Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання математики

Магістерська робота
на тему:
« Методика вивчення теми: «Тіла обертання з використанням ІКТ»

Виконала:
Студентка ІІ-го курсу магістратури,
Групи М-М-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Леошек Ольга Володимирівна
Керівник Крайчук Олександр Васильович
Рецензент_________________________

Рівне - 2022

Зміст

ВСТУП……………………………………………………………………2

Розділ I. Науково-теоретичні основи дослідження…………………….…4

1.1. Вивчення тіл обертання у курсі математики старшої школи……...4

1.2. Характеристика навчально-методичних посібників та статей з даної теми……………………………………………………………………….8

Розділ II. Психолого-педагогічні основи дослідження……………………12

Розділ III. Методика вивчення тіл обертання з використанням ІКТ………26

3.1. Методика вивчення теми «Тіла обертання»……………………………26

3.2. Особливості розв'язування різних видів задач з теми «Тіла обертання»

3.2.1. Задачі на обчислення……………………………………………….38

3.2.2. Прикладні задачі…………………………………………………….42

3.2.3. Задачі на побудову……………………………………………….44

3.2.4. Задачі на доведення……………………………………………….48

3.2.5. Задачі на дослідження……………………………………………….50

3.3. Практична реалізація вивчення теми «Тіла обертання» з використанням ІКТ……………………………………………………………52

3.4. Прикладна спрямованість теми «Тіла обертання»……………………65

ВИСНОВКИ……………………………………………………………71

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………………74

ВСТУП

Повсякденне життя людини, побут, професійна діяльність і вся навколишня природа пов'язані з просторовими об'єктами, ідеальними образами яких є геометричні фігури: призми, піраміди, конуси, циліндри, кулі, тощо. Часто виникає практична необхідність визначити об'єм і площу поверхні об'єктів природи, побуту, виробництва, досліджувати їх розміри, взаємне розташування і т. п. З погляду на це процес навчання стереометрії, зокрема вивчення тіл обертання, потрібно найперше розглядати як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей, а тому спрямувати на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів і на забезпечення їх потреб та основ життєдіяльності.

Огляд методичної та періодичної літератури свідчить про значущість вивчення розділу «Геометричні тіла» для розвитку логічного і просторового мислення, для загальнокультурного та естетичного виховання учнів. Для демонстрації прикладної спрямованості геометрії і в той же час про стурбованість науковців, методистів та вчителів недостатнім рівнем геометричних знань учнів.

В роботі розглянута методика вивчення тіл обертання та побудова їх за допомогою ІКТ. На численних прикладах доведено ефективність побудови фігур за допомогою комп'ютерної графіки. Наведено приклади різних типів задач розв'язаних графічним способом.

За даною темою була учасником XV Всеукраїнській науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Наука, освіта, суспільство очима молодих».

Об'єкт - навчання учнів розв'язку задач з тілами обертання за допомогою методів ІКТ.

Предметом дослідження є використання методів ІКТ при розв'язуванні задач з тілами обертання.

Завдання дослідження:

1. Розглянути вивчення тіл обертання у курсі математики старшої школи.
2. Охарактеризувати навчально-методичні посібники та статті з даної теми.
3. Ознайомитися з особливостями та методикою розв'язування різних видів задач з теми «Тіла обертання».
4. Показати практичну реалізацію вивчення теми «Тіла обертання» з використанням ІКТ

Розділ І. Науково-теоретичні основи дослідження.

1.1. Вивчення тіл обертання у курсі математики старшої школи.

У підручниках і методичних посібниках в різні роки вживались неоднакові терміни відносно розглядуваної теми: «Об'єми круглих тіл» у В. М. Брадіса, «Об'єми тіл обертання» у О. В. Погорєлова, «Об'єми фігур обертання» у Ю. М. Колягіна та ін. Слід мати на увазі, що об'єми фігур обертання більш широке поняття.

У підручнику Погорєлова О.В., як і в переважній більшості інших шкільних підручників і посібників, йдеться про тіла обертання і відповідні їм поверхні: циліндр – поверхня циліндра, конус – поверхня конуса, куля – сфера. Традиційно об'єми тіл обертання і відповідні їм площі поверхонь вивчаються після многогранників. В такому випадку користуються простим та відомим учням понятті «тіло», а послідовність вивчення окремих тіл обертання відповідає прийнятій послідовності вивчення об'ємів многогранників: призма, піраміда, правильний многогранник – циліндр, конус, куля.

Можливий і інший порядок вивчення об’ємів круглих тіл, від якого залежить і їх трактування. Наприклад, О. Д. Александрова та ін. у своєму підручнику спочатку описують відомості загального характеру, які пов’язані з поняттями обмеженої фігури, опуклої фігури, тіла, опуклі тіла, тощо. Далі ознайомлюються з об’ємом тіл обертання, а після того об’ємом многогранників, в послідовності: куля, циліндр, конус. Не традиційно означаються циліндр та конус. Після цього вводиться означення прямого кутового циліндра або циліндра обертання. За таким поясненням циліндр та конус не завжди є тілами. Таке трактування цих геометричних фігур можна було б розглядати в класах, де поглиблено вивчають математику, а для масової щколи поняття складне для сприйняття. Тому здебільшого користуються означенням тіл обертання, яке викладене в підручнику Погорєлова О.В. Тут здійснюється єдиний підхід до означення призми, піраміди, циліндра, конуса та знаходження їх об’ємів.

Означення цих фігур досить широке, бо включає не тільки прямий круговий циліндр (конус), а й похилі. На завершення вводяться означення прямого кругового циліндра і конуса, які найбільше зустрічаються на практиці. Зокрема, циліндром (точніше, круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кіл, що лежать у паралельних площинах та відрізків, які сполучають усі відповідні точки цих кіл. Якщо пригадати запроваджене раніше означення призми, то скориставшись моделлю циліндра і вказівкою на схожість означень призми та циліндра, учні самостійно можуть сформулювати означення циліндра.

В такий самий спосіб можна ввести означення конуса. Поняття вписаної у циліндр та описаної навколо циліндра призми не складне для сприйняття учнів. Після введення цих означень учні самостійно аналогічними міркуваннями формулюють визначення вписаної в конус та описаної навколо конуса піраміди. Означення кулі учні теж здатні сформувати самостійно, якщо їм попередньо нагадати означення круга і привернути їхню увагу до аналогії в означеннях круга і кулі. Варто звернути увагу учнів на аналогію понять коло – сфера. Коло – межа круга, сфера – межа кулі. Те ж саме стосується понять дотичної до кола і дотичної площини до сфери.

Після запровадження означень тіл обертання треба дати учням правила-орієнтири їх правильного і наочного зображення на площині.

Зміст і обсяг стереометрії « Геометричні тіла» визначаються навчальними програмами. Щоб дізнатися, як вивчати геометричні тіла та їх об'єми в шкільному курсі стереометрії, зробимо огляд програм минулих років, простежимо як вони змінювались і вдосконалювались у різні періоди розвитку шкільної освіти.

За програмами, що діяли до 1917р., в школах та гімназіях вивчалася призма паралелепіпед, піраміда, поняття про правильні многогранники рівність і подібність призм і пірамід, циліндр, конус, куля та її частини.

Перша програма з геометрії для шкіл України, яку було надруковано у 1921р., включала такі теми: куб, паралелепіпед, призма, циліндр, конус, поверхні та об'єми цих тіл. За програмою не передбачалося точних доведень, досить було уявити властивості фігур і вміти застосовувати їх на практиці.

З 1924р., коли в Україні було запроваджено комплекси, вивчення різних програмних питань слід пов'язувати з фізичними явищами та іншими подіями. Математика не вивчалась як окремий предмет. Тому ознайомлення учнів з геометричними тілами, їх поверхнями, об'ємами відбувалося в межах загальних тем. Задачі вчитель повинен був складати сам, використовуючи науково-популярну літературу.

У зв'язку з поверненням до класно-урочної системи навчання з обов'язковою програмою і стабільними підручниками в 1932 році вийшли нові програми з математики. Після внесення до них незначних змін у 1938 році програми стабілізувалися і майже не змінювалися до 1954 року. Геометричні тіла вивчалися в такій послідовності: пряма призма, поверхня, і об'єм призми, циліндра, конуса, піраміди, кулі.

Під час вивчення геометрії за новою програмою 1954 року, в основу якої був покладений принцип політехнічного навчання, зверталась увага на розвиток просторових уявлень та конструктивних умінь учнів. Систематичний курс вивчення геометричних тіл передбачався в 10-му класі («Многогранники» - 30 год., «Тіла обертання» - 26 год., повторення курсу – 14 год.).

У 1961-1965 рр. відбувся перехід на одинадцятирічне навчання. Тому, наприклад, у 1961 році вивчення геометричних тіл почалося у 10-му класі, а у 1962 році продовжувалося в 11-му класі і т.д. У 1965 році одночасно закінчували вивчення геометричних тіл учні 10-х і 11-х класів. З 1996 року школа повернулася до 10-річного навчання. Вивчення геометричних тіл відбувалося в 10-му класі.

Вивчення елементів стереометрії в 9-му класі (16 год.) було передбачено за програмами в 1974-1980 рр. У 1986 році вивчення многогранників розпочалося у 9-му класі. З 1990 року відбувся перехід на 11-річне навчання. Геометричні тіла стали вивчати в 11-му класі.

Клас, тема. Рік	11-й клас					
	Многогранники	Тіла обертання	Вимірювання об'ємів	Площа поверхні	Повторення	Комбінації геометричних тіл
1990-1999	16	12	18	6	15	
2000	16	16	16	10	10	
20011-2003	18	14	14	10	8	6

У 2001-2002 навчальному році до програми з математики в 9-му класі введено розділ «Початкові відомості зі стереометрії» (12 год).

З 2005 року відбувся перехід на 12-річне навчання . Геометричні тіла та поверхні почали вивчати в 11-му класі, а тему: «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» в 12-му класі.

Аналіз програми різних часів дає змогу стверджувати, що зміст розділу стереометрії «Геометричні тіла» один із найстабільніших у курсі шкільної математики. Але, враховуючи вимоги до математичної освіти та досвід попередніх років, необхідно удосконалювати підходи до структури розділу, методу введення понять, вибору методів доведення теорем.

1.2 Характеристика навчально-методичних посібників та статей з даної теми.

Під час підготовки до проведення експерименту було опрацьовано ряд статей про тіла обертання в математичних газетах та журналах, методичні підручники. Вони слугували науково-теоретичними основами для дослідження деяких навчально-методичних статей та підручників.

«Методика навчання математики» (Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища школа, 2006. – 585с..)

Пропонований підручник з методики навчання математики є другим, переробленим і доповненим виданням підручника «Методика навчання математики» (К.:Зодіак-Еко,2000). Його створено відповідно до сучасних вимог до професійної підготовки майбутнього вчителя математики загальноосвітньої школи і професійно-технічних навчальних закладів. Підручник призначено для студенті в математичних спеціальностей вищих педагогічних закладів і університетів, які готуються до педагогічних навчальних закладів і університетів, які готуються до педагогічної діяльності як учителі та викладачі математики. Він стане у пригоді також учителям шкіл і викладачам професійно-технічних училищ, технікумів.

Підручник підготовлено з урахуванням курсу методики математики і чинної програми шкільного курсу математики.

Він складається з двох частин: загальної методики і методики навчання окремих.

Методику навчання окремих предметів шкільного курсу подано відповідно до ступенів навчання – в основній і старшій школі. Це сприяє підготовці студентів до педагогічної практики на останніх курсах навчання.

Особливістю підручника є прагнення автора максимально використати досягнення психолого-педагогічної науки і шкільної практики у навчанні математики учнів різних вікових груп.

У підручнику розглянуто можливі підходи до вивчення навчального матеріалу з основних змістових ліній шкільного курсу, враховано здобутки вчителів-новаторів і передових вчителів України, а також зарубіжний досвід.

Прикладна спрямованість теми "Тіла обертання".(Бевз Г.П. Прикладна спрямованість теми "Тіла обертання //Математика в школі. 1985, №5. С 27-29.)

У даній статті йдеться про прикладну спрямованість останнього розділу курсу геометрії 10 класу. Автор даної статті Г. П. Бевз Він звертає увагу учнів на те, що більшість деталей, що виточуються з дерева або металу на

токарних верстатах, - тіла обертання. І посуд, що виготовляється на гончарних кругах, і скляні банки, пляшки, стакани, пробірки, і різні котушки, барабани, вали, шайби, заклепки, лінзи, патрони, спортивні диски, м'ячі, обручі все це матеріальні тіла, що мають форму тіл обертання. І де б не опинився випускник школи після її закінчення, він напевно буде мати справу з подібними тілами. Особливу увагу при вивченні теми «Тіла обертання» слід звернути на розв'язування прикладних завдань, щоб учні мали можливість самостійно моделювати, а не тільки аналізувати вже готові математичні моделі. Бажані при цьому і такі завдання, які вимагають для свого розв'язання, окрім обчислень і перетворень, ще і вимірювання. «Використання комп'ютера на заняттях з геометрії.»(Т.Л. Архипова, Т.М. Плакун, „Використання комп'ютера на заняттях з алгебри"// Математика, 2004р., №42.С. 8-11.)

Цю статтю написали два вчителі, які вже мають певний досвід з використання комп'ютерних програм при вивченні геометрії, зокрема стереометрії. Вони стверджують, що це полегшує роботу вчителеві та більше зацікавлює учнів. У розв'язуванні стереометричних задач важливим є побудувати малюнок і вміти їх застосовувати при розв'язуванні задач, що не всім учням легко дається. Використання, наприклад, програм MathCad, Grand полегшить це завдання, дасть можливість використовувати свої знання у різних ситуаціях. Програмні продукти Microsoft (Excel, Word, Power Point, Access, Paint) створюють чудові можливості для підвищення ефективності навчання математики. За допомогою Power Point учні створюють авторські творчі презентації окремих тем математики. Утворюється "Віртуальна математична енциклопедія". Це необмежені можливості для розвитку творчих здібностей учнів. Програма Access застосовується для створення бази даних з потрібних тем.

Програма Paint застосовується під час вивчення курсу креслення, але може бути застосована й у вивченні стереометрії (зображення фігур у тривимірному просторі, побудова їх перерізів). Використання програми дає можливість розвивати просторове та логічне мислення. Потрібно, щоб самі учні на уроках інформатики писали програми для використання їх при розв'язуванні геометричних задач. Такі завдання змусять учнів ще раз повторити, а тому і краще запам'ятати формули, в них буде краще розвиватись логічне мислення.

«Навчаючі програми з математики»(Смалько О.А. Навчаючі програми з математики. // Математика в школі. - 2000, №2. С. 14-17.)

Автор даної статті О.А.Смалько описує роботу таких навчаючих програм з математики як: Репетитор «Кирило та Мефодій» та «Шкільний курс математики».

«Репетитор з математики Кирило та Мефодій» дає змогу кожному, хто бажає спробувати свої сили у вступі до одного із запропонованих навчальних закладів, має змогу зареєструватися, обрати собі віртуального викладача, ознайомитися із потрібною інформацію. Програма дозволяє скористатися підказкою, а також створює умови вільного просування до наступних запитань, вона не обмежує в часі абітурієнта, що є позитивним аспектом, оскільки в такому разі є можливість використання різноманітних мислительних стратегій, що дає можливість найбільш адекватно оцінити якість знань користувача за допомогою комп'ютера.

Навчаючий програмний продукт «Шкільний курс математики» містить означення, теореми, ознаки та інші теоретичні відомості з розглядуваної теми, також користувачам пропонується найпоширеніші методи розв'язування задач.

Ці навчаючі програми з математики дають учневі змогу повторити пройдений матеріал, а також перевірити свої знання удосконалити їх за допомогою теоретичних відомостей.

«Методика розв’язання стереометричних задач»(Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач. - К.: Радянська школа. - 1988.)

Пропонований збірник стереометричних задач призначений для школярів, вчителів, керівників математичних гуртків, студентів педагогічних університетів та всіх кому потрібні стереометричні задачі. Він складається із задач різних рівнів складності. Збірник укладено відповідно до програми для шкіл з поглибленим вивченням математики. Автори намагалися зібрати якомога більше ідей розв'язування стереометричних задач, починаючи від традиційних та закінчуючи нестандартними задачами підвищеної складності

На початку кожного розділу наводяться короткі теоретичні відомості, потім на прикладах ілюструються різні методи розв'язування типових задач та пропонуються кілька способів розв'язання однієї та тієї ж задачі для порівняння ефективності означених методів.

У книжці вміщено велику кількість різних прикладів розв'язування стереометричних задач. Це дає змогу навіть малодосвідченому читачеві ґрунтовно вивчити порушені питання.

Розділ ІІ. Психолого-педагогічні основи дослідження.

Математика, поряд з іншими шкільними предметами розв’язує задачі всебічного гармонійного розвитку і формування особистості. Отримані при вивченні математики уміння і навички, досягнутий розумовий розвиток повинні допомогти випускникам школи в адаптації до швидкозмінних умов виробничої діяльності. На жаль, зміст шкільного курсу завжди відстає від розвитку математики та й застосувань. З прогресом науки і виробництва суспільство висуває нові вимоги до рівня шкільної математичної освіти, що спричиняє потребу періодично модернізувати зміст шкільного курсу математики.

Тому не випадково задача розвитку розумових здібностей, мислення, загальний розвиток учнів включається на сучасному етапі в основні завдання навчання математики [10]

Психологи вважають, що найбільш загальним засобом розумового розвитку школяра є його навчання. З.1. Калмикова [33] виділяє такі складові навчання:

узагальнення діяльності думок;

спрямованість на абстрагування і узагальнення суттєвого в матеріалі;

свідомість мислення, визначена співвідношенням його практичної та словесно-логічної сторони;

гнучкість мисленнєвої діяльності;

стійкість мисленнєвої діяльності;

самостійність мислення, сприйняття допомоги.

У психології використовується термін научування, котрим найчастіше називають будь-який процес отримання знань - як в результаті організованої навчально-пізнавальної діяльності, так і стихійне здобуття знань, умінь і навичок (наприклад, з допомогою книг, радіо, телебачення, спілкування з людьми і т.д.). Цілеспрямовано організоване і направлене научування називають навчанням. Навчання при цьому розглядається як процес стимуляції зовнішньої та внутрішньої активності учня та керівництво нею, в результаті чого в учня формуються знання, уміння і навички.

Сутність сучасних психологічних концепцій научування розкрита в роботах А.Б.Ітельсона, Н.Ф. Тализіної [19].

Першою сформувалась *асоціативна концепція научування*, яка ґрунтується на Аристотелевій теорії пізнання. Основним поняттям цієї концепції научування є поняття *асоціації*. Асоціація в психології - це зв'язок, який утворюється при визначених умовах між двома чи більше психічними явищами (відчуттями, рухомими діями, уявленнями, ідеями і т.п.), дія цього зв'язку - актуалізація асоціацій - полягає в тому, що поява одного явища регулярно приводить до появи іншого (інших). Психофізичною основою асоціації вважається умовний рефлекс.

Суть асоціативної концепції научування: всяке пізнання починається з відчуттів і зводиться до комбінації відчуттів, сприйняття утворюються із поєднання і злиття відчуттів, із сприйняттів утворюються уявлення, а з останніх - поняття. Сутність научування - засвоєння людиною зв'язків, які існують між об'єктами, їх властивостями, діями, психічними станами і т.д. *Зміст* научування - утворення асоціацій між елементами чуттєвого досвіду людини [22].

Умовою научування є наявність між об'єднуючими елементами спільності фізичної (сусідство в просторі і часі), психологічної (схожість і контраст), функціональної (відношення цілі і засобу, якості і кількості, причини і наслідку і т.п.), логічної (відношення часткового до загального, виду до роду, посилань до висновків і т.д.).

Основу научування складають спостереження і порівняння, розрізнювання і ототожнення, розділення і об'єднання, синтез, аналіз. Звідси випливають принципи дидактики: наочність, доступність, міцність, систематичність, послідовність, перехід від часткового до цілого, від знайомого до незнайомого, від близького до далекого і т.д., сформульовані Яном Амосом Коменським.

Загальна схема процесу навчання, яка базується на асоціативній концепції, була розроблена німецьким педагогом І.Гербартом. Моделі процесу навчання, які будувались на основі асоціативних концепцій, недостатньо готували школярів до життя, до практичної діяльності. На початку XX століття, коли розвиток виробництва висунув нові соціальні вимоги до школи, рівня загальної освіти, асоціативні теорії научування виявились нездатними для побудови моделей навчання, які відповідають новим вимогам.

У цей період психологи і фізіологи розробляють різноманітні варіанти *умовно-рефлекторної концепції научування*. В умовно-рефлекторній концепції *сутність* научування полягає в освоєнні істотних властивостей предметів і явищ, корисних дій і форм поведінки, які спираються на ці властивості.

Зміст научування полягає в утворенні зв'язків між безумовними (вродженими) подразниками і умовними (набутими) реакціями організму чи сигналами зовнішнього середовища. Необхідними умовами утворення названих зв'язків для класичних умовних рефлексів є підкріплення (один із сигналів повинен відповідати визначеним вимогам суб'єкта) і повторення (за достатньо короткий час співпадання умовного і безумовного сигналів повинно відбуватись на практиці кілька разів). *Результатом* навчання є аналіз, синтез і оцінка зовнішньої інформації, а також вибір і закріплення нових корисних видів поведінки.

Із умовно-рефлекторної концепції навчання випливає модель процесу навчання, головна ланка якої - виявлення учнями властивостей і законів реальності на основі власного досвіду, дослідів, намагань, спроб і помилок. Найбільш дієвим методом навчання є методи, пов'язані з активною діяльністю учня: спостереження і експеримент, різноманітні види праці,
моделювання, розрахунки, оформлення результатів і висновків, робота з літературою, підготовка рефератів, обговорення та аналіз результатів діяльності. Ця модель процесу навчання привела педагогів до поняття важливості пізнавальної діяльності дитини, з потребами учнів, активізації пізнавальної, зв'язку навчання дослідницької і практичної діяльності учнів [22]

Однак умовно-рефлекторна концепція навчання пристосовувала навчання до індивідуальних обмежених потреб та інтересів дитини, а не до потреб та інтересів суспільства. Завдання управління пізнавальною діяльністю школярів представники умовно-рефлекторної концепції научування бачать у виявленні психологічної природи тих чи інших асоціацій, що, на їх думку.

дає можливість управляти процесом їх вироблення, усувати помилкові асоціації, створювати нові їх види. Але умовно-рефлекторна концепція навчання виявилась не в змозі пояснити деякі аспекти процесу навчання, зокрема системний підхід до структури навчально-пізнавальної діяльності. Кібернетика довела, що для будь-яких організованих систем ціле визначають не зв'язки окремих елементів, а, навпаки, ціле визначає способи з'єднання елементів. У відповідності же із асоціативною і умовно-рефлекторною концепціями научування ціле завжди будується із елементів, відношення – із окремих зв'язків цих елементів, а структура – із часткових відношень.

У зв'язку з новими освітніми вимогами з'явилась *знакова* концепція навчання, в основу якої покладені смислові зв'язки, або, як ще їх називають, знакові, семіотичні зв'язки. Глибокі дослідження ролі знакових відношень у психічній діяльності провів російський психолог Л.С. Виготський. Він показав, що поява в людини особливої форми відображення реальності - понять і їх спеціальної системи знаків (мови) для позначення понять і їх відношень - дало можливість засвоювати накопичені людством знання про загальні властивості реальності.

Знакова концепція научування характеризується такими параметрами: суть навчання - формування у тих, хто вчиться, понять і їх систем, що відображають істотні відносини реальності; зміст научування відшукання і використання цих відносин, відображення їх в поняттях і закріплення в словах; умови научування -виявлення і абстрагування відносин, значущих для суспільної практики, встановлення їх характеру і спільності, закріплення їх в словах; основа научування – утворення знакових відносин між поняттями і відповідними їм термінами, між поняттями і відображеними в них реальним носинами [22].

Перевага знакової концепції научування в тому, що вона вводить в процес научування слово, як знаряддя научування, на додаток до спостереження і сприйняття. Навчання розглядається, як формування в учнів системи понять і принципів, а не тільки накопичення суми різноманітних знань і відомостей.

Спираючись на досягнення Л.С. Виготського і С.Л.Рубінштейна, в нашій країні основи знакової концепції научування розробляли Н.А.Менчинська,

Д.Н. Богоявленський, Г.С.Костюк, Е.Н.Кабанова-Меллер, В.В. Давидов, Д.Б. Эльконін і ін., в США - Дж. Брунер [16]

У психології прийняте трактування механізму мислення, сформульоване С.Л.Рубінштейном: «Процес мислення - це перш за все аналіз і синтезування того, що виділяється аналізом, а потім абстракція і узагальнення, що є похідним від них. Закономірності цих процесів в їх взаєминах один з одним, суть – основні внутрішні закономірності мислення» [16].

Для асоціативної, умовно-рефлекторної і знакової концепцій научування загальним є переважно пізнавальний характер психічної діяльності. Разом з ними в нашій країні і за кордоном інтенсивно розробляється *операційна концепція научування*, яка спирається на орієнтовно-операційну структуру психічної діяльності індивіда і в більшій мірі, ніж інші концепції научування, вирішує проблему зв'язку знань і дій.

У основу цієї концепції покладено учення про *ітеріоризації.* Процесом ітеоризації називають процес перетворення зовнішніх реальних дій з предметами у внутрішні, ідеальні. За основну структурну одиницю процесу мислення в цій теорії приймається дія. Операціональними структурами мислення є практичні дії над об'єктами, перенесені в ідеальний план і здійснювані як розумові дії над образами цих об'єктів. За кордоном найбільш відомими дослідженнями в області операціональної концепції научування є роботи Ж. Піаже [22]. У нашій країні варіантом операціональної концепції научування є теорія *поетапного формування розумових дій*, запропонована П.Я.Гальперіним [32]. Основне положення цієї теорії полягає в тому, що психічна діяльність є результат перенесення зовнішніх матеріальних дій у план віддзеркалення - в план сприйняття уявлень і понять. Процес такого перенесення здійснюється через ряд етапів. на кожному з яких відбувається нове віддзеркалення, відтворення дії і його систематичне перетворення.

Научування, згідно теорії Гальперіна, зводиться до засвоєння ерієнтирів діяльності і розумових дій, потрібних для її планування і здійснення в заданих умовах. Звідси научування є управлінням психічною діяльністю учня на основі навчання розумовим діям і пізнавальним структурам.

Для повноцінного формування будь-якого нового знання і уміння П.Я. Гальперін пропонує таку послідовність етапів [8]:

Створення мотивації. При цьому внутрішня мотивація (інтерес до самого процесу діяльності) виявляється надійнішою, ніж зовнішня (коли дія виконується заради зовнішніх по відношенню до дії цілей).

Роз'яснення або виділення схеми орієнтовної основи дії На цьому етапі учні з'ясовують, як і в якій послідовності здійснюються орієнтовні і контрольні операції, що входять до складу дії.

Формування дії в матеріальній або матеріалізованій формі ефективніше починати навчання з формування матеріалізованої, а не матеріальної форми дії, оскільки навчання направлене в основному на формуванні теоретичних знань. Але після формування матеріалізованої форми дії необхідно переходити до етапу матеріальної дії (до аналізу реальних предметів). На третьому етапі вводиться мова. Учні коментують здійснювану дію

Формування дії в гучній мові бет опори на матеріально-матеріалізовані засоби. Всі складові дії операції повинні бути засвоєні в мовленнєвій формі. Звичайно, дотримується така послідовність: спочатку дія промовляється «своїми словами» потім поступово переходять до наукової мови, яка виступає кінцевим результатом цього етапу.

Формування дії у внутрішній мові (про себе), що є перехідним ступенем для переведення дії в розумовий план. На цьому етапі дія починає скорочуватися і автоматизуватися.

Перехід дії у внутрішню мову, а внутрішньої мови - в чисту думку. На цьому етапі дія набуває автоматичного перебігу недоступною самоспостереженню. Свідомості відкривається тільки продукт цього процесу.

Згідно з теорією поетапного формування розумових дій етапи засвоєння знань розглядаються спільно з етапами засвоєння діяльності. Знання із самого початку включаються в структуру діяльності. Якість знань при цьому визначається їх адекватністю діяльності, яка використовується для їх засвоєння. «Знання ніколи не можна дати в готовому вигляді. Вони завжди засвоюються через включення їх в ту або іншу діяльність», - вказує Н.Ф. Тализіна [19].

Теорія поетапного формування розумових дій обґрунтовує вимоги до організації контролю в процесі засвоєння знань. На перших двох етапах засвоєння знань контроль повинен бути післяопераційним. На 3-му і 4-му систематично контролювати кожне подальших етапах контроль може бути епізодичним [16]

Теорія поетапного формування розумових дій, як і програмоване навчання, краще інших концепцій научування вирішує проблему управління процесом навчання. Перевага її перед програмованим навчанням в тому, що вона планує не тільки зміст знань, але і шляхи оволодіння ними, операції мислення, дії, строго адекватні засвоюваним знанням, шляхи контролю засвоєння знань Тим самим здійснюється програмоване управління всім процесом навчання.

Основними принципами процесу навчання, що випливають з операційної теорії научування, є:

а) введення понять, ідей і методів в ході розв'язування задач на їх застосування;

б) розчленовування розумової діяльності на розумові дії, що входять в її склад;

в) формування в учнів системи розумових дій для розв'язування різних типів навчальних завдань, видів навчально-пізнавальної діяльності;

г) використання наочних і мовних дій, які в процесі ітеріоризації переходять в розумові.

З операціональної теорії научування і сформульованих принципів випливає модель навчання, як управління психічною діяльністю учнів через організацію наочно-мовленнєвої діяльності.

Недоліком цієї теорії, зокрема, є відокремлення внутрішньої мови на перших етапах навчання, оскільки мова важлива на всіх етапах пізнавального процесу. Теорія поетапного формування розумових дій ще недостатньо повно розроблена для всіх рівнів навчання, наприклад, для рівня формування і розвитку творчої діяльності учнів.

Кожна з розглянутих теорій научування і відповідна модель процесу навчання спрямовані на підвищення ефективності засвоєння знань, умінь і навичок і пояснюють різні сторони навчання. Тому важко прийняти за основу яку-небуть одну з них, але висновки і принципи кожної з концепцій научування можуть з успіхом використовуватися під час навчання математики.

Практика навчання показує, що особливістю пізнавальної діяльності слабковстигаючих і середньовстигаючих з математики учнів є несформованість загальних розумових прийомів - аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення і специфічних дій, властивих певним видам діяльності. Це виражається в невмінні виділяти основне в навчальному матеріалі, встановлювати істотні зв'язки між поняттями та їх властивостями, в повільному темпі просування, в швидкому забуванні засвоєних знань, в труднощах засвоєння нових знань і видів діяльності, що спричиняє розумову пасивність, невіру в свої сили, потребу в постійній опіці. Тому головне в роботі з неуспішними і слабовстигаючими учнями з математики кропітка, систематична робота з формування в них прийомів загальних і специфічних розумових дій.

Але щоб цілеспрямовано проводити цю роботу, вчитель сам повинен добре знати зміст і структуру загальних і специфічних розумових дій, прийоми їх виконання, бачити їх роль у різних видах навчально-пізнавальної діяльності в процесі навчання математики.

Важливе завдання процесу навчання математики в школі домогтися глибокого і міцного засвоєння учнями теоретичних знань: математичних понять, їх властивостей (аксіоми, теореми), правил, законів, сформувати навички й уміння застосування теоретичних знань на практиці та оволодіння способами творчої діяльності, досягти глибокого усвідомлення учнями світоглядних і морально-етичних ідей. Слід розрізняти поняття «процес навчання» і «процес одержання освіти». Навчання, у тому числі й математики, забезпечує освіту лише за умови його формувального впливу на особистість. М.Г. Чернишевський вважав, що для того, щоб людина була освіченою у повному розумінні слова, потрібні три властивості: широкі знання, звичка мислити і шляхетність почуттів [8].

На сучасному етапі розвитку школи в дидактиці навчання трактується як цілеспрямований педагогічний процес організації стимулювання активної навчально-пізнавальної діяльності учнів для оволодіння науковими знаннями, навичками і уміннями, розвитку творчих здібностей світогляду, морально-етичних поглядів і переконань Процес навчання - тим, хто вчить, і тим, хто навчається.

Навчання - складний і багатогранний процес метою є прагнення дати (або отримати) цілісне уявлення про оточуючий матеріальний світ. Для досягнення цієї мети необхідно враховувати фізіологічні, психологічні та педагогічні особливості цього процесу.

Просторове мислення, як відомо, є складовою частиною чуттєво-образного мислення і не є апріорі визначеним, запрограмованим від народження. Воно формується в процесі індивідуального розвитку людини. Для правильного його формування слід спиратися насамперед на здобутки в галузі фізіології та психології, зокрема на відкриття явища асиметрії півкуль головного мозку. Ще порівняно недавно існувала думка про їх рівноправність щодо деяких функцій. Проте досліди Р. Сперрі та його послідовників. а також досягнення вітчизняної науки переконливо свідчать про функціональні відмінності півкуль головного мозку у сприйнятті образів реального світу, формуванні мислення.

Відомо, що ліва півкуля керує роботою правої частини людського тіла, а права відповідає за рух лівих кінцівок і чуттєвість його лівої частини. Крім того, у лівій півкулі локалізовані центри мови, хоча не можна повністю виключати здатність правої півкулі розуміти мову. Дослідження Р. Сперрі показали, відокремленні півкуль ліва рука, керована правою півкулею, здатна відтворити показаний рисунок або зобразити куб у трьох вимірах, тоді як права не може виконати жодну з цих вправ. З цих досліджень було зроблено припущення, що ліва півкуля спеціалізована на оперуванні словами та іншими умовними знаками, права ж оперує образами реальних об'єктів, відповідає за орієнтацію в просторі.

За допомогою «лівопівкульної» стратегії будь-який матеріал організується так, що створюється однозначний контекст, який розуміється всіма однаково та необхідний для успішного спілкування між людьми. Відмінною ж особливістю «правопівкульної» стратегії є формування багатозначного контексту, який не піддається вичерпному поясненню у традиційній системі спілкування.

Тому просторово-образне мислення забезпечує сприйняття реальності в усій її багатогранності, дає можливість орієнтуватись у просторі багатьох вимірів, зокрема в реальному тривимірному просторі. Стратегія лівої півкулі полягає у здатності серед багатогранності зв'язків між предметами та явищами відібрати основні, найістотніші.

Сучасна система освіти, зокрема й геометричної (коли у школі вивчаються два розмежовані курси «Планіметрія» та «Стереометрія»), спрямована, переважно, на розвиток формально-логічного мислення, на оволодіння способами побудови однозначного контексту. Можливо, з точки зору дидактики, таке розділення й доцільне, але цим самим «закріпачується» образне мислення. Тривалий час плоскі фігури розглядаються відірвано від аналогічних їм просторових, що створює штучне обмеження мислення двовимірним простором і призводить до послаблення просторової інтуїції, просторових уявлень, стримує розвиток інтелектуальних і розумових здібностей учнів. І чим більше прикладається для зусиль того, щоб логіко-знакове мислення було домінуючим, тим складніше зламати цей стереотип потім. Набагато корисніше та ефективніше було спочатку спрямувати більше зусиль на формування образного мислення, а потім, під час формування формально-логічного, на певне обмеження потенційних можливостей першого, на його впорядкування. Так само штучне розмежування геометрії на два предмети замінити систематичним вивченням в основній школі курсу планіметрії та елементів стереометрії.

Формування образного мислення в усій повноті та своєрідності його функцій необхідна умова ефективного засвоєння знань. Разом з тим це один із важливих засобів розвитку особистості.

Дитина не народжується з уже сформованою тією чи іншою системою мислення. Його логічна та образна складові розвиваються в процесі навчання, виховання залежно від того, у якому напрямку цей розвиток спрямовано. Щоб створити сприятливі умови такого розвитку, найперше, мають бути враховані вікові особливості дитини.

Психологи Б.Г Ананьев, Єф Рибалко, В.І. Зикова, Е А. Фарапонова стверджують: сприйняття простору дітьми вже у дошкільному віці набуває певного розвитку. У них формуються елементарні вміння орієнтуватися в навколишньому світі, утворюються системи зв'язків між зоровим, слуховим і руховим аналізаторами. Так, уже на третьому році життя у дитини складається системний механізм просторової орієнтації. З її розвитком цей процес збагачується новими відношеннями та складовими.

Значно якісніше це сприйняття простору відбувається у молодшому шкільному віці, оскільки програмується навчанням і керується вчителем.

Переважна більшість молодших школярів здатна «уявити» геометричні тіла (куля, куб, прямокутний паралелепіпед, конус тощо) як реальні об'єкти, що їм відповідають (м'яч, цеглина, пенал, лійка тощо). Діти спроможні розпізнати ці тла на готових моделях, малюнках, назвати їх. У них рано формується сприймання зображень просторових фігур.

І.С. Якиманська, аналізуючи вікові відмінності учнів, що проявляються під час розв'язування задач на просторові перетворення, виділяє таку особливість: просторові образи молодших школярів досить рухомі та динамічні. У навчальній діяльності діти ознайомлюються не тільки з такими ознаками

об'єктів, як колір, маса, форма тощо, а й з властивостями, що визначають положення цих об'єктів у тривимірному просторі.

Крім того, за належного навчання діти легко справляються з завданнями на перетворення елементів зображення, добре розрізняють геометричні форми, з бажанням, залюбки складають розгортки об'ємних предметів за їх наочним зображеннням випливає потреба у використанні наочності під час навчання цього віку

З переходом учнів до середніх класів (підлітковий вік) зміст їх навчальної діяльності ускладнюється, на основі чого відбувається дальший розвиток образного мислення. Глибше розуміння учнями властивостей предметів і явищ навколишнього світу проявляється тепер у формуванні абстрактних понять. З наочно-образного їх мислення поступово стає абстрактно-понятійним.

Підлітки, на відміну від молодших школярів, уже вміють розпізнавати та виділяти в предметах і явищах та ознаки, які істотні для даного роду чи виду явищ. Проте варто зазначити, що формування абстрактних понять у цьому віці часто зводиться до формального засвоєння властивостей, їх відриву від конкретних об'єктів. Тому часто учні знають визначення, формули і добре оперують ними, та не можуть належно розкрити їх зміст і успішно застосовувати до розв'язування конкретних задач.

У процесі формального засвоєння знань природна здатність дітей до динамізму сприймання витісняється установкою на використання однієї, фіксованої позиції спостереження. Подолати це негативне явище можна включенням дітей в активну навчальну діяльність, залученням до виготовлення наочних посібників, зокрема моделей просторових фігур, їх розгорток з картону, різноманітного підручного матеріалу, вимірювання та обчислення їх розмірів, площ поверхонь, об'ємів. У ході такої роботи школярі не тільки оволодівають практичними навичками, а й глибше засвоюють зміст понять.

І.С. Якиманська, В.В. Давидов, Є.М. Кабанова-Меллер. Г.С. Костюк, Н.А. Менчинська, І.Є Унтта та ін. зазначають, що для розвитку просторового мислення недостатньо враховувати лише вікові особливості учнів, необхідно брати до уваги їх індивідуальні відмінності.

Учні одного й того самого віку помітно відрізняються один від одного за своїми здібностями до просторового мислення. В одних під впливом певних факторів (інтерес до техніки, робота з «конструкторами», домашнє навчання) здатність до просторового мислення формуються ще до початку систематичного вивчення предметів, які висувають до нього спеціальні вимоги. Учитель, який працює з такими учнями, спираючись на наявні здібності, має забезпечити подальший розвиток просторового мислення, добираючи завдання відповідно до індивідуальних відмінностей. Є учні, які з певних причин до цього часу не досягли такого рівня. Тому перед учителем постає інша задача - формувати здібності учнів до просторового мислення.

Зрозуміло, що учні, у яких така здібність не сформована, не можуть засвоювати знання на однаковому рівні з іншими. Тому слід диференціювати та індивіднalізувати роботу щодо розвитку наявних здібностей і щодо їх формування.

В учнів, які приступають до вивчення систематичного курсу геометрії, просторові (тривимірні) уявлення розвиненіші більше, ніж двовимірні, що недостатньо враховано під час складання програми з математики 5-9-х класів, особливо з курсу геометрії. Багатий досвід дітей, накопичений ними у практиці оперування, не знаходить свого безпосереднього застосування та подальшого удосконалення, оскільки, вивчаючи планіметрією, школярі оперують лише площинними зображеннями, тоді як тривимірні образи відходять на другий план .

Проведені нами дослідження переконливо вказують на наявність в учнів середніх класів уявлень про площину (поверхня столу, класної дошки, підлоги, вікна), паралелепіпед (сірникова коробка, цеглина), циліндр (склянка), конус (лійка), кулю (м'яч, глобус), призму (шестигранний олівець, намет). Діти намагаються дати наочне зображення таких фігур, проте не можуть цього зробити, тому що у них недостатньо сформовані просторові уявлення, відсутні відповідні навички та вміння. Основна причина названого явища очевидна. Вона полягає в тому, що під час вивчення планіметрії учнів привчили мислити «плоскими» образами.

Викладені вище міркування приводять до висновків:

1) існують як фізіологічні, так і психологічні передумови вивчення елементів стереометрії в курсі математики школи, шо не враховує сучасна система шкільної геометрично освіти, яка, будучи бездоганною з дидактичної точки зору, не відповідає періодам розвитку геометрії як науки (принцип історизму) і, певною мірою гальму розвиток мислення учнів.

2) є потреба у вивченні стереометричного матеріалу в основній школі, яке доцільно здійснювати на наочно-оперативному рівні в систематичних курсах математики (5-6-й класи) і планіметрії (7-9-й класи).

3) таке вивчення вимагає розробки відповідного методичного забезпечення (програми, дидактичні матеріали, інформаційні технології тощо).

Розділ ІІІ. Методика вивчення тіл обертання з використанням інноваційних технологій.

3.1. Методика вивчення теми «Тіла обертання»

Цією темою завершується вивчення властивостей фігур у просторі. Вивчення учнями тіл обертання має не тільки загальноосвітнє, а й практичне значення, оскільки їх форми мають деталі багатьох машин, приладів, архітектурні споруди, речі побуту, наприклад гончарні вироби.

Основна мета вивчення теми - ввести означення кожного з тіл обертання, спираючись на уявлення, одержані про них при вивченні математики, креслення, трудового навчання, навчити зображувати їх на площині, довести теореми про властивості тіл обертання та навчити застосовувати ці властивості при розв'язуванні задач.

Учні повинні володіти поняттями про тіла і поверхні обертання, зображувати їх і застосовувати властивості для розв'язування задач.

Теоретичний матеріал, що стосується тіл обертання, не великий за обсягом і засвоюється учнями без особливих труднощів. Досвід показує, що циліндр і конус доцільно вивчати за одним методичним планом, підкреслюючи спільне і відмінне значеннях, властивостях, зображеннях. Значні труднощі у частини учнів виникають при розв'язуванні особливо задач на комбінації тіл обертання з многогранниками.

Труднощі пов'язані насамперед з відсутністю умінь правильно і наочно зобразити комбінацію тіл, теоретично обґрунтувати рисунок і окремі етапи розв'язування задачі, правильно виконати наближені обчислення, особливо в задачах практичного змісту.

У зв'язку з вивченням тіл обертання виникає потреба і можливість у систематичному повторенні відповідного планіметричного матеріалу (коло, круг, вписані й описані многокутники).

Для демонстрації тіл обертання можна використати відцентрову машину, яка є в кабінеті фізики, заготовивши заздалегідь набір дротяних рамок. Допоможуть правильному сприйманню моделей тіл обертання шаблони еліпсів для швидкого зображення тіл обертання та перерізів їх площиною.

У підручниках і методичних посібниках в різні роки вживались

Неоднакові терміни відносно розглядуваної теми: «круглі тіла» у В. М. Брадіса [27], «Тіла обертання» у О.В. Погорелова [164], «фігури обертання» у Ю.М. Колягіна та і. [139]. Слід мати на увазі, що фігури обертання - більш широке поняття, бо включає в себе тіла обертання, поверхні обертання та інші фігури.

У підручнику [164], як і в переважній більшості інших шкільних підручників і посібників, йдеться про тіла відповідні їм поверхні: циліндр - поверхня циліндра, конус – поверхня конуса, куля сфера. Традиційно тіла обертання і відповідні їм поверхні вивчаються після многогранників. В цьому разі використовується відоме учням на наочному рівні поняття «тіло», а по-

слідовність вивчення окремих тіл обертання відповідає прийнятій послідовності вивчення многогранників: призма, піраміда, правильний многогранник - циліндр, конус, куля.

Можливий і інший порядок вивчення круглих тіл, від якого залежить і їх трактування. Зокрема, в пробному підручнику О. Д. Александрова та ін. [221] спочатку вводять загальні відомості, що стосуються понять обмеженої фігури, опуклої фігури, тіла, опуклих тіла обертання, раніше ніж тіл тощо. Потім вивчаються многогранники, в такій послідовності: куля, циліндр, конус, оскільки поняттями сфери і кулі широко послуговуються при дальшому вивченні стереометрії. Не традиційно означаються циліндр і конус. Так, циліндром називається об'єднання паралельних відрізків, які йдуть з усіх точок деякої плоскої фігури до площини, що паралельна площині цієї фігури. Згідно з таким означенням циліндр може мати своєю основою точку, відрізок, трикутник, круг, пряму, півплощину і т. д. Після цього вводиться означення прямого кругового циліндра або циліндра обертання. При такому трактуванні не завжди циліндр і конус є тілами. Це тлумачення циліндра і конуса можна було б ввести в класах з поглибленим вивченням математики, а для масової школи воно складне для сприймання. Тому слід визнати більш вдалим те означення тіл обертання, яке пропонується в підручнику [164]. Тут здійснений єдиний підхід до означення призми, піраміди, циліндра і конуса.

Означення цих фігур досить широке, бо включає не тільки прямий круговий циліндр (конус), а й похилі. На завершення вводяться означення прямого кругового циліндра і конуса, які найчастіше трапляються на практиці. Зокрема, циліндром (точніше, круговим цилиндром) називаться тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які з'єднують відповідні точки цих кругів. Якщо пригадати запроваджене раніше означення призми, то, скориставшись моделлю циліндра схожість означень призми і циліндра, учні можуть самостійно сформулювати означення циліндра.

Аналогічний підхід можна здійснити і при введенні означення конуса. Означення вписаної в циліндр і описаної навколо циліндра призми не викликає в учнів труднощів. Після введення означень цих понять учні самі можуть за аналогією сформулювати означення вписаної в конус і описаної навколо конуса піраміди. Означення кулі учні теж здатні сформулювати самостійно, якщо їм попередньо нагадати означення круга і привернути їхню увагу до аналогії в означеннях круга і кулі. Варто звернути увагу учнів на аналогію понять коло - сфера. Коло - межа круга, сфера межа кулі. Те ж саме стосується понять дотичної до кола і дотичної площини до сфери (кульової поверхні).

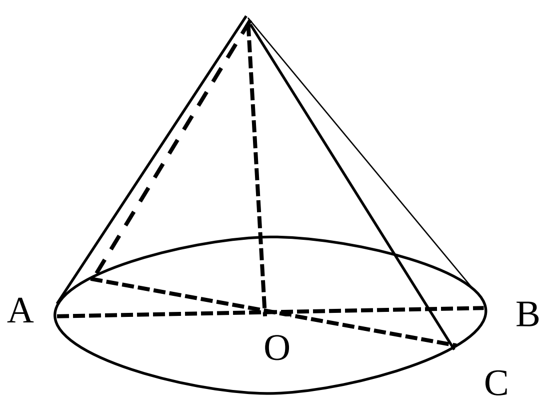
Після запровадження означень тіл обертання треба дати учням правила-орієнтири їх правильного і наочного зображення на площині.

При вивченні кожного з тіл обертання корисно одразу ж дати учням правила-орієнтири їх зображення. Виконання рисунка циліндра не викликає в учнів особливих труднощів, і все ж варто запропонувати 1) побудувати прямокутник - осьовий переріз циліндра, в якому нижню основу зобразити штриховою лінією; 2) беручи верхню і нижню основи прямокутника за діаметри основ циліндра, намалювати рівні еліпси, при цьому в нижній основі частину еліпса, яку не видно, зобразити штриховою лінією.

Зображуючи конус, треба враховувати, що наочний рисунок можна дістати тоді, коли основу конуса зображено у вигляді еліпса. Однак це означає, що в оригіналі висота конуса нахилена під кутом до горизонтальної площини, і тому більшу частину поверхні конуса видно. Щоб показати це на рисунку, твірні, що відокремлюють ту частину поверхні конуса, яку видно, від тії, якої не видно, треба провести відповідним чином. Правило-орієнтир у цьому випадку може бути таким: 1) спочатку провести діаметр основи конуса штриховою лінією а потім з його середини O провести перпендикуляр висоту конуса; позначити на проведеному перпендикулярні вершину S конуса; 2) зобразити в основі еліпс, провівши штриховою лінією його невидиму частину; 3) провести діаметр AC приблизно під кутом 10° до горизонтального діаметра; точку A взяти за точку дотику твірної конуса; 4) провести твірну SA і симетрично до неї стосовно висоти SO - твірну SB. Якщо треба зобразити осьовий переріз конуса, то можна провести твірну SC, яку видно. Тоді SAC-зображення осьового перерізу.

Наочним в ортогональній проекції є таке зображення кулі, в якому великий круг або будь-який переріз кулі горизонтальною зобразити штриховою лінією; 2) беручи верхню і нижню основи прямокутника за діаметри основ циліндра, намалювати рівні еліпси, при цьому в нижній основі частину еліпса, яку не видно, зобразити штриховою лінією.

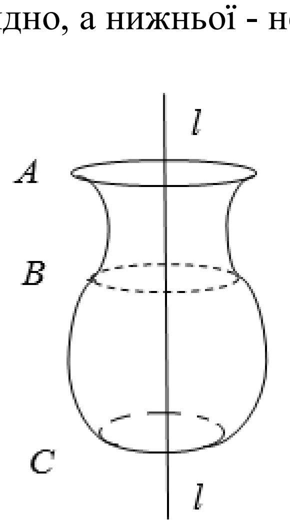
Зображуючи конус, треба враховувати, що наочний рисунок можна дістати тоді, коли основу конуса зображено у вигляді еліпса. Однак це означає, що в оригіналі висота конуса нахилена під кутом до горизонтальної площини, і тому більшу частину поверхні конуса видно. Щоб показати це на рисунку, твірні, що відокремлюють ту частину поверхні конуса, яку видно, від тії, якої не видно, треба провести відповідним чином. Правило-орієнтир у цьому випадку може бути таким: 1) спочатку провести діаметр основи конуса



Мал. 1

штриховою лінією а потім з його середини O провести перпендикуляр висоту конуса; позначити на проведеному перпендикулярні вершину S конуса; 2) зобразити в основі еліпс, провівши штриховою лінією його невидиму частину; 3) провести діаметр AC приблизно під кутом 10° до горизонтального діаметра; точку A взяти за точку дотику твірної конуса; 4) провести твірну SA і симетрично до неї стосовно висоти SO - Твірну SB. Якщо треба зобразити осьовий переріз конуса, то можна провести твірну SC, яку видно. Тоді SAC- зображення осьового перерізу.

Наочним в ортогональній проекції є таке зображення кулі, в якому великий круг або будь-який переріз кулі горизонтальною площиною є еліпсом. Таке зображення можна дістати, коли вертикальний діаметр кулі нахилений під певним кутом до горизонтальної площини. В цьому разі верхній кінець його зобразиться точкою H, розміщеною нижче від кола, що відокремлює видиму
частину поверхні кулі від невидимої, а нижній кінець S - вище цього кола. Очевидно, що при такому зображенні більшу частину верхньої півсфери видно, а нижньої - не видно.



Поверхня обертання - тіло, яке утворюється шляхом обертання якої-небудь кривої ABC (яку називають твірною) навколо нерухомої прямої *l* (яку називають віссю); при цьому вважається, що твірна при своєму обертанні незмінно пов'язана з віссю.

Тіло обертання - тіло, обмежене поверхнею обертання.

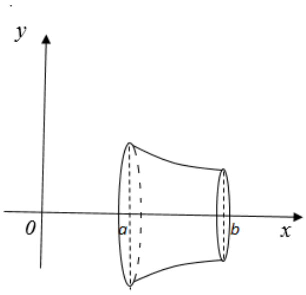
Мал.2

Властивості

1.Кожна точка твірної поверхні обертання описує коло, площина якого перпендикулярна до осі, а центр кола лежить на перетині цієї площини з віссю.

2.Площина, яка проходить через вісь, є його площиною симетрії; утворений переріз називають **осьовим перерізом.**

3.Всі осьові перерізи поверхні обертання рівні.



Об'єм тіла обертання

Якщо криволінійна трапеція (обмежена невід'ємною і неперервною функцією $y = f(x)$ на відрізку [a; b]) обертається навколо осі OX, то

об'єм тіла обертання можна знайти за формулою:

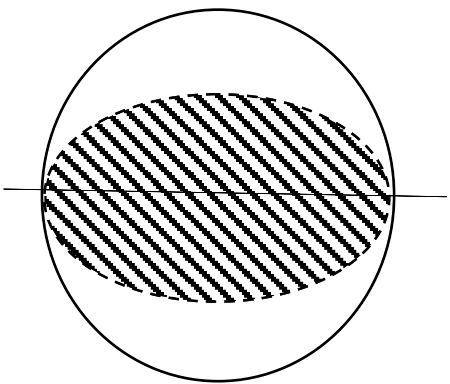
Мал.3

$$v = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

<u>Куля</u>

Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної відстані, не більшій за дану. Ця точка називається *центром кулі*, а дана відстань *радіусом кулі.*

Межа кулі називається *кульовою поверхнею або сферою*. Таким чином, точками сфери є всі точки кулі, які віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу. Будь-який відрізок, який сполучає центр кулі з точкою кульової поверхні, теж називається радіусом.



Відрізок, який сполучає дві точки кульової поверхні і проходить через центр кулі, називається *діаметром*. Кінці будь-якого діаметра називаються *діаметрально протилежними точками кулі.*

Куля так само, як циліндр і конус, є тілом обертання. Вона утворюється під час обертання півкруга навколо його

діаметра як осі (мал. 3).

Мал.4

із кулі площиною.

Теорема. ***Будь-який переріз кулі площиною с круг. Центр цього круга с основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.***

Доведення. Нехай а - січна площина і О-центр кулі (мал. 5). Опустимо перпендикуляр з центра кулі на площину а і позначимо через O' основу цього перпендикуляра.

Нехай X - довільна точка кулі, яка належить площині а. За теоремою Піфагора $OX^2 = 00'^2 + O'X^2$. Оскільки ОХ не більший З, а

радіус R кулі, то

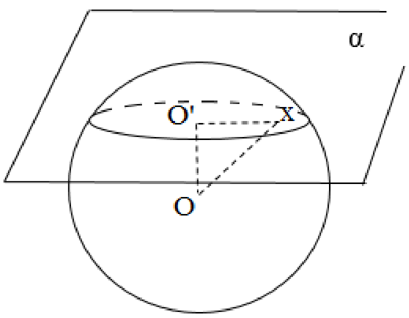
$OX^2 = \sqrt{R^2 - O0'^2}$, тобто довільна точка перерізу кулі площиною, а знаходиться від точки $0'$ на відстані, не більшій за $\sqrt{R^2 - O0'^2}$,

а тому належить кругу з центром О' і радіусом $\sqrt{R^2 - O0'^2}$.

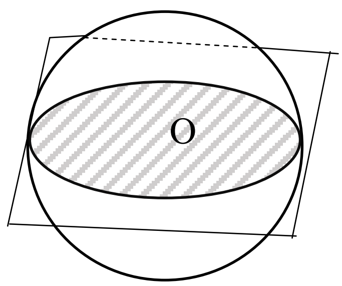
Навпаки: довільна точка X цього круга належить кулі. А це

означає, що переріз кулі площиною α є круг з центром у точці O'.

Теорему доведено.



Мал.5



Мал.6

Площина, яка проходить через центр кулі, називається *діаметральною площиною*. Переріз кулі діаметральною площиною називається *великим кругом* (мал. 6), а переріз сфери *колом*.

3. Симетрія кулі.

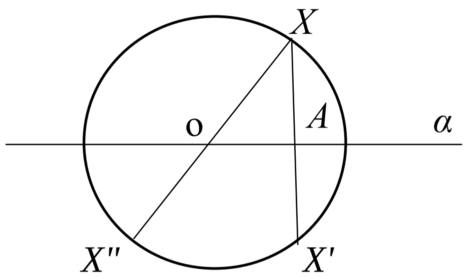
Теорема. ***Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.***

Доведення. Нехай α-діаметральна площина і X – довільна точка кулі (мал. 7). Побудуємо точку X', симетричну точці X відносно площини α.

Площина α перпендикулярна до відрізка XX' і ділить його навпіл (у точці A). З рівності прямокутних трикутників OAX і OAX' випливає, що $OX' = OX$

Оскільки $OX \le R$, то і $OX' \le R$, тобто точка, симетрична точці X, належить кулі. Перше твердження теореми доведено.

Нехай тепер X''- точка, симетрична точці X відносно центра кулі. Тоді $OX'' = OX \le R$, тобто точка X'' належить кулі. Теорему доведено повністю.



Мал.7

4. Перетин двох сфер.

Теорема. ***Лінія перетину двох сфер є коло.***

Доведення. Нехай 0 і O_1 - центри сфер і A - їх точка перетину (мал. 8)

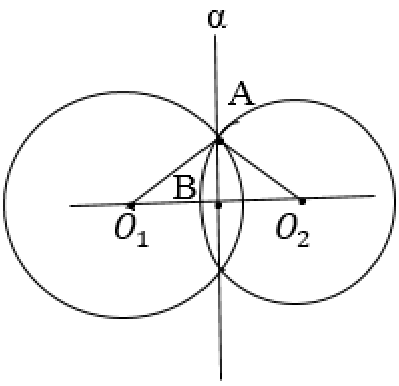
Проведемо через точку A площину α, перпендикулярну до прямої O_1O_2

Позначимо через B точку перетину площини α з прямою O_1O_2

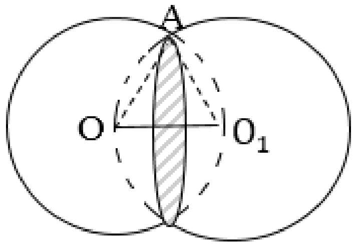
За теоремою площина α перетинає обидві сфери по колу K з центром B, яке проходить через точку A. Таким чином, коло K належить перетину сфер.

Покажемо тепер, що сфери не мають інших точок перетину, крім точок кола K. Припустимо, що точка X перетину сфер не лежить на колі K. Проведемо площину через точку X і пряму O_1O_2. Вона перетне сфери по колах з центрами O_1 і O_2 Ці кола перетинаються у двох точках, які належать колу К. та ще в точці Х. Але два кола не можуть мати більш ніж дві точки перетину. Ми прийшли до суперечності. Отже, перетином наших сфер с коло (К).

Теорему доведено.

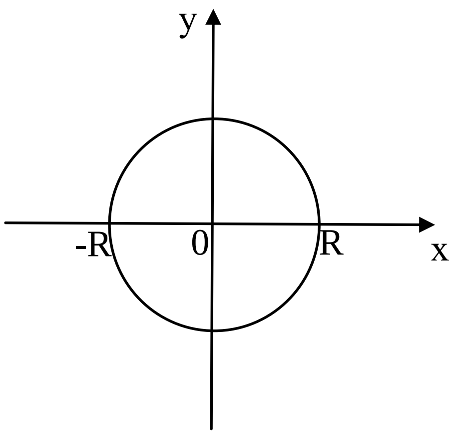


Мал.8



Мал.9

5. Об'єм кулі.



Мал. 10

Застосуємо виведену формулу для об'єму тіл обертання до обчислення об'єму кулі.

Введемо декартові координати, взявши за центр кулі початок координат (мал. 10) Площина *xy* перетинає поверхню кулі радіуса R по колу, яке, як відомо, задається формулою

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Півколо, розміщене над віссю *x*, задається рівнянням

$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, -R \le x \le R$

Тому об’єм кулі знаходимо за формулою

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Отже, об’єм кулі дорівнює $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

6. Площа сфери.

Опишемо навколо сфери опуклий многогранник з малими гранями (мал. 9). Нехай S' - площа поверхні многогранника, тобто сума площ його граней.

Знайдемо наближене значення площі поверхні многогранника, припускаючи, що лінійні розміри граней, тобто відстань між будь-якими двома точками будь-якої грані, менша за е.

Об'ем многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, основами яких є грані многогранника, а вершиною - центр сфери (мал. 12).

Оскільки всі піраміди мають одну і ту саму висоту, що дорівнює радіусу R сфери, то об'єм многогранника:$V = \frac{1}{3}S'R$

Об'єм многогранника більший, ніж об'єм кулі, обмеженою сферою, але менший, ніж об'єм кулі з тим самим центром, а радіусом R + ξ. Таким чином,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R+\xi)^3$$

Звідси

$$\frac{4}{3}\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\xi)^3(1+\frac{\xi}{R})$$

Ми бачимо, що площа поверхні описаного многогранника при необмеженому зменшенні розмірів його граней, тобто при необмеженому зменшенні є, прямус до $4\,\pi R^2$. У зв'язку з цим дану величину приймають за площу сфери.

Отже, ***площа сфери радіуса R обчислюється за формулою S=4*** $\boldsymbol{\pi R^2}$**.**

Аналогічно знаходять площу сферичної частини поверхні кульового сектора, тобто площу сферичного сегмента. Для неї дістають формулу ***S=4*** $\boldsymbol{\pi RH}$***,*** де Н-висота сегмента.

<u>Конус</u>

Поняття конуса: тіло, обмежене конічною поверхнею і навколо з межею L, називається конусом.

Конічна поверхня називається бічною поверхнею конуса, а круг – основою конуса.

Отримання конуса: конус може бути отриманий обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів. Перетин конуса: якщо січна плошина проходить через вісь конуса, то перетином є рівнобедрений трикутник, основа якого-діаметр основи конуса, а бічні сторони – створюючі конуса. Цей перетин називаються осьовим

Якщо січна площина перпендикулярна до осі OP конуса, то перетином конуса є круг з центром OL, розташованою на осі конуса

$$R_1 = \frac{PO_1}{P^0} r$$

Площа поверхні конуса: розгорткою бічної поверхні конуса є круговий сектор, радіус якого рівний твірній конуса, а довжина дуги сектора - довжині кола основі конуса. За площу бічної поверхні

конуса береться площа її розгортки.

де α-градусна міра дуги

$2\pi R = \frac{\pi l}{180}\alpha$ звідки $S_{\text{біч}} = \pi r l$

Площа бічної поверхні конуса дорівнює половин довжини кола основи на твірну.

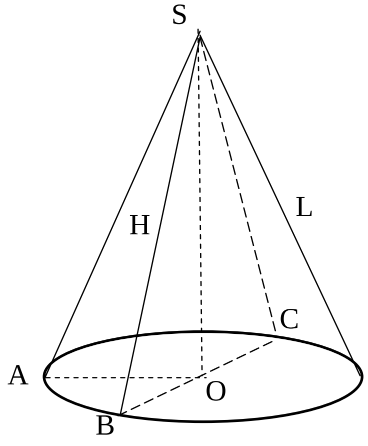
$$S_{\text{кон}} = \pi r(l + r)$$

Пощею повної поверхні конуса називається сума площ бічної поверхні та основи.

Зрізаний конус, його отримання і площа:

Зрізаний конус може бути отриманий обертанням прямокутної трапеції навколо її бічної сторони, перпендикулярної до основ.

$$S_{\text{біч}} = \pi(r + r_i)l$$



Мал. 13

Площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює: півсумі довжин кіл основ на твірну

S - вершина конуса, круг з центром О - основа конуса.

Відрізок SA=L - твірна.

Відрізок OA-R - радіус основи.

Відрізок BC-2R - діаметр основи.

Трикутник SBC-осьовий переріз

Кут BCC - кут при вершині осьового перерізу

Кут SBO - кут нахилу твірної до площини основи.

<u>Циліндр.</u>

Циліндр - це фігура, що складається з двох кругів, шо сполучаються паралельним перенесенням і всіх відрізків, шо сполучають відповідні точки цих кругів.

Властивості.

1. Основи рівні і паралельні

2 Твірні рівні і паралельні (з властивостей паралельного перенесення).

Циліндр називасться прямим, якщо твірні перпендикулярні підставі.

<u>Бічна поверхня циліндра</u>:

L - довжина круга

h-висота

$$S_{\text{б.п.}} = 2\pi Rh$$

$$L = 2\pi R$$

Площа повної поверхні циліндра - це сума площів бічної поверхні

двох основ(S= ΠR*R).

Sп.п. = 2пR(R+h).

<u>Вписаний і описаний циліндр:</u>

Призма називається вписаною в циліндр, якщо основи її рівні багатокутники, вписані в основу циліндра, а бічні ребра є твірними циліндра.

Призма називається описаною навколо циліндра, якщо основа її - це багатокутники описані навколо основи циліндра, а бічні грані дотикаються циліндра.

3. 2. Особливості розв'язування різних видів задач з теми «Тіла обертання».

3.2.1. Задачі на обчислення.

Останній розділ шкільної геометрії присвячений тілам (фігурам) обертання. Вивчаючи його, учні вперше ознайомлюються з багатьма новими формулами: для обчислення площ поверхонь і об'ємів циліндрів, конусів, куль тощо. Зрозуміло, що весь теоретичний матеріал бажано поєднувати з розв'язуванням задач на обчислення.

Як і завжди, починати треба з найпростіших задач, які можна розв'язувати й усно. Наприклад, ввівши поняття циліндра і його осьового перерізу, корисно однією з перших запропонувати учням таку задачу.[11,150]

Задача 1. Діагональ осьового перерізу циліндра d нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначте: 1) діаметр основи; 2) висоту циліндра; 3) радіус основи; 4) площу основи; 5) площу осьового перерізу.

Ввівши поняття конуса і його осьового перерізу, слід запропонувати

учням таку задачу.

Задача 2. Твірна конуса *l* нахилена до площини основи під кутом α.

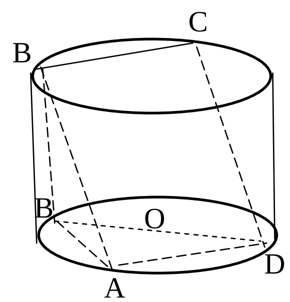
Визначте: 1) висоту конуса; 2) радіус основи; 3) площу осьового перерізу конуса; 4) довжину кола основи; 5) кут між твірною і висотою конуса; 6) кут між протилежними твірними конуса.1

Розв'язувати такі задачі учні повинні вміти й усно користуючись відповідним малюнком. Розв'язавши принаймні 5-7 таких задач, переходять до письмового розв'язування задач середньої важкості.

Задача 3. Висота циліндра 2 м, а радіус його основи 7 м. У циліндр похило вписано квадрат так, що всі вершини його лежать на колах основ.

Знайдіть сторону квадрата.

Розв'язання. Перший спосіб.



Мал. 14

Нехай ABCD квадрат, вписаний у циліндр, висота якого BB_1= 2 м, а радіус основи OD = 7 м.

Оскільки $BA \perp AD,$ а B_1A - проекція BA на площину основи циліндра, то й B_1A $\perp$ AD, отже B_1D – діаметр основи цилідра.

Позначимо шукану довжину сторони квадрата буквою x, тоді

$B_1A^2 = BA^2 - BB_1^2 = x^2 - 4,$

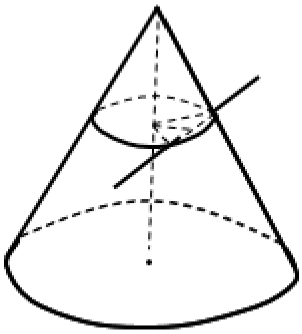
$BD_1^2 = B_1A^2 + AD^2 = x^2 - 4 + x^2.$

Отже, $14^2 = 2x - 4$

Додатний корінь цього рівняння x=10.

Відповідь. 10 м. [6,9]

Задача 4. Висота конуса H радіус основи R. У конус вписано правильну трикутну приму, бічні грані якої -квадрати Знайдіть ребро призми.



Мал.15

Розв'язання. Нехай призму вписано так, що одна з її основ лежить у площині

основи конуса, а всі три вершини другої основи лежать на бічній

поверхні конуса. Оскільки бічні грані призми квадрати, то всі її дев'ять ребер рівні.

Позначимо довжину ребра буквою x. Площина верхньої основи вписаної призми паралельна основі конуса, тому вона перетинає бічну поверхню конуса по колу, в яке вписано верхню основу призми - правильний трикутник $A_1B_1C_1$. Висота конуса $S0$ проходить через центр цього правильного трикутника O_1.

Трикутники SO_1A_1 і SOA_2 подібні, причому $SO_1 = H - x$

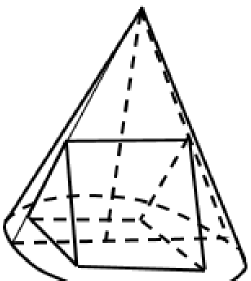
$O_1A_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Тому $(H - x) : \frac{x}{\sqrt{3}} = H : R$, звідки $x = \frac{HR\sqrt{3}}{H+\sqrt{3}R}$

$HR - xR = \frac{x}{\sqrt{3}}H$

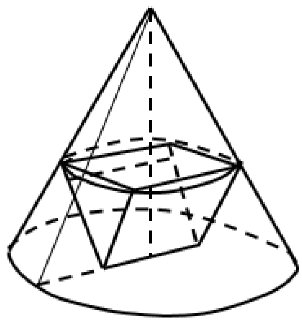
Відповідь: $x = \frac{HR\sqrt{3}}{H+\sqrt{3}R}$

Не всі таке розв'язання вважають повним. Справа в тому, що в задачі не сказано, як саме вписано призму в конус. Ми припустили, що її вписано так, як показано на мал. 1. А може задачі відповідають також мал. 1-3?

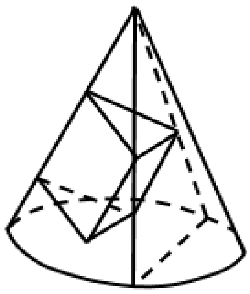
У навчальних посібниках немає означення призми, вписаної в конус. Є означення призми, вписаної в циліндр, піраміди, вписаної в конус. Думається, що немає й потреби формулювати для кожної пари фігур два окремі означення: коли перша фігура називається вписаною в другу, а друга в першу. Але щоб уникнути непорозумінь, у задачах про вписані фігури бажано зазначати, як саме вони вписані.



Мал.16



Мал.17



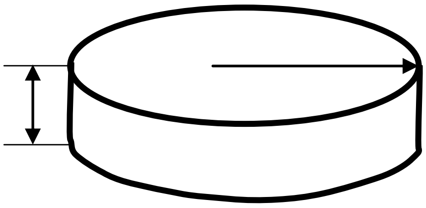
Мал.18

3.2. 2. Прикладні задачі.

У навколишньому реальному світі є немало різних предметів, які мають форму фігур обертання. Це - труби, шайби, диски, циліндри, резервуари, цистерни, заклепки, рулони тощо.

Можна, викликавши учня до дошки, дати йому, наприклад, шайбу для гри в хокей і запропонувати визначити її об'єм. Учень повинен знайти потрібні розміри, записати результати вимірювання і виконати розрахунки. В зошиті розв'язання такої задачі можна оформити так.

Задача 1. Визначте об'єм шайби для гри в хокей.



Мал.19

Розв'язання

Шайба має форму циліндра. Її розміри позначено на малюнку (мал. 19).

Отже, $\pi*36^2*25 = 101700$ (мм^3).

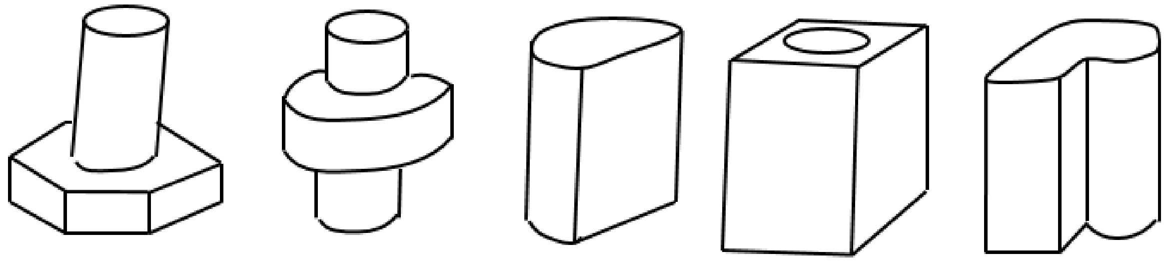
Відповідь. - 100 см^3

Під час вивчення об'єму і площі поверхні циліндра бажано запропонувати десятикласникам задачі про цистерну, резервуар, колону циліндричної форми, артезіанську свердловину тощо.

Розв'язуючи прикладні задачі, треба додержувати правил наближених обчислень. Справа не тільки в тому, що густина матеріалу і розміри - наближені значення величин, а й у тому, що всі згадані в задачах фізичні тіла не ідеальні циліндри. Так, краї електродів стовбур — циліндричну поверхню, а заглибина, висвердлена в металі, не форму круга, шахтний скрізь має форму циліндра. Терміни, які згадуються в прикладних задачах,
часто відрізняються від, якими позначають абстрактні математичні поняття.

Наприклад, форму циліндра може мати і прокладка, і дротина, і свердловина, висоти цих циліндрів називають інакше: товщина прокладки, довжина дроту, глибина свердловини і т. д.

Можна пропонувати також такі прикладні задачі, що стосуються різних комбінацій циліндрів з іншими фігурами обертання або многогранниками. Маємо на увазі, наприклад, деталі, зображені на мал. 20.



Мал.20

Цікаві й такі задачі.

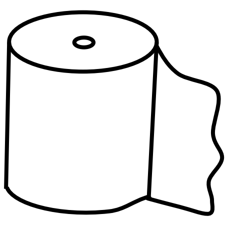
Задача 2. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, ширина і радіуси якого дорівнюють відповідно 85 см, 2 см, 45 см? Товщина паперу 0,1 мм.

Часто учні вважають, що такі задачі не можна розв'язувати методами шкільної математики: папір намотано у формі спіралі, а визначення довжини спіралі у школі не вивчають. Але за даними в задачі числовими значеннями можна з достатньою точністю визначити об’єм рулону, а знаючи об'єм усього паперу і його товщину, неважко визначити й площу.

Розв'язання.

Об’єм рулону $V = 2.14*45^2*85-3.14*2^2*85 = 3.14*85*2021 = 540000$.

мал.21



Цей об'єм дорівнює площі всього паперу, помноженій на його товщину, а тому шукана площа паперу

$S=540000: 0.01 = 54000000$ (см²).

Відповідь. 5400 м².[3, 42]

Мал. 21

3.2.3. Задачі на побудову.

Перш ніж розв'язувати які-небудь задачі на фігури обертання, треба навчити учнів зображати їх. Мало показати, як це робити, необхідно закріпити набуте вміння на вправах, зокрема й таких.

1. Намалюйте циліндр.

2. Намалюйте циліндр, висота якого втричі більша від діаметра основи.

3. Намалюйте рівносторонній циліндр.

4. Намалюйте циліндр і який-небудь його осьовий переріз.

Аналогічні вправи слід пропонувати учням і про конус та зрізаний конус.

У багатьох методичних посібниках пропонується малювати фігури обертання за допомогою шаблонів, зокрема еліпсів. Пропозиція корисна, але не треба впадати в крайність і вимагати, щоб учні абсолютно всі фігури обертання завжди зображали за допомогою шаблонів. Треба час від часу пропонувати їм малювати еліпси і від руки. Адже й ті, хто після десятирічки продовжуватиме навчатись, і кому на виробництві доводитиметься малювати ескізи різних деталей і споруд, схожих на фігури обертання, робитимуть це здебільшого без шаблонів еліпсів. Тому в основному на уроках геометрії десятикласники повинні вчитись малювати прості фігури обертання не тільки за допомогою шаблонів.

Циліндр, конус і зрізаний конус радимо малювати так, щоб їх зображення були фігурами симетричними, тобто, щоб великі осі еліпсів розміщались горизонтально. Тільки якщо фігуру обертання на зображенні многогранника, еліпси зображають відповідно до граней многогранника. При побудовах малюнків до задач, зрозуміло, можливі деякі неточності. Проте вдаватись у деталі в таких випадках на уроках стереометрії не треба. Малюнок до

Стереометричної задачі повинен бути правильним не з погляду нарисної геометрії, а з погляду правильності відображення в ньому основних відношень, важливих для д а н о ї задачі, щоб вписана куля дотикалась до всіх граней многогранника, щоб вершини вписаного в неї многогранника не виходили за межі її поверхні тощо.

Корисні такі вправи.

1. Намалюйте правильну трикутну призму, описану навколо кулі.

2. Намалюйте правильну зрізану чотирикутну піраміду, вписану сферу.

3. Намалюйте правильну трикутну піраміду, описану циліндра.

4. Намалюйте сферу, описану навколо прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

Такі вправи сприяють вихованню графічної культури учнів. До того ж вони ніби розчленовують на частини ті труднощі, з якими стикаються учні під час розв'язування стереометричних задач.

Зрозуміло, що вчитель повинен не тільки пропонувати учням вправи й оцінювати виконання, а й навчати, як ці вправи виконувати досить порадити, як краще розмістити фігуру, з чого починати малюнок, як усунути недоліки, а іноді й самому слід показати, як треба малювати подібні комбінації фігур. Наприклад першу із сформульованих вище вправ можна пояснити учням так.

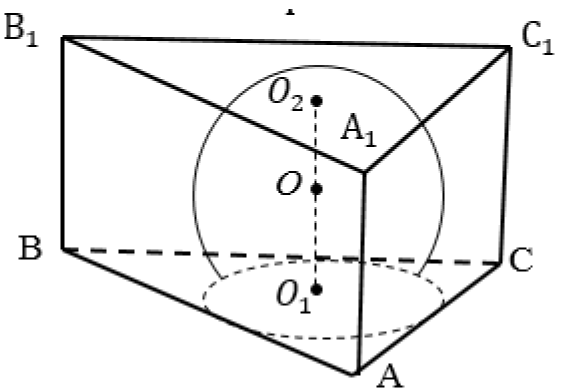
-Спочатку намалюємо основу описаної призми – трикутник АВС, позначимо точку O_1 , в якій перетинаються медіани цього трикутника (мал.22). Уявимо собі, якою повинна бути проекція вписаної кулі це буде круг, який дотикається сторін трикутника ABC в їх серединах. Намалюємо відповідний еліпс. Великий діаметр цього еліпса має дорівнювати висоті описаної призми. Будуємо приблизно такої висоти бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1. Нехай O_2, -точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$. Точки O_2 і O_1 - полюси вписаної кулі. З середини О відрізка O_2O_1 як з центра, проводимо коло діаметром, який трохи більший від O_2O_1. Це коло-обрис вписаної в дану призму кулі.

Можна починати викопувати малюнок не з основи призми, а з її перерізу площиною, що проходить через середини бічних ребер (мал. 23).

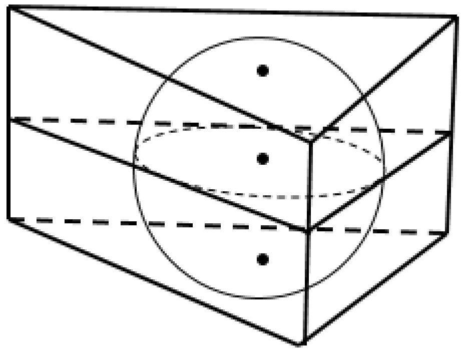
- Намалюємо зображення рівностороннього трикутника КРТ. Впишемо в нього еліпс так, щоб він дотикався до кожної сторони трикутника в її середині. Нехай O-центр цього еліпса. Проведемо через точки К, Р, Т і О вертикальні прямі і відкладемо на них відрізки

$$КA = КA_1 = PB = РB_1 = TC = TC_1 = OO_1 = OO_2$$

довжина кожного з яких дорівнює половині довжини великого діаметра еліпса. $ABCA_1B_1C_1$ - зображення правильної призми, описаної навколо кулі з центром О, O_1 і O_2 - полюси цієї кулі. Радіусом, трохи більшим від OO_1 опишемо її обрис. Малюнок готовий.



Мал. 22


Мал. 23

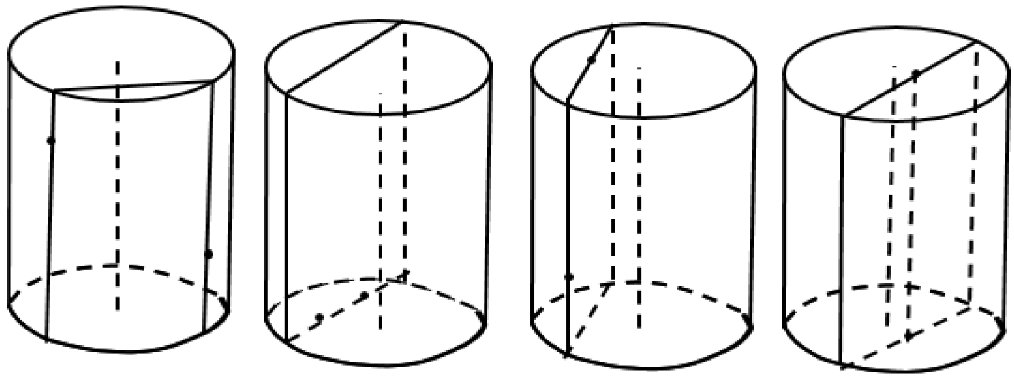
З десятикласниками доцільно розв'язати кілька задач на побудову перерізів фігур обертання.[10, 421]

Задача 1. Побудуйте переріз циліндра площиною, яка паралельна осі циліндра і проходить через дві дані на його поверхні точки.

Розв'язання. Якщо дані точки К і Р належать бічній поверхні циліндра (мал. 24, а), то через них проводимо твірні AA_1, і BB_1. Чотирикутник AA_1B_1B -шуканий переріз.

На мал. 24, б, показано, як виконати побудову, коли дані точки К і Р розміщені на поверхні циліндра інакше.

У розглянутих випадках задача має єдиний розв'язок. Але якщо дані точки лежать на одній твірній або в різних основах на одному перпендикулярі до цих основ, то задача має безліч розв'язків. А випадок, коли січна площина проходить через вісь циліндра, доводиться трактувати по-різному, залежно від прийнятого в посібнику означення прямої, паралельної площі. Наприклад, за посібником О.В. Погорєлова, учні повинні писати, що в цьому випадку задача розв'язку не має. [21, 14]

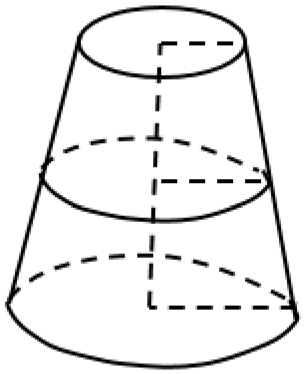


Мал.24

3.2. 4. Задачі на доведення.

Переважна більшість задач на доведення - це задачі метричного характеру. В них ідеться про значення тих чи інших геометричних величин: довжин, площ об’ємів тощо. Тому їх розв'язання майже не відрізняється від розв'язання задач на обчислення.

Задача 1. Площі основ зрізаного конуса М і m. Доведіть, що площа його середнього перерізу, паралельного основам, $Q = \frac{1}{4}\left(\sqrt{M} + \sqrt{m}\right)^2$



Мал.25

Розв'язання.

Якщо площі основ зрізаного конуса М і m, то радіуси цих основ $R = \sqrt{\frac{M}{\pi}},\ r = \sqrt{\frac{m}{\pi}}$

Радіус середнього перерізу p - середня лінія трапеції OAA_1O_1 основи якої R і r. Тому $P = \frac{1}{2}(R + r)$. Отже, площа середнього перерізу

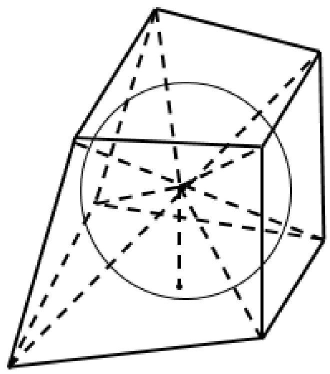
$$Q = \pi\rho^2 = \frac{\pi}{4}(R + r)^2 = \frac{\pi}{4}1\left(\sqrt{\frac{M}{\pi}} + \sqrt{\frac{m}{\pi}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{M} + \sqrt{m}\right)^2$$

Задачу можна розв'язати й іншими способами, але розглянутий найпростіший. Корисно нагадати учням, що площа середнього перерізу зрізаного конуса не дорівнює середньому арифметичному площ основ.

Розглянута задача - на доведення, хоч її неважко подати й у формі задачі на обчислення.

Задача 2. Доведіть, що об’єм многогранника, описаного навколо кулі, дорівнює третині добутку площі поверхні многогранника на радіус кулі.

Розв'язання. Нехай ABCDK - многогранник, кожна з n граней якого дотикається до кулі.



Мал.26

Сполучимо центр О цієї кулі відрізками з усіма вершинами многогранника. Тоді даний многогранник можна розглядати як об'єднання n пірамід із

спільною вершиною О. Висота кожної з цих пірамід дорівнює радіусу r вписаної в многогранник кулі, а площа основи - площі відповідної грані многогранника. Якщо об'єм і площа поверхні многогранника дорівнюють відповідно V і S, і якщо площі граней цього многогранника $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$, то:

$$V = \frac{1}{3}S_1 r + \frac{1}{3}S_2 r + \cdots + \frac{1}{3}S_n r = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = \frac{1}{3}s_r$$

Отже, V = $\frac{1}{3}s_r$, що й треба було довести.

Задача важлива, її часто доводиться використовувати під час розв'язування інших стереометричних задач. Якщо учні не зрозуміють, а здогадаються, як розв'язати й бажано нагадати доведення аналогічного твердження в планіметрії площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює півдобутку периметра даного многокутника на радіус кола.[19, 172]

3.2. 5. Задачі на дослідження.

У шкільних навчальних посібниках задач на дослідження, пов'язаних з фігурами обертання, мало. Але практика показує, що ці задачі дуже корисні і хоч один-два десятки їх бажано розв'язати з учнями. Зрозуміло, що йдеться про прості задачі, доступні для всіх десятикласників.

Задача 1. Чи існує циліндр, в якого площа осьового перерізу втричі менша від площі бічної поверхні?

Розв'язання. Розглянемо циліндр, радіус основи якого r, а висота h. Площа його бічної поверхні $S \quad = 2\pi rh$, а площа осьового перерізу $S_0 = 2rh$. Отже, S: $S_0 = 2\pi rh$: $2rh$ = π.

Як бачимо, для кожного циліндра відношення площі бічної поверхні до площі осьового перерізу дорівнює π , а $\pi \neq 3$.

Відповідь. Не існує.

Сильніші учні подібні задачі, можуть розв'язувати й без малюнків, для слабших малюнки бажані.

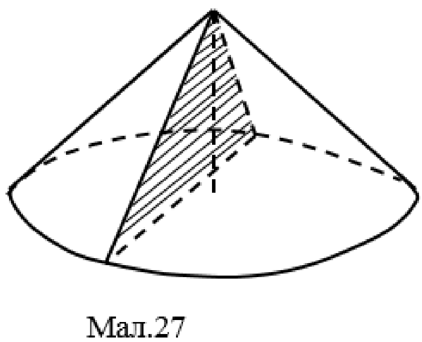
Задача 2. Як зміниться об'єм циліндра, якщо: 1) радіус його основи збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі. 2) радіус основи зменшити втричі, а висоту збільшити втричі?

Нерідко учні відповідають, що в обох випадках об’єм циліндра не зміниться, бо коли один множник збільшити в кілька разів, а другий зменшити в стільки ж разів, то добуток не зміниться. Неправильно! Адже у формулу об'єму циліндра $v = \pi r^2 h$ радіус r і висота h входять з різними показниками степеня.

Правильно задачу можна розв'язати так:

1. якщо $V = \pi r^2 h$, $V_1 = \pi (2r)^2 \frac{h}{2} = 2\pi r^2 h,$ то $V_1 : V = 2$

2. якщо $V = \pi r^2 h$, а $V_2 = \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 3h = \frac{\pi}{3} r^2 h,$ то $V_2 : V = \frac{1}{3}$



Мал.27

Отже, в першому випадку об’єм циліндра збільшиться вдвічі, а в другому – зменшиться втричі[2, 16]

Задача 3. Щоб можна було навколо піраміди описати сферу, щоб основа цієї піраміди була правильним многокутником. Яке із слів - «необхідно» чи «достатньо» - слід вжити замість крапок?

Розв'язання. Навколо правильного многокутника завжди можна описати коло. Це коло і точка, що не лежить у його площині, завжди визначають сферу. Отже, навколо кожної піраміди, в основі якої лежать правильний многокутник, можна описати сферу. Слово «достатньо» задачу задовольняє.

А може задовольняє її і слово «необхідно»? Ні, бо, наприклад навколо піраміди, основою якої є довільний прямокутник, також можна
описати сферу. А прямокутник, відмінний від квадрата, не є правильним многокутником.

Відповідь. Треба вживати слово «достатньо» [11, 176]

3.3. Практична реалізація вивчення теми «Тіла обертання» з використанням ІКТ.

Впровадження в процес навчання інформаційно-комунікаційних технологій значною мірою сприяє реалізації принципів гуманізації освіти та навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичного значення, активізації евристичної навчально- пізнавальної діяльності, створенню умов для повного розкриття творчого потенціалу учнів з урахуванням їх вікових особливостей, індивідуальних схильностей, потреб та здібностей.

У шкільному курсі математики особливе місце займають стереометричні задачі. Щоб розв'язувати їх треба застосовувати знання та вміння не тільки зі стереометрії, а й з інших дисциплін. Ефективність навчання розв'язувати стереометричні задачі залежить не стільки від розгляду всього різноманіття задач курсу стереометрії, скільки від уміння проводити детальний розбір конкретної ситуації, про яку йде мова в задачі. Необхідно щоб учні варіювали вихідні дані, аналізували, як зміняться елементи фігури при зміні інших її елементів, порівнювали хід розв'язання задачі з її результатом, в чому ефективно допоможуть ІКТ.

Комп'ютерна підтримка при вивченні стереометрії захоплює учнів і полегшує розуміння методів понять геометрії. Застосування програмних засобів забезпечує наочність основних понять стереометрії, розвиває образне мислення, підштовхує учнів до дослідницької діяльності.

Останнім часом все частіше в навчальному процесі використовують педагогічні програмні засоби.

Доцільно ознайомити учнів з програмою GRAN-3D, яка може використовуватися учнями для перевірки самостійних побудов. Працюючи один на один з такою програмою, учень отримує зручні умови для відпрацювання вмінь та навичок розв'язування задач, повторює знайомі або засвоює нові методи та стратегії розв'язання, тобто має змогу виховувати в собі оригінальність думки, яка так потрібна для розвитку навиків евристичної діяльності.

У цій програмі простий для вивчення інтерфейс.

1. Початок роботи з програмою. Звернення до послуг програми.

Активація програми.

Програма GRAN-3D призначена для графічного аналізу просторових (тривимірних) об'єктів, звідки й походить її назва (GRaphic Analysis 3-Dimension).

Програма функціонує під управлінням операційної системи Windows9x. Після успішної установки в зазначеному директорії буде створено файл GRAN3D.EXE- основна програма, а також будуть створені допоміжні файли допомоги. Далі після «натискання» кнопки пуск назва програми GRAN-3D буде з'являтися як пункт меню Програми, при зверненні до якого відбуватися запуск ППС GRAN-3D

Основні елементи інтерфейсу. Звернення до послуг програми

Після активації ППЗ GRAN-3D на екрані з'явиться головне вікно програми. Зверху під заголовком головного вікна розташовано головне меню - перелік послуг, до яких можна звернутися в процесі роботи з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з'являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю. Тип записів у свою чергу можуть розгалужуватиметься на підпункти, перелік яких з'являється при зверненні до відповідного пункту підменю.

Під час роботи з програмою в деяких ситуаціях використання певних послуг меню не є коректним. Такі пункти меню будуть виділятися блідим кольором, а звернення до них не призведе до будь яких дій. Наприклад, використання послуг пункту головного меню Об'єкт - Змінити або Видалити на початку роботи з програмою, поки ще не створено ні один об'єкт, не с коректним, оскільки ще нічого змінювати або видаляти.

Якщо необхідно відмовитися від роботи з тільки що обраною послугою, слід звернутися до послуги Об'єкт / Припинити виконання операції, або натиснути клавішу ESC.

Звернення до окремих послуг програми (без перебирання пунктів головного меню і підпунктів відповідних підменю) при необхідності можна здійснити за допомогою функціональних клавіш або комбінацій клавіш, вказаних праворуч біля назв пунктів головного меню.

Панель інструментів.

Для активації деяких послуг можна скористатися кнопками швидкого виклику операцій на панелі інструментів, яка розташована під головним меню програми. Для цього треба натиснути відповідну кнопку (тобто встановити покажчик миші на позначення кнопки і натиснути ліву клавішу миші). «Кнопки» оснащені системою оперативної підказки, тому під час знаходження покажчика миші над певною «кнопкою» на екрані з'являються короткі відомості про її призначення.

Система координат. Картинна площина проекції.

Зображення координатних осей. Масштаб зображення.

Відразу після завантаження програми GRAN-3D в полі Зображення з'являється зображення осей координат, на яких вказані значення поділок, що визначають довжини одиничних відрізків уздовж цих осей. Співвідношення масштабів зображення уздовж будь-якої з осей можна змінити за допомогою послуги Установки / Параметри на вкладиші Зображення вікна Налаштування. Для збільшення або зменшення масштабу зображення призначені послуги Зображення / Збільшити і Зображення / Зменшити. Після звернення до послуги Зображення / Підібрати розмір буде встановлений передбачений у програмі масштаб зображення.

Поворот системи координат.

За допомогою смуг повороту зображення можна обертати систему координат разом з створеними моделями об'єктів. Центром повороту може бути точка з довільними просторовими координатами (за замовчуванням центром повороту є точка з координатами (0,0,0)). Щоб змінити координати центру повороту, слід скористатися послугою Установки \ Параметри на вкладиші.

Зображення вікна Налаштування. Для повороту системи навколо осі Oz призначена горизонтальна смуга повороту зображення, а для повороту навколо горизонталі, що проходить через центр повороту, призначена вертикальна смуга повороту зображення. Для повороту системи можна використовувати також клавіші управління курсором.

Виродження простору в площину. Ізомертія.

Для швидкого встановлення системи в положення ізометрії або в положення, при якому зображення однієї з координатних осей вироджується в точку, призначені послуги пункту меню Зображення / Положення координатних осей - Вироджена вісь Ох, Вироджена вісь Оу, Вироджена вісь Oz і ізометрії.

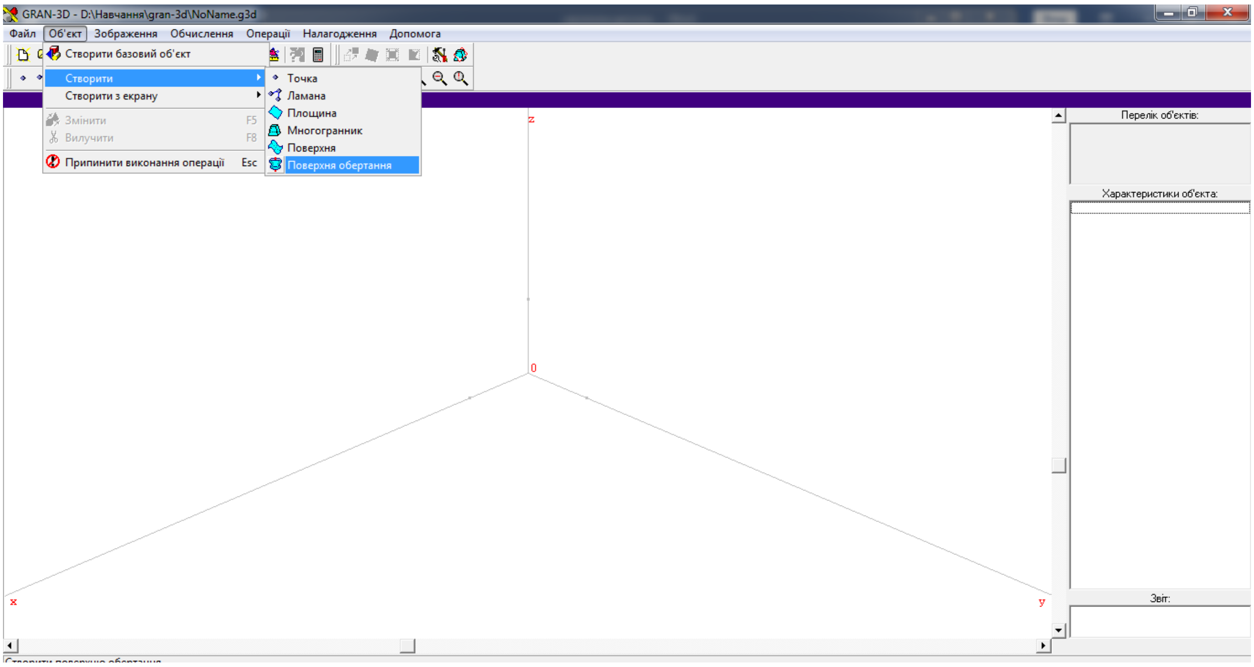
Означення координат точок.

Якщо підвести вказівник мишки до будь-якої лінії довільного об'єкта, зазначена лінія виділяється пунктиром і в полі інформування автоматично виводяться просторові координати точки, яка відповідає сучасному стану покажчика і назва об’єкта, з яким ця точка належить. У випадку, якщо система розміщена так що одна з координатних осей вироджується в точку (тобто координатна площина, яка визначається іншими двома осями, розміщена паралельно площині зображения), автоматично обчислюються (і виводяться в поле інформування) координати точки, яка відповідає сучасному стану покажчика миші в площині зображення. Координата вздовж вироджений осі вважається невідомою.

3. Створення моделей просторових об'єктів.

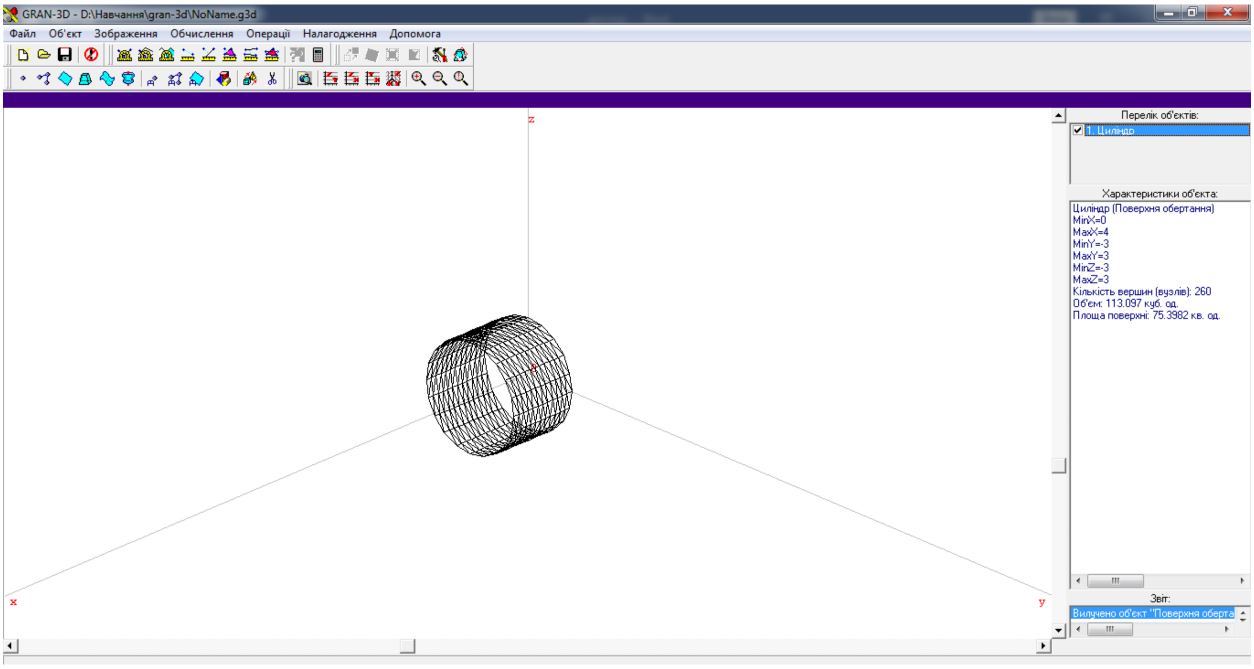
Створення об'єкта типу Поверхня обертання.

Для створення об'єкта типу Поверхня обертання потрібно звернутися до послуги меню Об'єкт \ Створити \ Поверхня обертання, що призведе до появи вікна Конструювання об'єкта з вкладкою Поверхня обертання (мал.28).



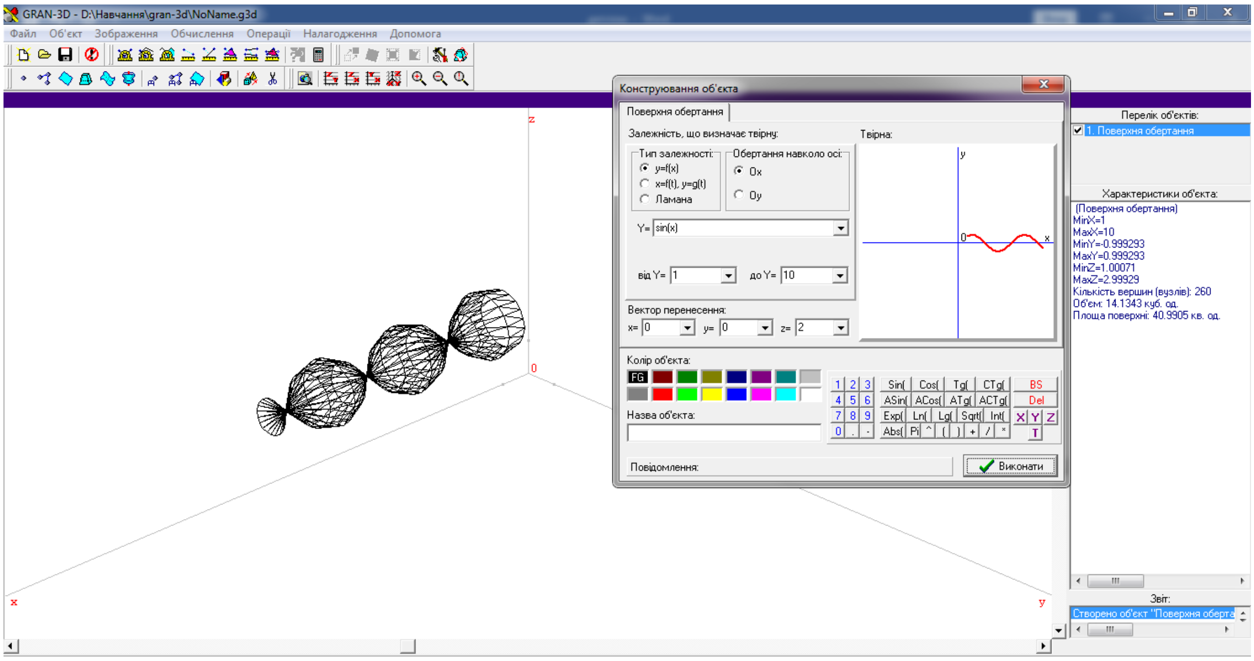
Мал.28

Засобами ППЗ GRAN-3D можна створити довільну Поверхню обертання. Наприклад можна швидко побудувати конус, циліндр, кулю потрібної величини, ввівши дані.



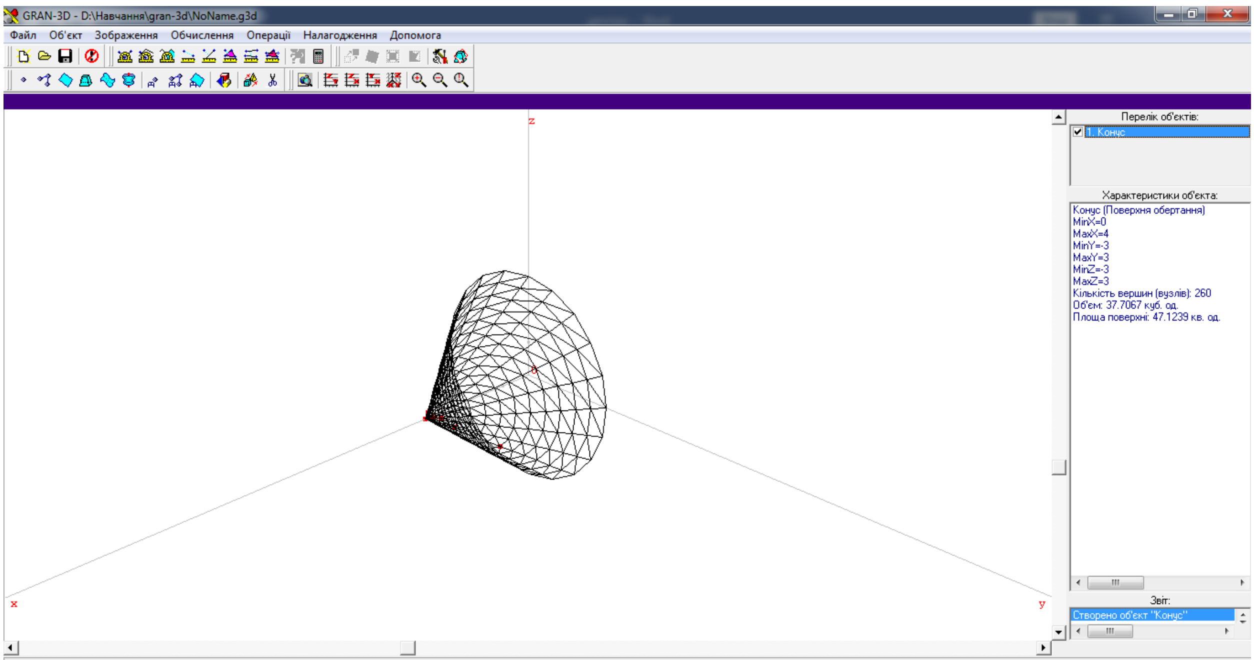
Мал. 29

Також ця програма дозволяє швидко та точно зообразити буль яку поверхню обертання (мал.30)



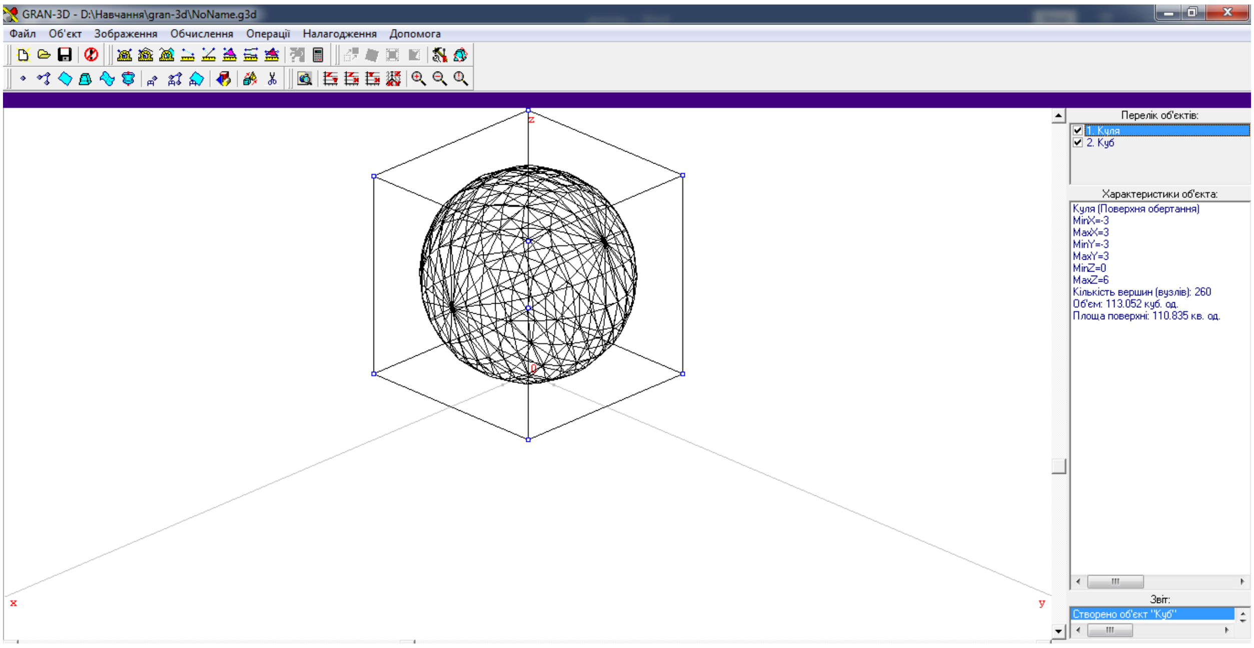
Мал.30

Програма надає унікальні можливості візуалізації поверхонь, що утворились внаслідок обертання тривіальних геометричних фігур, графіків функцій, довільних ламаних. (мал. 31)



Мал.31

За допомогою програми «Gran 3D» можна створювати комбінації просторових об'єктів та оглядати у будь якому масштабі, з усіх боків, користуючись смугами прокручування. (мал.32)



Мал.32

4. Обчислення об'ємів і площ поверхні тіл обертання.

У програмі передбачено обчислення об’ємів і площ поверхонь тіл обертання, що утворюються внаслідок обертання навколо осі Ox або Oy в прямокутній декартовій системі координат і задаються одним з трьох способів:

1. у вигляді явної залежності між змінними x і y: y = f (x);

2. у вигляді заданої параметрично залежності між змінними x і y: x = f (t), y = g (t), де t- мінлива-параметр;

3. У вигляді ламаної, заданої впорядкованим набором вершин у площині xOy.

Відразу після створення об'єкта типу Поверхня обертання розпочнеться обчислення об'єму та площі поверхні тіла, обмеженого поверхнею, утвореної обертанням графіка заданої функції або ламаної. Цей процес вимагає певного часу, тому під час обчислення з'являється вікно з показником стану виконання обчислень.

Після обчислення результат буде виведено у полі характеристик поточного об'єкта.

8. Обчислення значення вираження.

Під час роботи з програмою іноді виникає необхідність обчислити значення деякого вираження. У таких випадках зручно скористатися послугою Обчислення \ Значення виразу. На вкладці Значення виразу вікна Обчислення, яке з'явиться після звернення до зазначеної послуги, в полі Вираз потрібно ввести вираз, значення якого необхідно обчислити, і «натиснути» кнопку Обчислити, після чого результат буде виведено у полі Результат обчислень. При цьому якщо вираз було введено некоректно, то з'явиться повідомлення про помилку.

Для введення виразів можна використовувати панель калькулятора з цифровими кнопками і кнопками швидкого введення назв стандартних функцій, що дозволяє вводити вирази за допомогою лише миші, без використання клавіатури. Без використання панелі калькулятора всі необхідні символи можна ввести також із клавіатури.

Покажемо застосування цієї програми.

Головною функціональною можливістю програми, яка заявлена розробниками, є перевірка вірності розв'язання геометричних задач. Користувач (учень) має змогу після вирішення поставленої задачі перевірити результат, використавши програму Gran 3D.

Розглянемо можливості програмного продукту на прикладі задач, поданих в шкільному підручнику. Спочатку проводиться вирішення задачі стандартним способом - за допомогою формул та математичних обчислень. після чого знайдені результати перевіряються на правильність.

Задача 1.

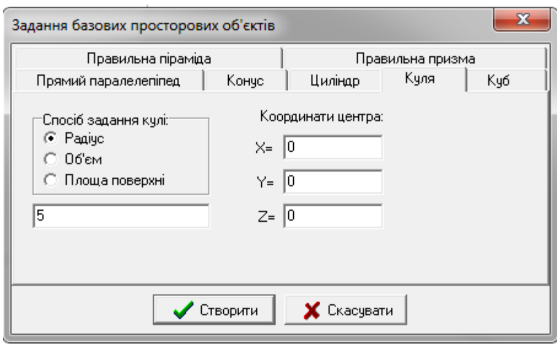
Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайти відношення площі поверхні цієї кулі до її об'єму.

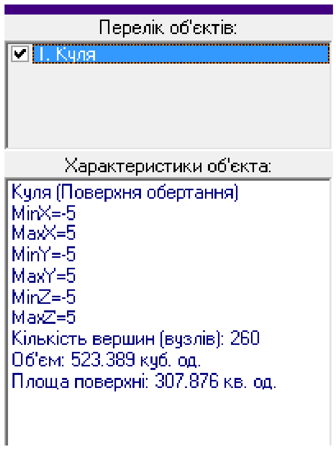
Розв'язання стандартним способом: $\frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R} = \frac{3}{5}$

Відповідь: 3:5

Перевірка:

Викликаємо команду «Створити базовий просторовий об'єкт». У вікні, що появилось, вибираємо вкладку «Куля» (мал. 33).



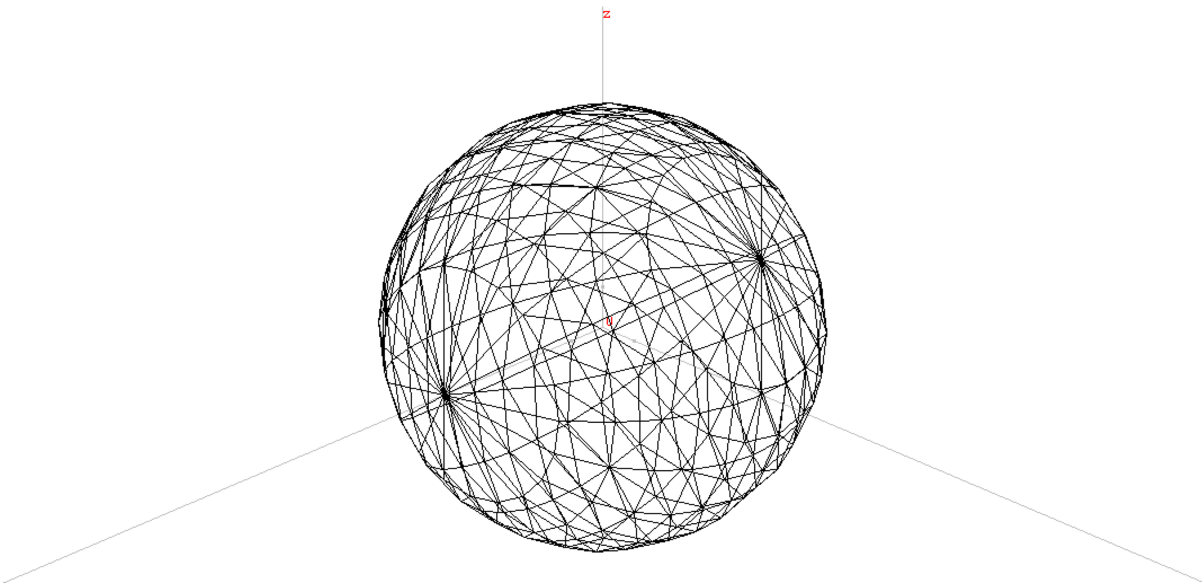


Мал.33 Мал.34

Вводимо діаметр кулі і натискаємо на кнопку «Створити». Програма будує тримірне зображення кулі, що дозволяє

користувачу наглядно оцінити параметри кулі, аналіз якої він

проводить(мал.34)



Мал. 35

У вкладеному вікні, що знаходиться з правої сторони. зчитуємо інформацію про об'єкт та площу поверхні (мал.35).

Об’єм: 523 куб. од.

Площа поверхні: 307 кв. од.

Діленням об'єму на площу можна отримати відношення 3 до 5, що є правильним розв'язком задачі.

Задача 2.

Кульку виготовили із скла, її радіус 3 см. Знайти з точністю до десятих грама масу цієї кульки, якщо маса 1 см^3 дорівнює 3 г.

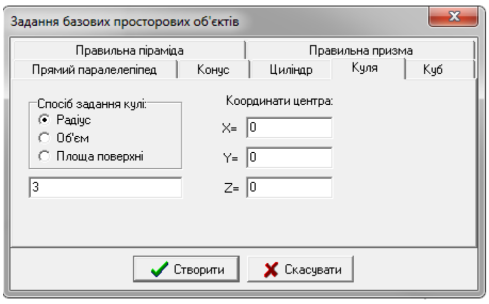
Стандартний метод розв’язку:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} + 3{,}14 + 3^3 = 113{,}04\text{см.}^3$$

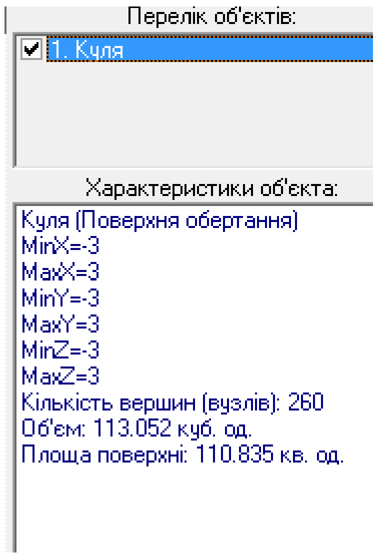
Тоді маса кульки:

3*113,04=339,1 (г)

Перевірка результату. Викликаємо команду побудови базового просторового об'єкту, у вікні вибираємо вкладку «Куля» і вводимо початкові дані (мал.36).



Мал.36



Мал.37

Створюємо кулю з вказаними параметрами і у вікні з інформацією про об'єкту отримуємо дані про об'єм кулі (мал.37) і перемножуємо на густину скла. В результаті отримуємо співпадання даних, добутих двома способами.

Задача 3. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють

36 см. І 10,5 см, обертається навколо одного катета. Визначити повну поверхню і об'єм утвореного при цьому конуса.

Розв'язання:

$$S_n = \pi R(R+L), V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Де R - радіус основн, L -твірна, H – висота.

Розглянемо ▲OAS, у ньому кут SOA 90 градусів

Якщо OA=10,5см. SO=36см, то за теоремою Піфагора

$SA^2=SO^2+OA^2=1296+110,25=1406,25$, SO=37,5см.

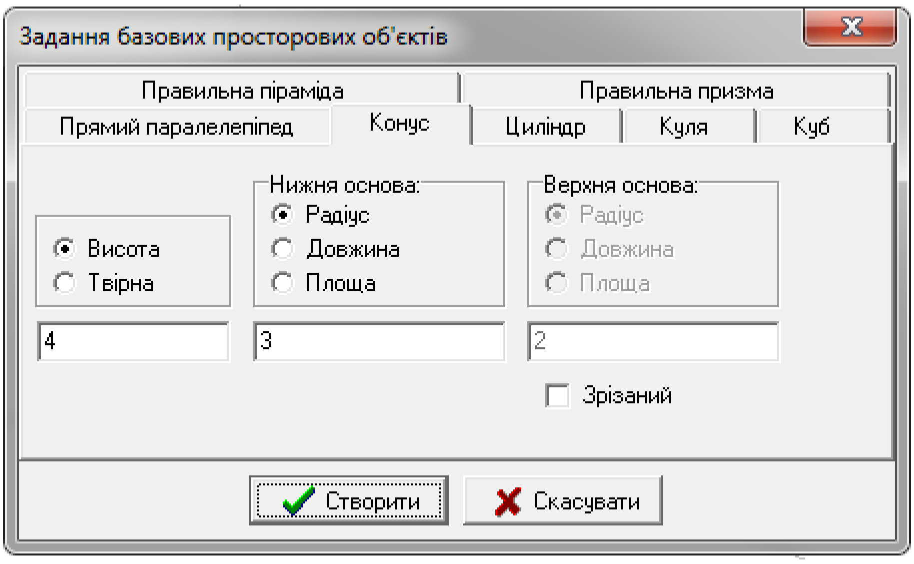
Отже, $S_n = 10{,}5\pi(10{,}5 + 37{,}5) = 504\pi(\text{см}^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi(10{,}5)^2 + 36 = 1323\pi(\text{см}^2)$

Якщо OA= 36см, SO= 10,5, то за теоремою Піфагора

$SA^2 = SO^2+OA^2=1296+110,25=1406,25$, SO=37,5см.

Отже, $S_n = 10{,}5\pi(36 + 37{,}5) = 2646\pi(\text{см}^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi(36)^2 + 10{,}5 = 4536\pi(\text{см}^2)$

Перевіримо відповідь за допомогою програми Gran 3D. Для цього викличемо команду «Створити просторовий базовий об'єкт», перейдемо на вкладку «Конус» і введемо дані, вказані в умові задачі (мал.38).



Мал.38

У вікні параметрів об'єкту читаємо дані про об'єм та повну поверхню утвореного конуса (мал.39).

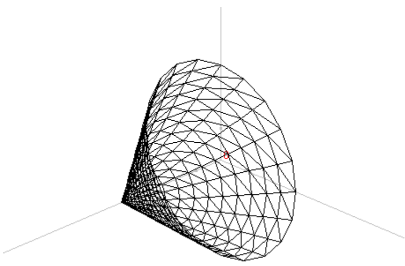
Кількість вершин (вузлів): 260
Об'єм: 37.7067 куб. од.
Площа поверхні: 47.1239 кв. од.

Мал.39

Ділимо отримані дані на π і отримуємо результат, відповідний до результату, отриманого стандартним способом розв'язування.

При цьому, разом з перевіркою даних на основі програма будує стереометричну модель об'єкта, що дає можливість побачити його візуально, виконати операції масштабування та обертання для

його кращого аналізу (мал.40).



Мал.40

Отже, програма дозволяє будувати різноманіті просторові об'єкти за допомогою можливостей програми Gran 3D та отримувати дані, необхідні для перевірки даних. Це дає користувачу змогу перевіряти вірність отриманих в процесі розв'язання даних та ефективно аналізувати візуальний вигляд об'єкту.

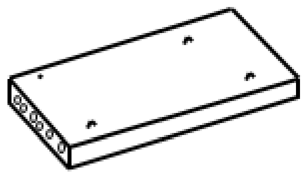
В цілому програмне середовище «Gran 3D» є дидактично корисним засобом комп'ютеризованої підтримки занять із стереометрії з реалізованими універсальними можливостями унаочнення геометричного матеріалу, здійснення експериментальних досліджень, необхідних для ефективної організації процесу пізнання, створення на уроках різноманітних

проблемних ситуацій, впровадження в навчальний процес індивідуалізованих та колективних форм навчання, розвитку в учнів творчої ініціативи, продуктивного та корисного мислення, активізації пізнавальних мотивів та дослідницьких компонентів навчальної діяльності.

3.4. Прикладна спрямованість теми «Тіла обертання»

Виявляти зв'язок шкільного курсу математики з життям і іншими учбовими предметами завжди важливо і цікаво. У даному пункті зупинимося на прикладній спрямованості останього розділу курсу геометрії 10 класу.

При введенні поняття «Тіло обертання» слід сказати учням, що більшість деталей, що виточуються з дерева або металу на токарних верстатах, - тіла обертання. І посуд, що виготовляється на гончарних кругах, і скляні банки, пляшки, стакани, пробірки, і різні котушки, барабани, вали, шайби, заклепки, лінзи, патрони, спортивні диски, м'ячі, обручі - все це матеріальні тіла, що мають форму тіл обертання. І де б не опинився випускник школи після її закінчення, він напевно буде мати справу з подібними та.



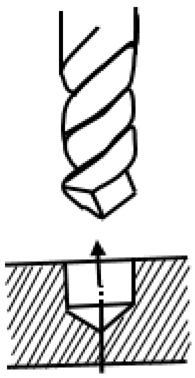
Мал.41

Циліндрові резервуари і цистерни, хокейні шайби, графітні стрижні, електроди для електрозварювання, круглі олівці – всі вони мають форму прямого кругового циліндра. І шахтний стовбур, бурова неглибока свердловина, отвір, просвердлений в дошці перпендикулярно до її поверхні, циліндр двигуна внутрішнього згорання або поршневого насоса – теж циліндри.

Ще більше зустрічається матеріальних циліндрів в комбінаціях з іншими тілами: призмами, циліндрами, кулями і т. п.

Наприклад, цеглина з отворами, залізобетонна панель для перекриття (мал. 41), труба, просвердлена по осі куля.

Переходячи до вивчення конусів, бажано, для тих що вчаться, сказати, що природно насипані на горизонтальній поверхні купи піску, зерна, вугілля, породи мають форму конусів. При цьому кожному сипкому матеріалу відповідає певний кут природного нахилу (кут нахилу твірної до площини основи конуса). Так, наприклад, піску відповідає кут нахилу в 25°, глині-30°, щебню - 33°, вуглю — 42°.

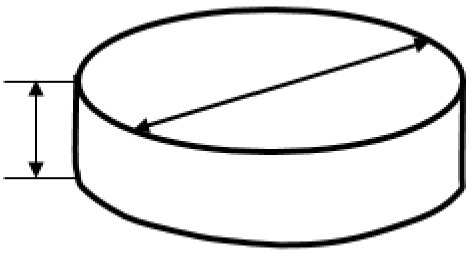


Мал.42

Інші приклади матеріальних конусів: нижня частина поглиблення, зроблена свердлом в металі (мал.42), верхні частини багатьох нафтосховищ, кінці кернерів - інструментів для вибивання маленьких воронок в місцях свердлення. Форму зрізаного конуса мають відра, тази, діжечки,ролики багатьох підшипників і тому подібне.

Приклади матеріальних куль - кульки підшипників, кулі в дробарках, багато резервуарів на нафтопереробних заводах, цукерки драже, м'ячі, більярдні кулі.

Особливу увагу при вивченні теми «Тіла обертання» слід звернути на розв'язування прикладних завдань, щоб учні мали можливість самостійно моделювати, а не тільки аналізувати вже готові математичні моделі.



Мал.43

Бажані при цьому і такі завдання, які вимагають для свого розв'язання, окрім обчислень і перетворень, ще і вимірювання. Наприклад, викликавши учня до дошки давши йому в руки хокейну шайбу, можна запропонувати знайти її об'єм. Хай він сам визначить потрібні розміри (вони вказані на мал. 43) і підставить їх у формулу для находження об'єму циліндра. Саме так розв'язують більшість задач на виробництві.

Ось ще декілька прикладних задач по темі «Циліндр»:

1. *Скільки мідного дроту діаметром 5 мм. можна прокатати із злитка об'ємом 0,5* $м^3$*?*

2. *Скільки в зв'язці електродів для електрозварювання, якщо їх загальна маса 10 кг, а кожен електрод - шматок сталевого дроту завдовжки 45 см і діаметром 6 мм? Щільність сталі 7600кг/*$ж^3$*.*

3. *Знайдіть об'єм шахтного стовбура діаметром 8 м, якщо його глибина 800 м*

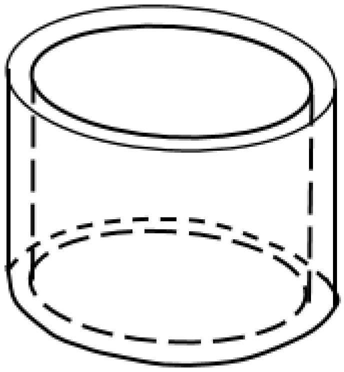
*4. Залізобетонна панель має розміри 600*120*22 см. По всій її довжині - 6 циліндричних отворів, діаметри яких 14 см. Знайдіть масу панелі, якщо щільність матеріалу 2,5 т/м^3.*

Зрозуміло, що, розв'язуючи подібні завдання, слід дотримуватися правил наближених обчислень. Адже не тільки значення даних в них величин наближені, але і розглянуті матеріальні об'єкти - не ідеальні циліндри, паралелепіпеди і т. п.

Корисно звернути увагу учнів і на термінологію. Висоту матеріального циліндра не завжди називають заввишки. Говорять про довжину дроту, стрижня, про глибину ямки, свердловини, про товщину круглої прокладки і т. п. Бажано також відзначити, що, розв'язуючи задачі, подібні до задачі 4, значення висоти, загальне для циліндра і паралелепіпеда, при обчисленнях можна винести за дужки, тобто помножити висота тіла на площу основи, яка є деякою комбінацією многокутників і кругів. Звідси випливає, що за формулою V = SH можна знаходити об'єми не тільки циліндрів і призм, але і багатьох інших матеріальних тіл, таких, як рейки, швелери, балки, труби. Про це добре знає кожен слюсар, фрезерувальник, прокатчик. Непогано, якщо і випускники середньої школи розумітимуть це.

Особливу увагу слід приділити завданням про труби у наш час труби дуже розповсюджені. У кожному міському будинку різних труб сотні метрів водопровідних, опалювальних, газових каналізаційних, водостічних, вентиляційних. На хімічних і металургійних заводах їх сотні кілометрів, а гігантські магістральні газо- і нафтопровід прокладаються на багато тисяч кілометрів.

На завданнях про труби добре ілюструвати і закріплювати формули об'єму і площі поверхні циліндра. Тому на уроках стереометрії в 10 класі бажано розв'язати хоч би декілька задач, аналогічних наступній.



Мал.44

5. Зовнішній і внутрішній діаметри кільця для колодязя відповідно 1.3 м і 1.1 м, а висота 0,9 м (мал. 44). Скільки кубометрів бетону потрібно для виготовлення 8 таких кілець?

Декілька задач слід розв'язати про відомий газопровід Уренгой - Ужгород, який прокладається сталевими трубами діаметром1420мм.

6. а) Знайдіть масу десятиметрової труби діаметром 1420 мм, зробленою із сталевого листа товщиною 22 мм. Щільність сталі 7600 кг/ж^3.

б) Скільки тонн таких сталевих труб потрібно, щоб прокласти газопровід Уренгой- Ужгород, довжина якого 4451 км.?

в) Знайдіть загальний об'єм (внутрішній) газопроводу Уренгой - Ужгород?

г)Знайдіть площу поверхні (що належить ізоляції) десятиметрової труби діаметром 1420 мм.?

д) Скільки квадратних метрів ізоляційної стрічки потрібно, щоб вдвічі покрити нею труби газопроводу Уренгой - Ужгород?

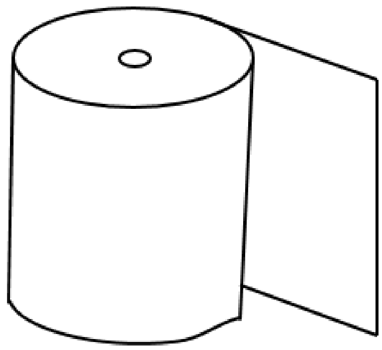
Окрім газопроводу Уренгой - Ужгород споруджуються і інші. У зв'язку з цим корисно запропонувати учням і таку задачу.

7. За останіх п'ять років передбачено прокласти 48 000 км.магістральних газопроводів. Скільки тонн сталевих труб необхідно для цього, якщо в середньому на будівництво газопроводів йдуть труби діаметром 1220 мм і шириною 16 мм?

Адже прокладають не тільки магістральні газопроводи, а й на багатьох тисячах кілометрів йдуть відгалуження від них. А ще нафтопроводи. На місцевому матеріалі кожен вчитель математики сам може скласти декілька таких задач і запропонувати учням їх розв'язати. Відмітимо тільки, що розміри труб не можна брати стандартні. Для нафтопроводів зазвичай використовують труби наступних діаметрів (у дужках вказана можливі товщини труб даного діаметру, всі розміри міліметрах):

375(7, 9, 10), 529Гз($11\frac{1}{2}$, 12), 720(12, 14, 16).

Для газопроводів, окрім цих, використовують також труби великих діаметрів:



1020 (12, 14, 16), 1220 (14, 16, 18), 1420 (18, 20,22).

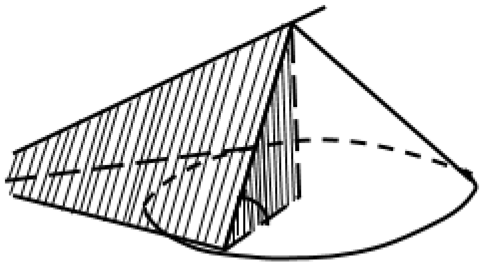
Бажано розв'язувати з учнями і декілька задач про рулони. Поліхлорвінілова плівка, якою обмотують газопроводи, папір і кінострічки та багато інших матеріалів заводами випускаються в рулонах. Часто виникає потреба дізнатися площу матеріалу, що змотаний в рулон. Зробити це можна за допомогою формули об'єму циліндра. Геометрично рулон можна характеризувати висотою і двома радіусами (мал. 45). Якщо внутрішній радіус порівняно малий, його можна не брати до уваги, вважаючи при цьому, що даний рулон мас форму циліндра. Якщо внутрішній радіус достатньо великий, об'єм такого рулону можна знаходити як різницю об'ємів двох циліндрів.

8. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота і радіуси якого відповідно 85 см, 45 см і 2 см, якщо товщина паперу 0,1 мм? (За даними в задачі числовим значенням можна визначити об'єм рулону, а знаючи об'єм паперу і її товщину, неважко знайти і площу.)

У школах Донбасу і інших місцевостей, що мають вугільні шахти, при вивченні конусів не можна не згадати про терикони: так називають великі купи породи, вивезеної з шахт за багато років.

Правда, тільки в грубому наближенні терикон можна розглядати як конус. Річ у тому, що рейки на його вершину прокладають під кутом дещо меншим, ніж кут природного нахилу породи. Тому об'єм терикону зазвичай процентів на 10 більший об'єму конуса такої ж висоти і кута нахилу.

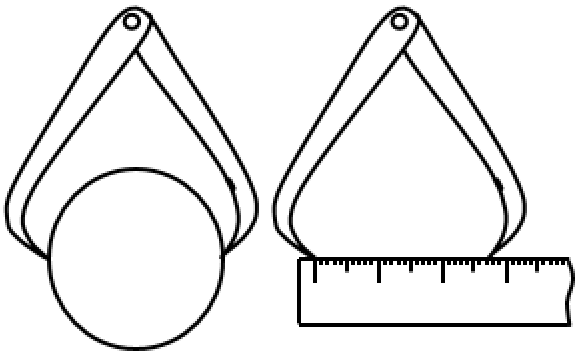
Розглянемо ще одне завдання:



Мал.46

9. Скільки тон породи в териконі заввишки 90 м (див. мал. 46), якщо відомо, що кут природнього нахилу породи 46°, а її щільність 2т/м^3?

Багато прикладних задач можна розв'язати при вивченні кулі, сфери і їх частин.



Мал.47

Корисно, давши учневі в руки м'яч, глобус або яку-небудь іншу матеріальну кулю, запропонувати знайти його об'єм або площу поверхні. Завдання не з важких, але, виявляється, деякі учні не можуть виміряти радіус кулі. Слід показати, як це робити, помістивши дану кулю між двома паралельними площинами. Корисно також показати, як можна виміряти діаметр кулі за допомогою штангенциркуля або кронциркуля (мал. 47).

ВИСНОВКИ

На сучасному етапі переходу системи освіти на якісно новий рівень, що передбачає особистісну орієнтацію навчання, розвиток особистості учня, зростання його самостійності та творчої активності, вироблення у кожного розуміння необхідності та уміння навчатися впродовж життя, вироблення якостей мислення, необхідних для повноцінного життя і конкурентоспроможності в умовах сучасного суспільства, необхідним є забезпечення засвоєння учнями математичних знань і вмінь, які є складовими загальнолюдської культури. Значну роль у цьому відіграє геометрія, зокрема розділ "Тіла обертання".

На основі аналізу різних підходів до вивчення теми „Тіла обертання" потрібно вибирати таку послідовність розгляду, яка краще забезпечує принципи навчання, як науковість і логічність під час введення понять та доведення тверджень, і дає змогу розв'язувати широке коло задач. Тому доцільно розглядати властивості тіл обертання одночасно з вивченням формул площ їх поверхонь, що спрощує сприймання цієї теми, а також збільшує кількість вправ і задач, які можна розв'язувати на уроках. Для забезпечення науковості та логічної послідовності викладу матеріалу вивчати об'єми геометричних тіл слід окремим розділом.

Визначення підходів до побудови і структурування змісту розділу повинно базуватися на аналізі історії розвитку математичної думки про геометричні тіла, систематизації підходів до вивчення тіл обертання у шкільному курсі різних часів, співставленні та порівнянні цих підходів у програмах і підручниках, виокремленні та порівнянні типів структури змісту розділу "Тіла обертання", їх систематизації та теоретичному узагальненні.

При умові правильно поставленого навчання в учнів розвиваються спостережливість, увага і зосередженість, ініціатива і наполегливість, розуміння важливості колективної праці та повага до праці своїх товаришів. Все це має велике значення для морального виховання учнів, формування їх характеру.

Вивчення математики дає учням правильне матеріалістичне розуміння питань походження і розвитку математичних понять і методів. Учні одержують уявлення про місце математики в системі наук та її ролі в сучасному суспільстві, розвитку наук, техніки, виробництва.

Використання у процесі вивчення теми ,,Тіла обертання" фактів із сучасного життя в доступній для учнів формі допомагає розкрити матеріалістичну основу даної теми, на яскравих прикладах показати пізнання явищ реального світу. Разом з тим вивчення математики в цілому, сприяє розумінню реального світу, розвиває інтерес учнів набувати наукового погляду на процеси розвитку природи і суспільного життя, підготовлює їх до свідомого засвоєння світоглядних питань при вивченні суспільствознавства і вносять свій вклад у формування наукового світогляду учнів.

Засвоєння теми ,,Тіла обертання" вимагає від учнів не лише знання формул, але і знання властивостей геометричних тіл, вміння застосувати ту чи іншу властивість під час розв'язування певного завдання. Тому, перед тим як почати вивчати об'єми тіл обертання, обов'язково необхідно проводити актуалізацію опорних знань, без якої розв'язування практичних завдань просто не можливе.

Для правильного оцінювання учнів за 12-ти бально шкалою, самостійні та контрольні роботи їм потрібно давати відповідно I, II і III рівня. Це звичайно вимагає від вчителя затрати зайвого часу, але при такій підготовці кожен учень працює в міру своєї підготовленості.

Дослідження психологів говорить про те, що найбільш ефективною є така методика вивчення нових математичних понять, коли вони вводяться в навчання досить рано і на більш високому, але доступному для учнів рівні узагальнень. Ця методика виправдала себе в проведених експериментах.

Ефективність запропонованої методики зростає, якщо використовувати засоби інформаційно-комунікаційних технологій, а саме програмні засоби GRAN 2D і GRAN 3D під час проведення практичних робіт на теми: "Перерізи многогранників", "Тіла обертання", "Об'єми", для створення віртуальних моделей комбінацій тіл обертання, які дають можливість учням з'ясувати взаємне розташування тіл, їх розміри, практично підтвердити як теоретичні відомості, так і висунуті гіпотези.

Урахування сучасних вимог до освітнього процесу потребує використання нових підходів до організації контролю навчальних досягнень учнів. Якщо здійснювати контроль у такій послідовності: попередній, поточний, повторний, тематичний, підсумковий, при цьому, використовуючи запропоноване нами методичне забезпечення, то це дасть змогу оцінити успішність навчання та готовність учнів його продовжувати, корегувати та прогнозувати результати навчання.

Отже, в даній роботі ми розглянули вивчення тіл обертання у курсі математики старшої школи, охарактеризували навчально-методичні посібники та статті з даної теми, ознайомилися з особливостями та методикою розв’язування різних видів задач з теми «Тіла обертання» та показали практичну реалізацію вивчення теми «Тіла обертання» з використанням ІКТ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Абрамець Н. Об'єми геометричних т. // Математика - 2002 -№13-с. 10-12.

2. Аксютина І. В. Методика формування просторової уяви учнів на факультативних заняттях / І. В. Аксютина, Ю. А. Шуклина // Інженернобудівельний вісник Прикаспію. – 2013. – №1(4). – С. 49-64.

3. Алєксєєв В.М. Ушаков Р.П. Математика. Довідковий повторювальний курс – К.: Вища школа, 1992 - 256 с.

4. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. - 3- тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.: 1989 - с. 353-355.

5.Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач. – К.: Радянська школа. – 1988.

6.Вітюк О.В GRAN-2D і GRAN-3D - програмні засоби для підтримки курсу геометрії // Інформатика та комп'ютерно-орієнтовані технології навчання: Зб. наук. праць Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Хмельницький, 16-18 травня 2001 року)/ Редкол.-К: Педагогічна думка. 2001.

7. Гириловська І. Формування в учнів умінь розв'язувати стереометричні задачі на уявленні побудови // Рідна школа. - 2001-№12-с. 40-43.

8. Глюкоза О. Психолого- дидактичні засади коригування базової математичної підготовки учнів // Математика в школі. - 2005 - №10–с. 19-21.

9 Грохольська А. Підготовка учнів до розв'язання задач на комбінацію многогранників з кулею // Математика 2002 - № 12 – с. 17-20.

10 Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник для вчителів. - К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000-147с.

11. Збірник задач з математики. За ред. Сканаві М. І.- К.: Вища школа, 1992.

12 Зубович ЛВ., Скибньовська О.Я. Завдання для тематичного контролю з математики 10кл. – К.: Вища школа, 2000 - с. 57-59.

13. Калмикова З.І. Психолого-педагогічні основи дослідження К.: Наука, 1988-324с.

14. Коваль В.В., Крайчук О.В., Клекоць Г. Я. Загальна методика викладання математики, РДГУ, Рівне 2005 - 169 с.

15. Крючкова Т.М., Карамазіна В.В., Граніна Т.О. Система контролю знань за допомогою сучасних інформаційних технологій. // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2006 - №4 - с. 32-33.

16. Кушнір І. А. Методи розв'язування задач з геометрії - К.: 1994 - с. 15-19.

17. Малкова Н.П «Навчання учнів розв'язувати стереометричні задачі в умовах застосування ІКТ».

18 Нитик А. П. Площа поверхні тіл обертання // Математика.-
2003-№13- с.7-12.

19. Повзло Н.М. Проблеми розв'язання стереометричних задач та пояснення їх розв'язання // Математика - 2009 - №3 – с.10-13.

20. Повзло Н.М. Проблеми розв'язання стереометричних задач та
пояснення їх розв'язання // Математика - 2009 - №4-с.8-11.

21. Погорєлов А.В. Геометрія: Підруч. для 7-11 кл. серед шк. - К.: Рад.
шк., 1991.

22. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи, 2001.

23. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи, 2005.

24. Прус А. В. «Про прикладну спрямованість шкільного курсу стереометрії».

25. Сверчевська І.А. Геометричні тіла у шкільних підручниках XVIII початку XX століття // Проблеми сучасного підручника: зб. наук. праць /Ред. кол. - К.: Педагогічна думка, 2004 - Вип. 5 - с.131-137.

26. Сверчевська І.А. Еволюція вивчення геометричних тіл у шкільному курсі стереометрії // Математика. - 2003 - №20 – с.5-11.

27. Сверчевська І.А. Історія розвитку математичної думки про геометричні тіла // Наукові записки: Збірник наукових статей Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова / Укл. П.В. Дмитренко, Л.Л. Макаренко-К.: НПУ, 2002- Випуск 47-с.179-188.

28. Сверчевська І.А. Психолого-педагогічні умов підвищення продуктивності вивчення тіл обертання // Вісник ЖДУ імені Івана Франка - 2004 - Вип. 19 – с. 213-217.

29. Сікарський П. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики. // Математика в школах України №10 – 2004- с. 41-42.

30 Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. Ма., спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак, 2000 - с. 471-473

31. Смалько О.А. Навчаючі програми з математики. // Математика в школі - 2000 №2 с. 14-17.

32. Ципкін О.Г. Пінський О.І. Довідник з методів розв'язання задач з математики. Москва "Наука", 1989 - 294 с.

33. Ходоровська С.І. Психолого-педагогічна діагностика в роботі вчителя. // Математика в школі 200. - № 5 с. 21-25.