коливні рухи таких систем часто називають граничними циклами (замкненими траєкторіями даного векторного поля) [20].

3.2. Дослідження нелінійних коливних систем методом розкладу в ряд за параметром нелінійності

Розглянемо асимптотичний метод розкладу в ряд за параметром нелінійності на прикладі осцилятора з квадратичною нелінійністю [10]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} + \alpha x^2 = 0. \quad (3.5)$$

Нехай, у даному випадку, відомий деякий характерний масштаб коливань. Введемо безрозмірні час і координату, тоді рівняння (3.5) набуде вигляду (штрихи у безрозмірних змінних опускаємо):

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (3.6)$$

де $\varepsilon = \frac{\alpha A}{\omega_0^2}$. Розглянемо випадок слабкої нелінійності, коли $\varepsilon \ll 1$, тобто рівняння (1.8) містить малий параметр. Загалом, слід зазначити, що умовою застосовності будь-якого асимптотичного методу є наявність у рівнянні малого (чи великого) параметру.

Рівняння (3.6) нагадує рівняння лінійного консервативного осцилятора, але відрізняється від нього малим доданком порядку ε . Тому інтуїтивно зрозуміло, що розв'язок буде мати вигляд квазігармонічних коливань [3].

Побудуємо наближений розв'язок рівняння (3.6). Напротіший спосіб, очевидно, полягає у тому, щоб шукати розв'язок у вигляді ряду за степенями малого параметру ε [19]:

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (3.7)$$

вважаючи x_1, x_2, \dots величинами порядку одиниці. В літературі такий прийом називають методом розкладу за малим параметром, або прямим розкладом.

Підставивши ряд (3.7) у рівняння (3.6), отримаємо

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \quad (3.8)$$

Прирівнявши у (1.10) до нуля члени при однакових степенях ε , приходимо до системи рівнянь

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1x_2 = 0, \quad (3.11)$$

...

Рівняння (3.11) є рівнянням гармонічного осцилятора, розв'язок якого має вигляд

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (3.12)$$

де амплітуда a і початкова фаза φ – сталі, що визначаються з початкових умов. Далі підставимо розв'язок (3.11) у рівняння (3.6):

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi). \quad (3.13)$$

Рівняння (3.13) формально співпадає з рівнянням лінійного консервативного осцилятора під зовнішнім впливом. Його розв'язок слід шукати у вигляді

$$x_2 = x_2^{(o)} + x_2^{(h)},$$

де

$$x_2^{(o)} = a_1 \cos(t + \varphi_1)$$

– розв'язок однорідного рівняння, що описує власні коливання осцилятора. Його амплітуда a_1 і початкова фаза φ_1 , як і раніше, визначаються початковими умовами. Другий доданок $x_2^{(h)}$ є частковим розв'язком неоднорідного рівняння. Він являє собою вимушені коливання осцилятора, тобто відгук на зовнішній вплив. Як відомо з теорії лінійних коливань, у спектрі вимушених коливань будуть міститись ті частоти, які присутні у спектрі діючої сили. В даному випадку це нульова (стала складова) і друга гармоніки. Неважко знайти, що

$$x_2^{(H)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi).$$

Тоді

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (3.14)$$

Розв'язок (3.14) містить чотири незалежні сталі: $a_1, \varphi_1, a, \varphi$, для визначення яких є лише дві початкові умови. Тому дві з цих сталих можна вибрати довільно. Найзручніше покласти $a_1 = 0$. Надалі у всіх вищих порядках малості складові, що відповідають власним коливанням, вважатимемо рівними нулю.

Таким чином, остаточний вигляд розв'язку з точністю до членів порядку ε^2 наступний:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left(-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right) + \dots \quad (3.15)$$

Як видно із (3.15), у спектрі коливань з'являються вищі гармоніки: нульова і друга, амплітуди яких мають порядок εa^2 , тобто набагато менші за амплітуду основної складової. Можна продовжити описану процедуру, рухаючись у все вищі порядки малості. У розв'язку з'являться й інші гармоніки: третя, четверта і т. д. Однак їх амплітуди будуть ще меншими (порядку $\varepsilon^{n-1} a^n$, де n – номер гармоніки). Дійсно, оскільки нелінійність являється слабкою, амплітуди вищих гармонік повинні швидко зменшуватись із ростом їх номеру.

Залишається лише знайти константи a та φ . Нехай початкові умови мають вигляд

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Тоді, використовуючи (3.15), отримуємо

$$\begin{cases} a \cos \varphi - \varepsilon \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right) = x_0, \\ a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi = -y_0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Система (3.19) є системою трансцендентних рівнянь, знайти точний розв'язок якої у загальному випадку не вдасться. Проте, враховуючи, що у (1.18) міститься малий параметр, можна представити її розв'язок у вигляді рядів:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots. \end{aligned} \quad (3.20)$$

У розкладах (3.20) потрібно враховувати те саме число членів, що і в розв'язку (3.15). Намагатись знайти a і φ з більш високим ступенем точності, очевидно, не має сенсу.

Підставимо (3.20) у (3.19) і виділимо члени однакових порядків. В нульовому порядку по ε отримаємо

$$\begin{cases} a_0 \cos \varphi_0 = x_0, \\ a_0 \sin \varphi_0 = -y_0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ \varphi_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{cases}$$

Члени порядку ε дають

$$\begin{cases} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 = 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Зауважимо, що система (3.21) є системою лінійних рівнянь відносно a_1 і φ_1 , розв'язати яку не складає труднощів. Підставивши знайдені значення

a_0, φ_0, a_1 та φ_1 у (3.), знайдемо a та φ , підставивши які у (3.15), отримаємо наближений розв'язок вихідної задачі.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто математичні моделі теорії нелінійних динамічних систем і хаотичних коливань. Досліджено основні методи розв'язування моделей нелінійного осцилятора, серед яких особливу увагу приділено якісному методу дослідження, та наведено основні поняття узагальненого методу з параметром нелінійності.

Матеріал даної магістерської роботи може бути використаний при викладанні диференціальних рівнянь, математичного моделювання, методів нелінійного аналізу у вищому навчальному закладі. Наукові положення, висновки і рекомендації, сформульовані в магістерській роботі є достовірними і всебічно обгрунтованими, що підтверджується використанням широкого спектру сучасних методів досліджень, повнотою джерел використаної інформації, а також розробленим комплексом вправ за вказаною методикою для практичного застосування в освітньому процесі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Габрусєв Г. В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с.
2. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посіб. Вид. 2-ге, випр. та доп. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.
3. Головатий Ю.Д., Кирилич В.М., Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь : навч. посіб. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
4. Гутер Р.С. Янпольський А.Р. Диференціальні рівняння. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 1996. – 304 с.
5. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю.К. Рудавський та ін. – Львів : Вища школа, 2001. – 244 с.
6. Клочко Т.В., Кондратьєв Б.В., Лесік Н.І. Дослідження особливих розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку : навч.-метод. посіб. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2012. – 44 с.
7. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. – Київ : Либідь, 2004. – 408с.
8. Самойленко А. М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи : учеб. пособ. – Москва : Высш. шк., 1989. – 383с.
9. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. – Київ : Техніка, 2003. – 368с.
10. Borrelli, Robert L., and Coleman, Courtney S. Differential equations. A Modeling Perspective, Wiley & Sons Inc., New York, 1998, 720p.
11. Boyce, William E., Di Prima, Richard Elementary differential equations and boundary problems, 8th ed., Wiley & Sons Inc., New York. 2009, 796 p.
12. Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. – New York : Springer, 1993. – 660 p.

13. Chicone C. Ordinary Differential Equations with Applications. – New York : Springer, 2006. – 603 p.
14. Curtain R., Zwart H. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory. – Waterloo : CIAM, 1996. – 210 p.
15. Dennis G. Zill. A first course in differential equations with modeling applications, 10th ed., Brooks/Cole, London, 2012, 488p.
16. Hurewicz W. Lectures on Ordinary Differential Equations. – Massachusets : Dover Publications, 2014. – 144 p.
17. Paul Blanchard, Robert L. Devaney , Glen R.Hall. Differential equations, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1998, 864p.
18. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. – New York : Springer, 1993. – 660 p.
19. Tenenbaum M., Pollard H. Ordinary Differential Equations. – Chicago : Dover Publications, 2013. – 832 p.
21. Ueda Y. Survey of Regular and Chaotic Phenomena in Forced Duffing Oscillator. – Huston : Kluwer Academic Publishers – 1991. – 300 p.
22. Zwillinger, Daniel (1998). Handbook of differential equations (3rd ed.). San Diego, CA: Academic Press. 257 p.

Методичні рекомендації для самостійної роботи з теми «Нелінійні звичайні диференціальні рівняння».

Наведемо приклади розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння: $y'' = x + \sin x$.

Розв'язок. Інтегруємо послідовно два рази

$$y' = \int (x + \sin x) dx + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Приклад 2.

Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + 2y'' - x = 0$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = y, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $dy' = y'' dx$, одержуємо

$$dy' = t(3t^2 - 2)dt$$

або

$$dy' = (3t^2 - 2t)dt.$$

Звідси понижуємо порядок рівняння на одиницю

$$y' = \frac{3t^2}{4} - t^2 + C_1 \quad x = t^3 - 2t$$

Знов використовуючи співвідношення $dy = y' dx$, одержуємо

$$dy = \left(\frac{3t^3}{4} - t^2 + C_1 \right) (3t^2 - 2)dt$$

або

$$dy = \left(\frac{9t^5}{4} - 3t^4 - \frac{3t^3}{2} + (2 + 3C_1)t^2 - 2C_1 \right) dt.$$

Звідси загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 - 2t, \quad y = \frac{3t^6}{8} - \frac{3t^5}{5} - \frac{3t^4}{8} + \frac{(2+3C_1)t^3}{3} - 2C_1 t + C_2.$$

Приклад 3.

Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + xy'' = y'$

Розв'язок. Застосуємо параметричну форму запису рівняння

$$y'' = t, \quad y''' = e^{-t}$$

Використовуючи співвідношення $dy' = y''dx$, одержуємо

$$dt = e^{-t}dx.$$

Звідси $dx = e^t dt$ і $x = e^t + C_1$. Запишемо рівняння другого порядку

$$x = e^t + C_1, \quad y'' = t.$$

Відповідно рівняння у параметричній формі має наступний вигляд

$$y'' = t, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $dy' = y''dx$, одержуємо

$$dy' = te^t dt$$

Звідси

$$y' = \int te^t dt = e^t(t - 1) + C_2.$$

Одержали диференціальне рівняння першого порядку:

$$x = e^t + C_1, \quad y' = e^t(t - 1) + C_2.$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, отримаємо

$$dy = (e^t(t - 1) + C_2)e^t dt.$$

Звідси

$$y = \frac{e^{2t}(t-1)}{2} - \frac{e^{2t}}{4} + C_2 e^t + C_3.$$

Остаточно загальний розв'язок має вигляд

$$x = e^t + C_1, \quad y = \frac{e^{2t}(2t-3)}{4} + C_2 e^t + C_3.$$

Якщо вилучити параметр t , то одержимо загальний розв'язок у явній формі.

$$y = \frac{(x - C_1)^2}{4} (2 \ln|x - C_1| - 3) + C_2(x - C_1) + C_3$$

Приклад 4.

Розв'язати рівняння:

$$y'' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Маємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку з неявно заданим аргументом.

Помножимо обидві частини на $2y'dx$. Одержимо

$$2y''y'dx = \frac{2y'dx}{3\sqrt[3]{y}}$$

або

$$d(y')^2 = \frac{2dy}{3\sqrt[3]{y}}$$

Проінтегруємо і одержимо

$$(y')^2 = \sqrt[3]{y^2} + C_1.$$

Звідси $y' = \pm\sqrt{y^{2/3} + C_1}$. Нехай маємо наступні початкові умови:
 $C_1 = \bar{C}_1^2 > 0$. Тобто рівняння має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}$$

Відокремимо змінні

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = \pm \int dx + C_2.$$

Робимо заміну $\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2} = t$.

Тоді

$$y = (t^2 - \bar{C}_1^2)^{3/2}, \quad dy = 3(t^2 - \bar{C}_1^2)^{1/2}t dt.$$

Інтеграл має вигляд

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = 3 \int \sqrt{t^2 - \bar{C}_1^2} dt = 3.$$

Приклади для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $y''x \ln x = y'$;
2. $y'' = x + \cos x$;

Знайти розв'язок задачі Коші:

3. $2xy'' = y'$ при $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0, y''_0 = 0$;
4. $xy'' + y' = x + 1$ при $x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0, y''_0 = 0$;

5. $y'' \tan x = y' + \frac{1}{\sin x}$ при $x_0 = 0, y_0 = 2, y'_0 = 1, y''_0 = 1$.

6. $(y'')^4 + y'' - x = 0;$

7. $y'' + \ln y'' - x = 0;$

8. $y'' - \alpha(1 + (y')^2)^{3/2} = 0;$

9. $y''' - (y'')^3;$

10. $y''' - y'' = 0;$

11. $y'' + 2y'' \ln y' - 1 = 0;$

12. $(y''')^2 + (y'')^2 - 1 = 0;$

13. $y''y^3 - 1 = 0;$

14. $y^3y'' - y^4 + 0;$

15. $4\sqrt{y}y'' = 1;$

16. $3y'' = y^{-5/3};$

17. $(y'')^2 + (y')^2 - (y')^4 = 0.$

Приклад 5.

Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + xy'' = y'.$

Розв'язок. Позначимо $y' = z$, $y'' = z'$. Одержимо рівняння $(z')^3 + xz' = z$, тобто рівняння Клеро, що відповідно інтегрується введенням параметра.

Нехай $z' = p$. Тоді $z = xp + p^3$. Знайдемо диференціал правої та лівої частин:

$$dz = xdp + pdx + 3p^2dp.$$

Підставивши $dz = pdz$, отримаємо $(x + 3p^2)dp = 0$. Це рівняння відокремлюється на два:

$$1. \quad x + 3p^2 = 0.$$

Звідки маємо $x = -3p^2$, $z = -2p^2$. Повертаємось до початкових змінних $x = -3p^2$, $y' = -2p^2$. Використовуємо основне співвідношення $dy = y'dx$, одержуємо:

$$dy = 12p^4 dp \Rightarrow y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

Таким чином перше рівняння дає наступний розв'язок:

$$x = -3p^2, \quad y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

$$2. \quad dp = 0.$$

$$\text{Звідси маємо } z = C_1 x + C_1^3.$$

Повертаємось до початкових змінних $y' = C_1 x + C_1^3$. Здійснивши інтегрування отримаємо інший розв'язок:

$$y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_1^3 x + C_2.$$

Приклад 6.

Розв'язати рівняння:

$$y^4 - y^3 y'' = 1.$$

Розв'язок. Диференціальне рівняння явно не містить аргументу x , отже, його порядок знижується заміною:

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

Звідси одержуємо:

$$y^4 - y^3 p \frac{dp}{dy} = 1.$$

Проведемо відокремлення змінних:

$$\frac{y^4 - 1}{y^3} dy = p dp.$$

Проінтегруємо праву та ліву частини:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} = \frac{p^2}{2} - \frac{C_1}{2}.$$

Звідси одержали:

$$p^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$

Повертаємось до вихідних змінних

$$(y')^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$

Розв'яжемо рівняння відносно похідної

$$y' = \pm \sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}.$$

Розділимо змінні

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = dx.$$

Візьмемо інтеграл

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = + \int \frac{y dy}{\sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1}} = \pm \int \frac{d(y^2 + \frac{C_1}{2})}{\sqrt{(y^2 + \frac{C_1}{2})^2 + (1 - \frac{C_1}{4})}} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| y^2 + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1} \right| +$$

$$y^4 + C_1 y^2 + 1.$$

Таким чином загальний розв'язок має вигляд:

$$x = \pm \frac{1}{2} \ln \left| y^2 + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1} \right|.$$

Приклад 7.

Розв'язати рівняння:

$$y y'' = (y')^2$$

Розв'язок. Зауважимо що рівняння є однорядним по змінним y, y', y'' , то застосуємо заміну:

$$y = e^{\int u dx}, \quad y' = e^{\int u dx} u, \quad y'' = e^{\int u dx} (u^2 + u).$$

Рівняння набуває вигляду:

$$e^{\int u dx} e^{\int u dx} (u^2 + u) = (e^{\int u dx} u)^2.$$

Скоротимо на $e^{\int u dx}$.

Маємо $u^2 + u' = u^2$, або $u' = 0$. Звідси $u' = C_1$ і одержимо загальний розв'язок

$$y = e^{\int C_1 x dx} = e^{C_1 x^2 + \ln|C_2|} = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Приклад 8.

Розв'язати рівняння:

$$y y'' - (y')^2 = y^2.$$

Розв'язок. Розділимо рівняння на y^2 :

$$\frac{y y'' - (y')^2}{y^2} = 1.$$

І перепишемо у вигляді:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = 1.$$

Проінтегрувавши, одержимо загальний розв'язок:

$$\frac{y'}{y} = x + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 x + \ln|C_2| \Rightarrow y = C_2 e^{x^2/2 + C_1 x}.$$

Вправи для індивідуальної роботи.

1. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.
2. $2xy'' = y'$.
3. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.
4. $xy'' + y' = x + 1$.
5. $y'' \tan x - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
6. $x^2y'' + xy' = 1$.
7. $y'' \cot 2x + 2y' = 0$.
8. $x^3y'' + x^2y = 0$.
9. $y'' \tan x = 2y'$.
10. $yy'' - (y')^2 - y^2 \ln y = 0$.
11. $x^4y'' + x^3y' = 1$.
12. $xyy'' - x(y')^2 - 2yy' = 0$.
13. $xyy'' - x(y')^2 = yy' + \frac{x(y')^2}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $x^2y''' - x(y'')^2 = 0$.
15. $x^5y'' + x^4y' = 1$.