

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістерського рівня

на тему

W - функція Ламберта та її застосування

Виконала: студентка 2 курсу, групи М-2
Спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)

Гончарук Олеся Олегівна

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент: д. т. н., проф. кафедри
автоматизації, електротехнічних та
комп'ютерно-інтегрованих
технологій НУВГП
Сафоник А.П.

Рівне – 2022 рік

ЗМІСТ

| | |
|---|-----------|
| ВСТУП..... | 3 |
| Розділ 1. W -функція Ламберта. Короткі математичні відомості..... | 6 |
| 1.1. Походження W -функції Ламберта. | 6 |
| 1.2. Означення та властивості W -функції Ламберта. | 8 |
| 1.3. Комплексні гілки W -функції Ламберта | 10 |
| 1.4. Тотожності, похідна та інтеграл. | 25 |
| 1.5. Розклад та апроксимація. | 25 |
| 1.6. Точні розв'язки трансцендентних рівнянь за допомогою W -функції Ламберта | 26 |
| Розділ 2. Застосування W-функції Ламберта..... | 29 |
| 2.1. Застосування W -функції Ламберта для конформних відображень | 29 |
| 2.2. Точне виведення закону зміщення Віна | 29 |
| 2.3. Розрахунок критичних розмірів ядерного реактора | 31 |
| 2.4. Ковзання при сталій потужності | 34 |
| 2.5. Розрахунок електричного кола з діодом | 35 |
| 2.6. Капілярний ефект | 38 |
| Розділ 3. Визначення дальності польоту тіла в середовищі, що чинить опір..... | 41 |
| 3.1. Постановка задачі та знаходження точного розв'язку. | 41 |
| 3.2. Визначення оптимального кута кидання. | 43 |
| Висновки..... | 48 |
| Список використаних джерел | 50 |
| Додаток А | 52 |

ВСТУП

Розв'язання багатьох фізичних задач виявляється неможливим без застосування так званих спеціальних функцій, які, як правило, представляють собою інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях, або ряди, що не збігаються до елементарних функцій. Може здатися, що для появи в якійсь задачі спеціальної функції вона повинна бути дуже складною, проте це далеко не так.

Однією з таких функцій є W -функція Ламберта, яка поповнила ряди спеціальних функцій порівняно недавно, хоча своїм корінням сягає XVIII ст. Важливу роль у її становленні зіграли двоє: Йоганн Генріх Ламберт (1728-1777), найбільш відомий своїми піонерськими роботами в галузі фотометрії, та Леонард Ейлер. Незважаючи на те, що W -функція Ламберта часто виникає в найрізноманітніших задачах математики, фізики та інших дисциплін, визнання вона отримала тільки в XX ст. Літеру W для її позначення першими вжили угорські математики Дьордь Пойа і Габор Сегьо в 1925 році. Своє ім'я вона вперше одержала на початку 80-х років XX століття. Ця функція була названа на честь І. Г. Ламберта, який ще в XVIII столітті передбачив визначення цієї функції, хоча і не дав її формулювання

W -функція Ламберта знайшла широке поле застосування від фізики та обчислювальної техніки до статистики та біології, наприклад, обчислення розподілів у теорії чисел, висоти хвиль в океанографії, перебір дерев у комбінаториці, рух води в солі, релятивістська теорія гравітації та статистичні розподіли. Є багато різних галузей науки, де ця функція успішно застосовується і де вона допомагає роз'яснити багато фізичних аспектів. W -функцію Ламберта широко використовується не лише у фізиці, а й у інших галузях. [3].

Основним призначенням математичних функцій є полегшення чисельних та алгебраїчних обчислень. У зв'язку з цим до будь-якої нової

функції пред'являються певні додаткові специфічні вимоги, які зумовлені особливостями її застосування для вирішення того чи іншого практичного завдання. Складну у використанні функцію не застосовують часто.

Метою цієї роботи є дослідження та систематизація означення, властивостей W -функції Ламберта та операцій над нею для більш зручного її практичного застосування.

Для досягнення поставленої мети визначені такі **завдання дослідження**:

- 1) з'ясувати походження та застосування W -функції Ламберта в історичному аспекті;
- 2) дослідити властивості W -функції Ламберта у комплексній області;
- 3) проаналізувати та виділити найбільш корисні для практичних застосуваннях властивості та математичні операції над W -функцією Ламберта;
- 4) встановити загальні принципи та особливості апроксимації W -функції Ламберта;
- 5) проаналізувати та систематизувати подання точних розв'язки рівнянь з допомогою W -функції Ламберта;
- 6) на відомих прикладах проаналізувати особливості та ефективність застосування W -функції Ламберта для розв'язання практичних задач;
- 7) використовуючи W -функцію Ламберта знайти точний розв'язок задачі про дальність польоту тіла в середовищі, що чинить опір;
- 8) на цій основі розв'язати задачу про оптимальний кут кидання тіла.

Об'єкт дослідження – W -функція Ламберта та її властивості.

Предмет дослідження – особливості та сфера застосування W -функції Ламберта для розв'язування практичних задач.

Методи дослідження. При проведенні досліджень були використані методи аналізу і синтезу, а також методи порівняння та узагальнення. Крім

того, використовувались методи дедукції, моделювання, абстрагування та системного аналізу.

Практична цінність кваліфікаційної роботи полягає у систематизації найбільш корисних з точки зору практичного застосування властивостей W -функція Ламберта, висвітленні особливостей такого застосування на конкретних прикладах.

Магістерська складається зі змісту, вступу, трьох взаємопов'язаних та взаємодоповнюючих розділів, які, в свою чергу поділяються на підрозділи, висновків, списку використаних джерел та додатку.

РОЗДІЛ 1. W -ФУНКЦІЯ ЛАМБЕРТА. КОРОТКІ МАТЕМАТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Походження W-функції Ламберта.

W-функція Ламберта поповнила ряди спеціальних функцій порівняно недавно, хоча своїм корінням сягає XVIII ст. Важливу роль її становленні зіграли двоє: Йоганн Генріх Ламберт (1728-1777), найбільш відомий своїми піонерськими роботами в області фотометрії, та Леонард Ейлер. Незважаючи на те, що W -функція Ламберта часто виникає в найрізноманітніших завданнях математики, фізики та інших дисциплін, визнання вона отримала тільки в XX ст. Літеру W для її позначення першими вжили угорські математики Дьордь Пойа і Габор Сегьо в 1925 році, а ім'я Ламберта їй було присвоєно в 1980-х роках.

Йоганн Генріх Ламберт народився в Мюлузі 26 серпня 1728 року і помер у Берліні 25 вересня 1777 року. Його наукові інтереси були надзвичайно широкі. Будучи самоосвіченим сином кравця, він написав фундаментально важливі роботи з теорії чисел, геометрії, статистики, астрономії, метеорології, гігromетрії, пірометрії, оптики, космології та філософії. Він працював над паралельним постулатом, а також ввів сучасні позначення для гіперболічних функцій. Кажуть, що коли Фрідріх Великий запитав його, в якій науці він найбільш вправний, Ламберт нескромно відповів: «У всіх». Ламберт першим довів ірраціональність числа π .

Л. Ейлер у своїй статті «*Про ряд Ламберта та деякі його важливі властивості*» називає Ламберта «*acutissimi ingenii Lambertus*», що можна перекласти як *геніальний інженер Ламберт*. Хоча Ейлер був швейцарцем, він, очевидно, не читав регулярно журнал «Acta Helvetica» (де публікував свої праці Ламберт), оскільки формули Ламберта стали великою несподіванкою, коли він дізнався про них у 1764 році, тобто в рік, коли

Ламберт відправився з Цюріха до Берліна.

У роботі «J.H. Lambert. Observations Analytiques, in *Nouveaux memoires de l'Academie royale des sciences et belles-lettres*» Ламберт вперше заявляє про узагальнення свого ряду

$$\begin{aligned} x^n = & 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 \\ & + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 \\ & + \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

яке дає степені кореня замість самого кореня. Ламберт заявив, що «*Acta Helvetica*» вирізала доведення його простішої формули, і він загубив свої записи. Але під час повторного виведення формули Ейлера він знайшов простіше доведення більш загального результату. Пізніше він сказав, що Ейлер розробив узагальнення від тричленів до чотиричленів; але він (Ламберт) уже знав, як працювати з поліномами та вивести попередницю теореми інверсії Лагранжа. Ламберт написав Ейлеру сердечного листа 18 жовтня 1771 року, сподіваючись, що Ейлер відновить зір після операції. У цьому листі він пояснює, як його тричленний метод поширюється на повернення рядів. В покажчику до листування Ейлера є примітка, що А. Дж. Лекселл відповів на цей лист.

Нарешті, на початку двох томів математичних робіт Ламберта (опублікованих у Цюріху в 1946 і 1948 роках) знаходимо, що Ламберт мріяв побудувати машину для виконання символічних обчислень (у той час як машина Паскаля просто виконувала арифметику). Таким чином, його бажання випередили реальність символічних обчислювальних систем приблизно на два століття. [4].

Необхідність розгляду цієї функції виникає при спробі розв'язати рівняння

$$we^{w^x} = x \tag{1.1}$$

щодо w в загальному вигляді, а саме в вигляді деякої функції $W(x)$. Щоб отримати її, скористаємося відомим розкладанням експоненти в ступеневий ряд:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + \dots$$

З допомогою цього розкладу перепишемо ліву частину вихідного рівняння (1.1) в вигляді ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n+1}}{n!} = x.$$

Застосовуючи теорему Лагранжа про обернення рядів, можна записати обернений ряд для знаходження w :

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \dots$$

Це і є розклад в ряд W -функції Ламберта, а якщо зовсім точно – розклад основної її гілки. Справа в тому, що рівняння (1.1) завжди має нескінченне число коренів, більшість із яких комплексні. Наведений вище ряд дозволяє знайти дійсний корінь. [11].

1.2. Означення та властивості W -функції Ламберта.

W -функція Ламберта є функцією, оберненою до $f(w) = we^w$. Для будь-якого комплексного x вона визначається функціональним рівнянням:

$$W(x)e^{W(x)} = x \tag{1.2}$$

W -функція є багатозначною, тобто одному значенню x відповідає безліч значень $W(x)$. Ці значення називають гілками та позначають $W_k(x)$, де $k = 0, \pm 1, \pm 2$ і т.д. Гілки, відмінні від $W_0(x)$ і $W_{-1}(x)$, завжди комплексні. Ми обмежимося розглядом лише дійсної області W -функції. Графік її виглядає так:

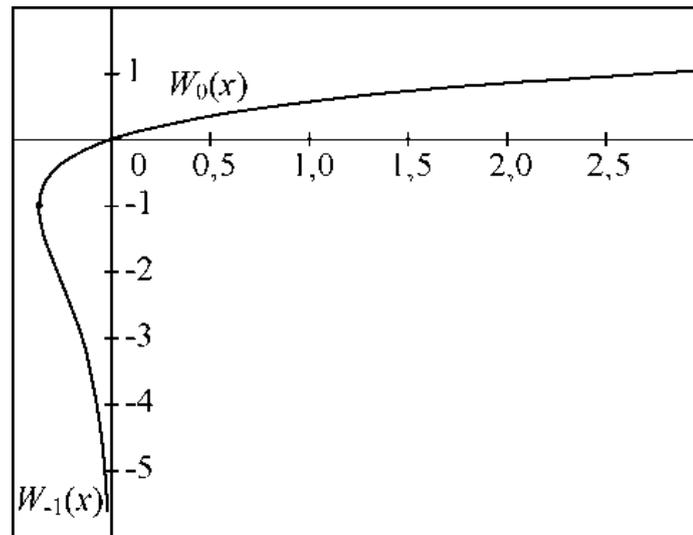


Рис. 1.1. Графік дійсної області W -функції

Область визначення функції є інтервал $[-1/e ; +\infty)$, на якому функція набуває значень від $-\infty$ до $+\infty$. В інтервалі $(-1/e ; 0)$ функція двозначна. Точка з координатами $(-1/e ; -1)$ ділить графік на верхню гілку $W_0(x)$ – яку часто називають *основною* - та нижню гілку $W_{-1}(x)$. [1].

Наведемо для наочності дійсні значення W -функції Ламберта для деяких цілих аргументів (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Дійсні значення W -функції Ламберта
для деяких цілих аргументів

| x | $W(x)$ | x | $W(x)$ |
|-----|---------|-----|---------|
| 0 | 0 | 20 | 2,20500 |
| 1 | 0,56714 | 30 | 2,48923 |
| 2 | 0,85261 | 40 | 2,69681 |
| 3 | 1,04991 | 50 | 2,86089 |
| 4 | 1,20217 | 60 | 2,99680 |

| | | | |
|----|---------|-------|---------|
| 5 | 1,32673 | 70 | 3,11293 |
| 6 | 1,43240 | 80 | 3,21439 |
| 7 | 1,52435 | 90 | 3,30452 |
| 8 | 1,60581 | 100 | 3,38563 |
| 9 | 1,67902 | 1000 | 5,24960 |
| 10 | 1,74553 | 10000 | 7,23185 |

З означення (1.2) видно, що W -функція приймає цілі значення при $x = ne^n$, де n – ціле число:

$$W(ne^n) = n, \quad n \geq 0.$$

1.3. Комплексні гілки W -функції Ламберта

Розглянемо властивості W -функції Ламберта у комплексній області. Зрозуміло, що вона є багатозначною: площині комплексного аргументу z ставиться у відповідність множина областей комплексної функції $w = W_k(z)$, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; $z = x + iy$; $w = u + iv$.

Область аргументів для основної гілки $W_0(z)$ представляє собою всю комплексну площину з розрізом уздовж дійсної осі від $-\infty$ до $-1/e$ (рис. 1.2а), а області аргументів для інших гілок ($k \neq 0$) – з розрізом уздовж дійсної осі від $-\infty$ до 0 (рис. 1.2б).

Межі гілок W -функції на комплексній площині знаходяться таким чином. Після позначення $w = W_k(z)$ тотожність $W(z)e^{W(z)} = z$ набуде вигляду $z = we^w$. Якщо $z = x + iy$; $w = u + iv$, тоді дійсні та уявні частини z :

$$\begin{cases} x = \exp u (u \cos v - v \sin v) \\ y = \exp u (v \cos v + u \sin v) \end{cases} \quad (1.3)$$

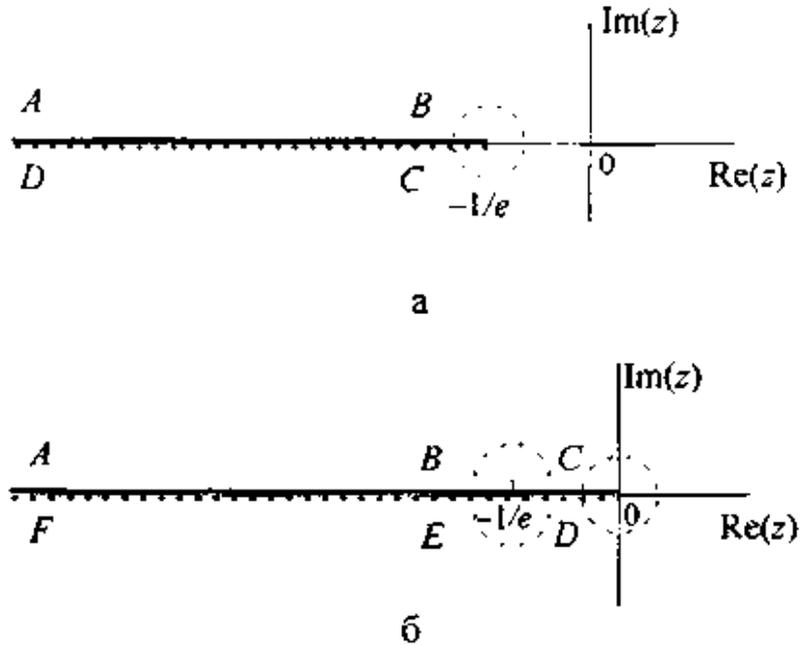


Рис. 1.2. Графік області аргументів з розрізом уздовж дійсної осі: а) від $-\infty$ до $-1/e$ для основної гілки $W_0(z)$; б) від $-\infty$ до 0 для гілок ($k \neq 0$) W -функції

Вираз, що визначає межу області та відповідає головній гілці до $k=0$, виходить з умови $y=0$

$$u = -v \operatorname{ctg} v. \quad (1.4)$$

Таким чином, крива, яка відокремлює головну гілку $W_0(z)$ від гілок $W_1(z)$ та $W_{-1}(z)$, є

$$-v \operatorname{ctg} v + iv, \quad -\pi < v < \pi, \quad (1.5)$$

включаючи $w=-1$ (що відповідає $v=0$).

А умову для меж областей із довільним номером гілки W -функції можна записати у вигляді

$$-v \operatorname{ctg} v + iv, \quad 2\pi k < \pm v < (2k+1)\pi, \quad k=1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Номер гілки k можна визначити за допомогою функції найбільшого цілого, що не перевершує аргумент

$$k(z) = \left\lfloor \frac{\pi - \operatorname{Im} z}{2\pi} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{при } -3\pi < y \leq -\pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < y \leq \pi, \\ -1 & \text{при } \pi < y \leq 3\pi, \\ -n & \text{при } (2n-1)\pi < y \leq (2n+1)\pi. \end{cases} \quad (1.7)$$

Розглянемо детальніше поведінку головної гілки $W_0(z)$, а також сусідніх гілок $W_1(z)$ та $W_{-1}(z)$, оскільки W -функція має точку розгалуження другого порядку $z = -e^{-1}$, відповідну $w = -1$, у якій з'єднуються дві інші гілки $W_1(z)$ та $W_{-1}(z)$.

$W_0(z)$ у точці $z = 0$ – аналітична функція зі значенням $W_0(0) = 0$. Головна гілка має розріз уздовж дійсної осі від $-\infty$ до $-1/e$ (рис. 1.2а). Цей розріз замикається зверху відповідно до правила обходу контуру (проти годинникової стрілки) навколо точки розгалуження. Результат цього подано на карті області головної гілки $W_0(z)$ (рис. 1.3).

Через наявність точки розгалуження кожна з гілок W -функції, $W_{-1}(z)$ і $W_1(z)$, має розріз уздовж дійсної осі $-\infty < z \leq -1/e$ і $-\infty < z \leq 0$ відповідно. Ці розрізи також замикаються згори. Це призводить до того, що $W_{-1}(z)$ набуває дійсних значень на піввідрізку $z \in [-1/e, 0]$.

Таким чином, $W_0(z)$ і $W_{-1}(z)$ – єдині гілки, які мають дійсні значення. Всі інші гілки мають розріз уздовж дійсної осі ($-\infty < z \leq 0$) і набувають тільки комплексних значень і подібні до логарифмічних гілок.

Карті областей $W_{-1}(z)$ і $W_1(z)$ представлені на рис. 1.4 та 1.5 відповідно.

На завершення питання про комплексні гілки W -функції необхідно відмітити інше виведення формули про межі областей кожної з гілок W -

функції. Для цього покладемо $z = r \exp(i\varphi)$, де $-\pi < \varphi < \pi$ і $w = u + iv$ у формулу $z = we^w$ і, розділяючи на дійсну та на уявну частини, отримаємо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} r \cos(\varphi) = \exp u (u \cos v - v \sin v) \\ r \sin(\varphi) = \exp u (v \cos v + u \sin v). \end{cases} \quad (1.8)$$

Для $\varphi \neq 0, \pi$ отримаємо

$$\operatorname{ctg}(\varphi) = \frac{\operatorname{ctg}(\arg W_k) \operatorname{ctg}(v) - 1}{\operatorname{ctg}(\arg W_k) + \operatorname{ctg}(v)} = \operatorname{ctg}(\arg W_k + \operatorname{Im} W_k). \quad (1.9)$$

Таким чином, φ і $\arg W_k + \operatorname{Im} W_k$ відрізняються на доданок πn , де n – ціле число. Більш того, цей доданок залишається справедливим для всіх r і φ , крім випадку, коли W -функція набуває негативних дійсних значень, оскільки в цьому випадку $\arg W_k$ є розривною функцією.

Виключаючи цей випадок, фіксуємо φ і спрямовуючи $r \rightarrow \infty$, отримуємо

$$(1.10)$$

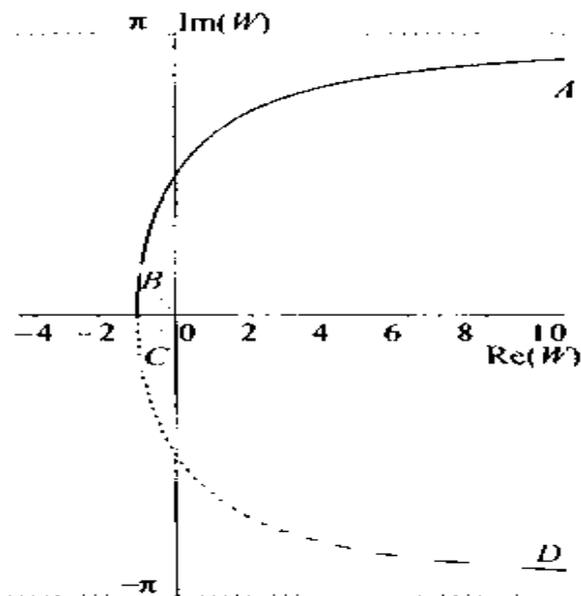


Рис. 1.3. Детальна карта обходу контуру головної гілки $W_0(z)$

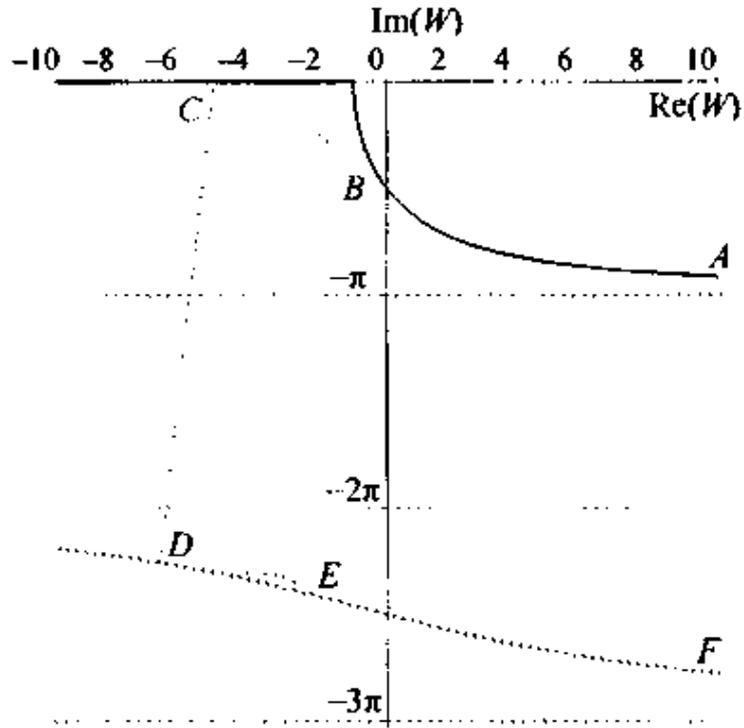


Рис. 1.4. Детальна карта обходу контуру $W_{-1}(z)$ гілки

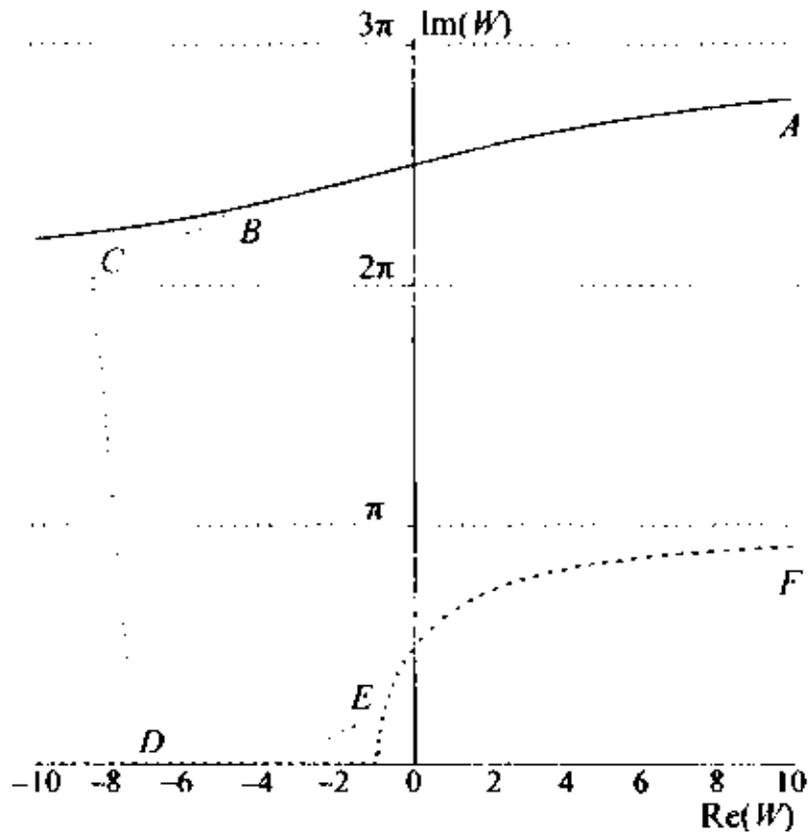


Рис. 1.5. Детальна карта обходу контуру $W_1(z)$ гілки

Якщо $|z| \rightarrow \infty$, то $\arg W_k$. Тому для $\varphi \neq 0, \pi$ всіх r

$$\arg W_k + \operatorname{Im} W_k = \varphi + 2\pi k. \quad (1.11)$$

Розглянемо особливий випадок, коли $\varphi=0$. Тоді необхідно покласти $k=0$. У разі, коли $\varphi = \pi$ необхідно покласти або $k=0$, або $k=-1$. Якщо $k=-1$ і $\varphi = \pi$, що відповідає $W_{-1} \leq -1$, то при $r \leq 1/e$ $\arg W_{-1}$ не визначений (мал. 1.2 і мал. 1.4). Отже,

$$\arg W_{-1}(z) + \operatorname{Im} W_{-1}(z) = \pi \quad \text{для} \quad -e^{-1} \leq z < 0. \quad (1.12)$$

При $k=0$ $W_0 \geq -1$, що відповідає $\varphi = \pi$ і $r \leq e^{-1}$, але у цьому випадку вираз (1.11) залишається справедливим.

Загальна карта областей W -функції показано на рис. 1.6.

При дослідженні W -функції також необхідно навести залежність $W_k(z)$ від номера гілки та дійсного аргументу (рис. 1.7). З графіка видно, що деякі гілки графіка функції $\operatorname{Re}(W_k(z))$ збігаються, а з урахуванням другого графіка залежності $\operatorname{Im}(W_k(z))$ можна ще раз підтвердити, що дійсною частиною W -функції є дві гілки, '−1' і '0', інші гілки функції є комплексними.

Для детальнішого дослідження W -функції необхідно побудувати кілька поверхонь для певних гілок. Далі на графіках, поданих на рис. 1.8-1.12 наводяться поверхні функції Ламберта для гілок з номерами 0, 1, −1, 2, −2 відповідно. На рис. 1.13 наведено поверхню модуля нульової гілки W -функції.

З графіків поверхонь для уявної та дійсної частин W -функції 0,1,−1,2,−2 гілок видно ділянки, де функція поводить себе монотонно і ділянки, де функція має особливість. Особливість функції Ламберта, де вона зазнає стрибка, показана на уявній частині всіх трьох гілок.

Графіки поверхонь наведені на рис. 1.8а, 1.9а, 1.10а, 1.11а, 1.12а показують, що стрибок функції є на півінтервалі вздовж від'ємної дійсної осі

(про що було сказано раніше). Особливість такого типу можна побачити і на графіках (рис. 1.9б, 1.10б, 1.11б, 1.12б) дійсної частини функції Ламберта. На графіку головної гілки дійсної частини стрибок функції відсутній (рис. 1.8б), проте є особливість на півінтервалі вздовж дійсної осі $(-\infty, -1/e]$, а не в нулі, як у інших гілок W -функції. На графіку наведеному на рис. 1.3, модуль нульової гілки W -функції має дві особливості: перша – особливість у нулі, а друга – утворення складки на півінтервалі вздовж дійсної осі $(-\infty, -1/e]$. Необхідно відмітити, що поверхня, яка наведена на рис. 1.3 є симетричною щодо дійсної осі. Це ж справедливо і для дійсної частини нульової гілки W -функції. На рис. 1.14, представлені поверхні модуля функції $-1, +1$ гілок W -функції, що мають особливість вздовж від'ємної дійсної осі (за поведінкою ці графіки нагадують поведінку уявної частини W -функції $1, -1, 2, -2$ гілок). [9].

На завершення дослідження комплексних властивостей W -функції у цьому розділі наведемо її поверхню Рімана (рис. 1.15).

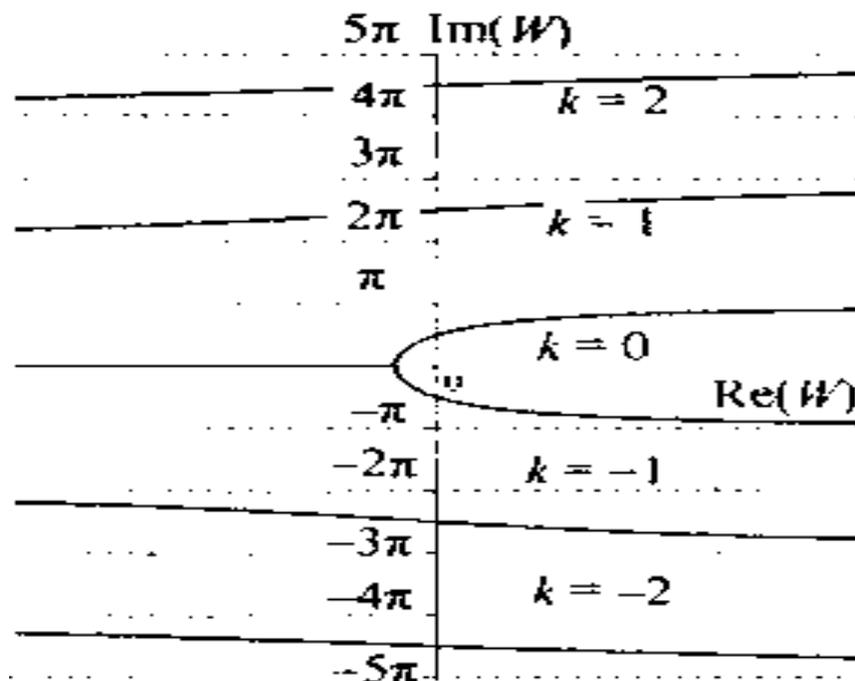


Рис. 1.6. Графік області функції $w=W_k(z)$

на комплексній площині для різних гілок

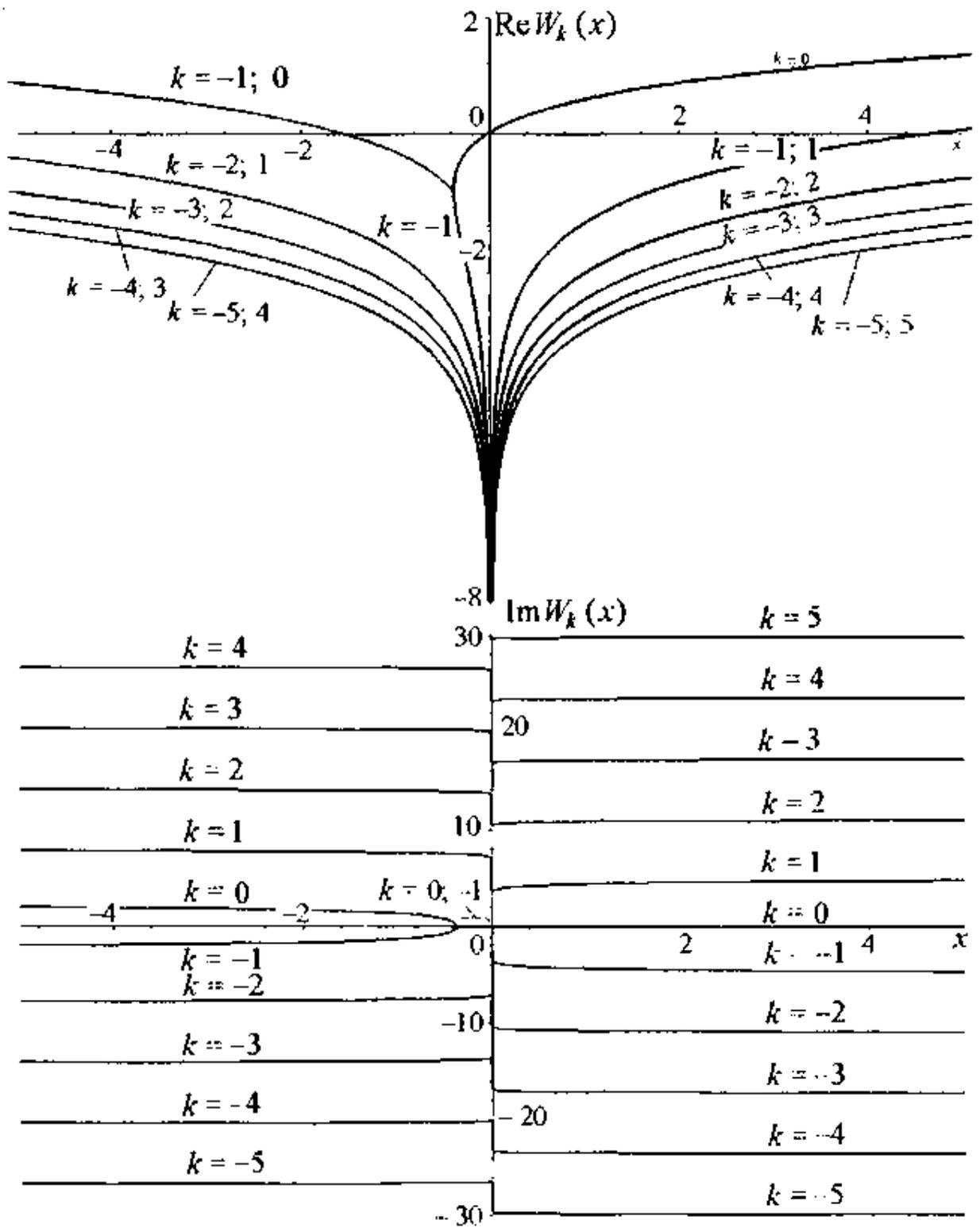
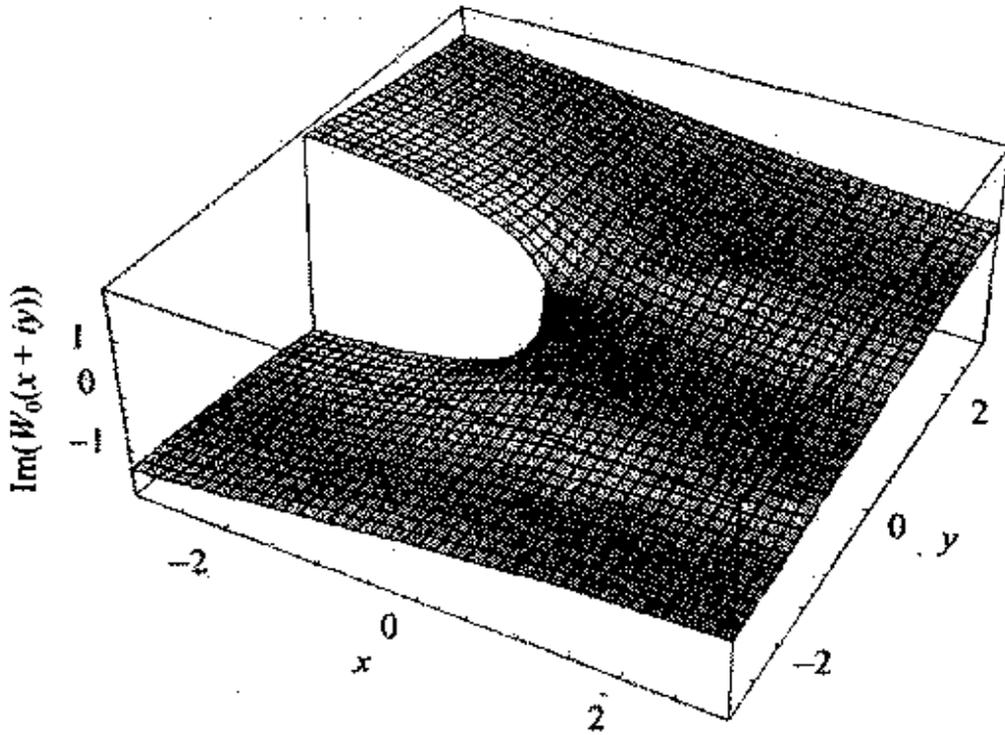
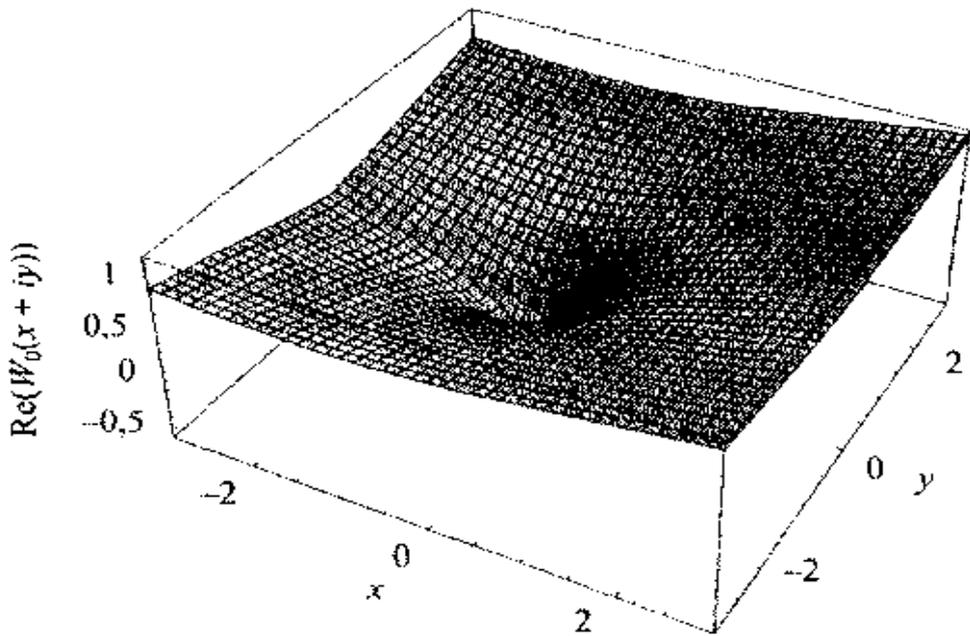


Рис. 1.7. Залежності дійсної та уявної частин різних W -функцій від дійсного аргументу

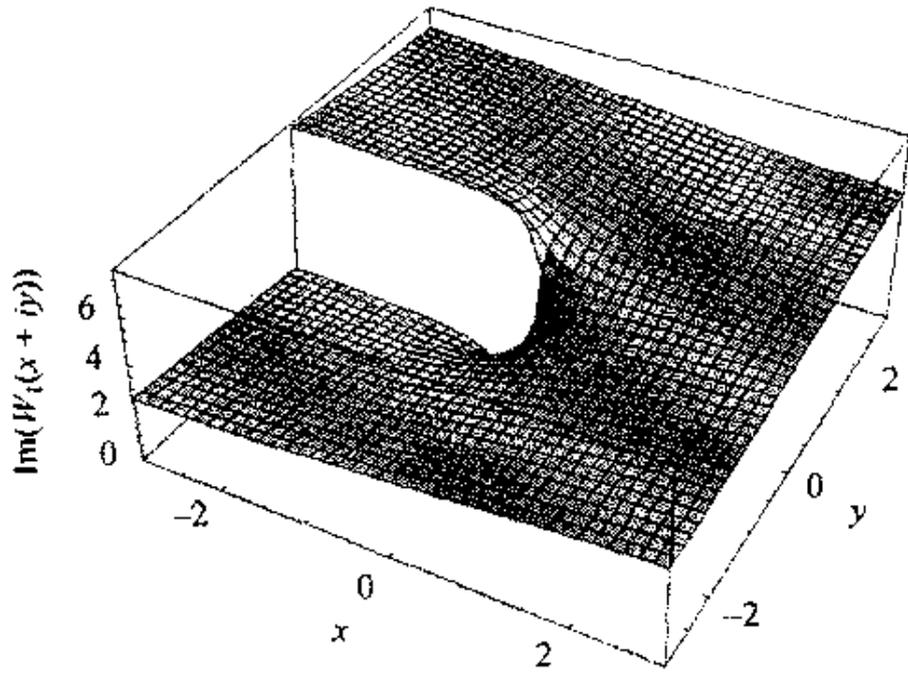


а

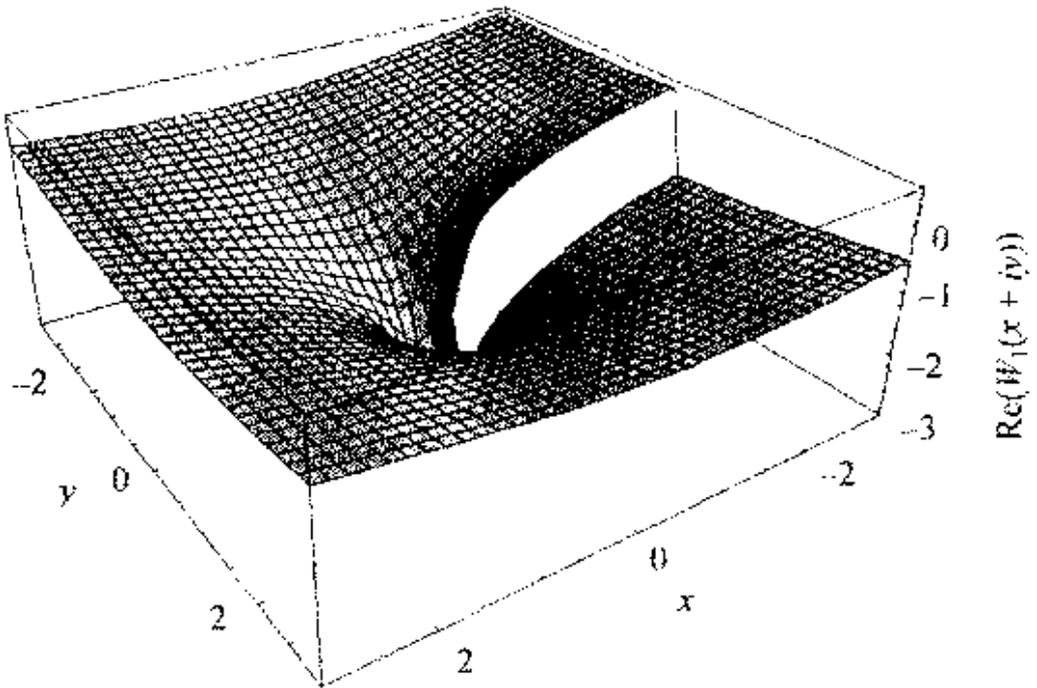


б

Рис. 1.8. Графіки поверхонь уявної (а) та дійсної (б) частин головної гілки W-функції $W_0(z)$

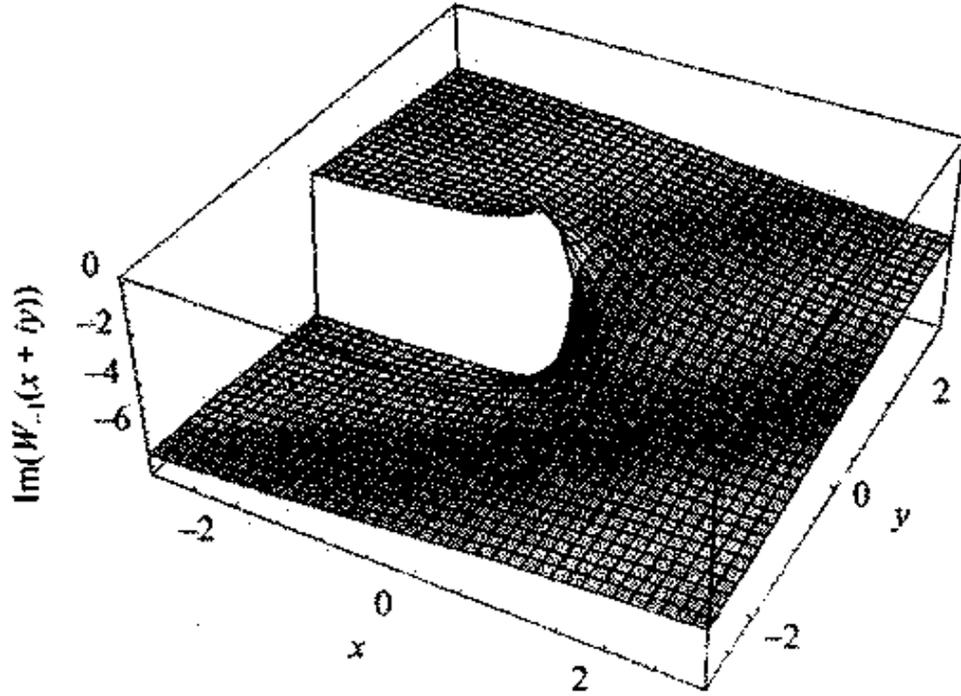


а

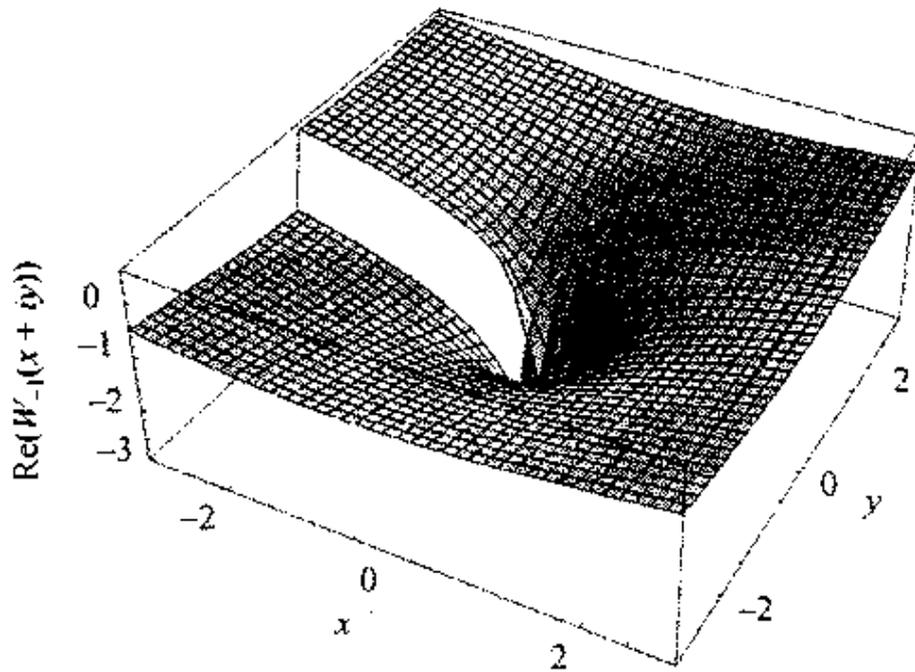


б

Рис. 1.9. Графіки поверхонь уявної (а) та речової (б) частин $W_1(z)$ гілки W-функції

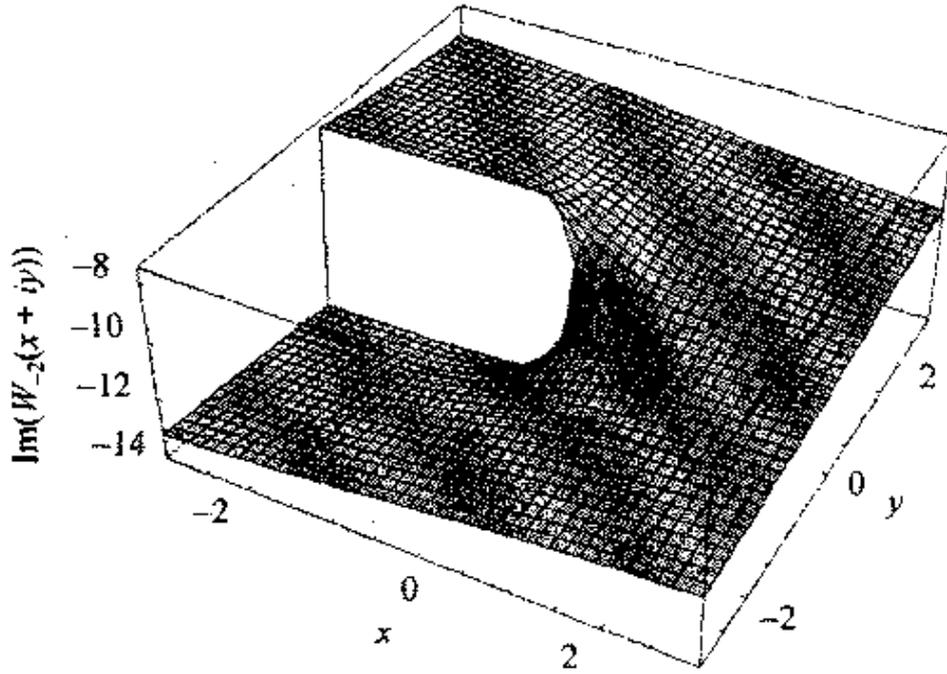


а

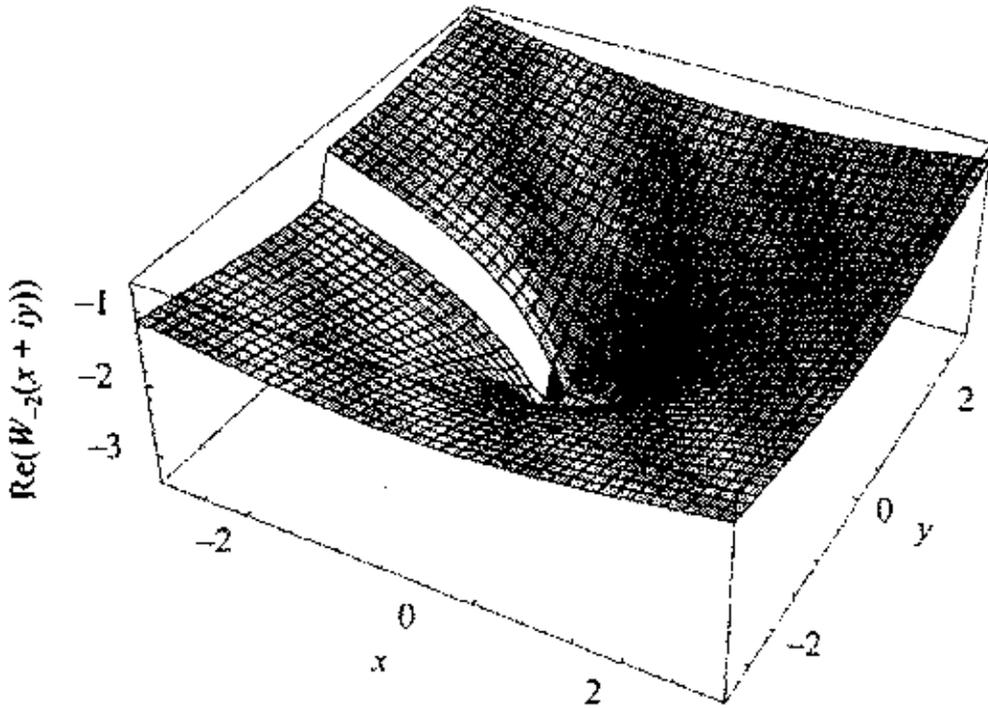


б

Рис. 1.10. Графіки поверхонь уявної (а) та речової (б) частин $W_{-1}(z)$ гілки W -функції

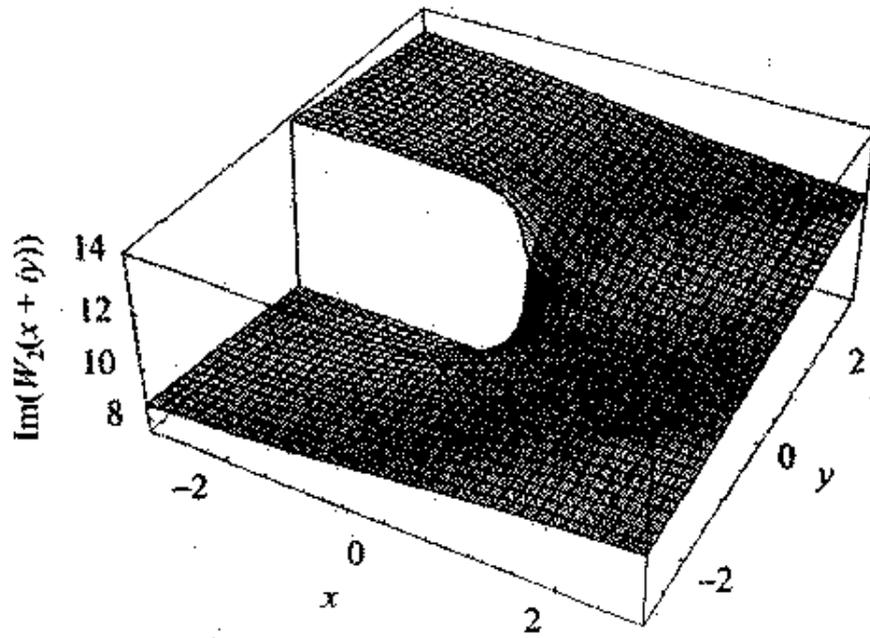


в

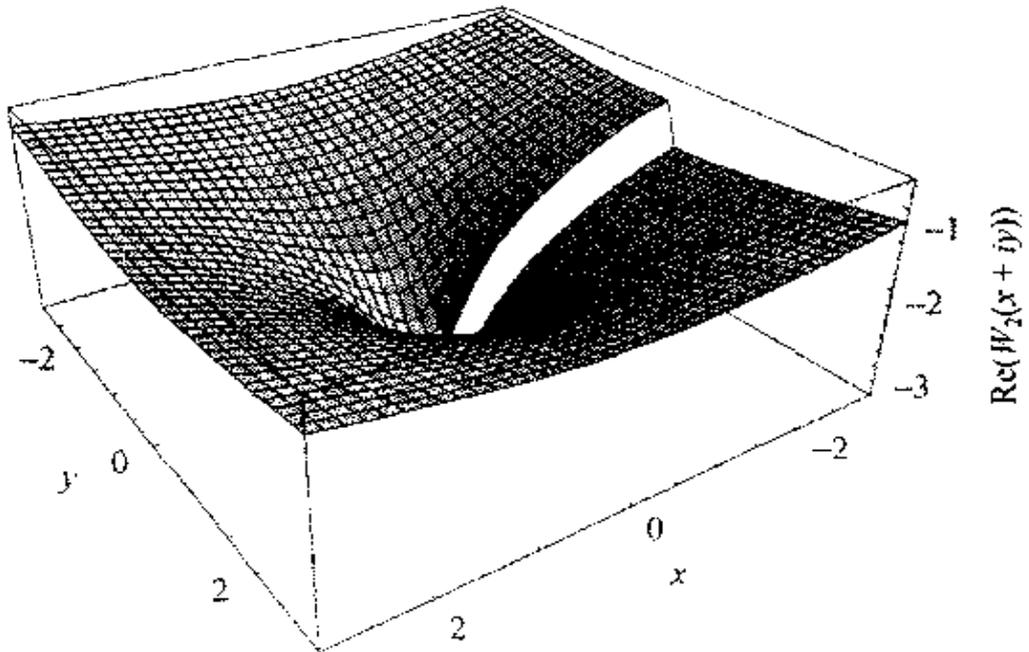


б

Рис. 1.11. Графіки поверхонь уявної (а) та реальної (б) частин $W_{-2}(z)$ гілки W -функції



а



б

Рис. 1.12. Графіки поверхонь уявної (а) та речової (б) частин $W_2(z)$ гілки W-функції

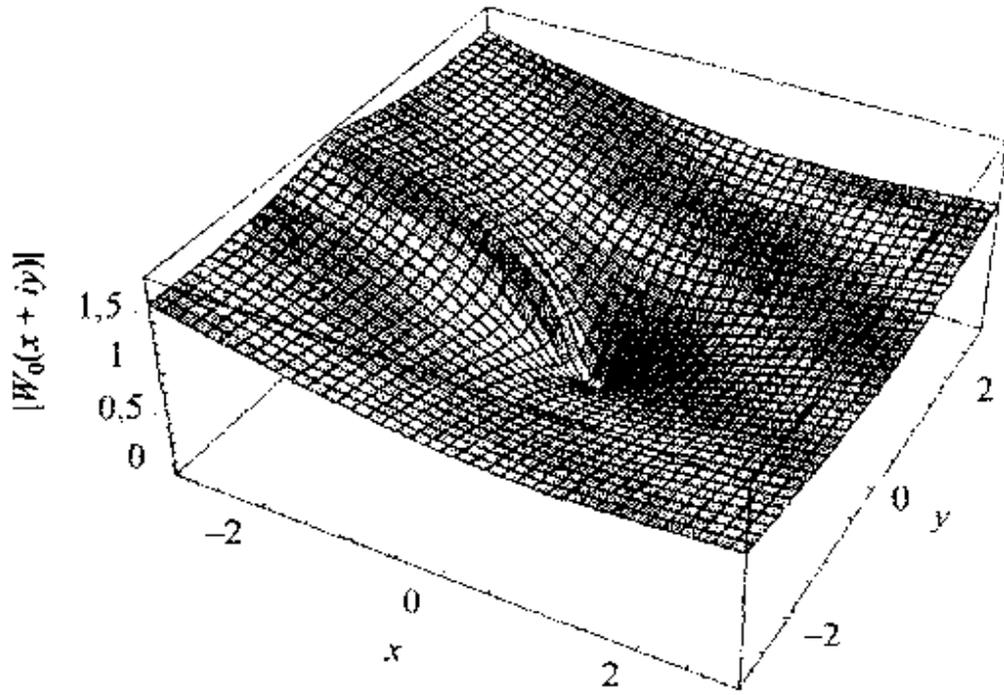
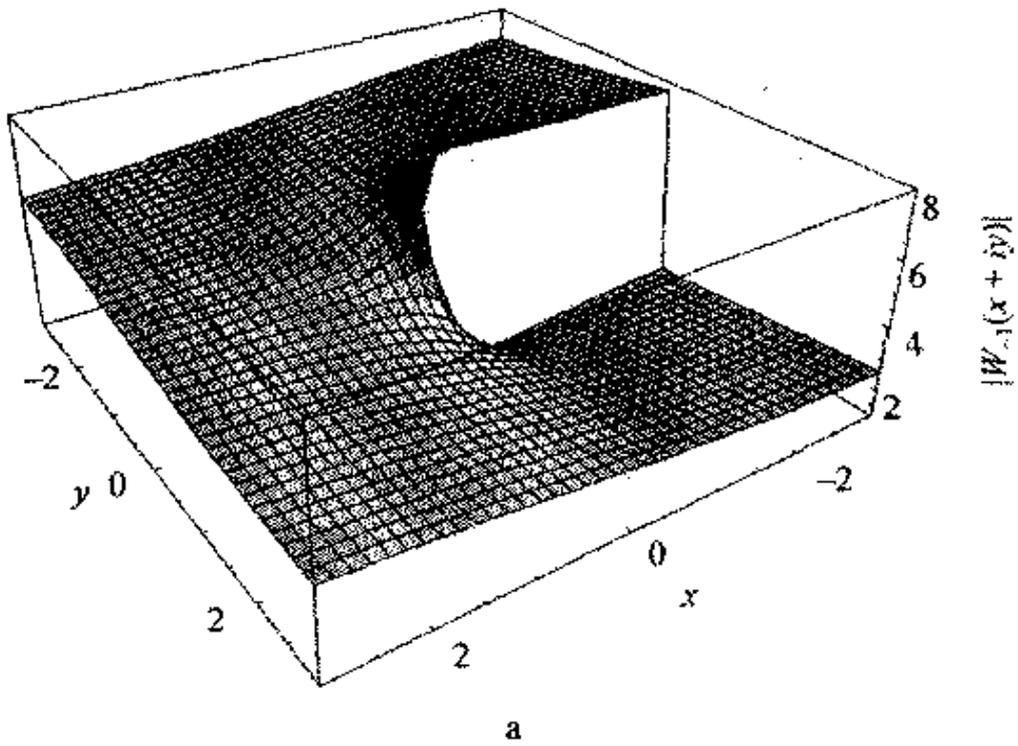


Рис. 1.13. Графік поверхні модуля $W_0(z)$ гілки W-функції



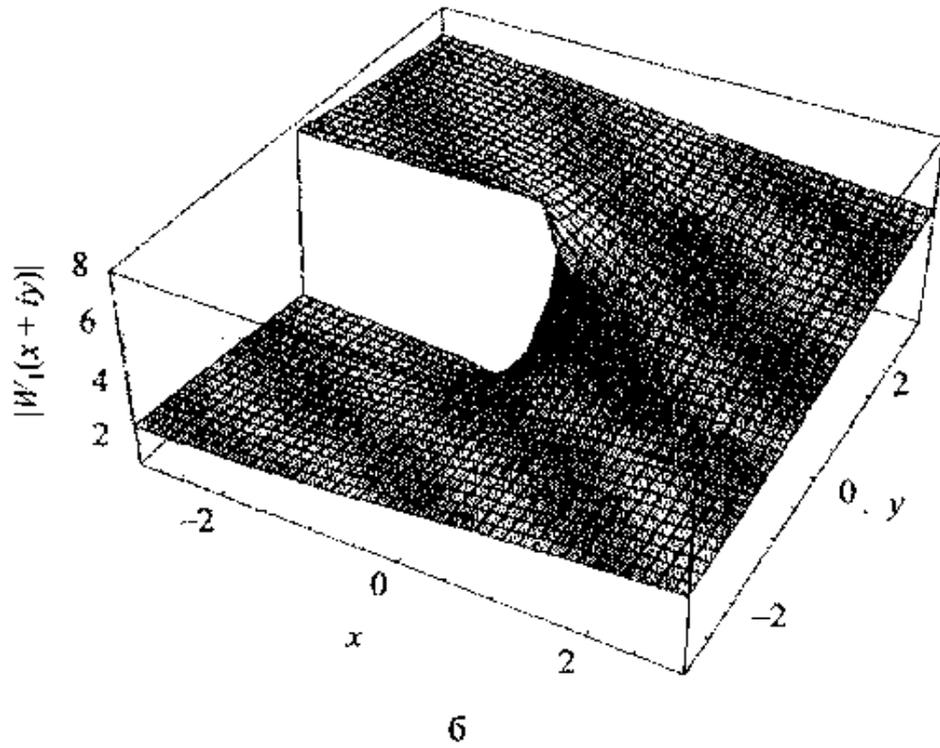


Рис. 1.14. Графіки поверхонь модулів $W_{-1}(z)$ (а) та $W_1(z)$ (б) гілок W-функції

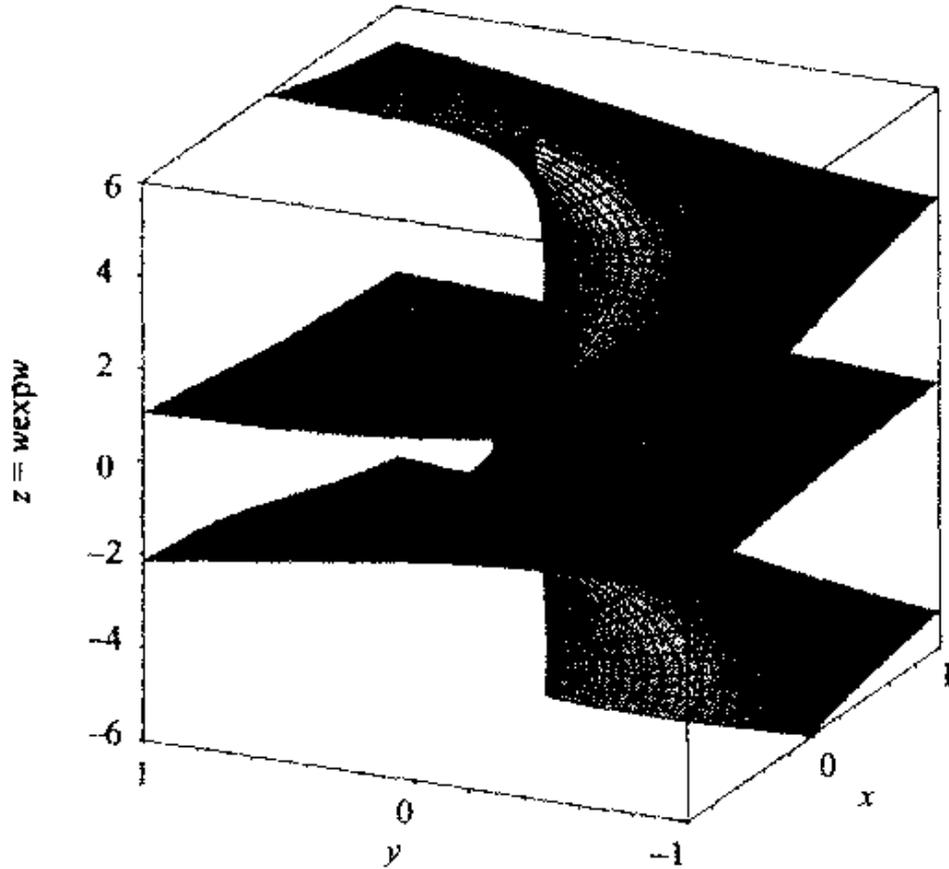


Рис. 1.15. Поверхня Рімана W-функції

1.4. Тотожності, похідна та інтеграл.

З означення можна, отримати прості співвідношення, яким задовольняє W -функція:

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}, \quad e^{-W(x)} = \frac{W(x)}{x}, \quad e^{nW(x)} = \left(\frac{x}{W(x)}\right)^n.$$

При $x > 0$ виконується тотожність

$$\ln W(x) = \ln x - W(x).$$

Неважко також переконатися в справедливості формул:

$$W(x \ln x) = \ln x = \ln W(x) + W(x),$$

$$W(x) = \ln \frac{x}{W(x)}.$$

Існує формула для знаходження суми W -функцій, яка є справедливою при $x, y > 0$:

$$W(x) + W(y) = W\left[xy\left(\frac{1}{W(x)} + \frac{1}{W(y)}\right)\right].$$

Щоб знайти похідну W -функції, можна скористатись правилом диференціювання обернених функцій, яке дає:

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))},$$

де $x \neq -1/e$, $x \neq 0$. У точці $x = 0$ похідна дорівнює $W'(0) = 1$. [8].

Невизначений інтеграл від W -функції Ламберта дорівнює:

$$\int W(x) dx = x \left[W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right] + C.$$

1.5. Розклад та апроксимація.

Як було показано, основна гілка W -функції розкладається в ряд

Тейлора в околі $x = 0$ наступним чином:

$$W_0(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6 + \dots$$

Існують розкладання для комбінацій W -функції з іншими функціями:

$$\begin{aligned} \ln W_0(x) &= \ln x - W_0(x) = \ln x - x + x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 - \frac{125}{24}x^5 + \dots, \\ \frac{1}{W_0(x)} &= \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{32}{15}x^4 - \frac{625}{144}x^5 + \frac{324}{35}x^6 - \dots, \\ e^{W_0(x)} &= \frac{x}{W_0(x)} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{32}{15}x^5 - \frac{625}{144}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Для практичних розрахунків часто виявляється зручною апроксимація:

$$W(x) \approx \begin{cases} -1 + \frac{\sqrt{2+2ex}}{1 + \frac{4,13501\sqrt{2+2ex}}{12,7036 + \sqrt{2+2ex}}} & \text{при } -\frac{1}{e} \leq x \leq 0, \\ 0,665(1 + 0,0195 \ln(x+1)) \ln(x+1) + 0,04 & \text{при } 0 \leq x \leq 500, \\ \ln(x-4) - \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right) \ln \ln x & \text{при } x \geq 500. \end{cases}$$

1.6. Точні розв'язки трансцендентних рівнянь за допомогою W -функції Ламберта

W -функція Ламберта дозволяє знайти точне рішення не тільки рівняння (1.1), але і широкого класу інших трансцендентних рівнянь. Деякі з цих рівнянь виникають під час розгляду різноманітних фізичних завдань. У цьому параграфі (табл. 1.2) наведено без виведення розв'язки деяких типів трансцендентних рівнянь, виражені за допомогою W -функції Ламберт. [14].

Таблиця 1.2

Розв'язки трансцендентних рівнянь,
виражені за допомогою W -функції Ламберт

| <i>Рівняння</i> | <i>Розв'язок</i> |
|--|--|
| $xe^x = a$ | $x = W(a)$ |
| $xb^x = a$ | $x = \frac{W(a \ln b)}{\ln b}$ |
| $x + \ln x = a$ | $x = W(e^a)$ |
| $x + \ln bx = a$ | $x = W\left(\frac{e^a}{b}\right)$ |
| $e^x = x^{-b}$ | $x = bW\left(\frac{1}{b}\right)$ |
| $e^{ax} = x^{-b}, a \neq 0$ | $x = \frac{b}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$ |
| $e^x = x^{-b}, a \neq 1$ | $x = \frac{b}{\ln a}W\left(\frac{\ln a}{b}\right)$ |
| $x^x = a$ | $x = \frac{\ln a}{W(\ln a)}$ |
| $x \ln x = a$ | $x = \frac{a}{W(a)}$ |
| $x \log_b x = a$ | $x = \frac{a \ln b}{W(a \ln b)}$ |
| $\ln x = a x^{-b}$ | $x = e^{\frac{W(ab)}{b}}$ |
| $ax = \ln bx,$ $a \neq 0, b \neq 0$ | $x = -\frac{1}{a}W\left(-\frac{a}{b}\right)$ |

Продовження таблиці 1.2

| | |
|--|---|
| $x^n e^x = a$ | $x = nW\left(\frac{a^{1/n}}{n}\right)$ |
| $x^n b^x = a$ | $x = \frac{n}{\ln b}W\left(\frac{a^{1/n}}{n} \ln b\right)$ |
| $x + e^x = a$ | $x = a - W(e^a)$ |
| $a^x + bx = 0,$ $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$ | $x = -\frac{1}{\ln a}W\left(\frac{\ln a}{b}\right)$ |
| $a^x + bx = c,$ $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$ | $x = -\frac{1}{\ln a}W\left(\frac{\ln a}{b} \cdot a^{\frac{c}{b}}\right) + \frac{c}{b}$ |

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ W-ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА

2.1. Застосування W-функції Ламберта для конформних відображень

Як одне із застосувань комплексних властивостей W-функції Ламберта наведемо деякі приклади конформних відображень. Припустимо, що функція відображення має вигляд $w=W_0(z)$. Функція $w=W_0(z)$ на комплексній площині є двозначною і дещо нагадує функцію $w=\sqrt{z}$. Ця функція має дві особливі точки (точки розгалуження): $-1/e$ і $+\infty$. Якщо провести розріз (як це зазвичай і робиться) уздовж від'ємної дійсної осі на півінтервалі $(-\infty, -1/e]$, то в отриманій однозв'язній області кожна гілка має однозначну аналітичну функцію. Сам розріз виражається як

$$-\pi < \arg(z) < \pi, \quad -\pi/2 < \arg(w_1) < \pi/2.$$

Графіки конформних перетворень у декартовій системі координат наведено в *Додатку А* на рис. 1–23. На деяких графіках наведених на рис. 1–4, 18, 19 частина кривих має подвоєну товщину, що показує, яким чином відбувається конформне відображення. [5].

2.2. Точне виведення закону зміщення Віна

На прикладі закону зміщення Віна продемонструємо ефективність W-функції Ламберта у розв'язанні рівнянь, які виникають при розгляді фізичних задач.

Закон зміщення був отриманий у 1893 німецьким фізиком Вільгельмом Віном (1864-1928) з термодинамічних міркувань. Закон стверджує, що довжина хвилі випромінювання абсолютно чорного тіла, на яку доводиться максимум випромінювальної здатності, при підвищенні температури тіла

зміщується в бік більш коротких хвиль, причому ця довжина хвилі дорівнює

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

де T – абсолютна температура, b – стала Віна, яка дорівнює $2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К. Це значення спочатку було визначено експериментально.

1900 року німецький фізик-теоретик Макс Планк (1858-1947) на основі квантової гіпотези вивів формулу для спектральної щільності енергетичної світності абсолютно чорного тіла (вона показує, яка енергія випромінюється в одиницю часу з одиниці поверхні одиничному інтервалі довжин хвиль):

$$r(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}.$$

Щоб теоретично прийти до закону Віна, знайдемо значення довжини хвилі λ_{\max} , при якому функція $r(\lambda)$ приймає максимальне значення при фіксованій температурі T . Для стислості введемо позначення:

$$x = \frac{hc}{\lambda k T}.$$

Для відшукування максимуму функції $r(\lambda)$ беремо похідну:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1} \right) = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \left[\frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} \right].$$

Прирівнявши похідну до нуля, отримаємо рівняння:

$$x e^x = 5(e^x - 1).$$

Можна знайти точний розв'язок цього рівняння через W -функцію; для цього перетворюємо рівняння:

$$(x-5) e^x = -5.$$

Помножимо обидві частини рівняння на e^{-5} :

$$(x-5) e^{x-5} = -5 e^{-5}.$$

У результаті знаходимо:

$$x-5 = W(-5 e^{-5}).$$

Повертаючись до вихідним змінним, можна, можливо записати:

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 5 + W(-5e^{-5}).$$

Закон зміщення Віна прийме остаточний вигляд:

$$\lambda_{\max} T = b ,$$

де постійна Віна в точності дорівнює

$$b = \frac{hc/k}{5 + W(-5e^{-5})}.$$

Підставивши значення фундаментальних фізичних констант та $W(-5e^{-5}) = -0,03489$, отримаємо для постійної Віна значення $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$. [11].

2.3. Розрахунок критичних розмірів ядерного реактора

Наведемо ще один приклад застосування W -функції для розв'язування трансцендентних рівнянь – цього разу з галузі фізики ядерних реакторів. В основі роботи ядерного реактора лежить розмноження нейтронів. Хід протікання ланцюгової реакції поділу важких ядер залежить від величини, яка має назву *коефіцієнт розмноження нейтронів*. Цей коефіцієнт дорівнює відношенню числа нейтронів поточного покоління до нейтронів попереднього покоління в обсязі нейтронного середовища, що розмножується (активної зони реактора). [3].

Якщо коефіцієнт розмноження $k < 1$, число нейтронів зменшується і ланцюгова реакція згасає. У протилежному випадку, коли $k > 1$, реакція стає некерованою. Для підтримки стабільного режиму необхідне дотримання умови $k = 1$. Вона досягається шляхом регулювання балансу між появою нових нейтронів та їх втратами. Втрати відбуваються з двох причин: по-перше, не кожен нейтрон, що поглинається ядром, викликає його поділ, а по-

друге, нейтрон може вийти за межі активною зони реактора.

Витік нейтронів за межі речовини, що ділиться не відбуватиметься, якщо вважати розміри активної зони нескінченно великими. В цьому випадку вводиться *коефіцієнт розмноження нейтронів у нескінченному середовищі* k_∞ , який не залежить від конструкції реактора. Урахування обмежених розмірів активної зони знижує коефіцієнт розмноження; в цьому випадку кажуть про *ефективний коефіцієнт розмноження*, який визначається формулою

$$k = k_\infty p, \quad (2.1)$$

де p - ймовірність уникнення витоку нейтрону з активної зони. Таким чином, якщо $k_\infty > 1$, то завжди можна підібрати такі розміри активної зони реактора, при яких виконується умова $k = 1$. Такі розміри називають *критичними*.

Витоки з активної зони відбуваються при уповільненні швидких нейтронів і дифузії теплових нейтронів. Отже, ймовірність уникнути витоку дорівнює:

$$p = p_{\text{зам}} p_{\text{диф}}, \quad (2.2)$$

де $p_{\text{зам}}$ – ймовірність уникнути витоку в процесі уповільнення, $p_{\text{диф}}$ – ймовірність уникнути витоку в процесі дифузії.

Перша ймовірність обчислюється по формулі

$$p_{\text{зам}} = e^{-B^2 \tau}, \quad (2.3)$$

де τ – так званий *вік нейтронів* (величина, що має розмірність площі і характеризує властивості середовища, що уповільнюють), B^2 – геометричний параметр, який залежить від форми і розмірів активної зони. Наприклад, для сфери радіусу R геометричний параметр дорівнює

$$B^2 = \frac{\pi^2}{R^2}$$

Ймовірність уникнути витоку нейтрону в процесі дифузії визначається

виразом

$$\frac{k_{\infty} e^{-B^2 \tau}}{1 + B^2 L^2} = 1.$$

де L – довжина дифузії нейтронів, що характеризує дифузійні властивості середовища.

Об'єднуючи формули (2.1) - (2.4) з умовою $k = 1$, отримаємо рівняння:

$$\frac{k_{\infty} e^{-B^2 \tau}}{1 + B^2 L^2} = 1.$$

Це рівняння, трансцендентне щодо B^2 , і називається *критичним рівнянням для реактора скінченних розмірів*. Воно дозволяє знайти критичні розміри активної зони із заданим складом палива та заданою геометричною формою.

Критичне рівняння часто розв'язується чисельно, проте W -функція Ламберта дає можливість записати точну формулу для обчислення B^2 . Для цього перетворюємо рівняння:

$$(1 + B^2 L^2) e^{B^2 \tau} = k_{\infty}.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $L^2 \tau$ і помножимо на e^{τ/L^2} :

$$\left(B^2 + \frac{1}{L^2} \right) \tau e^{\left(B^2 + \frac{1}{L^2} \right) \tau} = \frac{k_{\infty} \tau}{L^2} e^{\frac{\tau}{L^2}}.$$

Використовуючи визначення W -функції Ламберта, отримуємо:

$$\left(B^2 + \frac{1}{L^2} \right) \tau = W \left(\frac{k_{\infty} \tau}{L^2} e^{\frac{\tau}{L^2}} \right).$$

Таким чином, геометричний параметр дорівнює:

$$B^2 = \frac{1}{\tau} W \left(\frac{k_{\infty} \tau}{L^2} e^{\frac{\tau}{L^2}} \right) - \frac{1}{L^2}.$$

2.4. Ковзання при сталій потужності

Тіло маси m має двигун постійною потужності N , під дією якого починає ковзати по горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя μ . Встановимо закон зміни швидкості тіла $v(t)$.

Здійснювана двигуном робота йде на збільшення кінетичної енергії тіла і подолання сили тертя $F_{\text{тр}} = \mu mg$:

$$Nt = \frac{mv^2}{2} + \mu mgs.$$

Продиференціюємо це вираз по часу:

$$N = mv \frac{dv}{dt} + \mu mgv.$$

Неважко помітити, що за $t \rightarrow \infty$ вся робота двигуна буде витрачатися на подолання тертя і тіло рухатиметься рівномірно зі швидкістю

$$v_{\text{max}} = \frac{N}{\mu mg}.$$

Розділимо змінні в диференційному рівнянні:

$$\frac{mv}{\mu mgv - N} dv = -dt.$$

Для простоти перейдемо до змінної v_{max} :

$$\frac{v}{v - v_{\text{max}}} dv = -\mu g dt.$$

Інтеграл від лівої частини можна взяти так:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{v}{v - v_{\text{max}}} dv &= \int_0^v \frac{v - v_{\text{max}} + v_{\text{max}}}{v - v_{\text{max}}} dv = \int_0^v \left(1 + \frac{v_{\text{max}}}{v - v_{\text{max}}} \right) dv = \\ &= \int_0^v dv + v_{\text{max}} \int_0^v \frac{dv}{v - v_{\text{max}}} = v + v_{\text{max}} \ln \left(1 - \frac{v}{v_{\text{max}}} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння:

$$v + v_{\max} \ln\left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right) = -\mu g t.$$

Нам залишилося знайти лише обернений вираз. Ділимо обидві частини на v_{\max} і потенціюємо:

$$\left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right) e^{\frac{v}{v_{\max}}} = e^{-\frac{\mu g t}{v_{\max}}}.$$

Помножимо обидві частини на $-e^{-1}$:

$$\left(\frac{v}{v_{\max}} - 1\right) e^{\frac{v}{v_{\max}} - 1} = -e^{-1 - \frac{\mu g t}{v_{\max}}}.$$

Використовуючи означення W -функції Ламберта, отримаємо:

$$\frac{v}{v_{\max}} - 1 = W\left(-e^{-1 - \frac{\mu g t}{v_{\max}}}\right).$$

Тоді швидкість змінюється згідно закону:

$$v = v_{\max} \left[1 + W\left(-e^{-1 - \frac{\mu g t}{v_{\max}}}\right) \right].$$

Повертаючись до вихідних змінних, запишемо остаточний відповідь:

$$v(t) = \frac{N}{\mu m g} \left[1 + W\left(-e^{-1 - \frac{\mu^2 g^2 m t}{N}}\right) \right].$$

2.5. Розрахунок електричного кола з діодом

Розглянемо електричне коло, в яке послідовно включені резистор опору R і напівпровідниковий діод (рис. 2.1). Напряга живлення дорівнює U . Потрібно відшукати струм в колі та напругу на її елементах.

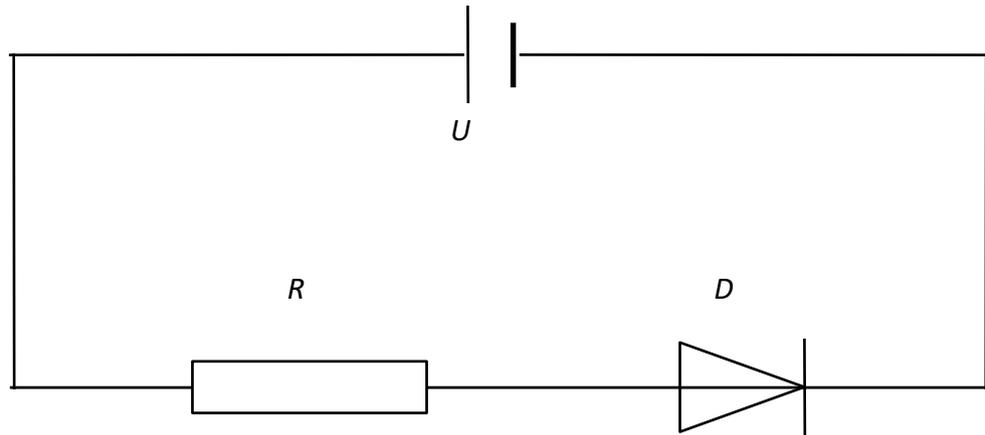


Рис. 3.1 Електричне коло з діодом

Діод є нелінійним елементом, тобто не підкоряється закону Ома. Сила струму в ньому визначається рівнянням Шоклі:

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{\varphi_T}} - 1 \right),$$

де I_0 – струм насичення (максимальна величина зворотного струму), U_D – напруга на діоді, φ_T - термічний потенціал, який можна знайти за формулою:

$$\varphi_T = \frac{kT}{q_e},$$

де k – постійна Больцмана, T – абсолютна температура діода, q_e – заряд електрону. Неважко розрахувати, що при кімнатній температурі значення термічного потенціалу становить приблизно 26 мВ.

При послідовному з'єднанні сума напруг на елементах кола дорівнює напрузі джерела U , тому напруга на діоді дорівнює $U_D = U - IR$. Таким чином, можна записати рівняння:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{U-IR}{\varphi_T}} - 1 \right).$$

Це рівняння часто розв'язується графічно або ітераційними методами, однак W -функція Ламберта дозволяє отримати точний аналітичний розв'язок. Щоб знайти його, перетворюємо рівняння:

$$\frac{I}{I_0} + 1 = e^{\frac{U - IR}{\varphi_T}}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $I_0 R / \varphi_T$:

$$\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) = \frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - IR}{\varphi_T}}.$$

Потім помножимо обидві частини на експоненту від лівий частини:

$$\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) e^{\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)} = \frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - IR}{\varphi_T}} e^{\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)}.$$

Показник степеня в правій частині спроститься після очевидних перетворень:

$$\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) e^{\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)} = \frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - I_0 R}{\varphi_T}}.$$

Скориставшись визначенням W -функції, отримаємо:

$$\frac{I_0 R}{\varphi_T} \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) = W \left(\frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - I_0 R}{\varphi_T}} \right),$$

звідки знаходимо остаточне вираз для сили струму:

$$I = \frac{\varphi_T}{R} W \left(\frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - I_0 R}{\varphi_T}} \right) - I_0.$$

Неважко переконатися, що за відсутності живильного напруги $U = 0$ це рівняння дає $I = 0$.

Напруги на резисторі і діод визначаються формулами:

$$U_R = \varphi_T W \left(\frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - I_0 R}{\varphi_T}} \right) - I_0 R,$$

$$U_D = U + I_0 R - \varphi_T W \left(\frac{I_0 R}{\varphi_T} e^{\frac{U - I_0 R}{\varphi_T}} \right).$$

2.6. Капілярний ефект

Вертикальний циліндричний капіляр радіусу r торкається нижнім кінцем рідини з щільністю ρ , поверхневим натягом σ і динамічною в'язкістю η . Необхідно вивести формулу залежності висоти підйому рідини по капіляру від часу $h(t)$.

Розрахунок процесу вбирання рідини капіляром заснований на використанні закону Пуазейля, який описує встановилася течія в'язкою рідини по циліндричній труби. Закон Пуазейля дозволяє визначити об'ємний витрата рідини:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p,$$

де l – довжина труби, Δp – різниця тисків на її кінцях.

Причиною підйому рідини в капілярі є капілярний тиск, що виникає через викривлення поверхні рідини та розраховується за формулою Лапласа. Будемо думати, що рідина повністю змочує стінки капіляра, тоді формула Лапласа запишеться так:

$$p_k = \frac{2\sigma}{r},$$

де r – радіус кривизни поверхні рідини, який можна вважати рівним радіусу капіляра.

Процесу підйому рідини в вертикальному капілярі протидіє сила тяжкості. Вбирання буде продовжуватися до тих пір, Бувай капілярне тиск не врівноважується гідростатичним тиском втягнутого в капіляр стовпа рідини $\rho g H$. Звідси можна, можливо знайти максимальну висоту підйому:

$$H = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Таким чином, перепад тисків на кінцях капіляра дорівнює різниці капілярного і гідростатичного тисків:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} - \rho gh = \rho g(H - h),$$

де h - висота стовпа рідини в деякий момент часу. [3].

Використовуючи закон Пуазейля, запишемо диференціальне рівняння процесу вбирання:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4 \rho g}{8\eta h} (H - h).$$

Перейдемо від об'ємної швидкості до лінійної:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \frac{H - h}{h}.$$

Після розділення змінних отримаємо:

$$dt = \frac{8\eta}{\rho g r^2} \frac{h dh}{H - h}.$$

Щоб знайти час підйому рідини на висоту h , інтегруємо:

$$t = \int dt = \frac{8\eta}{\rho g r^2} \int_0^h \frac{h dh}{H - h}.$$

Отриманий інтеграл легко обчислити з допомогою нескладного перетворення:

$$\int_0^h \frac{h dh}{H - h} = \int_0^h \frac{H + h - H}{H - h} dh = \int_0^h \frac{H dh}{H - h} - \int_0^h dh = -H \ln \frac{H - h}{H} - h.$$

Таким чином, для часу всмоктування рідини справедливе рівняння

$$t = \frac{8\eta}{\rho g r^2} \left(H \ln \frac{H}{H - h} - h \right),$$

яке називають *рівнянням Уошберна* в честь американського фізико-хіміка Едварда Уошберна (1881-1934), який отримав цю формулу в 1920-х роках.

Рівняння Уошберна є трансцендентним; знайти його точний розв'язок допоможе W -функція Ламберт. Перетворюємо:

$$-\frac{\rho g r^2}{8\eta H} t = \ln\left(1 - \frac{h}{H}\right) + \frac{h}{H}.$$

Потенціюємо:

$$e^{-\frac{\rho g r^2}{8\eta H} t} = \left(1 - \frac{h}{H}\right) e^{\frac{h}{H}}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $-e^{-1}$:

$$-e^{-1 - \frac{\rho g r^2}{8\eta H} t} = \left(\frac{h}{H} - 1\right) e^{\frac{h}{H} - 1}.$$

Згідно означенню W -функції

$$\frac{h}{H} - 1 = W\left(-e^{-1 - \frac{\rho g r^2}{8\eta H} t}\right),$$

і в результаті залежність висоти від часу має вигляд:

$$h(t) = H \left[1 + W\left(-e^{-1 - \frac{\rho g r^2}{8\eta H} t}\right) \right].$$

Графік цієї залежності представлений на рис. 3.2:

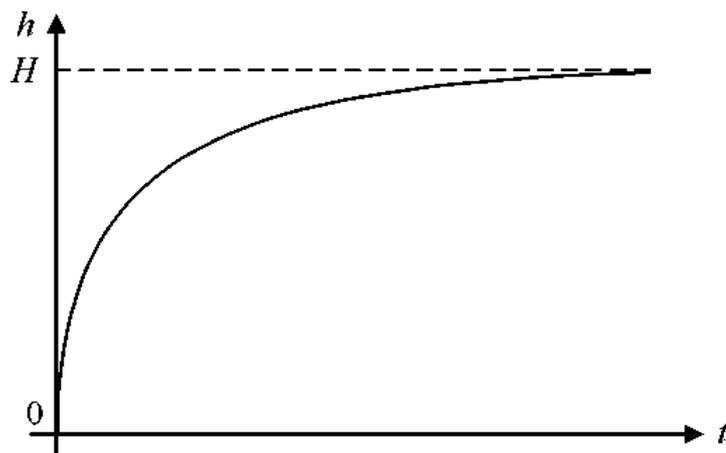


Рис. 2.2. Графік залежності висоти підняття від часу

Видно, що в міру поглинання висота підйому рідини асимптотично прямує до H . [12].

РОЗДІЛ 3. ВИЗНАЧЕННЯ ДАЛЬНОСТІ ПОЛЬОТУ ТІЛА В СЕРЕДОВИЩІ, ЩО ЧИНИТЬ ОПІР

3.1. Постановка задачі та знаходження точного розв'язку.

Постановка задачі. Тіло маси m кидають із початковою швидкістю v_0 , спрямованою під кутом α до горизонту. Зі сторони середовища на тіло діє сила опору, пропорційна швидкості тіла, $F = kmv$. Потрібно визначити горизонтальну дальність польоту тіла.

За відсутності опору середовища завдання стає елементарним: дальність польоту визначається формулою

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

і досягає максимуму при вугіллі кидання $\alpha_{\max} = 45^\circ$. Розв'яжемо більш загальну задачу і порівняємо результати.

Рух тіла відбувається під дією двох сил: сили тяжкості і сили опору. Другий закон Ньютона запишеться так:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + km\vec{v}.$$

У проекціях на осі координат рівняння руху тіла запишуться так:

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y.$$

Інтегрування цих рівнянь з урахуванням початкових умов ($v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) дає такі вирази для складових швидкості:

$$\frac{dx}{dt} = (v_0 \cos \alpha) e^{-kt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{k} [(kv_0 \sin \alpha + g) e^{-kt} - g].$$

Інтегруючи ці рівняння з початковими умовами $x(0) = y(0) = 0$, отримуємо закони зміни координат:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{1}{k^2} [(kv_0 \sin \alpha + g)(1 - e^{-kt}) - kgt].$$

Для знаходження дальності нам потрібно дізнатися час польоту, яке можна знайти, розв'язавши рівняння $y(t) = 0$ і вибравши його ненульовий корінь. Таким чином, ми приходимо до трансцендентного рівняння

$$\frac{1}{k^2} [(kv_0 \sin \alpha + g)(1 - e^{-kt}) - kgt] = 0.$$

Введемо нову змінну

$$u = -\frac{kv_0 \sin \alpha + g}{g}, \quad (3.1)$$

з допомогою якої рівняння перетворюється до виду:

$$-u + ue^{kt} - kt = 0.$$

Ми можемо звести його до одного з рівнянь, розглянутих в розділі 1 (останнє рівняння в таблиці):

$$e^{kt} + \frac{1}{u}(-kt) = 1.$$

Використовуємо готовий розв'язок:

$$-kt = -W(ue^u) + u,$$

звідки час польоту одно:

$$t = \frac{1}{k} [W(ue^u) - u].$$

Підставляємо цей час у рівняння для координати x :

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \left\{ 1 - \exp[u - W(ue^u)] \right\}.$$

Перетворюємо експоненту:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \left\{ 1 - \exp[u] \cdot \exp[-W(ue^u)] \right\}.$$

Скористаємося властивістю W -функції, згідно якому

$$\exp[-W(ue^u)] = \frac{W(ue^u)}{ue^u}.$$

У цьому випадку вираз для дальності спроститься:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \left\{ 1 - \frac{W(ue^u)}{u} \right\}.$$

Повертаючись до вихідних змінних, можна, можливо записати остаточну формулу дальності польоту:

$$L = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \left\{ 1 + \frac{W \left[\left(-1 - \frac{kv_0 \sin \alpha}{g} \right) e^{-1 - \frac{kv_0 \sin \alpha}{g}} \right]}{1 + \frac{kv_0 \sin \alpha}{g}} \right\}.$$

3.2. Визначення оптимального кута кидання.

Дослідимо також питання про знаходження такого кута кидання, при якому дальність польоту сягає найбільшого значення. Для цього введемо нове позначення:

$$z = W(ue^u),$$

завдяки чому формулу для дальності можна записати компактно:

$$L = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - \frac{z}{u} \right).$$

Перш ніж шукати похідну $dL/d\alpha$, обчислимо кілька допоміжних похідних:

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{kv_0 \cos\alpha}{g} = (u+1) \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{z}{ue^u(1+z)} \cdot (e^u + ue^u) = \frac{(1+u)z}{(1+z)u}.$$

З останньої формули слід рівність

$$\frac{z}{u} = \frac{1+z}{1+u} \frac{dz}{d\alpha},$$

яке стане в нагоді для обчислення похідної:

$$\frac{d}{du} \left(1 - \frac{z}{u}\right) = -\frac{1}{u} \left(\frac{dz}{du} - \frac{z}{u}\right) = -\frac{1}{u+1} \left(1 - \frac{z}{u}\right) \frac{dz}{du}.$$

Тепер не складно продиференціювати L :

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{v_0}{k} \left[-\sin\alpha \left(1 - \frac{z}{u}\right) + \cos\alpha \frac{d}{du} \left(1 - \frac{z}{u}\right) \frac{du}{d\alpha} \right].$$

Підставивши всі допоміжні похідні, отримаємо:

$$\frac{dL}{d\alpha} = -\frac{v_0}{k} \sin\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha \left(1 - \frac{z}{u}\right) \left(\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{dz}{du}\right).$$

Дана похідна дорівнює нулю, тільки якщо

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{dz}{du} = 0. \quad (3.2)$$

Щоб розв'язати це рівняння, введемо безрозмірну величину n , що має сенс відношення сили опору в початку руху до сили тяжіння:

$$n = \frac{kv_0}{g}.$$

Тоді з (3.1) отримуємо співвідношення:

$$\sin\alpha_{\max} = -\frac{1+u}{n}. \quad (3.3)$$

Використовуючи цю рівність і значення похідної dz/du , перепишемо вихідне рівняння (3.2) у вигляді:

$$\frac{(1+u)^2}{n^2 - (1+u)^2} = -\frac{(1+u)z}{(1+z)u}.$$

Шляхом нескладних перетворень виразимо звідси z :

$$z = -\frac{u(1+u)}{n^2 - u - 1}.$$

Скористаємося очевидною властивістю W -функції, згідно якої $ze^z = ue^u$, так як $z = W(ue^u)$. У результаті:

$$-\frac{u(1+u)}{n^2 - u - 1} e^{\frac{u(1+u)}{n^2 - u - 1}} = ue^u$$

Перетворення приводять до рівняння:

$$-\frac{1+u}{n^2 - u - 1} = e^{-\frac{n^2 u}{n^2 - u - 1}}.$$

Виконаємо заміну

$$q = \frac{1}{n^2 - u - 1},$$

з допомогою якої рівняння перетворюється до виду:

$$\left[e^{n^2(n^2+1)} \right]^q + n^2 e^{n^2} q = e^{n^2}$$

Скористаємося готовим розв'язком такого типу рівнянь з таблиці в розділі 1. Після перетворень отримаємо:

$$q = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2(n^2 - 1)} W\left(\frac{n^2 - 1}{e}\right).$$

Повертаючись до змінної u , маємо:

$$u = n^2 - 1 - \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 - 1 - W\left(\frac{n^2 - 1}{e}\right)}.$$

Підставивши цей вираз в (3.3), отримаємо:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{nW\left(\frac{n^2-1}{e}\right)}{n^2-1-W\left(\frac{n^2-1}{e}\right)}$$

Дана формула і визначає кут кидання, при якому дальність польоту максимальна.

Покажемо, що у разі відсутності опору ($n=0$) отримана формула дає $\alpha_{\max} = 45^\circ$. Для цього введемо позначення

$$w = W\left(\frac{n^2-1}{e}\right)$$

і розглянемо границю

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \sin \alpha_{\max} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{nw}{n^2-1-w} = \frac{\lim_{n \rightarrow 0^+} w}{\lim_{n \rightarrow 0^+} \left(n - \frac{w+1}{n}\right)}$$

Границя в чисельнику дорівнює -1 , так що можна записати:

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \sin \alpha_{\max} = \frac{-1}{\lim_{n \rightarrow 0^+} \left(-\frac{w+1}{n}\right)} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{w+1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{n}{w+1}\right)$$

Щоб обчислити цю границю, розглянемо вираз:

$$we^w = \frac{n^2-1}{e}$$

Розкладемо ліву частину в ряд Тейлора в околі $w = -1$:

$$-\frac{1}{e} + \frac{(w+1)^2}{2e} + \frac{(w+1)^3}{3e} + \frac{(w+1)^4}{8e} + \dots = \frac{n^2-1}{e}$$

Неважко побачити, що

$$n^2 = (w+1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{w+1}{3} + \dots \right),$$

звідки

$$\frac{n}{w+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{w+1}{3} + \dots}$$

Тоді вихідна границя буде дорівнювати:

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \sin \alpha_{\max} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{n}{w+1} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ,$$

що і потрібно було довести.

При збільшенні опору середовища оптимальний кут кидання зменшується; іншими словами, функція $\alpha_{\max}(n)$ є спадаючою. Можна побудувати графік цієї функції:

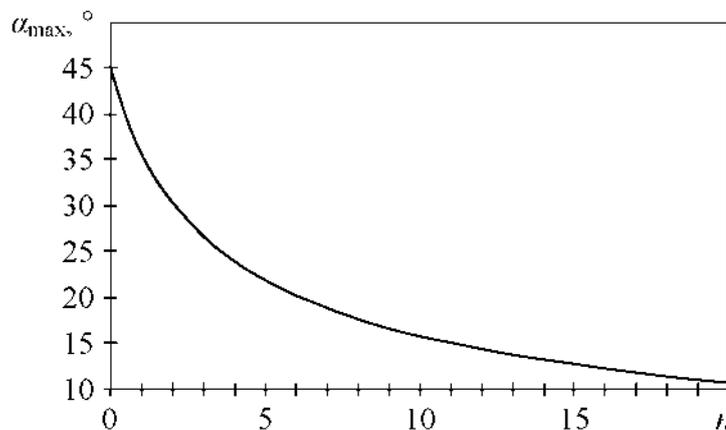


Рис. 3.1. графік функції $\alpha_{\max}(n)$ оптимального кута кидання

З графіка видно, що, наприклад, при $n = 2$ для досягнення максимальної дальності польоту слід кидати тіло під кутом $\alpha_{\max} \approx 30^\circ$.

Зазначимо, що лінійний закон опору середовища, що припускався в даній задачі, має практичне значення для малих швидкостей руху [6].

ВИСНОВКИ

На сьогодні відомо про досить багато прикладів ефективного застосування W -функції Ламберта для розв'язання практичних задач в багатьох галузях науки. Проте потенціал такого застосування, вочевидь ще не вичерпано, що забезпечує актуальність теми цього магістерського дослідження.

У відповідності з метою та завданнями дослідження у роботі проведено аналіз означення та властивостей W -функції Ламберта з точки зору їх практичного застосування. Оскільки W -функції Ламберта відносяться до класу спеціальних функцій (тобто таких функцій, які не виражаються через елементарні функції) важливо було проаналізувати принципи та особливості апроксимації цієї функції, що забезпечило конкретизацію у роботі цієї операції для практичного застосування.

Важливим та цінним результатом дослідження є систематизоване представлення точних розв'язків трансцендентних рівнянь з допомогою W -функції Ламберта у стислому довідниковому форматі, що сприятиме більш ефективному практичному їх застосуванню.

У другому розділі роботи зібрані досить прості, але різногалузеві та інформативні приклади практичних задач, які ефектно розв'язуються за допомогою W -функції Ламберта та вигідно ілюструють особливості її застосування.

Цікавим результатом є також застосування W -функції Ламберта для знаходження точного розв'язку задачі про дальність польоту тіла в середовищі, що чинить опір, а також розв'язання задачі про оптимальний кут кидання тіла, які мають важливе практичне застосування, зокрема, у військовій справі.

Потрібно зазначити, що цікавим питанням є також практична реалізація наведених у роботі підходів для комп'ютерного моделювання

реальних фізичних процесів з використанням спеціалізованих програмних продуктів з реалізованими в них процедурами обчислення W -функції Ламберта. Порівняння отриманих результатів комп'ютерного моделювання з використанням W -функції Ламберта та отриманих традиційними способами дозволило б більш обґрунтовано свідчити про ефективність та перспективи застосування цієї спеціальної функції, що може стати предметом майбутніх досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аксенов Е. П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
3. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров: Российский федеральный ядерный центр, 2006.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматлит, 1963.
5. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2007.
6. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. J. et al. On the Lambert W-function // *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5. P. 329-359.
7. Valluri S. R., Jeffrey D. J., Corless R. M. Some applications of the Lambert W-function to physics // *Canadian J. Phys.* 2000. Vol. 78. P. 823-831.
8. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства, Саров: СарФТИ, 2004.
9. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир. 1998.
10. Corless R. M., Jeffrey D. J., Knuth D. E. A sequence of series for the Lambert W-function // *Proceedings ISS AC'97.* 1997. P. 197- 204.
11. Snowden A. Interesting integrals with Lambert's W-function // www.math.umd.edu/~asnowderi/Lambertw.pdf.
12. Burniston E. E., Siewert C. E. The use of Riemann problems in solving a class of transcendental equations // *Proceedings of. Cambridge Philosophical Society.* 1973. Vol. 73. P. 111-118.
13. Luck R., Stevens J. W. Explicit solutions for transcendental equations //

SIAM Review. 2002. Vol. 44. No. 2. P. 227-233.

14. Лебедев А. Н. Моделирование трансцендентных уравнений. Л.: Судпромгиз. 1963.
15. Дубинова И. Д. Применение W-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // Физика плазмы. 2004. Т. 30, № 10. С. 937-943.
16. Дубинова И. Д. Точные явные решения некоторых дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, №8. С. 1129-1130.
17. Петросян Л. А., Томский Г. В. Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983.
18. Kalman D. A generalized logarithm for exponential-linear equations // Reprint from College Math. Journal. 2001. Vol. 32, No. 1.
19. Galidakis /. An infinite family of Lambert W - like functions and their use in numerically solving exponential tower equations // users.forthnet.gr/athyjgal/math/LWExtension.html
20. Wright E. M. Solution of the equation $z \exp(z) = a$ // Bull. Amer. Math. Soc., 1959. Vol. 65. P. 89-93.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
22. Свешников А. Г, Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979.

ДОДАТОК А

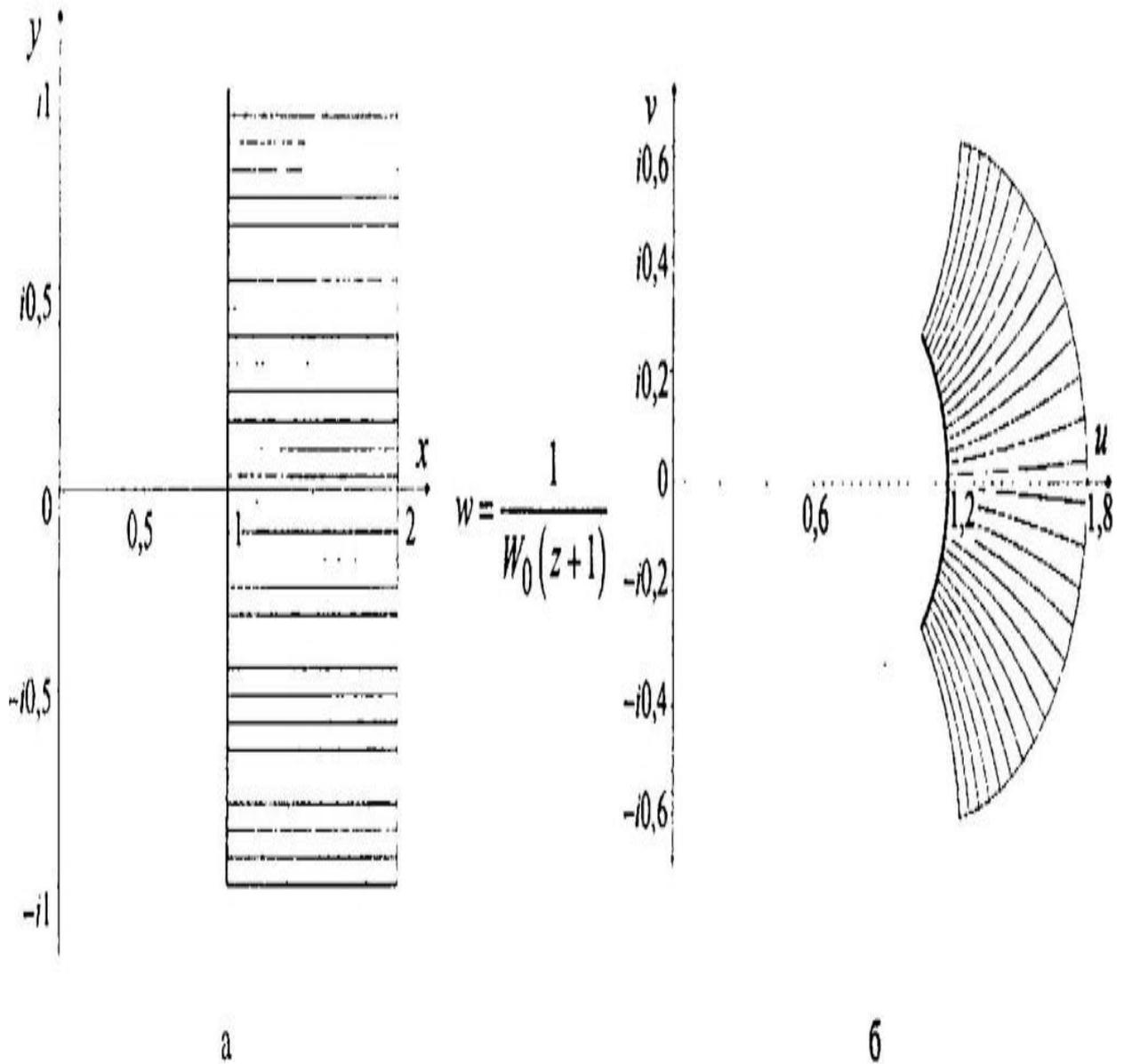


Рис. 1. Дія конформного відображення $w = \frac{1}{W_0(z+1)}$ на прямокутну область:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

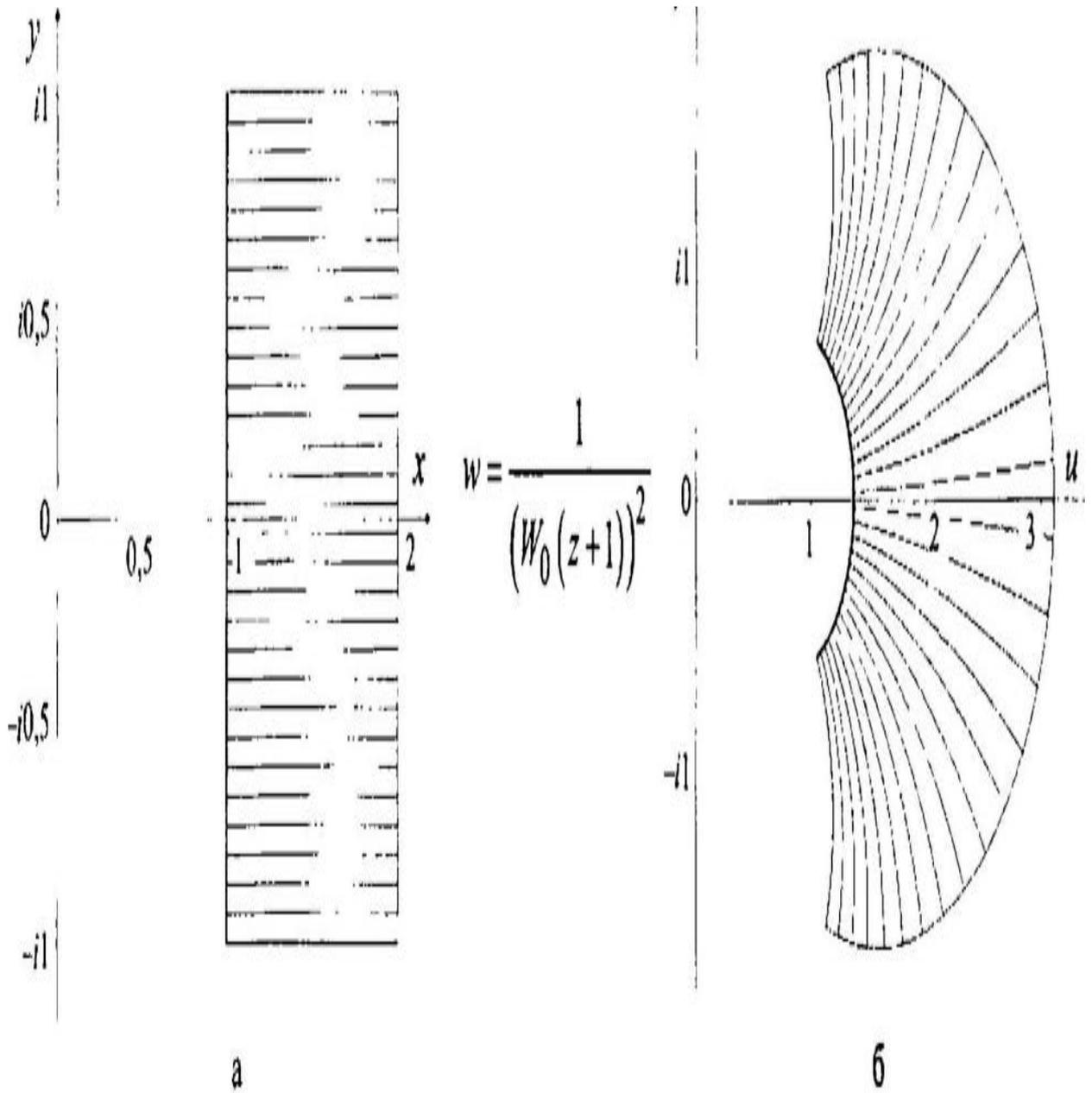


Рис. 2. Дія конформного відображення $w = \frac{1}{(W_0(z+1))^2}$ на прямокутну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

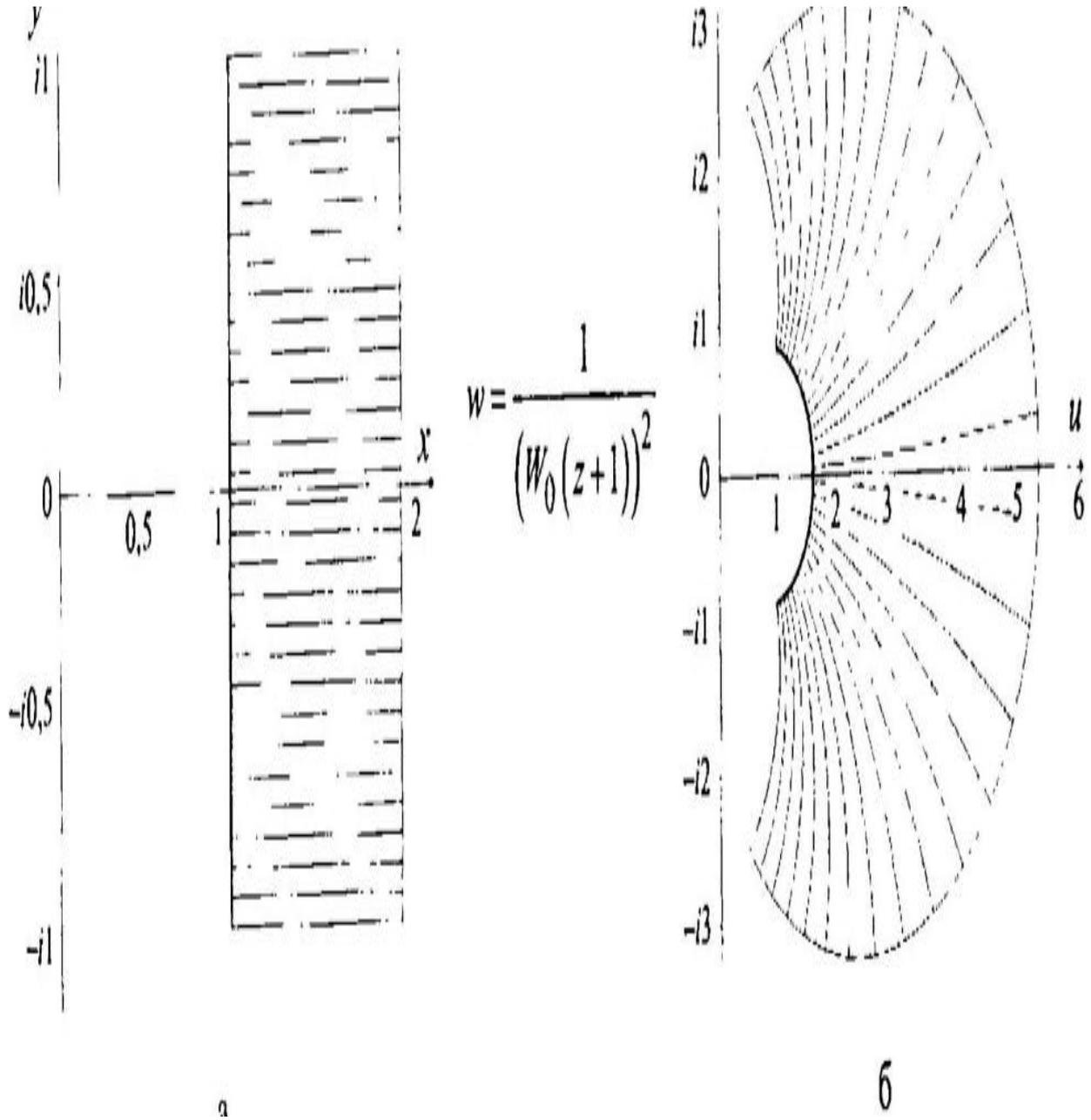


Рис. 3. Дія конформного відображення $w = \frac{1}{(W_0(z+1))^2}$ на прямокутну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

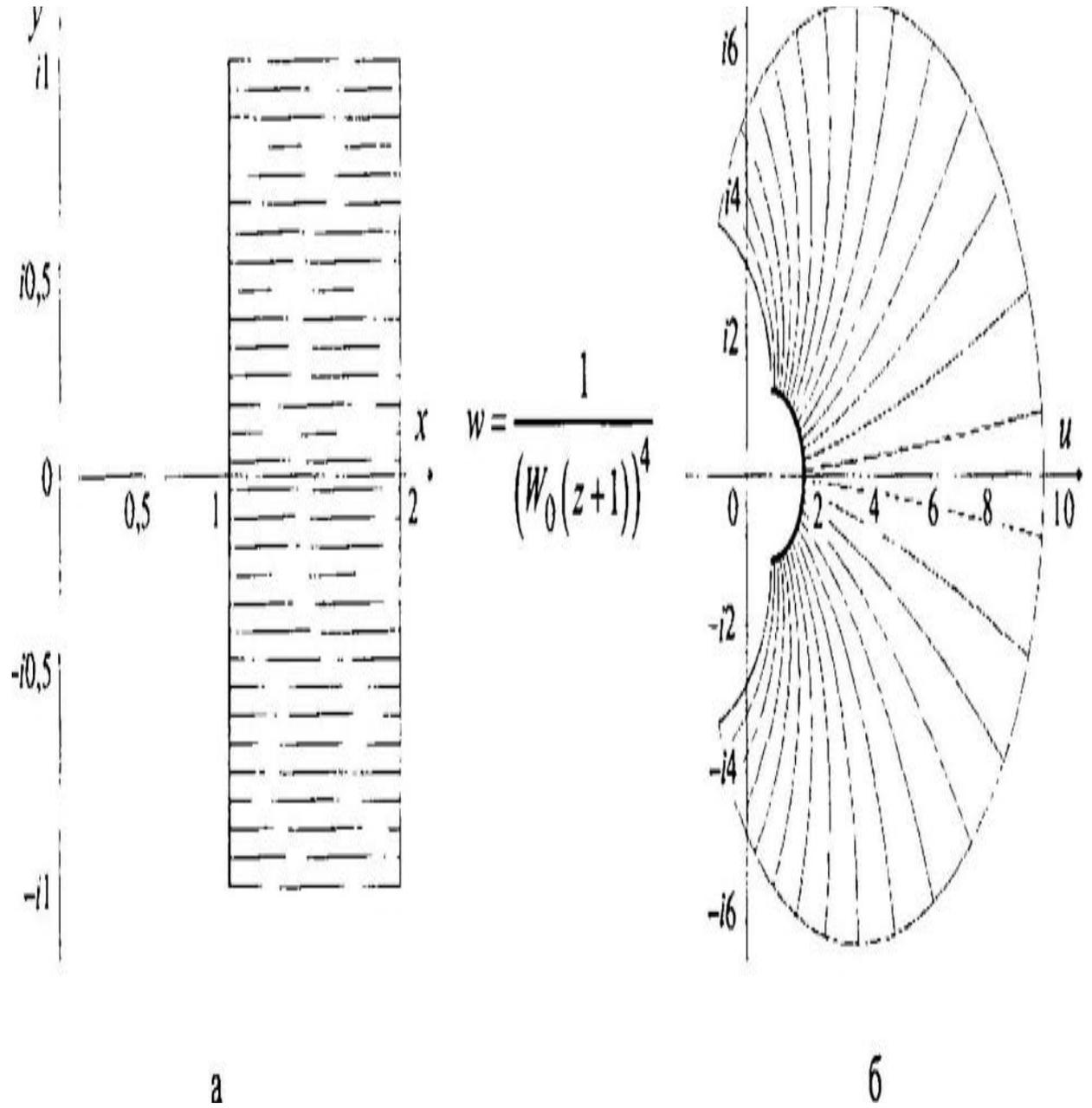


Рис. 4. Дія конформного відображення $w = \frac{1}{(W_0(z+1))^4}$ на прямокутну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

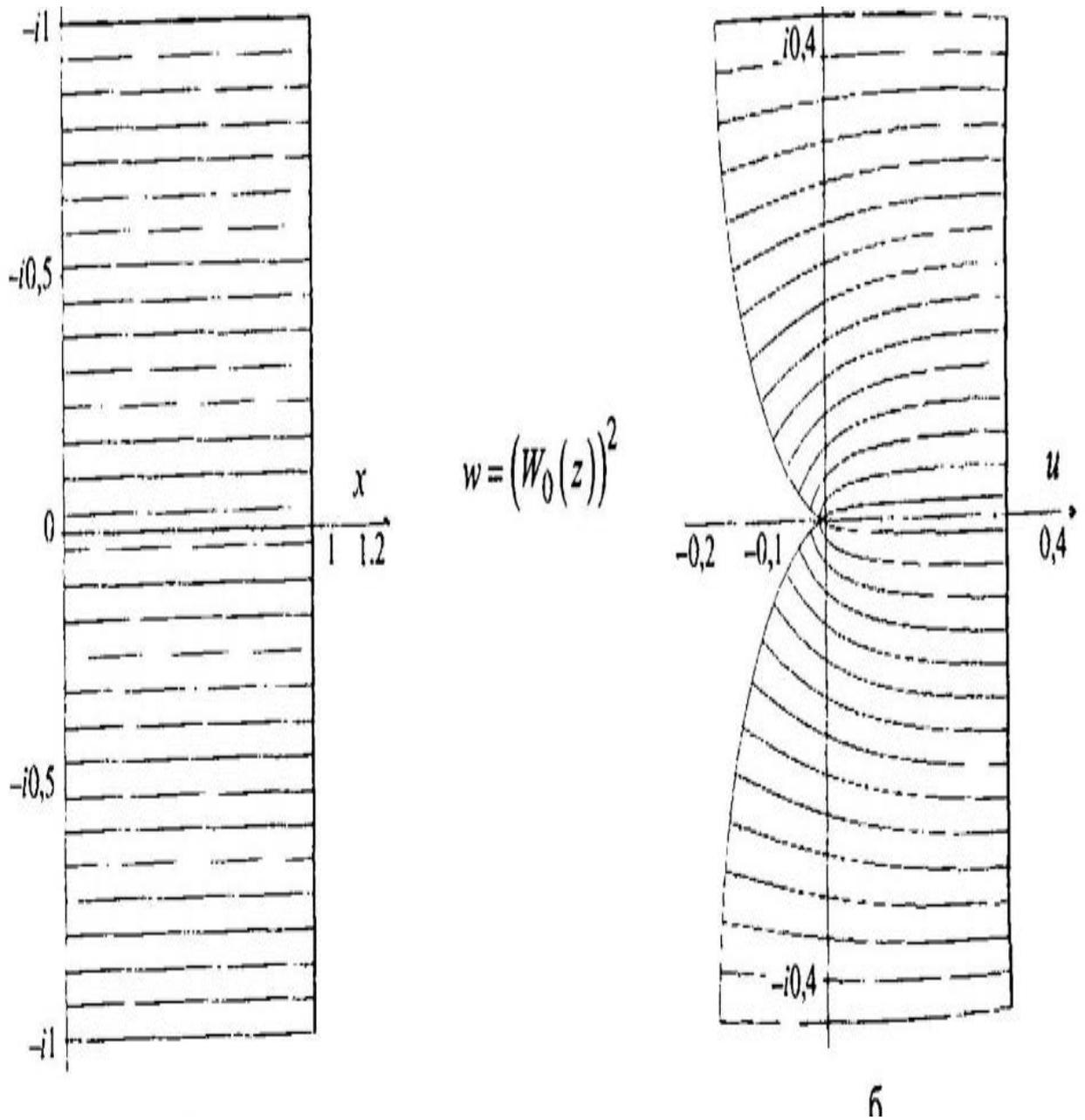


Рис. 5. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^2$ на прямокутну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

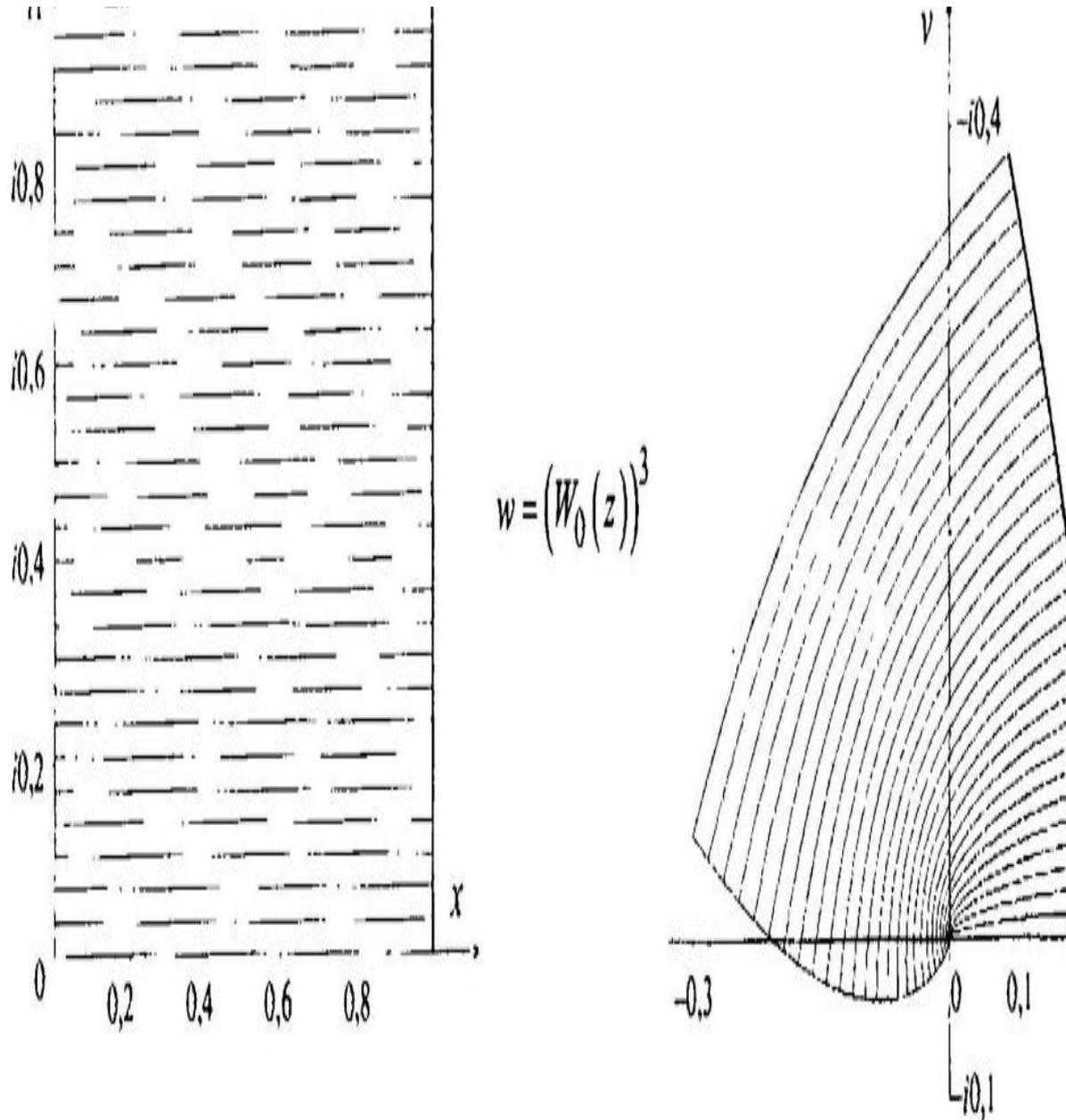


Рис. 6. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^3$ на квадратну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

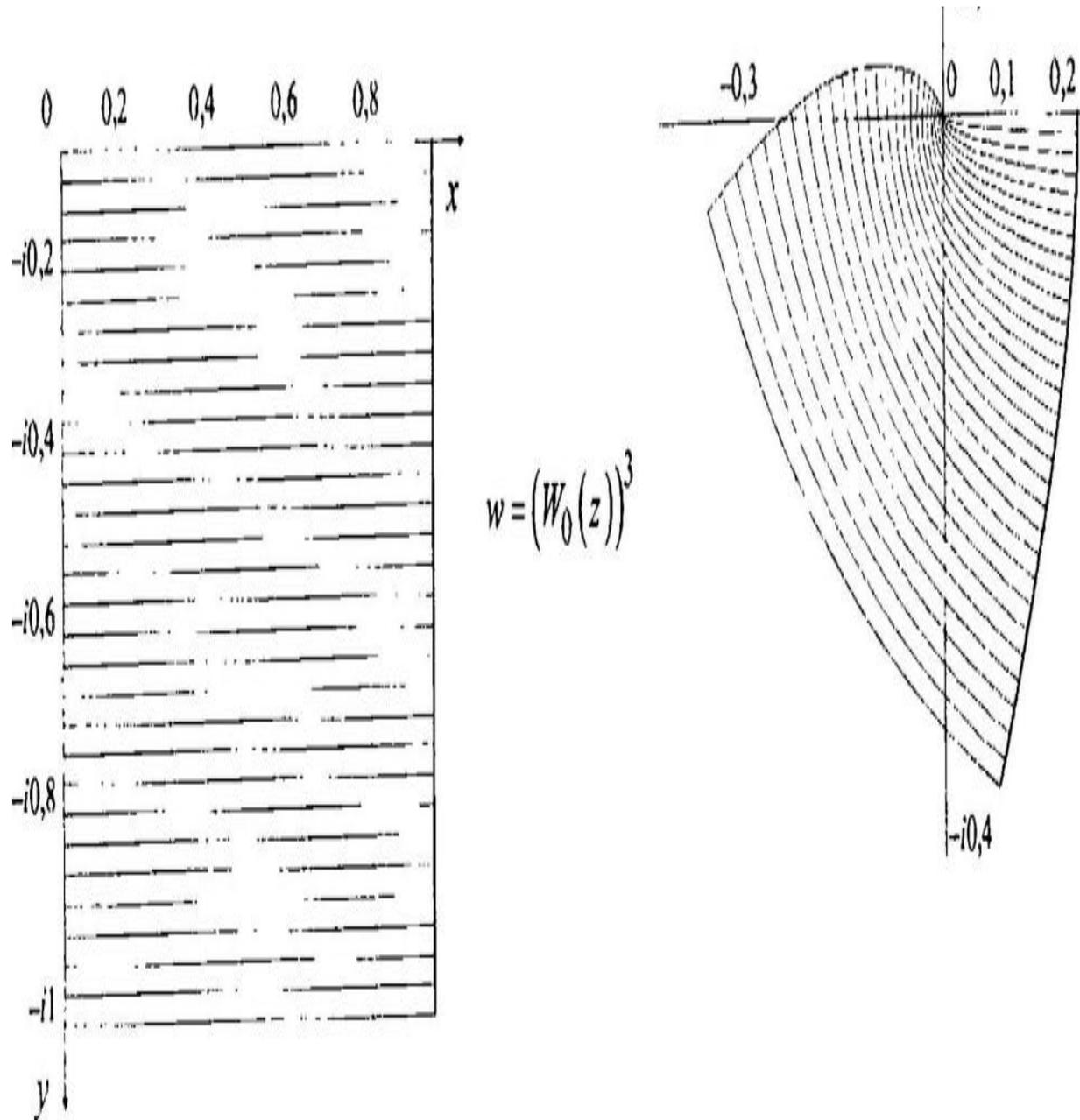


Рис. 7. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^3$ на квадратну область: а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

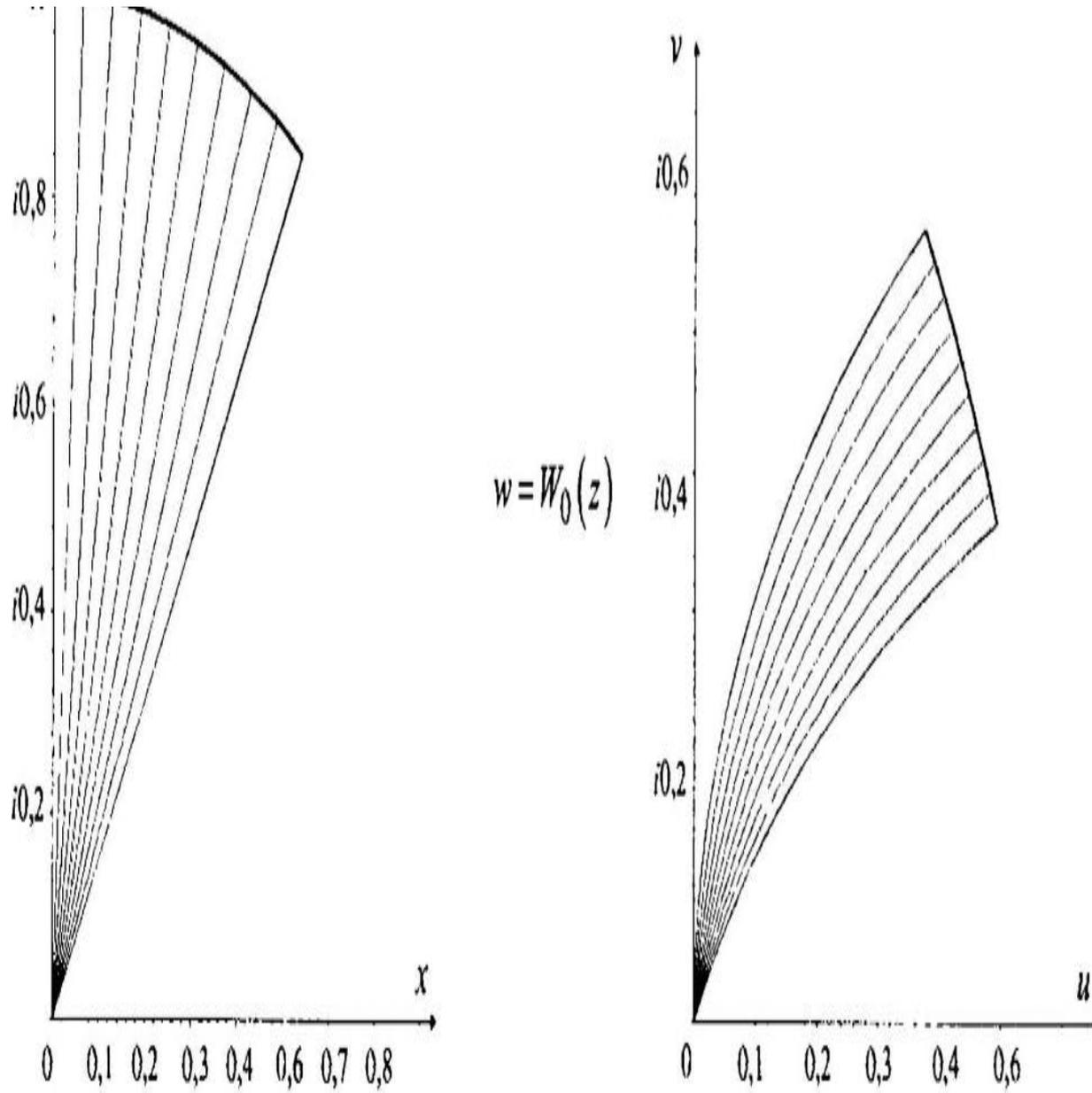


Рис. 8. Дія конформного відображення $w=W_0(z)$ на сектор:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

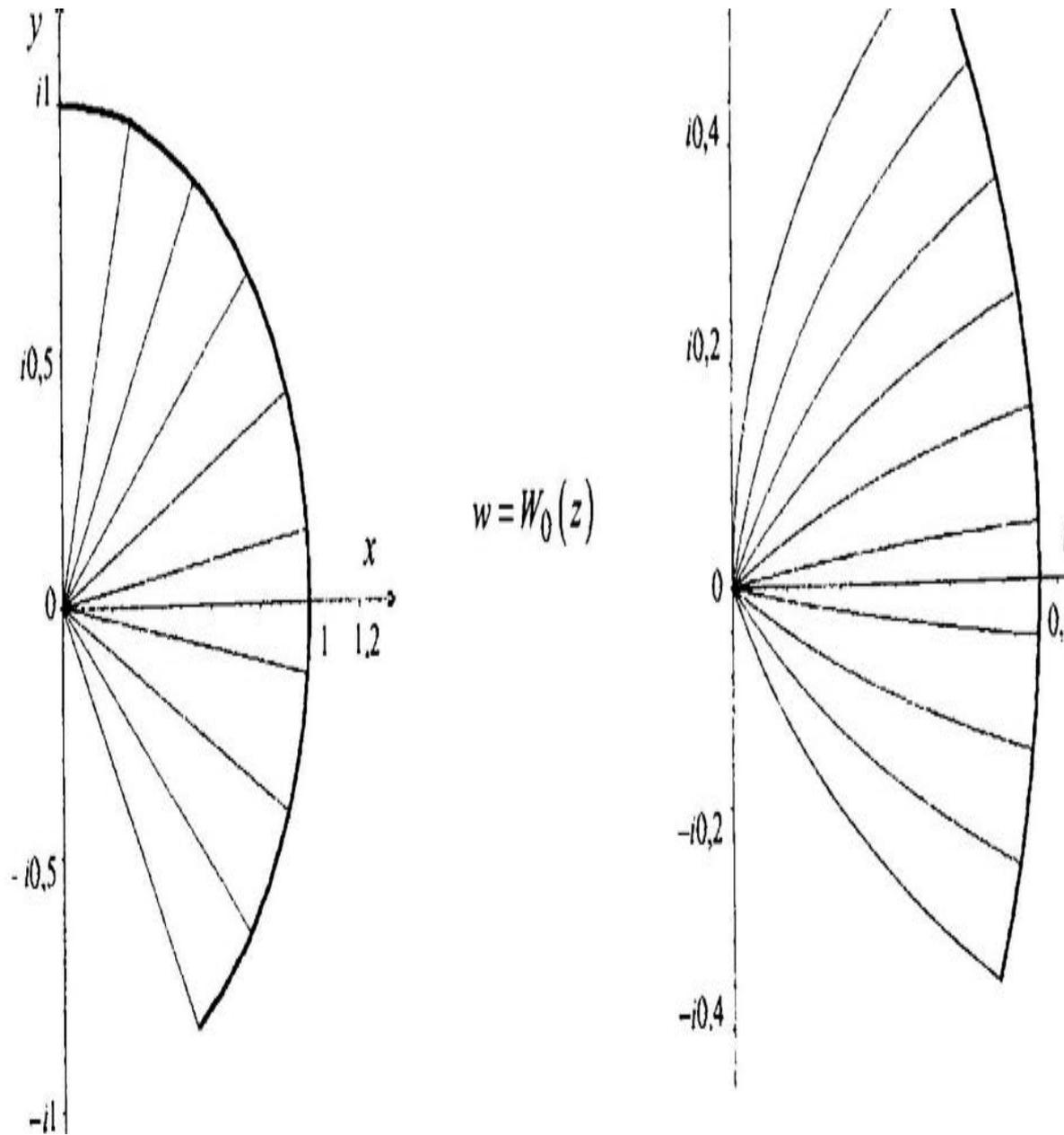


Рис. 9. Дія конформного відображення $w=W_0(z)$ на сектор:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

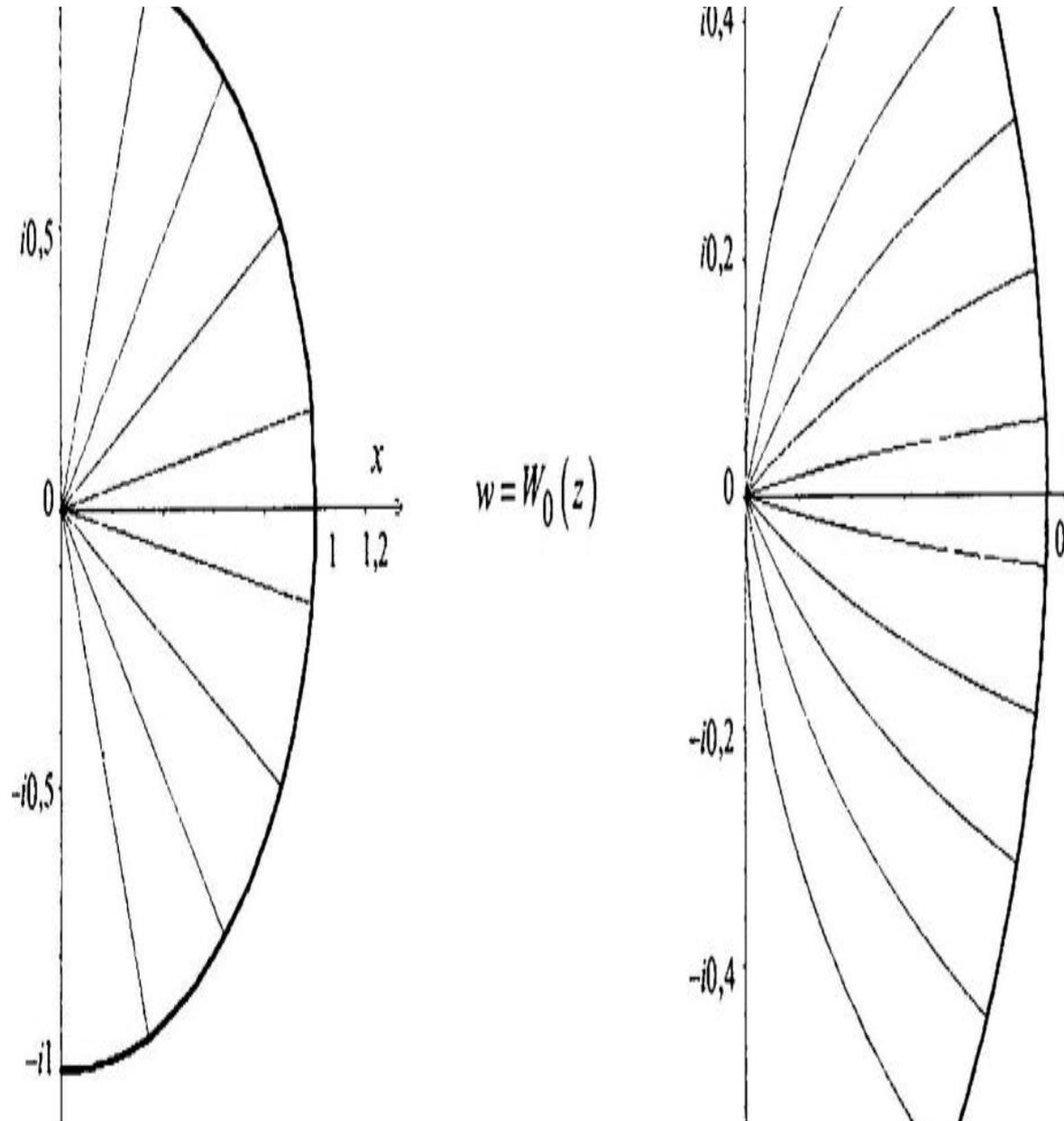


Рис. 10. Дія конформного відображення $w=W_0(z)$ на півкруг:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

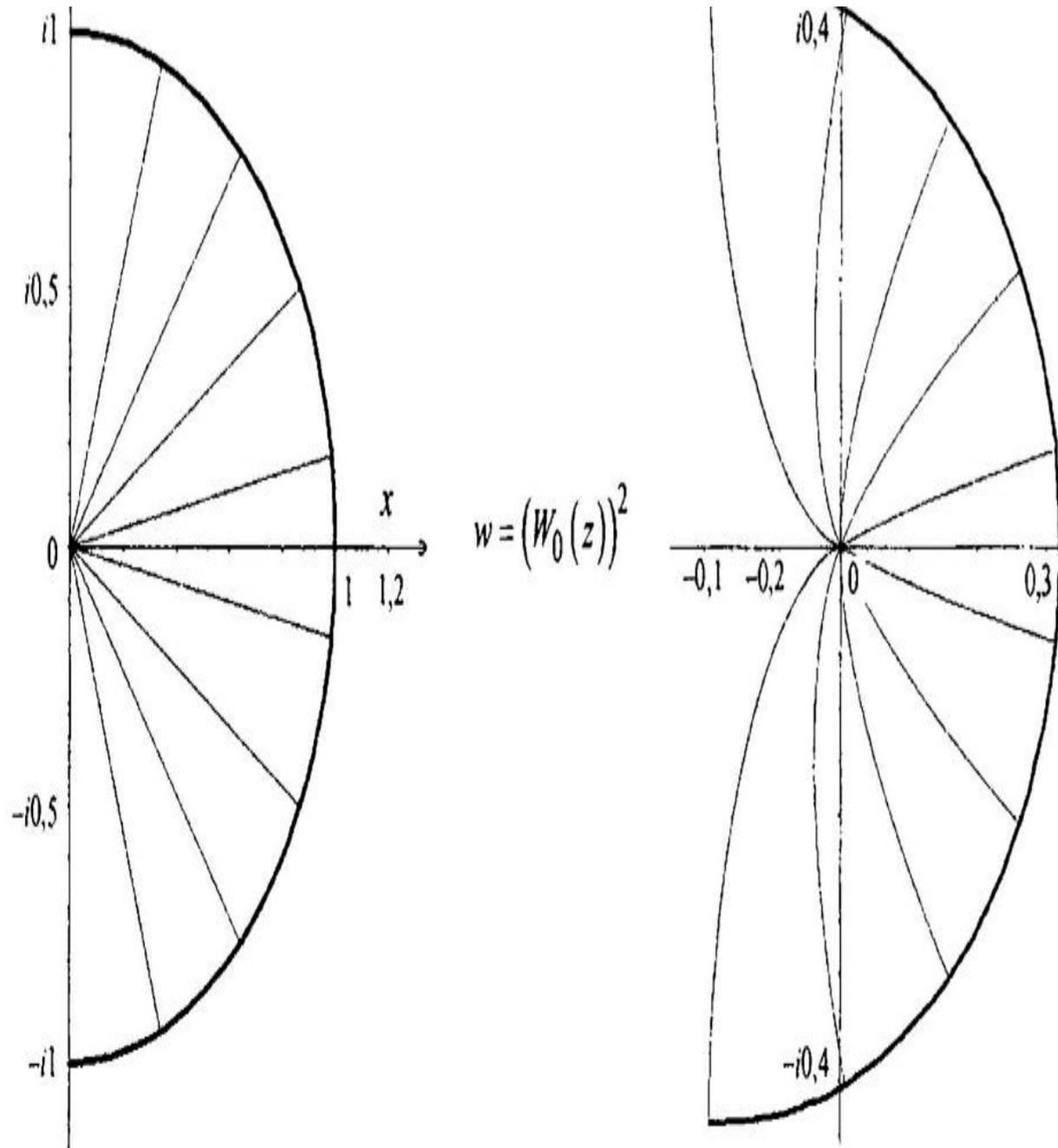


Рис. 11. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^2$ на півкруг:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

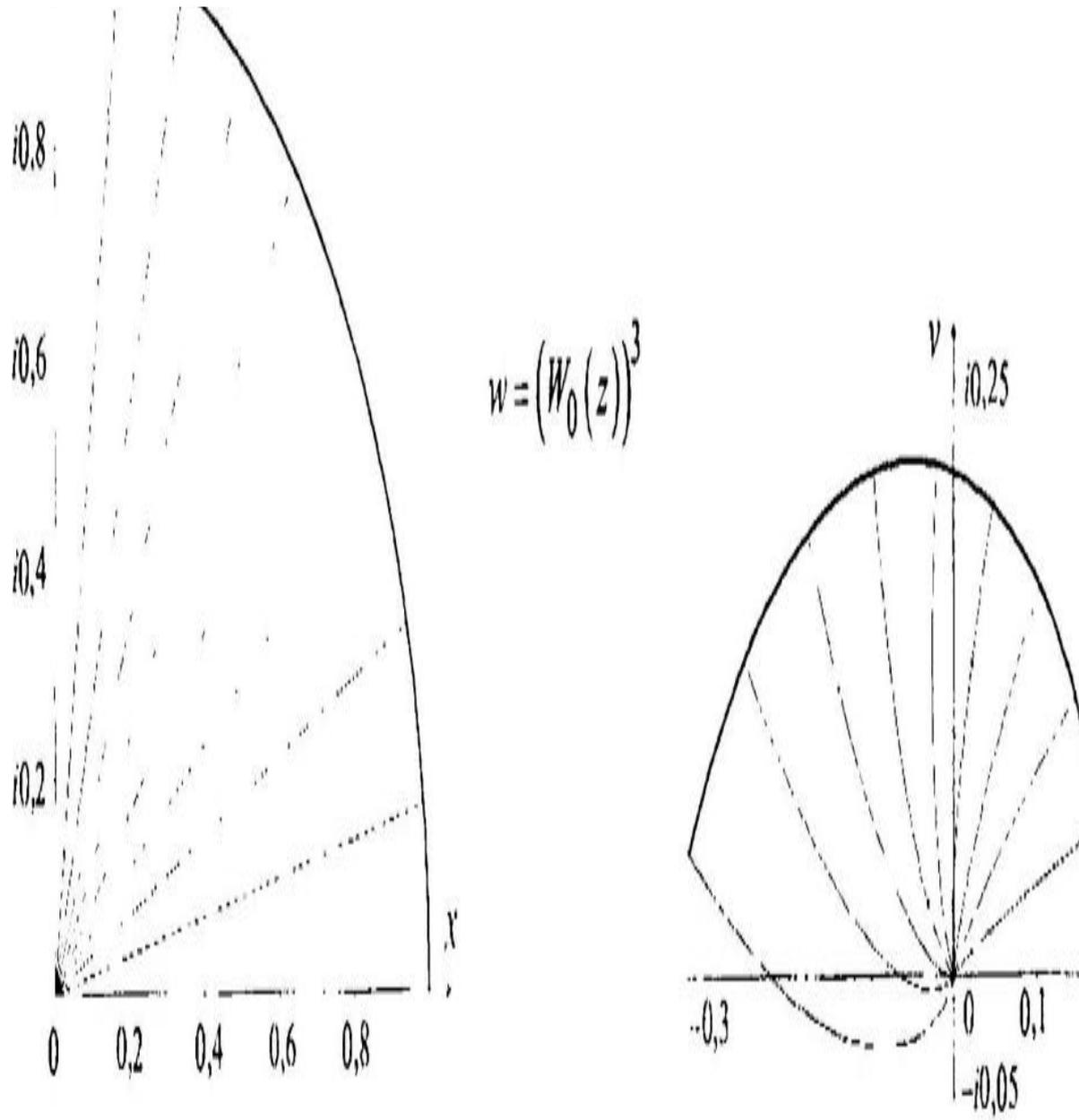


Рис. 12. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^3$ на сектор:
 а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

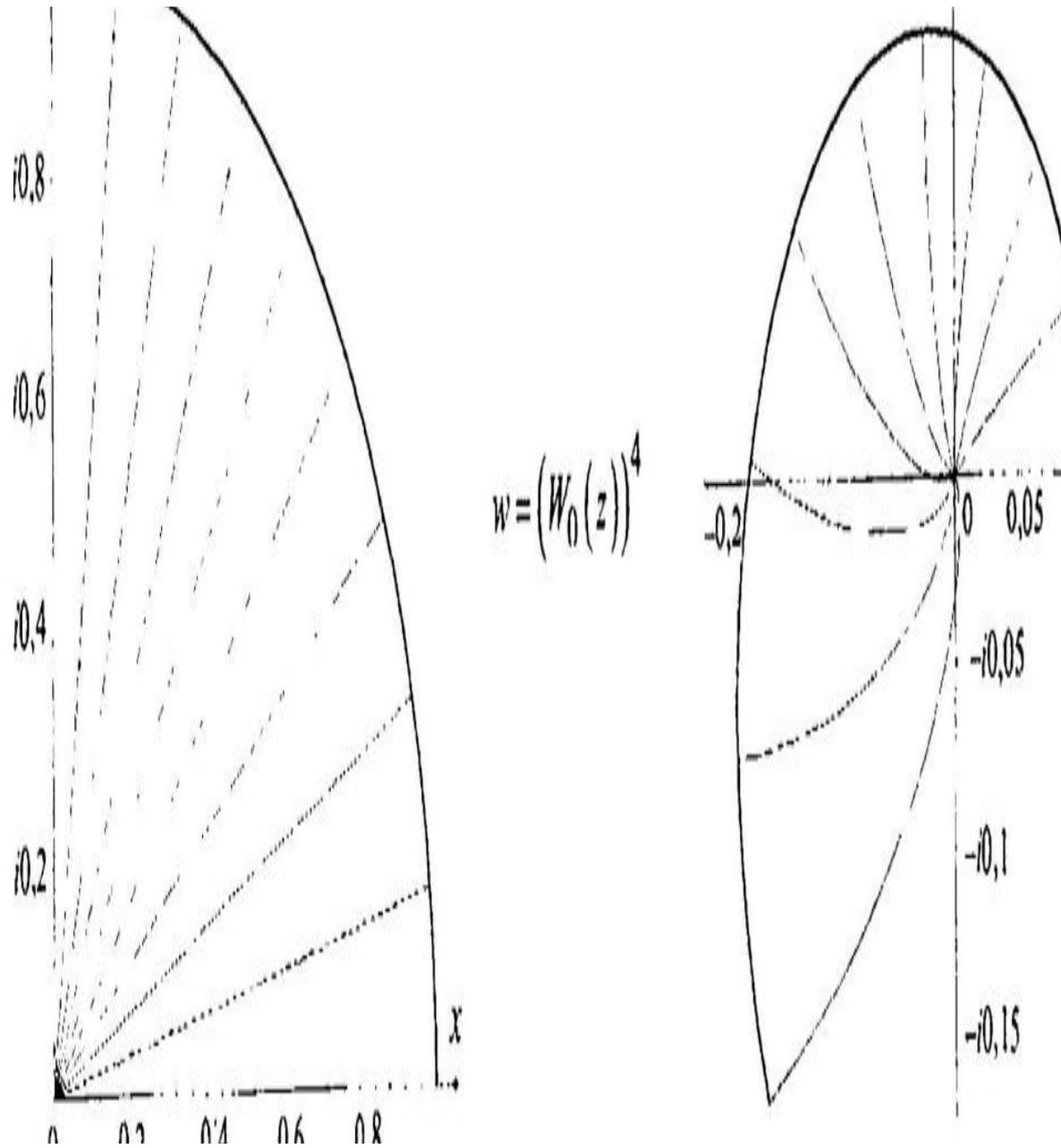


Рис. 13. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^4$ на сектор:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

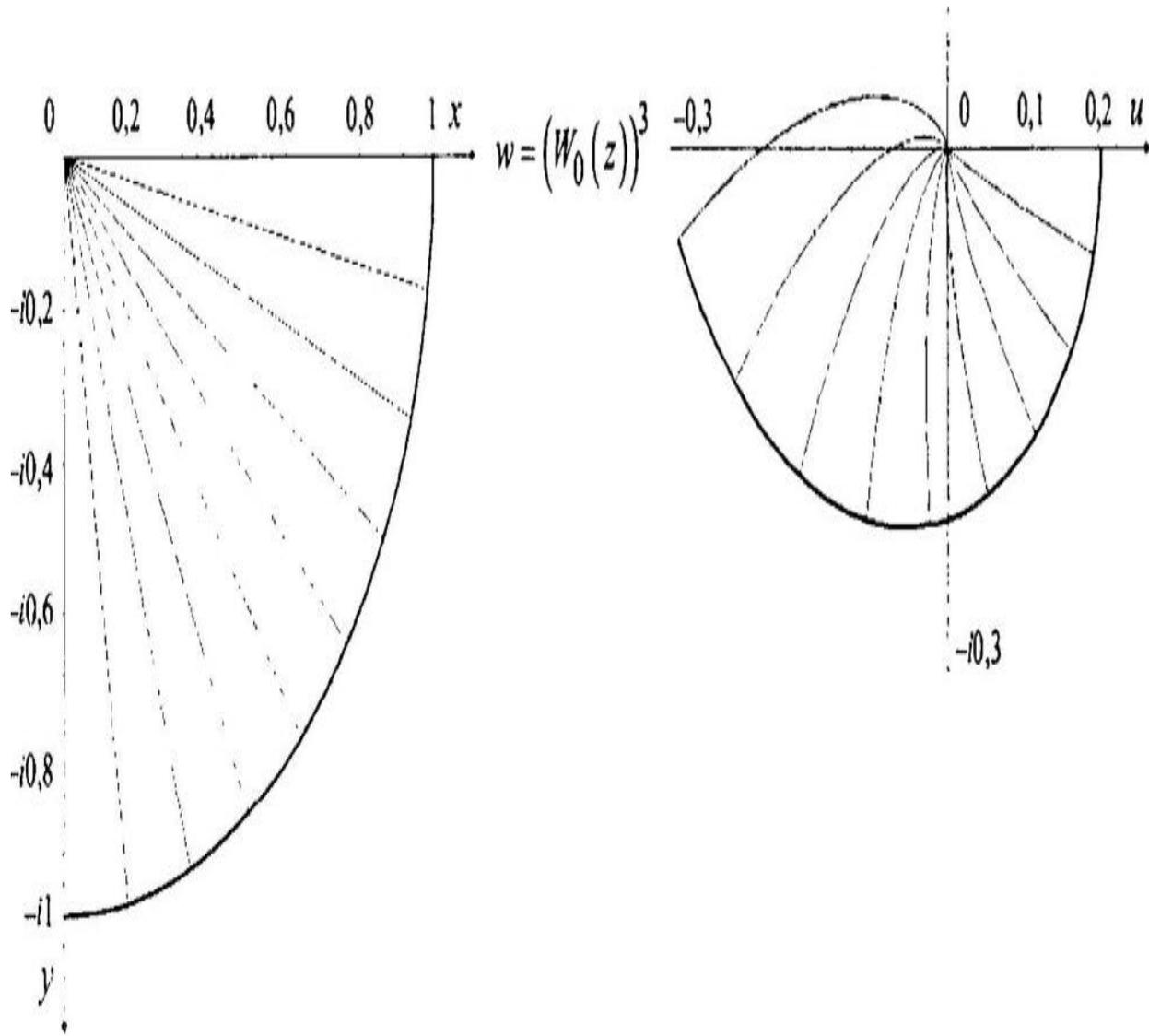


Рис. 14. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^3$ на сектор:
 а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

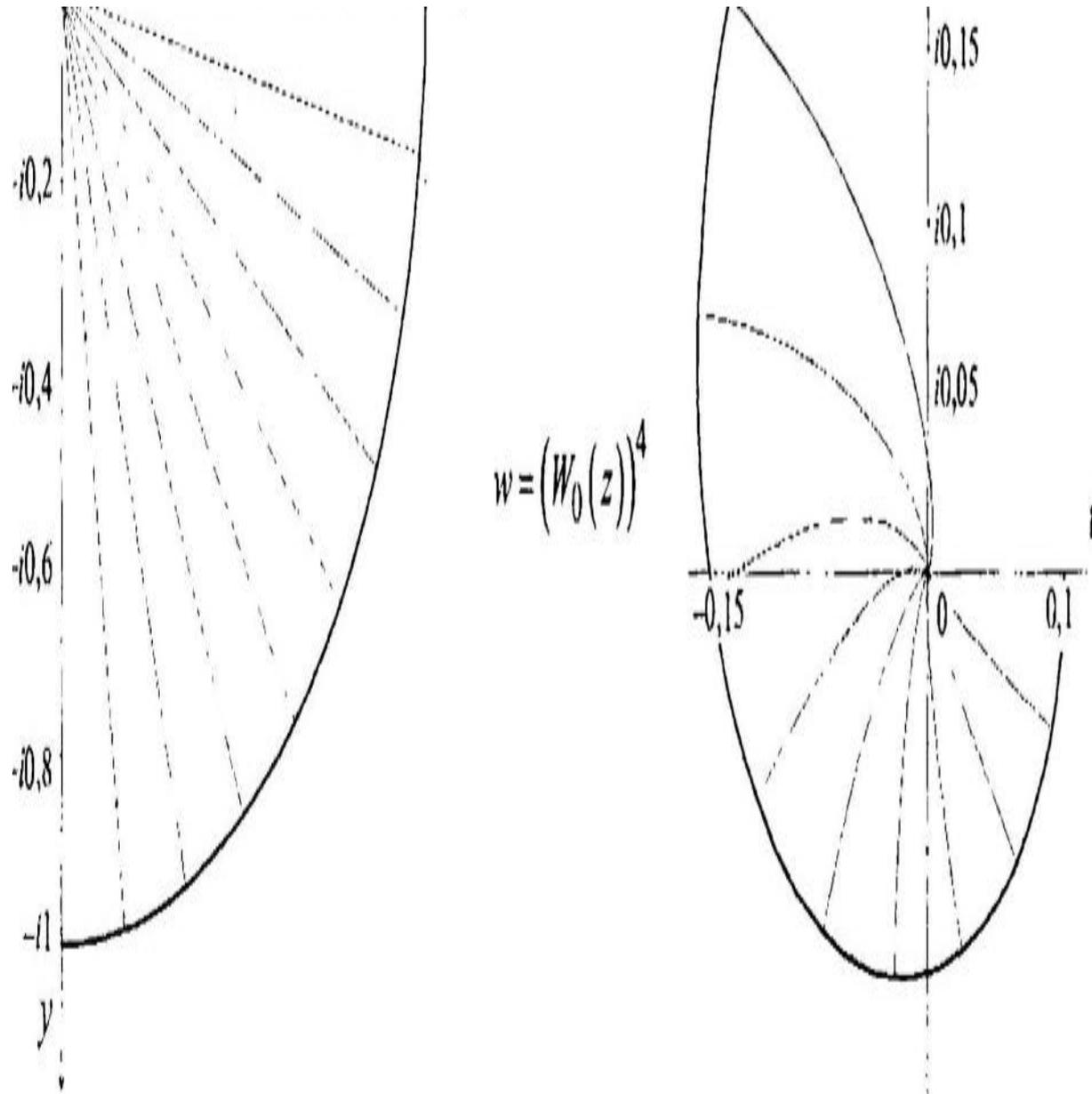


Рис. 15. Дія конформного відображення $w=(W_0(z))^4$ на сектор:
 а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

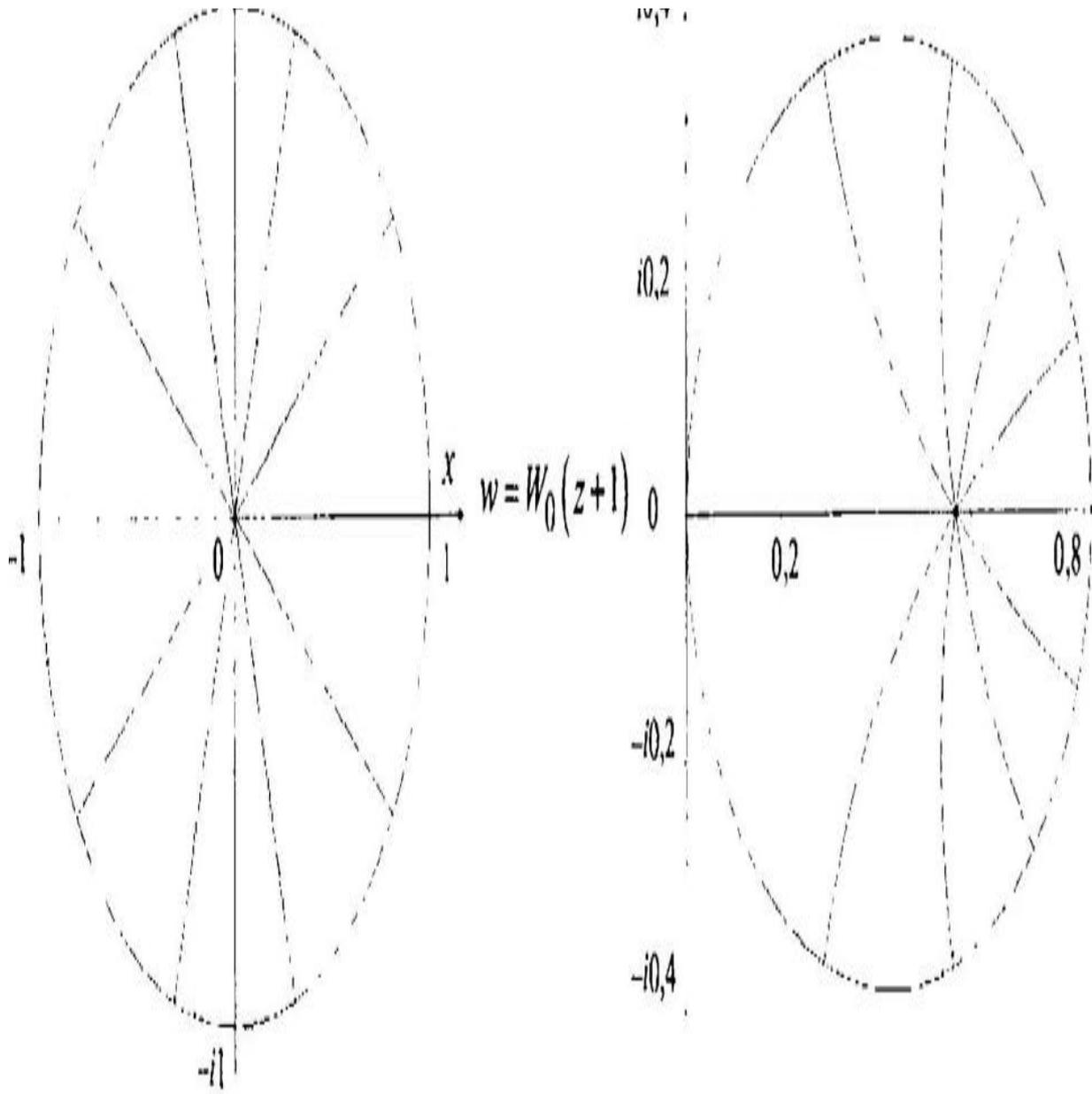


Рис. 16. Дія конформного відображення $w=W_0(z+1)$ на круг:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

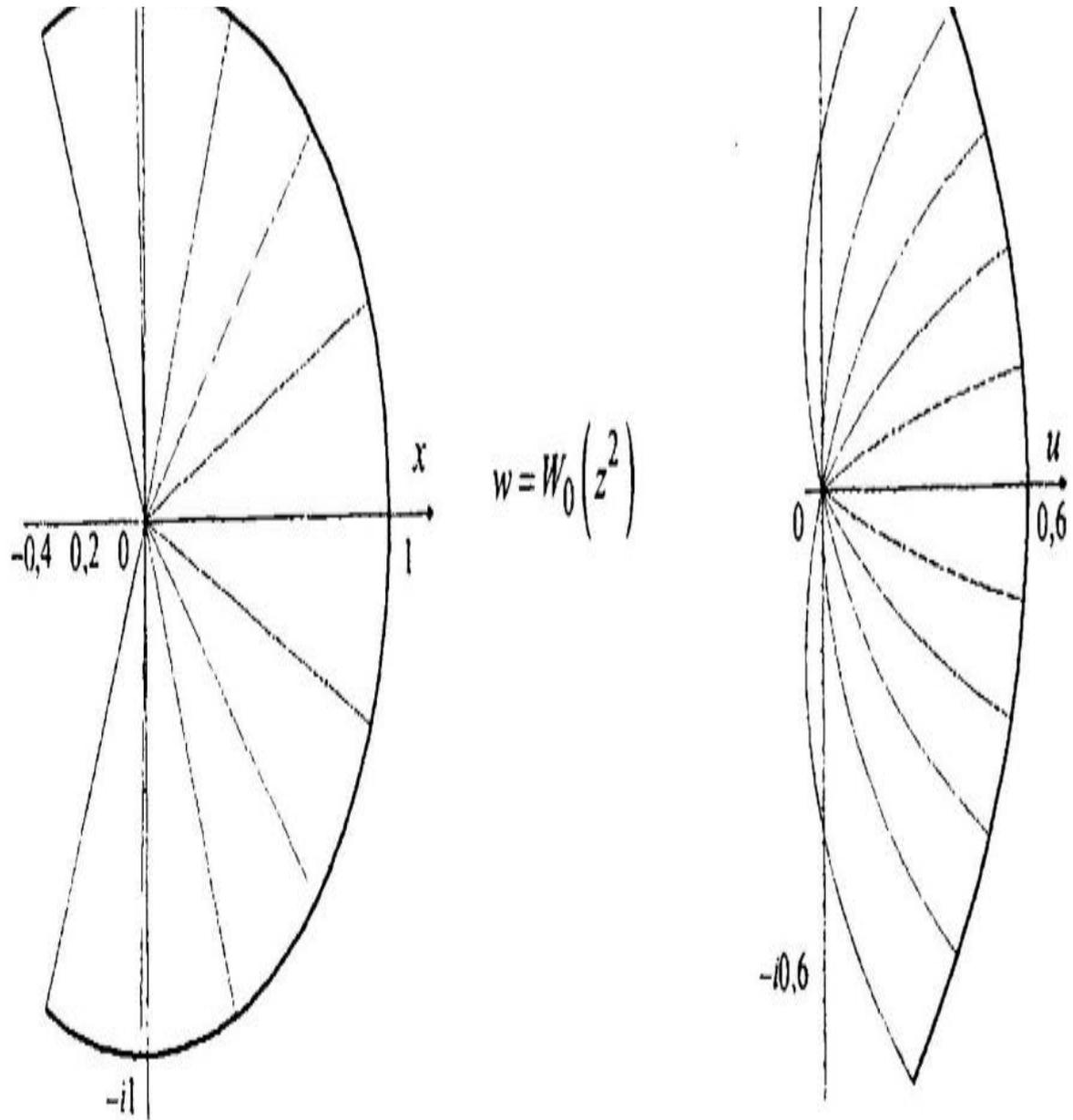


Рис. 17. Дія конформного відображення $w=W_0(z^2)$ на сектор:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

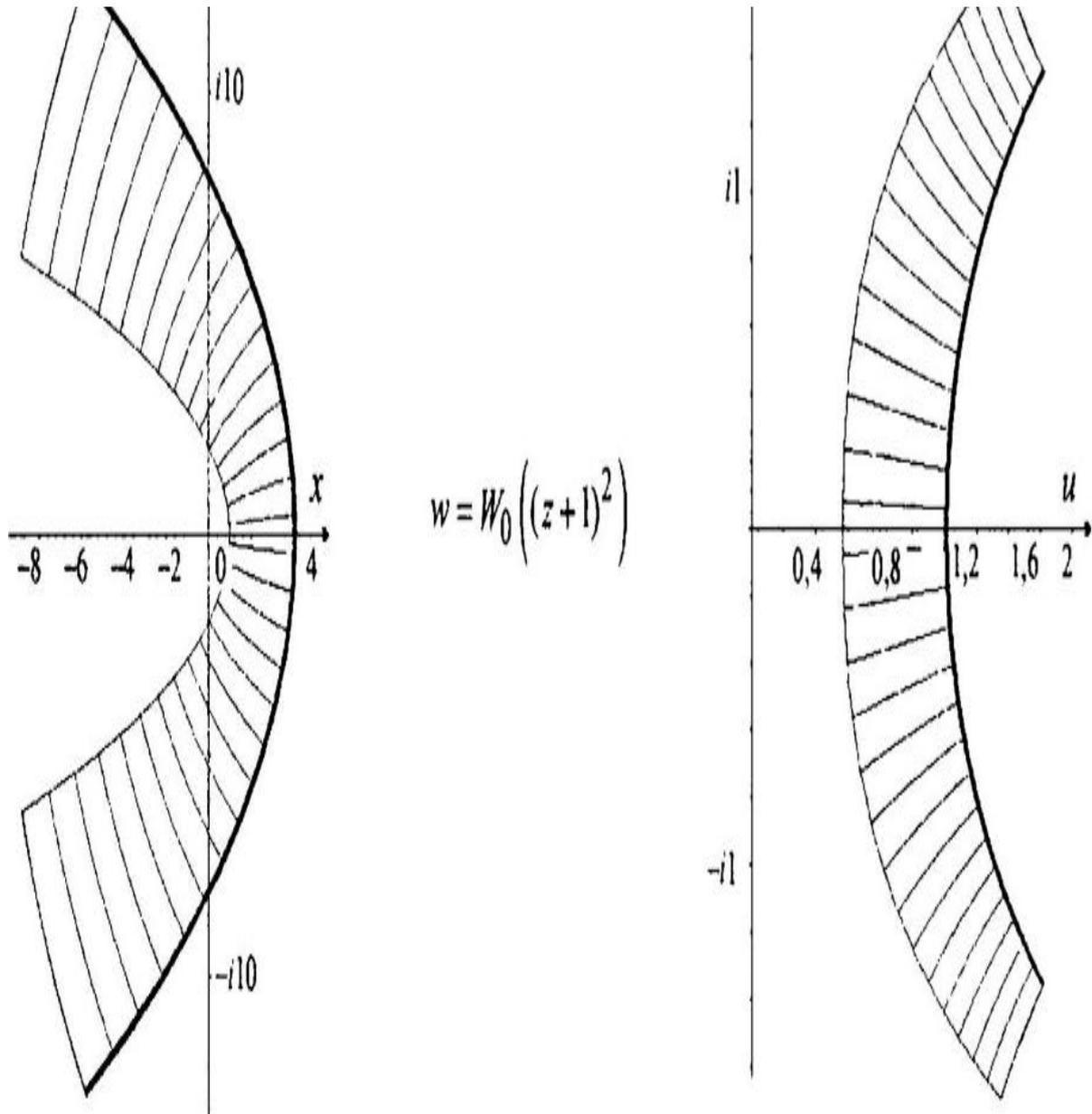


Рис. 18. Дія конформного відображення $w=W_0((z+1)^2)$ на заштриховану область: а – прообраз відображення (площина z);
б – образ відображення (площина w)

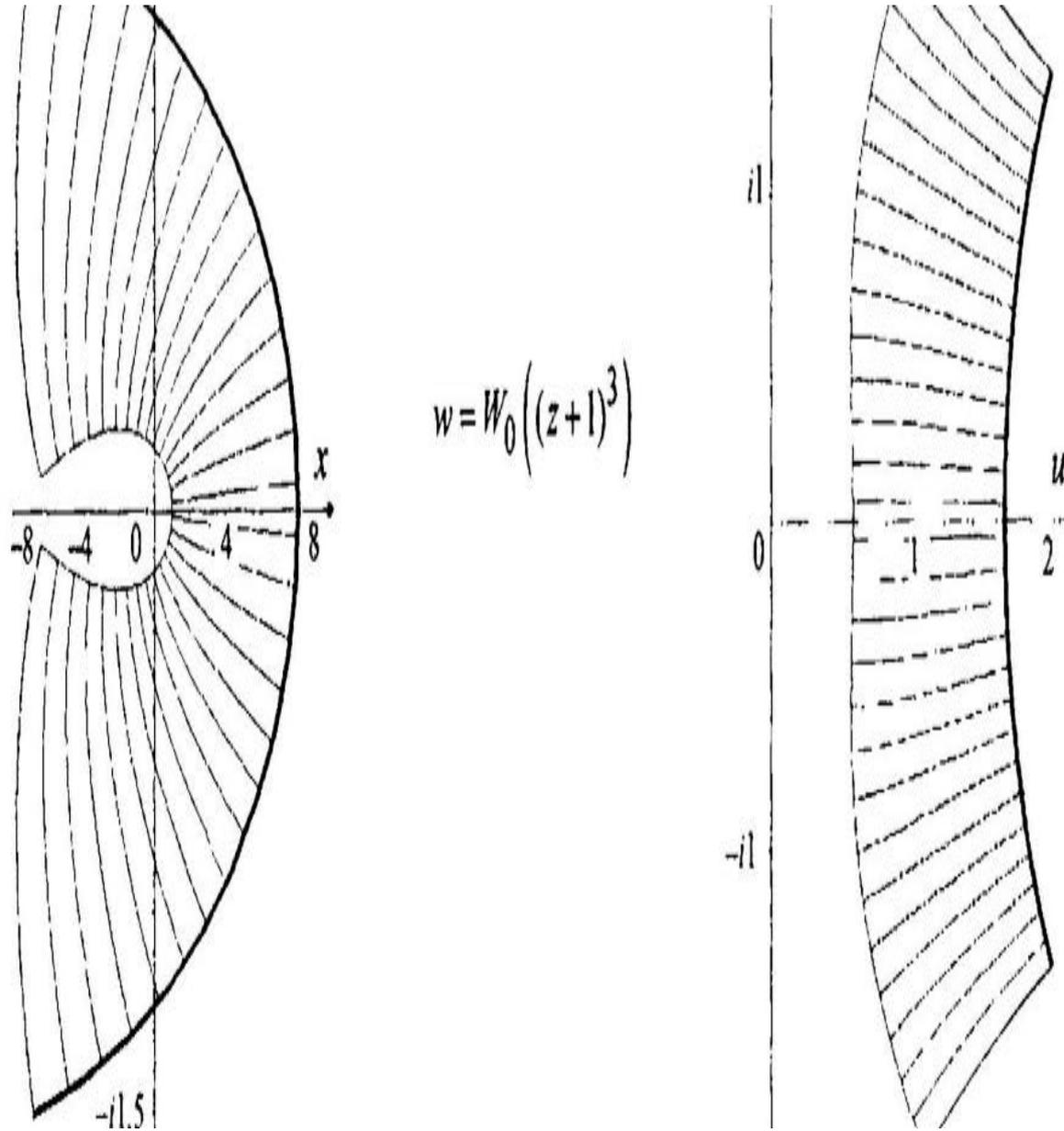


Рис. 19. Дія конформного відображення $w=W_0((z+1)^3)$ на заштриховану область: а – прообраз відображення (площина z);
б – образ відображення (площина w)

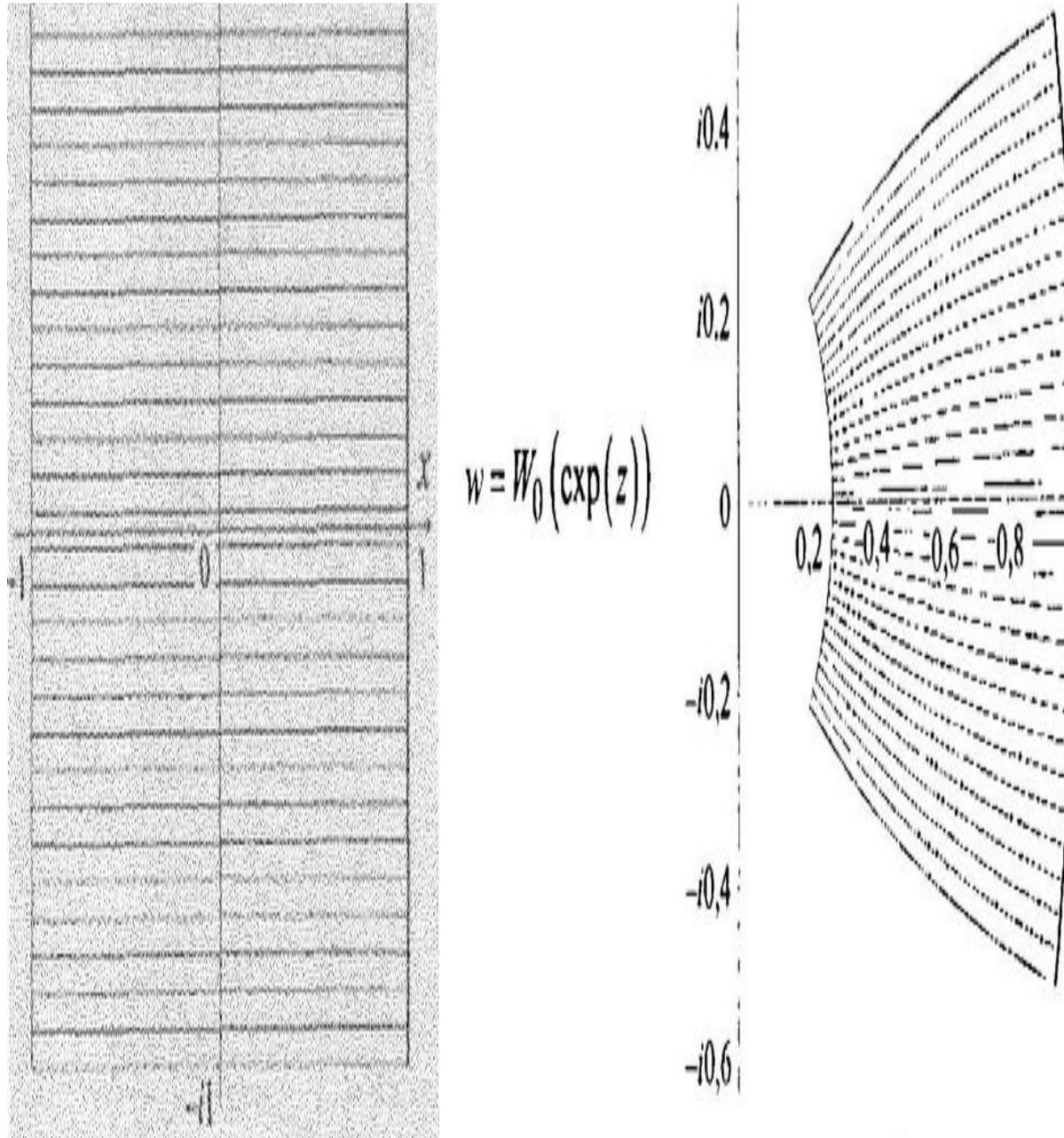


Рис. 20. Дія конформного відображення $w=W_0(e^z)$ на квадрат:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

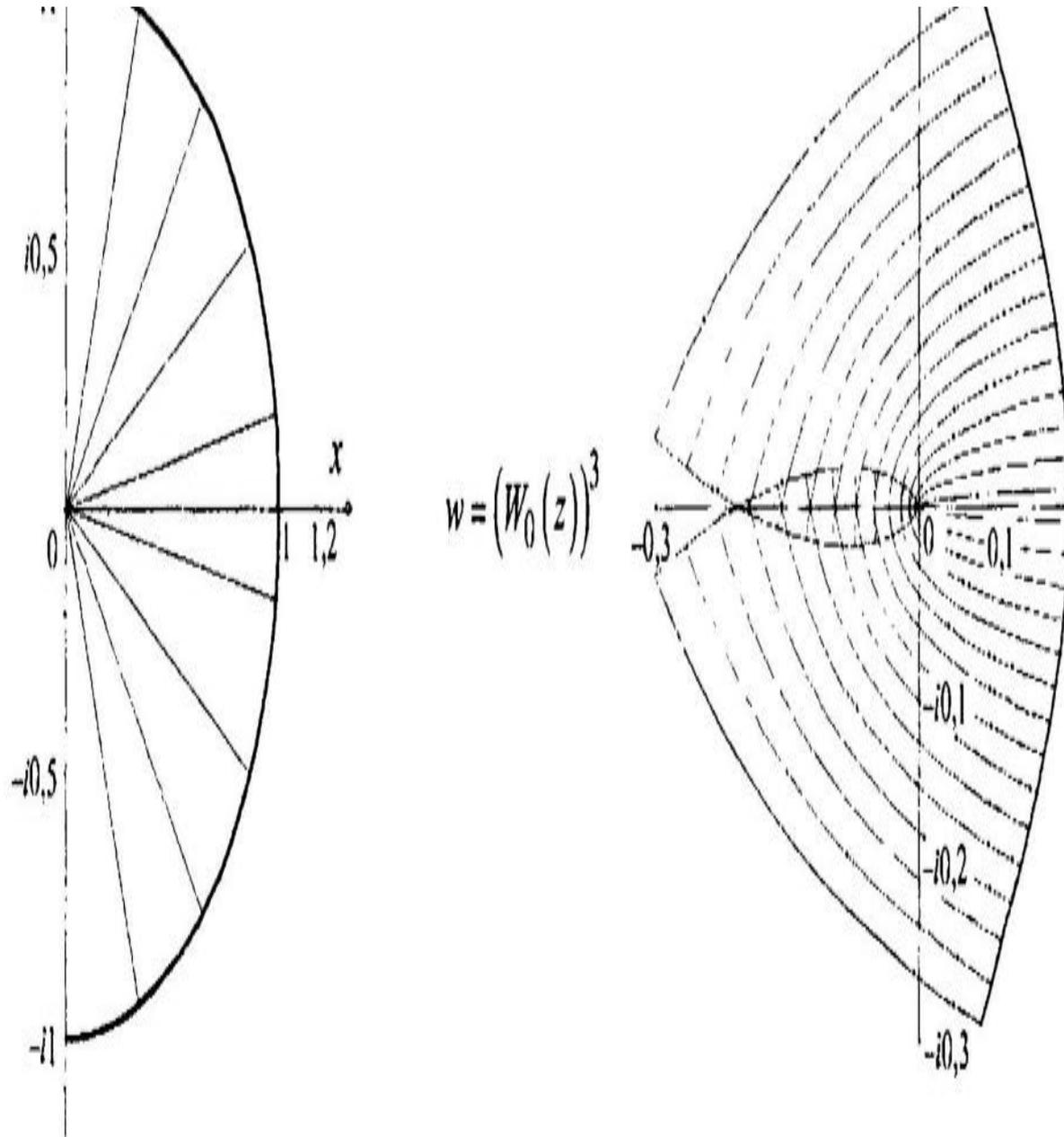


Рис. 21. Дія конформного відображення $w=W_0((z)^3)$ на півкруг:

а – прообраз відображення (площина z); б – образ відображення (площина w)

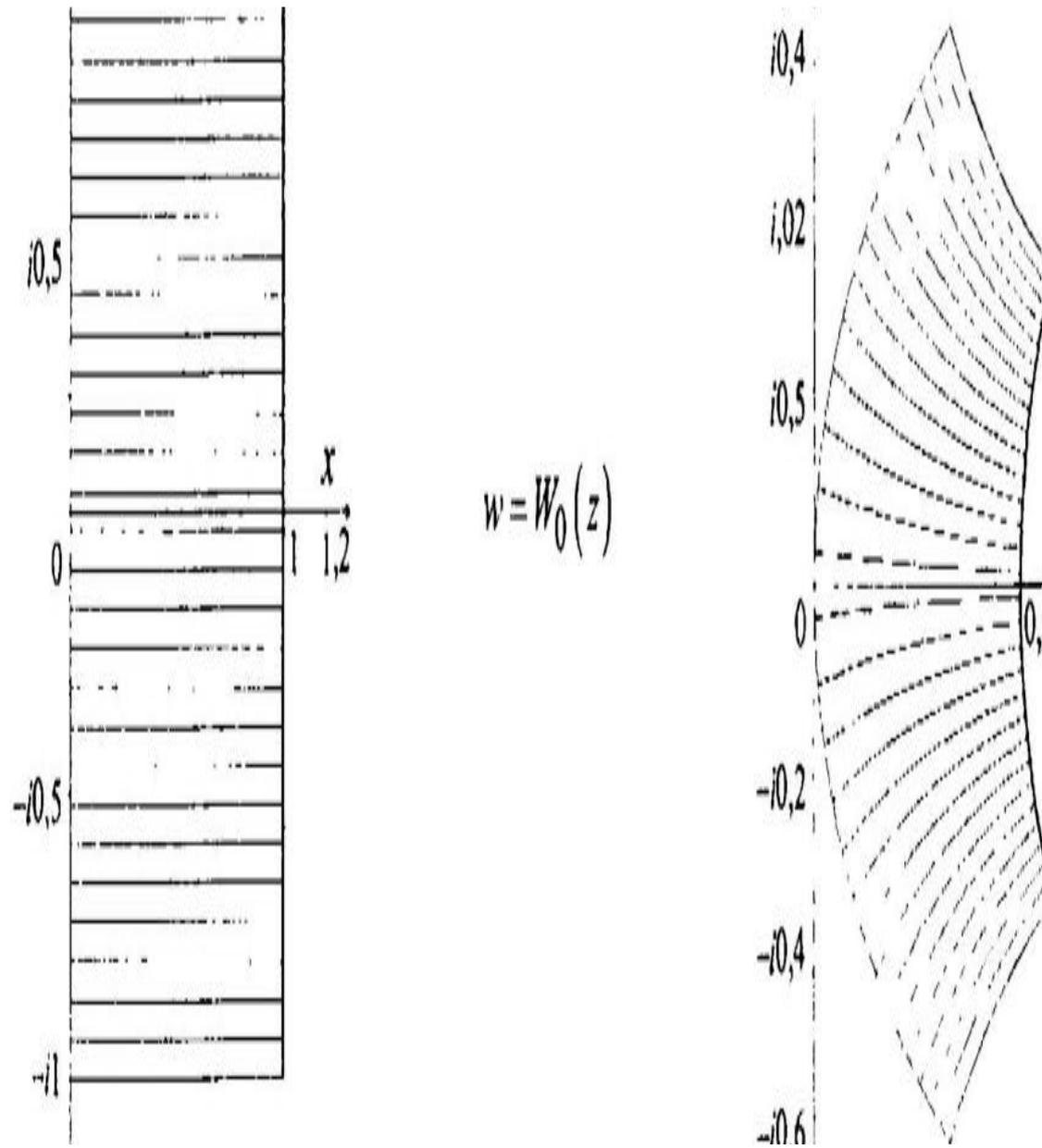


Рис. 22. Дія конформного відображення $w=W_0(z)$ на прямокутну область: а – прообраз відображення (площина z);
б – образ відображення (площина w)

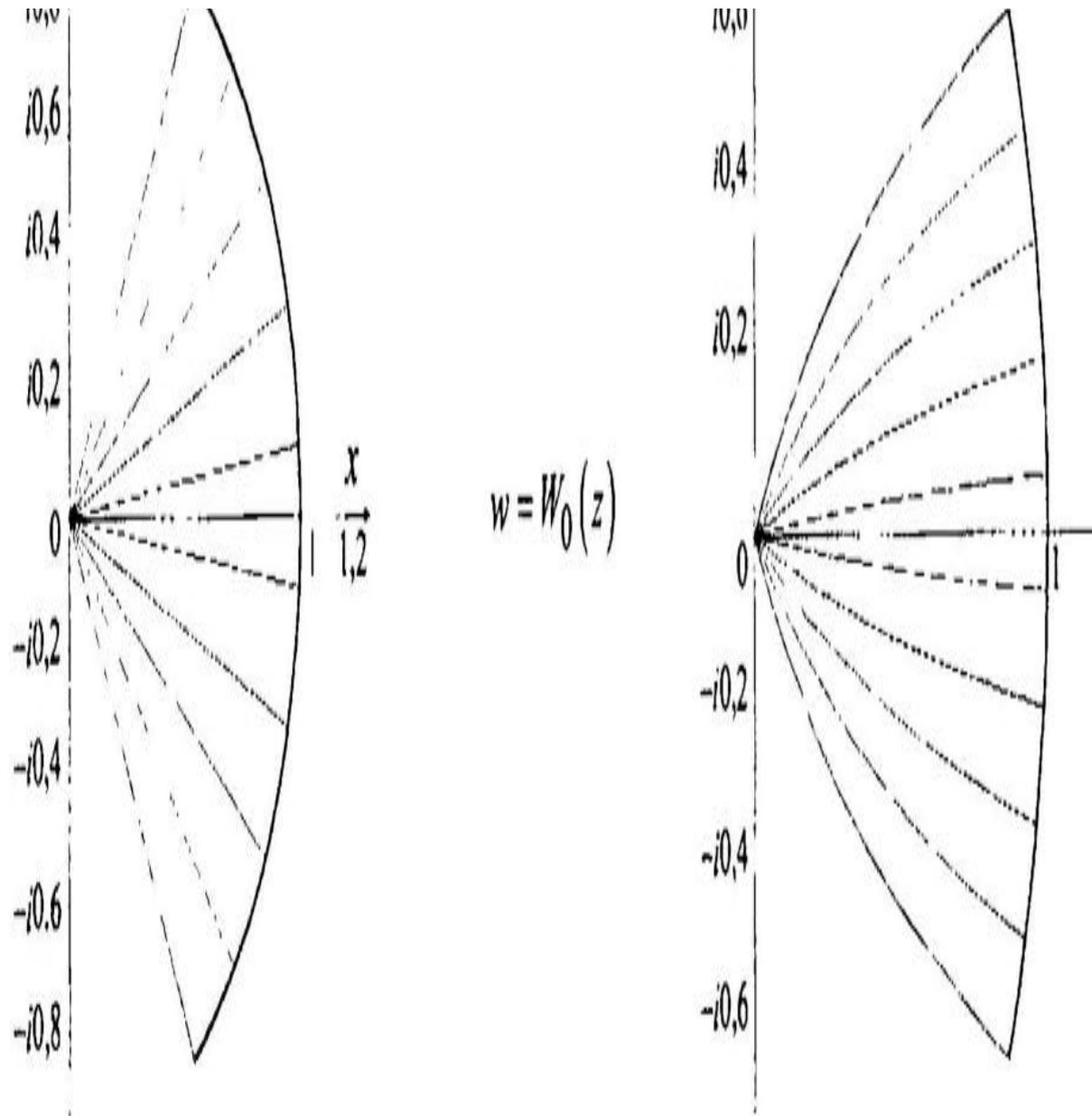


Рис. 23. Дія конформного відображення $w=W_0(z)$ на сектор:

а – прообраз відображення (площина z);

б – образ відображення (площина w)