

Міністерство освіти і науки
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота магістерського рівня на тему:
**Розробка методичних матеріалів для вивчення курсу аналітичної
геометрії**

Виконала:

студентка II курсу групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)

Протас Ангеліна Володимирівна

Керівник: канд. техн. наук, доцент

Присяжнюк Ігор Михайлович

Рецензент: канд. фізико-
математичних наук, професор
кафедри математики з методикою її
викладання

Крайчук Олександр Васильович

Рівне-2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
Розділ 1. Огляд літературних джерел за тематикою досліджень.	6
1.1. Джерела та історіографія.....	6
1.2. Необхідність і важливість методичних розробок.	7
1.3. Види навчально - методичних матеріалів.	8
1.4. Відеоуроки, як методична розробка: адаптація до потреб часу.....	9
1.5. Засоби створення відеоуроків: огляд та рекомендації.....	12
1.6. Сервіси для розміщення методичних матеріалів.	17
Розділ 2. Теоретичні основи курсу аналітична геометрія	19
2.1. Теоретичні основи змісту навчальних відеоматеріалів курсу «Аналітична геометрія на площині».	19
2.2. Теоретичні засади змісту навчальних медіаматеріалів курсу «Аналітична геометрія в просторі».	30
Розділ 3. Розробка відеоуроків для дистанційного вивчення аналітичної геометрії в просторі	49
3.1. Розробка відеоуроків на тему «Афінна система координат у просторі» та «Векторний і мішаний добуток векторів» з аналітичної геометрії у просторі.	49
3.2. Розроблення сценаріїв навчальних роликів на тему прямих, площин та їх взаємного розміщення.	66
3.3. Створення конспектів навчальних відео на тему «Циліндричні та конічні поверхні» з аналітичної геометрії у просторі.	85
3.4. Створення сценаріїв присвячених поверхням обертання з аналітичної геометрії у просторі.....	92
Висновки	111
Список використаної літератури	112
Додатки	115

ВСТУП

Актуальність дослідження. У нормативних актах діючого законодавства вказується, що для реалізації інтелектуального потенціалу молодого покоління та підвищення конкурентоспроможності держави на міжнародному рівні впровадження інформаційно - комунікаційних технологій і цифрова грамотність суспільства в управлінні соціальною сферою є недостатніми.

Сучасність вимагає від суспільства формування єдиного інформаційного освітнього середовища, метою якого є розробка електронного навчального контенту для здобувачів освіти, впровадження дистанційного навчання на основі новітніх технологій та створення можливостей для мережевого спілкування між учасниками освітнього процесу у будь-якому місці і в будь-який час.

Ситуація, що тепер склалася в Україні через епідемії та війни, вимагає від освітян оперативної реакції на ці виклики часу та прискорення роботи над розвитком онлайн - навчання як найефективнішої форми отримання освіти в таких умовах. У цьому процесі важливу роль може відіграти розумне впровадження елементів дистанційного навчання в освітню систему.

Дистанційне навчання передбачає застосування набору сучасних технологій, які дозволяють передавати навчальну інформацію в інтерактивному форматі за допомогою інформаційно - комунікаційних технологій від осіб, які навчають (викладачів чи тьюторів), до осіб, що навчаються (студентів, слухачів). [1].

Характерною рисою організації дистанційного навчання є можливість для викладачів і студентів вищих навчальних закладів використовувати інноваційні технології та навчально-методичні матеріали. [1].

Найважливішим аспектом має стати створення умов для забезпечення якісної допрофільної та профільної підготовки учнів і студентів в умовах змішаного навчання, а також отримання ними знань на основі принципів інформаційно-комунікаційних технологій.

Різкі зміни в навчальному процесі вимагають швидкої адаптації та пошуку нових ефективних інструментів навчання для студентів. Аналітична геометрія є

ключовим розділом математики, оскільки вона потребує від студентів глибокого розуміння та здатності застосовувати аналітичні методи для вирішення геометричних задач. [29].

Розділ математики під назвою «Аналітична геометрія» не завжди сприймається студентами легко, і в процесі його вивчення часто виникають труднощі. Тому є доцільним створення відеозанять, присвячених цій темі..

Вивчення аналітичної геометрії в основній загальній, середній та вищій освіті націлено на досягнення наступних **цілей**:

- **набуття** системи компетентностей, необхідних для практичної діяльності, вивчення споріднених дисциплін та продовження здобуття освіти;
- **інтелектуальний** розвиток та формування рис особистості, важливих для повноцінного життя в суспільстві: ясність і точність мислення, критичне мислення, інтуїція, логічне мислення, елементи алгоритмічної культури, просторові уявлення, здатність долати труднощі, що є властивими для аналітико-геометричної діяльності;
- **формування** розуміння ідей та методів аналітичної геометрії;
- **виховання** культури особистості, сприйняття аналітичної геометрії як частини загальнолюдської математичної культури.

Наукова новизна полягає у дослідженні доцільності інтегрування навчальних роликів у процес вивчення курсу «Аналітична геометрія».

Об'єктом дослідження є процес викладання курсу «Аналітична геометрія» в умовах змішаного навчання з допомогою навчальних відео.

Предметом дослідження є узагальнення та систематизація основних розділів курсу аналітичної геометрії, а також розробка певних методичних матеріалів згідно програми курсу «Аналітична геометрія».

Мета дослідження: створити методичний матеріал з аналітичної геометрії для підвищення ефективності викладання курсу в умовах змішаного формату навчання.

Для досягнення даної мети були поставлені такі **завдання**:

- систематизувати та узагальнити вивчений матеріал;

- розробити навчальні відео для змішаного навчання курсу «Аналітична геометрія»;

- провести аналіз ефективності інтегрування відеороликів у процес вивчення курсу.

При написанні роботи використовувались такі **методи**, як: аналіз, систематизація, узагальнення, а також і специфічні.

Практичне значення одержаних результатів аналізу полягає в тому, що зібраний матеріал, теоретичні положення та висновки можуть бути корисними для написання наукових праць, статей, досліджень з аналітичної геометрії, а також для проведення практичних і семінарських занять та лекцій.

Результати дослідження також стануть у нагоді студентам, які вивчають курс в асинхронному режимі, і викладачам при організації змішаного формату навчання курсу аналітичної геометрії в асинхронному форматі.

Структура роботи зумовлена загальною метою та конкретними завданнями дослідження. Дослідження складається зі вступу, трьох розділів, висновків, додатків, списку використаних джерел і літератури. Загальний обсяг роботи – 147 сторінок.

Розділ 1. Огляд літературних джерел за тематикою досліджень.

1.1. Джерела та історіографія.

У першій половині XVII століття започаткувалась абсолютно нова сфера математики, що називається «аналітична геометрія». Ця дисципліна вивчає зв'язок між лініями на площині та алгебраїчними рівняннями з двома змінними. На протязі близько двадцяти років у математиці відбулася знакова подія: сформувалася нова галузь, що ґрунтувалася на простій ідеї, якій раніше не приділяли належної уваги. Виникнення аналітичної геометрії не було випадковою подією. Розвиток капіталістичних відносин у Європі вимагав прогресу в різних наукових сферах. Саме в цей час, завдяки працям Галілея та інших визначних учених, розпочалося формування сучасної механіки, а в природничих науках активно накопичувався досвід і знання. Особливо допомогли праці Миколая Коперника в галузі астрономії. Глибокі знання механіки та науки, що згадується вище, були важливими для розвитку мореплавства на далекі відстані, а механіка також була корисна у воєнній справі. Після того, як з'ясувалося, що планети нашої галактики обертаються навколо Сонця не по колових траєкторіях, а по еліпсах та камінь, який кидають, рухається по параболі, то вчені зрозуміли, що необхідно детально вивчати ці лінії, знаходити їх закономірності та досліджувати різні об'єкти. Це стало стимулом для розвитку багатьох нових наукових напрямків, зокрема й аналітичної геометрії. Виникла дана галузь завдяки вченому, якого називають Рене Декарт. Науковець жив у Франції і був великим математиком, а також філософом. Біля 1637 року почали використовувати систему координат. Такий метод дозволяє розуміти, що x і y в рівнянні $f(x, y) = 0$ називаються координатами точки. Тоді можна знайти певну кількість точок, координати яких при підставлянні у рівняння, даватимуть правильну рівність. У шкільній навчальній програмі зазначають, що геометрична фігура – сукупність точок.

Спочатку потрібно для геометричної фігури скласти рівняння, а тоді вивчати властивості її. Спочатку складають рівняння, яке описує цю фігуру, а

потім аналізують її властивості. У сучасному курсі цієї дисципліни особлива увага приділяється роботі з векторами.

1.2. Необхідність і важливість методичних розробок.

Методичними матеріалами називають такі матеріали, які містять певні пояснення, розв'язки чи навіть вказівки, які допомагають викладачам в освітньому процесі і сприяють ефективному навчанню студентів.

Ці видання націлені на створення практично орієнтованих і науково обґрунтованих рекомендацій для педагога, ментора чи вчителя та тих, хто бажає вчитись. Ключова мета розробок полягає у сприянні підвищення ефективності та прогресу у навчальному процесі. Вони можуть поміщати в собі різні інструменти, це можуть бути: методи навчання, опис форм, дидактичні матеріали і т. п.. Під час створення методичних матеріалів основна увага приділяється вдосконаленню процесу засвоєння певного матеріалу. Курс аналітичної геометрії є важливою складовою математики, який потребує наочності та сучасних методів викладання. Тому доцільно видати методичний матеріал саме з даної дисципліни.

Розглянемо у чому полягає актуальність створення навчальних розробок:

1. Відповідність сучасним освітнім тенденціям. В силу того, що відбуваються постійні зміни у педагогіці та світі в цілому, навчання потребує нових форм та методів. Робимо висновок, що методичні матеріали повинні постійно оновлюватись, щоб бути корисними, ефективними та актуальними.
2. Індивідуальність підходу. Розробки можна створити, дотримуючись певних правил, які створюють різні групи здобувачів освіти. Зокрема, це можуть бути обдаровані учні, діти із особливими потребами та іноземні студенти.
3. Інтеграція нових технологій. Методичні матеріали можуть бути створені з умовою урахування можливості цифрових пристроїв чи дистанційного навчання, що останнім часом є затребуваним.

4. Практична орієнтація. Методичні розробки, являються корисним інструментом, який легко можна використати при практичній діяльності.

5. Підвищення якості освітнього процесу. Розумно впорядкований та систематизований матеріал є запорукою успіху в навчальній діяльності.

З вище сказаного, розуміємо, що створення методичних розробок є важливою складовою сучасної освіти, яке сприяє значному прогресу в процесі викладання.

1.3. Види навчально - методичних матеріалів.

Методичні матеріали, залежно від потреб та призначення поділяються. Розглянемо детально деякі з видів:

- Посібник – це видання, яке націлене на освоєні студентами певної дисципліни.
- Підручник – основна публікація, зміст якої чіткий і визначений робочою навчальною програмою. Об'єм інформації, яка міститься в книзі залежить від кількості кредитів, які призначені навчальним планом.
- Методичні рекомендації – це видання, яке спрямоване на пояснення певної частини матеріалу (тема, розділ і т. п.) з методикою розв'язування деяких завдань.
- Курс лекцій – розробка систематизованого повного обсягу матеріалу дисципліни, визначеним навчальною програмою.
- Практикум – розробка практичних завдань для певної дисципліни, які спрямовані на розвиток навичок і умінь тих, хто навчається. Дане видання може містити також приклади розв'язок до певних задач.
- Лабораторний практикум – розробка рекомендацій в плані методики, які спрямовані на пояснення виконання лабораторних робіт. В даному виданні можуть міститись також короткі теоретичні відомості, які значно полегшують працю.
- Довідник – видання навчального характеру, яке поміщає систематизовану коротку інформацію по розділах чи темах.

- Робочий зошит – це розробка, яка включає, як короткі відомості щодо певних тем, так і завдання для самостійного опрацювання їх студентами.
- Електронне видання – це видання, яке розроблене в електронній формі, може бути поширене в вигляді, що не можна змінити. Це можуть бути аудіокниги, відеоуроки, навчальні ігри.

Видів методичних розробок існує багато. Проте перед початком створення викладачу варто зрозуміти вподобання та нахили студентів і відповідно знайти ефективний алгоритм своєї праці.

1.4. Відеоуроки, як методична розробка: адаптація до потреб часу.

У сучасній освіті активно впроваджуються інформаційні технології, які поступово стають невіддільною частиною навчального процесу. Їх застосування охоплює різні сфери та сприяє ефективному засвоєнню матеріалу. Нові можливості стають все доступніші для тих, хто навчає та тих, хто навчає. У наш час інформаційні технології є звичайним засобом, що допомагає організувати навчання кращим чином. Цей інструмент спрощує працю менторів і при цьому слугує каталізатором в процесі засвоєння чи повторення навчального матеріалу. Освітняни широко використовують такі цифрові засоби, як комп'ютерні презентації, електронні словники, програми для тестів, тренажери та інтерактивні підручники. Відеоуроки стали популярним на необхідним форматом навчання. Такий підхід до навчання робить його цікавим, наочним та динамічним. Учні можуть отримати швидкий доступ до великого об'єму матеріалу, який буде зрозумілим. Відеоуроки також є потужним інструментом для самостійної підготовки, оскільки вони дають змогу тим, хто навчається організувати свій навчальний процес в зручний для них час. [29].

Розглянемо кілька аспектів, які вимагають створення відеуроків та інтегрування їх у навчальний процес:

- Незалежність у часі. Особа, що переглядає відеоурок, може це робити у будь – який вільний час та у будь – якому місці, змінюючи швидкість. Наявність можливості ставити паузу та повертатись до матеріалу, де

незрозуміло, підвищує рівень засвоєння. У студента з'являється відчуття присутності на очному проведенні заняття.

- Засвоєння інформації відбувається двома органами чуття (слух та зір). Завдяки цьому, можна осилити більші об'єми матеріалу.

- Продемонстрований матеріал може містити практику та теорію разом. Це дозволить студентам глибше зануритись у навчання та зрозуміти всі взаємозв'язки та процеси.

- Дистанційне навчання вимагає розробки методичних електронних видань. Відеоуроки є ефективним інструментом при цьому.

У рамках цього дослідження важливо систематизувати та узагальнити існуючі підходи до впровадження відео навчання в освітній процес, а також розробити власні рекомендації щодо створення навчальних відео. Спочатку потрібно визначити, що таке «відео», а потім вже перейти до самого поняття «відеурок». Перший термін представляє собою формат мультимедійного змісту, який передає зображення та звук за допомогою сигналів. Це дозволяє записувати та відтворювати різноманітний візуальний контент

Відеурок, у свою чергу, є специфічним форматом мультимедіа, призначеним для запису та демонстрації навчального матеріалу. Використання відеоуроків дає можливість наочно ілюструвати алгоритм виконання різних навчальних завдань. Ці ресурси слугують для вивчення теоретичних аспектів, повторення матеріалу та вирішення практичних задач на основі конкретних прикладів. Відеоуроки дозволяють продемонструвати, як можна організувати навчання з використанням сучасних інформаційних технологій.

Відеоуроки мають свої плюси та мінуси. Підсумувавши все вище написане, виділяємо наступні переваги:

- Особа, що проводить заняття не відволікається та має змогу згідно плану ввести свою розповідь;
- розумна класифікація матеріалу;
- відеурок – це наочність: науковці стверджують, що підвищенню до 65 % рівня засвоєння знань сприяє видимий матеріал;

- можливість переглядати заняття у будь – який час, що є зручним для здобувача освіти, а також у будь – якому місці;

Тепер перегляньмо, які недоліки є наявні:

- Особа, що розповідає, навчає, повинна бути ерудована на високому рівні та мати високі вміння при користуванні різними технічними засобами;

- Викладач повинен вміти розумно складати сценарій та чітко йому дотримуватись;

- спілкування викладача та студента через монітор не замінює живого спілкування, що може погано вплинути на зворотній зв'язок, адже обидва учасники освітнього процесу не бачитимуть один одного;

- коли ментор помиляється у відео, він змушений перезаписувати ролик;

- можуть бути певні незручності у людей, що мають деякі особливості.

Незважаючи на недоліки, що сказані вище, відеоуроки все більше стають популярними інструментами в освітньому процесі, а технології дозволяють розробляти професійні проекти. Для виготовлення навчального відео необхідно використовувати відповідні апаратні та програмні засоби.

В залежності від технічних можливостей та вподобань аудиторії, вчитель може створити різні види відеоуроків. Це можуть бути: скрінкасти, відеосупровід, відео урок, інтерактивний відеоурок.

Коли здійснюється запис з екрану, то маємо справу із скрінкастом. Такий вид навчального ролику є дуже ефективним для освоєння роботи з програмним забезпеченням або навіть інтернет інструментами. Педагоги досить часто використовують саме такий формат відеоуроку для демонстрації практичних навичок.

Їх ділять на:

- Gif: короткі беззвучні відео.

- Скрінкасти, які мають звук. Звукові пояснення відбуваються за кадром.

- Скрінкасти, які містять звук та обличчя автора. Для такого виду відеоуроку вмикається веб – камера.

Ще один формат навчальних відео – це відеосупровід. У такому відео автор сидить перед камерою та викладає чи пояснює матеріал. Як правило, цей тип відео використовується для доповнення до презентацій, де потрібно детально роз'яснити слайди. Багато викладачів надають перевагу такому формату, оскільки він допомагає зробити навчальний процес більш ефективним.

Ще одним цікавим типом навчального ролику є власне відеурок. Цей вид вважається найскладнішим у процесі створення. Відеурок схожий на телевізійне шоу. Сценарій багатий на деталі і має широкий відеоряд. Цим самим заохочує глядачів до перегляду.

Ще одним цікавим форматом відеозаняття являється інтерактивний відеурок.

Головна думка полягає у тому, що особа, що переглядатиме таке заняття, буде взаємодіяти з ним. Вона зможе натискати на різноманітні кнопки. Також є можливість впливати на сценарій відеозаняття, вибираючи ту чи іншу гілку розгалуження. Такі формати значно збільшують бажання і підвищують мотивацію до вивчення певної дисципліни.

1.5. Засоби створення відеоуроків: огляд та рекомендації.

Створити відеурок є доволі просто, проте без правильного підходу він може виявитися неефективним і не зацікавити цільову аудиторію. Тому для досягнення бажаного результату важливо слідувати чітким правилам підготовки та виконання [30].

Розгляньмо їх детальніше:

Спершу необхідно чітко визначити, для кого призначений навчальний ролик. Це важливо, оскільки різні групи потребують відповідного стилю подачі матеріалу. Серед потенційної аудиторії можуть бути діти з конкретним рівнем підготовки, колеги по роботі або батьки школярів чи студентів [30].

Сценарій для відеоуроку слід продумати особливо уважно. Навіть досвідчені фахівці ретельно планують, як має розгортатися подача матеріалу у відео. Чіткий сценарій не лише спрощує процес створення, але й допомагає

автору швидко повернутися до основної лінії розповіді, якщо він раптом зіб'ється з думки [30].

Напередодні зйомок варто подбати про технічне забезпечення, та детально продумати, які інструменти знадобляться при цьому [30]. Це може бути мікрофон, камера, штатив, світло.

Існує кілька видів інструментів, що записують звук: петличний, головний та накамерний.

Перший із переліку є дуже легким і непомітним. Він кріпиться на одяг і за рахунок цього є зручним. Наступний мікрофон є теж бюджетним варіантом, хоч і це є навушники із гарнітурою. Різняться від попереднього тим, що головний не взаємодіє з одягом, не торкається до нього. В ту ж чергу накамерний кріпиться суто на камеру.

Важливо є також те, який задній фон у відеоуроці. Він повинен бути спокійним, щоб не відволікати глядача від головної теми. Варто приділити увагу вибору картинки [30].

Важливо, щоб відео було гарно освітлене. Тому необхідно подбати також про світло.

Створювати навчальне відео варто поетапно. Такий підхід дає можливість викладачеві або ведучому відпочити, повторити матеріал і знову з новими силами розпочати роботу, це забезпечить високу якість контенту.

Необхідно обрати програмне забезпечення, яке найбільше відповідає потребам створення конкретного типу навчального відео. Важливо також, щоб розробник добре орієнтувався в обраній програмі, оскільки це суттєво вплине на якість та ефективність роботи [30].

Коли розробник створює навчальні відео, то він обов'язково повинен врахувати, що ролик має бути динамічним, цікавим та сучасним. Це допоможе залучити студентів переглядати заняття [30].

Виконання усіх, вище сказаних правил, дасть видимий результат у процесі створення навчального ролику і охопить значний об'єм аудиторії.

Сьогодні створення відео за допомогою комп'ютера стало простим та доступним. Головне – це підібрати відповідне програмне забезпечення для монтажу та редагування відео, а також проявити власний творчий підхід. На ринку представлено дуже багато таких програм, і при виборі варто звертати увагу на кілька важливих аспектів:

1. Наявність безкоштовної версії або ліцензії.
2. Зручний та зрозумілий інтуїтивно інтерфейс, бажано рідною мовою користувача.
3. Можливість додавати власний звук і змога редагувати його.
4. Підтримка елементів на кшталт тексту, приміток, зображень і фігур.
5. Функція публікації відео на онлайн-платформах.
6. Інструменти для більш точного покадрового редагування.

Перед початком роботи важливо продумати сценарій відеоуроку та визначити, які фрагменти матеріалу слід показати у відеоформаті. Це допоможе підібрати саме ту програму, яка найкраще відповідатиме завданням проєкту та полегшить процес створення навчального відео.

Отже, розглянемо кілька програмних засобів, які відзначаються своєю зручністю та практичністю. Ці інструменти здатні полегшити і урізноманітнити процес розробки навчальних роликів. Для запису скрінкастів варто звернути увагу на такі засоби:

1. «Camtasia Studio».

Ця програма оснащена всіма необхідними інструментами для створення динамічного навчального відео. Вона дозволяє зручно записувати всі потрібні дії та швидко перенести їх у редактор для подальшого монтажу. Однак одним із недоліків є те, що інтерфейс доступний лише англійською мовою, тому користувачеві доведеться орієнтуватися інтуїтивно.

Ця програма дозволяє легко додавати додаткові елементи, такі як рамки, стрілки та коментарі, що дозволяє спростити процес вивчення певних тем. Серед переваг також варто відзначити можливість наближати окремі фрагменти відео та застосовувати цікаві анімації до курсору. Готовий ролик можна

експортувати у кількох популярних форматах, що забезпечує зручність використання на різних платформах.

2. «Movavi Screen Capture».

Ця програма є дуже проста у використанні. Окрім того, що є можливість записувати дії на екрані, вона ще дозволяє одночасно користуватись веб - камерою. Проте, на жаль, існує один суттєвий мінус: редагувати те, що вже відзняте можна лише у платній версії. Також, щоб користуватися програмою необхідний потужний ПК. Проте, у редакторі є можливість додавати рисунки, фігури, обрізати проект [22].

3. «Bandicam».

Дана програма дозволяє одночасно робити запис із екрану та на веб - камеру. Відзняті відео можна експортувати окремими проектами, що є зручно. Програмний засіб здатний робити шумоізоляцію від системних звуків. Редактор не передбачений у «Bandicam», що не є зручно і іноді може приносити дискомфорт при розробці. Проте досвідченому користувачу ПК це не буде проблемою. Режим малювання є родзинкою даного програмного засобу. Це допомагає при зйомці вказувати на важливі речі, підкреслюючи їх чи виділяючи. Результат буде експортовано у формат «avi» [22].

4. «ISpring Cam».

Програма надає можливість записувати лише частину екрану, налаштовувати анімацію для курсора миші, а також створювати запис звуку окремо від відео та пізніше редагувати його. Наприкінці навчальний мультимедійний проект зберігається в форматі «wmv».

Серед найкращих відеоредакторів варто виділити наступні:

1. «Adobe After Effects».

Дана програма являється професійним засобом. Використання її інструментів дасть можливість створити красиві кадри з використанням анімацій та шаблонів. Вона дозволяє робити багато цікавих речей, проте, суттєвим недоліком є те, що розробник повинен добре володіти її інтерфейсом [24].

2. «Sony Vegas Pro».

Програма є досить популярна. Її призначення для того, редагувати відео. Вона заслужила повагу у великій кількості журналістів та веб – розробників. Вона дозволяє створювати гарячі клавіші. Програма може працювати з різними форматами. Наявна можливість редагувати відео та аудіо доріжки, що значно полегшує процес роботи [24].

3. «Movavi».

Цей редактор користується великою популярністю, адже працює з великою кількістю форматів та містить багато функцій. Користування даним програмним засобом є легким та доступним, адже інтерфейс є простим та інтуїтивно зрозумілим. Є можливість додати титри, фільтри та багато інших інструментів. Програмний засіб дозволяє знімати відео з екрану, а також створювати власну звукову доріжку [24].

4. «Zoom».

5. Програмний засіб є простий у використанні. Більшість викладачів користується ним при проведенні дистанційних уроків. «Zoom» надає можливість здійснювати запис екрану з паралельним використанням веб – камери. Далі відео конвертується в формат «mp4» і зберігається у відповідній папці. Після його можна завантажувати у редактор.

Також розглянемо декілька програм, що дає змогу розробити інтерактивні відео.

1. «Rapt Media

Програма дозволяє розробляти інтерактивні ролики, які мають розгалужену структуру. Їх можна розглядати як сайт. Наприкінці розробки є можливість збереження відео та завантаження у додаток.

2. «Kaltura»

Ця платформа дозволяє додавати інтерактивні елементи до відео. Користувач може вставляти тести в будь – яку частину ролику, такі дії роблять навчальний мультимедійний проект більше цікавим. Студенти матимуть можливість регулювати швидкість та порядок подачі інформації відповідно до певних потреб.

1.6. Сервіси для розміщення методичних матеріалів.

Сервіси для розміщення методичних матеріалів є зручними платформами для вчителів, викладачів та інших освітян, які бажають організувати та поділитися своїми навчальними матеріалами. Розглянемо деякі популярні сервіси:

1. Google Drive - дозволяє зберігати, організувати і ділитися документами, презентаціями, таблицями та іншими матеріалами. Можна налаштувати рівень доступу для перегляду або редагування.
2. Microsoft OneDrive – схожий до Google Drive, надає можливість завантаження та зберігання файлів, створення спільного доступу для роботи з методичними матеріалами.
3. Dropbox - хмарне сховище, що дозволяє завантажувати методичні матеріали, організувати їх у папки та надавати доступ до файлів іншим користувачам.
4. Google Classroom - спеціалізована платформа для створення віртуальних класів, де можна розміщувати методичні матеріали, організувати завдання, вести комунікацію з учнями та відстежувати їх успішність.
5. Moodle - система управління навчанням (LMS), яка дозволяє створювати онлайн-курси з доступом до навчальних матеріалів, завдань, тестів та іншого контенту.
6. Microsoft Teams - платформа для співпраці, яка дозволяє створювати віртуальні класи, обмінюватися матеріалами та вести інтерактивні заняття.
7. Edmodo - соціальна мережа для навчання, де викладачі можуть створювати класи, розміщувати методичні матеріали, обмінюватися ресурсами і взаємодіяти з учнями.
8. Padlet - онлайн-дошка, яка дозволяє створювати інтерактивні дошки з методичними матеріалами, посиланнями, відео та іншими ресурсами. Викладачі можуть організувати інформацію і ділитися нею з учнями.

9. Teachology - платформа для вчителів, на якій можна завантажувати, зберігати та ділитися методичними розробками, презентаціями, конспектами уроків та іншими ресурсами.
10. YouTube – платформа, яка дозволяє створити власний канал та поширювати у ньому свої відео розробки. Їх можна робити, як видимими, так і прихованими. Дана платформа є досить популярною у світі, тож завдяки їй можна охопити велике коло слухачів.
11. Google сайт – сервіс, на якому можна виставляти власні розробки. Це можуть бути відео-матеріали, текст, зображення. Такий спосіб дозволить студентам вибрати власний темп навчання та самостійно мандрувати між темами.

Ці сервіси надають різноманітні можливості для організації, систематизації і поширення методичних матеріалів, що робить навчальний процес більш зручним та ефективним як для вчителів, так і для учнів.

Розділ 2. Теоретичні основи курсу аналітична геометрія

2.1. Теоретичні основи змісту навчальних відеоматеріалів курсу «Аналітична геометрія на площині».

Аналітична геометрія на площині вивчає геометричні фігури та використовує методи алгебри й аналізу. Основою є застосування прямокутної системи координат для визначення положення точок, прямих та інших геометричних об'єктів. Розглянемо короткі теоретичні відомості, що використовуються при розробці методичних матеріалів для курсу «Аналітична геометрія на площині».

Спершу необхідно розглянути вектори, їх залежність, а також лінійні операції над ними.

Напрямленим відрізком називається відрізок, для якого визначено порядок розташування його кінців, тобто один з кінців вважається початком, а інший – кінцем.

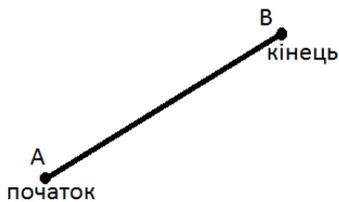


рис. 2.1.1

Два відрізки називаються співнапрямленими \overline{AB} і \overline{CD} (однаково напрямленими) якщо промені \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} є теж співнапрямленими.

Два промені AB і CD називаються тоді співнапрямленими, коли вони належать паралельним прямим, а також існує пряма, що перетинає ці прямі і не містить даних променів AB і CD .

Напрямок в геометрії являється множиною всіх променів, що є співнапрямленими. Якщо будемо говорити про співнапрявлені відрізки, то будемо мати вільний вектор.

Кожен такий відрізок із цієї множини є представником вільного вектора \overrightarrow{AB} .

Існує кілька лінійних операцій над векторами.

1. Додавання векторів.

Два вектори \vec{a} , \vec{b} додаються за правилом трикутника або паралелограма.

$$\vec{a} + \vec{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

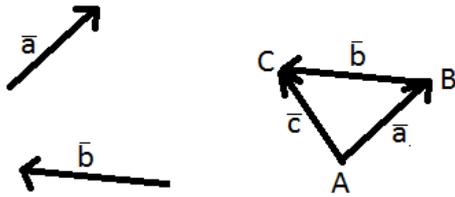


рис. 2.1.2

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

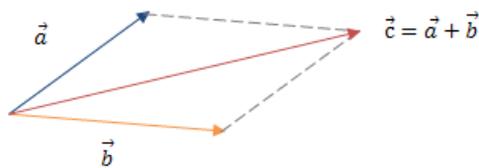


рис. 2.1.3

Для додавання n -векторів застосовується правило багатокутника: від кінця першого вектора відкладаємо початок другого, від кінця другого — початок третього і так далі. Сума n -векторів визначається вектором, що з'єднує початок першого вектора з кінцем n -го.

2. Віднімання векторів.

Віднімання векторів здійснюється за аналогією з додаванням. Це буде вектор \vec{c} .

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

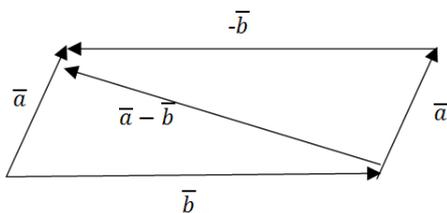


рис. 2.1.4

Будуємо паралелограм на векторах і діагональ буде шуканою різницею.

3. Множення вектора на число.

Якщо k — скаляр, то множення вектора \vec{a} на число k буде визначатись як: $k \cdot \vec{a}$. При $k > 0$ вектор зберігає напрямок, а при $k < 0$ змінює його на протилежний.

4. Лінійна комбінація векторів.

Вираз вигляду $m_1\bar{a} + m_2\bar{b}$, де m_1, m_2 – числа, а \bar{a}, \bar{b} – вектори, називається лінійною комбінацією.

Тепер розглянемо векторний простір та скалярний добуток векторів (властивості скалярного добутку).

Непорожня сукупність векторів M називається лінійним простором, якщо в ній задані операції складання векторів і множення їх на число, що підкоряються встановленим аксіомам:

- 1) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;
- 2) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;
- 3) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
- 4) $\bar{a} + (\bar{b} + c) = (\bar{a} + \bar{b}) + c$;
- 5) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;
- 6) $\alpha(\beta \cdot \bar{a}) = (\alpha \cdot \beta) \bar{a}$;
- 7) $(\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}$;
- 8) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \bar{a} + \alpha \bar{b}$.

Лінійним векторним простором називається сукупність вільних векторів.

Базис лінійного векторного простору це система лінійно незалежних векторів за допомогою якої можна представити будь-який вектор цього простору через їхню лінійну комбінацію.

$\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – це базис ЛВП.

Координати вектора, отриманого в результаті додавання, дорівнюють сумі відповідних координат початкових векторів

$$\bar{m} = (m_1, m_2), \bar{n} = (n_1, n_2)$$

$$\bar{m} + \bar{n} = m_1\bar{e}_1 + m_2\bar{e}_2 + n_1\bar{e}_1 + n_2\bar{e}_2 = (m_1 + n_1)\bar{e}_1 + (m_2 + n_2)\bar{e}_2$$

$$\bar{m} + \bar{n} = (m_1 + n_1, m_2 + n_2)$$

Щоб помножити вектор на скаляр потрібно кожен його координату помножити на цей скаляр.

$$\bar{m} = (m_1, m_2), \alpha\bar{m} = (\alpha m_1, \alpha m_2)$$

Для множення вектора на скаляр слід помножити кожен з його координат на даний скаляр

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2)$$

Для того, щоб знайти скалярний добуток для векторів \bar{a} і \bar{b} необхідно обчислити добуток модулів даних векторів та косинуса кута.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \alpha.$$

Тепер розглянемо метод координат на площині.

Система координат на площині — це відображення, яке кожній точці на площині ставить пару дійсних чисел $(x; y)$, що називаються її координатами. При цьому різним точкам відповідають різні пари чисел, і для кожної пари дійсних чисел $(x; y)$ на площині завжди існує точка, координати якої збігаються з цією парою.

Є різні системи координат. Будемо розглядати систему, що ввів Рене Декарт (француз).

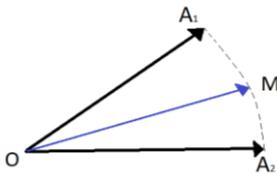


рис. 2.1.5

Афінним репером на площині є геометрична конструкція, що складається з точки, а також двох лінійно незалежних векторів (базисних).

Орієнтація площини безпосередньо пов'язана з тим, який є репер. Існують два типи орієнтації репера: додатньо орієнтований та від'ємно орієнтований.

Репер називається правим, якщо його координатні вектори розташовані так само, як великий і вказівний пальці правої руки. Лівим репером є такий, у якому координатні вектори e_1, e_2 розташовані аналогічно великому й вказівному пальцям лівої долоні.

Зміна орієнтації репера відбувається, якщо:

- координатні вектори поміняти місцями;
- один із координатних векторів замінити на протилежний.

Площина вважається орієнтованою, якщо на ній задано правий або лівий репер. Заміна одного з векторів на протилежний або перестановка координатних векторів змінює орієнтацію площини на іншу.

Тепер розглянемо ортонормовану систему координат.

Ортонормованим репером декартовий це є такий афінний репер в якого вектори координатні є ортогональними та одиничними.

$$R = \{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}; R' = \{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2\} \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1 \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$$

$R = \{0; i; j\}$ -так визначають ортогональний репер

$$|i| = |j| = 1; (i; j) = 0$$

Прямокутна декартова система координат визначається ортогональним репером.

Тепер розглядаємо основні властивості прямих, що належать площині.

Пряма, що проходить через певну точку, що має назву M_0 і яка є паралельною до деякого вектора \vec{a} буде називатися множиною таких точок M , що буде мати місце рівність $\overline{M_0M} = \vec{a} t + R$. Це буде тоді векторно-параметричне рівняння прямої. Початковою точкою M_0 може бути всяка точка на даній прямій.

Напрямним вектором \vec{a} може бути будьякий вектор, який задає напрям цій прямій. Тепер розглянемо канонічне рівняння прямої. Воно буде виглядати так:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}. \text{ Загальне рівняння буде мати дещо інший вигляд: } Ax + By + C = 0.$$

Якщо говоримо про рівняння, яке утворює пряму, яка двома точками є визначена, то маємо на увазі: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Далі, якщо маємо рівняння прямої

на Ox та Oy , то вигляд буде: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Якщо $a^2 + b^2 = 1$, то тоді рівняння буде називатися нормальним.

$$\text{Тоді: } x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Для того, щоб із загального рівняння перейти до нормального, необхідно помножити його на нормуючий множник, а саме: $N = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Тоді будемо мати:

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Наступні два рівняння називаються рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_0 = K(x - x_0), y = Kx + B.$$

Якщо говоримо про рівняння, коли є відомі координати нормального вектору, а також початкова точка, то тоді матимемо: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Тепер розглянемо відстань від точки до прямої.

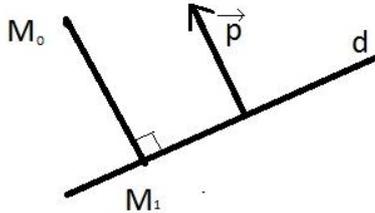


рис. 2.1.6

Відстанню від деякої т. M_0 до певної прямої d є довжина перпендикуляра, який спускається із цієї ж т. M_0 до прямої d : $\varphi(M_0; d) = |M_1; M_0|$;

$$\varphi(M_0; d) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \varphi(M_0; d) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho|$$

Тепер розглянемо, як можуть розміщуватись прямі.

Припустимо, що маємо дві прямі d_1 та d_2 .

$$\begin{cases} d_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ d_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Умовою перепендикулярності двох прямих буде - $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, паралельності - $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, а умовою, що прямі збігаються - $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Примітка: У випадку, якщо прямі є паралельними, їхні математичні рівняння можна подати у такому вигляді, що відрізняється лише значеннями вільних коефіцієнтів.

Тепер розглянемо кут між двома прямими.

На площині розглянемо дві прямі, що мають точку перетину O . У результаті їхнього перетину утворюються чотири кути, і кожен із них може вважатися кутом між цими прямими. Таким чином, знаючи величину одного кута, можна визначити й усі інші.

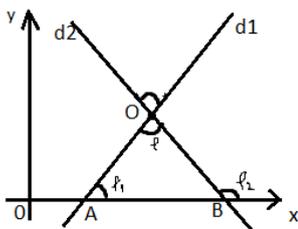


рис. 2.1.7

Тоді формулою знаходження відстані між двома паралельними прямими буде: $\varphi(d_1; d_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Тепер розглянемо лінії другого порядку на площині.

Першою лінією буде еліпс.

Спершу зрозуміємо означення еліпса: еліпсом називається множина таких точок на площині, для яких сума відстаней до двох певних заданих точок, які називаються фокусами, залишається сталою величиною, більшою за відстань між цими точками.

Інакше кажучи, еліпс є опуклою замкненою кривою. Задані точки, що фігурують в означенні називають фокусами. Позначимо їх через F_1 і F_2 , а відстань між фокусами приймемо рівною $2c$.

Розмістимо еліпс у декартовій системі координат так, щоб його фокуси лежали на одній із координатних осей. Нехай ця вісь буде віссю Ox .

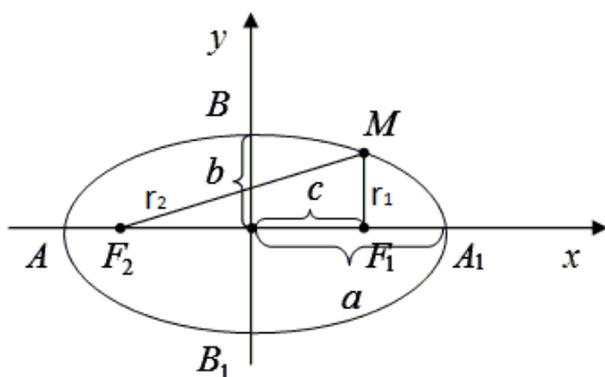


рис. 2.1.8

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – буде канонічним рівнянням еліпса, в якого a і b - пів осі.

Тоді робимо висновок, що еліпс поміщається в прямокутнику, що має розмір $2a \times 2b$.

Властивості еліпса:

1) Точка $M'(-x; -y)$ буде належати еліпсу, якщо перед тим відомо, що т. $M(x; y)$ точно належить лінії. Це говорить про те, що точка початку координат буде центром симетрії.

2) $M'(-x; -y)$, $M''(-x; y)$, $M'''(-x; -y)$ будуть також належати еліпсу.

Вершинами еліпса будуть точки, що є перетинами еліпсу і осей координат. У даної лінії є 4 вершини.

Ексцентриситетом еліпса є величина, що визначається, як відношення відстані між фокусами, що мають назву F_1 і F_2 до відстані між вершинами A_1 і A .

У ексцентриситету є певне позначення " \mathcal{E} " і визначається він за формулою
$$\mathcal{E} = \frac{\rho(F_1, F_2)}{\rho(A, A_1)}.$$

Проте маємо, що $\rho(F_1, F_2) = 2c$, то $\mathcal{E} = \frac{2c}{2a}$. В результаті отримуємо $\mathcal{E} = \frac{c}{a}$.

Ексцентриситет еліпса завжди менший за одиницю ($0 < e < 1$). Чим менше значення ексцентриситету, тим більше еліпс наближається до форми кола, тобто стає більш опуклим. Якщо $e = 0$, то еліпс перетворюється на коло, оскільки в цьому випадку фокуси збігаються, а відстань між ними дорівнює нулю.

Директрисою еліпса для заданого фокуса є пряма, яка проходить паралельно його малій осі і знаходиться з того ж боку, що й фокус, і розташована на відстані $\frac{a}{\mathcal{E}}$ від центра еліпса.

Якщо велика вісь еліпса лежить уздовж осі Ox , то рівняння директрис будуть такими: $x \pm \frac{a}{\mathcal{E}} = 0$.

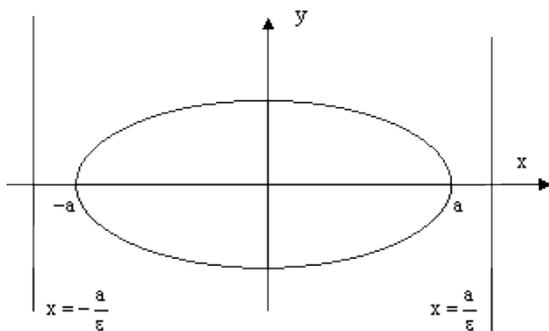


рис. 2.1.9

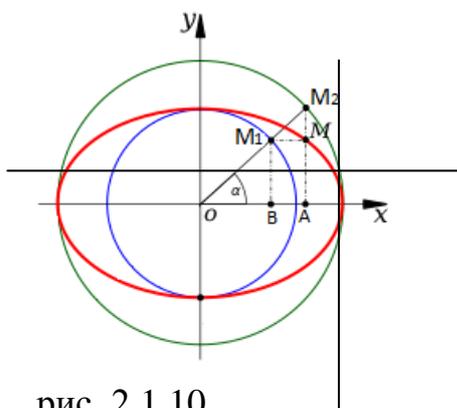


рис. 2.1.10

Параметричним рівнянням еліпса буде:
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \alpha \\ y = b \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Тепер розглянемо таку лінію, як гіпербола.

Гіперболою є множина точок на площині, де модуль різниці відстаней від кожної точки до двох заданих точок цієї площини залишається сталою величиною, що є меншою за відстань між самими точками. Закріплені точки є фокусами.

Позначимо через $2a$ модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до її фокусів. Далі виведемо канонічне рівняння гіперболи. Розташуємо гіперболу так, щоб її фокуси знаходилися на осі абсцис.

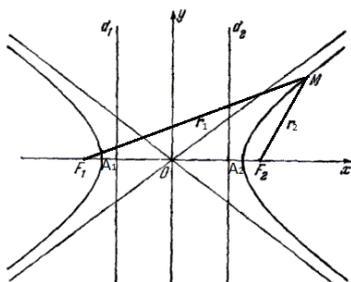


рис. 2.1.11

Рівнянням гіперболи буде:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розглянемо деякі її властивості:

1) Точка $M'(-x; -y)$ буде належати гіперболі. Центром симетрії цієї лінії буде початок координат.

2) $M''(-x; y)$, $M'''(x; -y)$ будуть теж належати даній лінії.

Уявною є та вісь, що не має перетину з гіперболою (Oy).

$\rho(F_1; F_2) = 2c$. $\rho(F_1; F_2)$ – фокальна відстань, а $\rho(A_1; A_2)$ – буде дійсною відстанню.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ – формула спряженої гіперболи.}$$

Ексцентриситет гіперболи — це величина, що визначається як відношення відстані між її фокусами F_1 і F_2 до відстані між вершинами гіперболи, а саме A_1 і A . Позначають його точкою "E".

$$\text{Формула на знаходження ексцентриситету: } \mathcal{E} = \frac{\rho(F_1, F_2)}{\rho(A_1, A_2)}.$$

$$\rho(F_1, F_2) = 2c;$$

$$\mathcal{E} = \frac{2c}{2a};$$

$$\mathcal{E} = \frac{c}{a}.$$

Ексцентриситет гіперболи завжди перевищує одиницю. Чим ближче його значення до одиниці, тим більше гіпербола наближається до дійсної осі.

Директрисою гіперболи відносно заданого фокуса називають пряму, яка розташована паралельно уявній осі, знаходиться з того ж боку, що й цей фокус, і віддалена від нього на відстань $\frac{a}{\mathcal{E}}$, де \mathcal{E} — ексцентриситет. Звідси виводять рівняння директрис.

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x \text{ – маємо рівняння асимптоти.}$$

Гіпербола, у якої півосі мають однакову довжину ($a = b$), називається рівносторонньою. Така гіпербола визначається лише одним параметром, і її канонічне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{Рівняння може виглядати наступним чином: } x^2 - y^2 = a^2.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – спряжена гіпербола також.}$$

Тепер розглянемо параболу.

Розглянемо на площині пряму лінію, яку називають директрисою, та певну точку F , що є фокусом. Вивчаючи всі точки площини, які знаходяться на

однаковій відстані від директриси і фокуса, отримаємо криву, відому як парабола.

Парабола — це множина точок площини, які знаходяться на однаковій відстані від заданої прямої (директриси) та фіксованої точки (фокуса).

Щоб отримати канонічне рівняння параболи, введемо прямокутну декартову систему координат і розташуємо фігуру таким чином, щоб її фокус лежав на одній із координатних осей, а саме Ox .

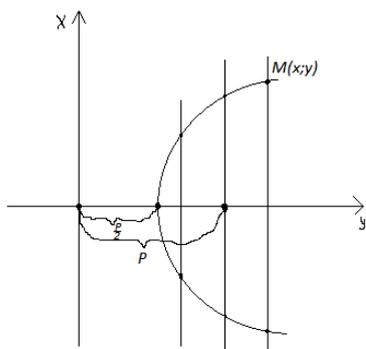


рис. 2.1.12

Тоді у параболи буде наступне рівняння: $y^2 = 2Px$.

Директриси гіперболи — це дві прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від її центру, де a — довжина півосі, а ε — ексцентриситет.

Маємо рівняння директриси $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Розглянемо деякі властивості, якщо точка $M(x; y)$ належить параболі:

1. Точка $M_1(-x; -y)$ не буде належати параболі. Помічаємо, що парабола не має центру симетрії.
2. Точка $M'(x; -y)$ належить параболі.
3. Точка $M''(-x; y)$ не належить параболі.

Ексцентриситет параболи — це число, яке визначається як відношення відстані від будь-якої точки на параболі до фокуса до відстані цієї ж точки до директриси. Це відношення завжди дорівнює 1, тому ексцентриситет параболи постійно рівний 1.

Розглянемо рівняння $\varepsilon = \frac{\rho(F;M)}{\rho(M;d)} \Rightarrow E = 1$.

Розглянемо рівняння еліпса, параболи та гіперболи у системі координат, що називається полярній $\rho = \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \cos \alpha}$.

Тоді розберемо, що ρ - полярний радіус; ε - ексцентриситет; α - полярний кут.

Якщо ексцентриситет є більшим за одиницю, то маємо рівняння гіперболи, якщо менше одиниці, тоді отримуємо рівняння еліпса і тоді при рівності ексцентриситета одиниці буде рівняння параболи.

Лінією другого порядку, що належить площині називають таку множину точок, координати яких у декартовій системі відповідають рівнянню такого вигляду:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

Центром лінії другого порядку, заданої загальним рівнянням, називають точку, відносно якої лінія є симетричною, тобто при відображенні відносно цієї точки лінія збігається сама із собою.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ буде центром певної лінії другого порядку, якщо будуть виконуватись умови:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

2.2. Теоретичні засади змісту навчальних медіаматеріалів курсу «Аналітична геометрія в просторі».

Аналітична геометрія в просторі — це розділ математики, що вивчає геометричні об'єкти (точки, прямі, площини, поверхні) у тривимірному просторі за допомогою координат та алгебраїчних методів. Вона використовує декартову систему координат для визначення положення точок у просторі та рівнянь для опису геометричних фігур. Основні поняття включають вектори, скалярний і векторний добутки, рівняння площини та прямої, а також задачі на відстані, кути та перетин фігур.

Афінна система координат у просторі визначається вибором початкової точки (афінного початку) та набору взаємно незалежних векторів, які формують базис. У цій системі будь-яка точка простору описується як лінійна комбінація

базисних векторів із відповідними координатами. Такий підхід активно використовується в геометрії, фізиці та комп'ютерній графіці для моделювання об'єктів і виконання перетворень у тривимірному просторі.

Афінний репер у просторі — це геометрична конструкція, що складається з однієї точки (початкової точки репера) і трьох лінійно незалежних векторів, які утворюють базис. Такий репер дозволяє описувати положення будь-якої точки простору як лінійну комбінацію базисних векторів із координатами відносно вибраного початку.

Точка O буде початком репера, а координатними векторами будуть: e_1, e_2, e_3 .

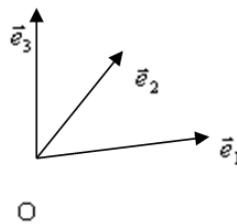


рис. 2.2.1

Перетворення афінного репера — це процес переходу від одного репера (початкового) до іншого (нового). Якщо в цьому переході змінюються як початкова точка репера, так і базисні вектори, таке перетворення називається **загальним**. У випадку, коли змінюються лише базисні вектори, маємо справу із **заміною координатних векторів**.

Матриця $c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$ є перехідною матрицею до R' від R .

Формулами перетворення будуть формули:
$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0 \end{cases}$$

Теорема: Три вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ будуть

компланарними, тоді і тільки тоді, коли буде виконуватись умова:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Нехай у векторному просторі задано два базиси: B_1 і B_2 .

Два базиси векторного простору B_1 і B_2 називаються:

• **однаково орієнтованими**, якщо визначник матриці переходу від B_1 до B_2 більший за нуль ($\det > 0$).

• **протилежно орієнтованими**, якщо визначник матриці переходу менший за нуль ($\det < 0$).

Векторний простір, у якому задано афінний репер, зазивається **координатним простором**.

Репер вважається:

- **Додатньо орієнтованим**, якщо його базисні вектори утворюють додатньо орієнтований базис.

- **Від'ємно орієнтованим**, якщо базисні вектори утворюють від'ємно орієнтований базис.

- **Правий репер** (додатньо орієнтований): розташування координатних векторів відповідає положенню великого, вказівного та середнього пальців правої руки, які перпендикулярні один до одного.

- **Лівий репер** (від'ємно орієнтований): координатні вектори розташовані відповідно до великого, вказівного та середнього пальців лівої руки

Ортонормована (прямокутна декартова) система координат — це афінна система координат, у якій:

- Координатні вектори мають одиничну довжину,
- Вектори взаємно ортогональні.

Довжину вектора можна знайти наступним чином: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ - формула знаходження відстані між двома точками.

Векторним це вектор, що позначається наступним чином $[\vec{a}, \vec{b}]$. Для нього повинні виконуватись умови такі:

1. $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}), 0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi;$
2. $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b};$
3. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ і $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}])$ - є однаково орієнтованими.

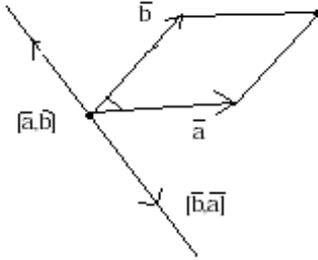


рис. 2.2.2

Теорема. Якщо є вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тоді векторний добуток буде обчислюватись за формулою: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & | & a_3 & a_1 & | & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & | & b_3 & b_1 & | & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Розглянемо властивості векторного добутку:

1. Закону комутативності не виконується.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

2. Винесення сталої за знак векторного добутку.

$$[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}], \quad [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$$

3. Дистрибутивний закон.

$$[\vec{a}_1 + \vec{a}'_1, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}'_1, \vec{b}].$$

4. Якщо один із множників у векторному добутку дорівнює нулю, то результат також дорівнює нульовому вектору. Це випливає з властивостей векторного добутку $\vec{a} = 0, [\vec{a}, \vec{b}] = 0$.
5. Векторний добуток ненульових двох векторів є нульовим вектором тоді і лише тоді, коли ці вектори є колінеарними.

Векторний добуток корисний при:

1. Знаходженні кута між векторами: $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}]|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.
2. Доведенні, що вектори колінеарні: $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.
3. Знаходження площі паралелограма: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

4. Знаходженні площі трикутника: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.
5. Обчисленні моменту сили.

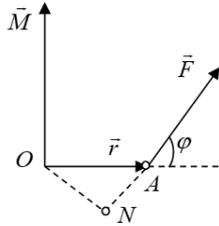


рис. 2.2.3

Мішаним добутком є стала.

Теорема: Якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, то знаходиться мішаний добуток за формулою $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Властивості

- $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = -\vec{a}[\vec{c}, \vec{b}]$.
- $(\alpha \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]) = \alpha(\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}])$.
- Мішаний добуток буде менш, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лівою (правою).
- Якщо будь-який вектор дорівнює нулю, то і мішаний добуток = 0.
- $(\vec{a} + \vec{a}')[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] + \vec{a}'[\vec{b}, \vec{c}]$.
- Мішаний добуток є 0 тоді і лише тоді, як вектори компланарні.
- Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, що є побудований на цих векторах.

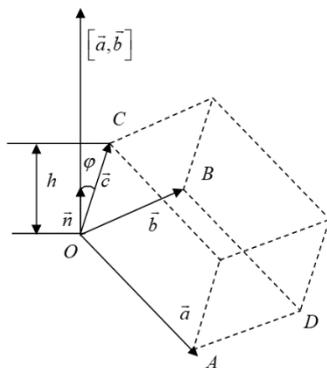


рис. 2.2.4

Площина, що проходить через M_0 і є паралельною до векторів a і b є сукупністю точок M простору. Для таких точок виконується умова:

$$\overline{M_0M} = u \cdot \bar{a} + v \cdot \bar{b}, u, v \in R.$$

Площина позначається наступним чином:

$$\Pi = [M_0, \bar{a}, \bar{b}] \text{ або } \Pi = \{M | \overline{M_0M} = u\bar{a} + v\bar{b}, u, v \in R$$

$\overline{M_0M} = u\bar{a} + v\bar{b}, u, v \in R$ – будемо мати векторно-параметричне рівняння.

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + vb_1 \\ y - y_0 = ua_2 + vb_2 \\ z - z_0 = ua_3 + vb_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases} - \text{маємо параметричні}$$

рівняння площини.

Загальне рівняння площини виглядає наступним чином: $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 - \text{рівняння площини, яке визначається трьома}$$

точками.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \text{маємо рівняння площини на осях координат у відрізках.}$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 - \text{нормальне рівняння площини.}$$

Нехай маємо:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$$\text{Умова перпендикулярності площин: } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} - \text{умова паралельності;}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} - \text{площини збігаються.}$$

Формула на знаходження кута між двома площинами:

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Відстанню від точки M_0 до площини Π називається довжина перпендикуляра, проведеного з точки M_0 до цієї площини Π .

Для знаходження відстані від точки до площини користуємось

$$\varphi(M_0\Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Нехай маємо: $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$
 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Відстанню між паралельними площинами називається довжина перпендикуляра, проведеного від будь-якої точки однієї площини до іншої.

Нехай маємо точку $M_0(0,0, -\frac{D_1}{C_1}) \in \Pi_1$

$$\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M_0, \Pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Пряму, що переходить через M_0 і є паралельною вектору \bar{a} називають сукупність цих точок M простору, таких, для яких виконується умова:

$\overline{M_0M} = t \cdot \bar{a}$, де t - параметр. Точка M_0 – **початкова**, а \bar{a} – напрямний вектор.

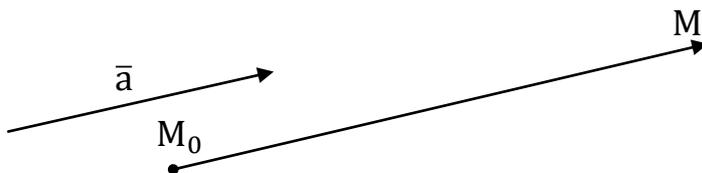


рис. 2.2.5

Рівняння, написане вище, є векторно-параметричним.

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1t, \\ y - y_0 = a_2t, \\ z - z_0 = a_3t, \end{cases} = \begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t, \\ z = z_0 + a_3t, \end{cases} \text{ – параметричне рівняння прямої.}$$

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}, \text{ – маємо канонічне рівняння прямої.}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{x_2-x_1} \text{ – буде рівнянням прямої за двома точками.}$$

$$\begin{cases} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \text{ – загальне рівняння прямої.}$$

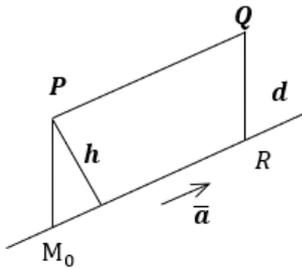


рис. 2.2.6

Для знаходження відстані від точки до прямої користуємось формулою:

$$\rho(P, d) = \frac{|[M_0P, \bar{a}]|}{|\bar{a}|}.$$

Розглянемо тепер дві прямі $d_1 = [M_0^1, \bar{a}]$, $d_2 = [M_0^2, \bar{b}]$,

$$M_0^1 = (x_0^1, y_0^1, z_0^1), \bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), M_0^2 = (x_0^2, y_0^2, z_0^2).$$

Прямі d_1 і d_2 можуть бути розташовані в одній площині або в різних площинах.

Припустимо, що прямі, які перетинаються, є перпендикулярними, тоді:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 - \text{умова перпендикулярності двох прямих.}$$

Якщо прямі є паралельними, то і напрямні вектори цих прямих будуть колінеарними:

$$\text{Умовою паралельності прямих є } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Тепер розглянемо кут між двома прямими.

Кут між двома прямими d_1 і d_2 визначається як кут між прямими, які проходять через точку O і є паралельними до d_1 і d_2 . Таким чином, цей кут можна визначити як кут між напрямними векторами цих прямих. Тоді формула матиме наступний вигляд:

$$\cos \gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

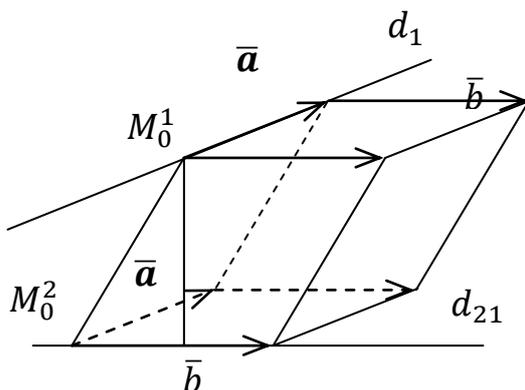


рис. 2.2.7

Для того, щоб знайти відстань між двома мимобіжними прямими варто дотримуватись формули: $\rho(d_1, d_2) = \frac{(M_0^1 M_0^2, \bar{a}, \bar{b})}{|[a, b]|}$.

Нехай тепер маємо площину:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

А також пряму:

$$d: \{x = x_0 + ta_1; y = y_0 + ta_2; z = z_0 + ta_3\}.$$

Тоді розглянемо деякі умови:

- 1) $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{b_1} = \frac{C}{c_1}$ – умова того, що пряма і площина є перпендикулярні.
- 2) $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ – умова паралельності прямої і площини.

Кут між ортогональною проекцією деякої прямої на площину і самою ж прямою називається кутом між даною прямою і площиною Π .

Нормальний вектор: $\bar{n} = (A, B, C)$, а напрямний: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Отже кут між прямою d і площиною Π шукаємо за формулою: $\sin \varphi =$

$$\frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

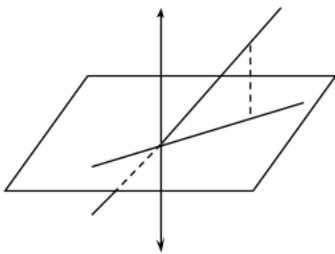


рис. 2.2.8

Тепер розглянемо пучок площин.

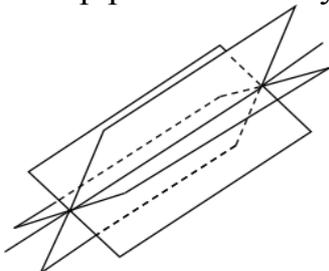


рис. 2.2.9

Сукупність всіх площин у просторі називається пучком площин. Вісь пучка – це пряма, через яку проходять всі задіяні площини. Позначення: $\Pi(d)$. Нехай вісь пучка буде задаватись, як лінія, що є перетином двох площин.

$$d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} (4)$$

Матимемо рівняння пучка площин: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \kappa(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$.

Якщо всі паралельні площини до певної площини, тоді маємо пучок паралельних площин.

Якщо множини проходять через одну точку, то маємо в'язку площин.

Дана точка буде **центром в'язки.**, якщо центр в'язки M_0 має координати (x_0, y_0, z_0) , то рівняння тоді буде записуватись так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Центр в'язки може бути заданий, як перетин площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Тоді будемо мати:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \alpha(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \beta(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0.$$

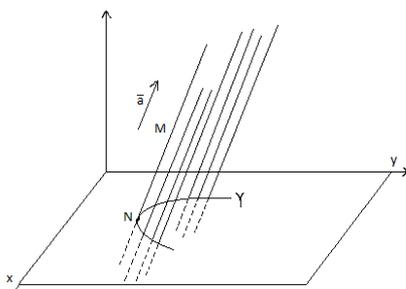
Якщо маємо сукупність прямих та площин, що проходять через одну точку, тоді маємо в'язку прямих і площин у просторі.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - центр в'язки. Тоді матимемо:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

Якщо маємо сукупність площин, що паралельні до певної прямої, тоді маємо в'язку площин паралельних прямих. Сукупність площин та прямих, що проходять через одну точку називається в'язкою прямих і площин.

Тепер розглянемо циліндричні та канонічні поверхні. Нехай маємо площину Π і їй належить деяка лінія 2-го порядку. Тоді \vec{a} - вектор ненульовий до даної



площини.

рис. 2.2.10

Цей вектор задає пучок прямих, паралельних до вектора a . Серед цих прямих існують такі, що перетинають площину Π . У просторі множина точок, через які проходять прямі пучка, що перетинають лінію і утворюють поверхню, називається твірною циліндричної поверхні. Нехай лінія другого порядку задається в площині загальним рівнянням в афінній системі координат. Це рівняння має наступний вигляд: $f(x, y) = 0$;

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

Тоді загальне рівняння циліндричної поверхні: $f = \left(x - \frac{a_1}{a_3}z, y - \frac{a_2}{a_3}z\right) =$.

- Якщо напрямною є еліпс, утворюється еліптичний циліндр.
- У разі напрямної у вигляді параболи отримуємо параболічний циліндр.
- Якщо напрямною виступає гіпербола, формується гіперболічний циліндр.
- Коли напрямною є дві прямі, що перетинаються, циліндрична поверхня складається з двох площин, які перетинаються.
- Якщо напрямними є дві паралельні прямі, циліндрична поверхня утворюється з двох паралельних площин.

Тепер знайдемо канонічне рівняння циліндричної поверхні.

Припустимо, що в просторі задано ортонормовану систему координат, і напрямна циліндричної поверхні описується канонічним рівнянням, причому твірні паралельні одній із координатних осей. У такій ситуації канонічне рівняння напрямної одночасно є канонічним рівнянням циліндричної поверхні.

- Якщо напрямна задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, це відповідає еліптичному циліндру.
- Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ описує гіперболічний циліндр.
- Коли напрямна описується рівнянням $y^2 = 2px$, формується параболічний циліндр, який торкається осі аплікату.

• Якщо напрямну визначає рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ отримуємо дві площини, які перетинаються.

• У випадку, коли напрямна задана рівнянням $x^2 = a^2$, утворюються дві паралельні площини.

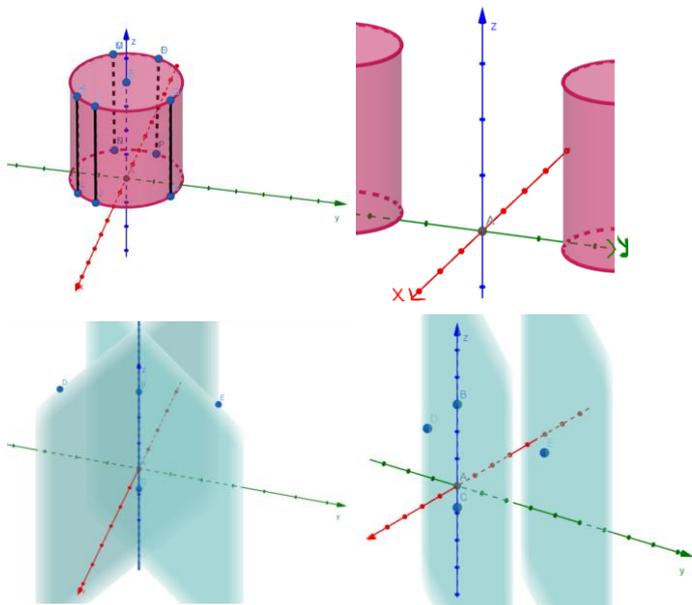


рис. 2.2.11

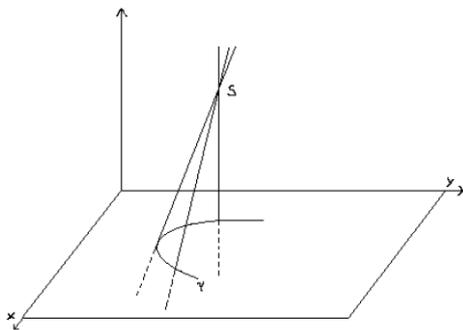


рис. 2.2.12

Поверхня другого порядку визначається як множина точок у просторі, що лежать на прямих пучка з центром S , які перетинають площину у точках лінії γ . Лінію γ називають напрямною конічної поверхні, точку S — її вершиною, а пряму з пучка, яка утворює поверхню, називають твірною.

Тоді загальне рівняння поверхні канонічної буде виглядати так: $f(x_1, 0 + \frac{(x-x_1,0)}{(z-z_1,0)(h-z_1,0)}, y_1, 0 + (\frac{(y-y_1,0)}{(z-z_1,0)(h-z_1,0)}) = 0$.

Рівняння конуса тоді: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0$.

При випадку, що напрямною є еліпс, матимемо канонічне рівняння конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Нехай маємо пряму d та лінію γ .

Поверхня, яка утворюється при обертанні лінії γ навколо прямої d (що виконує роль осі), є поверхнею обертання. Пряму d буде називатись віссю обертання, а лінію γ — твірною.

Якщо провести переріз поверхні обертання площиною, що проходить через вісь обертання, отримаємо лінію, яка має назву - меридіана. У разі перетину поверхні площиною, перпендикулярною до осі, виникає лінія, що отримала назву паралелі.

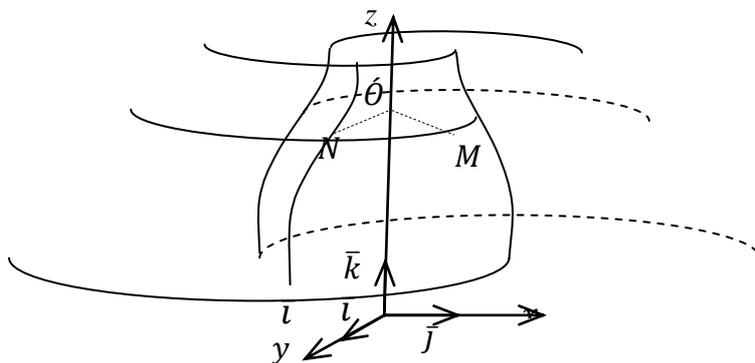


рис. 2.2.13

Для того, щоб знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії навколо OZ , варто скористатись рівнянням: $x^2 + y^2 = f^2(z)$.

Якщо навколо осі OX тоді матимемо: $y^2 + z^2 = f_1^2(x)$, якщо навколо OY , тоді: $x^2 + z^2 = f_2^2(y)$.

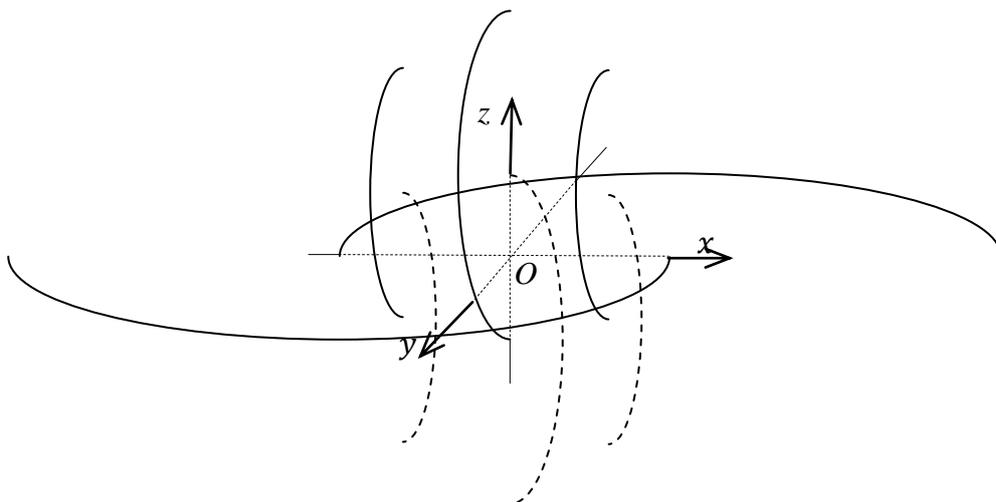


рис. 2.2.14

Поверхня Φ , утворена обертанням еліпса навколо однієї осі, називається еліпсоїдом обертання.

Якщо еліпс обертається навколо більшої осі, отриманий еліпсоїд називають витягнутим. У випадку обертання навколо меншої осі утворюється стиснутий еліпсоїд. Канонічне рівняння еліпсоїда обертання виглядає наступним чином:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Величини a і c – півосі еліпсоїда. Еліпсоїд обертання є фігура обмежена і всі точки його лежать всередині паралелепіпеда з розміром $2a, 2b, 2c$

Величини a і c є півосями еліпсоїда. Еліпсоїд обертання — це обмежена фігура, всі точки якої знаходяться всередині паралелепіпеда з розмірами $2a, 2b, 2c$.

Поверхня, що виникає при стисненні еліпсоїда обертання до площини, що проходить через вісь обертання, буде називатись трьохосним еліпсоїдом. Для того щоб знайти його канонічне рівняння, варто здійснити стиснення простору.

Перетворення простору, що утворюється стисненням його з коефіцієнтом k задовільняє такі умови:

- 1) т. P переходить у т. \dot{P} ;
- 2) $\overline{M\dot{P}} = k\overline{MP}$;
- 3) $\dot{x} = x; \dot{y} = y; \dot{z} = kz$ – стиснення по осі OZ .

Канонічне рівняння еліпсоїда виглядає наступним чином: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Нехай в площині XOZ маємо гіперболу, яка задана рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

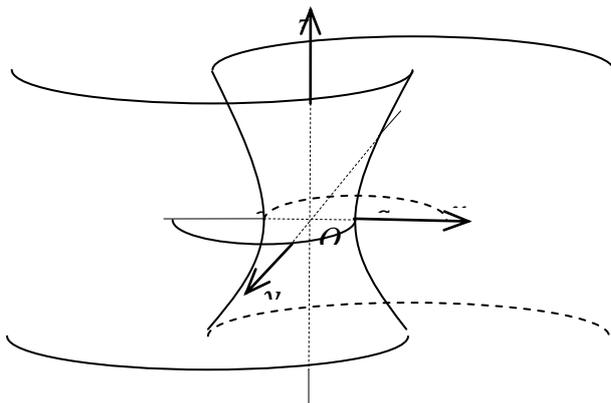


рис. 2.2.15

Якщо обертаємо її навколо уявної осі, то будемо мати **однопорожнинний гіперболоїд обертання**.

Однопорожнинний гіперболоїд обертання - це поверхня, яка утворюється, коли гіпербола обертається навколо її уявної осі. Канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Розглянемо властивості однопорожнинного гіперболоїда обертання:

1. Поверхня не має меж.
2. Осі координат є його осями симетрії.
3. Площини координат виступають площинами симетрії.
4. Початок координат є центром симетрії цієї поверхні.

Вершини даної поверхні – це точки, в яких перетинаються осі симетрії із поверхнею. Осями симетрії є вісь абсцис та ординат. Вони перетинають поверхню в точках: $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$. Осі симетрії OX і OY називаються дійсними осями. Тоді вісь аплікату є уявною віссю.

Числа a і b - дійсні півосі однопорожнинного гіперболоїда, тоді як c – **уявна піввісь**.

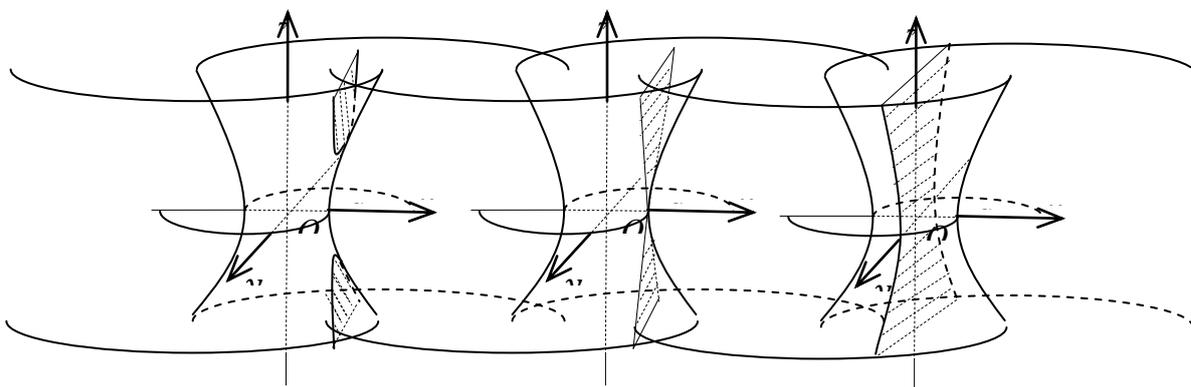


рис. 2.2.16

Якщо площина симетрії, що перпендикулярна до уявної осі, перерізає однопорожнинний гіперболоїд, то отримаємо горловий еліпс.

Якщо поверхня утворена тим, що гіпербола обертається навколо своєї дійсної осі, то маємо двопорожнинний гіперболоїд обертання.

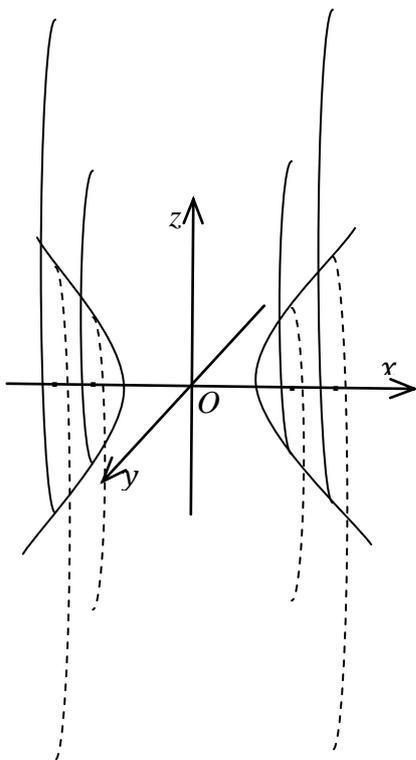


рис. 2.1.17

Канонічне рівняння двох порожнинного гіперолоїда обертання виглядає

$$\text{наступним чином: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо здійснити стиснення вздовж осі OY , то отримаємо канонічне рівняння

$$\text{двохпорожнинного гіперолоїда, яке має вигляд: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

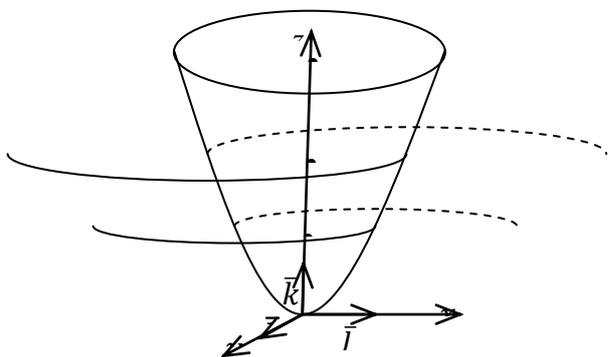


рис. 2.2.18

Якщо поверхня, утворилась, коли параболу обернули навколо її осі, то отримали параболоїд обертання.

Для знаходження канонічного рівняння параболоїда обертання розглянемо параболу, задану в площині XOZ рівнянням $x^2 = 2pz$, де OZ є віссю параболу. Це рівняння є канонічним рівнянням параболу.

При обертанні цієї параболоїди навколо осі OZ , отримаємо канонічне рівняння параболоїда обертання. Для цього можна ввести координати y , оскільки обертання не змінює значення y . Тому канонічне рівняння параболоїда обертання матиме вигляд: $x^2 + y^2 = 2pz$.

Це рівняння описує параболоїд обертання, де p — параметр, що визначає форму параболоїди. Канонічне рівняння параболоїда обертання має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z$, при $p > 0$, в інакшому випадку буде: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = -2z$.

Розглянемо властивості:

- 1) Обмеженість площиною XOY з однієї сторони;
- 2) OZ - вісь симетрії;
- 3) XOZ , YOZ - площини симетрії;
- 4) Вершина – це точка, що являється перетином осі параболоїда з поверхнею

Поверхня, що є утворена, коли параболоїд обертання стиснули до площини і яка проходить через вісь обертання називається еліптичним параболоїдом.

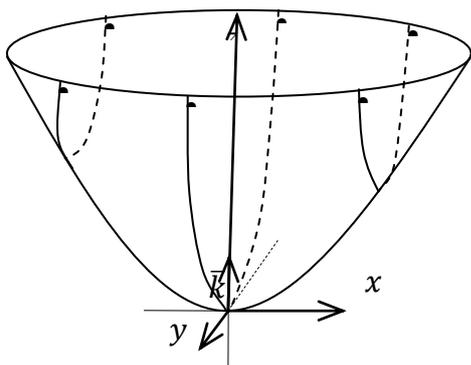


рис. 2.2.19

Для знаходження канонічного рівняння еліптичного параболоїда, спочатку здійснимо стиснення простору по осі OY до площини XOZ , де $y' = ky$, а k — коефіцієнт стиснення.

Тепер, рівняння еліптичного параболоїда обертання в канонічній формі має вигляд: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{k^2 a^2} = 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$, $b = ka$.

Розглянемо ще один варіант отримання еліптичного параболоїда. Нехай маємо дві параболы, де одна з них є рухомою в площині YOZ , а інша: нерухома в площині XOZ . Тоді рухаємо параболу, що належить YOZ , таким чином, що вершина знаходиться на нерухомій параболі і в той час, площини параболы є паралельними YOZ . Таким чином отримаємо **еліптичний параболоїд**.

Розглянемо тепер властивості.

- 1) Обмеженість площиною XOY .
- 2) Елементи, що належать групі симетрій: вісь OZ і 2 площини XOZ та YOZ .
- 3) При перерізі площиною $z = h$ маємо кілька випадків:
 - A. $h > 0$ – еліпс;
 - B. $h = 0$ – точка;
 - C. $h < 0$ – порожня множина \emptyset .

Нехай маємо параболы, що задаються рівняннями: $x^2 = 2pz$ і $y^2 = 2qz$; $q < 0$, $p > 0$.

Тоді параболы, яка належить площині XOZ є нерухомою, а та, що в YOZ – рухома. Параболы рухається таким чином, що її вершина на параболі $x^2 = 2pz$, площина є паралельною YOZ .

Тоді будемо мати гіперболічний параболоїд, який матиме канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad p = a^2, \quad q = -b^2.$$

Розглянемо властивості:

- 1) Поверхня не має меж.
- 2) Вісь симетрії OZ та XOZ і YOZ належать групі симетрій.
- 3) При перерізі площиною $z = h$ маємо кілька випадків:
 - a) $h > 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$, $\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1$ - гіпербола;
 - b) $h = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ - дві прямі, які перетинаються;
 - c) $h < 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2|h|$, $\frac{x^2}{2|h|a^2} - \frac{y^2}{2|h|b^2} = 1$ - гіпербола.
- 4) При перерізі площиною $x = h$ маємо параболу.
- 5) При перерізі площиною $y = h$ маємо параболу.

Розділ 3. Розробка відеоуроків для дистанційного вивчення аналітичної геометрії в просторі

3.1. Розробка відеоуроків на тему «Афінна система координат у просторі» та «Векторний і мішаний добуток векторів» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема відеоуроку: Афінна система координат у просторі.

Тип відеоуроку: вивчення нового матеріалу.

Вид відеоуроку: скрінкаст

Мета відеоуроку:

навчальна: ознайомити учнів з поняттям афінної системи координат у просторі, її основними елементами та властивостями; навчити визначати координати точок у тривимірному просторі за допомогою афінної системи координат;

розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів; розвивати логічне та просторове мислення через вирішення задач на перетворення та аналіз афінних координат сприяти розвитку обчислювальних навичок;

виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нової інформації, інтерес до навчання та вивчення аналітичної геометрії у просторі.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

Всім привіт! Тема даного відеоуроку «Афінна система координат у просторі».

Отож, почнемо!

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми відеоуроку.
2. Мотивація вивчення теми відеоуроку.

3. Вивчення теоретичного матеріалу.

III етап. Обговорення теоретичних питань (10 – 30 хв.)

Обговорення теоретичних питань відбувається за планом:

- Загальне поняття системи координат у просторі.
- Поняття афінного репера (афінної системи координат)
- Координати точки в афінній системі.
- Основні афінні задачі.
- Ортонормована (прямокутна) система координат. Основні метричні задачі.
- Орієнтація простору. Два види реперів.

IV етап. Підбиття підсумків даного заняття (1 – 2 хв.)

1. Підведення підсумків відеоуроку.
2. Підсумовування основної інформації.
3. Залучення до самостійного опрацювання матеріалу та подальшого

вдосконалення навичок аналітичної геометрії в просторі.

«Шановні учні, студенти та всі, хто прагне до знань! Сьогодні ми провели урок з аналітичної геометрії в просторі за темою «Афінна система координат у просторі». Сподіваюсь, ви зрозуміли та запам'ятали основні поняття і приклади, які ми розглянули. Перегляньте вивчений матеріал, закріпіть знання і пам'ятайте про значення аналітичної геометрії у повсякденному житті. Якщо у вас є запитання, не вагайтеся їх ставити – ми з радістю відповімо! Дякую за вашу увагу, до зустрічі на наступному відеоуроці!»

V етап. Повідомлення домашнього завдання (1 – 2 хв.)

Повідомлення про те, що відеоурок можна переглянути повторно для кращого засвоєння знань.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

При розробленні теоретичного заняття були використані такі засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2) та програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1).



Рис. 3.1.1

Спочатку в глобальній мережі Інтернет було знайдено відео для «Інтро» та відредаговано в мобільному додатку.

Тоді в програмі «Microsoft PowerPoint» було почато розроблення слайдів, а саме: наповнення теоретичним матеріалом, який міститься у методичці із лекціями, а саме в темі «Афінна система координат у просторі», оформлення у відповідному стилі. Фон для презентації взятий у стилі математики, тобто: клітинка (рис. 3.1.2).



Рис. 3.1.2

За допомогою стандартної офісної програми, було розроблено презентацію, що містила в собі 14 слайдів.

На першому слайді міститься тема даного відеоуроку та тематичний рисунок крейди (рис. 3.1.2).

Другий та третій слайди містять інформацію перших трьох пунктів, а саме: «Загальне поняття системи координат у просторі, поняття афінного репера, координати точки в афінній системі» (рис. 3.1.3).

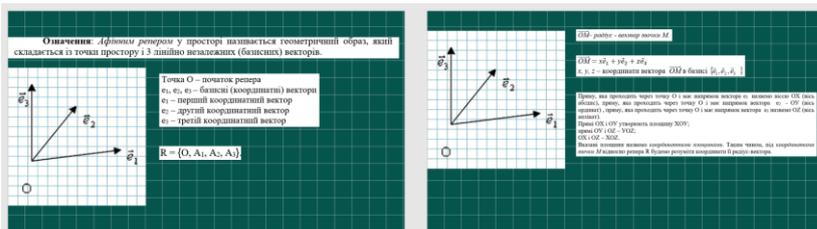


Рис. 3.1.3

В тому ж стилі на четвертому та п'ятому слайдах розміщено умови основних афінних задач, розв'язання яких відбувається при записі відеоуроку.

На слайдах під номерами 6 та 7 ми маємо інформацію щодо перетворення афінного репера.

Восьмий, дев'ятий та десятий слайди вміщують теорему, деякі означення та інформацію про ортонормовану систему координат.

На чотирьох останніх слайдах знаходяться умови основних метричних задач, розв'язання яких відбувається при записі відеоуроку.

Далі за допомогою програми «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1) було здійснено запис екрану, де відбувався показ презентації. Графічний планшет дав змогу швидко та легко здійснювати письмові пояснення. Звук та відеосупровід записувався одночасно (рис 3.1.4).

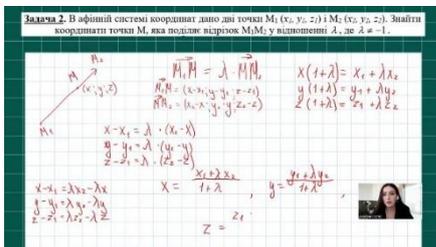


Рис. 3.1. 4

Після того запис було конвертовано в формат «mp4».

В мобільному застосунку «Inshot» дане відео, а також інтро, було об'єднано в один проект та відредаговано (рис. 3.1.5).

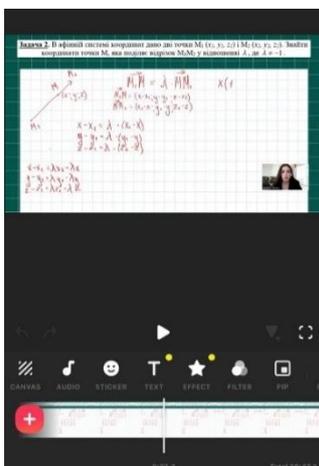


Рис. 3.1.5

Після того проект було експортовано у формат «mp4».

Отож, отримали відеоурок, який сміливо можна задіювати у процес вивчення даної теми.

Розробка практичного відеоуроку на тему «Афінна система координат у просторі» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Афінна система координат у просторі.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття афінної системи координат у просторі, систематизувати про основні елементи та властивості; навчити користуватись координатами точки у просторі за допомогою афінної системи координат на практиці;

розвивальна: розвивати творчі здібності учнів; розвивати логічне та просторове мислення через розв'язування задач на перетворення та аналіз афінних координат сприяти розвитку обчислювальних навичок;

виховна: сприяти позитивному ставленню до вивчення цікавого нового матеріалу, бажанню до вивчення аналітичної геометрії у просторі.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На даному етапі демонструється короткий ролик, що не несе змістового грузу, а відповідає за налаштування глядача на роботу. Після того ментор вітається із аудиторією і повідомляє тему практичного заняття.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Цей етап включає проговорення цілей заняття та плану. Також повторення короткого теоретичного матеріалу, що знадобиться при розв'язуванні задач.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються наступні задачі:

1. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$. Знайдіть довжину його медіани, якщо вона проведена з вершини A .

Розв'язання:

Зобразимо рисунок.

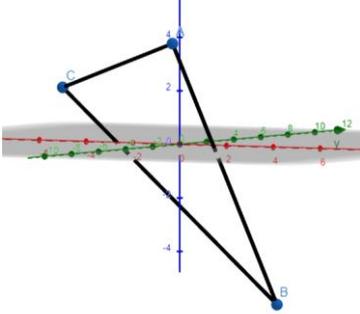


рис. 3.1.6

Нехай AE – це медіана даного трикутника. Знайдемо тоді точку E . Для цього скористаємось формулами поділу відрізка у відношенні.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Так, як медіана ділить протилежну сторону на дві рівні частини, то точку шукатимемо за наступними формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Будемо мати:

$$x = \frac{3 + (-5)}{2}, \quad y = \frac{2 + 0}{2}, \quad z = \frac{-6 + 2}{2};$$

$$x = \frac{-2}{2}, \quad y = \frac{2}{2}, \quad z = \frac{-4}{2};$$

$$x = -1, \quad y = 1, \quad z = -2.$$

Тоді матимемо $E(-1; 1; -2)$. Тепер знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AE}(-1 - 2; 1 - (-1); -2 - 4)$. $\overrightarrow{AE}(-3; 2; -6)$.

Тепер знайдемо довжину вектора. Для цього скористаємось формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Будемо мати: $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$.

Отже, довжина медіани дорівнює 7 од.

2. Відомі 3 точки паралелограма $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -4)$, $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати, які має точка D .

Розв'язання:

Побудуємо 3 точки та зобразимо рисунок.

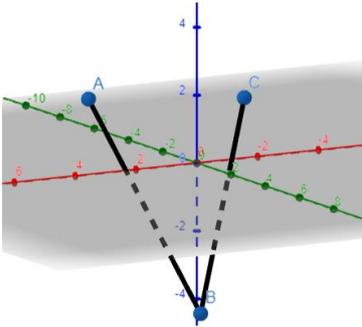


рис. 3.1.7

Знайдемо точку перетину діагоналей. Так, як в паралелограмі діагоналі діляться навпіл, то точку O знайдемо за формулою:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Будемо мати:

$$x = \frac{3-1}{2}, \quad y = \frac{-1+1}{2}, \quad z = \frac{2+2}{2}.$$

$$x = \frac{2}{2}, \quad y = \frac{0}{2}, \quad z = \frac{4}{2}.$$

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2.$$

Діагональ BD теж ділиться точкою O навпіл, тож ми можемо, використавши формулу поділу відрізка навпіл, записати рівняння:

$$1 = \frac{1+x}{2}, \quad 0 = \frac{2+y}{2}, \quad 2 = \frac{-4+z}{2}.$$

З рівнянь отримаємо координати точки $D(1; -2; 8)$. Поставимо точку і отримаємо наступний рисунок.

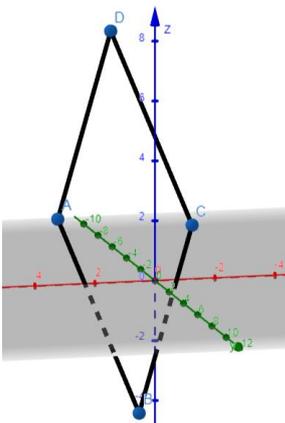


рис. 3.1.8

3. Відомі 3 точки трикутника $M(1; -1; -3)$, $N(2; 1; -2)$, $K(-5; 2; -6)$.
Знайдіть довжину бісектриси, проведеної із точки M .

Розв'язання:

Побудуємо 3 точки та зобразимо рисунок.

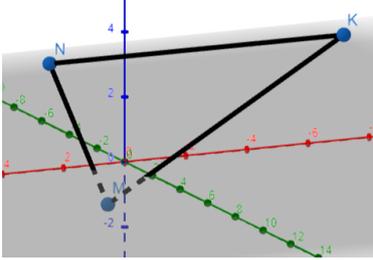


рис. 3.1.9

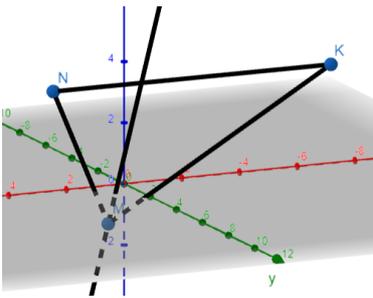


рис. 3.1.10

Знайдемо точку перетину бісектриси з протилежною стороною. Для цього необхідно скористатись властивістю, яка говорить, що бісектриса поділяє протилежну сторону відрізки, які пропорційні сторонам, що прилягають.

Запишемо відношення:

$$\frac{MN}{MK} = \frac{NE}{EK}, \text{ де } E \text{ – точка перетину бісектриси із стороною.}$$

$$\text{Знайдемо довжину } MN: \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Знайдемо довжину } MK: \sqrt{(-5-1)^2 + (2-(-1))^2 + (-6-(-3))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}.$$

Тоді $\frac{MN}{MK} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{6}{54}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Отже, $\frac{NE}{EK} = \frac{1}{3}$. Робимо висновок, що точка E поділяє сторону NK у відношенні $\frac{1}{3}$.

Тож можемо знайти координати точки E за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \text{ де } \lambda = \frac{1}{3}.$$

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3}(-5)}{1 + \frac{1}{3}}, \quad y = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 2}{1 + \frac{1}{3}}, \quad z = \frac{-2 + \frac{1}{3}(-6)}{1 + \frac{1}{3}};$$

$$x = \frac{2 - \frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}, \quad y = \frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}, \quad z = \frac{-2 - 2}{\frac{4}{3}};$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}, \quad y = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}, \quad z = \frac{-4}{\frac{4}{3}}; \quad x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{5}{4}, \quad z = -3.$$

Отже, точка E має координати $(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -3)$. Знайдемо координати вектора \overline{ME} $(\frac{1}{4} - 1; \frac{5}{4} + 1; -3 + 3)$. Матимемо \overline{ME} $(-\frac{3}{4}; \frac{9}{4}; 0)$. Знайдемо довжину ME , скориставшись формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$$|\overline{ME}| = \sqrt{(-\frac{3}{4})^2 + (\frac{9}{4})^2 + 0^2}, \quad |\overline{ME}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{90}{16}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

IV етап. Підсумки (1 – 3 хв.)

Даний етап містить обговорення результатів задач, а також виконання поставлених цілей.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ментор повідомляє про можливість багаторазового перегляду.

Максимальна тривалість даного заняття становить 30 хв.

При розробці даного відеоуроку використовувались такі програмні засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.11) та «Microsoft PowerPoint», а також мобільний додаток «Inshot».



рис. 3.1.11

Для початку в локальній мережі було знайдено коротке відео під назвою «інтро» на початок, а також ролик на кінець та доєднано їх до нового проекту в «Inshot». Такий підхід налаштовуватиме глядача на продуктивну роботу. Після того було відзняте відео з поясненнями біля дошки з використанням інтерактивної дошки, мікрофону, камери та світла. Далі в офісній програмі «Microsoft PowerPoint» створено кілька слайдів, що вміщують коротку

теоретичну інформацію по темі, а також умови трьох задач, що відповідають заголовку «Афінна система координат у просторі». Готовий проект експортовано у форматі відео. Після пророблених дій всі ролики завантажено у раніше створений проект в «Inshot» і там детально відредаговано його. Далі збережене відео можна використовувати в процесі навчання. Це можуть бути очні уроки, дистанційні, або ж для самостійного опрацювання рис. 3.1.12.

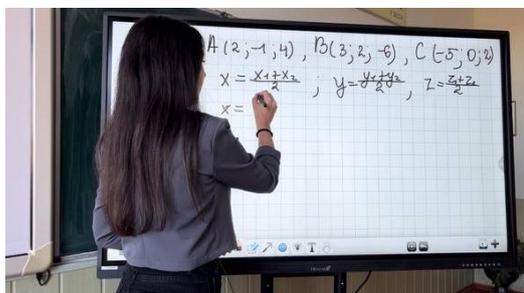


Рис. 3.1.12

Розробка відеоуроку на тему «Векторний і мішаний добуток векторів» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Векторний і мішаний добуток векторів.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

навчальна: ознайомити учнів з поняттям векторний та мішаний добуток;
навчити застосовувати векторний та мішаний добуток у певних завданнях;

розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів; розвивати логічне та просторове мислення;

виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нової інформації, інтерес до навчання та вивчення аналітичної геометрії у просторі.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Всім привіт! Тема цього відеоуроку «Векторний та мішаний добуток векторів»».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми відеоуроку.
2. Мотивація вивчення теми відеоуроку.
3. Вивчення нового теоретичного матеріалу.

III етап. Обговорення теоретичних питань (10 – 30 хв.)

Обговорення теоретичних питань відбувається за планом:

- Поняття про векторний добуток двох векторів.
- Теорема про обчислення векторного добутку через координати векторів.
- Властивості векторного добутку.
- Застосування векторного добутку.
- Поняття про мішаний добуток векторів.
- Теорема про обчислення мішаного добутку.
- Властивості мішаного добутку
- Застосування мішаного добутку.

IV. Підсумки (1 – 2 хв.)

1. Підведення підсумків відеоуроку.
2. Залучення до повторного перегляду відеоуроку, якщо виникли питання, та до активного самостійного вивчення.

«Надіюся, що цей відеоурок був цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні аналітичної геометрії в просторі. Дякую за увагу!»

V. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про те, що даний відеоурок залишається відкритим та є можливість переглянути його ще раз.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі розробки даного відео стали в нагоді наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), та

програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка CleverMaths (рис. 3.1.13).



Рис. 3.1.13

На початку роботи було знайдено «Інтро» та відредаговано в мобільному додатку.

Тоді на дошці «CleverMaths» було почато розміщення теоретичного матеріалу, взятий із методички із лекціями, а саме з теми «Векторний і мішаний добуток векторів». Оформлення відбувалось у відповідному стилі. Фоном для сторінок слугувала клітинка (3.1.14).

Із допомогою дошки «CleverMaths», був розроблений проект, що містить в собі 11 сторінок.

На першій сторінці розміщена тема відеоуроку та тематичний рисунок (рис. 3.1.14).

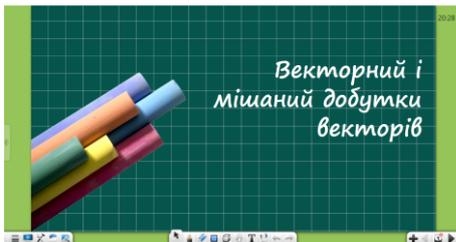


Рис. 3.1.14

З другого по сьомий слайди міститься інформація перших чотирьох пунктів, а саме: «Поняття про векторний добуток двох векторів, теорема про обчислення векторного добутку через координати векторів, властивості векторного добутку, застосування векторного добутку».

В останніх чотирьох слайдах розміщено матеріал тих пунктів, що залишились: «поняття про мішаний добуток векторів, теорема про обчислення мішаного добутку, властивості мішаного добутку, застосування мішаного добутку».

Після того був здійснений запис екрану із допомогою програми «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Одночасно була ввімкнена камера та відбувався звуковий супровід. Пояснення було здійснено шляхом використання графічного пера.

Далі проект було збережено у форматі «mp4».

Мобільний засіб «Inshot» дозволив створене відео приєднати до раніше знайденого ролику «Інтро» та внести деякі правки.

Далі проект був експортований у формат «mp4».

Тож, готовий навчальний ролик може слугувати відмінним засобом для вивчення чи повторення даної теми.

Розробка практичного відеоуроку на тему «Векторний і мішаний добуток векторів» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Векторний і мішаний добуток векторів.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: скрінкаст

Мета уроку:

навчальна: систематизувати знання студентів про загальні поняття векторного та мішаного добутку, упорядкувати знання про основні їх властивості; навчити застосовувати векторний добуток та мішаний добуток на практиці;

розвивальна: формувати творчі та пізнавальні здібності тих, хто навчається; розвивати мислення, що є логічним через розв'язування відповідних задач;

виховна: сприяти позитивному ставленню до пізнавання нової інформації.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка, штатив, лампа.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На даному етапі ведучий вітається з аудиторією та заохочує до вивчення властивостей векторного та мішаного добутків.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Даний етап містить обговорення цілей на заняття, а також його плану. Ведучий також промовляє короткий теоретичний матеріал, що допоможе при виконанні поставлених задач.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

Задачі з цієї теми варто поділити на дві групи: Задачі на застосування векторного добутку і задачі на застосування мішаного добутку.

Векторний добуток векторів:

1. Знайдіть синус кута, що утворений векторами \vec{c} (2; -2; 1) та \vec{d} (2; 3; 6).

Розв'язання:

Для розв'язання даної задачі використаємо властивості векторного добутку.

Для цього запишемо формулу $|\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin(\angle \vec{c}, \vec{d})$.

$$\text{Тоді } \sin(\angle \vec{c}, \vec{d}) = \frac{|\vec{c} \times \vec{d}|}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|}.$$

Пригадаємо, що векторний добуток це вектор і його координати шукатимемо

$$\text{наступним чином: } [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{array}{c|c|c} a_2 & a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{array} \right).$$

$$\text{Тож } [\vec{c}, \vec{d}] = \left(\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} \right) = (-15, -10, 10).$$

$$\text{Тепер знайдемо } |\vec{c} \times \vec{d}| = \sqrt{(-15)^2 + (-10)^2 + (10)^2} = \sqrt{225 + 100 + 100} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}.$$

Тепер знайдемо окремо довжини векторів:

$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3. \quad |\vec{d}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\text{Підставимо знайдені значення у формулу: } \sin(\angle \vec{c}, \vec{d}) = \frac{|\vec{c} \times \vec{d}|}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{5\sqrt{17}}{3 \cdot 7} = \frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

2. Вектор \vec{x} перпендикулярний до векторів $\vec{c} = (4; -2; -3)$ і $\vec{d} = (0; 1; 3)$ і з віссю Ox створює тупий кут. Знайдіть координати цього вектору, якщо $|\vec{x}| = 39$.

Розв'язання:

Знайдемо векторний добуток векторів \vec{c} та \vec{d} :

$$n\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (n - 6\bar{i} + 4\bar{k} + 3\bar{i} - 12\bar{j}) = n(-3\bar{i} - 12\bar{j} + 4\bar{k}).$$

Якщо кут між вектором \bar{x} та віссю Oy є тупий, тоді $\bar{x} \cdot \bar{y} < 0$

Нехай $\bar{y} = (0; 1; 0)$. Знайдемо $\bar{x} \cdot \bar{y} = -3 - 12 + 4 = -11 < 0$.

Отже, знаки залишаються такими ж. Тепер знайдемо довжину вектору $|\bar{x}| = k\sqrt{9 + 144 + 16} = k\sqrt{169} = 13k$.

$$13k = 39; k = 3. \text{ Тоді } \bar{x} = (-9; -36; 12)$$

3. Дано 3 точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ та $C(5; 2; 6)$. Знайдіть площу трикутника ABC .

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = (2; -2; -3)$, $\overline{AC} = (4; 0; 6)$.

Тепер знайдемо векторний добуток даних векторів, адже половина модуля векторного добутку дорівнює площі трикутника побудованого на цих векторах.

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 12\bar{j} + 8\bar{k} - 12\bar{j} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}.$$

$$\text{Тоді } S = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} |\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2}| = \frac{1}{2} |\sqrt{784}| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

Отже, площа трикутника дорівнює 14.

Мішаний добуток векторів:

1. Об'єм тетраедра дорівнює 5. Три вершини якого містяться в точках з координатами $M(2; 1; -1)$, $N(3; 0; 1)$, $K(2; -1; 3)$. Визначіть координати четвертої точки L , якщо відомо, що вона знаходиться на осі ординат.

Розв'язання:

Якщо точка L знаходиться на осі ординат, то нехай її координати матимуть вигляд $(0; y; 0)$.

Об'єм тетраедра шукається за формулою $V_m = \frac{1}{6} V_n$. V_m – об'єм тетраедра,

V_n – об'єм паралелепіпеда.

Об'єм паралелепіпеда в свою чергу шукаємо за формулою $V_n = |\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]| =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ де } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{ вектори, на яких побудований паралелепіпед, як на}$$

ребрах.

Тоді виведемо формулу для обчислення об'єму тетраедра:

$$V_m = \frac{1}{6} V_n = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо тепер координати векторів \overline{MN} , \overline{MK} , \overline{ML} :

$$\overline{MN} = (1; -1; 2); \overline{MK} = (0; -2; 4); \overline{ML} = (-2; y - 1; 1).$$

Підставляємо тепер координати векторів у формулу:

$$V_m = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y - 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |(-2 + 0 + 8) - (8 + 0 + 4y - 4)|.$$

Об'єм тетраедра відомий і дорівнює 5. Тож можемо скласти рівняння і знайти координати шуканої точки.

$$\frac{1}{6} \cdot |(-2 + 0 + 8) - (8 + 0 + 4y - 4)| = 5;$$

$$\frac{1}{6} \cdot |6 - (4y + 4)| = 5;$$

$$|6 - (4y + 4)| = 30;$$

$$6 - (4y + 4) = 30;$$

$$4y + 4 = -24;$$

$$4y = -28; y = -7;$$

$$6 - (4y + 4) = -30;$$

$$4y + 4 = 36;$$

$$4y = 32; y = 8.$$

Отже, отримали два варіанта розміщення точки L . Точка L може мати координати $(0; -7; 0)$, або $(0; 8; 0)$.

$$2. \quad \text{Доведіть, що } [\vec{a}, \vec{b}] \cdot [\vec{b}, \vec{c}] \cdot [\vec{c}, \vec{a}] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2.$$

Розв'язання:

Виберемо вісь \bar{x} , так, щоб її координати співпадали з вектором \vec{a} , а вектор \vec{b} буде лежати в площині Oxy . Тоді запишемо координати векторів:

$$\vec{a} = (a_1; 0; 0); \vec{b} = (b_1; b_2; 0); \vec{c} = (c_1; c_2; c_3).$$

Такий підхід значно спрощує задачу. Розв'язання задачі в загальному вигляді занадто громіздке.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \bar{k} = (0; 0; a_1 b_2);$$

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 \bar{i} + b_1 c_2 \bar{k} + 0 - c_1 b_2 \bar{k} - 0 - b_1 c_3 \bar{j} =$$

$$(b_2 c_3; -b_1 c_3; b_1 c_2 - b_2 c_1);$$

$$[\vec{c}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 c_3 \bar{j} - a_1 c_2 \bar{k} = (0; a_1 c_3; -a_1 c_2);$$

Тепер знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot [\vec{b}, \vec{c}] \cdot [\vec{c}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 b_2 \\ b_2 c_3 & -b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ 0 & a_1 c_3 & -a_1 c_2 \end{vmatrix} = 0 + b_2 c_3 a_1 c_3 a_1 b_2 + 0 - 0 -$$

$$0 - 0 = a_1^2 b_2^2 c_3^2.$$

Тепер знайдемо мішаний добуток у квадраті $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \left(\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right)^2 = (a_1 b_2 c_3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0)^2 = (a_1 b_2 c_3)^2 =$$

$$a_1^2 b_2^2 c_3^2.$$

Помічаємо, що права і ліва частини є рівними, тож тотожність доведена

IV етап. Підсумки (1 – 3 хв.)

На даному етапі підводяться підсумки заняття.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ментор повідомляє про можливість багаторазового перегляду.

Максимальна тривалість даного заняття становить 30 хв.

При розробці даного відеоуроку використовувались такі програмні засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.13) та «Microsoft PowerPoint» (рис. А.1), а також мобільний додаток «Inshot» (рис. 3.1.3).

Спочатку в локальній мережі було знайдено короткі мультимедійні ролики для початку та завершення, які додали до новоствореного проекту в «Inshot». Це допомагає налаштувати глядачів на ефективне засвоєння матеріалу та створити цілісну структуру уроку. Далі було записано пояснення з використанням інтерактивної дошки, мікрофона, відеокамери та освітлення для забезпечення якісного звукового та візуального контенту. У «Microsoft PowerPoint» створено кілька слайдів, які містять стислі теоретичні відомості та умови задач на тему «векторний та мішаний добуток». На кожен етап розв'язування варто надати увагу деталям, щоб матеріал був максимально зрозумілим і доступним для тих, хто навчається і бажає знати більше. Після цього готовий проект було експортовано у відеоформат. Усі фрагменти завантажено в «Inshot», де відео пройшло процес детального редагування з урахуванням послідовності етапів уроку. Підсумковий ролик можна застосовувати для проведення занять (рис. 3.1.15). Такий підхід сприяє розвитку інтерактивних навичок та підвищує мотивацію до навчання.

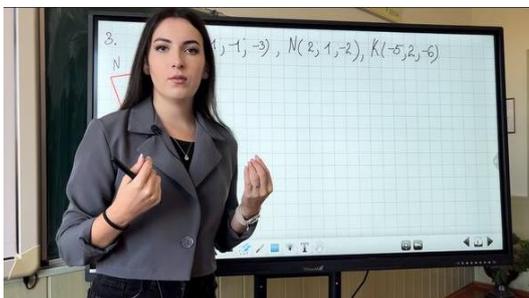


Рис. (3.1.15)

3.2. Розроблення сценаріїв навчальних роликів на тему прямих, площин та їх взаємного розміщення.

Тема: Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування двох площин у просторі.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з різними рівняннями площини, навчити визначати відстань від точки до площини та розуміти взаємне розташування двох площин у просторі; сформувати вміння застосовувати ці знання на практиці.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на знаходження відстані та аналіз взаємного розташування площин; сприяти розвитку логічного і просторового мислення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нової інформації, формувати інтерес до навчання та поглиблене розуміння аналітичної геометрії у просторі.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:**I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)**

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

Всім привіт! Тема цього навчального ролику «Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування двох площин у просторі».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 35 хв.)

План обговорення теорії:

- Різні рівняння площини.
- Відстань від точки до площини.
- Дослідження розміщення площини відносно системи координат за її загальним рівнянням.

- Взаємне розташування двох площин у просторі.
- Кут між двома площинами.
- Відстань від точки до площини.
- Відстань між двома паралельними площинами.
- Геометричний зміст лінійних нерівностей з трьома змінними.

IV етап. Підсумки (1 – 2 хв.)

3. Підведення підсумків.

4. Залучення до самостійного опрацювання.

«Надіюся, що цей відеоурок буде цікавим та корисним для самостійного вивчення теми. Дякую за увагу!»

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Повідомлення про можливість додаткових переглядів.

Максимальна тривалість даного заняття становить 45 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка CleverMaths (рис. 3.1.13).

Відео «Інтро» було знайдене попередньо в інтернеті та приєднано до проекту в мобільному додатку.

Віртуальна дошка «CleverMaths» дозволила створити сторінки у відповідному стилі та розмістити деякий теоретичний матеріал, взятий із методички із лекціями, а саме з теми «Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування двох площин у просторі». Фон підібраний відповідно стилю попередніх відеоуроків.

На віртуальній дошці «CleverMaths», було створено 17 сторінок. Перша сторінка містить тему відеоуроку та тематичний рисунок, а друга - містить означення площини.

З третього по восьмий слайди розміщено інформацію про різні рівняння площини, виведення яких відбувається пізніше при записі відео.

На наступних двох слайдах висвітлено теорію щодо розміщення площини відносно системи координат за її загальним рівнянням.

В одинадцятому та дванадцятому слайдах продемонстровано інформацію про взаємне розташування двох площин у просторі.

Тринадцятий слайд містить рисунок двогранного кута між площинами та формули для його знаходження, виведення який відбувається при записі відео. У наступних трьох слайдах описано інформацію щодо відстаней від точки до площини та між паралельними площинами з наявністю відповідними рисунками.

В останньому слайді висвітлено теорію про геометричний зміст лінійних нерівностей з трьома змінними.

Далі було здійснено запис екрану за допомогою відповідної програми (рис. 3.2.1). Відеосупровід та звук відтворювався одразу .

Створений проект у «Zoom Video Communications» було збережено в форматі «mp4».

Мобільний додаток «Inshot» дозволив далі відео доєднати до раніше збереженого ролику «Інтро» та відредагувати його.

Після виконаних дій проект експортовано у формат «mp4».

Тож, готове навчальне відео (рис. 3.2.1) можна надсилати студентам, або ж завантажити на певний інтернет - ресурс.

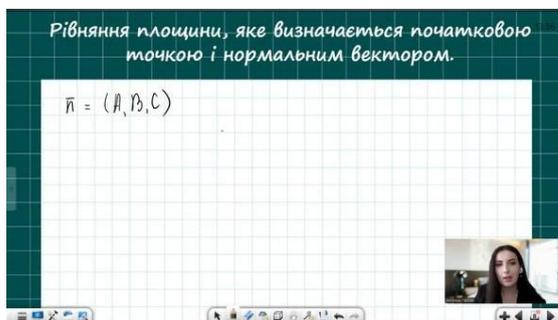


Рис. 3.2.1

Розробка практичного відеоуроку на тему «Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування двох площин у просторі» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування двох площин у просторі.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: відеоурок.

Мета:

навчальна: упорядкувати знання учнів про різні рівняння площини, систематизувати засвоєний матеріал про відстань від точки до площини та взаємне розташування двох площин у просторі; навчити користуватись знаннями на практиці;

розвивальна: формувати пізнавальні і творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання у тих, хто навчається.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

Педагог вітається з студентами, а також демонструється мультимедійна заставка.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На даному етапі викладач може змотивувати студентів відповідними словами та проговорити цілі на урок.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються наступні задачі:

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $N_1(2; -1; 3)$ та точку $N_2(3; 1; 2)$. Також відомо, що площина є паралельною вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$.

Розв'язання:

Знайдемо вектор $\overline{N_1N_2}$: $\overline{N_1N_2} = (1; 2; -1)$. Маємо два вектори, які є паралельними до даної площини. Знайдемо тепер вектор, що є перпендикулярним до площини і називається нормальним.

$$[\vec{a}, \overline{N_1N_2}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 6\bar{k} + 4\bar{j} + \bar{k} + 3\bar{j} - 8\bar{i} = (-7; 7; 7).$$

Прийmemo точку N_1 за початкову, а вектор $[\vec{a}, \overline{N_1N_2}]$ за нормальний. Тепер можемо скласти загальне рівняння площини.

$$-7(x - 2) + 7(y + 1) + 7(z - 3) = 0;$$

$$-(x - 2) + y + 1 + z - 3 = 0;$$

$$-x + 2 + y + 1 + z - 3 = 0;$$

$$-x + y + z = 0; \quad x - y - z = 0.$$

2. Складіть рівняння площини, яка є перпендикулярною до площини, що має рівняння $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ і відсікаючи на координатних осях Ox и Oy відрізки $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$.

Розв'язання:

Знайдемо напрямний вектор шуканої площини. Це буде той самий вектор, що нормальним до даної. Тоді матимемо $\bar{n} = (2; -2; 4)$.

З умови задачі одержуємо точки перетину площини із осями $X(-2; 0; 0)$ та $Y(0; \frac{2}{3}; 0)$. Знайдемо тепер вектор $\overline{XY} = (2; \frac{2}{3}; 0)$.

Тож, отримали два напрямні вектори і точку $X(-2; 0; 0)$ візьмемо за початкову.

Складемо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x + 2 & y & z \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\frac{4}{3}z + 8y + 4z - \frac{8}{3}x - \frac{16}{3} = 0;$$

$$4z + 24y + 12z - 8x - 16 = 0;$$

$$-8x + 24y + 16z - 16 = 0;$$

$$8x - 24y - 16z + 16 = 0;$$

$$x - 3y - 2z + 2 = 0 - \text{рівняння шуканої площини.}$$

3. Обчислити відстані від точки $N(-1; 1; -2)$ до площини, що проходить через точки, які мають координати $L_1(1; -1; 1)$, $L_2(-2; 1; 3)$, $L_3(4; -5; -2)$.

Розв'язання:

Для розв'язання даної задачі будемо використовувати формулу знаходження відстані між точкою та площиною:

$$\varphi(M_0\Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ відстань від точки до площини.}$$

Для початку знайдемо загальне рівняння площини. Для цього необхідно визначити координати векторів, точку L_1 сприйматимемо за початкову, а точка $L(x; y; z)$ є біжучою.

$$LL_1 = (x - 1; y + 1; z + 2); L_2L_1 = (3; -2; -2); L_3L_1 = (3; -4; 3).$$

Тепер складемо визначник з відповідних координат векторів:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z + 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-6x + 6 - 12z - 24 - 6y - 6 + 6z + 12 - 8x - 8 - 9y - 9 = 0;$$

$$-14x - 15y - 6z - 29 = 0;$$

$$14x + 15y + 6z + 29 = 0.$$

Тепер підставлятимемо знайдені значення у формулу:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|14 \cdot (-1) + 15 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 29|}{\sqrt{14^2 + 15^2 + 6^2}} = \frac{|-14 + 15 - 12 + 29|}{\sqrt{196 + 225 + 36}} = \frac{|18|}{\sqrt{457}} = \frac{18 \cdot \sqrt{457}}{\sqrt{457} \cdot \sqrt{457}} = \frac{18\sqrt{457}}{457}.$$

Отже, відстань від точки N до площини дорівнює $\frac{18\sqrt{457}}{457}$.

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

На цьому етапі ментор підводить результати практичного відеоуроку.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ведучий розповідає про те, що можна переглядати відеоурок кілька разів.

Максимальна тривалість даного заняття становить 30 хв.

При розробці даного відеоуроку використовувались такі програмні засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.13) та «Microsoft PowerPoint» (рис. А.1), а також мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2).

Спершу було знайдено коротке відео під назвою «інтро» та завершальний ролик у локальній мережі Інтернет, що були додані до нового створеного проекту в додатку «Inshot». Такий формат допоможе налаштувати глядачів на ефективну роботу. Далі було зняте відео з поясненнями біля інтерактивної дошки, із можливостями мікрофону, камери та додаткового освітлення. Після цього в програмі «Microsoft PowerPoint» було створено серію слайдів, які містять коротку теоретичну інформацію по темі та умові задач із заголовком «Різні рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин у просторі». Проект експортувано у популярний формат відео, а потім усі ролики об'єднано й ретельно відредагувано в «Inshot». Підсумкове відео можна застосовувати як на очних, так і дистанційних заняттях, а також для самостійного вивчення матеріалу (рис. 3.2.2).

Після завершення редагування фінальне відео набуло професійного вигляду, яке готове до використання, як корисний інструмент, в освітньому процесі. Завдяки інтеграції коротких мультимедійних вставок, а також структурованих слайдів з ключовими поняттями, матеріал стане більш доступним та цікавим для глядачів. Такий формат навчального відео сприяє кращому сприйняттю та засвоєнню навчального матеріалу, підходить для різних форматів навчання та допомагає учням опановувати нову інформацію самостійно або ж у рамках уроку.



Рис. 3.2.2

Розробка відеоуроку на тему «Різні способи задання прямої у просторі» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Різні способи задання прямої у просторі.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з різними способами задання прямої у просторі, включаючи параметричні, канонічні та векторні рівняння; навчити будувати рівняння прямої в просторі та розв'язувати задачі з їх застосуванням.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через роботу з різними формами рівнянь прямої; сприяти розвитку просторового мислення та навичок аналізу геометричних об'єктів у просторі.

Виховна: формувати позитивне ставлення до вивчення геометрії та інтерес до аналітичних методів опису просторових об'єктів; виховувати старанність і наполегливість у розв'язанні задач.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім слухачам, та тим, хто хоче знати більше! Тема відеоуроку «Різні способи задання прямої у просторі».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нового матеріалу.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Основні поняття прямої.
- Параметричне рівняння прямої.
- Канонічне рівняння прямої.
- Рівняння прямої, що визначається двома точками.
- Загальне рівняння прямої.
- Відстань від точки до прямої.
- Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

- Кут між двома прямими.
- Відстань між мимобіжними прямими.

IV етап. Підсумки (1 – 2 хв.)

5. Підведення підсумків.

6. Заклик опрацювати теоретичний матеріал самостійно.

«Маю надію, що навчальний ролик став корисним для вас. Дякую за увагу!»

V. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість багаторазового перегляду.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка CleverMaths (рис. 3.1.13).

Відео «Інтро» було знайдене попередньо в інтернеті та приєднано до проекту в мобільному додатку.

Спочатку на віртуальній дошці «CleverMaths» створено сторінки у стилі попередніх відеоуроків та розмістити відповідний теоретичний матеріал, взятий у розробленій попередньо методичці із лекціями, а саме з теми «Різні способи задання прямої у просторі».

На онлайн - дошці «CleverMaths», було розроблено 11 сторінок.

Перша сторінка вмістила тему навчального ролику та певний рисунок (рис. 3.2.3).

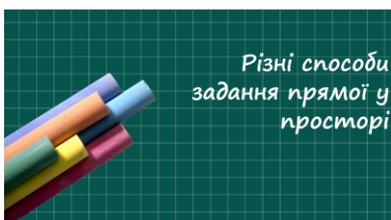


Рис. 3.2.3

З другого по шостий слайд було розміщено назви рівнянь прямої та місце для їх подальшого виведення в процесі запису відео.

Сьома сторінка містить рисунок до підтеми «Відстань від точки до прямої».

На наступних двох слайдах підготовлено робочий аркуш для подальшого виведення та пояснення інформації про взаємне розміщення двох прямих у просторі.

В останніх двох слайдах висвітлено теорію по відповідних пунктах: кут між прямими та відстань між мимобіжними прямими.

Далі відбувся запис екрану, де в реальному часі прописувалось пояснення для певних сторінок. Відеосупровід та звук відтворювався одразу. Запис головної частини навчального ролика відбувався за допомогою програмного засобу «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Після того проект експортовано в формат «mp4».

Далі в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4».

Тепер даний відеоурок можна інтегрувати у процес вивчення теми (рис.3.2.4).



Рис 3.2.4

Розробка практичного відеоуроку на тему «Різні способи задання прямої у просторі» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Різні способи задання прямої у просторі.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про різні рівняння прямої, систематизувати засвоєний матеріал про різні способи задання прямої; навчити користуватись здобутими знаннями на практиці;

розвивальна: формувати пізнавальні і творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

Ментор на даному етапі демонструє відеозаставку, а також вітається із студентами.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Цей етап відіграє роль мотиваційної частини навчального ролику. Також викладач проговорює цілі на заняття.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються наступні задачі:

1. Вершини трикутника мають координати $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$, $C(4; -7; -2)$. Скласти параметричне рівняння медіани, яка проведена із точки C .

Розв'язання:

Так, як медіана проходить через точку C та середину сторони AB , то знайдемо координати точки, що є серединою: $O(\frac{3-5}{2}; \frac{6+2}{2}; \frac{-7+3}{2})$; $O(-1; 4; -2)$.

Тепер складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-(-7)}{4-(-7)} = \frac{z-(-2)}{-2-(-2)}, \frac{x-4}{-5} = \frac{y+7}{11} = \frac{z+2}{0}.$$

Тепер складемо параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x = -5t + 4 \\ y = 11t - 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

2. Знайти кут між прямими, що мають наступні рівняння $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

Розв'язання:

Для розв'язання даної задачі ми будемо використовувати формулу для

$$\text{визначення кута: } \cos \gamma = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Для початку запишемо координати напрямних векторів даних прямих:

$a_1(1; -1; \sqrt{2})$, $a_2(1; 1; \sqrt{2})$. Тепер підставимо значення у формулу:

$$\cos \gamma = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{1 - 1 + 2}{\sqrt{1 + 1 + 2} \cdot \sqrt{1 + 1 + 2}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}. \text{ Отже, } \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

3. Відомі рівняння руху точки $N(x; y; z)$: $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$. Визначити, яку відстань пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$, $t_2 = 7$.

Розв'язання:

Знайдемо, де точка знаходилась на початку руху при $t_1 = 0$:

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 0 \\ y = -3 + 2 \cdot 0 \\ z = 5 - 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Тобто $N_1(5; -3; 5)$. Тепер знайдемо, де точка знаходилась на кінці руху при $t_2 = 7$:

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 7 \\ y = -3 + 2 \cdot 7 \\ z = 5 - 7 \end{cases}; \begin{cases} x = -9 \\ y = 11 \\ z = -2 \end{cases}$$

Тоді $N_2(-9; 11; -2)$. Тепер знайдемо координати вектора $\overline{N_1 N_2}$, по якому рухалась точка: $\overline{N_1 N_2} = (-9 - 5; 11 - (-3); -2 - 5) = (-14; 14; -7)$.

Тепер знайдемо довжину даного вектора: $d = \sqrt{(-14)^2 + 14^2 + (-7)^2} = \sqrt{196 + 196 + 49} = \sqrt{441} = 21$.

Отже, відстань, яку пройде точка дорівнює 21 од.

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

Даний етап включає підведення підсумків заняття, його результатів.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ведучий розповідає про те, що можна переглядати відеоурок кілька разів.

Найдовше заняття може тривати 30 хв.

При створенні цього відеоуроку були використані такі програмні засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.13) та «Microsoft PowerPoint» (рис. А.1), а також мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2). Підручними засобами були: штатив, кільцева лампа із тримачем для камери, відеокамера, штатив із додатковим освітленням, мультимедійна дошка та мікрофон.

Спершу в мережі Інтернет було знайдено короткі мультимедійні фрагменти для вступу і завершення, які були додані до нового проекту в додатку «Inshot».

Такий підхід налаштує глядачів на продуктивну роботу та формуватиме позитивну атмосферу. Далі було відзняте пояснювальне відео біля інтерактивної дошки з використанням мікрофона, камери та додаткового освітлення. У офісній програмі «Microsoft PowerPoint» створено серію слайдів із короткою теоретичною інформацією та умовами задач, об'єднаних темою «Різні способи задання прямої у просторі». Потім результат був експортований у популярний відеоформат. Тоді всі фрагменти зібрали в один проект та відредагували в мобільному додатку «Inshot». Вихідне фінальне відео можна використовувати для очного, дистанційного навчання або для самостійного вивчення (рис. 3.2.5).

Готовий відеоурок, разом із короткими мультимедійними вставками та структурованими слайдами з ключовими поняттями, сприятиме кращому сприйняттю матеріалу. Такий підхід зробить навчальний матеріал доступним і цікавим та підійде для різних форматів уроків і дозволить учням опановувати нову інформацію зручно та ефективно.

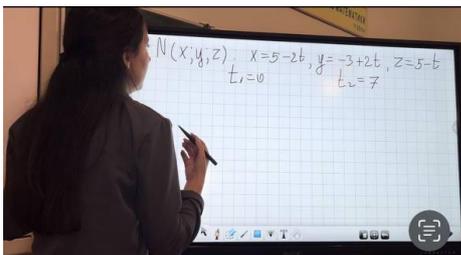


Рис. 3.2.5

Розробка відеоуроку на тему «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з взаємним розміщенням прямої і площини, навчити аналізувати їх можливі взаємні позиції (паралельність, перетин або належність прямої площині); ознайомити з поняттям пучка і в'язки площин; сформувати навички застосування цих знань на практиці.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через вирішення задач на взаємне розташування прямих і площин, а також на побудову пучка та в'язки площин; сприяти розвитку логічного мислення та просторового уявлення.

Виховна: виховувати інтерес до вивчення геометрії, прагнення до пізнання нових понять і їх застосування; формувати уважність і самостійність у розв'язанні математичних задач.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! Тема навчального відео «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Взаємне розміщення прямої і площини.
- Кут між прямою і площиною.
- Пучок площин.
- В'язка прямих і площин у просторі.
- В'язка прямих у просторі.

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

1. Підведення підсумків навчального відеоуроку.
2. Заклик до самостійної праці.

«Маю надію, що відеоурок допоможе вам досконало вивчити дану тему.
Дякую за увагу!»

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про додатковий перегляд.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка CleverMaths (рис. 3.1.13).

Для кращого сприйняття навчального ролика, попередньо в інтернеті було знайдено і збережено відео «Інтро», а також приєднано до створеного проекту в мобільному застосунку.

Тоді розпочалась розробка сторінок на віртуальній дошці «CleverMaths» у стилі інших відеоуроків, та розміщення певної теорії, що знаходиться у методичці із лекціями, а саме в темі «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин». В даному програмному засобі було створено 9 сторінок.

На титульній сторінці відображено тему даного відеоуроку (рис. 3.2.6).

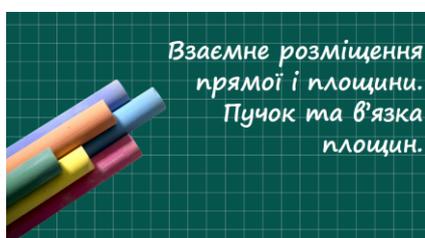


Рис. 3.2.6

Другий та третій слайд вмістили в собі основне з першого пункту плану, а саме «Взаємне розміщення прямої і площини».

На наступній сторінці відображено теорію про кут між прямою і площиною в просторі.

З п'ятого по сьомий слайд міститься інформація третього пункту, а саме: «Пучок площин».

В останніх двох слайдах висвітлено теорію по в'язці прямих і площин, та в'язці прямих у просторі.

Після розробки слайдів та наповнення їх матеріалом даної теми відбувся запис екрану, де під час зйомки прописувалось пояснення на сторінках засобами програми CleverMaths (рис. 3.1.13). Відеосупровід та звук створювався одночасно. Програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1) дозволив записати ролик. Після того проект експортовано у відповідний популярний формат «mp4».

Далі відео – проект було відредаговано в застосунку «Inshot» та доєднано до попередньо збереженого ролику «Інтро».

Після всіх дій відео збережено у форматі «mp4» (рис. 3.2.7).

Тепер відеоурок можна поєднувати з додатковими поясненнями ментора для студентів та таким чином робити освітній процес більш цікавим та наочним.

$$Ax + By + Cz = D$$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$\vec{n} = \alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2$$

$$(A, B, C) = (\alpha A_1 + \beta A_2, \alpha B_1 + \beta B_2, \alpha C_1 + \beta C_2)$$

$$\begin{cases} A = \alpha A_1 + \beta A_2 \\ B = \alpha B_1 + \beta B_2 \\ C = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases}$$

$$\frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

Рис. 3.2.7

Розробка практичного відеоуроку на тему «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про різне розміщення прямої та площини, систематизувати засвоєний матеріал про пучок та в'язку площин; навчити користуватись здобутими знаннями на практиці;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На початковому етапі демонструється короткий відео фрагмент, а також ведучий повідомляє тему заняття. Можливий варіант тексту: « Привіт усім, хто прагне знати більше. Цей урок буде насичений такими поняттями, як: пучок прямих і площин у просторі, взаємне розміщення. Адже тема заняття: «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин»».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Даний етап є мотиваційною складовою. Викладач повідомляє цілі та мету заняття. Іноді цей етап може об'єднуватись із попереднім.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Доведіть, що пряма і площина є паралельними, якщо вони задаються рівняннями: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+5}{4}$; $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Розв'язання:

Нормальний вектор площини та напрямний вектор прямої повинні бути перпендикулярними. Отже їх скалярний добуток має дорівнювати 0.

$a(3; -4; 4)$; $n(4; -3; -6)$. Запишемо скалярний добуток:

$$3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) = 12 + 12 - 24 = 0.$$

Отже, пряма і площина є паралельними.

2. Знайдіть при яких a і D пряма і площина є паралельними, якщо рівняння мають наступний вигляд: $\frac{x-5}{l} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-7}{-3}$; $3x - 2y + Cz + 16 = 0$.

Розв'язання:

Для розв'язання задачі скористаємось наступною умовою: $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{b_1} = \frac{C}{c_1}$ умова перпендикулярності прямої і площини.

Будемо мати: $\frac{3}{l} = \frac{-2}{4} = \frac{C}{-3}$.

$3 \frac{3}{l} = \frac{-2}{4}$ знайдемо l . $l = -6$. $3 \frac{-2}{4} = \frac{C}{-3}$ знайдемо C . $C = 1,5$.

3. Знайдіть кут між площиною та прямою, які задаються наступними рівняннями $5x - 4y + 3z + 1 = 0$; $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{-3}$.

Розв'язання:

Для розв'язання даної задачі нам знадобиться формула знаходження кута між прямою і площиною

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Підставимо координати напрямного вектора прямої та нормального вектора площини у формулу:

$$\sin \varphi = \frac{|5 \cdot (-1) - 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-5 - 16 - 9|}{\sqrt{25 + 16 + 9} \cdot \sqrt{1 + 16 + 9}} = \frac{|-30|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{26}} = \frac{|-30|}{\sqrt{50 \cdot 26}} =$$

$$\frac{30}{10\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}. \text{ Тоді } \varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

На етапі проведення підсумків викладач говорить про результати заняття та може обговорити відповіді, які вийшли у задачах.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ведучий розповідає про додатковий перегляд заняття, якщо деякі моменти виявились незрозумілими.

Найдовше заняття може тривати 30 хв.

При створенні цього відеоуроку були використані такі програмні засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.13) та «Microsoft PowerPoint», а також мобільний додаток «Inshot». Було використано допоміжне обладнання: штатив, кільцеву лампу з тримачем для камери, відеокамеру, штатив із додатковим світлом, інтерактивну дошку та мікрофон. Спочатку в інтернеті відшукали короткі мультимедійні фрагменти для вступної частини та завершення, що були додані до нового проекту в додаток «Inshot». Такий метод допомагає налаштувати аудиторію на продуктивність і створює позитивний настрій. Далі записали відео з поясненням біля інтерактивної дошки, використовуючи мікрофон, камеру та додаткове освітлення для якісного звуку і зображення. У офісному програмному засобі «Microsoft PowerPoint» було підготовлено серію слайдів, що включають основну теоретичну інформацію та умови задач із теми «Взаємне розміщення прямої і площини. Пучок і в'язка площин.» Після цього презентацію експортували у формат відео. Після всіх пророблених дій, створенні відеофрагменти об'єднали в один проект і відредагували в «Inshot» (рис. 3.2.8).

Фінальне відео підходить як для очних, так і для дистанційних занять. Також заняття може бути використане для самостійного опанування матеріалу. Завдяки мультимедійним вставкам відеоурок сприятиме кращому сприйняттю інформації. Такий інтегрований сучасний підхід допомагає зробити навчальний матеріал доступним і захоплюючим.

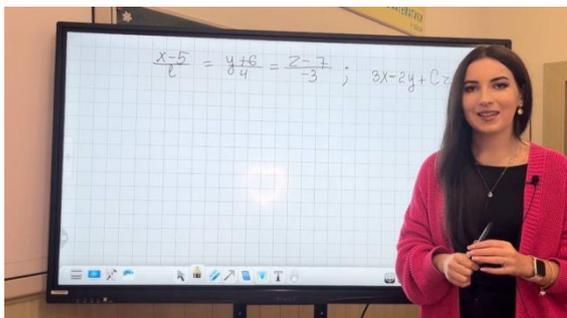


Рис. 3.2.8

3.3. Створення конспектів навчальних відео на тему «Циліндричні та конічні поверхні» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Циліндричні та конічні поверхні.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям циліндричних та конічних поверхонь, навчити розрізняти їхні основні види, будувати рівняння цих поверхонь та застосовувати знання для аналізу їхніх властивостей; сформулювати вміння використовувати ці знання на практиці.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на побудову і аналіз циліндричних та конічних поверхонь; сприяти розвитку логічного та просторового мислення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нових геометричних понять, формувати інтерес до аналітичної геометрії у просторі та її практичного застосування; сприяти розвитку уважності та наполегливості у вивченні складних тем.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! В цьому відеоуроці розглянемо циліндричні та конічні поверхні.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Циліндричні поверхні (циліндр) другого порядку (загальне рівняння).
- Канонічне рівняння циліндричної поверхні.

- Канонічні поверхні 2- го порядку (загальне рівняння).

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

3. Підведення підсумків навчального відеоуроку.

4. Заклик до самостійної праці.

«Сподіваюсь, що це навчальне відео буде цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні аналітичної геометрії в просторі. Дякую всім за увагу!»

V. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість переглядати відео повторно.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка «CleverMaths» (рис. 3.1.13), динамічне геометричне середовище «GeoGebra» (рис. 3.3.1).

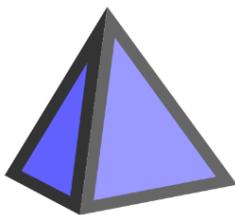


Рис. 3.3.1

Для динамічності відео та кращого сприйняття його студентами в глобальній мережі було знайдено «Інтро» та доєднано до нового проекту в «Inshot».

Далі розпочато розробку сторінок на дошці «CleverMaths» у стилі попередніх відеоуроків. Теорію взято із методички із лекціями. В вище сказаному програмному засобі було розроблено 10 сторінок.

На лицевій сторінці вказано тему даного навчального ролику (рис. 3.3.2).

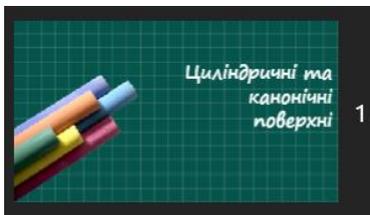


Рис. 3.3.2

Наступні дві сторінки містять тему першого підпункту «Циліндричні поверхні (циліндр) другого порядку (загальне рівняння)», пізніше доповнені письмовими поясненнями.

Четвертий слайд висвітлює підтему «Канонічне рівняння циліндричної поверхні». Також дана сторінка підкріплюється динамічними графіками, створеними на платформі «GeoGebra» (рис. 3.3.3). Такий підхід допоможе студентам краще засвоїти матеріал.

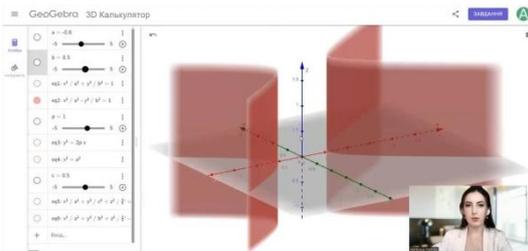


Рис. 3.3.3

Останні слайди вміщують терію третьої підтеми: «Канонічні поверхні 2- го порядку (загальне рівняння)».

Після того здійснено запис екрану з одночасним виконанням письмових та усних пояснень з використанням мікрофону та відеокамери. Допоміг при цьому програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Далі відео конвертовано в формат «mp4».

Тоді, після виконаних попередніх дій, в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4».

Тепер даний навчальний ролик можна використовувати у процесі вивчення теми (рис. 3.3.4).

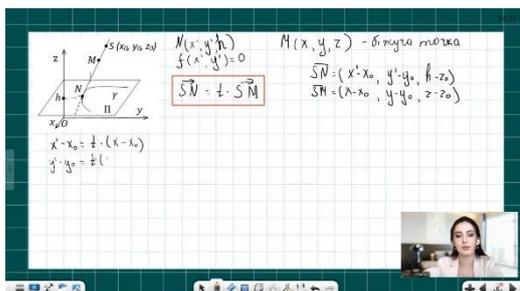


Рис. 3.3.4

Розробка практичного відеоуроку на тему «Циліндричні та конічні поверхні» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Циліндричні та конічні поверхні.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про такі поняття, як циліндричні та конічні поверхні, систематизувати засвоєний матеріал їх рівняння; навчити користуватись здобутими знаннями на практиці;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На даному етапі ведучий повідомляє тему заняття «Циліндричні та конічні поверхні» та вітається із аудиторією.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На даний етапі педагог заохочує глядачів розв'язувати завдання разом із ним та проговорює цілі на урок.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Напишіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $S(0; 0; p)$, а напрямною служить парабола $y^2 = 2px, z = 0$.

Розв'язання:

Нехай $M = (x; y; z)$ – біжуча точка і лежить на поверхні конуса, а точка $A = (x_1, y_1, z_1)$ – така точка напрямної, що точка M належить SA . Звідси слідує, що координати точки A задовільняють рівняння напрямної:

$$y_1^2 = 2px_1, z_1 = 0,$$

а координати точки M задовільняють рівняння SA

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z-p}{-p}.$$

Із даних відношень виразимо x_1 та y_1 і підставимо у $y_1^2 = 2px_1$.

$$x_1 = \frac{-px}{z-p}, y_1 = \frac{-py}{z-p}. \text{ Тоді будемо мати } \left(\frac{-py}{z-p}\right)^2 = \frac{-2p^2x}{z-p}.$$

$$\frac{p^2y^2}{(z-p)^2} = \frac{-2p^2x}{z-p};$$

$$p^2y^2 = -2p^2x(z-p);$$

$$y^2 = -2x(z-p);$$

$$y^2 = -2x(z-p);$$

$$y^2 + 2x(z-p) = 0.$$

Можемо помітити, що рівняння $\frac{p^2y^2}{(z-p)^2} = \frac{-2p^2x}{z-p}$ та $y^2 + 2x(z-p) = 0$ не є рівносильні.

Рівняння шуканого конуса має вигляд $y^2 + 2x(z-p) = 0$. Перенесемо тепер початок координат у вершину конуса і приведемо рівняння конуса до вигляду $y'^2 + 2x'z' = 0$. Застосуємо до останнього рівняння формули повороту системи координат навколо осі Sy' на кут $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' = \frac{x''-z''}{\sqrt{2}} \\ y' = y'' \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' = \frac{x''+z''}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Вставляючи в рівняння $y'^2 + 2x'z' = 0$ замість x' , y' , z' їх значення із формул вище, отримаємо канонічне рівняння конуса: $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$.

2. Скласти рівняння циліндра, напрямна якого описана рівнянням $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, а твірні є перпендикулярними до площини напрямної.

Розв'язання:

Очевидно, що площина, в якій лежить напрямна є завжди площина $x + y + z = 0$, а тому й $\vec{e} = (1, 1, 1)$.

$$\text{Тоді } \begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = z_1 & \text{— напрямна;} \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ \frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{1} & \text{— твірна.} \end{cases}$$

Перепишемо рівняння твірної в параметричному вигляді: $\begin{cases} x_1 = x - t \\ y_1 = y - t \\ z_1 = z - t \end{cases}$

Підставимо знайдені значення у рівняння напрямної, тоді:

$$\begin{cases} (x-t)^2 - (y-t)^2 = z-t \\ x-t + y-t + z-t = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 - 2tx + t^2 - (y^2 - 2ty + t^2) = z-t \\ x-t + y-t + z-t = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 - 2tx + t^2 - y^2 + 2ty - t^2 - z + t = 0 \\ x + y + z = 3t \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z - 2tx + 2ty + t = 0 \\ t = \frac{x+y+z}{3} \end{cases}.$$

Підставимо значення з другого рівняння в перше і будемо мати:

$$x^2 - y^2 - z - 2x \cdot \frac{x+y+z}{3} + 2y \cdot \frac{x+y+z}{3} + \frac{x+y+z}{3} = 0;$$

$$3x^2 - 3y^2 - 3z - 2x \cdot (x+y+z) + 2y \cdot (x+y+z) + x+y+z = 0;$$

$$3x^2 - 3y^2 - 3z - 2x^2 - 2xy - 2xz + 2xy + 2y^2 + 2yz + x+y+z = 0;$$

$$x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x+y - 2z = 0.$$

Отже, рівняння циліндра матиме вигляд: $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

На даному моменті ведучий повідомляє про результат роботи у занятті, також може розповісти про важкі елементи у задачах.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Ведучий розповідає про додатковий перегляд заняття, якщо деякі моменти виявились незрозумілими.

Найдовше заняття може тривати 30 хв.

При створенні заняття користувались такими програмними засоби, як: «CleverMaths» (рис. 3.1.13) та «Microsoft PowerPoint», а також мобільний додаток «Inshot». Для розробки заняття були використанні засоби: штатив,

кільцева лампа з тримачем для камери, відеокамера, додаткове підсвічування, інтерактивна дошка та мікрофон. Спершу знайшли в інтернеті та додали до нового створеного проекту в мобільному додатку «Inshot» короткі ролики для початку та кінця відео. Такі дії сприятимуть позитивному настрою та налаштують глядачів на продуктивну роботу. Далі біля мультимедійної дошки був записаний коментар із детальним поясненням, із використанням мікрофону, відеокамери та освітлення для гарної картинки. Тоді були створені слайди, на яких містились умови до задач, які розглядаються на занятті. Такі дії дозволила зробити офісна програма «Microsoft PowerPoint». Потім створену презентацію експортували у формат «mp4». Після того всі відзняті проекти проходили стадію редагування в додатку «Inshot». Готове заняття може слугувати потужним інструментом у процесі вивчення теми «Циліндричні та конічні поверхні» (рис. 3.3.5).

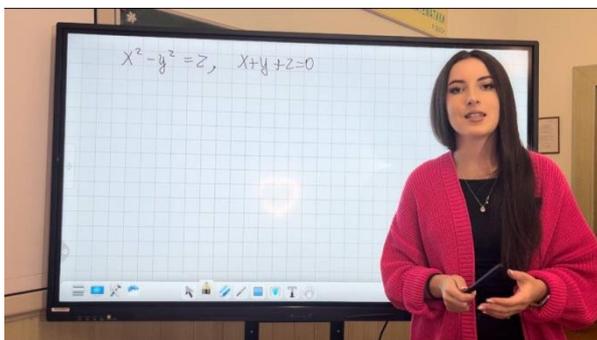


Рис. 3.3.5

3.4. Створення сценаріїв присвячених поверхням обертання з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання.

Тип заняття: вивчення нового матеріалу.

Вид заняття: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям поверхні обертання, навчити складати рівняння поверхні обертання та аналізувати її властивості; сформувати вміння застосовувати отримані знання на практиці.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на побудову та дослідження поверхонь обертання; сприяти розвитку логічного мислення та просторового уявлення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нових математичних понять, формувати інтерес до аналітичної геометрії та її застосування; розвивати наполегливість і самостійність у розв'язанні завдань.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! В цьому відеоуроці розглянемо циліндричні та конічні поверхні.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання.
- Еліпсоїд, канонічні рівняння і властивості.
- Трьохосний еліпсоїд, канонічне рівняння властивості.

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

5. Підведення підсумків навчального відеоуроку.
6. Заклик до самостійної праці.

«Сподіваюсь, що це навчальне відео буде цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні теми «Поверхні обертання». Дякую всім за увагу!»

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість переглядати відео повторно.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка «CleverMaths» (рис. 3.1.13), динамічне геометричне середовище «GeoGebra» (рис. 3.3.1).

Для динамічності відео та кращого сприйняття його студентами в глобальній мережі було знайдено «Інтро» та доєднано до нового проекту в «Inshot».

Далі розпочато розробку сторінок на дошці «CleverMaths» у стилі попередніх відеоуроків. Теорію взято із методичної розробки, а саме з теми «Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання». В вище сказаному програмному засобі було розроблено 9 сторінок.

На першій сторінці вказано тему даного навчального ролику (рис. 3.4.1).

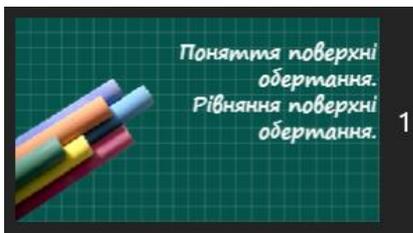


Рис. 3.4.1

Наступні дві сторінки містять тему першого підпункту «поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання», а також відповідні рисунки.

З четвертого по сьомий слайди міститься інформація про еліпсоїд та його властивості. Також дані сторінки доповнені рисунками створеними в середовищі «GeoGebra» для кращого розуміння.

Останні два слайди вміщують терію третьої підтеми: «Трьохосний еліпсоїд, канонічне рівняння, властивості». Дані сторінки теж наповненні рисунками із «GeoGebra».

Тоді того здійснено запис екрану з одночасним виконанням письмових та усних пояснень з використанням мікрофону та відеокамери. Допоміг при цьому

програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Далі відео конвертовано в формат «mp4».

Тоді, після виконаних попередніх дій, в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4».

Тепер даний навчальний ролик можна використовувати у процесі вивчення теми (рис. 3.4.2).

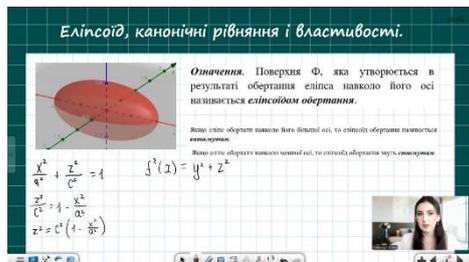


Рис. 3.4.2

Розробка практичного відеоуроку на тему «Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття поверхні обертання, систематизувати засвоєний матеріал про рівняння поверхонь обертання; навчити користуватись отриманими знаннями при виконанні практичних завдань;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Технічні засоби: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

Початковий етап включає демонстрацію короткого ролику та привітання педагога. «Привіт усім, хто прагне вивчати нове та не зупинятись на отриманому. Сьогодні детально розглядатимемо поняття поверхні обертання та її рівняння».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На цьому етапі завдання педагога вмотивувати глядача до спільного виконання наступних задач та стимулювати до активної праці.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Установіть, що площина $x - 2 = 0$ перетинає еліпсоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по еліпсу. Знайти його півосі та вершини.

Розв'язання:

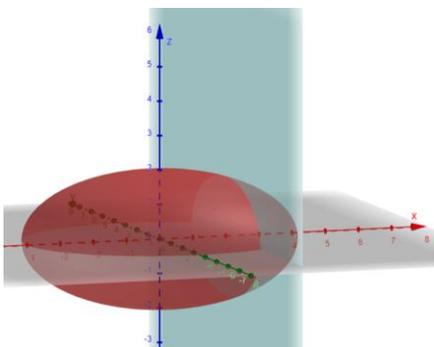


Рис. 3.4.3

Виразимо x з рівняння площини:

$$x = 2.$$

Підставимо знайдене значення у рівняння еліпсоїда:

$$\frac{2^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1; \frac{4}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1; \frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1; \frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1;$$

$$\frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{1}{4}; \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = \frac{3}{4}; \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{12} = \frac{1}{4}; \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1;$$

Отже перетином є еліпс, в якого $a = 3$, $b = \sqrt{3}$. Тоді вершинами будуть $M_1(2; -3; 0)$, $M_2(2; 0; \sqrt{3})$, $M_3(2; 3; 0)$, $M_4(2; 0; -\sqrt{3})$.

2. Довести, що через центр трьохосного еліпсоїда проходять дві і тільки дві площини, які перетинають його по колу.

Розв'язання:

Нехай $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – рівняння еліпсоїда, причому $a > b > c$. Якщо існує площина, яка проходить через центр еліпсоїда і перетинає його по колу, то радіус цього кола дорівнює b . Розглянемо сферу $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ і перепишемо її рівняння в вигляді $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Віднімемо із рівняння $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Будемо мати: $\left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{z^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0$; $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0$.

В силу нерівностей $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0$ та $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} > 0$ можемо покласти, що $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = A^2$, $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = C^2$. Тоді рівняння матиме вигляд $A^2x^2 - C^2z^2 = 0$, відповідно воно оприділяє пару площин: $Ax - Cz = 0$, $Ax + Cz = 0$.

Точки перетину еліпсоїда і сфери, координати яких задовольняють одночасно рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ та $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, належать площинам $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0$ так, як рівняння $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0$ є лінійною комбінацією $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ та $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Ці площини проходять через центр сфери і перетинають її по колу радіусом b . Таким чином у еліпсоїда є два кругових перетини, які проходять через його середню вісь, радіус яких дорівнює середній півосі.

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

У даний момент ведучий проводить підсумки відеоуроку та може повторити важкі моменти.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

В якості домашнього завдання може бути додатковий перегляд заняття.

Максимально заняття може бути 30 хв.

Для підготовки заняття використовувалися такі програмні інструменти, як «CleverMaths» (рис. 3.1.13), «Microsoft PowerPoint» та мобільний додаток «Inshot». З технічних засобів застосовували штатив, кільцеву лампу з тримачем для камери, відеокамеру, додаткове підсвічування, інтерактивну дошку та

петличний мікрофон. Спершу в глобальній мережі знайшли й завантажили короткі відео для вступу та завершення, що сприятимуть хорошій атмосфері для навчання. Після того було записано пояснення ведучого біля інтерактивної дошки, де з застосуванням мікрофону, спеціальної ручки, відеокамери й якісного освітлення, що забезпечило чітку передачу інформації. Напередодні у програмі «Microsoft PowerPoint» підготували слайди з написаними умовами задач, що аналізуються детально розглядаються на уроці, і потім експортували презентацію у відео. Останнім етапом розробки даного навчального ролику стало редагування та об'єднання всіх матеріалів у додатку «Inshot». Підготовлене заняття стане ефективним засобом для вивчення теми «Поняття поверхні обертання. Рівняння поверхні обертання». Готове заняття створить сприятливе середовище для кращого засвоєння матеріалу та буде залучати учнів у процес навчання через мультимедійні елементи. Завдяки використанню візуальних і практичних компонентів, таких як слайди з умовами задач та відеопояснення, учні отримають можливість опанувати складні теми більш ефективно. Цей урок можна застосовувати як на офлайн заняттях, так і для дистанційного навчання, а також як індивідуальний матеріал для самостійного опрацювання. Такий сучасний формат не тільки сприяє кращому розумінню навчальної теми, а також розвиває інтерес до навчання та аналітичні здібності учнів.

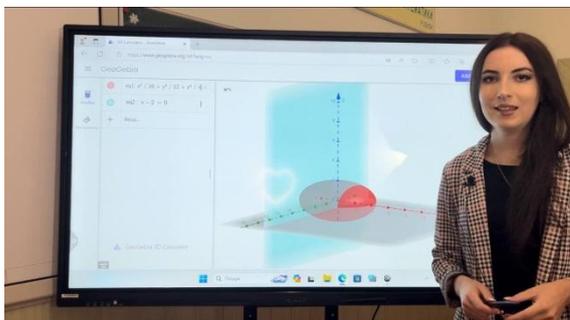


Рис. 3.4.4

Розробка відеоуроку на тему «Гіперболоїди обертання» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Гіперболоїди обертання.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям гіперболоїда обертання, навчити складати рівняння гіперболоїда та аналізувати його геометричні властивості; сформулювати вміння застосовувати ці знання для побудови та дослідження гіперболоїдних поверхонь.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на побудову та аналіз гіперболоїдів обертання; сприяти розвитку логічного мислення та просторового уявлення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нових математичних понять, формувати інтерес до аналітичної геометрії та її застосування; розвивати старанність та наполегливість у вивченні складних тем.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! В цьому відеоуроці розглянемо гіперболоїди обертання та переглянемо їх властивості.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Однопорожнинний Гіперболоїд обертання.
- Двопорожнинний гіперболоїд обертання.

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

7. Підведення підсумків навчального відеоуроку.

8. Заклик до самостійної праці.

«Сподіваюсь, що це навчальне відео буде цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні теми «Поверхні обертання». Дякую всім за увагу!»

V. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість переглядати відео повторно.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка «CleverMaths» (рис. 3.1.13), динамічне геометричне середовище «GeoGebra».

Для динамічності відео та кращого сприйняття його студентами в глобальній мережі було знайдено «Інтро» та доєднано до нового проекту в «Inshot» (рис. А.2).

Далі розпочато розробку сторінок на дошці «CleverMaths» у стилі попередніх відеоуроків. Теорію взято із методичної розробки, а саме з теми «Гіперболоїди обертання». В процесі було розроблено 6 сторінок.

На першій сторінці вказано тему даного навчального ролику (рис. 3.4.5).

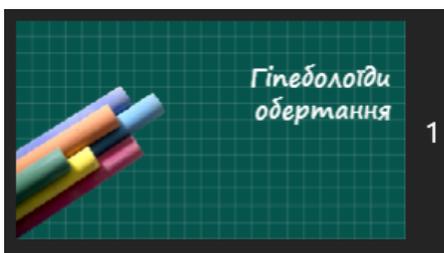


Рис. 3.4.5

Наступні три сторінки містять тему першого підпункту «однопорожнинний гіперболоїд обертання», а також відповідні рисунки, створені на платформі «GeoGebra» (рис. 3.2.1).

Останні слайди візуалізують інформацію про двопорожнинний гіперболоїд обертання з наявністю рисунками.

Тоді того здійснено запис екрану з одночасним виконанням письмових та усних пояснень з використанням мікрофону та відеокамери. Допоміг при цьому

програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Далі відео конвертовано в формат «mp4».

Тоді, після виконаних попередніх дій, в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4» (рис. 3.4.6).

Тепер даний навчальний ролик можна використовувати у процесі вивчення теми.

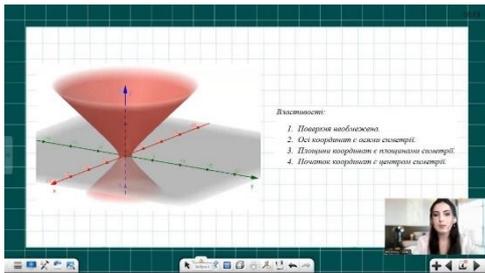


Рис. 3.4.6

Розробка практичного відеоуроку на тему «Гіперболоїди обертання» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Гіперболоїди обертання.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття гіперболоїда, систематизувати засвоєний матеріал про їх рівняння; навчити користуватись отриманими знаннями при виконанні практичних завдань;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Технічні засоби: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На початку заняття викладач оголошує тему: «Гіперболоїди обертання». Після цього для підготовки учнів до роботи демонструється короткий мультимедійний ролик, який допомагає створити належний настрій та зацікавити матеріалом.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На цьому етапі ведучий може змотивувати до навчання певними словами.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Установіть, що площина $z + 1 = 0$ перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гіперболі. Знайти його півосі та вершини.

Розв'язання:

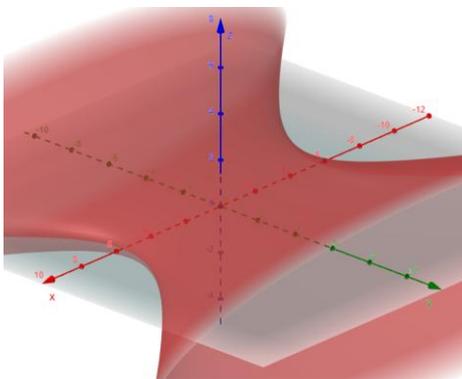


Рис. 3.4.7

Виразимо z з рівняння площини: $z = -1$.

Підставимо знайдене значення у рівняння однопорожнинного

гіперболоїда: $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{(-1)^2}{2} = 1$; $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{1}{2} = 1$; $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

Отже, ми отримали гіперболу, в якій $a = 4$, $b = 3$. Тоді вершини матимуть такі координати: $A_1(4; 0; -1)$, $A_2(-4; 0; -1)$.

2. Доказати, що однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ має одну спільну точку з площиною $5x + 2z + 5 = 0$ і знайти її координати.

Розв'язання:

$$\text{Запишемо систему: } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1 \\ 5x + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння виразимо z : $2z = -5 - 5x$;

$z = -\frac{5}{2} - \frac{5x}{2}$. Підставимо у перше рівняння значення z :

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{\left(-\frac{5}{2} - \frac{5x}{2}\right)^2}{25} = -1; \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{\frac{25}{4} + \frac{25x}{2} + \frac{25x^2}{4}}{25} = -1;$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} = -1; \quad \frac{4x^2}{12} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{12} = -1;$$

$$\frac{4x^2}{12} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{12} = -1; \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = -1;$$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 0; \quad x^2 + 3y^2 + 9 - 6x = 0.$$

Виділимо повний квадрат: $(x - 3)^2 + 3y^2 = 0$. $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 0$.

Тоді точка перетину має координати $x = 3$, $y = 0$. Знайдемо $z = -\frac{5}{2} - \frac{5x}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{5 \cdot 3}{2} = -10$. Тоді точка перетину буде $A(3; 0; -10)$.

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

Ведучий може повідомити про результати розв'язання задач із даного ролику.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Оголошено можливість багаторазового перегляду матеріалів у зручний час, а загальна тривалість заняття обмежена до 30 хвилин. Під час створення уроку використовувалися такі програмні засоби, як «CleverMaths» (рис. 3.1.13), «Microsoft PowerPoint» та мобільний додаток «Inshot». Для підготовки заняття застосовувались різні інструменти: штатив, кільцева лампа з тримачем для камери, відеокамера, додаткове підсвічування, інтерактивна дошка та мікрофон. На початку було знайдено й завантажено короткі красиві ролики для вступу та завершення заняття, що допомагають створити позитивну атмосферу та налаштувати глядачів на роботу. Далі записали детальні пояснення до кожної задачі біля інтерактивної дошки, використовуючи мікрофон, камеру та денне освітлення для забезпечення якості відео. У «Microsoft PowerPoint» були створені слайди. На них розміщені умови завдань, що розглядаються під час

заняття, далі проект був експортований у формат «mp4» (рис. 3.4.8). Усі відеоматеріали об'єднали та відредагували в «Inshot», отримавши фінальний матеріал. Відеозаняття є корисним інструментом для вивчення теми «Гіперболоїди обертання». Готовий відеоурок адаптований для використання в навчанні, що робить його універсальним інструментом. Додані мультимедійні елементи сприяють кращому сприйняттю матеріалу та підвищують інтерес учнів до теми. Завдяки логічній подачі та чіткому поясненню, цей інструмент допомагає учням швидше опанувати складні поняття та поглибити свої знання в темі «Гіперболоїди обертання».

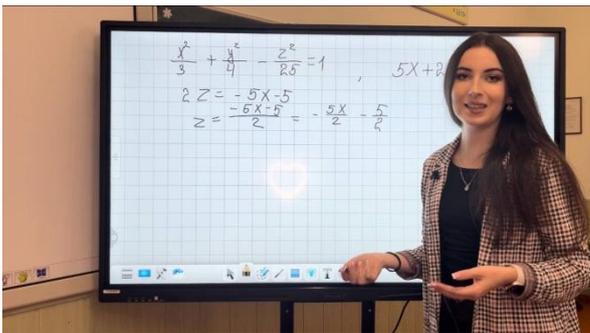


Рис. 3.4.8

Розробка відеоуроку на тему «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям параболоїдів, прямолінійними твірними поверхонь другого порядку та загальним рівнянням поверхонь другого порядку; навчити будувати та досліджувати рівняння цих поверхонь, формувати вміння застосовувати отримані знання на практиці.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на побудову та аналіз параболоїдів, прямолінійних твірних та інших поверхонь другого порядку; сприяти розвитку логічного та просторового мислення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нової інформації, формувати інтерес до аналітичної геометрії та її застосувань; сприяти розвитку старанності та наполегливості у вивченні складних тем.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! В цьому відеоуроці розглянемо гіперболоїди обертання та переглянемо їх властивості.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Параболоїд обертання.
- Еліптичний параболоїд.
- Гіперболічний параболоїд.

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

9. Підведення підсумків навчального відеоуроку.
10. Заклик до самостійної праці.

«Сподіваюсь, що це навчальне відео буде цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні теми «Поверхні обертання». Дякую всім за увагу!»

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість переглядати відео повторно.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка «CleverMaths» (рис. 3.1.13), динамічне геометричне середовище «GeoGebra» (рис. 3.3.1).

Для динамічності відео та кращого сприйняття його студентами в глобальній мережі було знайдено «Інтро» та доєднано до нового проекту в «Inshot» (рис. А.2).

Далі розпочато розробку сторінок на дошці «CleverMaths» у стилі попередніх відеоуроків. Теорію взято із методичної розробки, а саме з лекції на тему «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку». В процесі було розроблено 8 сторінок.

На першій сторінці вказано тему даного навчального ролику (рис. 3.4.9).

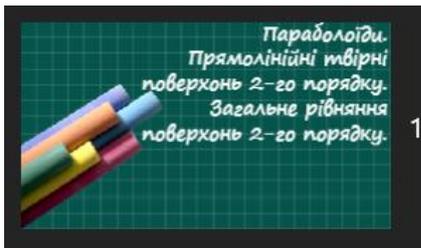


Рис. 3.4.9

Наступні три сторінки містять основні поняття параболоїда обертання, а також його властивості та рисунки, розроблені в сервісі «GeoGebra» (рис. 3.3.1).

Сторінки 5-6 візуалізують інформацію про еліптичний параболоїд.

На останніх слайдах розміщено матеріал останнього підпункту, а саме: «Гіперболічний параболоїд».

Далі здійснено запис екрану з одночасним виконанням письмових та усних пояснень з використанням мікрофону та відеокамери. Допоміг при цьому програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Далі відео конвертовано в формат «mp4».

Тоді, після виконаних попередніх дій, в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4».

Тепер даний навчальний ролик можна використовувати у процесі вивчення теми.

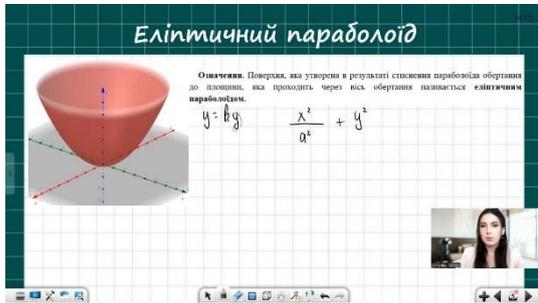


Рис. 3.4.10

Розробка практичного відеоуроку на тему «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття параболоїда, систематизувати засвоєний матеріал про прямолінійні твірні поверхонь другого порядку; навчити користуватись отриманими знаннями при виконанні практичних завдань;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Технічні засоби: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

І етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На початковому етапі педагог повідомляє тему заняття «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку», а також демонструється короткий мультимедійний ролик для налаштування глядачів на роботу.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На даному етапі ведучий може розповісти для чого потрібно вивчати тему та розв'язувати відповідні завдання.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Установити, що площина $y + 6 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболі. Знайти його параметр.

Розв'язання:

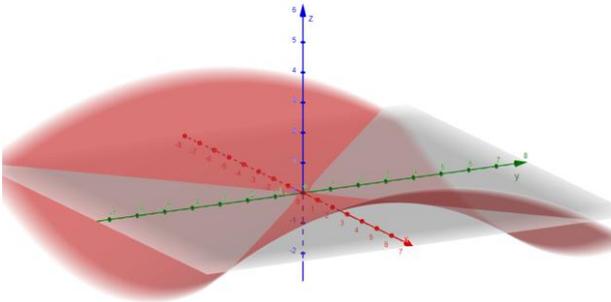


Рис. 3.4.11

Виразимо y з рівняння площини: $y = -6$. Тоді $y^2 = 36$

Тоді підставимо у рівняння гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{5} - \frac{36}{4} = 6z$;

$$\frac{x^2}{5} - 9 = 6z; x^2 = 5 \cdot (6z + 9); x^2 = 30 \cdot (z + 1,5);$$

Отже, параметр дорівнює 15.

2. Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$ має одну спільну точку з площиною $2x - 2y - z - 10 = 0$ і знайти її координати.

Розв'язання:

Запишемо систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y \\ 2x - 2y - z - 10 = 0 \end{cases}$$

Тоді з другого рівняння матимемо: $2y = 2x - z - 10$. Підставимо у перше рівняння і отримаємо:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2x - z - 10; 4x^2 + 9z^2 - 72x + 36z + 360 = 0;$$

Виділимо повні квадрати:

$$4(x^2 - 18x + 81) - 324 + 9z^2 + 36z + 360 = 0;$$

$$4(x^2 - 18x + 81) + 9(z^2 + 4z + 4) = 0;$$

$$4(x + 9)^2 + 9(z + 2)^2 = 0.$$

Тоді точки з координатами $x = 9$, $z = -2$. З попереднього рівняння знайдемо $2y = 2x - z - 10 = 18 + 2 - 10 = 10$. Тоді $y = 5$. Отже, точка перетину має координати $(9; 5; -2)$.

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

Педагог підводить підсумки, говорить про результати задач.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Було анонсовано можливість повторного перегляду матеріалів у зручний час, причому тривалість уроку обмежена 30 хвилинами. Для створення цього заняття використовувалися такі програмні інструменти, як «CleverMaths» (рис. 3.1.6), «Microsoft PowerPoint» і мобільний додаток «Inshot». Для підготовки заняття також застосовувалися технічні засоби, включно зі штативом, кільцевою лампою для камери, відеокамерою, додатковим підсвічуванням, інтерактивною дошкою та мікрофоном. Спочатку було знайдено та завантажено короткі вступні та заключні відеоролики, щоб створити сприятливу атмосферу для занять. Далі біля інтерактивної дошки було записано детальні пояснення до кожного завдання, забезпечуючи високу якість звуку та зображення за допомогою мікрофона, камери та денного освітлення. У «Microsoft PowerPoint» підготували слайди з умовами задач, розглянутих на занятті, після чого проект експортували у формат «mp4». Всі записані матеріали були об'єднані й відредаговані в «Inshot». Створене відеозаняття буде слугувати ефективним ресурсом для вивчення теми «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку» (рис. 3.4.12).

Підготовлений відеоурок можна використовувати в навчанні як універсальний інструмент. Додані мультимедійні елементи сприяють легкому сприйняттю матеріалу, підвищуючи інтерес учнів до теми. Завдяки чіткій структурі та зрозумілим поясненням, цей урок допоможе учням швидко освоїти складні концепції та глибше розібратися в темі «Параболоїди. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку. Загальне рівняння поверхонь другого порядку».

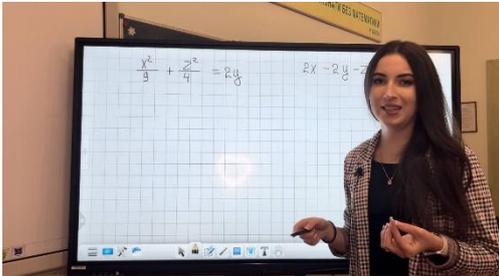


Рис. 3.4.12

Висновки

У даній роботі проаналізували літературні джерела, що присвячені тематиці дослідження, а також здійснили детальний аналіз теоретичних засад курсу «Аналітична геометрія» та розробили серію відеоуроків, які охоплюють ключові базові теми цього курсу.

До основних результатів роботи належать:

- опрацювання теоретичних основ курсу «аналітична геометрія»;
- систематизація та узагальнення матеріалу даного курсу;
- проведення аналізу на актуальність і доцільність створення методичного матеріалу для даного курсу;
- створення навчальних роликів для вивчення такого розділу математики, як «Аналітична геометрія».

Це дослідження стане цінним ресурсом для вивчення курсу «Аналітична геометрія» у закладах вищої чи середньої освіти. Застосування відеоуроків у навчанні забезпечить систематизації матеріалу та сприятиме кращій взаємодії між учасниками освітнього процесу. Такий сучасний підхід до вивчення матеріалів курсу зацікавить та змотивує здобувачів освіти до освоєння предмету, а також полегшить поглинання складного матеріалу.

Розробка якісного та детально продуманого навчального відео дає можливість зробити матеріал наочним, а також привернути увагу на базові моменти. Це позитивно впливає на мотивацію студентів до навчання. Крім того, такі ресурси є особливо корисними для студентів із обмеженими можливостями. Вони забезпечують доступність і оптимізацію процесу навчання для всіх категорій здобувачів освіти.

Аналіз, проведений у ході дослідження, підтвердив ефективність і практичність використання сучасних освітніх ресурсів, таких як навчальні відео. Вони дозволяють швидко, легко та зручно опанувати необхідні компетенції в межах освітнього процесу.

Список використаної літератури

1. Андрищенко, Н. (2014). Дистанційне навчання в Україні: експерименти, напрацювання, перспективи. Вища школа, (5/6), 60-63.
2. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Е.Г.Позняк. Геометрія, 10-11.М., Просвещение, 2003.
3. В.Н.Літвіненко. Практикум з елементарної математики. стереометрія: Навчальний посібник.-М.: Вербум-М, 2000.
4. І.М.Гельфанд, Е.Г.Глаголева, А.А.Кіріллов. Метод координат.-М.: Наука, 1968.
5. С.Г.Грігорьев. Векторна алгебра і аналітична геометрія. Навчальний посібник з вищої математики.-М.: Інформаційно-впроваджувальний центр «Маркетинг», 2000.
6. І. Іванова, З.Ільченкова. Застосування координатного вектора до вирішення стереометричних задач // Математика, 2007, №2.
7. А.В.Дорофеев. Декарт і його геометрія.// Математика, 1992, №4.
8. Жолудова О. Лучшие программы для создания обучающих видео: полный обзор [Електронний ресурс] / Ольга Жолудова – Режим доступу до ресурсу: <https://www.ispring.ru/elearning-insights/best-programms-for-edu-videos>.
9. Створення навчального відео (Методичний діалог) [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://vseosvita.ua/library/stvoreнна-navcalnogo-video-metodicnij-dialog-377066.html>.
10. Як створити відео урок? [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://blog.gvmir.com/?p=255>.
11. Как сделать обучающее видео в офисе или дома — пошаговое руководство. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.ispring.ru/elearning-insights/kak-sdelat-videourok-v-ofise>
12. Чалиев А.А. Видеоурок как перспективная информационная технология обучения в вузах. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: www.science-education.ru/119-15233.

13. Создание видеоуроков как альтернативной формы обучения [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <http://fastform.ru/10-klass/sozdanie-video-urokov-kak-alternativnoi-formy-obucheniia/>.

14. Усик В.В. Разработка видеоуроков для повышения качества изучения теории автоматического управления /В.В. Усик, А.В. Пономарева, А.Н. Костюк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Вып. 2 (48)/ том 6 / 2010. – С. 57-60.

15. Кулебацкий В. Н. Создание видеоуроков для обучающего процесса [Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <http://ito.edu.ru/2010/Rostov/V/2/V-2-6.html>.

16. Видеоурок: характеристика и методика проведения.[Электронный ресурс].– Режим доступа до ресурсу: https://www.oo.my1.ru/_tbkp/videourok.docx.

17. Как создать видеоурок.[Электронный ресурс]. – Режим доступа до ресурсу: <http://prouspex.com/2011/02/kak-sozdat-videourok/>.

18. Методология разработки видеоуроков. // Харьковский национальный экономический университет имени С. Кузнеца. – 2015. – С. 186–189.

19. Дробот І. В., Колесник І. В. Використання сучасних інформаційних технологій при розробці електронних посібників [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://referatua.org.ua/category_content.php?c=information&id=1444&s=1

20. Технологія створення електронного навчального посібника [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://ua-referat.com/> Технологія створення електронного навчального посібника

21. Як зробити відео уроки за допомогою безкоштовних відео програм? [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://demisroussos.net/jakzrobite-video-uroki-za-dopomogou/>

22. Як створити відео урок? [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://blog.gvmir.com/?p=255>

23. 10 программ для создания видео уроков [Электронный ресурс]. Режим доступу: <http://ruller.com/lesson.php?id=230&rub=28>

24. Windows Media Encoder [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://windows-media-encoder.ru.uptodown.com>

25. TipCam. Офіційний сайт [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.newestsoft.com/Windows/Audio-Multimedia/MultimediaCreation-Tools/TipCam.html>

26. Никонов О. А. Становление аналитической геометрии и принцип дополнительности / Олег Александрович Никонов. // Мурманский государственный технический университет.

27. Підручник Геометрія 9 клас - Г П. Бевз - Освіта 2017 рік [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://subject.com.ua/textbook/mathematics/9klas_8/60.html

28. Ткачук Г. ОСОБЛИВОСТІ ВИГОТОВЛЕННЯ ВІДЕОМАТЕРІАЛІВ З ТЕХНІЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ / Галина Ткачук. – С. 3–4.

29. Як створити навчальне відео власноруч? [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://teach-hub.com/yak-stvoryty-navchalne-video/>.

Додатки

Додаток А. Розробка відеоуроків на тему «Розв'язування афінних та метричних задач методом векторів» та «Метод координат» з аналітичної геометрії на площині.

Розробка відеоуроку на тему «Розв'язування афінних задач методом векторів» з аналітичної геометрії на площині.

Щоб розв'язати задачі даним методом, необхідно володіти знаннями про властивості векторів та розуміти їхні головні особливості. Головна перевага такого підходу полягає в тому, що немає потреби працювати зі складними геометричними конструкціями. Використовуючи векторний підхід, задачу можна спростити та подати у алгебраїчній формі, що значно полегшує процес її розв'язання.

Задачі, що розв'язуються даним методом, поділяються на два типи: метричні та афінні. Для розв'язання афінних задач застосовуються так звані лінійні операції: додавання, віднімання та множення вектора на число. Найчастіше такі задачі спрямовані на доведення: встановлення паралельності прямих або перевірка, чи лежать задані точки на одній прямій.

Задачі афінної складової геометрії можемо поділити на:

- задачі на визначення можливості побудови трикутника за відрізками, що задані в умові;
- задачі на перевірку колінеарності векторів та їх застосування;
- задачі, що потребують застосування деяких векторних тотожностей;
- задачі, засновані на розкладі вектора за визначеними компонентами;
- задачі на використання умови компланарності векторів;
- задачі, в яких потрібно довести певне розміщення точок;
- задачі встановлення, що чотирикутник є паралелограмом;
- задачі, які пов'язані із бісектрисою кута.
- задачі на використання умови, що чотири точки належать одній і тій самій площині;

Тема даного відеоуроку: Розв'язування афінних задач методом векторів.

Тип відеоуроку: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид відеоуроку: відеоурок.

Мета даного відеозаняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття вектора; поглибити їх розуміння про властивості векторів; розвинути навички розв'язувати афінні задачі за допомогою векторів;

розвивальна: розвивати творчі та пізнавальні здібності студентів; сприяти удосконаленню набутих навичок;

виховна: виховувати інтерес до навчання аналітичної геометрії та позитивне ставлення до вивчення точних наук, а саме даного курсу.

Підручні засоби: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, відеокамера.

Етапи відеоуроку:

I етап. Організаційний момент (Інтро) (2 – 3 хв.)

У цьому етапі відбувається тематична заставка, а після привітання з глядачами. Такий момент вважається одним із важливих, адже створюється позитивне ставлення в аудиторії до відео і формується бажання переглядати відеозаняття.

Приблизне привітання може звучати наступним чином: «Привіт! У даному відео ми будемо розглядати задачі з теми «Розв'язування афінних задач методом векторів».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Цей етап включає короткий опис про важливість розуміння теми у сучасному світі.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

В третьому етапі відбувається детальний розгляд задач з даної теми. Ментор з допомогою опорного конспекту розповідає та демонструє алгоритм розв'язку завдань, коментуючи при цьому складні моменти.

IV етап. Підсумки заняття (1 – 2 хв.)

На моменті етапу підведення підсумків ментор робить висновок із вище сказаного та повідомляє про виконання цілей.

V. Повідомлення домашнього завдання (1 – 2 хв.)

Наприкінці повідомляється про можливість повторного багаторазового перегляду заняття.

Тривалість даного практичного заняття може тривати не більше 22 хв.

При створенні цього заняття були в користуванні такі засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) та мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2). Перед початком роботи було знайдено «Інтро»: короткий ролик, що не несе змісту (рис. А.3).



рис. А.1



рис. А.2

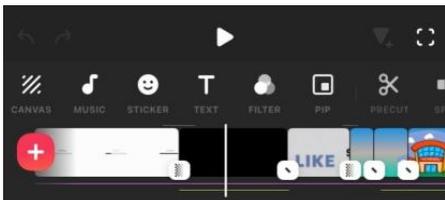


рис. А.3

Після того здійснювався запис відео біля дошки з детальними поясненнями задач. Далі ті фрагменти були приєднані до готового проекту. Для того, щоб пояснення у відеоуроці були детальними у «Microsoft PowerPoint» створювались короткі ролики. Також за допомогою мікрофону був записаний звук, що слугував додатковим поясненням до важчих частин заняття.

Для відеозаняття важливо забезпечити динамічність та не складне подання інформації. Такі характеристики досягаються за рахунок того, що використовуються невеликі яскраві фігури і зрозумілі пояснення. У такому

відео можна помітити, що наявні кольорові стрілки, які вказують на ключові моменти, та цікаві анімації, що підсилюють емоційний ефект та сприяють заохоченню глядачів. Сучасні молоді люди успішно поєднують навчання з відпочинком, тому й у відеозанятті використано музичний супровід, що сприяє розслабленню й паралельно ефективному засвоєнню матеріалу.

Результат збережено, після того, у формат «mp4». Готовий результат можна використовувати, як інструмент, для успішного освоєння певної теми (рис. А.4).



рис. А.4

Розробка відеоуроків на тему «Розв'язування метричних задач методом векторів» з аналітичної геометрії на площині.

Задачі, що виконуються методом векторів, класифікуються наступним чином: метричні, афінні. В перших окрім операцій лінійних ще використовується скалярний добуток векторів, множення вектора на число; здебільш вимагається довести паралельність прямих, довести, що дані точки розміщені на одній прямій тощо.

При розв'язанні метричних задач використовується ознака взаємної перпендикулярності двох ненульових векторів, в основі якої лежить необхідна та достатня умова рівності скалярного добутку векторів та нуля.

Задачі метричної частини геометрії можемо поділити:

- задачі на ознаку перпендикулярності векторів;
- задачі на векторну формулу точок чотирьох;
- задачі на перпендикулярність прямої і площини;
- задачі на визначення довжини відрізка;
- задачі на відстань між мимобіжними прямими;

- задачі на визначення кута;
- задачі на застосування векторів, щоб довести певні геометричні нерівності.

Тема даного відеоуроку: Розв'язування метричних задач методом векторів.

Тип відеозаняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид відеоуроку: відеоурок.

Мета даного відеозаняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття вектора; поглибити їх розуміння про властивості векторів; розвинути навички розв'язувати метричні задачі за допомогою векторів та на основі отриманих теоретичних відомостей;

розвивальна: розвивати творчі та пізнавальні здібності студентів; сприяти удосконаленню набутих навичок;

виховна: виховувати інтерес до навчання аналітичної геометрії та позитивне ставлення до вивчення точних наук, а саме даного курсу.

Підручні засоби: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, відеокамера.

Хід відеозаняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

На цьому етапі демонструється короткий ролик «Інтро» та відбувається привітання з глядачами. Текст, що може звучати на початку: «Привіт, друзі! На занятті ми розглянемо метод векторів при розв'язуванні метричних задач».

II етап. Мотивація і стимулювання учнів до навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

У цій частині відео ментор мотивує учнів до вивчення теми, проговорює план заняття та пропонує переглянути короткі, проте головні теоретичні відомості.

Вектор - це відрізок, що має довжину та свій напрямок. Для кожного вектора на площині можна у відповідність поставити 2 числа, які зуть координатами (x, y) .

Додавання та віднімання векторів є відносно простими операціями. Додавання відбувається за правилом $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, де a та b - це є

координати даних векторів. Іншу операцію можемо описати наступним чином: $(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

Скалярний добуток векторів - це є число, яке можна знайти, користуючись формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$. Скалярний добуток векторів дозволяє шукати кути між векторами, а також проєкції векторів на інші.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На третьому етапі ментор пропонує розв'язки до задач з певної теми.

IV етап. Підсумок заняття (1 хв.)

Ментор повідомляє про кінець заняття та виконання поставлених на початку заняття цілей. Приблизний текст, що може бути проговорений наприкінці, виглядає так: «Метод векторів є сильним інструментом, що допомагає знаходити рішення в складних задачах з курсу аналітичної геометрії. Використавши його, можна знаходити відстані між заданими точками, кути між певними векторами та площі фігур і т. п.. Вектори надають змогу геометричні об'єкти описувати числами, що слугує полегшенню у розв'язанні складних завдань.

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

На останньому етапі викладач може повідомити про можливість переглянути відеозаняття ще раз.

Тривалість заняття не перевищує 20 хв.

При створенні практичного заняття були використанні деякі засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2). «Інтро» було попередньо знайдене у глобальній мережі та додано до нового проекту у «Inshot» (рис. А.3).

Після того у «Microsoft PowerPoint» була почата праця над розробленням слайдів. Фоном слугувала клітинка, адже студенти звикли бачити її у зошитах. Такий підхід сприятиме кращому засвоєнню матеріалу (рис. А.5).

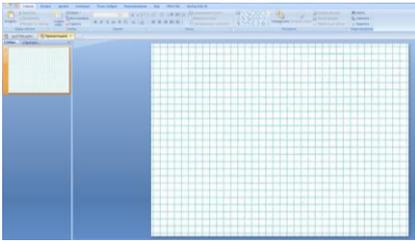


рис. А.5

Слайдів було створено 7. На перших трьох слайдах розміщувалась коротка теоретична частина, без якої розв'язування задач було б неможливим завданням. Такий метод надасть можливість нагадати студентам головні відомості з теми. Дані слайди містили анімацію, що допоможе краще зануритись у матеріал (рис. А.6).

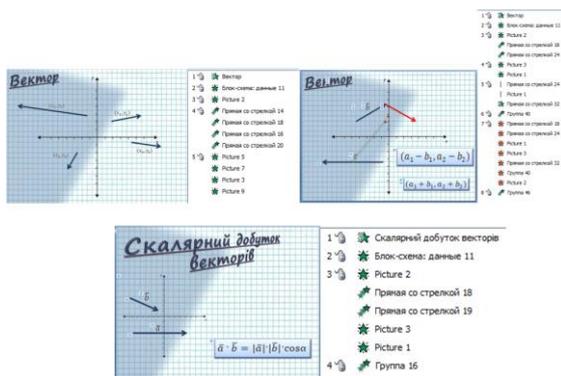


рис. А.6

В наступних двох слайдах розміщено умову задачі, що необхідно розв'язати. Анімація теж присутня на них, як і на попередніх. Це дозволяє тримати постійно увагу глядача.

П'ятий та шостий слайди містять підказку до розв'язання, а саме формули, яким студенти повинні скористатись, щоб отримати результат. Такі дії теж допоможуть пригадати матеріал і краще засвоїти його. Аналогічно до попередніх слайдів, анімації присутня.

Сьома сторінка є завершальною, оскільки містить надпис «Дякую за увагу» та об'єкт у вигляді руки із фломастером. Анімація налаштована таким чином, ніби текст написаний від руки. Такий динамічний прийом не залишить глядача байдужим і він обов'язково буде готовий до перегляду наступних роликів (рис. А.6).

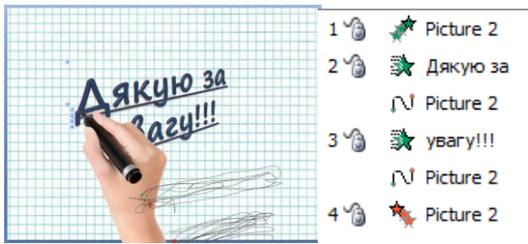


рис. А.6

Далі проект збережено у популярному форматі «mp4».

Мікрофон надав можливість здійснити запис детального коментаря та опису певних дій у відео. У мобільному застосунку «Inshot» всі матеріали, а саме: відео із «Microsoft PowerPoint», раніше завантажене інтро, звук коментаря, мелодія для фону, а також попередньо зняті на камеру пояснення завдань, було приєднано до одного проекту. Готовий ролик, що експортований у популярний формат можна використовувати при навчанні (рис. А.7).

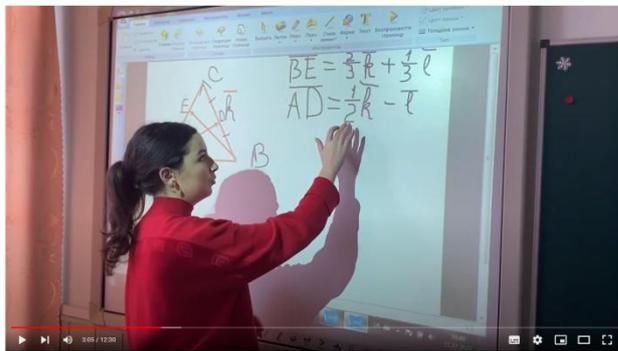


рис. А.7

Розробка відеоуроку на тему «Метод координат на площині» з аналітичної геометрії на площині.

Метод координат часто використовується при розв'язанні геометричних задач з аналітичної геометрії. Головна ідея методу полягає у тому, що будь-якій точці, де б вона не знаходилась, ставиться число у відповідність. У нашому випадку це буде пара чисел. Їх називають координатами точки. Такий метод дозволяє легко, без труднощів розв'язувати задачі та аналізувати їх.

Розглянемо детальніше розробку відеозаняття з цієї теми.

Тема даного відеоуроку: Метод координат на площині.

Тип відеозаняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: відеоурок.

Мета:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття методу координат; поглибити їх розуміння про властивості цього методу; розвинути навички знаходити координати точки та працювати з ними на основі отриманих теоретичних відомостей;

розвивальна: розвивати творчі та пізнавальні здібності студентів; сприяти удосконаленню набутих навичок;

виховна: виховувати інтерес та позитивне ставлення до вивчення точних наук, а саме даного курсу.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

На цьому етапі відбувається привітання із потенційними глядачами та короткий ролик «Інтро», що не несе змістового вантажу. Слова, які можуть бути сказані ментором, виглядають так: «Вітаю вас, дорогі студенти! У відео ми будемо говорити про метод координат на площині в курсі аналітичної геометрії. Він є сильним інструментом, що допомагає розв'язувати геометричні завдання. У відео будуть розглянуті основні поняття, які повинні знати усі».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На третьому етапі відбувається обговорення плану та цілей на відеоурок, формується мотивація у студентів. Присутнім також є невеликий обсяг головної інформації з теми, що забезпечить правильний результат при виконанні завдань.

Суть методу полягає у тому, що на площині будь – якій точці є можливість поставити у відповідність пару чисел, які є x -координатою та y -координатою.

Інший важлива сторона методу координат - це те, що точками на площині можна керувати за допомогою всіляких арифметичних операцій та

алгебраїчних формул. Наприклад, розглянемо відстань між точками. Її значення ми можемо знайти скориставшись формулою:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, де (x_1, y_1) та (x_2, y_2) це координати відповідно двох точок.

Система координат – одне з важливих понять, яке є способом відображати на площині точки за допомогою відповідних чисел. Найчастіше використовують прямокутну систему координат, що складається з двох осей - осі x і осі y , які є перпендикулярними.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На третьому етапі розглядаються приклади розв'язань певних задач.

IV етап. Підсумки (1 хв.)

Ментор, на цьому етапі, повідомляє про досягнення поставлених цілей. Його текст може виглядати наступним чином:

«Отже, ми розглянули ключові аспекти методу координат у площині в рамках аналітичної геометрії та розібрали кілька прикладів, що сприятимуть кращому розумінню теми. Нагадаємо, що метод координат є ефективним інструментом для розв'язання задач аналітичної геометрії. З його допомогою можна обчислювати координати точок, визначати відстані між точками та прямими, знаходити кути між векторами й прямими, складати рівняння прямих та розраховувати інші параметри геометричних фігур у площині.

Варто пам'ятати, що перед розв'язанням задач важливо ознайомитися з теоретичними основами методу координат і чітко сформулювати умову. Під час роботи можна застосовувати як векторний метод, так і метод координат, або комбінувати їх залежно від специфіки задачі.

Сподіваюся, цей відеоурок був для вас корисним та допоможе глибше осягнути цей метод у аналітичній геометрії. Бажаю успіхів у навчанні!»

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

Повідомлення про повторний перегляд відео уроку для засвоєння знань.

Заняття не перевищує 20 хв.

При створенні практичного заняття були використанні деякі засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2). «Інтро» було попередньо знайдене у глобальній мережі та додано до нового проекту у «Inshot» (рис. А.3).

Аналогічно до попередніх розробок, фоном у відео слугує клітинка, яка була додана у програмний засіб «Microsoft PowerPoint». (рис. А.5). Там же й було розроблено 9 сторінок.

На першому слайді розміщено коротку головну інформацію, що необхідно знати при розв'язуванні даних задач. Анімація надала слайдам динамічності та цікавості. На другому, четвертому та шостому слайдах було представлено умови завдань для розв'язання. Щоб відео виглядало цілісним і привабливим, для цих слайдів було використано плавні анімації.

Третій, п'ятий і сьомий слайди містили підказки із необхідними формулами, що допомагають пригадати матеріал перед виконанням завдань. Анімація появи та зникнення на цих слайдах додала динамічності та покращила сприйняття інформації.

Сьомий слайд також включав повне розв'язання третьої задачі, доповнене ілюстраціями, текстовими поясненнями та формулами.

Завершальний, восьмий слайд містив напис «Дякую за увагу», що залишить позитивне враження у глядачів. Ефект руки з маркером, яка малює цей напис, додає інтерактивності та створює приємний фінальний акцент.

Після всіх пророблених дій відео було збережено у форматі «mp4».

Запис коментаря для цих слайдів було виконано за допомогою мікрофона. У мобільному додатку «Inshot» було об'єднано всі елементи: відео, підготовлене в «Microsoft PowerPoint», інтро, запис коментаря, музичний супровід, знайдений в інтернеті, а також попередньо зняте пояснення задач на камеру. Всі ці компоненти зібрано в один проект.

Готова робота збережена і експортована у формат «mp4». Відеозаняття може бути задіяне у процес вивчення даної теми (рис А.8).



рис А.8

Додаток Б. Створення сценарію відеоуроків, присвячених темі прямих з аналітичної геометрії на площині.

Розробка відеоуроку на тему «Різні види рівнянь прямої. Відстань відхилення точки від прямої» з аналітичної геометрії на площині.

У геометрії існує кілька типів задач, що стосуються теми «Різні види рівнянь прямої». Зокрема, це можуть бути завдання на визначення загального рівняння прямої, векторного рівняння прямої, параметричного рівняння прямої та канонічного рівняння прямої. Також зустрічаються задачі на знаходження рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, або рівняння прямої, для якої відомі точки перетину з осями. Додатково, можуть бути задачі на визначення рівняння прямої, в якій відомий кутовий коефіцієнт, або ж рівняння прямої за заданим кутовим коефіцієнтом і точкою, через яку вона проходить. Ще однією варіацією є знаходження рівняння прямої за відомим кутовим коефіцієнтом та нормальним вектором.

Тема: Різні види рівнянь прямої. Відстань відхилення точки від прямої.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: відеоурок.

Мета:

навчальна: систематизувати знання учнів про поняття рівняння прямої; поглибити їх розуміння властивостей формування рівняння прямої; розвинути навички знаходження рівняння прямої за визначеними умовами;

розвивальна: Сприяти розвитку пізнавальних здібностей учнів; допомогти вдосконалити обчислювальні навички та логічне мислення;

виховна: Формувати позитивне ставлення до навчання та зацікавленість у вивченні аналітичної геометрії на площині.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

У цьому етапі відбувається тематична заставка, а після привітання з глядачами. Розглянемо, якими можуть бути слова ментора: «Вітаю! Сьогодні на уроці ми детально розглянемо тему «Різні види рівнянь прямої. Відстань відхилення точки від прямої»».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На даному етапі відбувається визначення цілей а також формування мотивації у студентів до вивчення даної теми.

Рівняння прямої — це алгебраїчне рівняння, що описує пряму на площині. В аналітичній геометрії можна зустріти кілька різних типів рівнянь прямих. Тому перед переглядом цього відеоуроку рекомендується уважно ознайомитися з теоретичними аспектами цієї теми.

Для того, щоб знайти відстань відхилення точки від прямої, потрібно спочатку зрозуміти, як це виглядає. Це буде відстань між точкою і перпендикуляром, який опущений на пряму з заданої точки. Формула виглядає так: $m \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де A, B, C - це будуть коефіцієнти рівняння прямої.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На даному етапі відбувається розв'язок завдань, що пропонуються для цієї теми.

IV етап. Підсумки (1 хв.)

На даному етапі відбувається обговорення про виконання поставлених цілей.

Після того, як викладач продемонструє розв'язання прикладів, важливо підкреслити значення розуміння складання різних типів рівнянь прямих та формули для визначення відстані від точки до прямої в аналітичній геометрії на площині. Також варто зазначити, що ці знання знадобляться у багатьох сферах, таких як: наука і техніка.

На завершення відеоуроку корисно підсумувати основні аспекти, які були обговорені під час заняття. Важливо надихнути учнів на продовження вивчення

аналітичної геометрії на площині та спонукати їх до дослідження нових матеріалів у цій галузі.

Відеоурок можна завершити подякою та зазначенням авторства. Це можуть бути слова: «Дякуємо, що переглянули цей відеоурок з аналітичної геометрії. Урок був підготовлений на основі актуальних знань та рекомендацій у цій сфері. Сподіваємося, він стане корисним для вас у засвоєнні матеріалу та підготовці до наступних уроків з аналітичної геометрії. До нових зустрічей у наступних відеоуроках!»

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

Повідомлення про те, що урок можна переглядати безліч разів.

Відеозаняття може максимально зайняти 20 хв.

При створенні практичного заняття були використанні деякі засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2). «Інтро» було попередньо знайдене у глобальній мережі та додано до нового проекту у «Inshot» (рис. А.3).

Спочатку було відкрито певний програмний засіб (рис. А.1) та почато створення слайдів. Підібрано фон, а саме - клітинку (рис. А.5).

За допомогою «Microsoft PowerPoint», розроблено презентацію, що складалась з 11 слайдів.

На першому слайді представлена тема відеоуроку, а також зображення «руки», що її малює.

Наступні три слайди містять стислі теоретичні відомості, які варто пригадати перед переглядом відеоуроку. Анімація для об'єктів на цих слайдах була схожою.

П'ятий, сьомий та дев'ятий слайди включають описи завдань, які потрібно вирішити. Для цих слайдів також була використана анімація, щоб покращити сприйняття матеріалу презентації.

Шостий та восьмий слайди виконують роль підказок для вирішення запропонованих задач. Вони містять текстові поля, фігури та малюнки, а також включають анімацію для певних елементів.

У десятому слайді надається пояснення та розв'язок третьої задачі, включаючи малюнки, фігури та текстове поле. Для всіх елементів на цьому слайді застосовано різноманітну анімацію.

На останньому слайді розміщено текстове поле з написом «Дякую за увагу», щоб здобути довіру аудиторії. Завдяки анімації створено ефект, ніби об'єкт «рука» малює цей текст.

Формат результату було обрано такий «mp4».

Запис голосу виконано з використанням петличного мікрофона. Відео пояснення, яке було попередньо зняте біля дошки, голосовий коментар, експортована презентація та інтро були об'єднані в єдиний проект і за допомогою мобільного додатку «Inshot» відредаговано до цілісного ролику. Готовий мультимедійний інструмент у форматі «mp4» може бути залучений в навчальному процесі (рис. Б.1).



рис. Б.1

Розробка відеоуроку на тему «Взаємне розміщення двох прямих» з аналітичної геометрії на площині.

Тема: Взаємне розміщення двох прямих

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: скрінкаст.

Мета:

навчальна: упорядкувати знання студентів про поняття розміщення прямих на площині; поглибити знання учнів про основні властивості їх розміщення; покращити вміння учнів шукати рішення задач за отриманими знаннями;

розвивальна: розвивати творчі здібності учнів; допомагати процесу вдосконалення обчислювальних навичок;

виховна: виховувати позитивне відношення до навчання, а також інтерес до вивчення курсу аналітичної геометрії.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера.

Хід відеозаняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

На даному етапі демонструється заставка «Інтро», після ментор повинен привітатися із аудиторією та розповісти про план дій. Слова, що може промовляти педагог: «Привіт всім, хто хоче знати більше! Сьогодні обговоримо взаємне розташування двох прямих на площині. Оскільки ця тема є доволі складною, ми розбиратимемо її поступово, крок за кроком».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

На даному етапі відбувається стимулювання учнів до навчання, обговорення плану, а також розгляд короткої теоретичної частини.

Пряма — це нескінченно тонка лінія, що складається з безкінечної кількості точок, розташованих у певному порядку. Кожну точку на прямій можна задати координатами (x, y) .

Вектор — це є напрямлений відрізок, який містить початкову та кінцеву точки. Він описується координатами (x, y) та позначається стрілкою над літерою.

Існують три можливі варіанти взаємного розташування двох прямих, а саме: перетин, паралельність і накладання.

Перетин відбувається, коли дві прямі перетинаються в одній точці. Паралельність означає, що дві прямі розташовані на однаковій відстані одна від одної та ніколи не перетинаються. Накладання має місце тоді, коли обидві прямі збігаються і повністю співпадають одна з одною.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На даному етапі відбувається обговорення розв'язань практичних задач. Педагог повинен детально розповісти про особливості алгоритму вирішення завдань.

IV етап. Підсумки (2 хв.)

На даному етапі заняття відбувається обговорення підсумків. Слова, які може промовити педагог: «Ось і підійшов до кінця наш урок про взаємне розташування двох прямих на площині. Сподіваюся, матеріал був зрозумілим і корисним для вас. Дякую за вашу увагу!»

V етап. Домашнє завдання (2 хв.)

Студентам можна повідомити про додатковий перегляд заняття. Максимальна тривалість даного практичного заняття може досягати 20 хв.

При розробці практичного заняття використовувались наступні засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «IPBOARD Software 9» (рис. Б.2) та «ZD Soft Screen Recorder» (рис. Б.3).



рис. Б.2



рис. Б.3

Для створення інтро були попередньо знайдені мультимедійні фрагменти в інтернеті та об'єднані за допомогою мобільного додатка. Розроблення презентації розпочали у програмі «Microsoft PowerPoint», де для фону обрали дизайн у вигляді клітинки, що нагадує сторінку зошита.

Презентація складалася з 9 слайдів. На першому розмістили об'єкти «рука з фломастером» та текстове поле, до яких додали анімаційні ефекти, створюючи враження, що рука малює текст. Другий, третій та четвертий слайди містили теоретичний матеріал з відповідної теми, включаючи геометричні фігури (п'ятикутник, квадрат, овал) та текстові блоки.

Завдання до задач розмістили на п'ятому та шостому слайдах. Шостий та восьмий слайди містили додаткові пояснення у вигляді формул і короткого тексту, які допомагають у розв'язанні задач. На завершальному слайді знову

використали «руку з фломастером» та текст «Дякую за увагу», забезпечивши ефектну анімацію для залучення глядачів до перегляду майбутніх уроків.

Після завершення роботи презентацію було експортовано у формат «mp4». Далі розв'язування задач виконувалося у програмі «IPBOARD Software 9», яка дозволяє створювати малюнки та креслення. Запис екрану здійснювався через «ZD Soft Screen Recorder».

Для кращого розуміння матеріалу було знято окреме відео з поясненнями. У додатку «Inshot» усі частини об'єднали в єдиний проєкт, а для покращення сприйняття додали музичний фон. Після фінального редагування готовий відеоматеріал зберегли у форматі «mp4». Тепер відеоурок повністю готовий для використання в освітньому процесі (рис. Б.4).

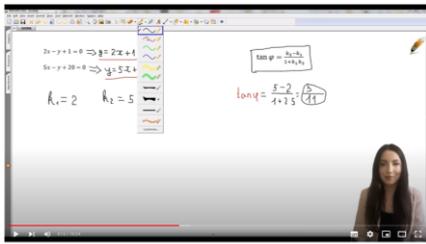


рис. Б.4

Додаток В. Розроблення навчальних роликів для ліній другого порядку з аналітичної геометрії на площині.

Розробка відеоуроку на тему «Еліпс. Гіпербола. Парабола» з аналітичної геометрії на площині.

Тема: Еліпс. Гіпербола. Парабола.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: відеосупровід

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання студентів про поняття лінії другого порядку; поглибити знання, тих, хто навчається, про властивості еліпса, гіперболи, параболи; сформувати вміння учнів шукати способи розв'язання задач за отриманими знаннями;

розвивальна: розвивати творчі здібності учнів; допомагати вдосконалювати обчислювальні навички;

виховна: сприяти формуванню позитивного ставлення до вивчення, а також інтересу до навчання.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

На цьому етапі демонструється ролик «Інтро», а також повідомляється тема заняття. «Привіт, друзі! Сьогодні будуть розглянуті такі фігури на площині, як: еліпс, гіпербола та парабола. Ми поговоримо детально про їх особливості та властивості».

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Цей етап включає формування мотивації у студентів та обговорення теоретичної інформації, що може знадобитись при розв'язуванні задач.

Розпочнемо з такої фігури, як еліпс. Це є фігура, що складається з усіх точок площини таких, що сума відстаней від будь – якої точки до двох фіксованих, називається фокусами, є сталою. Формула даної лінії виглядає наступним

чином: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Основні елементи еліпса: півосі a , та b , фокуси і ексцентриситет.

Далі переглянемо гіперболу. Це є фігура, що складається з усіх точок на площині, для яких різниця відстаней до двох певних точок, які називаються фокусами, є постійно однаковою. Рівняння гіперболи виглядає наступним чином: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Основними елементами гіперболи є відстань між фокусами, асимптоти та ексцентриситет.

Тепер, переглянемо параболу. Фігура називається параболою, якщо вона складена з усіх точок площини, для яких відстань до певної точки, що називається фокусом, дорівнює відстані до відповідної прямої, яка називається директрисою. Тоді рівняння параболу буде мати вигляд: $y^2 = 2Px$.

Основними елементами параболу є директриса, фокус та вершина.

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

Переходячи від теорії до практики, переглянемо кілька прикладів задач, які можна розв'язати, використовуючи знання про еліпс, гіперболу та параболу. Для кожної задачі буде поетапно показано процес розв'язання та з допомогою ментора пояснено, які формули і методи необхідно використовувати.

Згідно з планом практичного заняття, кожна задача буде проаналізована детально, щоб забезпечити глибше розуміння матеріалу та продемонструвати правильний підхід до вирішення таких задач.

IV етап. Підсумки (1 хв.)

1. Повідомлення про одержанні результати.

«Підійшовши до завершення нашого уроку, підсумуємо: ми детально ознайомилися з трьома фігурами на площині — еліпсом, гіперболою та параболою — та розглянули їх ключові властивості. Сподіваюся, що цей урок був для вас корисним і сприяв кращому розумінню аналітичної геометрії на площині. Дякую за вашу увагу та активність!»

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

Ментор має змогу повідомити про багаторазове використання.

Найбільше відео може тривати 20 хв.

При розробці практичного заняття використовувались наступні засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «IPBOARD Software 9» (рис. Б.2) та «ZD Soft Screen Recorder» (рис. Б.3).

Для створення інтро були знайдені та об'єднані мультимедійні файли з глобальної мережі за допомогою мобільного додатка. Це дало змогу зробити відеоурок більш цікавим та привабливим для глядачів. Спершу була відкрита програма «Microsoft PowerPoint» та розпочата розробка слайдів, що стали фундаментом нашої презентації. Як фон обрано зображення у вигляді клітинки, що нагадує зошит, це додало навчальному матеріалу естетичного та зрозумілого вигляду. Презентація складалася з 11 слайдів.

На першому слайді розмістили об'єкт «рука з фломастером» і текст, що представляє тему уроку. Слайди з другого по четвертий містять теоретичний матеріал, який необхідно пригадати перед переглядом відеоуроку. На цих слайдах зображено фігури такі як: еліпс та текстові блоки. Також були застосовані анімаційні ефекти для того, щоб підвищити інтерес учнів до матеріалу.

П'ятий, сьомий і дев'ятий слайди поміщали умови задач, які потребували розв'язку. Всі деталі завдань і відповідні анімації були чітко промальовані, щоб забезпечити легкість у сприйнятті інформації. Шостий, восьмий та десятий слайди вміщали підказки для розв'язання задач — текстові блоки з формулами для розрахунків, що сприяло кращому розумінню теми.

На останньому слайді розмістили зображення «рука з фломастером» і напис «Дякую за увагу», підсилений анімацією. Таке завершення уроку залишає у глядачів позитивне враження і сприяє повторному перегляді. Презентація була експортована у формат «mp4».

Далі за допомогою програми «ZD Soft Screen Recorder» був записаний екран, а саме на інтерактивній дошці «IPBOARD Software 9» продемонстровані розв'язки задач. Такий підхід дав можливість детально проаналізувати кожен

етап вирішення. Окремо було відзнято відео з коментуванням процесу розв'язання, що згодом увійшло в фінальний проєкт.

У програмі «Inshot» всі матеріали зібрано в один проєкт, додана спокійна мелодія для фону. Такі дії зробили відеоурок більш приємним для сприйняття. Після завершального етапу монтажу було створено готовий навчальний відеоролик, який можна використовувати в освітньому процесі, сподіваючись, що він стане корисним для всіх учнів.

Останнім етапом був експорт проєкту у формат «mp4». Тепер навчальне відео можна використовувати в ході навчання (рис. В.1).

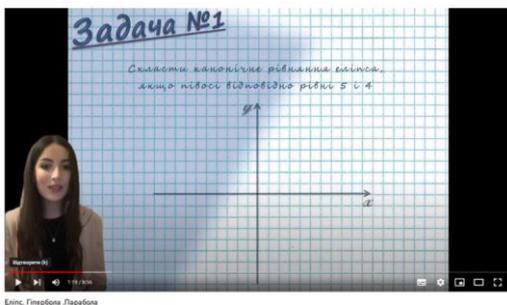


рис. В.1

Розробка відеоуроку на тему «Спрощення загального рівняння лінії другого порядку» з аналітичної геометрії на площині.

Тема: Спрощення загального рівняння лінії другого порядку.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: відеосупровід

Мета:

навчальна: упорядкувати знання учнів про загальне рівняння ліній другого порядку; поширити знання учнів про їх властивості; сформувати вміння учнів шукати розв'язки задач за отриманими знаннями;

розвивальна: розвивати творчі здібності учнів; допомагати вдосконаленню обчислювальних навичок;

виховна: виховувати позитивне ставлення до навчання, інтерес до вивчення даної дисципліни.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера, графічний планшет.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На цьому етапі відбувається демонстрація мультимедійної заставки та привітання педагога. Приблизний текст може виглядати так:

«Привіт усім! Сьогодні ми розглянемо, як можна спростити загальне рівняння лінії другого порядку на площині. Хоча завдання може здатися складним, я впевнений, що разом ми впораємося! Це рівняння має досить громіздкий вигляд, оскільки містить дві змінні — x та y — з різними показниками, що можуть бути як додатними, так і від’ємними, а також константні члени. У цьому відеоуроці ми детально проаналізуємо, як спростити таке рівняння та привести його до більш зручного і зрозумілого вигляду. Тож не гаючи часу, починаймо!»

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Для того, щоб мати змогу розв’язати завдання, у цьому етапі розглядається коротка теоретична інформація.

Студенти мають знати його форму, щоб з легкістю спрощувати загальне рівняння лінії другого порядку. Воно має наступний вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На даному етапі розглядається пара практичних завдань з детальним розв’язком.

IV етап. Підсумки (1 хв.)

Розглядаються результати виконання поставлених цілей.

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

Педагог може повідомити глядачів про повторний перегляд відеозаняття.

Заняття максимально може тривати 20 хв.

При розробці практичного заняття використовувались наступні засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «IPBOARD Software 9» (рис. Б.2) та «ZD Soft Screen Recorder» (рис. Б.3).

Спершу для створення інтро були знайдені мультимедійні проекти, які згодом об'єднали в єдиний ролик за допомогою мобільного додатка «Inshot». Далі був відкритий програмний засіб «Microsoft PowerPoint» та розпочато створення слайдів для подальшої їх обробки. Фон вибраний у фоні клітинки, який нагадує сторінку зошита, такі дії допомагають створити навчальну атмосферу.

Презентація складалася з двох слайдів. На першому слайді було розміщено певні об'єкти: «рука з фломастером» та текст, що відображає тему відеоуроку. На другому слайді доданий був текст «Дякую за увагу» для того, щоб залишити у аудиторії приємне враження після перегляду та завершити урок. Після завершення роботи дану презентацію було експортовано у формат «mp4».

Подальшим кроком було записування екрану за допомогою програми «ZD Soft Screen Recorder». На платформі «IPBOARD Software 9» відбувався покроковий розбір розв'язання задачі. Такі дії допомагають краще пояснити матеріал і зробити його зрозумілим для студентів, текст прописувався з допомогою графічного планшету. Паралельно було записано вступне та завершальне слово на камеру, щоб надати відеоуроку більш індивідуального характеру.

У додатку «Inshot» усі частини відео були об'єднані та ретельно відредаговані до створеного раніше проекту з «Інтро». Щоб зробити урок більш привабливим для глядачів, до нього було додано спокійну фонову мелодію, яка значно покращує загальне сприйняття матеріалу та допомагає сконцентруватися на важливому.

Після завершення монтажу фінальне відео було збережене у популярному форматі. У результаті отримали готовий навчальний ролик, який однозначно можна використовувати під час очних занять, а також для самостійного опрацювання матеріалу. Це відео допоможе учням закріпити знання та краще зрозуміти пройдений матеріал (рис. В.2).



Спрощення загального рівняння ліній другого порядку

рис. В.2

Додаток Г. Створення навчального відео на тему «Перетворення площини. Рух площини. Класифікація рухів» в рамках аналітичної геометрії на площині.

Тема: Перетворення площини. Рух площини. Класифікація рухів.

Тип: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид: скрінкаст

Мета:

навчальна: упорядкувати знання учнів про матеріали теми, а саме: перетворення площини, рух площини; збільшити знання учнів про класифікацію; сформулювати вміння учнів шукати розв'язки задач за отриманими знаннями;

розвивальна: розвивати творчі та пізнавальні здібності учнів; допомагати вдосконаленню обчислювальних навичок;

виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення точних наук, а також інтерес до вивчення курсу аналітичної геометрії.

Технічні засоби та підручні матеріали: дошка, опорний конспект, комп'ютер, мікрофон, камера, графічний планшет.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На даному етапі відбувається показ короткого ролику, а також привітання ведучого з глядачами. « Вітаю Вас на уроці з теми "Перетворення площини. Рух площини. Класифікація рухів. Отже, почнімо!»

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

У цьому етапі потрібно продемонструвати деякі теоретичні відомості, що будуть корисними для відеозаняття. У даному випадку це будуть формули:

- Формули, що описують паралельне перенесення на вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases}$$

- Формули для повороту:
$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

III етап. Обговорення практичних завдань (5 – 10 хв.)

На етапі обговорення практичних завдань відбувається демонстрація розв'язків задач по темі.

IV етап. Підсумки (1 хв.)

1. Проведення підсумків відеозаняття та обговорення результату виконання поставлених цілей.

2. Ментор може проговорити наступні слова «Шановні учні, студенти та всі ті, хто прагне збільшити об'єм своїх знань! Наш урок з теми «Перетворення площини. Рух площини. Класифікація рухів» закінчився. Сподіваюся, що вам вдалося зрозуміти і засвоїти основні поняття та приклади, з якими ми стикнулись сьогодні.

V етап. Домашнє завдання (1 хв.)

Ведучий повідомляє про можливість повторного перегляду та може проговорити такі слова: «Рекомендую ще раз переглянути інформацію та переконатись у своїх знаннях та закріпити вивчений матеріал. Не забувайте, що аналітична геометрія є важливою у багатьох сферах нашого життя. Якщо у вас з'явилися запитання, або щось залишилося незрозумілим, тоді не соромтеся та звертайтеся і ми з радістю допоможемо вам розібратися.

Дякую всім за увагу та активність! До зустрічі на наступному уроці і разом ми продовжимо досліджувати світ математики!»

Найбільше заняття може тривати 15 хв.

При розробці практичного заняття були використані засоби: «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1) і мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2).

Для створення інтро заздалегідь були знайдені мультимедійні фрагменти в інтернеті, що пізніше об'єднали в єдиний ролик за допомогою мобільного додатка. Початковий етап роботи полягав у відкритті програми «Microsoft PowerPoint» та розробці презентації. Для фону було обрано клітинку, що нагадує сторінку зошита, таким чином у студентів створиться навчальна атмосфера та легше запам'ятається матеріал. Презентація складалася із 8 слайдів, де кожен з них виконував окрему функцію.

Перший слайд містив текст, що представляє тему уроку, всі об'єкти отримали відповідну анімацію. Другий і третій слайди містили короткий теоретичний матеріал, ще є необхідний для повторення перед практичною частиною.

На четвертому та шостому слайдах розміщені умови задач і невеликі рисунки, які допомагають краще зрозуміти зміст завдань. Для даних слайдів була застосована лише мінімальна анімація, щоб не перевантажувати увагу студентів. П'ятий і сьомий слайди містять детальний покроковий розбір розв'язань до кожної задачі. Останній, восьмий слайд завершує презентацію текстом «Дякую за увагу».

Після завершення розробки, презентацію було експортовано у формат «mp4». Далі було записане завершальне слово на камеру, а мікрофон використали для коментарів, де ведучий покроково коментує все.

На заключному етапі в програмі «Inshot» всі частини проєкту, включаючи інтро, було об'єднано в цілісне відео та виконано остаточне редагування. Після завершення монтажу проєкт знову експортовано у формат «mp4».

Таким чином, готовий відеоурок є готовий до використання в навчальному процесі, та може сприяти ефективному засвоєнню матеріалу та підвищенню інтересу до навчання (рис. Г.1).

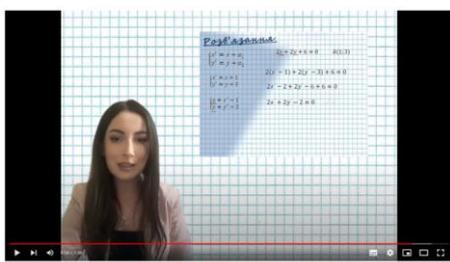


рис. Г.1

Додаток Д. Розробка сценаріїв навчальних роликів на тему «Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема: Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку.

Тип: вивчення нового матеріалу.

Вид: скрінкаст

Мета заняття:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям прямолінійних твірних поверхонь другого порядку, навчити будувати рівняння цих поверхонь та досліджувати їхні властивості; сформувати вміння застосовувати ці знання для аналізу геометричних об'єктів.

Розвивальна: розвивати пізнавальні здібності учнів через розв'язання задач на побудову та аналіз прямолінійних твірних поверхонь другого порядку; сприяти розвитку логічного мислення та просторового уявлення.

Виховна: виховувати позитивне ставлення до вивчення нової інформації, формувати інтерес до аналітичної геометрії та її застосування; сприяти розвитку старанності та наполегливості у вивченні складних тем.

Обладнання: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент (2 – 3 хв.)

1. Тематична заставка.
2. Привітання із аудиторією.

«Привіт всім, хто прагне знати більше! В цьому відеоуроці розглянемо прямолінійні твірні другого порядку, переглянемо їх властивості та виведемо їх рівняння.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

1. Повідомлення теми навчального ролику.
2. Мотивація здобування знань з даної теми.
3. Вивчення нової інформації.

III етап. Обговорення теоретичних питань (20 – 30 хв.)

План теоретичного матеріалу:

- Означення прямолінійної твірної.
- Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда.
- Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда.

IV етап. Підведення підсумків (1 – 2 хв.)

11. Підведення підсумків навчального відеоуроку.

12. Заклик до самостійної праці.

«Сподіваюсь, що це навчальне відео буде цікавим та корисним для вас і стане у нагоді при вивченні теми «Прямолінійні твірні». Дякую всім за увагу!»

V. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Нагадування про можливість переглядати відео повторно.

Максимальна тривалість даного заняття становить 40 хв.

В процесі створення навчального відеоролика були корисними наступні засоби: мобільний додаток «Inshot» (рис. А.2), «Microsoft PowerPoint» 2007 р. (рис. А.1), програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1), дошка «CleverMaths» (рис. 3.1.13), динамічне геометричне середовище «GeoGebra» (рис. 3.3.1).

Для динамічності відео та кращого сприйняття його студентами в глобальній мережі було знайдено «Інтро» та доєднано до нового проекту в «Inshot».

Далі розпочато розробку сторінок на дошці «CleverMaths» у стилі попередніх відеоуроків. Теорію взято із методичної розробки із лекціями, а саме із теми «Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку». В процесі було розроблено 4 сторінки.

На першій сторінці вказано тему даного навчального ролику (рис. Д.1).

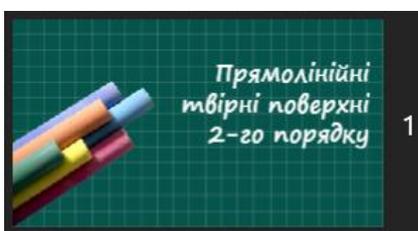


Рис. Д.1

Наступні три сторінки містять основні поняття трьох підпунктів плану, з додатковими письмовими поясненнями, що створюються при записі відео за допомогою графічного планшету.

Далі здійснено запис екрану з одночасним виконанням письмових та усних пояснень з використанням мікрофону та відеокамери. Допоміг при цьому програмний засіб «Zoom Video Communications» (рис. 3.1.1). Далі відео конвертовано в формат «mp4».

Тоді, після виконаних попередніх дій, в застосунку «Inshot» відео – проект було відредаговано та приєднано до збереженого ролику «Інтро».

Після пророблених дій проект був експортований у формат «mp4».

Тепер даний навчальний ролик можна використовувати у процесі вивчення теми.

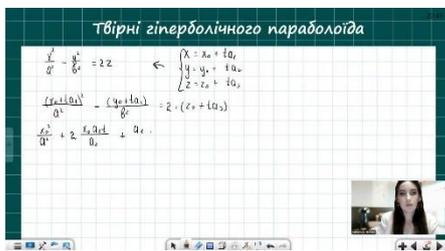


Рис. Д.2

Розробка практичного відеоуроку на тему «Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку» з аналітичної геометрії у просторі.

Тема заняття: Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку.

Тип заняття: удосконалення знань умінь і навичок.

Вид заняття: відеоурок.

Мета заняття:

навчальна: упорядкувати знання учнів про поняття прямолінійні твірні, систематизувати засвоєний матеріал про прямолінійні твірні поверхонь другого порядку; навчити користуватись отриманими знаннями на практиці;

розвивальна: формувати пізнавальні та творчі здібності студентів; розвивати просторове мислення через розв'язування завдань;

виховна: формувати позитивне відношення до навчання студентів.

Технічні засоби: опорний конспект, комп'ютер, графічний планшет, мікрофон, відеокамера, мультимедійна дошка.

Хід заняття:

I етап. Організаційний момент(2 – 3 хв.)

На початку уроку вчитель оголошує тему заняття: «Прямолінійні твірні поверхні другого порядку». Додатково демонструється короткий відеоролик, який створює налаштування для продуктивної роботи учнів.

II етап. Мотивація і стимулювання навчальної діяльності (2 – 5 хв.)

Ведучий мотивує студентів та розповідає для чого необхідно розуміти дану тему.

III етап. Обговорення практичної частини (10 – 15 хв.)

На даному етапі розглядаються такі задачі:

1. Переконавшись, що точка $M(1; 3; -1)$ належить гіперболічному параболоїду $4x^2 - z^2 = y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, які проходять через задану точку.

Розв'язання:

Точка $M(1; 3; -1)$ належить параболоїду, адже $4 \cdot 1 - 1 = 3$.

Запишемо рівняння твірних:

$$\begin{cases} \alpha_1(2x - z) = \beta_1 y \\ \beta_1(2x + z) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \alpha_2(2x - z) = \beta_2 \\ \beta_2(2x + z) = \alpha_2 y \end{cases}$$

Точка $M(1; 3; -1)$ лежить на перетині двох твірних, тому її координати задовільняють рівняння твірних:

$$\begin{cases} \alpha_1(2 \cdot 1 - (-1)) = \beta_1 \cdot 3 \\ \beta_1(2 \cdot 1 + (-1)) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \alpha_2(2 \cdot 1 - (-1)) = \beta_2 \\ \beta_2(2 \cdot 1 + (-1)) = \alpha_2 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 3 = \beta_1 \cdot 3 \\ \beta_1 \cdot 1 = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \alpha_2 \cdot 3 = \beta_2 \\ \beta_2 \cdot 1 = \alpha_2 \cdot 3 \end{cases}$$

Тоді $\alpha_1 = \beta_1$ і $\alpha_2 = 3\beta_2$.

Будемо мати:

$$\begin{cases} 2x - z = y \\ 2x + z = 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x - z = 3 \\ 3(2x + z) = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ 6x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Тепер знайдемо напрямні вектори твірних:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} - 2\bar{j} = -1\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} = (-1; -4; 2).$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6\bar{j} - 2\bar{k} - 6\bar{j} - \bar{i} = -1\bar{i} - 12\bar{j} - 2\bar{k} = (-1; -12; -2).$$

Точку $M(1; 3; -1)$ приймемо за початкову і тепер знайдемо рівняння твірних:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{2} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z+1}{-2}.$$

2. Переконавшись, що точка $M(-2; 0; 1)$ належить гіперболічному

параболоїду $\frac{x^2}{4} - y^2 = z$, знайти кут, створений його прямолінійними твірними.

Розв'язання:

Перевіримо, чи точка належить параболоїду:

$$4 \cdot (1)^2 - (-1)^2 = 3;$$

$$3 = 3.$$

Напишемо рівняння твірних:

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) = \beta z \\ \beta \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) = \alpha \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) = \beta \\ \beta \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) = \alpha z \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{x}{2} - \alpha \frac{y}{3} = \beta z \\ \beta \frac{x}{2} + \beta \frac{y}{3} = \alpha \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \alpha \frac{x}{2} - \alpha \frac{y}{3} = \beta \\ \beta \frac{x}{2} + \beta \frac{y}{3} = \alpha z \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha}{3}y - \beta z = 0 \\ \frac{\beta}{2}x + \frac{\beta}{3}y - \alpha = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha}{3}y - \beta = 0 \\ \frac{\beta}{2}x + \frac{\beta}{3}y - \alpha z = 0 \end{cases}.$$

Тепер знайдемо напрямні вектори твірних:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{3} & -\beta \\ \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{3} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\beta^2}{3}; -\frac{\beta^2}{2}; \frac{\alpha\beta}{3} \right).$$

$$\begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{3} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{3} & -\alpha \end{vmatrix} = \left(\frac{\alpha^2}{3}; \frac{\alpha^2}{2}; \frac{\alpha\beta}{3} \right).$$

Точка $M(-2; 0; 1)$ належить параболоїду, тому її координати задовільняють рівняння твірних:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}(-2) - \frac{\alpha}{3} \cdot 0 - \beta \cdot 1 = 0 \\ \frac{\beta}{2} \cdot (-2) + \frac{\beta}{3} \cdot 0 - \alpha = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2}(-2) - \frac{\alpha}{3} \cdot 0 - \beta = 0 \\ \frac{\beta}{2}(-2) + \frac{\beta}{3} \cdot 0 - \alpha \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}(-2) - \beta = 0 \\ \frac{\beta}{2} \cdot (-2) - \alpha = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2}(-2) - \beta = 0 \\ \frac{\beta}{2}(-2) - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ -\beta - \alpha = 0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ -\beta - \alpha = 0 \end{cases}$$

Отримали $\alpha = -\beta$, $\alpha^2 = \beta^2$

Тоді координати напрямних векторів можемо скоротити на α^2 і будемо мати:

$$\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{-1}{3} \right) \text{ та } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{3} \right).$$

Тепер знайдемо кут між прямими:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{17}{36}} \cdot \sqrt{\frac{17}{36}}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{17}{36}} \cdot \sqrt{\frac{17}{36}}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\frac{17}{36}} = -\frac{1}{17}.$$

$$\text{Тоді } \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{17}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{17}.$$

IV етап. Підбиття підсумків (1 – 3 хв.)

Ведучий може наголосити на важких моментах та ще раз їх повторити.

V етап. Домашнє завдання (1 – 2 хв.)

Було оголошено, що учні матимуть можливість переглядати матеріали уроку кілька разів у зручній для них час, причому тривалість заняття становить до 30 хвилин. Для створення навчального ролику використовувалися такі програмні засоби, як «CleverMaths» (рис. 3.1.13), «Microsoft PowerPoint» і мобільний застосунок «Inshot». У процесі підготовки заняття застосовували технічні інструменти: штатив, кільцеву лампу з тримачем для камери, відеокамеру, додаткове освітлення, інтерактивну дошку та мікрофон. Спочатку були

знайдені та завантажені короткі відеоролики, які будуть на початку та вкінці ролику, для створення сприятливої атмосфери. Потім біля інтерактивної дошки зняли на відеокамеру детальні пояснення до кожного завдання. У використанні були: мікрофон, додаткове освітлення для високої якості відео та звуку. У «Microsoft PowerPoint» створили проект із умовами задач, після чого презентацію експортували у формат «mp4» (рис. Д.3). Усі відеоматеріали об'єднано та відредагровано в «Inshot». Готовий відеоурок стане цінним ресурсом для вивчення теми «Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку». Структурований відеоурок можна використовувати як універсальний навчальний інструмент, а різні додані елементи сприятимуть легкому засвоєнню теми та підвищуватимуть зацікавленість учнів. Завдяки чіткій структурі та поясненням цей урок допоможе учням швидко розібратися в темі та краще освоїти матеріал.

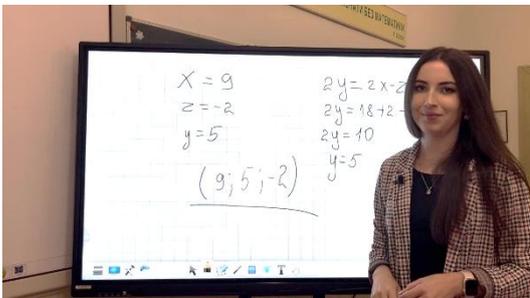


Рис. Д.3