Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Функціональне рівняння Коші та його застосування

Виконала: студентка ІІ курсу магістратури, групи М-М-21

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Карпів Марія Володимирівна

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент:

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

У формуванні інтелекту людини математика відіграє важливу роль. Одне з найважливіших математичних умінь, яке мають опанувати учні – це вміння розв'язувати рівняння. Одним із таких рівнянь є функціональні рівняння.

Постановка задач, пов’язаних з функціональними рівняннями часто є досить простою, а їх розв’язування не вимагає якоїсь спеціальної підготовки. Але, як правило, при цьому завжди важливим компонентом є логічне мислення, знання основних методів розв’язування таких рівнянь та їх творче осмислення. У зв’язку з цим функціональні рівняння є майже невід’ємним атрибутом різноманітних олімпіад і турнірів юних математиків [2, 6].

Уже класичним стало функціональне рівняння Коші та звідні до нього рівняння, які є характеристичними рівняннями ряду елементарних функцій. Широке застосування мають також лінійні різницеві рівняння, які за своїми властивостями близькі до лінійних диференціальних рівнянь.

Актуальність обраної теми зумовлена тим що, функціональні рівняння можна застосовувати до розв'язування практичних задач і прикладів із шкільного курсу математики. Крім того, завжди існує необхідність удосконалення методики вивчення теми.

Метою роботи є аналіз функціонального рівняння Коші та його застосування при розв'язуванні задач, а також дослідження основних методів розв’язування функціональних рівнянь, які пов’язані з методами математичного аналізу.

Об'єктом дослідження являється теорія функцій.

Предметом дослідження є особливості застосування функціональних рівнянь при розв’язування задач.

Таким чином можна сформулювати основні завдання даної роботи:

1) розглянути загальні відомості що пов'язанні із функціональними рівняннями;

2) розглянути основні поняття, пов'язанні із функціональними рівняннями, проаналізувати види функціональних рівнянь;

3) проаналізувати застосування методів розв'язування функціональних рівнянь;

4) розробити методичні матеріали для розв’язування функціональних рівнянь методом Коші у шкільному курсі математики.

Магістерська робота складається з трьох розділів. У першому розділі розкрито поняття функціонального рівняння; види функціональних рівнянь Коші. В даному розділі міститься опис поведінки і класів функцій. У другому розділі йдеться про методи розв’язування функціональних рівнянь. У третьому розділі розкрито застосування рівняння Коші в різних теоріях та наведено приклади розв'язування задач шкільної програми математики.

Для написання роботи використовувалися матеріали з навчальної літератури в списку використаної літератури.

Апробація роботи: основні положення магістерської роботи доповідались на IV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Експериментальні та теоретичні дослідження в контексті сучасної науки» (м. Чернігів, 29 вересня 2023 року), а тези доповіді опубліковані у збірнику матеріалів конференції.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНЯННЯ КОШІ

1.1. Поняття про функціональні рівняння

Функціональними рівняннями називають такі рівняння, у яких в якості невідомих виступає функція (чи кілька функцій). Найпростіші приклади функціональних рівнянь зустрічаються ще у шкільному курсі математики. Так функціональні рівняння $f(x) = f(-x), f(-x) = -f(x), f(x+T) = f(x)$ задають такі властивості функції, як парність, непарність, періодичність.

Функціональними також є рівняння вигляду:

$$f(x) + xf(x+1) = 1,$$

$$f(x) + g(1-x) = f\left(g\left(\frac{2}{x+1}\right)\right).$$

«Розв'язати функціональне рівняння» означає знайти невідому функцію, при підстановці якої у вихідне функціональне рівняння воно перетворюється в тотожність (якщо невідомих функцій декілька, то необхідно знайти їх усі). Співвідношення, які задають функціональні рівняння, є тотожними відносно деяких змінних, а рівняннями їх називають оскільки невідомі функції – шукані [4].

У функціональних рівняннях крім невідомих функцій можуть бути і відомі функції, задані в будь якій формі – явній (такі як $x+1$, $\frac{2}{x+1}$, $\cos x$, і так далі) чи неявній.

До найпростіших функціональних рівнянь відносять рівняння Коші

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1.1}$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \tag{1.2}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{1.3}$$

$$f(xy) = f(x\ ) \cdot\ f(y). \tag{1.4}$$

Неперервні розв'язки цих чотирьох основних рівнянь мають відповідно вигляд

$$f(x)\ =\ ax, \qquad a^x\ , \qquad log_a x, x^a (x > 0).$$

Рівняння (1.1) раніше розглядалося Лежандром і Гауссом при виведенні основної теореми проективної геометрії та при досліджуванні гауссівського закону розподілу ймовірностей [1].

Багато функціональних рівнянь, так як і рівняння (1.1) – (1.4), включають декілька змінних (*x, y* і т.д.), і необхідно розуміти, що ці змінні є незалежними. Це означає, що рівність, яка визначає функціональне рівняння, виконується для будь-яких значень змінних *x, y* (незалежно одна від іншої), і навіть якщо зафіксуємо *y* (наприклад, підставимо в рівняння *y*=0), то рівність буде виконуватись для кожного значення *x.* Цей факт широко використовується при розв'язуванні майже всіх функціональних рівнянь, які містять декілька незалежних змінних і є одним із основних [12]. Крім того, завжди має бути ясно, на якій множині задається функціональне рівняння, тобто яка область визначення кожної невідомої функції. Це необхідно тому, що загальний розв'язок функціонального рівняння може залежати від цієї множини.

Розглянемо функціональне рівняння Коші

$$f(xy) = f(x)\ +\ f(y), \tag{1.3}$$

а) Якщо ми будемо шукати розв'язки, визначені на всій числовій осі (−∞; + ∞), то підставивши *y*=0 в рівняння, отримаємо $f(0) = f(x) + f(0)$ або $f(x) = 0$ (це єдиний розв'язок).

б) На множині ж (−∞; 0) U (0; + ∞) рівняння має розв'язок

$$f(x) = log_a\,|x|\,.$$

Другим прикладом може слугувати функціональне рівняння

$$f(x) = 2f(x).$$

а) Якщо тут функція визначена для всіх дійсних x та має неперервну похідну, то розв'язком буде функція *f(x)= ax*.

б) Якщо послабити умови, які накладаються на шукану функцію, то неважко перевірити, що розв'язком буде також функція

$$f(x) = \text{x}\, tg(\pi\, log_2 x).$$

Окрім області визначення самих функцій, важливо також знати, в якому класі функцій шукається розв'язок. Кількість і поведінка цих розв'язків строго залежить від цього класу. Розв'язок *f(x)*=$\log_a |x|$ це загальний неперервний розв'язок функціонального рівняння (1.3) на множині (−∞; 0) U (0; + ∞), та, як говорилось вище, рівняння (1.3) має також розривні (і тільки невимірні) розв'язки на цій множині. Це одна із характерних особливостей функціональних рівнянь [8, 11].

Ще не починаючи розв’язувати функціональні рівняння, можна помітити, як багато тут «підводних каменів». Задача розв’язання функціонального рівняння є однією із найдавніших у математичному аналізі. Вони з’явилися практично одночасно із зародками теорії функцій. Перший розквіт даної дисципліни пов'язаний з проблемою паралелограма сили. Ще в 1769 році Даламбер звів обґрунтування закону додавання сил до розв'язування функціонального рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y). \tag{1.5}$$

Це саме рівняння і з тією ж метою було розглянуто Пуассоном в 1804 році при припущені аналітичності, поза тим як у 1821 році Коші знайшов загальні розв'язки:

$$f(x) = cos\, ax,$$

$$f(x) = ch\ ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2},$$

$$f(x) = 0$$

цього рівняння, припускаючи тільки неперервність *f(x*) [6].

Навіть відома формула неевклідової геометрії для кута паралельності

$$f(x) = tg\ \tfrac{1}{2}\ \Pi(x) = e^{-x/k}$$

була отримана Лобачевським із функціонального рівняння

$$f(x)^2 = f(x-y) \cdot f(x+y), \tag{1.6}$$

яке він розв'язав методом, аналогічним методу Коші (дане рівняння можна звести до вигляду $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$).

Функціональне рівняння (1.1) було також застосовано Г. Дарбу до проблеми паралелограма сили та до основної теореми проективної геометрії; його головні досягнення – значне послаблення припущень. Як відомо, функціональне рівняння Коші (1.1) характеризує в класі неперервних функцій лінійну однорідну функцію *f(x)* = *ax.* Дарбу показав, що будь-який розв'язок, неперервний хоча б в одній точці або обмежений зверху (чи знизу) в довільному малому інтервалі, також повинен мати вигляд *f(x)* = *ax.* Подальші результати по послабленні припущень слідували швидко одне за одним (інтегрованість, вимірність на множині додатної міри і, навість, мажорованість вимірною функцією). Виникає питання: чи існує хоча б одна довільна адитивна функція (яка задовольняє рівняння (1.1)), відмінна від лінійної однорідної. Знайти таку функцію справді нелегко. При раціональному *x* значення будь-якої адитивної функції повинні співпадати зі значенням деякої лінійної однорідної функції, тобто *f(x)* = *ax* для $x \in Q$. Здавалося б, що тоді *f(x)* = *ax* для всіх дійсних *x*. Якщо *f(x)* – неперервна, то це дійсно так, якщо дане припущення відкинути – то ні. Перший приклад відмінної від $f(x)=ax$ розривного розв’язку функціонального рівняння (1.1) побудував в 1905 році німецький математик Г. Гамель з допомогою введеного ним базису дійсних чисел [5].

Багато функціональних рівнянь не визначають конкретну функцію, а задають широкий клас функцій, тобто виражають властивість, яка характеризує той чи інший клас функцій. Наприклад, функціональне рівняння $f(x+1)=f(x)$ характеризує клас функцій, які мають період 1, а рівняння $f(1+x)=f(1-x)$ – клас функцій, симетричних відносно прямої $x=1$.

Іноді для функціонального рівняння визначають поняття «порядку». Під порядком рівняння мається на увазі порядок шуканої функції, яка входить в рівняння. В якості прикладу розглянемо два рівняння:

$$f(x+1) = \mathrm{x}\, f(x), \tag{1.7}$$

$$f[\,f(x)] = x. \tag{1.8}$$

Існує важлива відмінність між рівнянням (1.7) і (1.8). Перше з них не містить суперпозиції невідомої функції f , а друге – містить. Тому (1.7) має перший порядок, а (1.8) – другий.

Функціональне рівняння з кількома змінними – це рівняння виду

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

(в яких зустрічаються функції одної змінної, а самих незалежних змінних декілька), а також виду

$$f(x,y) = f(x,z) + f(z,y),$$

(тобто рівняння, в якому самі невідомі функції залежать від декількох змінних).

Загалом, для функціональних рівнянь, які не зводяться до диференціальних і інтегральних, відомо мало загальних методів розв'язування.

1.2. Метод послідовного аналізу поведінки функцій при цілих, раціональних і дійсних значеннях аргументу

Знайдемо розв'язок функціонального рівняння Коші:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (1.1)$$

Можна помітити, що лінійні однорідні функції виду

$$f(x) = \text{ax} \qquad (a = const)$$

задовольняють даному рівнянню:

$$a(x+y) = ax + ay.$$

Питання полягає в тому, чи будуть ці функції єдиними.

Перш за все, виведемо декілька загальних фактів, не накладаючи ніяких обмежень на функцію f (без усяких припущень про неперервність, обмеженість і так далі) [9].

Підставимо в рівняння (1.1) $y=x$:

$$f(2x) = 2f(x).$$

Далі послідовно вважаючи $y=2x$, $y=3x$, $y=4x$ і т. д., отримаємо:

$$f(3x) = f(x+2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x);$$

$$f(4x) = f(x) + f(3x) = 4f(x);$$

$$f(5x) = f(x) + f(4x) = 5f(x),$$

і взагалі для будь-якого натурального n

$$f(nx) = n \cdot f(x) \tag{1.10}$$

(це легко перевіряється по індукції).

Замінивши x на $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n} f(x)$, отримаємо

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n} f(x),$$

а тоді, якщо підставити *mx (m* – натуральне число) замість x і використати попереднє рівняння, отримаємо відповідність

$$f\left(\frac{т}{n} x\right) = \frac{т}{n} f(x). \tag{1.11}$$

Тепер підставляємо в рівняння (1.1) *x=y=0*, отримаємо

$$f(0) = 2f(0), \text{так що } f(0) = 0. \tag{1.12}$$

Якщо візьмемо *y =-x* , то врахуванням того, що

$$(F(\mathrm{x}+1)+1)(F(x)+1) = F(\mathrm{x}),$$

знайдемо:

$$f(-\mathrm{x}) = -f(\mathrm{x}),$$

тобто функція *f(x)* є непарною. Тоді з (1.10) легко вивести, що:

$$f\left(-\frac{т}{n} x\right) = -f\left(\frac{т}{n} x\right) = -\frac{т}{n} f(x). \tag{1.13}$$

Отримані співвідношення (1.11) – (1.13) можуть бути об’єднані в рівняння

$$f(r\mathrm{x}) = r \cdot f(\mathrm{x}),$$

яке справедливе для будь-якого значення x, яке б не було раціональне значення r.

Якщо взяти тут $x=1$, то отримаємо

$$f(r) = r \cdot f(1) \tag{1.14}$$

або, якщо позначити $f(1)$ через a, $f(r)= ar$.

Таким чином, встановлено вид функції f, але поки що для раціональних значень аргументу. При цьому використовувався тільки той факт, що функція задовольняє основне рівняння Коші (1.1). Надалі, при розв'язуванні, будемо вже опиратися на конкретний клас функцій, в якому шукається розв'язок. Розглянемо деякі найбільш загальні класи функцій: неперервні, монотонні та обмежені [10].

Для раціональних x вище встановлено, що $f(x)=ax$. Залишилося показати, що це співвідношення справедливе і для ірраціональних x. Нехай x – будь-яке ірраціональне число. Тоді існує послідовність раціональних чисел

$$r_1, r_2, \dots, r_n \dots,$$

яка збігається до цього числа x. За доведеним

$$f(r_n) = ar_n \ (n = 1,2,3, \dots).$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} (ar_n).$$

Справа отримаємо ax, а зліва, через неперервність функції f, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(\lim_{n\to\infty} r_n) = f(x).$$

так що, остаточно,

$$f(x) = \text{ax}.$$

Таким чином, дійсно, всі неперервні адитивні функції є лінійними однорідними. Остання формула дає загальний розв'язок функціонального рівняння (1.1).

Припустимо тепер, що функція f не спадає на всій дійсній осі (випадок незростання розглядається аналогічно). Значить, $f(x_1) \le f(x_2)$ для будь-яких $x_1 < x_2$.

Для раціональних x вище доведено, що $f(x) = x \cdot f(1)$. Візьмемо випадкове ірраціональне x. Відомо, що будь яке ірраціональне число можна як завгодно точно наблизити раціональними числами, тому для будь-якого натурального q існує ціле p таке, що

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}, \tag{1.15}$$

і при достатньо великих q число x знаходиться між двома дуже близькими раціональними числами, різниця між якими рівна $1/q$. Використовуючи монотонність функції f, знаходимо

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{p+1}{q}\right),$$

звідки (скориставшись відношенням для раціональних значень функції f).

$$a\,\frac{p}{q} \le f(x) \le a\,\frac{p+1}{q}, \qquad a = f(1) \tag{1.16}$$

Так як із (1.12) $f(0) = 0$, то $f(1) \ge 0$, оскільки функція f не спадає, значить, $a \ge 0$.

Якщо $a=0$, то з нерівностей $0 \le f(x) \le 0$ маємо $f(x) \equiv 0$. Якщо $a>0$, то з (1.16)

$$\frac{p}{q} \le \frac{f(x)}{a} \le \frac{p+1}{q}. \tag{1.17}$$

Порівнюючи ці нерівності з (1.15), отримаємо $\frac{f\,(x)}{\mathrm{a}} = x$. Справді, припустимо, міркуючи від супротивного, що це неправильно, наприклад, $\frac{f\,(x)}{\mathrm{a}} < x$ для вибраного ірраціонального x. Підберемо q настільки великим, щоб дріб $\frac{p}{q}$ потрапив між $\frac{f\,(x)}{\mathrm{a}}$ і x, тобто

$$\frac{f\,(x)}{\mathrm{a}} < \frac{p}{q} < x,$$

що суперечить з (1.17). Отримана суперечність показує, що $\frac{f\,(x)}{\mathrm{a}} = x$ для будь-якого заданого ірраціонального x, тому $f(x) = a\,x$ для всіх x.

Зауважимо, що з наведеного доведення випливає, що якщо $f(x)>0$ при $x>0$, то функція f – лінійна однорідна. Для цього достатньо згадати, що $f(0) = 0$, так що $f(x)> f(0)$ при $x>0$, і, отже, функція $f(x)$ монотонна при $x>0$.

Нехай тепер функція $f(x)$ обмежена з однієї сторони (тобто обмежена зверху, або знизу) на будь-якому інтервалі (a, b). Нам потрібно довести, що лінійними однорідними функціями вичерпуються всі розв'язки (1.1) в даному класі. Досліджуючи розв'язок рівняння (1.1), припустимо, що f – обмежена зверху (випадок, коли f – обмежена знизу, зводиться до цього випадку заміною f на $-f$).

Припустимо, що функція f обмежена зверху константою M, тобто $f(x) \leq M$ для всіх $x \epsilon (a, b)$. Розглянемо допоміжну функцію

$$g(x) = f(x) - x\,f(1).$$

За доведеним вище $g(x)=0$ при будь-якому раціональному x. Окрім того, функція $g(x)$ також є адитивною. Дійсно,

$$g(x+y) = f(x+y) - (x+y)\cdot f(1) = f(x) + f(y) - xf(1) - yf(1) =$$
$$= g(x) + g(y).$$

Підставимо $y=r$ (r-раціональне) в рівність

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

отримаємо, враховуючи $g(r)=0$:

$$g(x+r) = g(x) + g(r) = g(x).$$

Отже, будь-яке раціональне число r являється періодом функції $g(x)$.

Тепер покажемо, що $g(x)$ обмежена на інтервалі (a, b). Маємо

$$g(x) = f(x) - xf(1) \le f(x) + |x| \cdot |f(1)| \le M + |x| \cdot |f(1)| < M_1,$$

де, $M_1 = M + max\{|a|, |b|\} |f(1)|$, оскільки $|x| < max\{|a|,|b|\}$ при $a<x<b$.

Звідси випливає, що $g(x)$ обмежена зверху на всій дійсній осі. Насправді, для будь-якого дійсного x існує раціональне число r таке, що $r \epsilon (a-x, b-x)$ тобто $a < x + r < b$. Тому

$$g(x) = g(x+r) < M_1,$$

так як $x+r \epsilon (a, b)$, а на інтервалі (a, b) функція g обмежена числом M_1.

Тепер можна стверджувати, що $g(x)=0$ для будь-якого дійсного x. Справді, припустимо, що це не так, тобто для деякого x_0

$$g(x_0) = A, \quad A \neq 0.$$

Оскільки для функції $g(x)$, як і для будь-якої адитивної функції, правильне відношення (1.10), то

$$g(nx_0) = ng(x_0) = nA$$

для будь-якого цілого n. Очевидно, що можна підібрати таке n (може бути досить велике за абсолютною величиною), що

$$nA > M_1, \text{ тобто } g(nx_0) > M_1.$$

Але функція g обмежена зверху константою $M_{1.}$ Отримуємо суперечність. Значить, *g(x) ≡0,* звідки *f(x) = x· f(1),* що і слід було довести [11].

Існують і інші класи функцій, в яких адитивна функція неминуче буде лінійною однорідною, однак існує приклад адитивної функції і в класі розривних функцій. Цей приклад побудував Гамель. Побудована функція володіє наступними властивостями: на будь-якому (довільно вибраному) інтервалі *(a, b)*, навіть на як завгодно малому, функція *f(x)* не обмежена, тобто серед значень, які дана функція приймає на цьому інтервалі, існує таке, яке є більше за будь-яке наперед задане додатне число. Для побудови такої функції Гамель ввів множину *G* дійсних чисел, яка називається тепер базисом Гамеля, і яка володіє тою властивістю, що будь-яке дійсне число *x* можна подати, і до того ж єдиним способом, у вигляді

$$x=n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_kg_k, \quad n_1\epsilon Z, \ g_1\epsilon G.$$

Довільно задавши значення *f(x)* в точках множини *G,* можна однозначно її продовжити на всю числову пряму за допомогою рівності

$$f(x)= f(n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_kg_k) = n_1f(g_1)+n_2f(g_2)+\cdots+n_kf(g_k),$$

виходячи з властивості адитивної функції. Такими функціями вичерпуються всі розв'язки (1.1) [13].

1.3. Види функціональних рівнянь Коші

1.3.1. Функціональне рівняння показникової функції

Покажемо, що всі неперервні на всій дійсній прямій функції, які задовольняють функціональне рівняння

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \tag{1.2}$$

задаються формулою

$$f(x) = a^x \ (a > 0)$$

(якщо не рахувати функції, тотожно рівної 0).

Нехай *f(x)* – неперервна і визначена при всіх дійсних x функція, яка задовольняє (1.2). Виключимо тривіальний розв'язок $f(x) \equiv 0$. Тоді для деякого значення $x = x_0$ ця функція відмінна від нуля. Підставимо в (1.2)

$$y = x_0 - x:$$

$$f(x) \cdot f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0;$$

тут зрозуміло, що *f(x)* не рівна нулю при будь-якому значені x. Замінюючи x в y в (1.2) на $x/2$, отримуємо

$$f(x) = [f\left(\frac{x}{2}\right)]^2,$$

так що *f(x)* строго більше 0 для всіх x. Тоді рівність (1.2) можна логарифмувати, наприклад, по основі e:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Замінюючи у цій нерівності $\varphi(x) = \ln f(x)$, прийдемо до функціонального рівняння Коші (1.1):

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Враховуючи, що φ – неперервна функція (як суперпозиція неперервних функцій), отримаємо по доведеному:

$$\varphi(x) = \ln f(x) = cx \quad (c = const),$$

звідси знаходимо, що

$$f(x) = e^{cx} = a^x \quad (\text{якщо припустити } a = e^c).$$

Таким чином, єдиною неперервною функцією, яка задовольняє рівняння Коші (1.2), є показникова функція (або тотожна нульовій функції) [2].

1.3.2. Функціональне рівняння логарифмічної функції

Всі неперервні розв'язки функціонального рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad (1.3)$$

справедливого для всіх додатних значень x і y, мають вигляд

$$f(x) = log_a x \quad (\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1).$$

Доведемо це. Для цього введемо нову змінну ξ, яка змінюється в проміжку $(-\infty; +\infty)$, і отримаємо

$$\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\xi} \text{ (адже } \mathrm{x} > 0), \quad \varphi(\xi) = f(\mathrm{e}^{\xi}),$$

звідки

$$\xi = ln\, x, \quad f(x) = \varphi(ln\, x).$$

Тоді функція φ задовольняє функціональне рівняння (1.1):

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) + f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta),$$

а далі

$$\varphi(\xi) = c\xi \;\; i\, f(x) = c \cdot ln\, x.$$

Якщо виключити випадок *c=0* (тоді *f(x)≡0),* то отриманий результат може бути зображений у вигляді

$$f(x) = log_a x, \quad a = e^{1/c}.$$

1.3.3. Функціональне рівняння степеневої функції

Функціональне рівняння

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad (x > 0, y > 0) \tag{1.4}$$

задовольняють в класі неперервних функцій тільки функції виду

$$f(x) = x^a.$$

Провівши ту ж підстановку, що і в 1.2.2, рівняння (1.4) зведемо до вигляду (1.2) :

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) + f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta),$$

звідки

$$\varphi(\xi) = c^{\xi} \ (c > 0),$$

і, отже,

$$f(x) = c^{\ln x} = x^a \quad (a = \ln c).$$

Метод послідовного аналізу можна застосувати і до розв'язування інших рівнянь.

Приклад. Функція *f* обмежена і неперервна на множині **R,** *f(1) = 1,* і для будь-яких дійсних *x* і *y*

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x) + f(y).$$

Яке значення *f(x)?*

З даного рівняння при *x=y=0* отримаємо, що *f(0)=0,* а при *y=0* маємо *f(x)= f(lxl),* так що функція *f* парна і достатньо розглядати тільки додатні значення аргументу[7].

Згідно індукції легко отримати рівність

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

Справді, по припущенню індукції

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) + f(x_{n+1})$$

$$= f\left(\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) + \sqrt{x_{n+1}^2}.$$

Поклавши у доведеній рівності

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{k/n},$$

отримаємо

$$nf(\sqrt{k/n}) = f(\sqrt{k}) = f(\sqrt{1 + 1 + \dots + 1}) = kf(1) = k,$$

тобто $f(\sqrt{k/n}) = k/n$.

Якщо тепер $x = plq$ – додатне раціональне число, то

$$f(x) = f(\sqrt{p^2/q^2}) = p^2/q^2 = x^2,$$

якщо ж x – ірраціональне число, то x є границею послідовності раціональних чисел, $x = \lim_{n\to\infty} r_n$, і, в силу неперервності f, отримуємо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_n^2 = x^2.$$

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Метод зведення функціонального рівняння до відомого за допомогою заміни змінної і функції

Розглянемо певний тип функціональних рівнянь, які можна звести до рівнянь, загальний розв'язок яких нам вже відомий. Як правило, такі рівняння зводяться до основних рівнянь Коші (1.1)-(1.4). Метод базується на введенні допоміжної функції, яку потрібно підібрати таким чином, щоби після перетворень було зрозуміло, що вона задовольняє одне із відомих функціональних рівнянь [14].

Приклад 1. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, визначені на інтервалі $(0, +\infty)$ такі, що при будь-яких допустимих значеннях x_1 і x_2 вираз $f(x_1y)-f(x_2y)$ не залежить від y.

За умовою, вираз $f(xy)- f(y)$ (тут $x_1=x$, $x_2=1$) не залежить від y. Значить, якщо підставити будь-яке значення, наприклад, $y=1$, то це ніяк не вплине на значення даного виразу. Тому

$$f(xy) - f(y) = f(x) - f(1)$$

для будь-яких значень x і y. Введемо нову функцію $g(x)=f(x)-f(1)$, отримаємо функціональне рівняння

$$g(xy) - g(y) = g(x),$$

або

$$g(xy) = g(y) + g(x),$$

аналогічне (1.3). Отже,

$$g(x) = f(x) - f(1) = log_a x,$$

і, позначивши $f(1)=b$, знаходимо

$$f(x) = log_a x + b.$$

Підстановка показує, що дана функція задовольняє умову при будь-яких значеннях постійних a і b (очевидно, $a>0$, $a\neq 1$).

Слід зауважити, що перевірка є важливою частиною розв'язування будь-якого функціонального рівняння. В процесі розв'язування ми намагаємося знайти функцію, яка задовольняє функціональне рівняння, припускаючи, що вона існує. Так що, якщо вдається встановити її вигляд, то це ще не означає, що розв'язок існує, а означає тільки те, що якщо він є, то обов'язково буде мати встановлений вид [17]. Перевірка ж демонструє, чи так це насправді.

Приклад 2. Знайти неперервні розв'язки функціонального рівняння

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Тут в якості допоміжної функції зручно вибрати таку функцію:

$$g(x) = f(x) - \text{x2}.$$

Тоді, підставляючи в початкове рівняння $f(x)= g(x)-x^2$, отримаємо

$$g(x + y) + (x + y)2 = g(x) + x2 + g(y) + y2 + 2xy,$$

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

(рівняння Коші (1.1)).

Остаточно знаходимо

$$f(x) = x^2 + g(x) = x^2 + ax,$$

і всі такі функції задовольняють умову [14].

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння Єнсена в класі неперервних функцій

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \ x,y \epsilon \boldsymbol{R}$$

Підставивши в рівняння *(x+y)* замість *x* і 0 замість *y*, отримаємо:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+\mathrm{y})+f(0)}{2}=\frac{f(x+\mathrm{y})+\mathrm{c}}{2},\ \ \mathrm{c}=\ f(0).$$

Порівнюючи отримане співвідношення з вихідним функціональним рівнянням, маємо:

$$f(x+\mathrm{y})+\mathrm{c}=\ f(x)+\ f(\mathrm{y}).$$

Це рівняння зводиться до рівняння Коші (1.1) за допомогою підстановки

$$\varphi(x)=\ f(x)-a,$$

тоді

$$\varphi(x)=\ ax,\quad f(x)=\ ax+c,$$

а цей розв'язок дійсно задовольняє рівняння Єнсена.

Приклад 4. Знайти всі неперервні функції $f\colon (0,+\infty)\to\boldsymbol{R}$, які задовольняють тотожність

$$f(xy)\ \equiv\ xf(y)+yf(x).$$

Поділивши тотожність на xy, переписуємо її так:

$$\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y};$$

звідки зрозуміло, що в якості допоміжної потрібно взяти функцію:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Тоді функція g задовольняє (1.3). Тому знаходимо $f(x)=x\log_a x$.

2.2. Метод підстановок

Загальна суть методу така: застосовуючи різні підстановки (тобто замінюючи деякі змінні функціонального рівняння або конкретними значеннями, або якими-небудь іншими виразами), ми намагаємося або спростити це рівняння, або звести його до такого вигляду так, подальший спосіб його розв’язування стає очевидним. В задачах, які розв’язуються таким методом дуже часто не вказується клас функцій, в якому шукається розв'язок. В такому випадку передбачається, що потрібно знайти всі розв'язки без всяких обмежень (неперервні, розривні і т. п.). Особливість даного методу полягає в тому, що в ряді випадків він дозволяє відшукати розв'язок у класі всеможливих функцій [15].

Приклад 5. Знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(xy) = y^k f(x) \quad (k\text{-натуральне}).$$

Підставимо в рівняння $x = 0$:

$$f(0) = y^k f(0).$$

Так як y – довільне, то $f(0) = 0$.

Нехай тепер $x \neq 0$. Підставимо в рівняння $y = \frac{1}{x}$, отримаємо:

$$f(1) = \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot f(x)$$

або

$$f(x) = ax^k \; (a = f(1)).$$

Тепер легко бачити, що функція $f(x)=ax^k$ буде розв'язком вихідного рівняння [18].

Приклад 6. Нехай $a\neq\pm1$ – деяке дійсне число. Знайти функцію $f(x)$, визначену для всіх $x\neq1$ і яка задовольнятиме рівняння

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af\ (x) + \varphi\ (x),$$

де φ – задана функція, обмежена при $x\neq1$.

При заміні $x \rightarrow \frac{x}{x-1}$ вираз $\frac{x}{x-1}$ переходить в x. Тому отримуємо систему

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x), \\ f(x) = af\ \left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

розв'язком якої при $a^2\neq1$ є функція

$$f(x) = \frac{a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}.$$

Приклад 7. Знайти всі функції $\varphi(x)$, задані на проміжку $I=(-\infty,\ 0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$, для яких виконано рівність

$$\varphi\ \left(\frac{1}{1-x}\right) + \varphi\ \left(\frac{x-1}{1}\right) - 2\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}.$$

Виконавши поступово дві заміни $x \rightarrow \frac{x-1}{x}$ і $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$, прийдемо до системи функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + \varphi\left(\dfrac{x-1}{x}\right) - 2\varphi(x) = x, \\ \varphi\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - 2\varphi\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \varphi(x) = \dfrac{x-1}{x}, \\ -2\varphi\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + \varphi\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \varphi(x) = \dfrac{1}{1-x}. \end{cases}$$

Останнє рівняння є сумою перших двох, помножених на -1, тобто з даної системи функція *φ(x)* однозначно не визначається. З перших двох рівнянь знаходимо

$$\varphi(\mathrm{x}) = \varphi\left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}},$$

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}}. \qquad (2.1)$$

Ми можемо визначити *φ(x)* довільним способом на одному із інтервалів *(-∞, 0)U(0,1)U(1,+∞)* і формули (2.1) дадуть нам розширення *φ(x)* на всю множину *I* [18].

2.3. Граничний перехід

При розв'язуванні деяких функціональних рівнянь доцільно буває скористатися граничним переходом. Ідея цього методу проілюстрована на наступних двох прикладах.

Приклад 8. Знайти усі функції *f*, такі що *f*: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ неперервна в точці 0 і для будь-якого $x \in \boldsymbol{R}$ виконано рівність

$$2f(2x) = f(x) + x.$$

Нехай функція *f* задовольняє умову. Тоді

$$f\,(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} = \cdots =$$

$$= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \cdots + \frac{x}{4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{4^k} = \frac{x}{3}.$$

Тривіальна перевірка показує, що функція

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

дійсно є шуканою [12].

Приклад 9. Довести, що рівняння

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right) - f(x) = x\,,\quad x\epsilon[0,\infty) \tag{2.2}$$

не має неперервних розв'язків.

Припустимо, що існує неперервний розв'язок функціонального рівняння (2.2). Підставимо у (2.2) рівняння замість *x* вираз $\frac{x}{1+x}$ (бо якщо *x≥0,* то і $\frac{x}{1+x}$ *≥0*), отримаємо

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right) - f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x}. \tag{2.3}$$

Тепер проведемо таку ж заміну $x \to \frac{x}{1+x}$ у рівнянні (2.3):

$$f\left(\frac{x}{1+3x}\right) - f\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{x}{1+2x}. \tag{2.4}$$

Описану операцію проведемо ще декілька разів. На *n*-ом кроці отримуємо:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f\left(\frac{x}{1+(n-1)x}\right) = \frac{x}{1+(n-1)x}. \tag{2.5}$$

Додамо всі отримані вирази, починаючи з (2.2) і закінчуючи (2.5) (всього буде *n* виразів), і зведемо подібні доданки:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \cdots + \frac{x}{1+(n-1)x}. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) правильне для будь-якого натурального *n.* Зафіксуємо *x* та перейдемо до границі при $n \to \infty$. Враховуючи неперервність *f(x)* в точці *x=0*, знаходимо

$$f(0) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx}, \qquad (2.7)$$

де

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+kx}.$$

В лівій частині (2.7) при конкретному (фіксованому) x стоїть деяка константа, тобто при даному x рядок в правій частині (2.7) збігається до цієї константи. Покажемо, що цей ряд збігається для будь-якого значення $x>0$, прийшовши таким чином до протиріччя [23].

Для будь-якого натурального k і $x>0$ правильна нерівність

$$\frac{x}{1+kx} \geq \frac{x}{k+kx} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx} = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \cdots + \frac{x}{1+nx} \geq$$

$$\geq x + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= x + \frac{x}{1+x}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Гармонічний ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ необмежено зростає при збільшені n (відомий факт), отже,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx} = \infty,$$

тобто ряд

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+kx}$$

розбігається до ∞.

Приклад 10. Знайти *f(x)*, обмежену на будь-якому скінченому інтервалі, яка задовольнить функціональне рівняння:

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2.$$

Легко бачити, що

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0;$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8};$$

$$\frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{8} f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4} - \left(\frac{x}{4}\right)^2\right) = \frac{x}{4^2} - \frac{x^2}{8^2};$$

…………………………………………………

$$\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{x}{4^2} - \frac{x^2}{8^2}.$$

$$f(x) - \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = x\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) -$$

$$-x^2\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8^n}\right).$$

Перейшовши до границі при $x \Rightarrow \infty$, використавши неперервність *f(x)* і *f(0)=0*, отримаємо

$$f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{7}x^2.$$

2.4. Похідна і функціональні рівняння

Під час розв'язування деяких функціональних рівнянь зручно застосовувати похідну. Наведемо кілька прикладів, у яких застосування похідної дозволяє знайти розв’язок функціонального рівняння [20].

Приклад 11. Знайти всі дійсні диференційовані функції, котрі задовольняють функціональне рівняння

$$f\,(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}. \tag{2.8}$$

Нехай f задовольняє дане рівняння. Тоді

$$f\,(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)},$$

тобто $f(0)[1+f^2(x)]=0$, і тоді, $f(0)=0$.

Після перетворень отримуємо

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(h)}, \tag{2.9}$$

звідки випливає (з урахуванням $\lim_{h\to 0} f(h)=0$), що

$$f\,'(x)=C(1+f^2(x)), \tag{2.10}$$

де $C=f\,'(0)$. Значить

$$\int_0^{f(x)}\frac{dy}{1+y^2}=\int_0^x Cdx+C_1,$$

$$arctg\, f(x)=\ C_x+C_1,$$

$$f(x)\ =\ tg(Cx+C1).$$

Умова $f(0)=0$ означає, що $C_1=0$, тобто $f(x)\ =\ tg\ Cx$. Очевидно, що всі функції виду $tg\ Cx$ підходять для умови цієї задачі.

Слід зауважити, що під час розв’язування було використано лише умову диференційованості функції *f(x)* в нулі. Вона була використано при виконанні граничного переходу *(h→0)* в рівності (2.9). В лівій частині (2.9) отримаємо $f\ '(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, в правій – $C(1+f^2(x))$, оскільки $lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=C$ і $\lim_{h\to 0}=f(h)=f(0)=0$ (тому, що *f* диференційована в нулі, значить, неперервна). До (2.10) можна прийти й іншим способом [17]. Безпосередньо продифереціювавши функціональне рівняння (2.8) по *y*, отримаємо

$$f\ '(x+y)=\frac{f'(y)[1-f(x)f(y)]+[f(x)+f(y)]f(x)f'(y)}{[1-f(x)f(y)]^2},$$

і, поклавши тут *y=0* (знову припускаючи існування похідної в нулі) і враховуючи *f(0)=0*, прийдемо до (2.10):

$$f\ '(x)=C(1+f\ 2(x)),C=f\ '(0).$$

Приклад 12. Знайти функцію *f(x),* яка задовольнятиме рівняння

$$f\ '(x)+xf(-x)=ax,\ \ x\ \epsilon\ \boldsymbol{R},a=const.$$

Легко бачити, що

$$f'(-x)+xf(x)=-ax.$$

Введемо нові функції

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

Зрозуміло, що функція *F(x)* – парна, а *G(x)* – непарна, при тому *f(x)= F(x)+ G(x)*. Отримаємо рівняння відносно нових функцій *F(x)* і *G(x):*

$$G'(x)-xG(x)=0,\qquad\qquad F'(x)+xF(x)=ax,$$

$$G(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}};\qquad\qquad F(x)=a+Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Так як $G(-x)=-G(x)$, то $G(x)\equiv 0$ і $f(x)= a+Ae^{-\frac{x^2}{2}}$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що при будь-яких значеннях a, A функція $f(x)$ є розв'язком вихідного рівняння [16].

2.5. Функціональні рівняння, які містять декілька невідомих функцій

На практиці, часто доводиться розв’язувати функціональні рівняння, які містять декілька невідомих функцій. Очевидно, що такі рівняння є складнішими за рівняння з однією невідомою функцією та вимагають спеціальних методів розв’язування. Наведемо приклади розв’язування таких рівнянь [25].

Приклад 14. Знайти неперервні на всій дійсній прямій функції $f(x)$, $g(x)$ і $h(x)$, які задовольнятимуть загальні рівняння Коші:

$$f(x+y) = g(x) + h(y),$$

$$f(x+y) = g(x) \cdot h(y),$$

$$f(x \cdot y) = g(x) + h(y),$$

$$f(x \cdot y) = g(x) \cdot h(y).$$

Розглянемо останнє рівняння. Покладемо $g(1)=\alpha$, $h(1)= \beta$. Нехай $\alpha\beta \neq 0$. Тоді при $x=1$ маємо $f(y)=ah(y)$ або $f(x)=ah(x)$, а при $y=1$ отримаємо $f(x)= \beta g(x)$, і значить,

$$f(xy) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{\alpha\beta}.$$

Нова невідома функція $F(x)=\frac{f(x)}{\alpha\beta}$ задовольняє рівняння Коші (1.4) $F(x\cdot y)=F(x)\cdot F(y)$. Його розв'язком є функція $F(x)= x^a$. Отже, розв'язком початкового рівняння є функції $f(x)=\alpha\beta x^a$, $g(x)=a\cdot x^a$, $h(x)=\beta\cdot x^a$. Випадок $\alpha\beta=0$

не викликає труднощів. Перші три рівняння розв'язуються аналогічним способом [26].

Приклад 15. Знайти двічі диференційовані на всій дійсній осі функції $f(x)$ і $g(x)$, які задовольняють рівняння.

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot g(y).$$

Нехай $y=0$. Тоді $f(x)[1-g(0)]=0$, і отримуємо розв'язок: $f(x)\equiv 0$, $g(x)$ – довільна функція. Якщо $f(x)\equiv 0$, то $g(0)\neq 1$. Диференціюючи це рівняння двічі по змінній y і вважаючи потім $y=0$, будемо мати

$$f''(x)=af(x), a=g''(0).$$

Можливі наступні випадки і відповідні їм розв'язки:

1) $a=k^2$, $f(x)=Ae^x+Be^{-x}$, A, B – довільні числа, $g(x)=ch(kx)$;
2) $a=-k^2$, $f(x)=A\sin kx+B\cos kx$, $g(x)=\cos kx$;
3) $a=0$, $f(x)\ Ax+B$, $g(x)=1$.

Приклад 16. Знайти функцію $f(x)$, $g(x)\in C^2(\mathbf{R})$, яка задовольняє рівняння

$$f(x)+g(x+y)=g(y)f(x+ay),$$

де a – фіксоване число.

Вважаючи $y=0$, будемо мати $f(x)[g(0)-2]=0$. Звідси отримуємо розв'язок вихідного рівняння: $f(x)\equiv 0$, $g(x)$ – довільна функція. Якщо $f(x)\equiv 0$, то $g(0)=2$. Диференціюючи дане рівняння по змінній y і потім вважаючи $y=0$, отримаємо

$$[1-a\cdot g(0)]\cdot f'(x)=g'(0)\cdot f(x)=[1-2a]\cdot f'(x).$$

Якщо $a\neq 1/2$, то функція $f(x)=Ce^{kx}$, де число $k=\frac{g'(0)}{1-2a}$,а функція $g(x)=e^{k(1-a)x}+e^{-kax}$. Якщо $a=1/2$, то $f(x)\equiv 0$ чи $g'(0)=0$ [21]. В другому випадку, диференціюючи початкове рівняння двічі по змінній y і потім вважаючи $y=0$, отримаємо

$$f''(x) = bf(x), \;\; b = 2g''(0).$$

Можливі наступні випадки і відповідні їм розв’язки:

1) $b = k2, f(x) = Aekx + Be - kx\;, g(x) = 2ch(kx/2);$
2) $b = -k2, f(x) = A\,sin\,kx + B\,cos\,kx, g(x) = \;2cos(kx/2);$
3) $b = 0, f(x) = Ax + B, g(x) = 2.$

2.6. Системи функціональних рівнянь

Приклад 17. Знайти розв’язок системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \dfrac{\varphi(y)\psi(x)}{1-\varphi(x)\varphi(y)}, \\ \psi(x+y) = \dfrac{\psi(x)\psi(y)}{[1-\varphi(x)\varphi(y)]^2}. \end{cases}$$

Розглянемо спочатку деякі властивості функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, які задовольняють дані рівняння в умові задачі. Це дасть можливість знайти розв'язки цих рівнянь [28].

Якщо $\psi(x_0)=0$ для деякого x_0, то з другого рівняння слідує, що $\psi(x_0+y)=0$ при будь-якому y, тобто $\psi(x)\equiv 0$. Тоді з першого рівняння отримуємо $\varphi(x)=const$, що і дає нам перший тривіальний розв'язок

$$\varphi(x) = c, \;\; \psi(x) \equiv 0. \qquad (2.11)$$

В подальшому будемо вважати, що $\psi(x)\neq 0$. Покладаючи в першому рівнянні $y=0$, знаходимо, що $\varphi(0)=0$.

Якщо $\varphi(x_0)=0$ для деякого x_0 , то з першого рівняння при $y=x_0$ отримуємо

$$\varphi(x + x_0) = \varphi(x) \tag{2.12}$$

тобто φ має період x_0. З іншого боку, покладаючи в першому рівнянні $x=x_0$ і використавши (2.12), отримаємо

$$\varphi(y) = \varphi(x_0 + y) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi(y)\psi(x_0)}{1 - \varphi(x_0)\varphi(y)} = \varphi(y)\psi(x_0),$$

звідки $\varphi(y)\equiv 0$, або $\psi(x_0)=1$. Перша можливість приводить до другого тривіального розв'язку

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) \equiv ax \tag{2.13}$$

(точніше кажучи, ψ має тут бути розв'язком функціонального рівняння $\psi(x+y)= \psi(x)\,\psi(y)$; відомо, що при досить загальних додаткових припущеннях це дасть (2.13), якщо тільки $\psi(x)\equiv 0$).

Отже, якщо відкинути тривіальний розв'язок, то $\psi(x)=1$ там, де $\varphi(x)=0$. Користуючись симетрією першого рівняння відносно x і y, отримаємо

$$\varphi(x) + \frac{\varphi(\mathrm{y})\psi(\mathrm{x})}{1 - \varphi(x)\varphi(\mathrm{y})} \equiv \varphi(x) + \frac{\varphi(\mathrm{x})\psi(\mathrm{y})}{1 - \varphi(x)\varphi(\mathrm{y})},$$

і якщо $\varphi(x) \neq 0$ і $\varphi(y) \neq 0$, то

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \varphi(x) - \frac{1}{\varphi(x)} \equiv \frac{\psi(y)}{\varphi(y)} - \varphi(y) - \frac{1}{\varphi(y)}. \tag{2.14}$$

Ліва частина тотожності (2.14) залежить тільки від x, а права тільки від y. Отже, обидві частини рівні одній і тій же константі, яку позначимо $2c$. Тоді

$$\psi(x) \equiv 1 + 2c\,\varphi(x) + \varphi^2(x) = [\varphi + c]^2 + 1 - c^2. \tag{2.15}$$

Цю тотожність ми довели при умові, що $\varphi(x)\neq 0$. Однак, вона справедлива і при $\varphi(x) =0$, а отже, і при всіх x. Підставляючи (2.15) в перше із рівнянь системи, отримуємо

$$\varphi(x+y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)+2c\varphi(x)\,\varphi(y)}{1-\varphi(x)\,\varphi(y)}. \qquad (2.16)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що якщо φ задовольняє рівняння (2.16), а ψ знаходиться із (2.15), то обидва функціональні рівняння, дані в умові задачі, задовольняються. Таким чином, залишається знайти розв'язок рівняння (2.16) [29].

Перед цим розв’яжемо (2.16) в класі функцій, які мають похідну в нулі, тобто такі, в яких існує границя

$$\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(y)}{y}=A$$

(ми вже знайшли, що *φ(0)=0).* Із (2.16) маємо

$$\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(y)}{y}\cdot\frac{1+2c\varphi(x)+\varphi^2(x)}{1-\varphi(x)\varphi(y)}$$

$$=\mathrm{A}(1+2\mathrm{c}\,\varphi(x)+\ \varphi^2(\mathrm{x})).$$

Отже, функція $\varphi(x)$ диференційована і задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=A(1+2c\varphi+\varphi^2).$$

Розв’язуючи це рівняння з дотриманням початкової умови *φ(0)=0,* знаходимо

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{1-c^2}\,tg\left(Ax\sqrt{1-c^2}+arg\sin c\right)-c, & \text{якщо } c^2<1;\\ c\,\frac{Ax}{1-Ax}, & \text{якщо } c=\pm 1\\ -\sqrt{c^2-1}\,ch\left(Ax\sqrt{c^2-1}+ln\ |c-\sqrt{c^2-1}|\right)-c, & \text{якщо } c^2>1\end{cases} \qquad (2.17)$$

(ch потрібно замінити на cth, якщо модуль аргумента >1).

Із (2.15) знаходимо відповідне ψ.

$$\psi(x) = \begin{cases} (1-c^2)sec^2\left(Ax\sqrt{1-c^2}+argsin\, c\right), & \text{якщо } c^2<1; \\ \frac{1}{(1-Ax)^2}, & \text{якщо } c=\pm 1 \\ (c^2-1)\left[-\frac{1}{ch^2}\, або\, \frac{1}{sh^2}\right]\left(Ax\sqrt{c^2-1}+ln\ |c-\sqrt{c^2-1}|\right), & \text{якщо } c^2>1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Нехай $c^2<1$. Запишемо $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \sqrt{1-c^2}tg\, f(x) - c. \qquad (2.19)$$

З (2.16) отримаємо функціональне рівняння для f

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - arcsin\, c,$$

і значить, $F(x)=f(x)-arcsin\ c$ задовольняє рівняння

$$F(x+y) = f(x) + F(y).$$

Тут маємо $F(x)=ax$, звідки знову приходимо до першої формули (2.17) ($a=A\sqrt{1-c^2}$).

Аналогічно і при $c^2\geq 1$. Таким чином, всі «адекватні» розв'язки (наприклад, обмежені в деякій області точки 0) даються формулами (2.11), (2.13), (2.17) і (2.19).

2.7. Графічний спосіб розв’язування функціональних рівнянь

Деякі функціональні рівняння можуть бути розв’язані графічним способом. Розглянемо його суть на прикладі.

Приклад 18. Знайти розв’язок функціонального рівняння

$$f(x) = f(f(x))$$

в класі неперервних на всій числовій осі функцій.

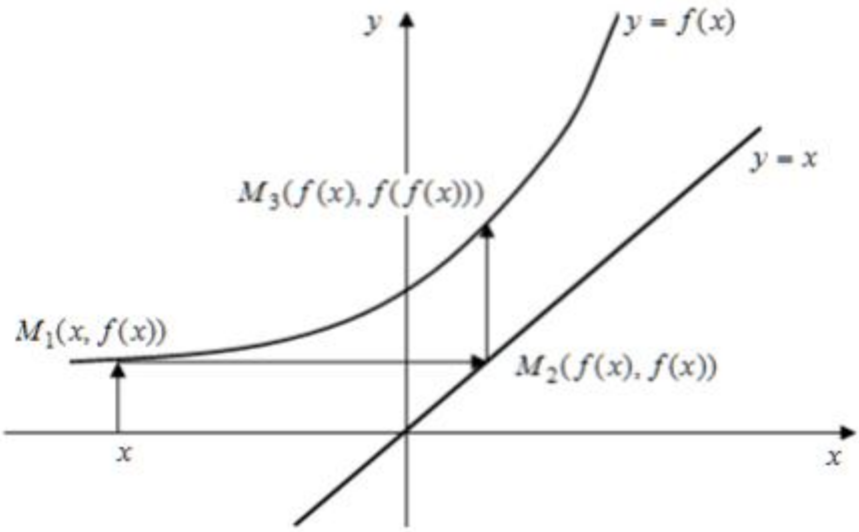

Рис. 2.1. Визначення точки з ординатою *f(f(x))*

Спочатку нагадаємо, як графічно отримати точку з ординатою *f(f(x))*, вважаючи відомим розташування графіка функції *y=f(x)*, - це ордината точки M_3 (рис. 2.1).

На рис. 2.1 ординати точок M_2 і M_3 за умовою повинні співпадати, і оскільки співпадають їх абсциси, то $M_2 \equiv M_3$. Значить, кожній точці графіка *y=f(x)*, яка лежить поза прямою $y = x$, відповідає точці графіку, яка лежить на прямій $y = x$ і має ту ж ординату [31].

Отже, якщо функція *y=f(x)* – неперервна на усій числовій прямій і задовольняє умову *y=f(f(x))*, то частинами її графіку обов'язково є частини прямої *y=x* (або уся пряма, або її промінь, або її відрізок, або її точка), а сам графік має один із виглядів, зображених на рис. 2.2.

Для обґрунтування цього висновку візьмемо дві точки графіка *y=f(x)*, які належать прямій *y=x*: $N_1(x_1,f(x_1))$ і $N_2(x_2,f(x_2))$. За теоремою Больцано-Коші значення функції *f(x)* в силу її неперервності заповнюють на осі *Oy* весь відрізок з кінцями $f(x_1)$ і $f(x_2)$. А цьому відрізку на прямій *y=x* буде відповідати відрізок N_1N_2 графіка *y=f(x)* (рис. 2.3) [31].

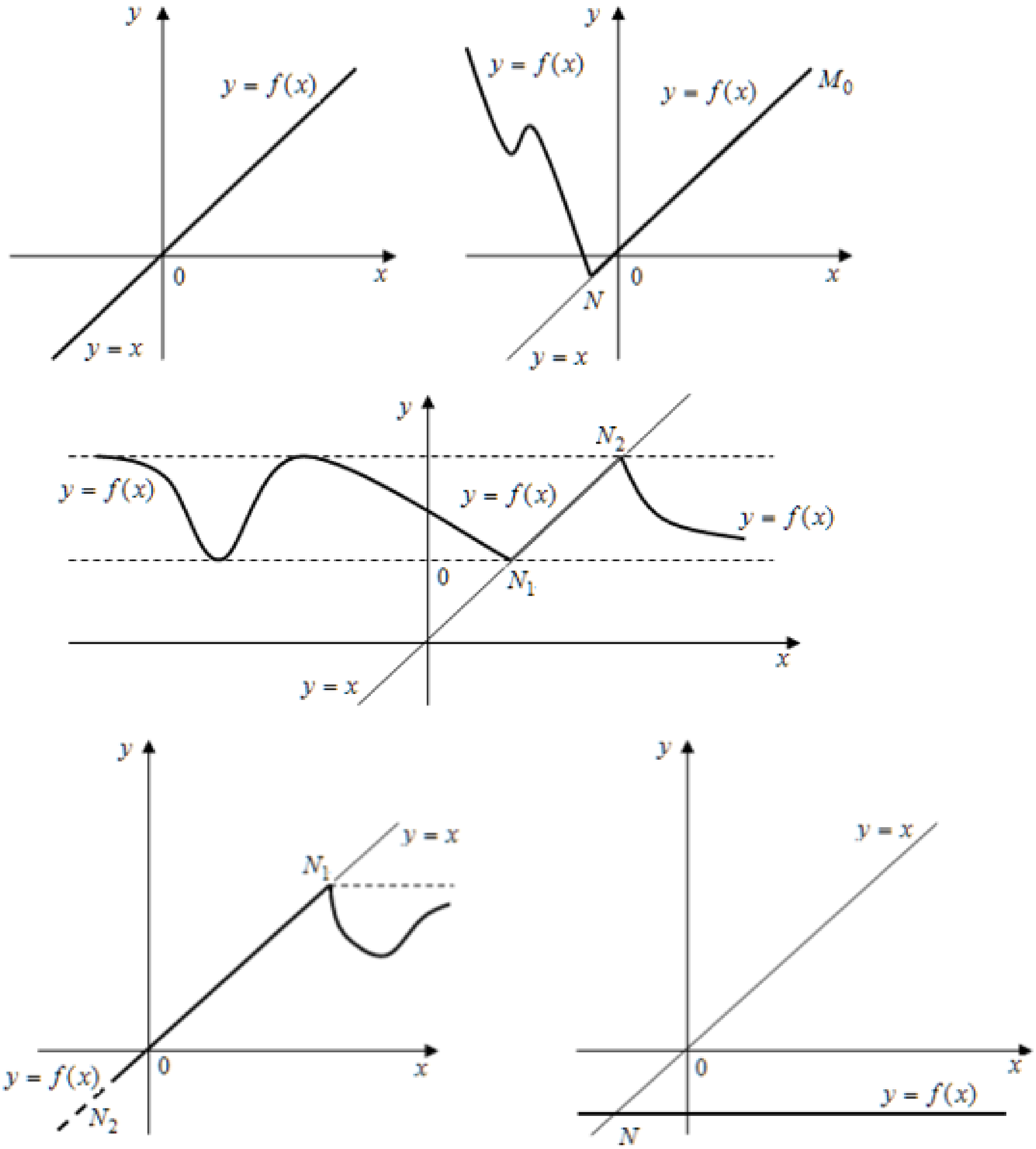

Рис. 2.2. Вигляд графіку функції *y=f(f(x))*

Таким чином, на прямій *y=x* графіку функції *y=f(x)* належить множина, яка містить або тільки одну точку, або, разом із будь-якими двома різними точками, містить і весь відрізок, що їх сполучає. Слід зауважити, що в силу неперервності функції *y=f(x)* на всій числовій осі, розглядуваній множині належать її граничні точки.

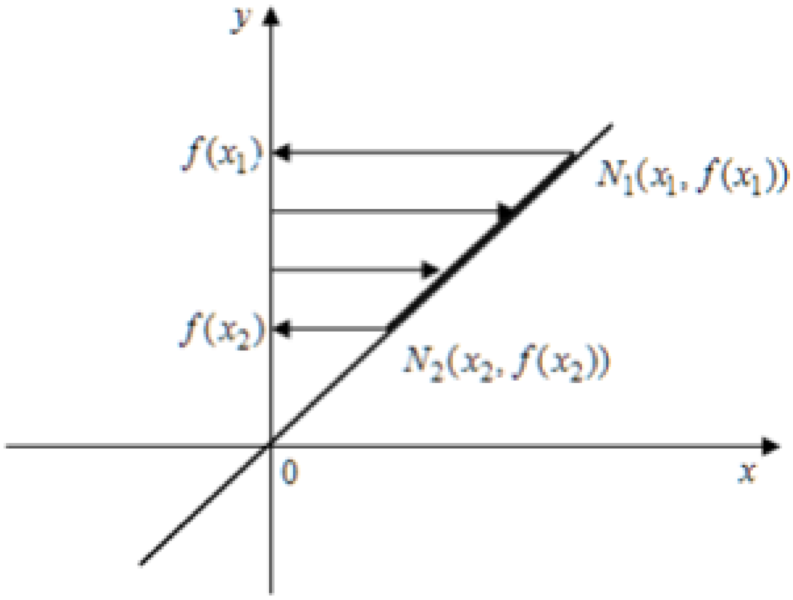

Рис. 2.3. Відрізок, що відповідає графіку функції *y=f(x)*

Частина графіку *y=f(x),* котра розташована на прямій *y=x,* визначає верхню і нижню межі для частин графіку, які не належать прямій (рис. 2.3). У іншому ці частини довільні – настільки, звичайно, наскільки довільними можуть бути частини графіка неперервної на всій числовій прямій функції, оскільки неважко перевірити, що для довільної неперервної функції, графік якої належить до одного з п’яти видів, показаних на рис. 2.3, справедлива рівність [14]

$$f(x) = f\big(f(x)\big).$$

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ КОШІ

3.1. Застосування рівняння Коші в теорії інформації

Рівняння Коші на числовій прямій – це рівняння гомоморфізму адитивної групи дійсних чисел. Розглянемо рівняння, яке відповідає гомоморфізмам адитивної чи мультиплікативної структури на R, а також зв'язок з адитивним рівнянням Коші, що дозволяє знайти загальний, а також регулярний розв'язок. Розглянемо застосування такого рівняння в теорії інформації [27].

Логарифмічне рівняння Коші

$$g(xy) = g(x) + g(y) \text{ при всіх } (x, y) \in \boldsymbol{R}_{+}^{2} \tag{3.1}$$

легко зводиться до рівняння Коші (1.1). Підставимо

$$x = e^{u}, \ y = e^{v}, \quad u = ln\, x, \ v = ln\, y,$$

встановлюємо відповідність між всіма додатними x, y і всіма дійсними u, v. Отримаємо тепер

$$f(u) = g(e^{u}) \ (u \in \boldsymbol{R}), \tag{3.2}$$

із рівняння (3.1) отримаємо адитивне рівняння Коші (1.1):

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \ \ (u, v \in \boldsymbol{R}). \tag{3.3}$$

З рівняння (3.2) маємо

$$g(x) = f\,(ln\, x) \text{ при всіх додатних } x. \tag{3.4}$$

Проведений перехід є оборотним, звідки отримуємо наступний факт.

Теорема. Загальний розв'язок $g : R_{+} \to R$ рівняння (3.1) має вигляд (3.4), де f – загальний розв'язок рівняння (3.3).

Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (3.1) в класах функцій, неперервних в точці чи вимірних, або обмежених (з однієї сторони) на множині додатної міри, має вигляд

$$g(x) = c \ln x \quad (x \in \boldsymbol{R}+), \qquad (3.5)$$

де c – довільна константа.

Розглянемо рівняння

$$\mathrm{I}(pq) = I(p) + I(q) \quad \text{при всіх} \quad p, q \in]0,1]. \qquad (3.6)$$

Підставивши

$$p = e^{-x}, \; q = e^{-y} \; (x \geq 0, \quad y \geq 0), \; g(x) = I(e^{-x}),$$

зведемо його до вигляду (1.1):

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{для всіх невід'ємних } x, y. \qquad (3.7)$$

Таким чином, загальний розв'язок *I : [0,1]→**R*** рівняння (3.6) має вигляд

$$I(p) = g(-\ln p) \quad (p \in]0,1]),$$

де g – довільний розв'язок рівняння (3.7). Отже, загальний невід'ємний розв'язок рівняння (3.6) має вигляд

$$I(p) = -\mathrm{c} \ln p \quad (p \in]0,1]), \qquad (3.8)$$

де c – довільна невід'ємна стала.

Останній висновок має безпосереднє застосування в теорії інформації [26]. Зазвичай приймається, що кількість інформації, закладеній в події, невід'ємна і залежить (тільки) від (нульової) ймовірності цієї події, а в випадку коли дві незалежні події відбулись одночасно, кількість інформації дорівнює сумі кількості інформації, отриманих із цих подій кожної окремо. Якщо ймовірність p відповідає кількістю інформації *I(p),* то остання умова рівносильна до рівняння (3.6), а попереднє означає невід'ємність функції *I*. Таким чином, згідно зробленого висновку, кількість інформації, закладеної в події, яка має ймовірність *p,* визначається за формулою (3.8). Зазвичай одиниця інформації (один біт) буває задана умовою $I(1/2) = 1$. Тоді $c=1/\ln 2$, і в події, яка має ймовірність *p*, закладено кількість інформації

$$I(p) = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -\log_2 p.$$

3.2. Багатомісні і векторні функції

Аналог рівняння Коші (1.1) для функції $f: R^n \to R$ має вигляд

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (3.9)$$

$$(x_k, y_k \in \boldsymbol{R}; \quad k=1,2,\ldots,n).$$

Якщо позначити

$$f_1(t_1) = f(t_1,0,\ldots,0),\ldots, f_k(t_k)=f(0,\ldots 0, t_k, 0,\ldots,0),\ldots,f_n(t_n)=f(0,\ldots,0,t_n),$$

то багаторазове застосування рівняння (3.9) дасть

$$f(t_1, t_2, \ldots,t_n) = f(t_1+0, 0+t_2, 0+t_3,\ldots,0+t_n)=$$

$$=f(t_1,0,\ldots,0)+f(0,t_2, t_3,\ldots,t_n)=f_1(t_1)+f(0+0,t_2+0, 0+t_3,\ldots,0+t_n)=$$

$$=f_1(t_1)+f_2(t_2)+f(0,0,t_3,\ldots,t_n)=\ldots$$

$$\ldots= f_1(t_1)+f_2(t_2)+\ldots+f_{n-1}(t_{n-1})+f_n(0,\ldots,0,t_n),$$

Тобто

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t_k) \text{ при всіх } (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n. \quad (3.10)$$

Підставимо в (3.9) $x_k=x$, $y_k=y$, $x_j=y_j=0$ при $j\neq k$:

$$f_k=(x+y)= f_k(x)+f_k(y) \text{ при всіх } x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R} \quad (k=1,\dots,n). \qquad (3.11)$$

Навпаки, будь – яка функція виду (3.10), де всі f_k $(k=1,2,\dots,n)$ задовольняє умову (3.11), буде розв’язком для (3.9).

Загальний розв’язок $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ рівняння (3.9) має вигляд (3.10), де f_k $(k=1,2,\dots,n)$ – довільні розв’язки рівняння Коші (3.11).

Справді, якщо функція f – неперервна в точці $(a_1,\dots, a_n)$, то відображення

$$x_k \to f(a_1,\dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \ (k=1,2\dots,n) \qquad (3.12)$$

неперервні в точці a_k. Але в силу (3.10)

$$f(a_1,\dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)=f_k(x_k) +f_1(a_1)+\dots+f_{k-1}(a_{k-1})+f_{k+1}(a_{k+1})+\dots+f_n(a_n),$$

тому і f_k – неперервна в a_k. Отже

$$f_k(x_k)= c_k x_k \text{ при всіх } x_k \in \boldsymbol{R} \quad (k=1,2\dots,n), \qquad (3.13)$$

де c_k – дійсні константи.

З доведеного випливає, що загальний розв’язок рівняння (3.9) в класі функцій, неперервних в точці, має вигляд

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k. \qquad (3.14)$$

Розглянемо тепер векторну функцію $f: R^n \to R^m$. Для неї аналогом рівняння Коші буде

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (3.15)$$

Для кожної компоненти f_j $(j = 1,\dots, m)$ виконується (3.9):

$$f_j(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)= f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)+f_j(y_1, y_2,\dots, y_n)$$

$$(j = 1,2,\dots, m;\ x_k, y_k \in \boldsymbol{R};\quad k=1,2,\dots, n), \qquad (3.16)$$

звідси легко отримати загальний розв'язок для (3.15). Сформулюємо результат для неперервних векторних функцій [25].

Наслідком наведених міркувань є той факт, що загальний розв'язок рівняння (3.15) в класі функцій $f: R^n \to R^m$, неперервних в точці, має вигляд

$$f(x) = C \cdot x \quad (x \epsilon R^n), \tag{3.17}$$

де C – фіксована матриця розмірності $m \times n$.

Справді, із (3.16), (3.9) і (3.14) випливає, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_k, \quad (j = 1,2, \dots, m)$$

що рівносильно (3.17).

У випадку $m=1$ цей наслідок зводиться до попереднього, а саме: загальний розв'язок $f: R^n \to R$ рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ (x \epsilon R^n, y \epsilon R^n) \tag{3.18}$$

в класі функцій, неперервних в точці, має вигляд

$$f(x) = c \cdot x,$$

де c – довільний сталий вектор, а точка позначає скалярний добуток.

Нехай тепер $n = 1$. Тоді загальний розв'язок $f: R \to R^m$ рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ (x \epsilon R, y \epsilon R)$$

в класі функцій, неперервних в точці, має вигляд

$$f(x) = xc,$$

де c – довільний сталий вектор.

3.3. Характеризування щільності в теорії геометричних об'єктів за допомогою матричного функціонального рівняння

Рівняння типу Коші допускають і подальші узагальнення. Рівняння, які містять множення, можна узагальнити на матриці, оскільки матриці утворюють кільце. Відповідне рівняння

$$g(XY) = g(X)g(Y) \qquad (\det XY \neq 0) \tag{3.19}$$

для скалярних функцій, визначених на квадратних матрицях, знаходить важливе застосування в теорії геометричних об'єктів [22].

Однорідний лінійний суто диференціальний геометричний об'єкт першого класу з однією компонентою – це дійсне число d, яке залежить від точки n-вимірного простору, причому при регулярному перетворенні координат

$$\tilde{x}_k = \emptyset_k\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (k = 1,2,\dots,n)$$

значення об'єкту змінюється за правилом

$$\tilde{d} = g(X)\, d,$$

де g – дійсна функція від матриці Якобі

$$X = \left[\frac{\partial \widetilde{x_k}}{\partial \widetilde{x_j}}\right] \quad (j, k = 1,2,\dots,n;\ \det X \neq 0).$$

Далі можна перейти до третьої системи координат

$$\tilde{\tilde{x}}_l = \psi_l\,(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_n}) \qquad (l = 1,2,\dots,n)$$

за допомогою матриці Якобі

$$Y = \left[\frac{\partial \widetilde{x_j}}{\partial \widetilde{x_k}}\right] \quad (j, k = 1,2,\dots,n;\ \det Y \neq 0),$$

отримавши нове значення об'єкту $\tilde{\tilde{d}}$. В силу правила диференціювання складеної функції декількох змінних отримуємо

$$\left[\frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial x_j}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j}\right] = YX. \tag{3.20}$$

Із (3.19) і (3.20) слідує, що

$$\tilde{\tilde{d}} = g\,(Y \cdot X)\,d$$

і одночасно

$$\tilde{\tilde{d}} = g\,(Y)\,\tilde{d} = g\,(Y)\,g(X)d.$$

Звідси (виключаючи тривіальний випадок *$d \equiv 0$)* випливає (3.19).

Оскільки *g* – скалярна функція, то з огляду (3.19)

$$g(X\,Y) = g(Y\,X), \quad g(X\,Y\,Z) = g\,(X\,Z\,Y) \tag{3.21}$$

і т.д.

Нагадаємо, що матриці *X* і *Z* подібні, якщо існує така не вироджена матриця Т, що $X = T^{-1}\,ZT$; подібні матриці виражають одне і теж лінійне перетворення в різних базисах. Із (3.21) слідує, що

$$g\,(X) = g(T^{-1}ZT) = g\,(T^{-1}TZ) = g\,(Z), \tag{3.22}$$

тобто значення функції *g,* яка задовольняє умову (3.19), однакове для подібних матриць [15].

Діагональну матрицю можна представити як добуток матриць, кожна з яких відрізняється від одиничної лише одним елементом на головній діагоналі:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & d_n \end{bmatrix}.$$

Можна помітити, що кожна із діагональних матриць в правій частині подібна діагональній матриці, у якої той же неодиничний елемент стоїть в першому рядку (а інші елементи діагоналі рівні 1). Добуток таких матриць – знову діагональна матриця, при чому лише перший елемент діагоналі може відрізнятися від 1.

Введемо позначення

$$f(t) = g\left(\begin{bmatrix} t & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & t \end{bmatrix}\right).$$

З (3.19) випливає, що

$$f(tu) = f(t)\, f(u) \text{ при всіх } t\neq 0,\ u\neq 0, \qquad (3.23)$$

і значення функції g для діагональної матриці з елементами $d_1, d_2, \ldots, d_n$ дорівнює $f(d_1)\, f(d_2) \ldots f(d_n)$. З огляду на (3.23), останній вираз дорівнює $f(d_1 d_2 \ldots d_n)$. Так як визначник діагональної матриці рівний $d_1 d_2 \ldots d_n$, то ми довели, що для діагональної матриці X виконується рівність

$$g(X) = f(\det X) \quad (\det X \neq 0). \qquad (3.24)$$

Як відомо з теорії матриць, будь-яка матриця може бути представлена як добуток ермітової матриці на унітарну. Всі ермітові і унітарні матриці подібні діагональним. Використовуючи цей розклад, отримуємо, з урахуванням (3.19) і (3.22), що рівність (3.24) виконується для всіх не вироджених матриць X.

Таким чином, доведено наступний факт: загальний розв'язок рівняння (3.19) має вигляд (3.24), де f – довільний розв'язок степеневого рівняння Коші (3.23).

Звідси слідує, що дійсні розв'язки рівняння (3.19), які тотожно не дорівнюють нулю і неперервні у точці, мають вигляд

$$g(X) = |\det X|^c \quad \text{і} \quad g(X) = |\det X|^c \operatorname{sgn}(\det X), \qquad (3.25)$$

де c – довільна дійсна константа.

Крім того, усі ненульові однорідні лінійні суто диференціальні геометричні об'єкти, які неперервно залежать від невироджених диференційованих перетворень координат, перетворюються відповідно (3.20), де функція g має вигляд (3.25) з деякою константою c.

Якщо g визначається другою з формул (3.25), то геометричний об'єкт з називається (звичайною) щільністю, а якщо першою – щільністю Вейля. В обох випадках c називається вагою щільності.

3.4. Рівняння Пексідера

Чудова риса функціональних рівнянь, яка відрізняє їх від більшості інших (диференціальних, інтегральних та ін.), полягає в тому, що одне рівняння може визначати декілька невідомих функцій. Класичним прикладом такого рівняння є узагальнення адитивного рівняння Коші, а саме рівняння Пексідера:

$$k(x+y) = g(x)+h(y), \qquad (3.26)$$

де всі функції g, h, k невідомі.

Розглянемо рівняння в загальному випадку, який охоплює скалярні (дійсні і комплексні), векторні і матричні функції [13] . Нехай $(N, +)$ – групоїд (множина з операцією + : $N \times N \to N)$, 0 – його нейтральний елемент ($x + 0=0 + x = x$ для всіх $x \in N)$, а $(G, +)$ – деяка група (адитивна, але не обов'язково комутативна). Будемо шукати розв'язок $g, h, k : N \to G$ рівняння (3.26) для $x, y \in N$.

Вважаючи по черзі $x=0$ і $y=0$ в (3.26) і позначаючи $a = g(0), b = h(0),$ отримуємо відповідно

$$h(y) = - a +k(y), \quad g(x)= k(x) – b. \tag{3.27}$$

Підставивши в (3.26), отримуємо

$$k(x+y)= k(x) –b – a+k(y). \tag{3.28}$$

Якщо покласти

$$f(z)= - a + k(z) – b, \tag{3.29}$$

то одержимо

$$f(x+y) = f(x) +f(y) \quad \text{для всіх} \quad x, y \in N.$$

Дане рівняння нагадує рівняння Коші і означає, що f є гомоморфізмом із $(N, +)$ в $(G, +)$, подібно до того, як розв'язки рівняння Коші (3.15) є гомоморфізмами з $(R^n,+)$ в $(R^m,+)$ відносно звичайного додавання векторів +.

З урахуванням (3.27) і (3.29) доведена, має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $(N, +)$ – групоїд з нейтральним елементом, $(G, +)$ – група. Тоді загальний розв'язок $g, h, k : N \to G$ рівняння (3.26) має вигляд

$$g(x) = a+ f(x), \; h(y) = f(y)+b, k(z) = a+ f(z)+b \text{ для всіх } x, y, z \in N, \tag{3.30}$$

де a і b – довільні константи в G, а f - довільний гомоморфізм з N в G.

Легко перевірити, що функція виду (3.30) є розв'язком (3.26) при будь-яких a, b і $f : N \to G$. Загальний розв'язок $g, h, k : R^n \to R^m$ рівняння

$$k(x+y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in R^n). \tag{3.31}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.31) в класі функцій $g, h, k : R^n \to R^m$, де хоча б одна з функцій неперервна в точці, має вигляд

$$g(x) = C \cdot x + a, \;\; h(y) = C \cdot y + b, \;\; k(z) = C \cdot z + a + b \quad (x, y, z \in R^n),$$

де a,b – довільні константи в R^m, а C- довільна стала $m \times n$ – матриця.

Нехай F – асоціативне тіло, $M_n(F)$ – мультиплікативний моноїд $n \times n$ матриць над F. Тоді загальні розв'язки $g, h, k : M_n(F) \to F$ рівняння

$$k(XY) = g(X)\, h(Y) \quad (X, Y \in M_n(F)) \tag{3.32}$$

мають вигляд

$$g(Z) = k(Z) = 0 \;\; (Z \in M_n(F)), \text{ функція } h \text{ довільна} \tag{3.33}$$

$$h(Z) = k(Z) = 0 \;\; (Z \in M_n(F)), \quad \text{функція } g \text{ довільна} \tag{3.34}$$

$$g(Z) = af(\det Z), \;\; h(Z) = f(\det Z)\, b, \;\; k(Z) = a\, f(\det Z)\, b, \tag{3.35}$$

де $a, b \in F \setminus \{0\}$ – довільні сталі, f – довільний ендоморфізм моноїда $(F, \cdot)$.

Нейтральним елементом моноїда $M_n(F)$ слугує одинична матриця I. Оскільки ненульові елементи тіла утворюють групу відносно множення, то доведення попереднього твердження зберігається, і якщо $g(I) \neq 0$, $h(I) \neq 0$. В цьому випадку отримуємо розв'язок (3.35), який дійсно задовольняє рівняння (3.32), якщо f – гомоморфізм. Якщо $g(I)=0$, то з (3.32) отримуємо $k(Y) = k(IY) = = g(I)h(Y) = 0$ для всіх $Y \in M_n(F)$. Також з (3.32) маємо $0 = g(X)h(Y)$; так як в тілі немає дільників нуля, то або $g(X) \equiv 0$ або $h(Y) \equiv 0$. Також правильно, якщо $h(I)=0$. Якщо функція k і g (або h) тотожно рівні нулю, то (3.32) виконується при довільній функції h (відповідно $g(X)$). Звідси отримуємо розв'язок рівняння (3.33) і (3.34).

Нехай $(S,+)$ – комутативна півгрупа, $(G, \cdot)$ – група. Тоді загальний розв'язок $g,h,k : S \to G$ рівняння

$$k(x+y) = g(x)h(y) \text{ при всіх } x,y \in S \tag{3.36}$$

має вигляд

$$g(x) = a\, f(x),\; h(y) = f(y)\, b,\; k(t) = a\, f(t)\, b \quad (x,y \in S,\; t \in S+S), \tag{3.37}$$

де $a,b \in G$ – довільні константи, f – довільний гомоморфізм з S в G[32].

Справді, в силу комутативності

$$g(x)h(y) = k(x+y) = k(y+x) = g(y)h(x).$$

Зафіксуємо $y=y_0$ і підставимо

$$\alpha=g(y_0),\; \beta= h(y_0), \tag{3.38}$$

звідки

$$g(x)= \alpha\, h(x)\, \beta^{-1}. \tag{3.39}$$

Підстановка в (3.36) дає

$$k(x+y) = \alpha\, h(x)\, \beta^{-1}h(y).$$

Оскільки

$$k[(x+y)+y_0]=k[x+(y+y_0)],$$

то

$$\alpha\, h(x+y)\beta^{-1}h(y_0) = \alpha\, h(x)\, \beta^{-1}\, h(y+y_0).$$

Так як G – група, то з огляду (3.38) маємо, вважаючи $e(y)= \beta^{-1}\, h(y+y_0)$:

$$h(x+y) = h(x)e(y). \tag{3.40}$$

В силу комутативності

$$h(x)e(y_0)= h(y_0)e(x),$$

звідки з урахуванням (3.38) випливає, якщо підставити $\gamma = e(y_0)^{-1}$,

$$h(x) = \beta e(x)\gamma. \tag{3.41}$$

Підставляючи (3.41) в (3.40), отримаємо

$$e(x+y) = e(x)\gamma e(y)\gamma^{-1}.$$

Звідки, в силу асоціативності,

$$e(x+y)\gamma e(z)\,\gamma^{-1} = e\,[(x+y)+z]=e[x+(y+z)]=e(x)\gamma e(y+z)\,\gamma^{-1},$$

або

$$e(x)\gamma e(y)e(z) = e(x)\gamma e(y)\,\gamma e(z)\,\gamma^{-1}.$$

Ділення на $e(x)\gamma e(y)$ дає $e(z) = \gamma e(z)\,\gamma^{-1}$,тобто

$$e(z)\gamma= \gamma e(z), \tag{3.43}$$

І (3.42) зводиться до рівняння

$$e(x+y)=e(x)\,e(y), \tag{3.44}$$

тобто e є гомоморфізом з $(S, +)$ в $(G, \cdot)$. Із (3.41), (3.39), (3.36), (3.43) і (3.44) слідує

$$g(x) = \alpha\beta\gamma e\,(x)\,\beta^{-1},$$

$$k(x+y)= g\,(x)h(y)= \alpha\beta\gamma e\,(x)\,e(y)\gamma= \alpha\beta\gamma e\,(x+y)\gamma.$$

Тепер зручно ввести нові константи $a= \alpha\beta\gamma\,\beta^{-1}$,$b= \beta\gamma$ і підставити

$$f(x):= \beta e(x)\,\beta^{-1}.$$

Відображення f є гомоморфізмом з S в G:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in S). \tag{3.45}$$

При цьому

$$g(x) = \alpha\beta e(x)\,\beta^{-1} = a\,f(x) \quad (x \in S),$$

$$h(y) = \beta e(y)\,\beta^{-1}b = f(y)\,b \quad (y \in S),$$

$$k(z) = \alpha\beta e(z)\,\beta^{-1}b = a\,f\,(z)b \quad (z \in S+S),$$

тобто (3.37) виконано [29]. І навпаки, такі функції g,h,k при умові (3.45) завжди задовольняють рівнянню (3.36).

3.5. Розв'язування функціональних рівнянь методом Коші у шкільному курсі математики

Ще одним важливим застосуванням рівнянь Коші є застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей шкільного курсу математики. Крім того, розв'язування багатьох функціональних рівнянь зводиться до розв'язування рівнянь Коші. Розглянемо декілька показових прикладів.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$4f(x) + g(x) \leq 0,$$

якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють систему

$$\begin{cases} f(2x+1) + g(x-1) = x \\ f(2x+1) - 2x^2 - 2g(x-1) = 0 \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння системи на -1:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3g(x-1) = x \\ f(2x+1) + g(x-1) = x \end{cases}$$

З першого рівняння системи виразимо

$$g(x-1)=\frac{x-2x^2}{3}$$

Знайдемо *g(x)*. Введемо заміну:

$$x\text{-}1=t \quad => \quad x=t+1.$$

Тоді

$$g(t)=\frac{(t+1)-2(t+1)^2}{3}=\frac{t+1-2t^2-4t-2}{3}=\frac{-2t^2-3t-1}{3}$$

і

$$g(x)=\frac{-2x^2-3x-3}{3}.$$

Помножимо перше рівняння вихідної системи на 2 і додамо до другого:

$$\begin{cases} 3f(2x+1)-2x^2=2x, \\ f(2x+1)-2x^2-2g(x-1)=0. \end{cases}$$

Звідси

$$f(2x+1)=\frac{2x+2x^2}{3}.$$

Введемо заміну

$$2x+1=a => x=\frac{a-1}{6}.$$

Тоді

$$f(a)=\frac{a-1+\frac{(a-1)^2}{2}}{3}=\frac{2a-2+a^2-2a+1}{6}=\frac{a^2-1}{6}.$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{6}.$$

Розв’яжемо тепер нерівність:

$$\frac{4(x^2-1)}{6} - \frac{2x^2+3x+1}{3} \leq 0,$$

$$\frac{2x^2-2-2x^2-3x-1}{3} \leq 0,$$

$$\frac{-3x-3}{3} \leq 0,$$

$$-x-1 \leq 0,$$

$$x \geq -1.$$

Відповідь: $x \in [-1;\ +\infty)$ [30].

Приклад 2. Знайти неперервні функції $f(x)$, визначені при $x>0$ і які задовольняють рівняння

$$f(f(x))=xf(x) \tag{3.46}$$

Можна легко перевірити, що ніяка стала, яка відмінна від 0, не є розв'язком рівняння (3.46). Окрім того, з (3.46) випливає, що $f(x)>0$ при всіх допустимих значеннях x. Розглянемо функції $f(x)$, які не є константами. Нехай $y=f(x)$. Рівняння (3.46) переписуємо у вигляді $f(y)=xy$, звідси $f(f(y))=f(xy)$. Так як $f(f(y))=yf(y)=f(x)f(y)$, то

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Отримали функціональне рівняння Коші (1.4). Його неперервні розв'язки, відмінні від 0, мають вигляд $f(x)=x^a$.

Можна помітити, що $f(x)=x^a$ є розв'язком рівняння Коші, якщо x і y незалежно один від одного набувають довільних додатних значень. В нашому випадку x і y пов'язанні відношенням $y=f(x)$. Тому провівши перевірку, знайдемо те значення a, при якому $f(x)=x^a$ зможе задовольнити (3.46)[31].

Маємо $x^{a2} = x^{a+1}$, звідки $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Навпаки, функції $x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ і $x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ задовольняють (3.46). Таким чином $f(x)\equiv 0$, $f(x)= x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $f(x)= x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ функції є розв'язком задачі.

Приклад 3. Знайти плоскі криві, які володіють наступними властивостями: для довільних двох точок сума добутку абсциси однієї точки на ординату другої рівна ординаті точки, абсциса якої дорівнює добутку абсцис даних точок.

Обмежимося пошуком кривих, які є графіками неперервних функцій, визначених при додатних значеннях аргументу.

Дана задача зводиться до розв'язування функціонального рівняння

$$f(xy) = xf(y)+yf(x).$$

Нехай $g(x)= \frac{f(x)}{x}$.Тоді отримаємо одне із рівнянь Коші виду $g(xy) = g(x)+g(y)$. Так як $g(x)$ неперервна при $x>0$, то $g(x) = c \ln x$. Звідси $f(x) = cx \ln x$ з довільною константою c.

Приклад 4. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, визначені на проміжку $(0;\infty)$, для яких різниця $f(x_1y) - f(x_2y)$ при довільних допустимих значеннях x_1 і x_2 не залежить від y.

За умовою, вираз $f(xy) - f(y)$ $(x_1=x,\ x_2=1)$ не залежить від y. Тому

$$f(xy) - f(y) = f(x) - f(1).$$

Підставимо $g(x) = f(x) - f(1)$, отримаємо функціональне рівняння Коші

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Відомо, що в класі неперервних функцій $g(x) = c \ln$. Звідси $f(x) = c \ln x+b$, де $b=f(1)$. Перевірка показує, що умову задачі задовольняють функції $f(x) = = c\ln x + b$ при довільних b і c.

Розглянемо задачу прикладу 4, вважаючи x_1 і x_2 різними фіксованими числами. Так як $f(x_1y) - f(x_2y)$ не залежить від y то $f(x_1y) - f(x_2y) = c$. Нехай $x_2y = x$, тоді $f(ax) = f(x) + c$, де $a\frac{x_1}{x_2} \neq 1$, $a > 0$, c – стала. Замінивши x на e^x, отримаємо

$$f(e^{x+\ln a}) - c = f(e^x),\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Віднімаючи з обох частин $\frac{cx}{\ln a}$, отримаємо

$$f(e^{x+\ln a}) - \frac{c(x+\ln a)}{\ln a} = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a},$$

або

$$g(x+\ln a) = g(x), \tag{3.47}$$

де $g(x) = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a}$. Рівняння (3.47) задовольняє періодично з періодом $\ln a$ функції. Звідси $f(x) = g(\ln x) + \frac{c\ln x}{\ln a}$.

Якщо провести перевірку, можна переконатися, що функція виду $f(x) = g(\ln x) + \alpha \ln x$, де α – довільна константа, а $g(x)$ – неперервна періодична з періодом $\ln\frac{x_1}{x_2}$ функція, яка володіє необхідними властивостями[30].

Розв'язок багатьох функціональних рівнянь зводиться до рівнянь Коші.

Приклад 5. Як відомо, операція додавання дійсних чисел володіє властивістю асоціативності:

$$(x+y) + z = x + (x+y)$$

для будь-яких $x, y, z \in R$. Потрібно знайти всі неперервні функції $f(x)$, які «зберігають асоціативність», тобто

$$f(x+y) - f(z) = f(x) + f(y+z). \tag{3.48}$$

Запишемо (3.48) у вигляді

$$f(x+y) - f(x) = f(y+z) - f(z).$$

Легко бачити, що ліва частина не залежить від x, тобто

$$f(x+y) - f(x) = g(y).$$

При $x=0$ маємо $f(y) = g(y)+a$, $a=f(0)$. Отримуємо функціональне рівняння Коші

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Його неперервним розв'язком будуть функції $g(x)=cx$. Таким чином,

$$f(x)=cx+a,$$

де a і c - довільні константи.

ВИСНОВКИ

Головним видом математичної діяльності є розв'язання проблем, тобто завдань пошукового і дослідницького характеру, а також математичний опис моделей реальних ситуацій. У процесі вивчення та дослідження різноманітних явищ природи, розв'язування технічних задач тощо, доводиться розглядати не стільки змінні величини, взяті окремо, скільки зв'язок між ними, залежність однієї величини від іншої. Ці актуальні питання допомогають вирішувати створення та розв'язування функціональних рівнянь.

В процесі роботи над темою було розглянуто основні положення, що відносяться до теорії функціональних рівнянь, а також методи їх розв'язування.

Одним з найбільш досліджуваних в математиці є функціональне рівняння Коші:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

У результаті виконання роботи систематизовано відомості про функціональні рівняння, зокрема про рівняння Коші та проведено аналіз його застосування і методів розв'язування.

Робота містить загальні відомості про функціональні рівняння та методи їх розв'язування. Її можна використовувати як конспект лекцій, або при підготовці до іспиту для студентів вузів, які вивчають функціональні рівняння. Разом з тим, вона може використовуватися як задачник для розв'язування типових задач. В теоретичний матеріал включено всі основні поняття. Детально розглянуті алгоритми розв'язування рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Федак І.В. Функціональні рівняння : навч. пос. (Видання друге). – Івано-Франківськ : ПНУ, 2018. – 144 с.

2. Вишенський В.А. Відношення і функції. – Київ: Вища школа, 1972. – 112 с.

3. Габрусєв Г.В. Звичайні диференціальні рівняння : навч. пос. для студ. / Самборська О.М. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.

4. Мерзляк А.Г. Алгебра 9: підручник для класів з поглибленим вивченням математики. / Полянський В. Б., Якір М. С. – Харків: Гімназія, 2009. – 214 с.

5. Гончаров О.А. Чисельні методи розв'язання прикладних задач : навч. пос. / Васильєва Л.В., Юнда А.М. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 142 с.

6. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник / Михайленко В.М. – Київ : Техніка, 2004. – 792 с.

7. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навч. пос. / Махней О.В. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.

8. Функциональні рівняння. – Київ : Вища школа. Головное видавництво, 1983. – 96 с.

9. Тацій Р. Елементи математичного моделювання та прикладної математики : навчальний посібник / Стасюк М., Пазен О. – Львів : ЛДУ БЖД, 2021. – 182 с.

10. Бевз Г. П. Методика розв’язування алгебраїчних задач. Київ: Рад. школа, 1975. – 240 с.

11. Мохонько А.З. Аналітичні функції - розв'язки диференціальних рівнянь : навч. пос. / Чижиков І.Е. – Львів: НУЛП, 2021. – 524 с.

12. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навч. пос. / Махней О.В. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

13. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 207 с.

14. Aczel J. Functional Equations in Several Variables / Dhombres J. – Cambridge University Press, 2008. – 480 p.

15. Ясінський В.А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції : навч. пос. – Харків : вид. група «Основа», 2005. – 96 с.

16. Шкіль М.І. Диференціальні рівняння : навч. пос. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. – Київ: Техніка, 2003. – 368 с.

17. Долінко О.В. Задачі математичних олімпіад. Функціональні рівняння – Кіровоград, 2013. – 27 с.

18. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння : підручник / Перестюк М.О., Парасюк І.О. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.

19. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посіб. - Київ: АСК, 2005. – 344 с.

20. Мантурив О. В. Математика в поняттях, означеннях і термінах: навч. посіб. / Соркін Ю. І., Федін М. Г. – Київ: Радянська школа, 1986. – 456 с.

21. Бродський Я.С. Граничний перехід і функціональні рівняння: навч. посіб. / Сліпенко А.К., Газета «Математика», 2000. - №20. – 6-7 с.

22. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підруч. для студ. матем. спец. педаг. навч. закл. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

23. Городецький В.В. Про наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу. – матер. міжн. наук. конф. / Колісник Р.С., Мартинюк О.В. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2018. – 55 с.

24. Вороний О.М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: метод. посіб. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010 – 68 с.

25. Ріжняк Р.Я. Лабораторний практикум з методики навчання математики : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл./ Кушнір В.А. - Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2013. – 224 с.

26. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: навч. посіб. - Київ: Техніка, 2003. – 416 с.

27. Бродський Я.С. Функциональні рівняння : навч. посіб. / Сліпенко А.К. – Київ : Вища школа. Головне видавництво, 1983. – 96 с.

28. Kuczma M. On the functional equation φn(x) = g(x). Ann. Polon. Math. 11 (1961) 161–175.