РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та методики її навчання

«До захисту допущено»
Завідувачка кафедри
________ Наталія Генсіцька-Антонюк
«______»__________2025р.
протокол №

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Виконала:
здобувачка другого (магістерського) рівня вищої освіти
групи М-М-21 спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Віталіна Мединська

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Крайчук Олександр Васильович

Рівне – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

***Актуальність* теми.** У ряді навчальних дисциплін, що складають у сукупності шкільний курс математики, геометрія відіграє важливу роль. Така роль визначається й відносною складністю геометрії в порівнянні з іншими предметами математичного циклу і великим значенням цього предмета для вивчення навколишнього світу.

Цілі та результати навчання геометрії не обмежуються рамками предмета, вони мають незамінний ефект, що сприяє загальному розвитку особистості, підвищенню його інтелектуально-творчої активності. Розвиток логіки та розвиток інтуїції (геометричної зокрема) – дві найважливіші рівноправні функції геометричної освіти. Геометрія, як, мабуть, ніякий інший предмет, сприяє розвитку обох якостей, оскільки логічний та інтуїтивний аспекти у цьому предметі переплітаються найбільш тісно.

З іншого боку, протиріччя між теоретичними положеннями та прикладним характером більшості задач є чи не головною причиною всіх методичних труднощів у всіх питаннях геометричної освіти. Подібна роль визначається і відносною складністю геометрії в порівнянні з іншими предметами математичного циклу та великим значенням цього предмета для вивчення навколишнього світу.

Геометрія, як навчальний предмет, має унікальні можливості для вирішення головного завдання загальної математичної освіти – цілісного розвитку та становлення особистості засобами математики. Розвиток учнів засобами геометрії спрямовано досягнення наукових, прикладних і загальнокультурних цілей математичної освіти, де загальнокультурні цілі навчання геометрії насамперед передбачають всебічний розвиток мислення дітей. Недоліки в освоєнні геометрії ведуть до серйозної шкоди всього світорозуміння як матеріального, так і духовного. Тому виховання геометричного мислення має виходити за часові рамки курсу геометрії як шкільного предмета і продовжуватись у час перебування учня у школі.

Основну роль в геометричні освіті відіграють геометричні задачі; це не просто опанування формул і теорем, а потужний інструмент для формування ключових компетентностей, необхідних для успіху в сучасному світі. Геометричні задачі мають вагомий вплив на розвиток просторового мислення, логіки, креативності, а також у формуванні навичок розв'язання проблем.

У той же час в переважаючій більшості для школярів розв'язування геометричних задач складає значні труднощі. Такого роду труднощі не обмежуються лише незнанням теорем або формул, а є наслідком комплексних проблем, які виникають на різних етапах навчання. Для багатьох школярів геометрія видається складною і "сухою" наукою. Відсутність видимого зв'язку з реальним світом та невдалі спроби розв'язати задачі формують психологічний бар'єр та знижують мотивацію. Учні швидко втрачають інтерес і віру у власні сили, що призводить до пасивного ставлення до навчання.

Недоліки в освоєнні геометрії ведуть до серйозної шкоди всього світорозуміння як матеріального, так і духовного. Тому виховання геометричного мислення має виходити за часові рамки курсу геометрії як шкільного предмета і продовжуватись у час перебування учня у школі.

Подолання цих труднощів вимагає комплексного підходу, який буде акцентуватися на розвитку просторової уяви, зміні методики викладання (від репродуктивного до проблемного), використовувати практичні приклади та демонструвати зв'язок геометрії з повсякденним життям.

Мета дослідження полягає у визначенні принципів побудови методики навчання розв'язуванню геометричних задач для забезпечення формування математичних компетентностей у школярів основної школи.

Об'єктом дослідження є процес навчання розв'язуванню геометричних задач при вивченні курсу геометрії в основній школі.

Для досягнення мети даної дипломної роботи були поставленні такі завдання:

– проаналізувати роль геометричних задач у вивченні геометрії в основній школі:

– провести огляд видів геометричних задач, які використовуються в шкільному курсі геометрії;

– дослідити методи розв’язування геометричних задач, які використовуються в основній школі;

– розробити принципи, на яких повинна будуватися методика навчання розв’язуванню геометричних задач;

– дослідити вплив методики навчання розв’язування геометричних задач з теми "Використання теореми Піфагора" на формування математичних компетентностей школярів 8 класу.

Предметом дослідження є зміст методики навчання розв’язуванню задач з геометрії учнів основної школи.

Гіпотеза дослідження полягає у припущенні, що формування вміння розв’язувати геометричні задачі в учнів основної школи буде ефективним за умов:

– поетапного введення в практику навчання учнів задач різного рівня складності;

– використання практично-орієнтованих задач робить навчальний процес більш дієвим;

– навчання повинно мати поетапний, системний та цілеспрямований характер, а задачі повинні супроджуватися чітко визначеними алгоритмами дій.

Методи досліджень. Для досягнення мети та розв’язання поставлених завдань були використані теоретичні (аналіз, порівняння, синтез, систематизація, класифікація та узагальнення теоретичних даних, представлених у педагогічній, психологічній та методичній літературі) та емпіричні (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями закладів загальної середньої освіти при організації навчання геометрії на уроках, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності, підготовки їх до успішної\го складання ЗНО та ДПА.

Структура роботи: робота побудована за логічним принципом і складається зі вступу, основної частини, яка включає три розділи, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі роботи проаналізовано теоретико-методичні основи навчання розв’язування геометричних задач. Другий розділ присвячений підходам до навчання розв’язуванню геометричних задач та їх ролі в формуванні комптентностей школярів. В третьому розділі розробляється методика навчання розв’язуванню геометричних задач, зокрема при вивчення теми "Теорема Піфагора" та її застосуванню при навчанні школярів.

РОЗДІЛ І. Теоретичні основи розв'язування геометричних задач в основній школі

1.1. Аналіз психолого-педагогічних особливостей сприйняття геометричної інформації учнями основної школи

Сприйняття інформації з психолого-педагогічної точки зору – це складний когнітивний процес відображення й осмислення людиною навколишньої дійсності, що забезпечує перетворення зовнішніх подразників у цілісний образ, доступний для подальшого пізнання та навчальної діяльності. У психології сприйняття розглядається як інтегративна функція свідомості, яка пов'язана з роботою сенсорних систем, уваги, пам'яті та мислення. У педагогіці воно трактується як початковий етап засвоєння знань, що визначає ефективність навчання та формування компетентностей.

Змістовними характеристиками сприйняття є цілісність, осмисленість, активність, соціокультурна детермінованість [11].

У педагогічному процесі сприйняття інформації виступає фундаментальною передумовою ефективного засвоєння знань, розвитку мислення та формування особистісного досвіду.

Геометрична інформація – це не просто сукупність математичних понять про фігури, розміри та просторові співвідношення; це знання, яке людина засвоює та переробляє, використовуючи когнітивні процеси, пов'язані з візуальним сприйняттям, просторовим мисленням і пам'яттю. Це поняття охоплює, як дитина чи доросла людина сприймає, уявляє, запам'ятовує та оперує формою, розміром, розташуванням і взаємозв'язками об'єктів у просторі.

Розвиток сприйняття геометричної інформації дозволяє побачити геометричний об'єкт в різних ситуаціях, виокремити всі можливі його елементи. Загалом, сприйняття геометричної інформації є неперервним процесом, який створює візуально-логічне мислення (рис.1.1).

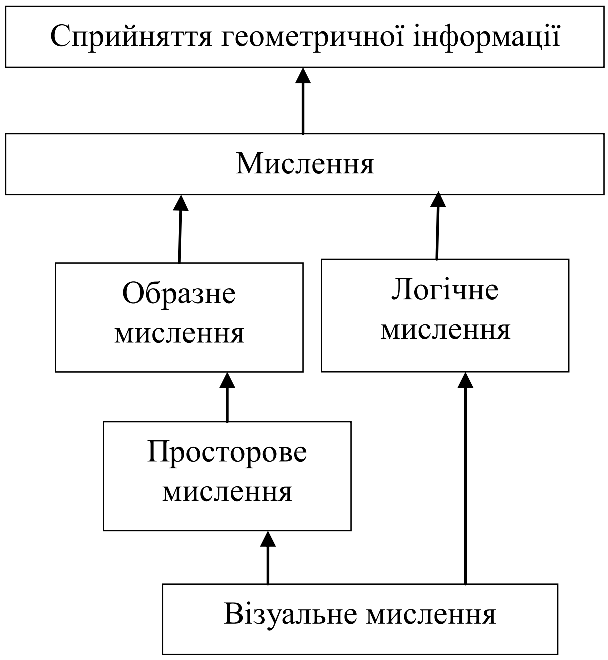


Рис.1.1

Психологія розглядає геометричну інформацію як складний процес, що включає:

- просторове сприйняття – це здатність бачити та розрізняти форми, розміри, відстані та взаємне розташування об’єктів. Наприклад, дитина вчиться бачити, що круг і квадрат – це різні фігури, а куб і сфера – це різні об’ємні тіла.
- просторове мислення – це здатність ментально маніпулювати об’єктами в просторі, що дозволяє людині уявляти, як виглядатиме предмет, якщо його повернути, розрізати, або скласти з кількох частин. Відтак, архітектор уявляє майбутній будинок, а дизайнер – як розташувати меблі в кімнаті.
- візуальна пам’ять – це здатність зберігати в пам’яті образи та їхні характеристики. Власне це дозволяє згадати вигляд фігури або розташування об’єктів, навіть коли їх немає перед очима.

- окомір (моторно-просторова координація) – це здатність точно оцінювати відстані та розміри, а також здійснювати точні рухи, необхідні для роботи з об’єктами, наприклад, при малюванні або кресленні.

З психолого-педагогічної точки зору сприйняття визначає якість засвоєння знань з геометрії, розвиток просторового мислення та здатність учнів до оперування математичними образами. Дослідження Р. Дюваля (1988, 1995, 1999) показали, що геометрична фігура може бути сприйнята різними способами, кожен з яких має специфічний характер організації та дидактичний потенціал [36].

Також особливу увагу слід звернути на те, що учні по-різному сприймають один і той самий навчальний матеріал. Це яскраво виявляється під час опрацювання геометричної інформації. Частина школярів ефективно засвоює знання через зорове сприйняття (схеми, креслення, моделі), інші краще орієнтуються у матеріалі завдяки словесним поясненням учителя чи текстовим описам. Значна група учнів потребує практичної діяльності – побудови фігур, маніпулювання геометричними об’єктами, використання цифрових інструментів. Таким чином, різні когнітивні стилі та провідні канали сприйняття (візуальний, аудіальний, кінестетичний) зумовлюють необхідність варіативності методів навчання, що дозволяє забезпечити доступність і глибину розуміння геометричного матеріалу для всіх учнів [2,11].

1.2. Класифікація геометричних задач та їх дидактичний потенціал

Геометрія вивчається з "нуля". Спочатку вводяться основні об’єкти вивчення (точка, пряма, площину, відстань). Їхня відмінність від усіх інших об’єктів геометрії полягає в тому, що ми їх приймаємо на рівні наочного уявлення та не даємо їм визначення.

Потім формулюються основні властивості цих об’єктів, які називаються аксіомами, після чого школярі вчаться записувати ці властивості у короткій формі, що дозволяє надалі вести свої записи та розуміти записи інших. Потім починають розглядатися стандартні ситуації за допомогою формулювання та доведення нових тверджень (теорем), попутно вводяться нові об'єкти через відомі, тобто даються визначення. І, нарешті, починають розглядатися незнайомі ситуації, що зводяться до аксіом або до вже доведених теорем, тобто вирішуються геометричні задачі.

Геометрична задача є однією з основних форм організації навчальної діяльності в курсі математики. У широкому значенні геометрична задача визначається як пізнавальна ситуація, що вимагає від учня застосування геометричних понять, властивостей та методів для досягнення певного результату: побудови, доведення, обчислення чи дослідження.

Геометричні задачі виконують багатогранну роль у процесі навчання [31]:

- виступають інструментом засвоєння теоретичного матеріалу, забезпечуючи його практичне застосування;
- сприяють розвитку логічного та просторового мислення, уміння аналізувати, синтезувати та узагальнювати;
- формують дослідницькі навички, оскільки розв'язування задачі часто вимагає висунення гіпотез, пошуку стратегій і перевірки результатів;
- мають виховний вплив, розвиваючи уважність, посидючість, самостійність та відповідальність у навчальній діяльності.

У методиці навчання математики виокремлюють кілька основних функцій геометричних задач.

Навчальна функція полягає у засвоєнні нових понять і методів, закріпленні та систематизації знань.

Приклад 1. Побудувати трикутник за трьома сторонами.

Дано: довжини сторін a, b, c

Побудова:

Проведемо відрізок AB=*a*. З центра в точці A радіусом *b* побудуємо коло. З центра в точці B радіусом *c* побудуємо коло. Точки перетину кіл – це вершини C. З'єднаємо C з A та B.

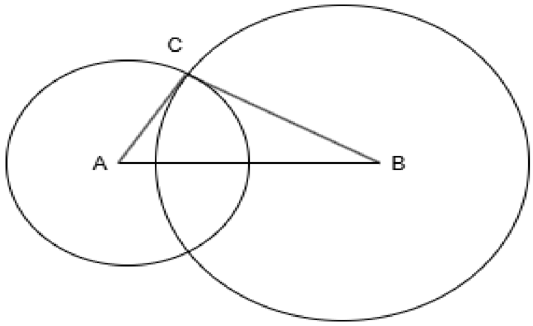


Рис.1.3

Обґрунтування правильності побудови: за означенням кола AC=*b* і BC=*c*, отже трикутник AB має сторони *a*, *b*, *c* і згідно третьої ознаки рівності трикутників рівний заданому.

Задача має два розв'язки (симетричні відносно AB), якщо виконується нерівність трикутника (будь-яка сторона менше суми двох інших).

Приклад 2. Довести, що в рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Дано: △ABC, AB=AC (бічні сторони).

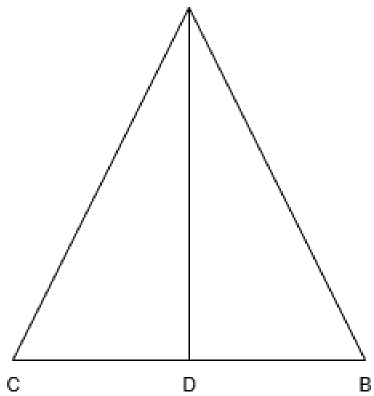


Рис.1.4

Доведення. Проведемо медіану AD до основи BC. У рівнобедреному трикутнику вона є одночасно і бісектрисою, і висотою. Трикутники △ABD і △ACD рівні за ознакою (AB=AC, AD – спільна, BD=DC). Отже, ∠ABC=∠ACB.

Розвивальна функція сприяє розвитку інтелектуальних умінь: логічного мислення, просторової уяви, здатності бачити зв'язки між об'єктами та переходити від конкретного до абстрактного.

Приклад 3. Розділити квадрат на два рівновеликі трикутники кількома способами.

Рішення

Спосіб 1. Проведемо діагональ AC, отримаємо два рівні прямокутні рівнобедрені трикутники.

Спосіб 2. Проведемо діагональ BD, аналогічно отримаємо два рівні прямокутні рівнобедрені трикутники.

Рис.1.5

Приклад 4 (теорема Піфагора). У прямокутному трикутнику з катетами a, b і гіпотенузою c $c^2 = a^2 + b^2$.

Доведення через подібність.

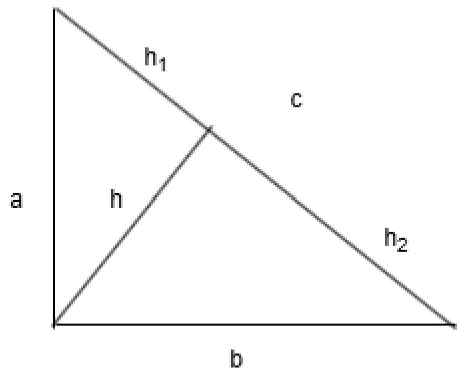


Рис.1.6

Опустимо висоту h з прямого кута на гіпотенузу. Отримуємо два менші трикутники, подібні до початкового. Звідси можемо побудувати пропорції:

$$\frac{a}{c} = \frac{h_1}{a} \Longrightarrow a^2 = ch_1$$

$$\frac{b}{c} = \frac{h_2}{b} \Longrightarrow b^2 = ch_2$$

$$h_1 + h_2 = c$$

Додаючи обидві нерівності, маємо

$$a^2 + b^2 = ch_1 + ch_2 = c(h_1 + h_2) = c^2$$

Доведення через площі (перестановка).

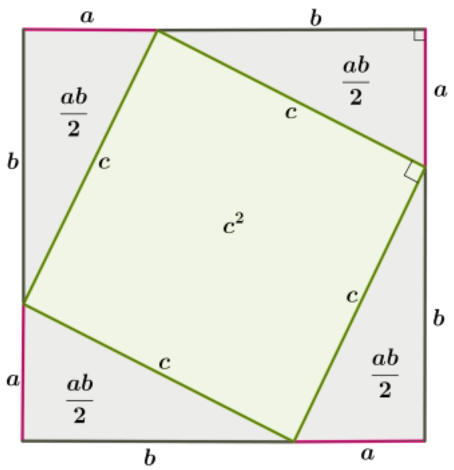


Рис.1.7

Побудуємо квадрат зі стороною a+b. Площа квадрата дорівнює $(a + b)^2$

Проведемо 4 гіпотенузи. Вони утворюють квадрат зі стороною c (кожен кут чотирикутника дорівнює 90°, оскільки сума двох кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°). Площа кожного трикутника дорівнює $\frac{ab}{2}$. Площа маленького квадрата дорівнює c^2. Таким чином, маємо

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Або

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Дослідницька функція реалізується через задачі відкритого типу, що вимагають аналізу кількох можливих рішень, експериментування та формування власних висновків.

Приклад 5. Визначити всі можливі способи побудови кола, яке дотикається до двох даних прямих.

Рішення

Нехай маємо прямі ℓ_1,ℓ_2.

Випадок 1 – прямі перетинаються. Центри шуканих кіл лежать на бісектрисах кута між прямими (дві бісектриси утворюють дві пучки кіл).

Побудова: проведемо бісектрису кута; візьмемо довільну точку O на бісектрисі; опустимо перпендикуляр до будь-якої прямої – його довжина є радіусом *r*; побудуємо коло з центром в т.O. Усі такі кола дотичні до обох прямих.

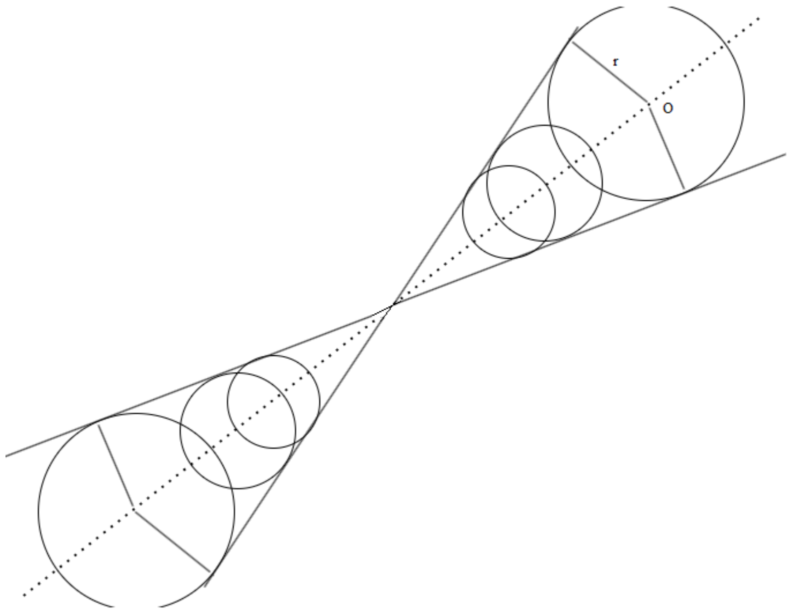


Рис.1.7

Випадок 2 – прямі паралельні. Центри лежать на середній лінії, рівновіддаленій від обох прямих.

Побудова: проведемо лінію, рівновіддалену від ℓ_1,ℓ_2; оберемо довільну точку O на ній; радіус *r* дорівнює половині відстані між паралельними прямими; побудуємо коло з центром в т.O. Отримаємо нескінченну множину кіл з фіксованим радіусом, центри яких "ковзають" середньою лінією.

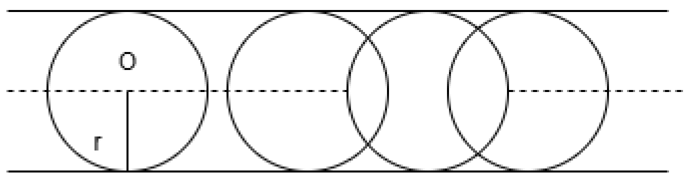


Рис.1.8

Контрольно-оцінювальна функція задіяна тоді, коли задачі використовуються як засіб перевірки рівня засвоєння знань і сформованості вмінь. Вони дозволяють об'єктивно оцінити підготовку учнів та виявити прогалини.

Приклад 6. Обчислити площу трикутника зі сторонами 7 см, 8 см і 9 см (застосування формули Герона).

Дано:

a=7 см, b=8 см, c=9 см,

Рішення

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{12 \cdot (12-7) \cdot (12-8) \cdot (12-9)} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2$$

Відповідь. Площа трикутника дорівнює $12\sqrt{5}$ см^2

Приклад 7. Обчислити довжину діагоналі прямокутника зі сторонами 5 см і 12 см.

Рішення.

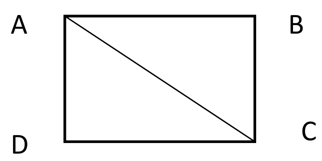


Рис.1.8

За теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ см}$$

Відповідь. 13 см

Мотиваційна функція реалізується через геометричні задачі, особливо прикладного змісту, які сприяють підвищенню інтересу до предмета, демонструють практичну значущість геометрії для різних сфер діяльності людини.

Приклад 8. Визначити висоту дерева, якщо його тінь дорівнює 12 м, а тінь 3-метрового стовпа – 2 м.

Дано: тінь дерева – 12 м; довжина стовпа – 3 м, тінь стовпа – 2 м.

Рішення.

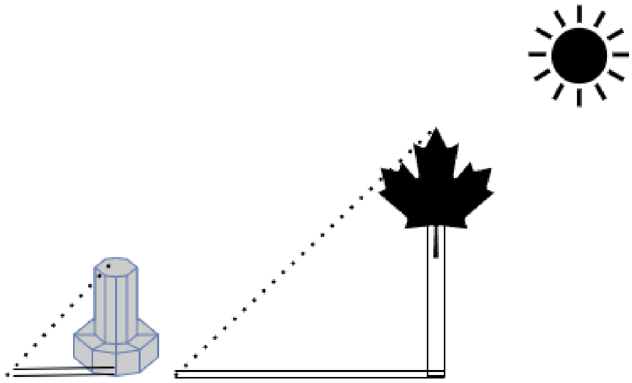


Рис. 1.9

За подібністю трикутників (однаковий кут підйому Сонця):

$$\frac{H_{\text{дерева}}}{12} = \frac{3}{2}$$

Отже, $H_{\text{дерева}} = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$ м

У методиці навчання математики геометричні задачі класифікують за різними критеріями: за характером діяльності учнів, за рівнем складності, за способом подання умови тощо.

1. Задачі на побудову розвивають уміння застосовувати геометричні інструменти (лінійку, циркуль, програмні засоби), формують просторову уяву та навички точності.

Приклад 9. Побудувати бісектрису даного кута.

Побудова.

1.З вершини даного кута О як з центра описуємо коло довільного радіуса.

2.Точки В і С – точки перетину даного кола зі сторонами кута

3. З точок В і С тим самим радіусом описує кола.

4.Точка А - точка перетину даних кіл

5. Будуємо промінь з початком у точці О і проходить через точку А

6.Промінь ОА - бісектриса даного кута.

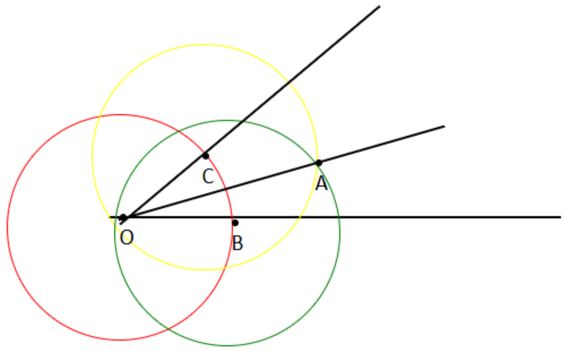


Рис.1.10

Доведемо, що OA – бісектриса даного кута. Отже, AO – спільна сторона. OB=OC=R. BA=AC=R. Отже, ∠ BOA=∠ AOC

2. Задачі на доведення (логічні задачі). Ці задачі вимагають доведення певного твердження (наприклад, рівності фігур, паралельності прямих, належності точки лінії) за допомогою логічних міркувань і відомих теорем.

Геометричні задачі на доведення є теоремами, знання яких не передбачається програмою. З одного боку геометричні задачі на доведення допомагають розширенню кругозору учнів. У ході вирішення таких задач школярі дізнаються, що фігури мають не лише властивості, описані у стандартному підручнику. Цим наголошується, що основний курс геометрії створює лише основу для подальшої роботи.

Хоча від учнів не вимагають запам’ятовувати результати вирішених задач, деякі з розглянутих властивостей утримуються у пам’яті. Саме тому як матеріал для задач на доведення відбирають насамперед суттєві властивості (якщо їх доказ може здійснити школяр і він не вимагає дуже багато часу).

Приклад 11. Доведіть, що діагоналі прямокутника рівні.

Доведення.

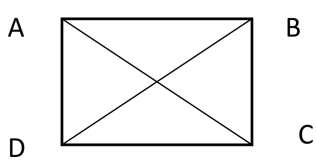


Рис.1.11

Розглянемо прямокутник ABCD. Діагоналі прямокутника – це відрізки AC і BD. Розглянемо трикутники ΔABC і ΔBAD. Сторона AB – спільна для обох трикутників. Сторони BC і AD рівні як протилежні сторони прямокутника. Кути ∠ABC і ∠BAD прямі, тобто рівні. Отже, за першою ознакою рівності трикутників (за двома сторонами та кутом між ними), ΔABC=ΔBAD

З рівності трикутників випливає рівність відповідних сторін, а саме: AC=BD. Що і потрібно було довести.

3. Задачі на обчислення (обчислювально-практичні) вимагають знаходження числових значень (довжин, площ, об’ємів, кутів) на основі відомих даних. Вони розвивають навички застосування формул та теорем.

Такі задачі сприяють розвитку обчислювальних навичок, розуміння зв’язку між різними геометричними величинами, закріплення знань про основні формули.

Приклад 12. Знайдіть площу трикутника з основою 10 см і висотою 8 см.

Розв’язання.

Площа трикутника (S) обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}ah$$

де a – основа, а h – висота.

$$S = \frac{1}{2}10 \cdot 8 = 40\ \text{см}^2$$

Відповідь: Площа трикутника дорівнює 40 см^2.

З педагогічної точки зору, задачі можна класифікувати за їх призначенням у навчальному процесі.

1. Навчальні задачі використовуються для пояснення нового матеріалу, закріплення знань і формування базових навичок; зазвичай вони мають чіткий, зрозумілий алгоритм розв’язання.

2. Тренувальні задачі призначені для відпрацювання вже засвоєних знань і доведення навичок до автоматизму допомагають учням впевнено оперувати геометричними поняттями.
3. Контрольні задачі використовуються для перевірки знань та оцінювання рівня засвоєння матеріалу допомагають виявити прогалини у знаннях учнів.
4. Розвивальні задачі – це задачі підвищеної складності, олімпіадні або творчі, що виходять за межі шкільної програми. Вони спрямовані на розвиток нестандартного мислення, інтуїції та творчих здібностей.

1.3. Огляд стану проблеми розв'язування геометричних задач у методиці викладання математики

Геометрія в базовій школі – це складова курсу математики, яка інтегрована зі змістом алгебри та арифметики. Її мета – сформувати просторове мислення, вміння аналізувати форми навколишніх предметів, застосовувати геометричні уявлення для розв'язання практичних задач.

Учні поступово переходять від інтуїтивного уявлення про фігури до строгого вивчення властивостей і доведення тверджень.

Етапи вивчення геометрії в основні школі [24,31] є наступними:

У 5-6 класі (початковий рівень знайомства) зміст навчання має такий вигляд:

- Ознайомлення з основними геометричними поняттями: точка, пряма, промінь, відрізок, кут.
- Види кутів, побудови за допомогою лінійки й циркуля.
- Многокутники, коло й круг, елементи кола.
- Периметри та площі простих фігур (прямокутник, квадрат, трикутник, паралелограм, трапеція, круг).
- Прості просторові уявлення: куб, прямокутний паралелепіпед, призма, піраміда, циліндр, куля.

Основна увага на цьому етапі приділяється практичним побудовам і прикладним задачам.

У 7 класі починається систематичне вивчення курсу геометрії. Зміст навчання складається з таких компонент:

- Вступ до планіметрії: аксіоми, основні означення.
- Властивості відрізків, кутів, бісектриси.
- Трикутники: види, ознаки рівності.
- Побудова трикутників за різними умовами.
- Паралельні прямі, ознаки паралельності.
- Сума кутів трикутника.
- Задачі на доведення та побудову.

На цьому етапі формується культура логічного мислення, учні вперше стикаються з доведеннями.

У 8 класі продовжується вивчення геометрії. Розглядаються такі компоненти:

- Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція.
- Ознаки та властивості.
- Теорема Піфагора та її застосування.
- Окружність і коло: дотична, хорда, центральні та вписані кути, вписані чотирикутники.
- Початок вивчення подібності трикутників.

У 9 класі продовжується вивчення геометрії. Розглядаються такі компоненти:

- Подібність трикутників, теорема Фалеса.
- Взаємне розміщення кола й прямої, двох кіл.
- Правильні многокутники.
- Довжина кола, площа круга, сегмента та сектора.

- Початкові тригонометричні поняття (синус, косинус, тангенс кута гострого трикутника).

У 9 класі завершується базовий курс геометрії, учні оволодівають базовими прийомами розв’язування планіметричних задач. Результати вивчення геометрії стануть основою для вивчення стереометрії в старшій школі.

Зазвичай учні загальноосвітніх шкіл часто зустрічають проблеми при вирішенні математичних завдань. Розв’язування задач не завжди є легким процесом, тому що на філософському рівня він є пошуком виходу з проблеми або шляху обходу проблеми. Загалом, вирішення завдань є специфічною особливістю інтелекту. За Дж.Пойа розв’язання задач є практичним вмінням, подібним до плавання, катання на лижах або грі на фортепіано. З його точки, зору, це обумовлює те, що навчитися розв’язувати задачі можна тільки на хороших якісних прикладах в постійній практиці [35].

Знання математики на високому рівні має в своїй основі вміння вирішувати задачі, причому як стандартні, так й нестандартні, а це, в свою чергу, потребує незалежності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості. На основі вже вирішених задач можна вирішувати наступні більш складні та комплексні задачі [1].

Геометрія та розв’язання геометричних задач викликають труднощі у більшості учнів, незалежно від рівня та ступеня підготовки. Труднощі виникають, перш за все, з тими завданнями, в яких використовується застосування різних теоретичних знань, методів та прийомів. Для того, щоб вирішити задачу з геометрії необхідні хороші знання теоретичної частини курсу, знання достатньої кількості геометричних фактів, які забезпечують певні прийоми та методи вирішення геометричних завдань [16].

Аналіз результатів НМТ-2024 показує, що серед 22 завдань субтесту з математики 7 завдань були завданнями з геометрії: 4 завдання з планіметрії, 3 – завданнями з стереометрії [25].

Зведені результати розв’язання цих завдань наведені в табл.1.1.

Аналіз даних за результатами НМТ свідчить, що більшість учнів (≈70%) добре орієнтуються у простих теоретичних фактах, як сума кутів трикутника. Саме це означає, що школярі володіють елементарними правилами та мають можливість застосувати їх у стандартних ситуаціях.

Таблиця 1.1

Узагальнені результати складання субтесту з математики (питання з геометрії)

Зміст задачі	Складність завдання (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
Сума кутів трикутника	67,6	51,2	0,3
Твірна циліндра	54,5	65,8	0,4
Площа бічної поверхні призми через апофему	42,2	51	0,4
Теоретичні питання про властивості паралелограма	30,5	46,8	0,4
Співвідношення між кутами та сторонами трикутника	26,2	36,7	0,3
Розрахунок елементів трапеції (питання на відповідність)	31,2	40,8	0,4
Об’єм призми, заданої в декартовій системі координат (питання з відкритою відповіддю)	5,1	18,4	0,5

Джерело: узагальнено автором за

Результати щодо вирішення завдань на просторове уявлення виявились середніми. Завдання на твірну циліндра та бічну поверхню через апофему вирішило 40-55% учасників. Учні частково справляються з об’ємними фігурами та застосуванням формул, але роблять багато помилок. Це свідчить про слабке уявлення тривимірних об’єктів і труднощі з просторовим мисленням.

Найбільш складними виявились завдання на властивості фігур і доведення. Завдання на паралелограм та трапецію виконані лише на 30%, хоча дискримінація достатньо висока. Учням складно засвоювати теорію щодо властивостей фігур та доводити їх, тобто проблеми виникають із розумінням суті геометричних понять, а не лише з формулами.

Найбільш складними були комбіновані завдання. Лише 26% розв’язали задачу на співвідношення між кутами і сторонами трикутника; це показує труднощі з аналітичним мисленням, коли треба комбінувати кілька теорем і робити логічні висновки. Завдання на призму в системі координат практично ніхто не виконав (5%). Учні не готові застосовувати геометрію в алгебраїчному чи координатному вигляді.

Отже, можемо говорити про те, що у учнів слабко розвинене просторове мислення. Вони погано уявляють об’ємні фігури, їхні елементи (твірну, апофему, висоту) та співвідношення між ними. Також учні мають труднощі з логічними міркуваннями. Геометричні доведення (властивостей паралелограма, трапеції, співвідношення у трикутнику) викликають у них великі проблеми. Можна стверджувати, що школярі більше покладаються на запам’ятовування окремих фактів, ніж на розуміння зв’язків. Також спостерігається низька інтеграція знань з алгеброю та аналітичною геометрією.

Додатково потрібно відмітити високу диференціацію рівнів. Є група сильних учнів, які справляються навіть зі складними задачами (дискримінація завдань висока), але більшість мають лише фрагментарні знання.

Отже, серед ключових проблем неуспішності складання НМТ можна виділити такі:

– несформованість наочних геометричних уявлень;

– недостатнє володіння геометричними знаннями, відсутність графічної культури.

Шкільний курс геометрії завжди був і залишається однією з проблемних точок методики викладання математики. У геометричній підготовці учнів є прогалини в умінні правильно зобразити геометричні фігури, провести додаткові побудови, провести обчислення, застосувати отримані знання для вирішення практичних завдань. Вирішення задачі в геометрії – це не тільки вміння, а й елемент знання. Учень повинен ознайомитися з певним набором досить важких геометричних задач, освоїти деякі геометричні методи, навчитися вирішувати задачі, дотримуючись відомих зразків. У геометрії, на відміну від алгебри, мало стандартних алгоритмів, майже кожна задача є нестандартною. Тому під час навчання зростає значення опорних задач, які повідомляють корисний факт, чи ілюструють метод чи прийом [31].

Рідко буває, що при вирішенні досить нескладних задач використовується лише один метод розв’язання. Дуже часто доводиться вдаватися до допомоги комбінованого методу, який включає комбінацію різних методів. Часто буває, що при зміні умови завдання або введення в умову нових даних або нового питання учні мають труднощі при вирішенні такої задачі.

Часто задачі, запропоновані у підручниках з геометрії для опрацювання школярами у класі та вдома, виявляються малопов’язаними, особливо у лінії рішень. З іншого боку, процес розв’язання задач під час уроків зазвичай закінчується отриманням відповіді, нерідко з допомогою будь-якого одного способу розв’язання. У зв’язку з цим виникає проблема розв’язання складних геометричних завдань, яка може бути вирішена на основі застосування блоку взаємопов’язаних задач (тобто розв’язання таких завдань об’єднано загальною ідеєю).

Тому при викладанні геометрії учням 7-9 класів необхідно насамперед приділяти увагу формуванню базових знань курсу планіметрії. Варто підвищувати наочність викладання, більше приділяти уваги питанням зображення геометричних фігур, формуванню конструктивних умінь та навичок, застосуванню геометричних знань до вирішення практичних завдань.

Висновки до розділу 1

Геометрія є одним з основних предметів, який вчить учнів логічному мисленню, вмінню вбудовувати логічні зв’язки.

Геометрична задача є не лише засобом перевірки чи тренування знань, а й важливим дидактичним інструментом, що виконує комплекс навчальних, розвивальних і виховних функцій. Її роль полягає у формуванні в учнів здатності мислити просторово й логічно, застосовувати математичні знання у практичних ситуаціях та виявляти дослідницьку активність.

Рівень школярів у геометрії середній: базові факти засвоєні, але є серйозні труднощі з уявленням просторових об’єктів, доведеннями та інтегрованими завданнями. Учні здебільшого орієнтуються у "шкільних формулах", але не вміють логічно їх комбінувати та застосовувати в нових ситуаціях.

РОЗДІЛ 2. Методичні підходи до розв’язування геометричних задач

2.1 Загальні стратегії та етапи розв’язування геометричних задач

Щоб виробити у учнів певні навички вирішення геометричних задач, не можна обмежуватися епізодичною демонстрацією розв’язування окремих задач (хоча такі демонстрації також потрібні). Необхідно систематично роз’яснювати як загальний підхід до розв’язування задач, і окремі частинні прийоми.

Особливу увагу слід приділяти аналізу умови завдання. У процесі вивчення умови має бути намічено шлях розв’язання, тобто визначено послідовність міркувань, побудов та обчислень, що призводить до мети

При розв’язуванні геометричних задач потрібно дотримуватися певних етапів, які в сукупності визначають метод розв’язання. Реалізація кожного етапу потребує від учні відповідної математичної та логічної підготовки, а для його подолання застосовуються розумові операції, які мають психологічний характер. Учні повинні чітко усвідомлювати стратегію проходження кожного етапу, яка забезпечує успіх [17]. Наведемо ці етапи.

1. Аналіз умови задачі. На першому етапі учень має уважно ознайомитися з умовою, виділити основні елементи (точки, відрізки, кути, фігури) та зв’язки між ними. Важливо усвідомити, що саме задано, а що потрібно знайти чи довести. Успішною стратегією є уважне читання умови, побудова первинного ескізу або креслення. Наприклад, учень наносить на рисунок усі дані – довжини, кути, паралельність чи перпендикулярність.

2. Побудова математичної моделі. Цей етап передбачає переклад умови задачі з природної мови у математичну форму: введення позначень, формулювання тверджень, які потрібно довести або перевірити. Успішною стратегією є визначення, які геометричні поняття та властивості будуть ключовими (подібність, симетрія, властивості паралелограма тощо).

Наприклад, учень записує твердження: "Довести, що $\angle ABC = \angle ACB$", "Обчислити площу $S = ?$".

3. Пошук ідей розв’язання. На цьому етапі здійснюється пошук шляхів до розв’язання задачі. Учень обирає одну або кілька стратегій, які відповідають характеру задачі.

Успішною стратегією є використання відомих теорем, проведення допоміжних побудов, перетворення фігури, алгебраїчні методи.

4. Виконання плану розв’язання. Учень реалізує вибрану стратегію: робить обчислення, проводить доведення чи виконує побудову.

5. Перевірка та оцінка результату. На завершальному етапі важливо переконатися у правильності розв’язку, що включає як перевірку логічної послідовності доведення, так і повторне обчислення з використанням альтернативних методів.

Для успіху учень повинен дати відповіді на запитання: "Чи відповідає результат умові задачі?", "Чи є він єдиним?", "Чи не суперечить він відомим властивостям?".

На рис.2.1 наведена схема етапів рішення геометричних задач

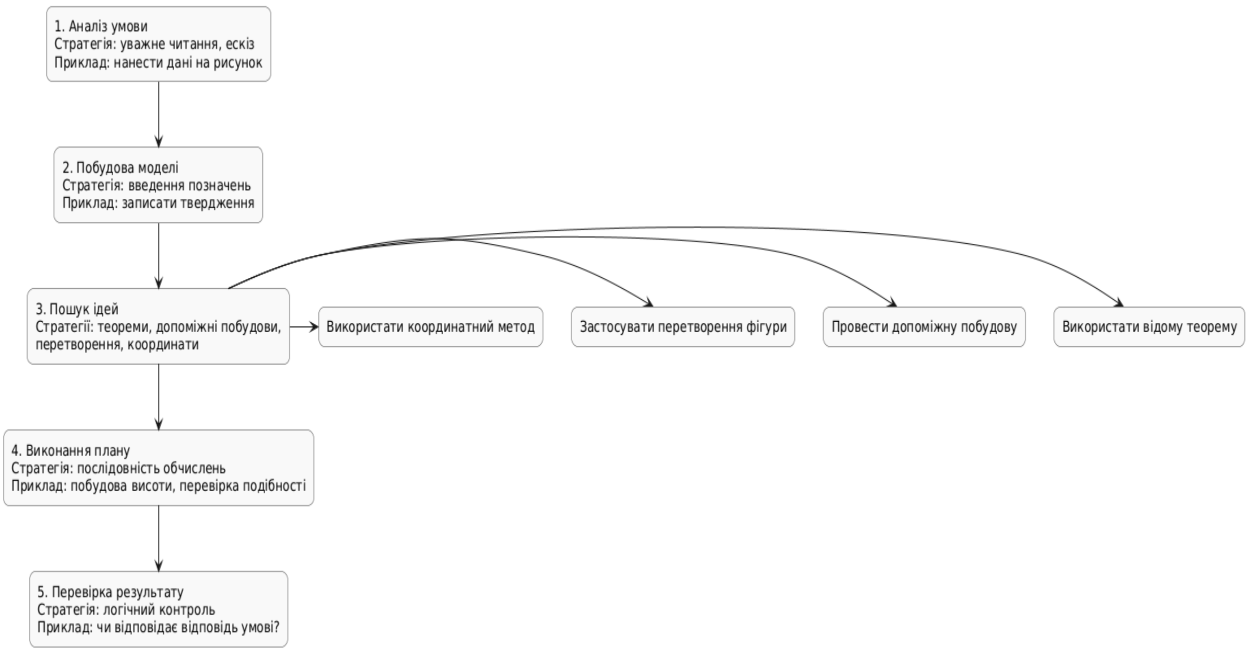


Рис.2.1

Наведемо приклад поетапного рішення задачі.

Приклад 13. У прямокутному трикутнику △ABC прямий кут при вершині C. Дано катети AC=3 см та BC=4 см. Провести висоту CD на гіпотенузу AB. Знайти: гіпотенузу AB, довжину висоти CD та довжини відрізків AD і DB, на які висота ділить гіпотенузу.

Рішення

1. Аналіз умови

Дано:

прямокутний трикутник ABC з $\angle C = 90°$;

AC=3 см, BC=4 см;

$CD \perp AB$.

Знайти: AB, CD, AD, DB.

Умова дає числові значення катетів.

2. Побудова математичної моделі.

Накреслимо трикутник ABC з прямим кутом $\angle C$. Позначимо гіпотенузу AB=c. Проведемо висоту CD із вершини C на гіпотенузу AB; точка перетину – D. Позначимо катети AC=a=3 та BC=b=4.

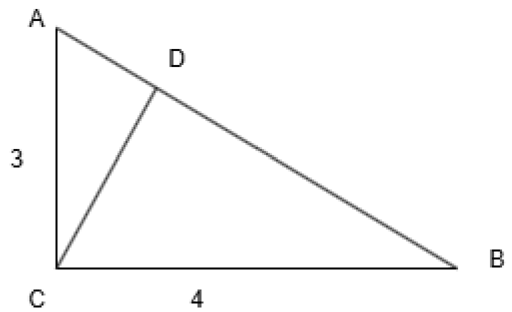


Рис.2.2

3. Пошук ідей (стратегія)

Можливі стратегії:

Теорема Піфагора для знаходження c.

Подібність трикутників, що виникають при опущенні висоти з прямого кута, дає співвідношення

$$AD = \frac{a^2}{c}, DB = \frac{b^2}{c}, CD = \frac{ab}{c}$$

Перевірка через площу: значення площі обчислене за формулами $\frac{1}{2}ab$ та $\frac{1}{2}c \cdot CD$ повинні співпадати.

Отже, спочатку знайдемо c (за теоремою Піфагора), потім застосуємо подібність, а саме формули для відрізків і висоти, перевіримо правильність розрахунків через площу.

4. Виконання плану (обчислення та доведення)

Крок 1. Знаходимо гіпотенузу AB=c.

За теоремою Піфагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}$$

Крок 2. Використовуємо подібність трикутників.

Після опускання висоти CD отримуємо три трикутники, які попарно подібні: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ і $\triangle BCD \sim \triangle ABC$. З відповідних відношень сторін випливають стандартні формули:

$$AD = \frac{a^2}{c}, DB = \frac{b^2}{c}, CD = \frac{ab}{c}$$

Підставляємо числові значення:

$$AD = \frac{3^2}{5} = 1{,}8 \text{ см}, DB = \frac{b^2}{c} = \frac{4^2}{5} = 3{,}2 \text{ см}, CD = \frac{ab}{c} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ см}$$

5. Перевірка результату

Сума відрізків AD+DB має дорівнювати гіпотенузі c:

AD+DB=1,8+3,2=5,0=c(перевірка виконана).

Перевірка через площу трикутника.

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}3 \cdot 4 = 6 \text{ см}^2$$

$$S = \frac{1}{2}c \cdot CD = \frac{1}{2}5 \cdot 2{,}4 = 6 \text{ см}^2$$

Отже, результати збігаються.

Відповіді

AB=c=5 см.

CD=2,4 см.

AD=1,8 см.

DB=3,2 см.

Поетапне розв'язування геометричних задач є невіддільним дидактичним прийомом, що сприяє формуванню у школярів цілісного підходу до опрацювання математичних проблем.

Стратегії розв'язання геометричних задач є визначальним компонентом формування вміння розв'язувати задачі; вони являють собою евристичні методи, що спрямовані на структурування процесу мислення та пошуку шляхів від відомих даних до невідомих результатів.

Аналітична стратегія базується на прямому логічному міркуванні. Процес розв'язання починається з аналізу даних, що містяться в умові задачі. Кожен наступний крок є прямим наслідком попереднього, що дозволяє послідовно рухатися від відомого до шуканого.

Механізм реалізації має такий вигляд:

1. Формалізація умови здійснюється переведення словесної задачі в математичну модель (малюнок, символічні позначення).
2. Застосування аксіом і теорем, що стосуються фігур в умові.
3. Визначення проміжних висновків на основі отриманих нових даних, які випливають із наявних.
4. Послідовний ланцюжок міркувань. Побудова дедуктивного ланцюга, де кожен крок є логічно обґрунтованим, аж до отримання кінцевого результату.

Подібного роду стратегія є основою для доведень теорем і розв'язання задач, що мають чіткий алгоритм.

Приклад 14. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною а.

Розв'язання:

Дано: Рівносторонній трикутник $\triangle ABC$ зі стороною а.

Знайти: Площа S.

Рішення.

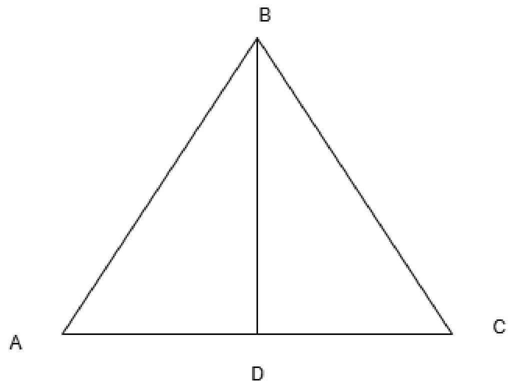


Рис.2.3

Аналіз: Площа трикутника знаходиться за формулою $S = \frac{1}{2}ah$, де a – основа, h – висота. Нам потрібно знайти висоту h.

Проведемо висоту BD до сторони AB. Вона також є медіаною, тому $AD = DC = \frac{a}{2}$.

Розглянемо прямокутний трикутник △ABD. За теоремою Піфагора:

$h = BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Підставимо значення h у формулу площі:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Висновок: Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Наступна синтетична стратегія ґрунтується на зворотному мисленні. Процес розв’язання починається з аналізу кінцевої мети – того, що потрібно знайти або довести. Учень ставить собі запитання: "Щоб знайти (довести) це, що мені потрібно знати?"

Реалізовується вона таким чином:

1. Аналіз мети. Здійснюється визначення кінцевого результату.
2. Зворотний пошук. Встановлюється проміжна ланка, яка дозволить досягти мети.
3. Декомпозиція задачі. Складна задача розбивається на кілька простіших підзадач.

4. Зв'язок з умовою. Здійснюється пошук зв'язку між проміжними результатами та даними, які є в умові задачі.

Приклад 14. Довести, що медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання:

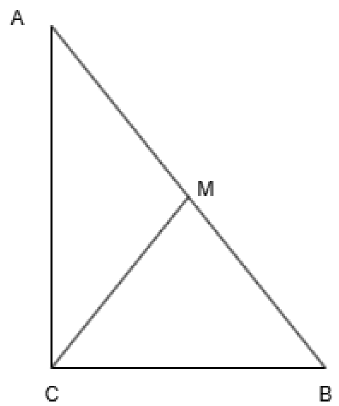


Рис.2.4

Аналіз. Щоб довести, що $\mathrm{CM} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$, можна показати, що CM є радіусом кола, описаного навколо трикутника. Нам відомо, що центр описаного кола лежить на середині гіпотенузи.

Доведення:

Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle$ABC.

Опишемо навколо нього коло. Центр описаного кола (точка O) лежить на середині гіпотенузи AB. Радіус описаного кола R=OA=OB.

Медіана CM також є радіусом цього кола, оскільки вона з'єднує центр кола з точкою на колі (вершиною C). Отже, CM=R.

Звідси $\mathrm{CM} = \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Що і потрібно було довести.

Комбінована стратегія є найефективнішою та найпоширенішою у практиці. Вона полягає у поєднанні аналітичного та синтетичного підходів, що дозволяє знайти оптимальний шлях розв'язання. Ця стратегія є основою для вирішення більшості нестандартних геометричних задач.

Приклад 15. В трикутнику ABC медіана AM дорівнює половині сторони BC. Довести, що ∆ABC – прямокутний.

Розв’язання:

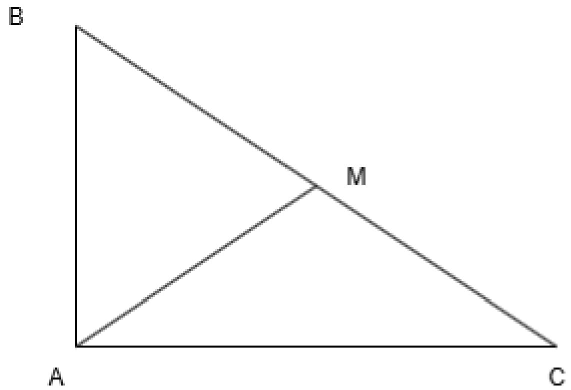


Рис.2.5

Етап синтезу. Щоб довести, що ∆ABC – прямокутний, потрібно довести, що ∠BAC=90∘. Це можливо, якщо сума кутів ∠BAM і ∠CAM дорівнює 90∘.

Етап аналізу.

З умови AM=BM=MC (оскільки $AM = \frac{1}{2}BC$, а M – середина BC).

Розглянемо ∆AMB. Оскільки AM=BM, то він рівнобедрений. Отже, ∠MAB=∠MBA. Нехай ∠MAB=α.

Розглянемо ∆AMC. Оскільки AM=MC, він також рівнобедрений. Отже, ∠MAC=∠MCA. Нехай ∠MAC=β.

Сума кутів трикутника ABC дорівнює 180∘: ∠BAC+∠ABC+∠BCA=180∘.

∠BAC=∠BAM+∠MAC=α+β.

Замінимо кути: (α+β)+α+β=180∘.

2α+2β=180∘, звідси 2(α+β)=180∘.

α+β=90∘.

Висновок. Отже, ∠BAC=90∘, що доводить, що ∆ABC – прямокутний.

Що і потрібно було довести.

Стратегія аналогії ґрунтується на використанні досвіду, отриманого під час розв’язання схожих задач. Якщо нова задача має подібну структуру до раніше вирішеної, то логіка та методи, що використовувалися, можуть бути перенесені. Такий підхід розвиває асоціативне мислення, інтуїцію та здатність до узагальнення.

Приклад 16. Знайти площу кільця, якщо відома довжина хорди, яка дотикається до внутрішнього кола.

Розв'язання.

Виявлення аналогії.

Ця задача подібна до задачі про площу кільця, якщо відомі радіуси зовнішнього (R) та внутрішнього (r) кіл. Площа кільця визначається за формулою $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Отже, нам потрібно знайти вираз для $(R^2 - r^2)$ через довжину хорди.

Аналіз.

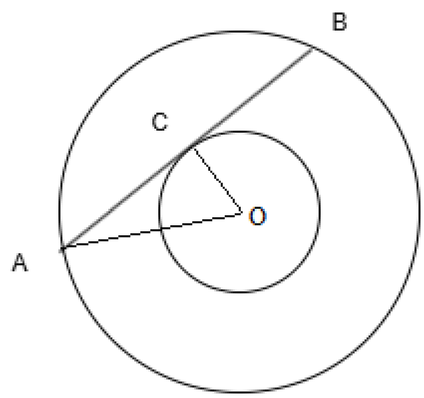


Рис.2.6

Нехай АВ – хорда зовнішнього кола, яка дотикається до внутрішнього кола в точці С .

Проведемо радіуси ОА та ОС. ОС перпендикулярний до АВ.

Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle$ОАС.

За теоремою Піфагора $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OC}^2$.

OA=R (радіус зовнішнього кола), OC=r (радіус внутрішнього кола). АС – половина довжини хорди, нехай довжина хорди L, тоді $AC = \frac{L}{2}$.

Отже, $(\frac{L}{2})^2 = R^2 - r^2$

Висновок.

Підставимо цей вираз у формулу площі

$$S = \frac{\pi L^2}{4}$$

Стратегія допоміжних побудов є потужним інструментом для розв'язання складних задач, що не піддаються прямому аналізу. Вона полягає у введенні нових елементів (точки, лінії, кола), які спрощують геометричну конфігурацію і дозволяють застосувати відомі теореми.

Приклад 17: У трапеції ABCD з основами AB і CD довести, що сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + CB^2 + 2AB \cdot CD$.

Розв'язання:

Нехай ABCD – дана трапеція: AB=a, CD=c – основи трапеції, BC=b, AD=d – бічні сторони трапеції, AC=m, BD=n – її діагоналі

Допоміжні побудови. Проведемо через вершину C пряму, паралельну стороні AD. Нехай ця пряма перетинає основу AB в точці F.

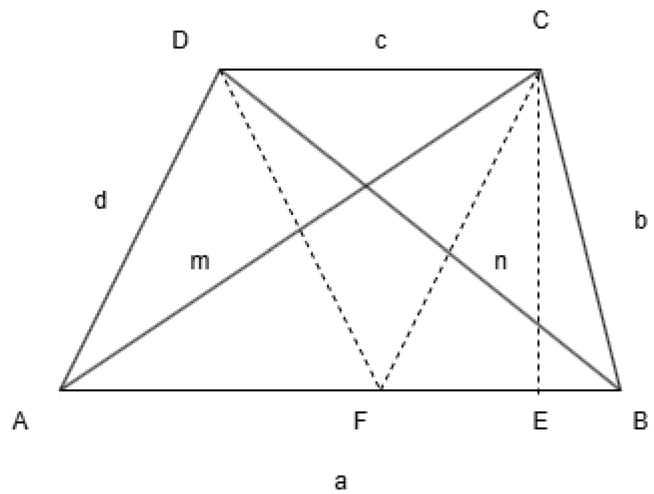


Рис.2.7

Аналіз.

Чотирикутник DBCE – паралелограм, оскільки BC паралельна DE і BD паралельна CE.

Звідси CF=AD=d і DC=AF=c, $\angle CFB = \angle DAF$.

З ΔABC за теоремою косинусів

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle B$$

З ΔABD за теоремою косинусів

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\angle A$$

Додавши рівності почленно, отримаємо

$$m^2 + n^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(b \cdot \cos\angle B + d \cdot \cos\angle A) \qquad (1)$$

Проведемо CE⊥AB, тоді отримаємо прямокутні трикутники ΔCEF і ΔCEB. З трикутника CEF: FE=d cos∠A, з трикутника CBE: BE=b·cos∠B.

FB=FE + BE = a – c = d cosA + b·cosB.

$$FB = FE + BE = a - c = \mathrm{d}\cos\angle\mathrm{A} + \mathrm{b}\cdot\cos\angle\mathrm{B}$$

Підставляючи отриману рівність в (1), маємо

$$m^2 + n^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2a(a - c)$$

або

$$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

що й треба було довести.

Навчання учнів систематизованому підходу до розв'язування геометричних задач забезпечує їх надійним та ефективним інструментом при вивченні геометрії.

2.2 Характеристика основних методів розв'язування геометричних задач та особливості їх застосування в основній школі

Одним із ключових компонентів навчання є формування навичок розв'язування геометричних задач. Саме у процесі розв'язування учні навчаються аналізувати умову, будувати логічні міркування, обирати оптимальні стратегії та доводити отримані результати.

Для досягнення цих цілей у шкільній практиці застосовуються різні методи розв'язування задач, які спираються як на класичні властивості геометричних фігур, так і на сучасні прийоми математичного аналізу.

Основні методи, що використовуються для розв'язування геометричних задач, наведені на рис.2.8.

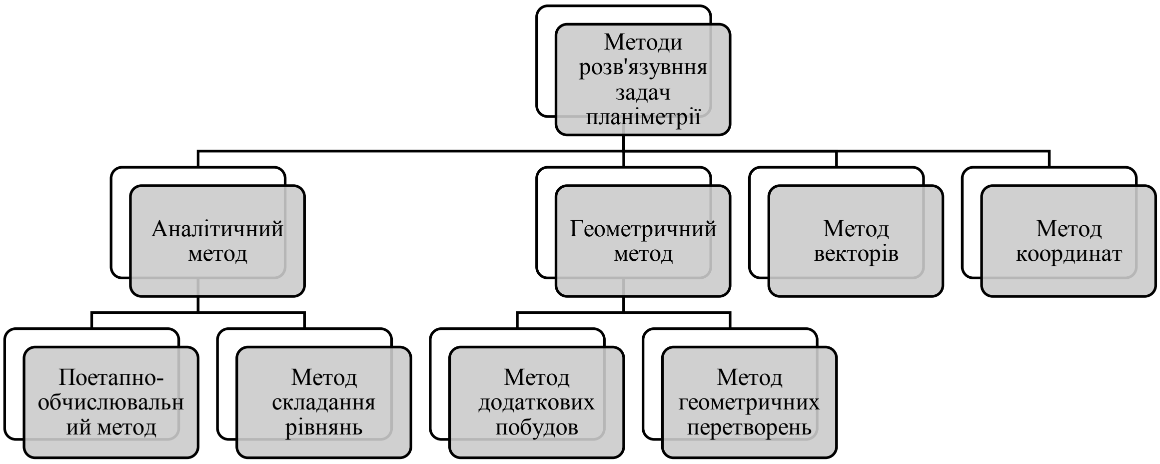


Рис.2.8

Наведемо декілька прикладів використання різних методів в шкільному курсі геометрії.

Приклад 18. Теорема синусів (метод площ)

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

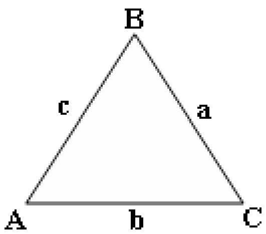


Рис.2.9

Дано:

ΔABC

AB = c

BC = a

AC = b

Довести:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Доведення:

За теоремою про площу трикутника:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$

Тоді

$\frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$ => b sinC = c sinB => $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Також $\frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$ => a sinC = c sinA => $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

Отже, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Що потрібно було довести.

Приклад використання поетапно-обчислювального методу

Приклад 19. Бісектриси кутів A і D паралелограма ABCD перетинаються в точці, що лежить на стороні BC. Знайдіть AB якщо BC = 34.

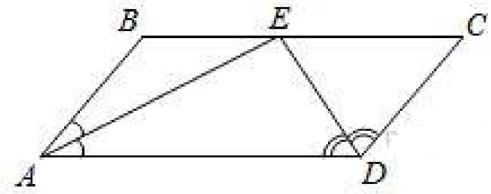


Рис.2.10

Рішення

За визначенням паралелограма BC || AD, AE – січна при паралельних прямих, отже, кути BEA і EAD рівні як навхрест лежать.

Оскільки ∠BEA=∠BAE, трикутник ABE – рівнобедрений, звідки AB=BE.

Аналогічно, трикутник CED – рівнобедрений і EC = CD.

Сторони AB і CD рівні, як протилежні сторони паралелограма, отже:

$$AB = BE = EC = CD = \frac{BC}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Відповідь. 17 см.

Приклад 20. Задача на складання рівняння

Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній дорівнює 30°. Знайти ці кути.

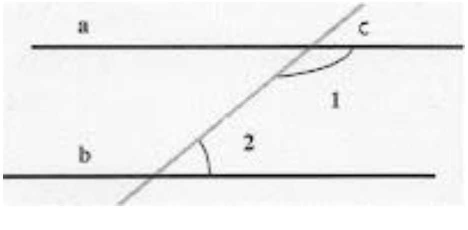


Рис.2.11

Дано: a || b; c – січна;

$\angle 1 - \angle 2 = 30°$;

Знайти: $\angle 1, \angle 2$.

Розв’язання:

За умовою $\angle 1 - \angle 2 = 30°$; тобто $\angle 1 = \angle 2 + 30°$;

Нехай $\angle 2 = x$; тоді $\angle 1 = x + 30°$;

За ознакою паралельності прямих: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$;

Тоді $x + x + 30° = 180°$;

$2x = 150°$;

$x = 150° : 2$;

$x = 75°$.

Тоді $\angle 2 = 75°$, а $\angle 1 = 75° + 30° = 105°$.

Відповідь: 75°; 105°.

Приклад 21. Метод додаткової побудови

У трикутнику ABC бісектриса BE та медіана AD перпендикулярні і мають однакову довжину, що дорівнює 4. Знайти сторони трикутника ABC.

Рішення.

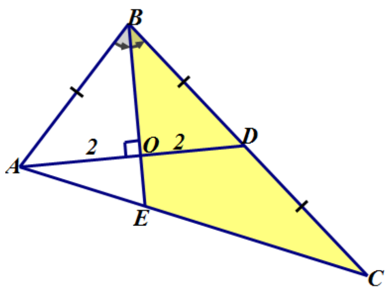


Рис.2.12

У рівнобедреному ΔABD BO – бісектриса і висота, значить, AO = OD = 2, AD – медіана ΔABC, тоді BC=2AB.

BE – бісектриса ΔABC, отже, EC=2AE.

Проведемо середню лінію DF ΔBCE. DF=2. Тоді OE=1 як середня лінія ADF. BO=3.

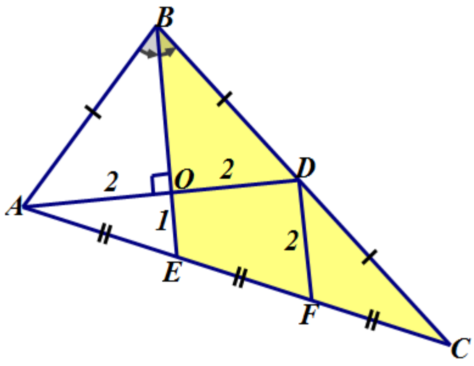


Рис.2.13

ΔAOB прямокутний. Тоді за теоремою Піфагора

$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$BC = 2\sqrt{13}$

$AC = 3AE = 3\sqrt{AO^2 + OE^2} = 3\sqrt{2^2 + 1^2} = 3\sqrt{5}$

Відповідь. $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$

Наведену задачу можна розв'язати також методом геометричних перетворень.

Приклад 22. Метод геометричних перетворень

У трикутнику ABC бісектриса BE та медіана AD перпендикулярні і мають однакову довжину, що дорівнює 4. Знайти сторони трикутника ABC.

Рішення.

Побудуємо точку F, симетричну точці C відносно BE.

Нехай точка F є точкою перетину AB та DE.

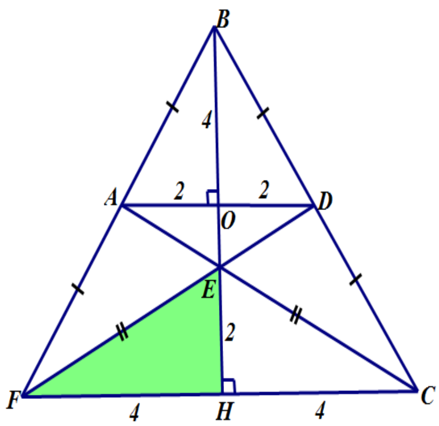


Рис.2.14

Δ FBC рівнобедрений, E – точка перетину медіан Δ FBC.

$FE = EC = \frac{2}{3}AC = \sqrt{FH^2 + EH^2} = 2\sqrt{5}$, $AC = 3\sqrt{5}$

BH=6, AD – середня лінія, отже BO=3. $AB = \sqrt{13}$

BC=$2\sqrt{13}$.

Відповідь. $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$

Використання різних способів розв’язання однієї і тієї ж задачі має також дидактичну та методичну цінність, що спряє розвитку критичного мислення, гнучкості мислення та поглиблення розуміння матеріалу.

Розв’язання однієї задачі різними способами допомагає учням усвідомити зв’язок між різними розділами математики. Відтак використання геометричних перетворень перестає бути незрозумілою темою, яка стоїть осторонь всього курсу геометрії, а перетворюється на пов’язаний з класичними задачами інструмент. Саме це допомагає учням бачити математику як цілісну систему, а не набір ізольованих тем.

Коли учні бачать кілька рішень, вони починають аналізувати переваги та недоліки кожного з них: яке рішення швидше? яке вимагає менше обчислень? яке є більш універсальним? Це вчить їх оцінювати ситуацію та приймати усвідомлені рішення.

Два методи – метод координат та метод векторів в шкільному курсі геометрії 9 класу розглядаються тільки для ознайомлення. Але ці методи є дуже ефективними при розв’язанні багатьох задач планіметрії.

Приклад 23. Теорема косинусів (метод координат).

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

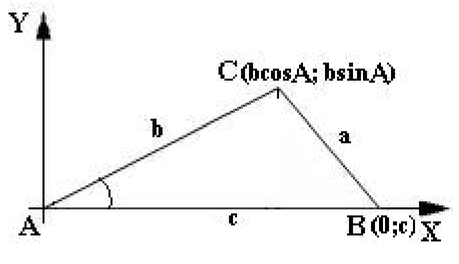


Рис.2.15

Дано: ΔABC

AB = c

BC = a

AC = b

Довести:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Доведення:

1) Введемо прямокутну систему координат з початком у точці А так, щоб точка В лежала на позитивній півосі x, а точка С мала позитивну ординату, тоді А(0;0), В(с;0), С$(b\cos A\,; b\sin A)$

2) За формулою знаходження відстані між двома точками, заданими координатами, знайдемо відстань ВС:

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2 sin^2 A = b^2 cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2 sin^2 A$$

$$=b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Що потрібно було довести.

Приклад 24.

Дана прямокутна трапеція з основами a і b, $b > a$. Знайдіть відстань між серединами її діагоналей.

Рішення

Введемо систему координат так, як показано на малюнку.

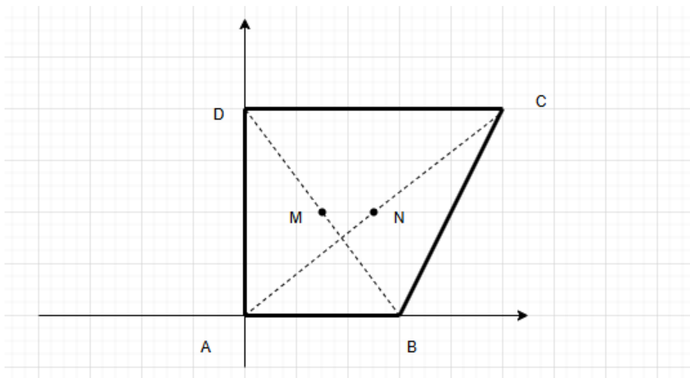


Рис.2.16

Нехай $AB = b$, $CD = a$. Позначимо висоту трапеції AD через h . Тоді її вершини матимуть координати $A(0;\, 0)$, $B(b;\, 0)$, $C(a;\, h\,)$, $D(0;\, h\,)$.

Точка M – середина AC, отже, її координати дорівнюють напівсумі координат точок A і C, тобто $M(\frac{a}{2}; \frac{h}{2})$

Аналогічно, N – середина BD, отже, $N(\frac{b}{2}; \frac{h}{2})$

Тоді

$$MN = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} = \frac{b-a}{2}$$

Отже, цілеспрямоване освоєння школярами вищих рівнів у вирішенні планиметричних завдань можливе на основі планомірного знайомства із системою методів розв’язання задач. Знаючи різновиди методів, їх назви, специфіку використання, відмінні риси, маючи зорові асоціації за конкретними конфігураціями, школяр на етапі пошуку розв’язання задачі здійснюватиме не хаотичний, а усвідомлений пошук рішення.

2.3 Формування ключових компетентностей учнів через розв’язування геометричних задач

Кожен предмет, що вивчається в школі, забезпечує виконання поставлених перед шкільною освітою завдань. Так, наприклад, у школі не вивчається логіка як навчальна дисципліна, але завдання логічного розвитку учнів та вивчення елементів логіки здійснюється, в основному, у процесі навчання математики. У процесі вивчення геометрії в учнів розвивається дедуктивне мислення, вони вчаться знаходити логічні наслідки з даних початкових умов, здібностей абстрагувати – виділити у конкретній ситуації сутність питання, відволікаючись від несуттєвих деталей, узагальнювати, спеціалізувати, виділити необхідні та достатні умови, визначати [8,12].

Вміння застосовувати елементи логіки в математиці сприяє розвитку мови учнів. Так, при вираженні думки потрібні такі якості як точність, порядок, ясність, конкретність, стислість, обґрунтованість. Розвиток понятійного мислення має безпосереднє відношення до розвитку формування наукового світогляду.

Структурний зв’язок тем шкільної геометрії наведений на рис.2.17.

Рис.2.17

Вивчення геометрії в основній школі передбачає проходження певних рівнів. Розглянемо їх детальніше.

Перший нижчий рівень передбачає систематизацію досвідченого геометричного матеріалу, який накопичений учнями у молодших класах, і навіть придбання навичок і прийомів для практичного використання різних геометричних закономірностей.

Другий рівень передбачає засвоєння учнями концепції геометричного (математичного) доведення. Практика показує, що ідея доведення засвоюється учнями дуже непросто. У ДПА 2019 року лише 16% учасників виконали завдання на найпростіший геометричний доведення (в подальшому ДПА не проводилось).

На третьому рівні передбачається засвоєння учнями формально-логічної схеми геометрії, її основних понять, достатнього набору теорем і фактів, досить велика практика у вирішенні геометричних задач.

Четвертий рівень передбачає освоєння курсу шкільної геометрії у його традиційному обсязі. На цьому рівні учень має володіти не лише загальними геометричними фактами, а й спеціальною технікою вирішення геометричних задач (додаткові побудови, міркування вимірювання, методи подібності тощо).

П’ятий рівень є рівнем поглибленого, спеціалізованого вивчення геометрії з орієнтацією на подальшу професійну роботу у галузі математики та фізики. На цьому рівні передбачається не тільки гарне володіння всім арсеналом засобів шкільної геометрії, але також і вміння розбиратися в ситуаціях, які зазвичай моделюються в так званих олімпіадних завданнях.

Вивчення геометрії в основній школі має не лише предметне значення, а й суттєво впливає на розвиток ключових компетентностей учнів. Основою тут виступають геометричні задачі, оскільки вони поєднують у собі як теоретичний, так і практичний компоненти математичної діяльності. Їх розв’язування сприяє не лише засвоєнню понять, означень та теорем, але й формуванню широкого спектра компетентностей, що відповідають сучасним освітнім орієнтирам і вимогам компетентнісного підходу.

Геометричні задачі забезпечують розвиток математичної компетентності, формуючи в учнів уміння застосовувати математичні знання у різних навчальних та життєвих ситуаціях. Учні опановують логіку доведень, вчаться встановлювати взаємозв’язки між умовою і висновком, використовувати різні методи розв’язання (аналітичний, побудови, подібності, площ тощо).

Отже, геометричні задачі є потужним дидактичним засобом формування ключових компетентностей учнів. Вони інтегрують знання, уміння й досвід, забезпечують розвиток логічного мислення, просторової уяви та комунікативних навичок, а також створюють умови для формування в учнів здатності до навчання протягом усього життя.

Висновки до розділу 2

Проведений аналіз показав, що геометричні задачі стоять дещо окремо від більшості завдань інших шкільних предметів.

Розв'язування геометричних задач виступає важливим засобом формування ключових компетентностей учнів. Воно не обмежується засвоєнням математичних фактів, а спрямоване на розвиток здатності до логічного мислення, аргументації та самостійного здобуття знань, що відповідає сучасним освітнім вимогам та принципам компетентнісного підходу.

Різні способи розв'язання дають змогу подивитися на проблему з різних ракурсів, що веде до глибшого розуміння її суті. Один спосіб може бути більш інтуїтивним, інший – більш формальним і строгим. Це дозволяє кожному учню знайти підхід, який відповідає його стилю навчання.

Геометричні задачі є потужним дидактичним засобом формування ключових компетентностей учнів. Вони інтегрують знання, уміння й досвід, забезпечують розвиток логічного мислення, просторової уяви та комунікативних навичок, а також створюють умови для формування в учнів здатності до навчання протягом усього життя.

РОЗДІЛ 3. Експериментальна перевірка ефективності розроблених методичних підходів

3.1 Розробка методики розв'язування геометричних задач

Вступивши до школи, дитина починає засвоювати необхідні знання за допомогою вчителя. Вчитель викладає ті відомості, які мають бути засвоєні, ставить питання та пропонує відповіді на них. Запам'ятовування та вправа два основних способи, які зазвичай застосовуються учнем для засвоєння навчального матеріалу.

При організації процесу засвоєння знань необхідно створити умови, що викликають пізнавальну потребу учня, оскільки основна закономірність засвоєння є задоволення пізнавальної потреби, що виникла. Пізнавальна потреба характеризується тим, що учень відчуває необхідність невідомих йому знань та способів дії. Інтелектуальна активність визначається пізнавальною потребою. На уроках математики, щоб активізувати мислення учнів, потрібно пропонувати їм такі завдання, вирішення яких вимагає нестандартного способу. "Такі ситуації, що викликають необхідність процесів мислення, називається в психології проблемними ситуаціями, а відповідні завдання – проблемними завданнями" [4; 9].

При вирішенні геометричних завдань на перших уроках доцільно запропонувати учням наступний алгоритм розв'язання:

1. Вивчити умову задачі; виконати ескіз малюнка, що відповідає умові цієї задачі.
2. Усвідомити, що необхідно знайти у задачі та що для цього необхідно знати.
3. З системи опорних задач виділити задачі, що часто повторюються (бажано супроводжувати ілюстрацією), які будуть входити в хід вирішення даної задачі.
4. З'ясувати, які з раніше вивчених задач можуть бути корисними при вирішенні цієї задачі.

5. Враховуючи попередній крок, переформулювати цю задачу. Спробувати її вирішити.

Знаючи систему опорних задач, вчитель чітко планує необхідність використання конкретної опорної задачі під час вирішення цієї задачі. Це дає можливість навчити учнів прийому "розкладання" складної задачі на більш прості складові.

Сучасна методика викладання математики повинна передбачає не лише формування знань про основні теореми та формули, а й розвиток у учнів умінь застосовувати ці знання у різноманітних контекстах.

Пропонована методика ґрунтується на поступовому ускладненні задач та формуванні у школярів банку опорних задач, які систематично групуються за рівнем складності. Методика передбачає чотири рівні навчання:

Базові обчислення – задачі на пряме застосування аксіом та теорем. Цей рівень формує у учнів впевненість у володінні базовими операціями та дозволяє закріпити знання формули.

Прикладні задачі середньої складності – задачі, що моделюють реальні ситуації. Тут учні тренують вміння виділяти базові геометричні фігури у практичній ситуації та застосовувати відомі формули та співвідношення.

Геометричні властивості та доведення – задачі, що потребують комбінування знань про різні геометричні фігури та їх елементи. На цьому рівні формується здатність до логічного міркування та елементарного доведення.

Складні прикладні задачі – комплексні задачі, де геометрія прихована у контексті прикладної проблеми. Даний рівень власне сприяє розвитку творчого мислення та вміння адаптувати базові знання до нестандартних ситуацій.

Основним науково-методичним принципом методики є побудова банку опорних задач. Такий банк містить типові задачі, що відповідають різним рівням складності та включають як прості обчислення, так і прикладні контексти. У процесі навчання учні формують уявлення про структуру задач, типові прийоми та логіку їх розв'язання. Це дозволяє їм не лише виконувати стандартні обчислення, а й самостійно будувати розв'язання складних та комбінованих задач, спираючись на вже засвоєні опорні приклади.

Методика включає також рівневі підказки та алгоритми розв'язання, які виступають як "навчальна опора". Кожен рівень має чітку інструкцію: що потрібно знайти, як виділити прямокутний трикутник, яку формулу застосувати та як перевірити результат. Такий структурований підхід сприяє самостійності учнів та усвідомленому засвоєнню знань, що відповідає сучасним вимогам дидактики математичної освіти.

Поділ процесу розв'язання на етапи (аналіз умови, побудова математичної моделі, пошук ідей, реалізація плану та перевірка результату) дає змогу учням усвідомити логіку мислення, послідовність міркувань та взаємозв'язок між абстрактними поняттями і конкретними діями.

Ефективність поетапного підходу пояснюється кількома чинниками:

– структуруванням пізнавальної діяльності, що знижує когнітивне навантаження та допомагає учням виділяти головні елементи задачі;

– формуванням алгоритмічного мислення, яке забезпечує чіткий порядок виконання дій та запобігає пропуску важливих кроків;

– розвитком рефлексивних умінь, коли учні навчаються аналізувати правильність власних міркувань і співвідносити результат з умовою задачі;

– підвищенням рівня мотивації, оскільки структурованість процесу створює відчуття контрольованості й поступового досягнення результату.

Поетапність у розв'язуванні геометричних задач є методично виправданим інструментом на початковому етапі навчання, проте згодом перетворюється на внутрішній когнітивний механізм, що забезпечує автоматизоване й ефективне розв'язання задач без потреби у зовнішньому поділі на етапи.

3.2 Проведення педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент – це метод дослідження, який дозволяє перевірити ефективність нових освітніх методик, технологій або умов навчання в умовах, наближених до реального освітнього процесу.

Залежно від мети та умов проведення, педагогічні експерименти поділяють на кілька видів:

1. Констатуючий експеримент.
2. Формуючий (перетворювальний) експеримент.
3. Контрольний експеримент.

Для проведення експерименту було вирішено обрати тему "Розв’язування прямокутних трикутників". Теорема Піфагора є одним з наріжних каменів шкільної математичної освіти, що не обмежується лише трикутником і його сторонами. Теорема Піфагора, що стверджує, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів, є першим і, можливо, найважливішим прикладом зв’язку між геометрією та алгеброю, який учні вивчають у школі. Засвоєння теореми Піфагора неможливе без розуміння її численних наслідків, які розширюють її застосування далеко за межі шкільного курсу.

Теорема є основою для виведення основної тригонометричної тотожності $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, яка є ключем до розв’язання тригонометричних рівнянь і задач. Використання теореми Піфагора дозволяє обчислювати відстань між двома точками на координатній площині, що є основою для розуміння векторів і просторових перетворень. Вона є незамінним інструментом для розрахунків у статиці, динаміці, електроніці та інших галузях.

Крім того, теорема дозволяє розв’язувати безліч практичних завдань: від визначення висоти об’єкта до розрахунку довжини сходів чи діагоналі екрана.

Для школярів засвоєння теореми Піфагора – це більше, ніж просто запам’ятовування формули. Дана тема формує логічне мислення, оскільки учні вчаться будувати докази, аналізувати умови задачі та знаходити раціональні шляхи її розв'язання. Задачі, пов'язані з теоремою, вимагають від учнів уявляти просторові об'єкти та їхні властивості, правильно визначати геометричні об'єкти. Теорема Піфагора та її наслідки служать основою для подальшого навчання. Без глибокого розуміння цієї теореми буде складно засвоїти матеріал не тільки 9-го класу, але й стереометрію, вищу математику, деякі розділи фізики та інженерних дисциплін.

Таким чином, якісне вивчення та засвоєння теореми Піфагора та її наслідків є критично важливим етапом у формуванні повноцінного математичного та наукового мислення школярів.

На вивчення теми відводиться 16 годин. Розподіл часу наведений в таблиці 3.1.

Експериментальна робота здійснювалася на базі школи №. В експерименті брали участь 37 осіб (17 учнів експериментального класу – учні 8-А класу та 20 учнів контрольного класу – учні 8-Б класу).

Дослідження проводилося у три етапи:

1) *констатувальний етап.* На цьому етапі проводилась діагностика початкового рівня сформованості навичок та вмінь у учнів по обчисленню задач за теоремою Піфагора в експериментальному та контрольному класах;

2) *формувальний етап.* На цьому етапі на основі системи розроблених завдань з теми "Розв'язування прямокутних трикутників" в експериментальній групі проводяться уроки з геометрії з використанням запропонованого підходу опорних задач;

3) *контрольний етап.* На даному етапі виконується повторна діагностика сформованості навичок роботи з використання теореми Піфагора у експериментальному та контрольному класах та проаналізовані результати дослідження.

Залежно від рівня володіння математичними знаннями та навичками можна визначити такі рівні навчальних досягнень учнів у темі "Розв'язування прямокутних трикутників":

Високий рівень: учень здатний самостійно зорієнтуватися в запропонованій йому задачі, запропонувати свої способи розв’язання задачі.

Середній рівень: учень може самостійно застосовувати свої знання в стандартних ситуаціях і виконувати математичні операції. Він здатний використовувати загальні методи, які йому відомі. Пошук різних варіантів рішення здійснює частково з допомогою вчителя.

Низький рівень: учень має труднощі з виконанням математичних завдань, пошуком різних варіантів одержання результатів. Він може розв’язувати завдання на основі наявного зразка.

Для оцінки рівня володіння початковими знаннями з теми "Розв’язування прямокутних трикутників" були використані завдання, наведені на рисунку 3.1.

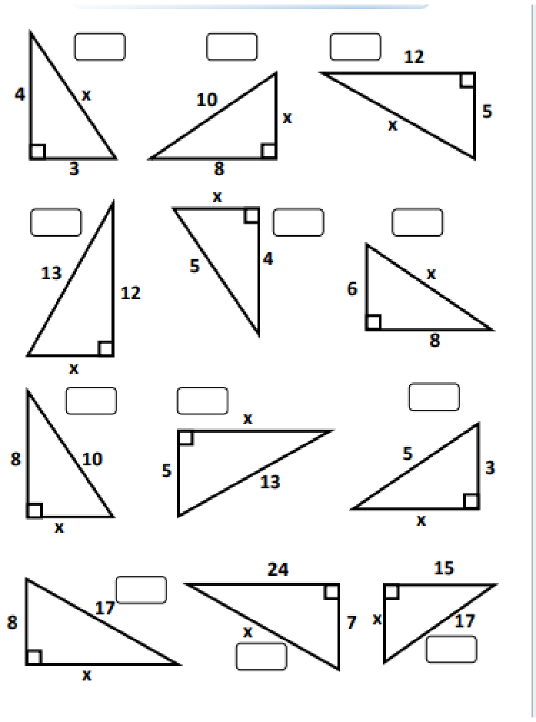


Рис.3.1

Діагностична контрольна робота містить набір завдань для перевірки рівня знань щодо теореми Піфагора. Дана контрольна робота представляє собою набір типових задач на кресленнях. Від учня вимагається використати теорему Піфагора, яку він вивчив на попередньому уроці.

Результати оцінки успішності учнів подані в таблиці 2.3.

Таблиця 3.2

Результати перевірки рівня оволодіння знаннями учнів з теми "Теорема Піфагора"

№	Рівень оволодіння знаннями	Експериментальний клас		Контрольний клас	
		Кількість учнів	% учнів	Кількість учнів	% учнів
1	Високий	5	29,41%	5	25,00%
2	Середній	7	41,18%	9	45,00%
3	Низький	5	29,41%	6	30,00%
Всього		17	100%	20	100%

Аналіз таблиці 3.2. показує, що високий рівень оволодіння математичними знаннями спостерігається у 5 учнів (29,41%) експериментального та 5 учнів (25,0%) контрольного класів; середній рівень оволодіння знаннями показали 7 учнів (41,18%) експериментального класу і 9 (45,0%) учнів контрольного класу; низький рівень оволодіння математичними знаннями мають 5 учнів (29,41%) експериментального класу і 6 учнів (30,0%) контрольного класу. На рисунку 3.29 наведене візуальне відображення рівня оволодіння знаннями учнів.

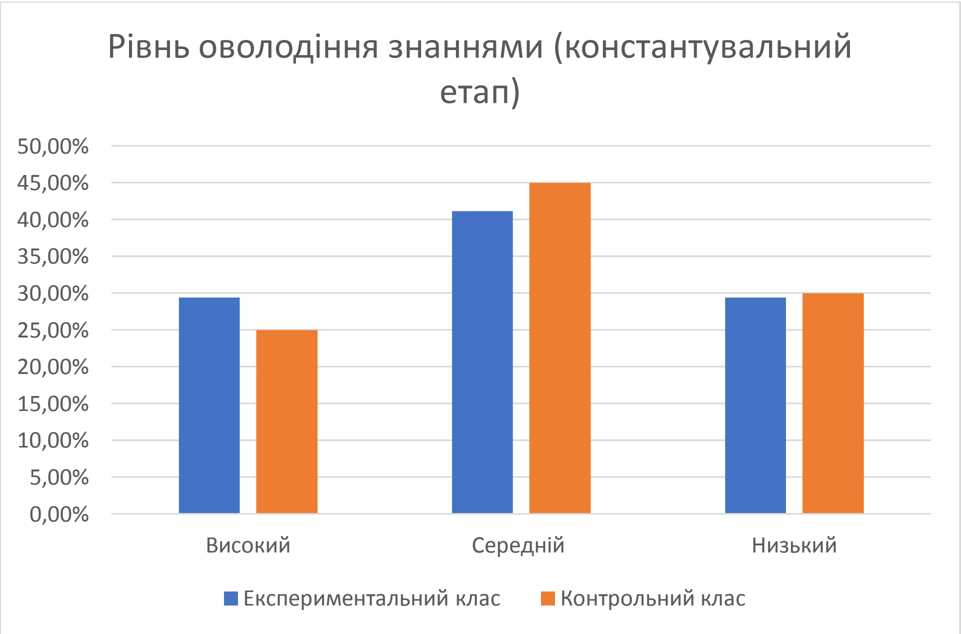


Рис. 3.2.

Отже, проведена діагностика на констатувальному етапі показала, що в основному учні оволоділи знаннями з теми "Теорема Піфагора" на середньому рівні, тобто при рішенні завдань їм потрібна допомога сторонніх осіб.

Далі був проведений формувальний етап експерименту, направлений на формування у учнів навичок та умінь розв’язувати складні прикладні задачі з теми "Теорема Піфагора", тобто компетентнісно орієнтовані завдання.

Для даного етапу дослідження була згідно запропонованої методики сформована схема поетапних завдань. Схема містить опис досягнень учнів на кожному етапі та приклади задач, які повинні сприяти формуванню цих досягнень. Список задач може бути розширений за рахунок сформованого банку задач. Також цей банк можна використовувати для надання учням завдань для самостійного опрацювання.

І сходинка: базові обчислення (знання формули)

Учень повинен уміти:

– застосовувати теорему Піфагора для знаходження гіпотенузи або катета;
– розв’язувати найпростіші числові задачі.

Задачі (при необхідності цей список доповнюється з банку опорних задач з додатку:

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 3 см і 4 см. Знайти гіпотенузу.
2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 13 см, а один катет – 12 см. Знайти другий катет.

ІІ сходинка: прикладні задачі (зв’язок із реальним життям)

Учень повинен уміти:

– використовувати теорему Піфагора для знаходження діагоналей і висот;
– бачити прямокутний трикутник у побутових ситуаціях.

Задачі

1. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти довжину діагоналі.

2. Драбина довжиною 10 м спирається на стіну так, що її нижній кінець віддалений від стіни на 6 м. На якій висоті знаходиться верхній кінець драбини?

III сходинка: геометричні властивості та доведення

Учень повинен уміти:

– застосовувати теорему Піфагора у властивостях фігур;
– виконувати елементи доведення.

Задачі

1. У прямокутному трикутнику з катетами 6 см і 8 см вписано квадрат так, що одна його сторона лежить на гіпотенузі. Знайти сторону квадрата.

2. Довести, що медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи.

IV сходинка: складні задачі (комбінація знань, творчі застосування)

Учень повинен уміти:

– поєднувати теорему Піфагора з іншими властивостями (вписане коло, квадрат у трикутнику);
– застосовувати ускладнені прикладні ситуації.

Задачі

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 9 см і 12 см. Усередині трикутника побудовано квадрат так, що одна його вершина лежить у вершині прямого кута, а дві інші – на катетах. Знайти сторону квадрата.

2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10 см, а один катет – 6 см. У трикутник вписано коло. Знайти радіус кола.

3. Телеграфний стовп висотою 12 м закріплено дротом, який прикріплений до землі на відстані 5 м від основи стовпа. На якій висоті на стовпі закріплено дріт, якщо його довжина дорівнює 13 м?

4. Катер вийшов з порту і пройшов 15 км на північ, потім 20 км на схід. На якій відстані від порту опинився катер? Наскільки коротшим буде шлях назад прямою лінією, ніж пройдений маршрут?

Очікувані результати роботи за сходинками:

I рівень – механічне застосування формули.

II рівень – практичні обчислення в побутових ситуаціях.

III рівень – поєднання з іншими властивостями геометричних фігур, доведення.

IV рівень – складні та прикладні задачі з "пасткою", де треба бачити прихований прямокутний трикутник.

Для кращого засвоєння алгоритмів розв'язання задач для учнів для кожної сходинки була розроблена картка, що містить підказки у вигляді питань або спонукальних дій. Такий підхід створює для учнів зрозумілий алгоритм виконання дій, який можна використовувати при самостійному розв'язанні задач, що забезпечує підвищення рівня впевненості учнів у собі.

Сходинки навчання з підказками

I сходинка: базові обчислення (знання формули)

Алгоритм розв'язання:

1. Намалюй прямокутний трикутник і познач катети та гіпотенузу.

2. Пригадай формулу:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

де c – гіпотенуза, a, b – катети.

3. Якщо шукаєш гіпотенузу → склади суму квадратів катетів.

4. Якщо шукаєш катет → від квадрата гіпотенузи відніми квадрат іншого катета.

5. Візьми квадратний корінь і запиши відповідь.

II сходинка: прикладні задачі (зв'язок із реальним життям)

Алгоритм розв'язання:

1. Уважно прочитай умову й уяви ситуацію (драбина, прямокутник, діагональ тощо).

2. Спробуй намалювати схему й знайти прямокутний трикутник у задачі.

3. Визнач, які відрізки будуть катетами, а що – гіпотенуза.

4. Запиши формулу Піфагора й підстав відомі дані.

5. Обчисли невідомий відрізок.

6. Перевір, чи відповідь має сенс (наприклад, висота < довжини драбини).

III сходинка: геометричні властивості та доведення

Алгоритм розв’язання:

1. Намалюй точну схему з усіма позначеннями.

2. Згадай властивості:

➢ у прямокутному трикутнику діють співвідношення між медіанами, висотами, колами;

➢ діагоналі прямокутника, вписаний квадрат тощо утворюють прямі кути.

3. Поділи складну фігуру на простіші трикутники.

4. Знайди відомі сторони, використай Піфагора на менших трикутниках.

5. Якщо треба довести властивість → запиши кроки: від відомого → через рівняння → до твердження.

IV сходинка: складні прикладні задачі

Алгоритм розв’язання:

1. Намалюй детальну схему задачі (стовп з дротом, рух катера тощо).

2. Знайди прихований прямокутний трикутник:

➢ у задачі про стовп → гіпотенуза = дріт, один катет = відстань по землі, другий = висота кріплення;

➢ у задачі про катер → пройдений шлях утворює катети, відстань = гіпотенуза.

3. Запиши рівняння за теоремою Піфагора.

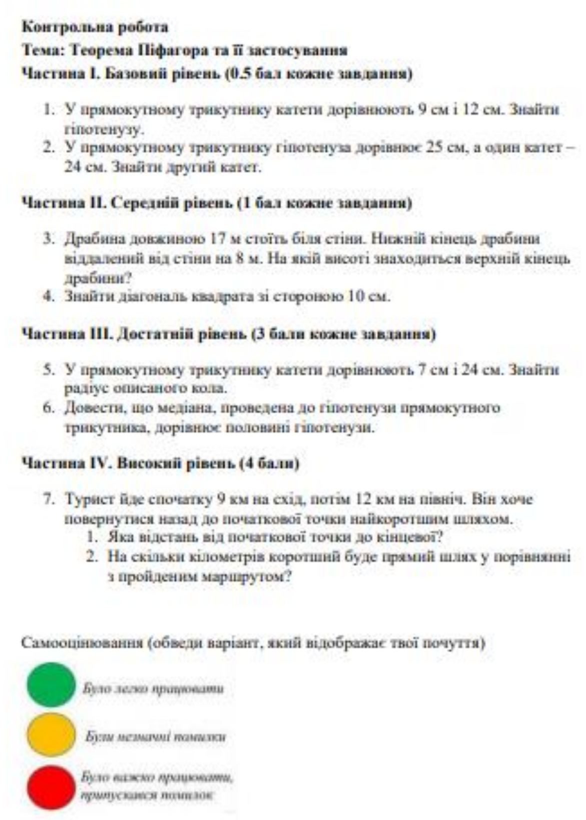
4. Якщо треба знайти різницю шляхів → обчисли довжину кожного й порівняй.

5. Завжди перевір: чи отримане число реальне (не більше довжини дроту, не від'ємне тощо).

3.3 Аналіз результатів експерименту

Для перевірки результатів запропонованої методики була проведена повторна діагностика сформованості знань та умінь використовувати теорему Піфагора для розв'язування прикладних задач в експериментальному та контрольному класах.

Контрольні завдання, за якими проводилось оцінювання, наведені на рис.3.3. Крім того, для учнів було запропоновано оцінити свою впевненість у розв'язуванні задач з заданої теми.



Контрольна робота
Тема: Теорема Піфагора та її застосування
Частина І. Базовий рівень (0.5 бал кожне завдання)

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти гіпотенузу.
2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 25 см, а один катет – 24 см. Знайти другий катет.

Частина ІІ. Середній рівень (1 бал кожне завдання)

3. Драбина довжиною 17 м стоїть біля стіни. Нижній кінець драбини віддалений від стіни на 8 м. На якій висоті знаходиться верхній кінець драбини?
4. Знайти діагональ квадрата зі стороною 10 см.

Частина ІІІ. Достатній рівень (3 бали кожне завдання)

5. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см і 24 см. Знайти радіус описаного кола.
6. Довести, що медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи.

Частина IV. Високий рівень (4 бали)

7. Турист йде спочатку 9 км на схід, потім 12 км на північ. Він хоче повернутися назад до початкової точки найкоротшим шляхом.
   1. Яка відстань від початкової точки до кінцевої?
   2. На скільки кілометрів коротший буде прямий шлях у порівнянні з пройденим маршрутом?

Самооцінювання (обведи варіант, який відображає твої почуття)

Було легко працювати

Були незначні помилки

Було важко працювати, припускався помилок

Рис.3.4

Результати, отримані в ході проведення контрольного зрізу, приведені в таблиці 3.3. Графічне відображення результатів наведено на рис. 3.5.

Таблиця 3.3

Результати перевірки рівня оволодіння знаннями учнів з теми "Теорема Піфагора" (контрольний етап)

№	Рівень оволодіння знаннями	Експериментальний клас		Контрольний клас	
		Кількість учнів	% учнів	Кількість учнів	% учнів
1	Високий	6	35,29%	6	30,00%
2	Середній	8	47,06%	9	45,00%
3	Низький	3	17,65%	5	25,00%
Всього		17	100,00%	20	100%

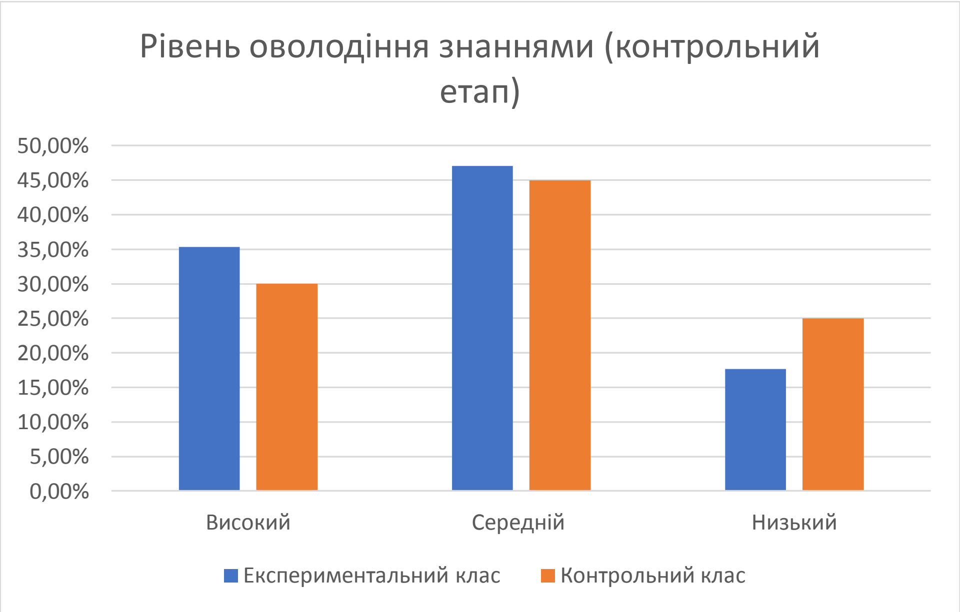


Рис. 3.5.

Також була узагальненні результати самооцінювання учнів щодо виконання діагностичної роботи. Вони представлені в табл.3.4.

Таблиця 3.4

Результати самоцінювання учнів при проведенні діагностичної роботи

№	Рівень складності завдань	Експериментальний клас		Контрольний клас	
		Кількість учнів	% учнів	Кількість учнів	% учнів
1	Легкий	7	41,18%	7	28,60%
2	Середній	8	47,06%	9	47,60%
3	Високий	2	11,76%	4	23,80%
Всього		17	100,00%	20	100,00%

На рисунку 3.6 наведемо візуальне відображення рівня оволодіння знаннями учнів.

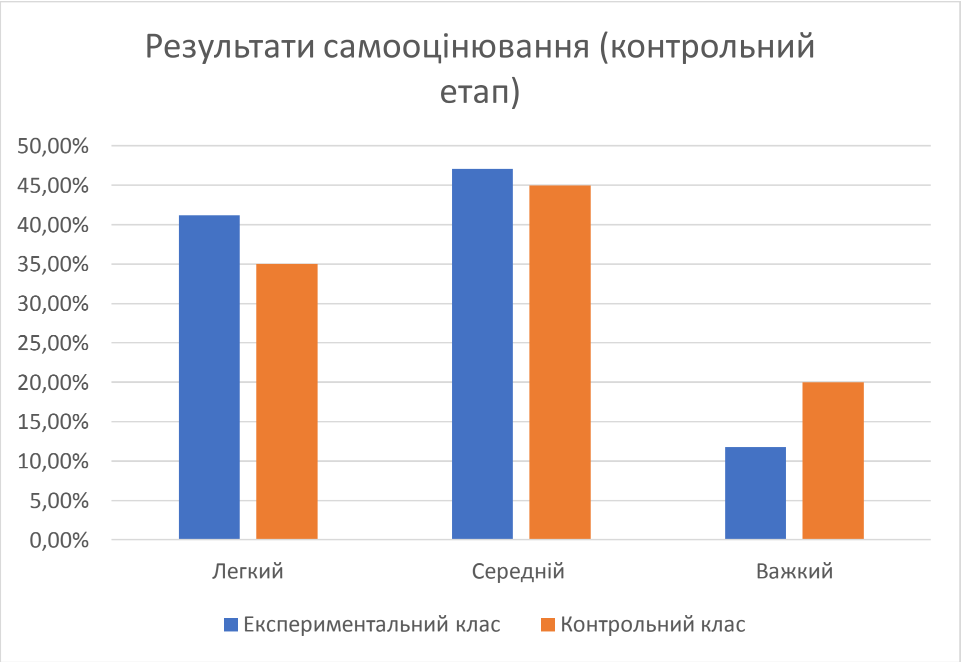


Рис. 3.6.

Аналіз самооцінювання показав, що легкими завдання вважають 7 учнів (41,18%) експериментального класу та 7 учнів (35,0%) контрольного класу. Сприйняли задачі як завдання середнього рівня 8 учнів (47,06%) експериментального класу та 9 учнів (45,0%) контрольного класу відповідно.

Важкими оцінили завдання 2 учні (11,76%) експериментального класу та 4 учні (20,0%) контрольного класу.

Порівняємо результати діагностичної роботи констатувального етапу з результатами контрольного зрізу в експериментальному і контрольних класах.

За зведеними результатами бачимо, що на констатувальному етапі середній рівень сформованості умінь розв'язувати задачі з теми "Теорема Піфагора" був нижчий в експериментальному класі порівняно з контрольним класом, а високий рівень сформованості умінь був вищий у контрольному класі. Низький рівень сформованості умінь в обох класах був майже однаковий. Загалом разом рівень вище низького в обох класах експериментальному та контрольному на константувальному етапі були майже однаковими (70,59% та 70% відповідно).

Після проведення формувального етапу на основі запропонованої методики відбулися певні зміни. В контрольному класі зменшилась кількість учнів, які мають низький рівень сформованості умінь розв'язувати задачі з теми "Теорема Піфагора" (з 29,41% до 17,65%). Водночас збільшилась кількість учнів контрольного класу з високим рівнем знань з 29,41% до 35,29%. Кількість учні з середнім рівнем знань змінилась у бік збільшення: до початку формувального експерименту було зафіксовано 41,18%, а після завершення – 47,6%. Загалом кількість дітей з високим та середнім рівнем у експериментальному класі збільшився з 70,59% до 82,35%.

У контрольному класі також відбулися позитивні зміни, але їх інтенсивність була менша. Так, загальна кількість дітей з високим та середній рівнем сформованості умінь збільшилась з 70,0% до 75,0%.

Крім того, позитивне самооцінювання у учнів експериментального класу було значно вище, ніж у учнів контрольного класу (88,24% та 80% відповідно).

Таким чином, спостерігається позитивний ефект від реалізації розробленої методики при вивченні теми "Теорема Піфагора". Такий результат можна пояснити тим, що внаслідок використання карт з підказками щодо кроків рішення задач у учнів контрольного класу були краще сформовані алгоритми розв’язування задач і вони були більш впевненими у своїх силах.

Таким чином, на формувальному етапі експерименту було підтверджено ефективність розробленої методики для навчання учнів розв’язуванню задач з теми "Теорема Піфагора". Експеримент довів, що в учнів 8-А класу на базі загальноосвітнього навчального закладу було зафіксовано зміну показників у динаміці рівнів сформованості вмінь розв’язувати геометричні задачі.

3.4 Впровадження розроблених методичних підходів у навчальний процес

Сучасна методика викладання математики передбачає не лише формування знань про основні теореми та формули, а й розвиток у учнів умінь застосовувати ці знання у різноманітних контекстах.

Пропонована методика ґрунтується на поступовому ускладненні задач та формуванні у школярів банку опорних задач, які систематично групуються за рівнем складності. Методика передбачає чотири рівні навчання.

1. Базові обчислення – це рівень, який формує у учнів впевненість у володінні базовими операціями та дозволяє закріпити знання формули.

2. Прикладні задачі середньої складності – на даному етапі учні тренують вміння виділяти геометричні фігури та її елементи, використовувати вивченні співвідношення.

3. Задачі рівня використання геометричних властивостей та доведення. На цьому рівні формується здатність до логічного міркування та елементарного доведення.

4. Складні прикладні задачі – рівень, який сприяє розвитку творчого мислення та вміння адаптувати базові знання до нестандартних ситуацій.

У процесі навчання учні формують уявлення про структуру задач, типові прийоми та логіку їх розв’язання, що дозволяє їм не лише виконувати стандартні обчислення, а й самостійно будувати розв’язання складних та комбінованих задач, спираючись на вже засвоєні опорні приклади.

Наведемо загальні рекомендації до організації навчання згідно запропонованої методики.

Перш за все потрібно дотримуватися системності в застосуванні запропонованої методики. Опрацьовувати задачі поступово, від простих до складних та на кожному уроці закріплювати щонайменше одну задачу з попередньої сходинки.

Також необхідно сформувати опорний банк задач, який повинен містити як мінімум по 5 задач на кожну сходинку (загалом мінімальний обсяг 20-25 задач). Його потрібно використовувати як "орієнтир" для учнів: якщо учень розв’язує всі задачі сходинки, він готовий переходити на вищий рівень.

Необхідно обов’язково будувати схеми та малюнки, які супроводжують задачі. Для прикладних задач пропонувати учням самостійно зобразити ситуацію у вигляді геометричних фігур, що вивчаються.

Прикладні та складні задачі ефективніше виконувати у малих групах. Обговорення рішень допомагає учням зрозуміти різні підходи. Після виконання складної задачі бажано обговорювати результати діяльності учнів, забезпечуючи рефлексію.

Очікуваними результатами застосування методики є такі:

Учні мають міцно засвоєний "банк опорних задач", який дозволяє орієнтуватися при розв’язанні нових задач.

Відпрацьовані навички моделювання реальних ситуацій через побудову геометричних фігур.

Сформоване розуміння прикладного значення вивчених теорем (зокрема, теореми Піфагора) в архітектурі, техніці, географії, побуті.

Забезпечений перехід від знання до вміння, а від вміння – до застосування у складних умовах.

Впровадження цієї методики дозволяє:

– систематизувати навчальний матеріал і створити банк опорних задач;
– формувати навички логічного мислення та доведення;
– розвивати уміння застосовувати вивченні знання у складних та прикладних задачах;
– підвищувати мотивацію учнів через практичне застосування знань.

Таким чином, запропонована методика є науково обґрунтованою і практично доцільною для організації ефективного навчання з теми "Теорема Піфагора та її застосування", забезпечуючи поступове формування знань, умінь та навичок, що дозволяють учням переходити від простих обчислень до творчих розв’язань прикладних задач.

Висновки до розділу 3

Розв’язування геометричних задач належить до однієї з найважливіших складових в сучасній шкільній освіті, яка, в той же час, викликає у школярів певні труднощі. Тому особливо важливим є розробка методик, які будуть сприяти кращому оволодінню учнями навичок щодо вирішення геометричних задач. Такі методики повинні пропонувати школярам можливість поетапного занурення у процес розв’язування задач з поступовим нарощуванням рівня складності.

Для теми "Теорема Піфагора та її використання" була запропонована методика, яка орієнтується на вибудову системи сходинок з опорного банку задач, які дозволяють поступове підвищення рівня сформованих навичків у школярів.

Під час проведення експерименту були визначені такі позитивні зміни:

– у учнів покращилось вміння розв’язувати задачі з використанням теореми Піфагора;

– підвищилася мотивація до роботи на уроках математики та допізнавальної діяльності в області математики.

Отже, розроблена методика сприяє розвитку математичних компетентностей у учнів основної шкои.

ВИСНОВКИ

У різний час висловлювалися різні міркування щодо викладання геометрії та її місце у системі шкільної освіти. Геометрія в школі – це не лише основна математична дисципліна, а й один із найважливіших компонентів загальнолюдської культури. Геометрія, як навчальний предмет, має унікальні можливості для вирішення головного завдання загальної математичної освіти – цілісного розвитку та становлення особистості засобами математики. Розвиток учнів засобами геометрії спрямовано досягнення наукових, прикладних і загальнокультурних цілей математичної освіти, де загальнокультурні цілі навчання геометрії насамперед передбачають всебічний розвиток мислення дітей.

Розв'язування геометричних задач є основним джерелом формування математичних компетентностей у школярів під час навчання геометрії. Однак практика шкільного навчання свідчить, що навіть за умови вдосконалення форм і методів роботи у значної частини учнів залишаються істотні прогалини у вміннях розв'язувати задачі. Традиційний підхід, коли задачі пропонуються у випадковій послідовності, часто не забезпечує системності й поступовості засвоєння. Учні нерідко не мають достатнього уявлення про структуру задачі та алгоритм її розв'язування. Тому для досягнення високих результатів необхідно враховувати не лише що вивчати, а й як навчати, які методи застосовувати для формування понять, які труднощі та помилки можуть виникати й як їх подолати.

Ефективним шляхом є використання методики "сходинок навчання", яка передбачає поступове ускладнення задач: від простих обчислювальних до складних і прикладних. Кожна сходинка містить набір опорних задач, які виконують роль "банку прикладів". Засвоєння цього банку дає змогу учневі не лише відтворювати знання, а й орієнтуватися у нових ситуаціях, комбінувати вивчені прийоми та моделювати прикладні задачі.

Робота складається із вступу, трьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури.

У вступі обґрунтовується вибір теми дослідження, визначаються об'єкт, предмет та мета дослідження, формулюється гіпотеза та завдання дослідження.

У першому розділі роботи проаналізовано психолого-педагогічні особливості сприйняття школярами геометричної інформації. Розглянуті види геометричних задач, їх структура та дилактичний потенціал для формування у школярів математичних компетентностей. Визначені джерела проблем, які виникають у школярів при розв'язуванні геометричних задач.

Другий розділ присвячений методам розв'язування геометричних задач, їх значенню у формуванні компетентностей школярів, розвитку інтелектуальних та творчих здібностей у дітей.

У третьому розділі розробляється методика навчання розв'язуванню геометричних задач, зокрема при вивчення теми "Теорема Піфагора" та її застосуванню при навчанні школярів, проводиться педагогічний експеримент, що підтверджує ефективність методики, розроблені рекомендації щодо навчання школярів вмінню розв'язувати геометричні задачі.

При виконанні магістерської роботи були виконанні наступні завдання:

1. Проаналізована роль геометричних задач у вивченні геометрії в основній школі.

2. Опрацьовані види геометричних задач, які використовуються в шкільному курсі геометрії та досліджені методи розв'язування геометричних задач, які використовуються в основній школі;

3. Розроблені принципи, на яких повинна будуватися методика навчання розв'язуванню геометричних задач.

У ході дослідження була підтверджена гіпотеза про те, що поетапної методики "сходинки до навчання" разом з банком опорних задач забезпечить ефективність навчання розв'язуванню геометричних задач.

Для реалізації мети і перевірки справедливості висунутої гіпотези були виконані розв'язали наступні завдання:

1. Опрацювання літературних та електронних джерел, згідно даної теми

2. Проведений педагогічний експеримент для дослідження впливу методики навчання розв'язування геометричних задач з теми "Використання теореми Піфагора" на формування математичних компетентностей школярів 8 класу

Отже, завдяки методиці навчання розв'язуванню геометричних задачі в загальноосвітній школі в учнів формуються математичні компетентності та забезпечується підвищення його інтелектуальної та творчої активності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Астаф'єва М. М. Роль задач у формуванні математичної компетентності школярів. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 3(17). С. 20-25.

2. Бакаленко О.А. Психологія сприйняття та переробки інформації: Навч. Посібник. Харків: ХНУРЕ, 2017. 124 с.

3. Бевз Г., Бевз В., Васильєва Д., Владімірова Н. Геометрія : підручник для 8 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2025. 260 с.

4. Бурда М. І. Реалізація наскрізних ліній ключових компетентностей у підручниках з математики. *Проблеми сучасного підручника*. 2017. Вип. 19. С. 22-28.

5. Бурда М. Розв'язування задач на побудову в підручнику з планіметрії методом допоміжного трикутника. DOI: https://doi.org/10.32405/2411-1309-2021-26-33-42 (дата звернення: 31.08.2025).

6. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підручник для 8 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Оріон, 2025. 288 с.

7. Гаєвський М. В., Кліндухова А. П., Лутченко Л. І. Метричні співвідношення в трикутнику та чотирикутнику : методичний посібник. Кіровоград : КОД, 2010. 80 с.

8. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету*. 2014. № 1. С. 35-39.

9. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти : затв. постановою КМУ № 898 від 30.09.2020 р.

10. Дубовик І. Ф. Структуризація навчально-пізнавального процесу з використанням технології майндмеппінг. *Pedagogy and Psychology in the Modern World: the art of teaching and learning* : proceedings of the international scientific and practical conference, February 26–27, 2021. Riga : Baltija

Publishing, 2021. С. 169–172. DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-041-4-43 (дата звернення: 31.08.2025).

11. Єременко Л. В. Психологія сприйняття та переробки інформації : Посібник для самостійної роботи здобувачів вищої освіти та дистанційного навчання / Л. В. Єременко. Мелітополь: ФОП Однорог Т. В., 2021. 150 с.

12. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2009. № 2. С. 165-174.

13. Коваль Л. В. Методика навчання математики: теорія і практика : підручник. 2-ге вид., перероб. та допов. Харків : Принт-Лідер, 2021. 417 с.

14. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі : методичний посібник / за ред. О. І. Глобіна, М. І. Бурди, Д. В. Васильєвої, В. В. Волошена, О. П. Вашуленка, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмари. Київ : Педагогічна думка, 2015. 245 с.

15. Концепція Нової української школи. 2016. URL: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/konczepcziya.html (дата звернення: 31.08.2025).

16. Мала Л. О. Аналіз сучасних проблем формування геометричної компетентності учнів старшої школи. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. 2015. Vol. III(36), Issue 74. P. 39-43.

17. Лов’янова І. В. Вибрані методи і прийоми розв’язування геометричних задач : матеріали для факультативних занять та курсів за вибором. 11 клас / за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 68 с.

18. Ляшова Н., Бєлік Н. Аналогія як метод формування логічних операцій мислення здобувачів початкової освіти. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. 2022. Т. 2, № 17. С. 116–126. DOI: https://doi.org/10.31865/2414-9292.17.2022.260001 (дата звернення: 31.08.2025).

19. Мачача Т. С. Теоретико-методологічні засади проектування змісту технологічної освіти учнів середньої загальноосвітньої діяльності школи. *Український педагогічний журнал*. 2016. № 3. С. 105-114.

20. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія : підручник для 8 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2025. 240 с.

21. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях : навчально-методичний посібник / уклад. Л. А. Благодир. Умань : ВПЦ «Візаві», 2018. 144 с.

22. Милушева-Бойкина Д. В., Милушев В. Б. Формиране на умения за прилагане на анализ и синтез при решаване на задачи по геометрия. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. 2015. Vol. III(26), Issue 50. P. 50–54. ISSN 2308-5258. URL: http://www.seanewdim.com/ (дата звернення: 31.08.2025).

23. Мисліцька Н. А., Заболотний В. Ф. Методичний інструментарій учителя і викладача фізики : навчально-методичний посібник. Вінниця : Нілан-ЛТД, 2018. 192 с.

24. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.Vasylyshyn.ta.in.26.07.2023.pdf (дата звернення: 31.08.2025).

25. Офіційний звіт про результати НМТ у 2024 році. Т. 2. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/09/Zvit-NMT_2024-Tom_2_red.pdf (дата звернення: 31.08.2025).

26. Паламарчук В., Барановська О. Педагогічні технології навчання в умовах нової української школи: вектор розвитку. *Український педагогічний журнал*. 2018. № 3. С. 60–66. DOI: https://doi.org/10.32405/2411-1317-2018-3-60-66 (дата звернення: 31.08.2025).

27. Побережна Т. Г., Войцеховська І. А., Сухецька Л. І. Теорема Піфагора. Розв'язування прямокутних трикутників. *Математика в школах України*. 2013. № 5/6. С. 2–48.

28. Правіцька Н. Методичні аспекти розв'язування задач на геометричні перетворення для майбутніх учителів математики. Чернівці, 2023. URL: https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/8089/Pravitska.pdf?sequence=1&isAllowed=y (дата звернення: 31.08.2025).

29. Семенець С. П. Методика формування математичних понять. *Дидактика математики: проблеми та дослідження*. 2012. URL: http://eprints.zu.edu.ua/10.pdf (дата звернення: 31.08.2025)

30. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.

31. Станжицький О. М., Собчук В. В., Капустян О. В., Федоренко Ю. В., Цань В. Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики». Ч. IV: Методика вивчення геометрії. Вінниця : ДонНУ імені Василя Стуса, 2023. 110 с.

32. Тарасенкова Н. А. Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. *Математика в рідній школі*. 2016. № 11 (179). С. 26–30.

33. Gunčaga J., Tkačik Š., Zilkova K. Understanding of Selected Geometric Concepts by Pupils of Pre-Primary and Primary Level Education. *European Journal of Contemporary Education*. 2017. Vol. 6. P. 497–515. DOI: 10.13187/ejced.2017.3.497 (дата звернення: 31.08.2025).

34. Michael-Chrysanthou P., Panaoura A., Gagatsis A. et al. Exploring secondary school students' geometrical figure apprehension: cognitive structure and levels of geometrical ability. *Educational Studies in Mathematics*. 2024. Vol. 117. P. 23–42. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-024-10317-5 (дата звернення: 31.08.2025).

35. Millousheva-Boikina D., Milloushev V. Methodology for Mastering Methods of Solving Mathematical Problems. In: Tarasenkova N. (ed.) *Conceptual*

Framework for Improving the Mathematical Training of Young People: Monograph. Budapest: SCASPEE, 2016. P. 31–79. ISBN 978-963-12-7666-4. URL: http://seanewdim.com/other-publications.html (дата звернення: 31.08.2025).

36. Panaoura G., Gagatsis A. The geometrical reasoning of primary and secondary school students Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France. URL: www.inrp.fr/editions/cerme6 (дата звернення: 31.08.2025).

ДОДАТКИ

Додаток А

Методична розробка для уроку №1

Тема: Теорема Піфагора
Клас: 8
Тип уроку: засвоєння нових знань
Мета

- Ознайомити учнів із формулюванням та доведенням теореми Піфагора.
- Сформувати навички застосування теореми в простих випадках.
- Створити "банк опорних задач" як основу для подальшої роботи.

Обладнання

- Дошка, крейда або інтерактивна дошка.
- Презентація / плакати з малюнками трикутників.
- Роздаткові картки із задачами.

Хід уроку
1. Організаційний момент (2 хв.)

- Привітання.
- Перевірка готовності до уроку.
- Коротке мотиваційне слово: *"Ми щодня стикаємось із прямими кутами – у будівлях, конструкціях, предметах. Сьогодні ми дізнаємося, як знайти невідомі відстані за допомогою однієї з найважливіших теорем геометрії".*

2. Актуалізація знань (5 хв.)

- Фронтальна бесіда:
  - Що таке прямокутний трикутник?
  - Які його сторони називаються катетами, а яка – гіпотенузою?
- Міні-задача: *У прямокутному трикутнику катети 3 і 4. Як можна знайти гіпотенузу?* (Учні висловлюють припущення, вчитель підводить до ідеї теореми.)

3. Мотиваційний вступ (3 хв.)

- Історична довідка (1 хв): про Піфагора і значення його теореми.

- Пояснення важливості: без неї неможливо розв’язати задачі з архітектури, будівництва, фізики.

4. Вивчення нового матеріалу (15 хв.)

Формулювання (3 хв.):

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення (5 хв.):

- Малюнок із квадратом зі стороною a+b, у якому розміщені 4 прямокутні трикутники та малий квадрат.
- Розрахунок площі двома способами → рівність

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Приклади застосування (7 хв.):

- Вчитель на дошці показує 2 приклади (обчислення гіпотенузи та катета).
- Учні коментують, які числа підставляти та чому.

5. Первинне закріплення (10 хв.)

Робота з опорними задачами (банк задач):

- 1 задача (фронтально): в прямокутному трикутнику катети дорівнюють 6 см і 8 см, знайдіть гіпотенузу**.**
- 2 задача (індивідуально в зошитах): в прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 25 см, катет дорівнює 20 см, знайдіть інший катет**.**
- 3 задача (у парах): заданий прямокутник зі сторонами 9 м та 12 м, знайдіть його діагональ**.**

Учитель перевіряє та коментує відповіді.

6. Рефлексія та узагальнення (5 хв.)

- Обговорення:
    - Що нового ви дізналися сьогодні?
    - Як можна описати зв’язок між катетами та гіпотенузою?

    - Де ця теорема може стати у пригоді?
- Запис у зошитах "банку опорних задач" (2–3 приклади з уроку).

7. Домашнє завдання (2 хв.)

1. Розв’язати 3 задачі з підручника (аналогічні опорним).
2. Придумати 1 приклад із життя, де можна використати теорему Піфагора (намалювати схему).

Даний урок забезпечить ознайомлення учнів з теоремою Піфагора та формування вмінь розв’язувати задачі з її використанням.

Додаток Б

Методична розробка для уроку №2

Тема: Використання теореми Піфагора.

Тип уроку: комбінований, урок закріплення знань та умінь

Клас: 8 (після ознайомлення з теоремою та розв’язання базових задач)

Тривалість: 45 хв.

Навчальна:

- закріпити вміння учнів застосовувати теорему Піфагора у стандартних і прикладних задачах;
- сформувати навички вибору правильного методу розв’язання у задачах підвищеної складності.

Розвивальна:

- розвивати логічне мислення, просторову уяву та навички математичного моделювання;
- формувати вміння аналізувати умову задачі, складати схему чи малюнок, будувати правильний алгоритм розв’язання.

Виховна:

- показати практичну значущість математики через приклади з життя;
- виховувати уважність, послідовність, наполегливість у пошуку рішень.

Обладнання

- мультимедійна дошка (для схем і малюнків задач);
- картки з задачами (індивідуальні та групові);
- презентація "Прикладні задачі на використання теореми Піфагора".

Хід уроку

1. Організаційний момент (2 хв.)

Привітання, постановка теми уроку.

Формулюємо завдання: *"Сьогодні ми будемо застосовувати теорему Піфагора у складних і прикладних задачах, щоб побачити, як вона працює в житті та геометрії"*.

2. Актуалізація знань (5 хв.)

- Фронтальне опитування:
  - Сформулювати теорему Піфагора.

   - Навести приклади використання теореми у простих задачах.
- Міні-вправи "Розминка" (1–2 задачі з базового рівня на швидке обчислення гіпотенузи чи катета).

3. Робота над новим матеріалом – закріплення та ускладнення (10 хв.)

Учитель нагадує, що всі складні та прикладні задачі можна звести до прямокутного трикутника.

Розбір задачі разом із класом:

Приклад 1 (середній рівень):

Драбина довжиною 13 м стоїть біля стіни. Її нижній кінець віддалений від стіни на 5 м. На якій висоті знаходиться верхній кінець драбини?

Алгоритм дій:

1) Учні з учителем складають малюнок
2) Визначають трикутник
3) Застосовують формулу
4) Розв’язують задачу.

4. Розв’язування задач підвищеної складності (15 хв.)

Робота в групах. Учні отримують картки з різними задачами.

Високий рівень – геометричні задачі

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см і 24 см. Знайти радіус описаного кола.
2. У прямокутному трикутнику з катетами 8 см і 15 см знайти довжину медіани, проведеної до гіпотенузи.

Прикладні задачі

3. Телеграфний стовп

   Телеграфний стовп висотою 12 м закріплено дротом, прикріпленим до землі на відстані 5 м від основи. Якщо довжина дроту 13 м, на якій висоті він прикріплений?
4. Подорож туриста

   Турист пройшов 6 км на схід, потім 8 км на північ. Якою буде довжина найкоротшого шляху назад до початкової точки? На скільки кілометрів він скоротить свій шлях?

5. Колективне обговорення результатів (5 хв.)

- Представники груп презентують рішення.
- Учитель акцентує увагу на ключових кроках:
    1) схематизація
    2) побудова трикутника
    3) застосування формули.
- Формулюється правило: *"Будь-яка задача, де є прямий кут, може бути розв'язана через теорему Піфагора"*.

6. Підсумок уроку (5 хв.)

- Рефлексія: *"Які нові способи використання теореми ви сьогодні побачили?"*
- Підкреслюємо практичну значущість (архітектура, будівництво, географія, техніка).
- Вчитель робить висновок: *"Завдяки системі сходинок та опорних задач ви можете розв'язувати не лише прості, а й складні та прикладні задачі"*.

7. Домашнє завдання

1. Розв'язати 3 задачі з опорного списку (за вибором учителя: одна з базового рівня, одна з середнього, одна прикладна).
2. Підготувати приклад із життя, де можна застосувати теорему Піфагора.

Очікувані результати

- Учні впевнено розпізнають прямокутні трикутники в задачах.
- Застосовують теорему Піфагора для знаходження довжин сторін.
- Уміють розв'язувати прикладні та складні задачі.
- Починають формувати власний "банк опорних задач".

Опорний банк задач

Тема: Теорема Піфагора та її застосування

I сходинка – Базові обчислення (механічне застосування формули)

1. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 6 см і 8 см. Знайти гіпотенузу.
2. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти гіпотенузу.
3. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 13 см, а один катет – 12 см. Знайти другий катет.
4. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 25 см, а катет – 20 см. Знайти другий катет.
5. Перевірити, чи може трикутник зі сторонами 7 см, 24 см і 25 см бути прямокутним.

II сходинка – Прикладні задачі середньої складності

1. Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти діагональ.
2. Драбина довжиною 10 м стоїть біля стіни, її нижній кінець віддалений від стіни на 6 м. На якій висоті знаходиться верхній кінець драбини?
3. Знайти діагональ квадрата зі стороною 7 см.
4. Площа прямокутника дорівнює 60 $см^2$, одна сторона – 5 см. Знайти діагональ.
5. Знайти довжину медіани, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 8 см і 15 см.
6. Більша діагональ і більша основа прямокутної трапеції дорівнюють відповідно 8 см і 6 см. Знайдіть довжину меншої бічної сторони трапеції.

III сходинка – Геометричні властивості та доведення

1. Довести, що у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.
2. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 9 см і 12 см. У трикутник вписано квадрат, одна вершина якого лежить у вершині прямого кута, а дві інші – на катетах. Знайти сторону квадрата.
3. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус вписаного кола.
4. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см і 24 см. Знайти радіус описаного кола.

5. Довести, що в прямокутному трикутнику з катетами a і b, висота h, проведена до гіпотенузи, задовольняє рівність:

$$h = \frac{ab}{c}$$

6. Два кола із центрами O_1 і O_2 і радіусами, які відповідно дорівнюють 4 см і 9 см, дотикаються зовнішньо. Пряма a дотикається цих кіл відповідно в точках M і N. Знайдіть довжину відрізків MN, O_1N, O_2M.

IV сходинка – Складні прикладні задачі

1. Телеграфний стовп висотою 12 м закріплено дротом, прикріпленим до землі на відстані 5 м від основи стовпа. Якщо довжина дроту дорівнює 13 м, на якій висоті він прикріплений до стовпа?
2. Катер пройшов 15 км на північ, потім 20 км на схід. На якій відстані від порту він опинився? Наскільки коротшим буде прямий шлях назад?
3. Турист йде спочатку 8 км на схід, потім 6 км на північ. Він хоче скоротити шлях, пройшовши прямо від початкової точки до кінцевої. Наскільки коротшим буде цей шлях?
4. Висота будинку дорівнює 30 м. До його даху приставлено драбину довжиною 50 м. На якій відстані від основи будинку стоїть нижній кінець драбини?
5. Поле має форму прямокутника зі сторонами 100 м і 240 м. Фермер хоче протягнути зрошувальну трубу по діагоналі поля. Якої довжини труба йому потрібна?
6. Ескалатор метрополітену має 17 сходинок від підлоги наземного вестибюля до підлоги підземної станції. Ширина сходинок 40 см, висота 30 см. Визначте: а) довжину сходинок; б) глибину станції по вертикалі.