

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

**Динамічні системи звичайних диференціальних рівнянь та їх
застосування**

Виконала: студентка II курсу магістратури, групи М-М-21

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Бульботка Тетяна Василівна

Керівник : д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	5
1.1. Основні поняття та визначення	5
1.2. Задачі, що призводять до диференціальних рівнянь першого порядку	6
1.3. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші.....	14
1.4. Загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь	17
1.5. Системи звичайних диференціальних рівнянь	21
РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНА СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	26
2.1. Класифікація динамічних систем	26
2.2. Геометричні інтерпретації динамічної системи	31
2.3. Граничні множини динамічної системи	33
2.4. Автоколивальні системи	35
2.5. Фазові портрети динамічних систем.....	37
2.6. Диференціальні рівняння, які відповідають динамічній системі.....	40
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	43
3.1. Застосування у фізиці	43
3.2. Застосування у біології.....	62
3.3. Застосування у економіці	65
3.4. Застосування у хімії	70
ВИСНОВКИ.....	73
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	74

ВСТУП

Теорія динамічних систем – це розділ математики, який займається проблемою аналізу систем, параметри яких змінюються з часом. Теорія динамічних систем як дисципліна є природним узагальненням вивчення класичної механіки та диференціальних рівнянь. Хоча теорія динамічних систем тепер є математичною дисципліною, спочатку вона була частиною фізики.

Багато економічних проблем неминуче динамічні за своєю природою. Наприклад, неможливо змоделювати теорію економічного росту, інфляції, витрат ресурсів без розгляду їх в часовому вимірі. Ці проблеми і багато інших досліджуються за допомогою динамічних систем.

Якщо системи не містять ймовірності, вони називаються детермінованими.

Існують моделі, в яких вважається, що зміна відбувається через регулярні визначені інтеграли часу такі, як рік, місяць, день. Такі зміни називаються дискретними.

У випадку неперервних динамічних систем модель складається із динамічних рівнянь, що описують неперервні зміни в часі. Залежно від кількості залежних змінних в моделі, можемо мати одне диференціальне рівняння (одна залежна змінна) або систему диференціальних рівнянь.

Слід зауважити, що великий внесок в розвиток теорії динамічних систем зробили М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольский, А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, О. М. Шарковський та інші вчені.

Таким чином тема «Динамічні системи звичайних диференціальних рівнянь та їх застосування» є актуальною і потребує детального дослідження.

Метою даної магістерської роботи є аналіз, узагальнення і систематизація матеріалів про динамічні системи звичайних диференціальних рівнянь.

З цією метою були поставлені такі **завдання** дослідження:

- дослідити навчальну літературу за темою дослідження;

- розглянути задачі, що призводять до диференціальних рівнянь;
- розглянути існування та єдиність розв'язку задачі Коші;
- дослідити системи звичайних диференціальних рівнянь;
- дослідити класифікацію динамічних систем;
- розглянути автоколивальні системи та фазові портрети;
- підібрати приклади застосування динамічних систем.

Об'єктом дослідження є динамічні системи звичайних диференціальних рівнянь.

Предметом дослідження є система задач, яка спрямована на формування вміння розв'язувати задачі на застосування динамічних систем.

Апробація результатів дослідження. За результатами роботи було підготовлено доповідь на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2023 рік.

Також за результатами проведених досліджень було опубліковано тези доповіді на IV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Експериментальні та теоретичні дослідження в контексті сучасної науки» (м. Чернігів, 29 вересня 2023 року).

Структура роботи. Структурно робота складається з трьох розділів, які поділяються на підрозділи, висновки та список використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 75 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. Основні поняття та визначення

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Тут x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – невідома функція аргументу x ; $F(x, y, y')$ – задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$.

Рівняння (1.1) не розв'язане відносно похідної, а рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

де $f(x, y)$ – задана функція двох змінних, називається диференціальним рівнянням першого порядку, що розв'язане відносно похідної. Часто зустрічається і такий запис диференціального рівняння першого порядку

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Тут $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції змінних x і y .

Розв'язком функціонального рівняння (1.1) або (1.2) на інтервалі I називається неперервно диференційована функція $y = \varphi(x)$, що перетворює це рівняння в тотожність на I , тобто

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0 \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))\right)$$

для всіх $x \in I$. Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називається розв'язком рівняння (1.2) в неявній формі (або інтегралом рівняння (1.2)), якщо воно визначає у як функцію від x : $y = \varphi(x)$ яка є розв'язком рівняння (1.2).

Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2) називають інтегральною кривою цього рівняння. проекція графіка розв'язку на вісь ординат називається фазовою кривою (або траєкторією) диференціального рівняння [21].

Задача про знаходження розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2), що задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, називається задачею Коші.

Через кожну точку (x, y) із області визначення рівняння (1.2) проведемо пряму, тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $f(x, y)$. Ця сукупність прямих називається полем напрямку, що відповідає рівнянню (1.2) (або полем напрямку функції $f(x, y)$).

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямку функції $f(x, y)$. Будь-яка крива, що дотикається в кожній своїй точці напрямку, що є в цій точці, є інтегральною кривою.

Ізокліною називається крива, в усіх точка якої є напрямок поля однаковий. Усі інтегральні криві, що перетинають дану ізокліну криву, в точках перетину нахилені до осі абсцис під одним і тим же кутом [25].

1.2. Задачі, що призводять до диференціальних рівнянь першого порядку

Скласти диференціальне рівняння, що буде описувати вивчений еволюційний процес або залежність між характеристиками досліджуваного явища, часто дуже складно. Універсального методу складання диференціального рівняння не існує, тому можна дати тільки загальні вказівки.

Нехай $y = y(x)$ – шукана залежність між характеристиками x і y досліджуваного процесу. При складанні диференціального рівняння, розв'язком якого є функція $y(x)$ необхідно виразити, на скільки зміниться ця функція, коли незалежна змінна x отримає приріст Δx , тобто виразити різницю $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величини, про які говориться в задачі. Поділивши цю різницю на Δx і перейшовши до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ отримає диференціальне рівняння, тобто залежність швидкості зміни величини y в точці x (похідної $y'(x)$ від x і $y(x)$). В багатьох випадках вказана залежність визначається на основі закону або експериментального факту, що вставлений в тій чи іншій області науки. При цьому, зокрема, використовується геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) і її фізичний зміст (швидкість перебігу процесу) [21].

При розв'язуванні деяких задач утворюються рівняння, в яких невідома функція входить під знак інтегралу. Такі рівняння називають інтегральними. Вони виникають при використанні геометричного змісту певного інтегралу як площі криволінійної трапеції та інших інтегральних формул (довжина дуги кривої, площа поверхні і об'єм тіла обертання тощо). В простіших випадках вдається шляхом диференціювання перетворити інтегральні рівняння в диференціальні.

До диференціальних рівнянь приводять багато завдань механіки, фізики, астрономії та інших наук, а також багато проблем техніки.

Приклад 1 (поле швидкостей). Нехай тіло рухається на площині і в кожній точці відома його швидкість $v = (a(x, y), b(x, y))$. Як за цими даними встановити траєкторію тіла?

Нехай шукана траєкторія задається параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

де t – час. Оскільки швидкість руху по кривій – це похідні координат по параметру, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y).$$

Наприклад, якщо $a = \frac{k^2}{x}$, $b = -\frac{k^2}{y}$, то тіло буде рухатися по еліпсам

$$\frac{x^2}{2k^2} + \frac{y^2}{2l^2} = \text{const},$$

а в випадку $a = \frac{k^2}{x}$, $b = -\frac{k^2}{y}$ траєкторія будуть гіперболи

$$\frac{x^2}{2k^2} - \frac{y^2}{2l^2} = \text{const}.$$

У випадку довільних a і b , неможливо знайти загальної формули для розв'язків, але для деяких функцій можна довести, що розв'язки існують.

Приклад 2 (рух в полі сили). Нехай в кожній точці площини прикладена сила $F = (f(x, y), g(x, y))$. Тоді рух матеріальної точки маси під дією сили F підпорядковується другому закону Ньютона $F = ma$, де a – прискорення.

Оскільки вектор прискорення є друга похідна радіус-вектора точки (похідна швидкості за часом), рівняння руху запишуться у вигляді

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x, y), m \frac{d^2y}{dt^2} = f(x, y).$$

Наприклад, якщо матеріальне тіло рухається в гравітаційному полі, джерелом якого є тіло з масою M , що значно перевищує m , і знаходиться в початку координат, за законом всесвітнього тяжіння рівняння руху будуть мати вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

де γ – гравітаційна стала. Якщо маси тіл, що рухаються можна порівняти за величинами, то рівняння руху стану більш складними і будуть містити чотири невідомі функції.

Приклад 1.3 (закон Гука). Цей закон голосить, що сила реакції пружини (сила пружності) пропорціональна довжині її розтягу. Нехай вся маса пружини зосереджена на однім з її кінців і рівна m . Якщо пружину прив'язати іншим кінцем до початку координат і розтягувати вздовж осі направо, то із другого закону Ньютона слідує, що

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, k > 0.$$

Будь-який розв'язок рівняння має вигляд

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

де A і B – довільні сталі. Ці сталі можна знайти, якщо знати, наприклад становище і початкову швидкість першого кінці.

Приклад 4. Якщо тіло кинуте в повітря і опором повітря можна знехтувати, то рівнянням руху є

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

де g – швидкість вільного падіння. Розв'язок цієї системи має вигляд

$$x = at + \beta, y = -\frac{1}{2}gt^2 + \gamma t + \delta,$$

де грецькими літерами позначені довільні сталі.

Приклад 5. Знайти рівняння кривої лінії, у якої відрізок дотичної, укладений між осями координат, ділиться навпіл у точці дотику.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ точка дотику. Так як $y'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу до осі OX дотичної, проведеної в точці $(x, y(x))$ кривої, то рівняння дотичної буде наступною

$$Y - y = y'(X - x).$$

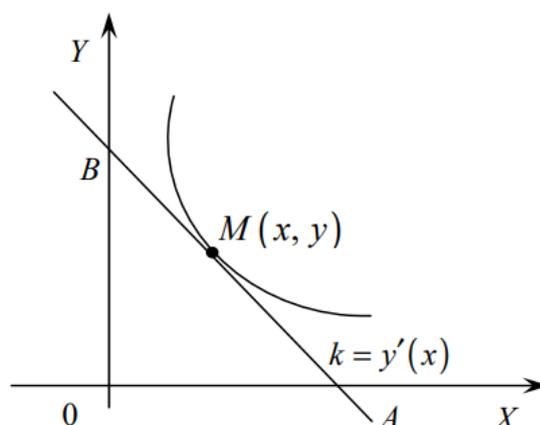


Рис. 1.1. Крива лінія і дотична

Нехай $X = 0$, тоді $OB = Y = y - xy'$ і точка B має координати $(0, y - xy')$. За умовою точка дотику ділить відрізок AB навпіл, тому

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Остання рівність має вигляд

$$y = \frac{0 + y - xy'}{2} \Rightarrow 2y = y - xy' \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}, y = y(x).$$

Дані співвідношення є прикладом диференціального рівняння. Воно містить поруч з невідомою функцією y і похідну y'

Функцію $y = y(x) \neq 0$ із рівняння можна легко знайти:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

де C – довільна стала (стала інтегрування), зручно взяти її у вигляді $\ln C$. Тоді

$$y = \frac{C}{x}.$$

Зауважимо, що рівняння $y = y(x)$ задовольняє ціле сімейство кривих $y = \frac{C}{x}$, що залежать від параметра C . Щоб виділити яку-небудь одну криву з сімейства $y = \frac{C}{x}$ потрібна вказати константу C . Для цього достатньо задати на площині XOY точку (x_0, y_0) через яку ця крива проходить. Тоді сталу C , що відповідає цій кривій, знайдемо, поклавши в рівності $y = \frac{C}{x}, y = y_0$ при $x = x_0$. Нехай $y = 2$, при $x = 1$, тоді

$$2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, шукана крива сімейства $y = \frac{C}{x}$, проходить через точку $(1, 2)$, визначається рівністю

$$y = \frac{2}{x}.$$

Приклад 6. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Визначити закон руху, припускаючи, що тіло рухається тільки під впливом сили тяжіння.

Розв'язання. Під впливом сили тяжіння тіло рухається з постійним прискорення g . З огляду на те, що прискорення виражається похідною другого порядку від шляху по часу, із $F = ma \Rightarrow m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -g$.

Отримали диференціальне рівняння, що містить похідну 2-го порядку.

Інтегруючи двічі, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -gt + C_1, \\ S &= -g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Сталі C_1 і C_2 визначимо з початкових умов.

Так як відлік шляху ведеться від початкового моменту, то при $t = 0, S = 0$, а отже, $C_2 = 0$.

Так як при $t = 0$ початкова швидкість $v_0 = \frac{ds}{dt}$, то отримаємо $C_1 = v_0$.

Отже, залежність пройденого тілом шляхом S від часу t

$$S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Приклад 7. Швидкість знецінення обладнання внаслідок його зношення пропорціональна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість рівна A_0 . Знайти вартість обладнання за пройдений час T .

Розв'язання. Нехай $A = A(t)$ – вартість обладнання в будь-який момент часу t . Тоді $\frac{dA}{dt}$ – швидкість знецінення обладнання внаслідок його зношення. Із умови задачі слідує, що

$$\frac{dA}{dt} = -kA,$$

де k – коефіцієнт пропорційності, взятий зі знаком мінус, так як швидкість спадає.

$$\text{Звідси слідує } \frac{dA}{A} = -k dt \Rightarrow \ln|A| = -kt + \ln C \Rightarrow \ln|A| = \ln e^{-kt} + \ln C.$$

Внаслідок потенціювання, отримаємо $A = C \cdot e^{-kt}$.

Початкова умова: при $t = 0, A = A_0$, тому $A_0 = C \cdot e^{-kt}, C = A_0$. Підставляючи $C = A_0$ в останню рівність, отримаємо $A = A_0 e^{-kt}$.

Щоб знайти вартість обладнання за пройдений час T , підставляємо в останню рівність $t = T$:

$$A = A_0 e^{-kt} = \frac{A_0}{e^{kT}}.$$

Приклад 8. Через 12 годин після початку експерименту численність деякої популяції бактерій виросла в 3 рази. В скільки раз збільшиться число бактерій через три доби? Швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості.

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – кількість бактерій в момент часу t . Швидкість їх розмноження (змінення їх кількості в момент часу) є похідною $x'(t)$. Звідси отримаємо диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = kx$, де k – деякий коефіцієнт, поки що невідомий. Решта це рівняння, отримаємо $x = C e^{kt}$. Нехай початкова кількість бактерій дорівнює N (в принципі, ніщо не заважає рахувати цю кількість

рівною одиниці). Підставляючи $t = 0$, отримаємо $C = x(0) = N$. Після цього підставимо $t = 12$. Отримаємо $Ne^{12k} = 3N$, звідки $e^{12k} = 3$. Отже, $x(72) = Ne^{72k} =$
 $= N(e^{12k})^6 = 3^6 \cdot N = 729N$.

Відповідь: кількість бактерій зростає в 729 раз.

Приклад 9. Куля, рухається зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с. пробиває стіну товщиною $h = 0,2$ м і вилітає з неї зі швидкістю $v_1 = 100$ м/с. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час T руху кулі в стіні.

Розв'язання. Другий закон Ньютона стверджує, що сума сил, що діють на тіло, векторно дорівнює прискоренню тіла, помноженому на його масу. Прискорення тіла є $w = \frac{dv}{dt}$. В даному випадку на кулю діє сила опору $F_c = -kv^2$ (знак «-» відповідає напрямку сили опору). Крім того, на неї діє сила тяжіння mg , якою в даний момент часу можна знехтувати. Отже, рівняння руху кулі матиме вигляд $m \frac{dv}{dt} = -kv^2$. Маса кулі можна вважати одиничною (а можна вважати, що коефіцієнт опору дорівнює k/m) Тому запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Розв'язавши його, отримаємо $\frac{1}{v} = kt + C$, звідки $v = \frac{1}{kt+C}$. Підставимо $t = 0$, отримаємо $\frac{1}{C} = v_0$. Після цього, підставимо $t = T$, отримаємо $\frac{1}{kT + \frac{1}{v_0}} = v_1$, звідки $kT = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}$. Залишилось визначити величину k . Шлях, пройдений кулею в стіні, дорівнює $\int_0^T v(t)dt$. Знайдемо цей інтеграл:

$$\int_0^T \frac{dt}{kt + C} = \frac{1}{k} \ln(kt + c) \Big|_0^T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{kT + C}{C}\right) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{kT}{C} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{k} \left(v_0 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) + 1 \right) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right).$$

Підставимо сюди числові дані, вказані в умові, отримаємо $0,2 = \frac{1}{k} \ln 4$, звідки $k = 5 \ln 4$. Нарешті,

$$T = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{3}{2000 \ln 4}.$$

Приклад 10. На дні циліндричного резервуару, заповненого рідиною, отворився отвір. Протягом першої доби витекло 10% вмісту. Визначити, коли із посудину витече половина рідини. Швидкість витікання рідини через малий отвір, що знаходиться на відстані h нижче рівня рідини, дорівнює $\mu \sqrt{2gh}$ (закон Торічеллі), де μ – деякий коефіцієнт. Можна вважати $\mu = 0,6$.

Розв'язання. Позначимо $h(t)$ рівень рідини в резервуарі. Нехай S – площа основи резервуару, а s_0 – площа отвору. Розглянемо проміжок часу від t до $t + \Delta t$. За цей проміжок кількість рідини в резервуарі зміниться на величину $Sh(t + \Delta t) - Sh(t)$. З іншої сторони, протягом цього проміжку рівень рідини дорівнює $h(t) + \alpha(t)$, де $\alpha(t) = o(\Delta t)$ – величина вищого порядку малості, ніж Δt . Отже, кількість рідини, що витекла за цей час, буде дорівнювати $\mu \sqrt{2g(h(t) + \alpha(t))} \cdot s_0 \cdot \Delta t$. Звідси

$$S(h(t + \Delta t) - h(t)) = -\mu \sqrt{2g(h(t) + \alpha(t))} \cdot s_0 \cdot \Delta t.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $S \cdot \Delta t$ і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Отримаємо $h'(t) = -\frac{\mu s_0 \sqrt{2g}}{S} \sqrt{h}$. Позначивши $k = -\frac{\mu s_0 \sqrt{2g}}{S}$, отримаємо для функції h рівняння

$$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Його розв'язок має вигляд $2\sqrt{h} = kt + C$. Оскільки потрібно знайти час, а не висоту, не будемо виражати h із цього співвідношення.

Будемо вважати, що висота резервуару дорівнює 1. Тоді із умов задачі випливає, що $h(0) = 1$ і $h(24) = 0,9$. Перше з цих рівнянь дає $C = 2$, тоді із другого випливає, що $12k + 1 = \sqrt{0,9}$. Потрібно розв'язати рівняння $h(T) = 0,5$. Тоді T задовольняє рівняння $2\sqrt{0,5} = kT + 2$, із якого

$$T = \frac{2\sqrt{0,5} - 2}{k} = 12 \cdot \frac{\sqrt{0,5} - 1}{\sqrt{0,9} - 1} \approx 68,5.$$

Відповідь: приблизно через 68 годин 30 хвилин.

1.3. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші

Розглянемо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (1.3)$$

Теорема Пікара. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на прямокутнику

$$\Pi = \{(x; y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, a > 0, b > 0$$

і така, що задовольняє умову Ліпшиця по y рівномірно відносно x , тобто

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

для всіх $x, |x - x_0| \leq a$ і $y_1, y_2, |y_1 - y_0| \leq b, |y_2 - y_0| \leq b$. Нехай

$$M = \max_{(x; y) \in \Pi} |f(x, y)|, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Тоді задача Коші (1.3) на проміжку $[x_0 - h; x_0 + h]$ має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$.

Розв'язок задачі Коші при виконанні умов теореми Пікара можна знайти як границю при $n \rightarrow \infty$ рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x)\}$, що визначаються рекурентним співвідношенням

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, y_0(x) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Оцінка похибки, отриманої при заміні точного розв'язку $y(x)$ n -му наближення $y_n(x)$, виражається нерівністю

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n.$$

Теорема Пеано. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику Π , причому

$$M = \max_{(x; y) \in \Pi} |f(x, y)|, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Тоді задача Коші на проміжку $[x_0 - h; x_0 + h]$ має принаймні один розв'язок $y = \varphi(x)$.

Часто розв'язок задачі Коші існує не тільки на відрізку, вказаному в попередніх теоремах, але і на більшому відрізку [21].

Якщо функція $f(x; y)$ задовольняє в прямокутнику Π умови теореми Пікара, то будь-який її розв'язок $y = y(x), y(x_0) = y_0, (x_0; y_0) \in \Pi$ можна продовжити до виходу на границю прямокутника Π . Якщо функція $f(x; y)$ в полюсі $\alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty$ ($\alpha \geq -\infty, \beta \leq +\infty$) неперервна і задовольняє нерівність $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$, де $a(x)$ і $b(x)$ – неперервні функції, то будь-який розв'язок рівняння (1.3) можна продовжити та весь інтервал $\alpha < x < \beta$.

Точка $(x_0; y_0)$ називається точкою єдиного розв'язку задачі Коші, якщо через цю точку проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (1.3). Якщо через точку $(x_0; y_0)$ проходить більше однієї інтегральної кривої рівняння (1.3), то таку точку називають точкою не єдиності розв'язку задачі Коші. Множину таких точок називають особливою множиною. Якщо особлива множина містить інтегральну криву, то таку криву називають особливою інтегральною кривою, а відповідний цій інтегральній кривій розв'язок – особливим розв'язком [25].

Приклад 11. Побудувати послідовність наближення y_1, y_2, y_3 до розв'язку $y(x)$ задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, y(0) = 0$$

на відрізку Пеано і оцінити похибку $|y(x) - y_3(x)|$ в прямокутнику $R = \{|x| \leq 1, |y| \leq 2\}$.

Розв'язання. В даному випадку функція $f(x, y) = x - y^2$ неперервно диференційована по y і її частинна похідна по y є $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Тому $f(x, y)$ задовольняє умову Ліпшиця з сталою $L = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 4$. Так як

$$M = \sup |f(x, y)| = \sup |x - y^2| = 5,$$

то

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = 0,4.$$

Отже, пікаровське наближення збігається до розв'язку задачі Коші по крайній мірі на відріжку Пеано $[x_0 - h, x_0 + h] = [-0,4; 0,4]$. Наближення знаходимо за формулою

$$y_0(x) \equiv y_0, y_n(x) = \int_0^x (s - u_{n-1}(s)) dx, n = 1, 2, \dots$$

Маємо

$$y_1(x) = \int_0^x (s - 0) ds = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(s - \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{4}\right)^2\right) ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Різниця між точним розв'язком $y(x)$ і знайденим наближенням оцінюється так:

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{ML^2}{3!} = 5 \cdot \frac{4^2}{6} \cdot \frac{2^3}{5^3} = \frac{64}{75}.$$

Теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень на відріжку $[-0,4; 0,4]$. Абсолютна похибка третього наближення не перевищує $\frac{64}{75}$.

Приклад 12. Нехай

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, -\infty < y < +\infty; \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0; \\ 2x - \frac{4y}{x} & \text{при } 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2; \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1, x^2 < y < +\infty. \end{cases}$$

Довести, що пікаровське наближення, побудоване для задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(0) = 0$$

не збігається на деякому відріжку $[0, \varepsilon], 0 < \varepsilon \leq 1$.

Розв'язання. Безпосередньо можна перевірити, що в полюсі

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty\}$$

функція $f(x, y)$ неперервна і обмежена: $|f(x, y)| \leq 2$ в силу теореми Пеано розв'язок задачі Коші існує.

По точці $(x_0; y_0) = (0; 0)$ будемо пікарівське наближення при $0 \leq x \leq 1$. Маємо:

$$y_0(x) \equiv y_0 = 0, y_1(x) = \int_0^x f(s, 0) ds = x^2 \gg 0;$$

$$y_2(x) = \int_0^x f(s, y_1(s)) ds = \int_0^x \left(2s - \frac{4s^2}{s}\right) ds = \int_0^x (-2s) ds = -x^2 < 0;$$

$$y_3(x) = \int_0^x f(s, y_2(s)) ds = \int_0^x 2s ds = x^2.$$

Так як $f(x, y_1) = f(x, x^2) = -2x$, а $f(x, y_2) = f(x, -x^2) = 2x$, то $y_{2m-1}(x) = x^2, y_{2m}(x) = -x^2 (m = 1, 2, \dots)$. Тому послідовність $\{y_n(x)\}$ для кожного $x \neq 0$ має дві граничні точки то це означає, що послідовні наближення не збігаються. Зазначимо також, що ніяка з схожих послідовностей $\{y_{2m-1}\}, \{y_{2m}\}$ не збігаються до розв'язку вказаного в задачі Коші, оскільки

$$\frac{dy_{2m-1}}{dx} = 2x \neq f(x, x^2) = -2x \text{ та } \frac{dy_{2m}}{dx} = -2x \neq f(x, -x^2) = 2x.$$

Розглянутий приклад демонструє, що неперервності функції $f(x, y)$ недостатньо для збіжності послідовності наближень.

1.4. Загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння називається лінійним, якщо в ньому невідома функція та всі її похідні, містяться тільки в першому степені.

Загальний вигляд звичайного лінійного диференціального рівняння першого порядку такий:

$$y' + a_1(x)y = f(x),$$

де $a_1(x)y$ та $f(x)$ – неперервна функція від x .

Інтегрування такого рівняння можна звести до інтегрування двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.

Згідно методу Бернуллі, невідому функцію, можна шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій $u(x)$ та $v(x)$: $y = uv$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

та лінійне диференціальне рівняння першого порядку набуде вигляду

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + a_1(x)uv = f(x)$$

або

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + a_1(x)v\right] = f(x).$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб в цьому рівнянні вираз в квадратних дужках перетворився в нуль:

$$\frac{dv}{dx} + a_1(x)v = 0,$$

тобто в якості функції v береться один з часткових розв'язків цього рівняння, відмінний від нуля. Відокремлюючи в рівнянні $\frac{dv}{dx} + a_1(x)v = 0$ змінні та виконуючи потім його почленоване інтегрування, знайдемо функцію v . Так як функція v – розв'язок рівняння, то її підстановка в рівняння

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + a_1(x)v\right] = f(x)$$

дає

$$v\frac{du}{dx} = f(x).$$

Таким чином, для знаходження функції u отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Знайдемо функцію u як загальний розв'язок цього рівняння.

Тепер можемо знайти розв'язок початкового лінійного диференціального рівняння першого порядку. Воно рівне добутку функцій u та v , тобто $y = uv$. u та v вже знайшли.

Якщо права частина $q(x)$ рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ тотожно рівна нулю, то лінійне рівняння називають однорідним, якщо ж $q(x) \neq 0$ – неоднорідним.

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

Розв'язання. Як було показано в алгоритмі, $y = uv$. Підставляючи вираз для $\frac{dy}{dx}$ та y в рівняння, отримаємо.

$$v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v \right) = \frac{x+1}{x} \quad (1.4).$$

Оберемо функцію $v(x)$ так, щоб виконувалася рівність

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = 0 \text{ або } \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Після відокремлення змінних це рівняння приймає вигляд

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Почленне інтегрування дає

$$\ln|v| = \ln|x|$$

$$v = x.$$

Підставивши знайдене значення функції v в рівняння (1.4), отримаємо

$$x \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними для знаходження функції u .

Відокремлюючи змінні

$$du = \frac{x+1}{x^2} dx$$

та інтегруючи знаходимо u :

$$u = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок даного лінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$y = \left(\ln x - \frac{1}{x} + C \right) x = x \ln x - 1 + Cx.$$

Приклад 14. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$y - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Розв'язання. Нехай $y = uv$. Підставляючи вираз для $\frac{dy}{dx}$ і y в рівняння, отримаємо

$$v \frac{du}{dv} + u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2 + 1}v \right) = x\sqrt{x^2 + 1} \quad (1.5).$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2 + 1}v = 0.$$

Після відокремлення змінних це рівняння має вигляд

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2 + 1}dx.$$

Почленно інтегруючи матимемо:

$$\begin{aligned} \ln|v| &= \ln(x^2 + 1), \\ v &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Підставивши знайдене значення функції v в рівняння (1.5), отримаємо

$$(x^2 + 1) \frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними для знаходження функції u . Відокремлюючи змінні

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx$$

та інтегруючи знаходимо u :

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок даного лінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$y = (\sqrt{x^2 + 1} + C)(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C(x^2 + 1).$$

Кожне із рівнянь останньої системи, де функції $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, є сталими на розв'язках $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ системи рівнянь, називається першим інтегралом системи диференціальних рівнянь. Сукупність перших інтегралів називається загальним інтегралом системи [14].

Знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь означає визначити функції y_1, y_2, \dots, y_n , що задовольняють систему рівнянь і задані початкові умови:

$$y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0, x = x_0.$$

Приклад 15. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = y + z; \quad \frac{dz}{dx} = y + z + x.$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше з рівнянь за змінною x , отримаємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Замінімо $\frac{dz}{dx}$ його значення із другого значення:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + z + x.$$

Підставимо замість нього вираз із першого рівняння, переходимо до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = x.$$

$$k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0, k_2 = 2;$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\bar{y}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx;$$

$$\bar{y}(x) = 2Ax + B; \quad \bar{y}(x) = 2A.$$

$$2A - 2(2Ax + B) = x,$$

$$A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{4}x(x+1).$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Із співвідношення $z = \frac{dy}{dx} - y$, отримаємо

$$z = 2C_2 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - C_1 - C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Множина розв'язків даної системи задається функціями:

$$\begin{aligned} y &= C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1), \\ z &= -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1). \end{aligned}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад 16. Розв'язати систему диференціальних рівнянь двома способами:

- зведенням до диференціального рівняння другого порядку;
- методом Ейлера.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 8x_1 - 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Продиференціюємо одне із рівнянь системи, наприклад, перше. В отриманому рівнянні замінимо його виразом із другого рівняння даної системи:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 8 \frac{dx_1}{dt} - 3 \frac{dx_2}{dt}.$$

Із першого рівняння системи знаходимо

$$x_2 = \frac{1}{3} \left(8x_1 - \frac{dx_1}{dt} \right)$$

і підставляємо його в попереднє рівняння. В результаті перейдемо до диференціального рівняння 2-го порядку відносно невідомої функції $x_1(t)$:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 8 \frac{dx_1}{dt} - 6x_1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \left(8x_1 - \frac{dx_1}{dt} \right) = 9 \frac{dx_1}{dt} - 14x_1,$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - 9 \frac{dx_1}{dt} + 14x_1 = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. оскільки його характеристичне рівняння має корені $k_1 = 2, k_2 = 7$, отже

$$x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}.$$

Підставимо його у рівняння $x_2 = \frac{1}{3} \left(8x_1 - \frac{dx_1}{dt} \right)$, і знайдемо $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{3} \left(8(C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}) - \frac{d}{dt} (C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (8C_1 e^{2t} + 8C_2 e^{7t} - 2C_1 e^{2t} - 7C_2 e^{7t}) = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t}. \end{aligned}$$

Отже, загальним розв'язком системи є функції:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ x_2(t) &= 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t}. \end{aligned}$$

б) Складемо для даної системи характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 8 - k & -3 \\ 2 & 1 - k \end{vmatrix} = k^2 - 9k + 14 = 0.$$

Його корені: $k_1 = 2, k_2 = 7$.

Підставимо корінь $k_1 = 2$:

$$\begin{cases} (8 - 2)\gamma_1^{(1)} - 3\gamma_2^{(1)} = 0, \\ 2\gamma_1^{(1)} + (1 - 2)\gamma_2^{(1)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\gamma_1^{(1)} - 3\gamma_2^{(1)} = 0, \\ 2\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $\gamma_2^{(1)} = 2\gamma_1^{(1)}$. Припускаючи, що $\gamma_1^{(1)} = 1$, отримаємо $\gamma_2^{(1)} = 2$.

Таким чином отримаємо перший частковий розв'язок системи: $\gamma_1^{(1)}(t) = e^{2t}$, $\gamma_2^{(1)} = 2e^{2t}$.

Для кореня $k_2 = 7$ отримаємо систему

$$\begin{cases} (8 - 7)\gamma_1^{(2)} - 3\gamma_2^{(2)} = 0, \\ 2\gamma_1^{(2)} + (1 - 7)\gamma_2^{(2)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^{(2)} - 3\gamma_2^{(2)} = 0, \\ 2\gamma_1^{(2)} - 6\gamma_2^{(2)} = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_2^{(2)} = \frac{1}{3}\gamma_1^{(2)}$. Якщо $\gamma_1^{(2)} = 1$, то $\gamma_2^{(2)} = \frac{1}{3}$. Записуємо другий частковий розв'язок системи

$$x_1^{(2)}(t) = e^{7t}, x_2^{(2)}(t) = \frac{1}{3}e^{7t}.$$

Загальний розв'язок вихідної системи буде мати вигляд:

$$x_1(t) = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t},$$

$$x_2(t) = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3}C_2 e^{7t}.$$

Отже, отримані розв'язки двома способами – однакові.

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНА СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Класифікація динамічних систем

Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт чи процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у момент часу і заданий закон, який визначає зміну початкового стану за певний проміжок часу. Цей закон дозволяє за початковим станом прогнозувати майбутній стан динамічної системи, його називають законом еволюції. Динамічні системи – це механічні, фізичні, хімічні та біологічні об'єкти, обчислювальні процеси та процеси перетворення інформації, що здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Описи динамічних систем для задання закону еволюції також різноманітні: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, теорії графів, теорії марківських кіл тощо. Вибір одного із способів опису задає конкретний вид математичної моделі відповідної динамічної системи [1].

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, що визначають однозначно її стан, та вказано закон еволюції. Залежно від ступеня наближення однієї й тієї системи можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі.

Дослідження реальних систем зводиться до вивчення математичних моделей, удосконалення та розвиток яких визначаються аналізом експериментальних та теоретичних результатів при їх зіставленні. У зв'язку з цим під динамічною системою будемо розуміти саме її математичну модель. Досліджуючи ту саму динамічну систему (наприклад, рух маятника), залежно від ступеня врахування різних чинників отримуємо різні математичні моделі [19].

Динамічні системи можна класифікувати залежно від виду оператора відображення та структури фазового простору. Якщо оператор передбачає виключно лінійні перетворення початкового стану, він називається лінійним. Лінійний оператор має властивість суперпозиції. Якщо оператор нелінійний, то

й відповідна динамічна система називається нелінійною. Розрізняють неперервні та дискретні оператори та відповідно системи з неперервним та дискретним часом. Системи, для яких відображення $x(t)$ за допомогою оператора T може бути визначено для будь-яких $t > t_0$ (неперервно в часі), називають потоками за аналогією зі стаціонарним потоком рідини. Якщо оператор відображення визначено на дискретній множині значень часу, відповідні динамічні системи називають каскадами або системами з дискретним часом [17].

Розглянемо системи диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (I)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – неперервні функції, визначенні в деякій області G евклідової площини (x, y – декартові координати) та існуючі в цій області неперервні частинні похідні до порядку, не нижче першого. Область може бути як обмеженою, так і не обмеженою. Зокрема, область G може збігатися з усією площиною (x, y) .

Системи вигляду (I) є окремим випадком систем двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями. Системи диференціальних рівнянь, праві частини яких не містять явно незалежну змінну, називаються автономними. Автономні системи диференціальних рівнянь також називають динамічними системами [1].

Систему (I) можна назвати динамічною системою на площині або в плоскій області. Також можна сказати, що динамічна система задана або визначена в області G [19].

Динамічна система (I), яка задана в області G називаються системою класу C_n , якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є функціями класу C_n , тобто мають в області G неперервні частинні похідні порядку n включно.

Динамічна система (I) називається системою аналітичного класу або аналітичною системою, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є аналітичними функціями в області G .

Очевидно, будь-яка система класу C_k ($k > 1$) є одночасно системою класу C_{k_1} , де $k_1 < k$, зокрема, системою класу C_1 . Аналітична система є системою класу для будь-якого натурального k .

Розглядають також динамічні системи на сфері.

Припустимо, що сфера, яка буде розглядатися, розміщена в трьохвимірному просторі R^3 і має рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Нехай на сфері введено деяке регулярне координатне покриття класу r (або аналітичне). Це означає, що задане деяке покриття сфери областями g_1, g_2, \dots, g_N , гомеоморфними плоским областям, і в кожній області g_i цього покриття введена система координат за допомогою функцій [19]

$$x = \varphi_i(u_i, v_i), y = \psi_i(u_i, v_i), z = \chi_i(u_i, v_i), \quad (2.1)$$

що задовольняють наступні умови:

а) функції (2.1) дають топологічне відображення деякої області H_i площини (u_i, v_i) на область g_i сфери;

б) $\varphi_i, \psi_i, \chi_i$ є функціями класу C_r або аналітичними;

в) в жодній точці області H_i функціональні визначники

$$\frac{D(\varphi_i, \psi_i)}{D(u_i, v_i)}, \quad \frac{D(\varphi_i, \chi_i)}{D(u_i, v_i)}, \quad \frac{D(\psi_i, \chi_i)}{D(u_i, v_i)}$$

не перетворюються одночасно в нуль.

Рівняння (2.1) можна розглядати також, як параметричне рівняння в області g_i сфери, а u_i, v_i – як криволінійні координати, введені в області g_i сфери.

Якщо дві області заданого покриття g і \tilde{g} мають спільні точки, а отже, спільну область

$$\omega = g \cap \tilde{g},$$

то в області ω введені також координати u, v , так як і координати \tilde{u}, \tilde{v} . Тоді функції

$$\tilde{u} = f(u, v), \tilde{v} = h(u, v) \text{ або } u = \tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{v}), v = \tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (2.2)$$

що виражають одні координати через інші, визначають в області регулярні перетворення координат класу C_r (аналітичні).

Кажуть, що на сфері S задана динамічна система класу C_k (або відповідно аналітична), якщо при деякому координатному покритті сфери класу C_{k+1} (або аналітичному) виконується наступне [19]:

1) в кожній точці область g_i покриття задана динамічна система

$$\frac{du_i}{dt} = U_i(u_i, v_i), \frac{dv_i}{dt} = V_i(u_i, v_i) \quad (2.3)$$

(u_i, v_i – локальні координати, введені в області g_i) класу C_k (або аналітична), визначена в усіх точках області H_i значень u_i, v_i ;

2) в точках, спільних для двох областей покриття g і \tilde{g} , тобто в точках області $\omega = g \cap \tilde{g}$ відповідні динамічні системи переходять одна в одну шляхом перетворення координат, перетворюючи одну координатну систему в іншу; тобто якщо

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{U}(\tilde{u}, \tilde{v}), \frac{d\tilde{v}}{dt} = \tilde{V}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad (2.4)$$

– динамічна система, задана в області \tilde{g} , то в області ця система отримується із системи (2.1), заданої в області g , шляхом перетворення координат (2.2), так що

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{\partial f}{\partial u} U(\tilde{f}, \tilde{g}) + \frac{\partial f}{\partial v} V(\tilde{f}, \tilde{g}), \\ \tilde{V}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{\partial h}{\partial u} U(\tilde{f}, \tilde{g}) + \frac{\partial h}{\partial v} V(\tilde{f}, \tilde{g}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(і, навпаки, система виду (2.3) може бути отримана із системи (2.4) шляхом відповідного перетворення координат).

Систему (2.3) називають системою відповідної області g_i .

Введемо певні тотожності динамічних систем на сфері.

Нехай на сфері S задані два різних координатних покриття Σ_1 і Σ_2 класу C_{k+1} (аналітичних). Будемо локальні координати одного покриття позначати через u_i, v_i , а другого – через ξ_i, η_i . Якщо область g покриття Σ_1 і область γ покриття Σ_2 перетинають, то в кожній точці їх перетину

$$\lambda = g \cap \gamma$$

відповідають як координати u, v , так і координати ξ, η . Перетворення від один з цих координат до інших, задане формулами

$$\begin{aligned}\xi &= f^*(u, v), u = f^{**}(\xi, \eta), \\ \eta &= h^*(u, v), v = h^{**}(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{2.6}$$

є регулярним перетворенням класу C_{k+1} або аналітичним.

Нехай, на сфері при покриттях Σ_1 і Σ_2 задані динамічні системи, які позначають відповідно через D_1 і D_2 .

Ці динамічні системи тотожні або еквівалентні, якщо в точках перетину двох областей g і γ , що належать двом різним покриттям, перехід від однієї динамічної системи D_1 до D_2 іншої відбувається за допомогою перетворення, що перетворює одну координатну систему в іншу [1].

Таким чином, якщо система D_1 тотожна системі D_2 і якщо система D_1 в області g має вид

$$\frac{du}{dt} = U(u, v), \frac{dv}{dt} = V(u, v),\tag{2.7}$$

а система D_2 в області γ має вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(\xi, \eta), \frac{d\eta}{dt} = \Psi(\xi, \eta),\tag{2.8}$$

то в області $\lambda = g \cap \gamma$ система (2.8) утвориться з системи (2.7) шляхом перетворення (2.6), так що

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial f^*}{\partial u} U(f^{**}, h^{**}) + \frac{\partial f^*}{\partial v} V(f^{**}, h^{**}) = \Phi(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial h^*}{\partial u} U(f^{**}, h^{**}) + \frac{\partial h^*}{\partial v} V(f^{**}, h^{**}) = \Psi(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Введене означення тотожності динамічних систем на сфері дозволяє при розгляді таких систем переходити від одного координатного покриття до іншого.

Користуючись найпростішим координатним покриттям g , будемо мати, що одна із областей покриття складається з усіх точок сфери, крім одної – N , а друга – \tilde{g} із всіх точок сфери, крім точки \tilde{N} , що діаметрально протилежна точці N . Тоді якщо u, v – координати в області g , а \tilde{u}, \tilde{v} – координати в області \tilde{g} , то у всіх точках, які спільні для областей g і \tilde{g} маємо [8]:

$$\tilde{u} = \frac{4u}{u^2 + v^2}, \tilde{v} = \frac{4v}{u^2 + v^2}\tag{2.9}$$

і абсолютно симетрично

$$u = \frac{4\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}, v = \frac{4\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}. \quad (2.10)$$

Якщо D – динамічна система на сфері і g – будь-яка область сфери, відмінна від всієї сфери в цілому, то система D в області g еквівалентна динамічній системі в плоскій області. Насправді, завжди можливо ввести таке координатне покриття сфери, щоб область g повністю лежала в одній і тій же області покриття. Для цього достатньо вибрати точку N , яка не належить області g , в ввести на сфері найпростіше координатне покриття, за допомогою стереографічних проєкцій з центрами в точці N і діаметрально протилежній точці \tilde{N} . У випадку коли не тільки сама область g , але і її замикання \bar{g} відмінне від усієї сфери в цілому, то, очевидно, динамічна система D в замкненій області \bar{g} сфери еквівалентна динамічній системі в замкненій плоскій області [19].

Аналітична динамічна система на сфері однозначно і повністю визначена, якщо вона відома в довільній області g сфери в силу того, що аналітичні функції можна продовжити єдиним чином. Однак не завжди система, що задана на деякій частині сфери і аналітична в цій частині, може бути продовжена на всю сферу.

2.2. Геометричні інтерпретації динамічної системи

Розглянемо звичайну для системи двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями геометричну інтерпретацію, тобто геометричну інтерпретацію в трьохвимірному просторі з декартовими координатами x, y, t .

Функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ потрібно при цьому розглядати як функції трьох змінних x, y, t . Але так як ці функції від t не залежать, то в трьохвимірному просторі R^3 областю визначення правих частин системи (I) буде нескінченна циліндрична область H , утворена усіма прямими, паралельними осі t , що перетинають площину (x, y) в точках області G [19].

Розв'язок

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

системи (I) інтерпретується як криві, що розташовані в області H . Ці криві називаються інтегральними кривими системи (I). Під розв'язком системи диференціальних рівнянь будемо розуміти розв'язок, продовжений на максимально можливий інтервал значень t .

Так як функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ в будь-якому випадку є функціями класу C_1 , то для системи (I) в усіх точках області H виконуються умови теореми існування та єдиності, а отже і сама ця теорема. Для системи (I) вона буде формулюватися так [8]:

Теорема 2.1. Для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0) \in G$ і для будь-якого t_0 , $-\infty < t_0 < +\infty$, існує один і тільки один розв'язок

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

системи (I), що задовольняє початкові умови

$$x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0),$$

визначений для всіх значень t в деякому визначеному інтервалі (τ, T) , який містить t_0 . (Зокрема, розв'язок може будь визначений при всіх значення t , тобто τ може дорівнювати $-\infty$, а T може дорівнювати $+\infty$).

Геометрично теорема 2.1 означає, що через кожен точку області H проходить інтегральна крива системи (I) і при цьому тільки одна.

Для системи виду (I) справедлива також наступна теорема.

Теорема 2.2. Нехай $\overline{G_1}$ – замкнена обмежена область, що міститься в області G ($\overline{G_1} \subset G$)

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \tag{2.11}$$

– розв'язок системи (I), визначений в інтервалі (τ, T) і такий, що при всіх t на інтервалі (τ, T) точка $N(\varphi(t), \psi(t))$ завжди залишається в області $\overline{G_1}$. Тоді $\tau = -\infty, T = +\infty$, тобто розв'язок (1) визначений для всіх значень t .

Доведення. Припустимо, що розв'язок $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ визначений при значені $t = t_0$.

Нехай τ_1 і τ_2 – два довільних числа, причому $\tau_1 < t_0, \tau_2 > t_0$. Позначимо через $\overline{H_1}$ – циліндричну область простору R^3 , яка складається із всіх точок $M(t, x, y)$ таких, що $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ а x, y такі, що точка $(x, y) \in \overline{G_1}$.

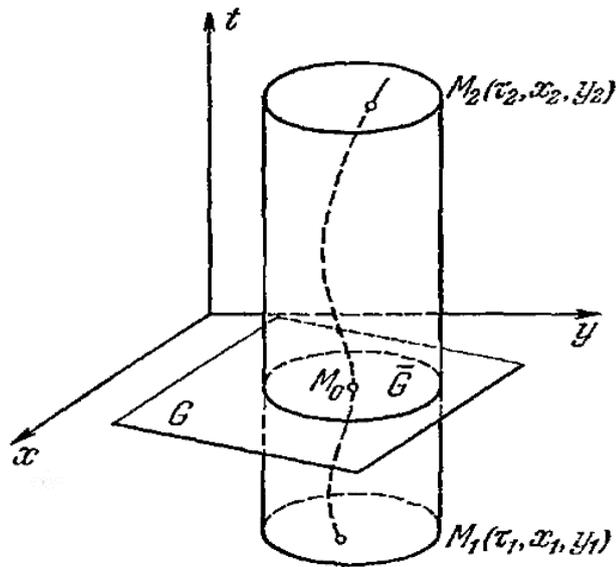


Рис. 2.1. Циліндрична область простору R^3

Інтегральна крива, що відповідає розв'язку (2.11), проходить через точку $M_0(t_0, \varphi(t_0), \psi(t_0))$, яка належить області H_1 . Але тоді, в силу теореми про продовження граници до області визначення, ця інтегральна крива виходить з області $\overline{H_1}$ як при значенні, що більше за t_0 , так і при значенні, що менше за t_0 . Однак вийти із циліндричної області $\overline{H_1}$ через бічну поверхню цієї області інтегральна крива не може, так як в цьому випадку, очевидно, знайшлася б точка $N(\varphi(t), \psi(t))$, що лежить поза замкненою областю $\overline{G_1}$, що суперечить умові теореми

Отже, ця інтегральна крива виходить з $\overline{H_1}$ через нижню і верхню основи. Але це означає, що розв'язок (2.1) визначений при $t = \tau_1$ і $t = \tau_2$. Так як τ_1 і τ_2 довільні, то розв'язок (2.1) визначений при всіх значення t . Теорема доведена [25].

2.3. Граничні множини динамічної системи

Розглянемо динамічну систему в n -вимірному евклідовому просторі R^n , що визначена системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (2.12)$$

$$X = X(t, X_0, t_0), \quad (2.13)$$

де праві частини системи (2.12) дійсні і неперервні за всіма своїми аргументами. Так як система (2.12) автономна, то її розв'язок (2.13) фактично залежить від різниці $t - t_0$:

$$X(t, X_0, t_0) = X(t - t_0, X_0). \quad (2.14)$$

Відомо, що множина всіх α -граничних точок M_α і множина всіх ω -граничних точок M_ω є інваріантною множиною системи диференціальних рівнянь, інакше кажучи, вказані множини складаються із цілих траєкторій, що визначаються цієї системою. При цьому траєкторією системи (2.12) називається множина всіх точок $\{\bar{X}(\tau, X_0)\}, \tau \in (-\infty, +\infty)$. Таким чином, інваріантність будь-якої із вказаних множин можна записати у вигляді [1]

$$(\bar{X})(\tau, X_0) \in M_\mu. \quad (2.15)$$

Ліва частина (2.15) є множиною всі розв'язків системи (2.12), що починаються при $\tau = t - t_0 = 0$ на множині M_μ .

Розглянемо випадок, коли множина M_ω є траєкторією періодичного розв'язку системи (2.12)

$$X = \Phi(t), \quad (2.16)$$

де $\Phi(t)$ – функція періоду T_1 невідомої змінної t : $\Phi(t) = \Phi(t + T_1)$.

Припустимо також, що множина є траєкторією другого періодичного розв'язку

$$X = \Psi(t), \quad (2.17)$$

де $\Psi(t)$ – функція періоду T_2 невідомої змінної t : $\Psi(t) = \Psi(t + T_2)$.

В динамічній системі, що визначена рівнянням (2.12), має місце перетворення, якщо

1) періодичний розв'язок (2.16) (2.17) асимптотично стійкий за Ляпуновим при необмеженому зростанню (спаданню) часу;

2) існує хоча б одна початкова точка X_0 , через яку проходить траєкторія (2.13), що необмежено наближається до періодичного розв'язку (2.16) при необмеженому зростанні часу і необмежено наближається до періодичного розв'язку (2.16) при необмеженому спаданні часу [19].

У цьому визначені асимптотична стійкість за Ляпуновим розуміється як орбітальна асимптотична стійкість за Ляпуновим. Необмежене наближення точки $\bar{X}(\tau, X_0)$ до періодичного розв'язку M означає, що відстань від точки $\bar{X}(\tau, X_0)$, що рухається до орбіти M спадає до нуля [26]:

$$\rho(\bar{X}(\tau, X_0), M) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \rho(X, M) = \min_{y \in M} \left(\sum_{s=1}^n (x_s - y_s)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.3. Множина всіх точок фазового простору R^n , для яких має місце перетворення, інваріантна, зв'язна і відкрита.

Доведення. Нехай X_0 – така точка, для якої траєкторія $\bar{X}(\tau, X_0)$ необмежено наближається до M_ω і M_α відповідно при необмеженому зростанні і спаданні часу. Тоді можна вказати достатньо малий окіл цієї точки $\rho(X_0, Y_0) < \delta$ такий, що для будь-якої точки Y_0 з цього околу відстань $\rho(\bar{X}(\tau_1, Y_0), M_\omega) < \delta_1$ при деякому $\tau_1 > 0$ і відстань $\rho(\bar{X}(\tau_2, Y_0), M_\alpha) < \delta_2$ при деякому $\tau_2 < 0$ при цьому δ_1 і δ_2 як завгодно малі, якщо завгодно мале δ , що впливає із теореми про інтегральне неперервність системи (2.12). Тоді числа δ_1, δ_2 можна вибрати так, щоб траєкторія потрапляла при $\tau = \tau_1$ в область асимптотичної стійкості орбіти (2.16), а при $\tau = \tau_2$ в область асимптотичної стійкості орбіти (2.17). При такому виборі δ_1 і δ_2 обов'язково будуть виконуватися співвідношення $\rho(\bar{X}(\tau_1, Y_0), M_\omega) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$ і $\rho(\bar{X}(\tau_2, Y_0), M_\alpha) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Звідси впливає відкритість множини перетворення, її інваріантність і зв'язність [3].

2.4. Автоколивальні системи

Можливість існування періодичного асимптотично стійкого руху, що зображується ізольованою замкнутою траєкторією у фазовому просторі, до якої згодом притягуються траєкторії з деякого околу, незалежно від початкових умов, забезпечується тільки в нелінійних дисипативних системах. Цей тип динамічних систем настільки важливий щодо коливальних процесів, що для його виділення Андронов запропонував спеціальний термін – автоколивальні системи. Математичним образом автоколивань є граничний цикл Пуанкаре –

замкнута ізольована траєкторія у фазовому просторі, що відповідає періодичному руху [8].

Як приклад динамічної системи з граничним циклом Пуанкаре розглянемо класичний нелінійний осцилятор Ван дер Поля, рівняння коливань якого

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0. \quad (2.18)$$

Параметр a , що характеризує підкачування енергії в систему від зовнішнього джерела, є суттєвим параметром осцилятора і називається параметром збудження. Осцилятор Ван дер Поля описує складніший коливальний контур, характер дисипації в якому залежить від змінної x . У фазових координатах рівняння коливань осцилятора (2.18) має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

причому

$$a(1 - bx_1^2) \neq 0. \quad (2.20)$$

Аналitично рівняння (2.19) не розв'язуються і дослідження проводяться з використанням чисельних методів. У практично важливому випадку ($a > 0$, $b > 0$) рівняння (2.19) мають єдиний стійкий розв'язок у вигляді граничного циклу Γ .

Положення рівноваги на початку координат, в якому поблизу нуля можна знехтувати нелінійністю, є нестійким фокусом. Траєкторії з околу стану рівноваги асимптотично наближаються до граничного циклу. Як показує аналіз, граничний цикл є стійкою ізольованою структурою, що притягує до себе траєкторії з будь-якої точки фазової площині [6].

Таким чином, у динамічних системах з нелінійною залежністю дисипації енергії від змінної, що здійснює коливання, вперше з'являється принципово новий тип стійкої граничної множини фазових траєкторій – граничний цикл. На граничному циклі за час періоду коливань частини розсіюються і енергія, що вноситься, суворо компенсуються [19].

Нарешті, розглянемо ще один випадок типової структури у фазовому просторі динамічної системи, що виникає, наприклад, при періодичному збуренні системи зі стійким граничним циклом. Додамо до рівняння (2.18) джерело гармонійної дії порівняно малої амплітуди B та частоти p , яку вважаємо раціонально не пов'язаною з частотою періодичних коливань автономного осцилятора:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = B\sin(p\tau + \varphi_0). \quad (2.21)$$

Періодична модуляція граничного циклу автономної системи призводить до того, що фазова траєкторія із заданою частотою p обертається навколо граничного циклу і лежить на двовимірній поверхні, що є поверхнею тора. Аналогічно випадку граничного циклу ця поверхня буде стійкою граничною множиною, до якої стягуються згодом всі траєкторії з деякого околу тора. Неважко уявити собі, що мінімальна розмірність фазового простору, в який можна вкласти двовимірний тор, дорівнює трьом [1].

2.5. Фазові портрети динамічних систем

Основна геометрична інтерпретація автономної системи (I) пов'язана з розглядом площини (x, y) . Ця площина називається фазовою площиною системи (I).

Розглянемо в кожній точці $M(x, y)$ області G площини (x, y) вектор v з компонентами $P(x, y), Q(x, y)$. Динамічна система (I) визначає таким чином, в області G векторне поле.

В силу того, що $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ за припущенням мають неперервні частинні похідні, векторне поле, визначене системою (I) є так званим неперервно диференційованим векторним полем [13].

Нехай в точці $M(x, y)$ хоча б одна з величин $P(x, y), Q(x, y)$ не перетворюється в нуль. Тоді довжина вектора в цій точці

$$r = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$$

відмінна від нуля, а синус і косинус кута $\varphi(x, y)$ між додатними напрямками осі x і напрямом вектора подаються виразами

$$\sin\theta = -\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \cos\theta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

В тих точках, в яких одночасно

$$P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0,$$

довжина вектора перетворюється в нуль, а напрямок вектора стає невизначеним. Такі точки називаються особливими точками векторного поля (або особливими точками системи (I)); точки, в яких хоча б одна з величин $P(x, y), Q(x, y)$ не дорівнює нулю, – звичайними або неособливими точками цього векторного поля. В будь-якій неособливій точці M векторного поля кут $\theta(x, y)$ неперервний. В особливій точці кут $\theta(x, y)$ невизначений і при наближенні x і y до координат особливої точки $\lim \theta(x, y)$ може не існувати [19].

Нехай

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (2.22)$$

– будь-який розв'язок системи (I). Множина точок $M(\varphi(t), \psi(t))$, де t набуває всіх значень, при яких визначений розв'язок (2.22), називається траєкторією, яка відповідає даному розв'язку, а також, траєкторією векторного поля, яке задане динамічною системою (I), або просто траєкторією даної динамічної системи (а також інколи фазовою траєкторією) [19].

Рівняння (2.22), очевидно, є параметричними рівняннями траєкторії. І навпаки, якщо існує будь-яка траєкторія, то розв'язок, якому вона відповідає, називають розв'язком, відповідним даній траєкторії.

Якщо точка $M(x, y)$ траєкторії не є особливою точкою векторного поля, то вектор $(P(x, y), Q(x, y))$ є дотичним вектором до траєкторії.

Справді, ви силу того, що є розв'язком системи (I), мають місце рівності:

$$\dot{\varphi}(t) \equiv P(\varphi, \psi), \dot{\psi}(t) \equiv Q(\varphi, \psi). \quad (2.23)$$

Але вектор з компонентами $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$, очевидно, є дотичним вектором до траєкторії, і в силу рівностей (2.23) він збігається з вектором поля, заданого системою (I).

Розглянемо параметр як «час», можна жати наступну «кінематематичну» інтерпретацію системи (I): розв'язок $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ можна розглядати як закон руху точки по траєкторії фазової площини. В кожній точці фазової площини вектор, заданий системою (I), тобто вектор $(P(x, y), Q(x, y))$, очевидно, дорівнює швидкості точки, що рухається або «фазовій швидкості». Розв'язкам з одними і тими ж початковими значеннями x_0 і y_0 різними початковими значеннями t_0 відповідають рухи, що починаються в одній і ті ж самій точці, але в різні початкові моменти «часу» (t_0 і t). Точка з координатами $(\varphi(t), \psi(t))$ називається також «зображувальною» [20].

Нехай $M(a, b)$ – особлива точка системи (I), так що

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0. \quad (2.24)$$

Тоді, очевидно, $x = a, y = b$ є розв'язком системи (I), а отже, особлива точка векторного поля є окремою траєкторією. Така траєкторія називається станом рівноваги. Очевидно також, якщо в системі (I) є розв'язок

$$x = a, y = b, \quad (2.25)$$

(a і b – деякі сталі), то точка (a, b) є станом рівноваги (особливою точкою векторного поля), тобто для неї виконуються рівності (2.24). Розв'язок (2.25), очевидно, в силу того, що t в нього не виходить, визначений для всіх t .

Стан рівноваги $M(a, b)$ системи (I) називається ізольованим, якщо існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що в ε_0 -околі крім M не лежить більше ніж один стан рівноваги.

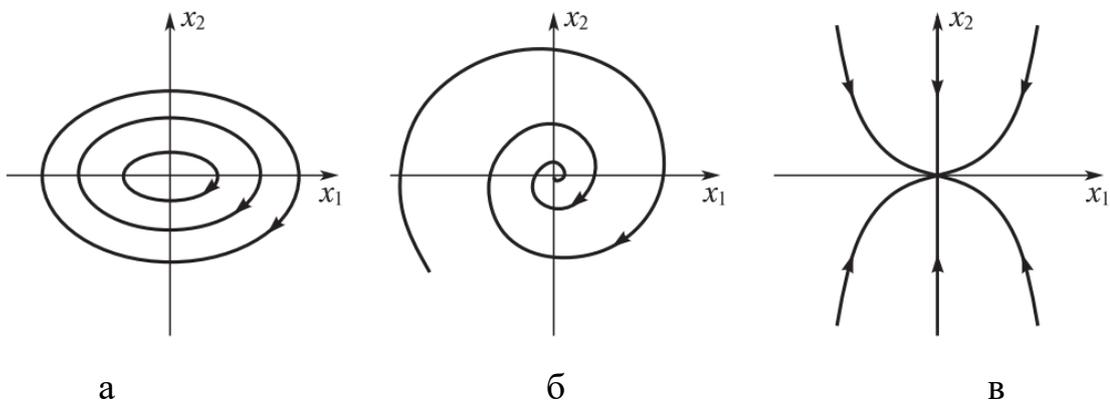


Рис 2.2. Фазові портрети лінійних осциляторів: а – без тертя, б – з малим тертям, в – з сильним тертям

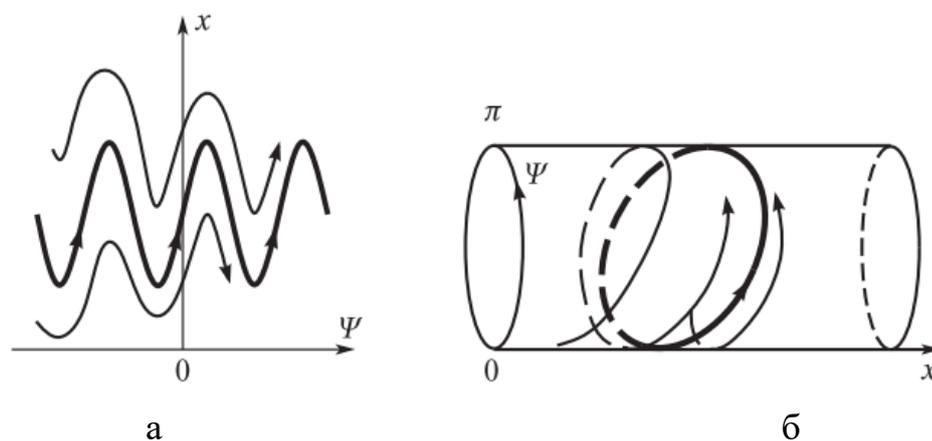


Рис 2.3. Фазові портрети неавтономної системи $\dot{x} = f(x) + B\sin\omega_{ex}t$ для $\Psi = \omega_{ex}t$, що визначена на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (а) і для $\Psi \in [0, 2\pi]$ (б).

2.6. Диференціальні рівняння, які відповідають динамічній системі

Якщо поділити одне рівняння системи (I) на друге, то отримаємо або диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (\text{II})$$

або диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (\text{II}^*)$$

Розглянемо спочатку рівняння (II). Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – будь-яка точка області G . В силу теореми про існування і єдиність розв'язку, якщо при $x_0, y_0, P(x_0, y_0) \neq 0$, то існує єдиний розв'язок

$$y = f(x),$$

що відповідає початковим значенням x_0, y_0 , а отже, єдина інтегральна крива рівняння (II), що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. В кожній точці цієї кривої кутовий коефіцієнт дотичної задається рівнянням (II) [8].

Нехай $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – розв'язок системи (I), що відповідають початковим значенням t_0, x_0, y_0 . Виражаючи t наближено до значень t_0, x_0, y_0 як функцію $x, t = \gamma(x)$ (це можливо через те, що $\varphi'(t_0) = P(x_0, y_0) \neq 0$) і підставляючи в функцію $y = \psi(t)$, отримаємо розв'язок рівняння (II)

$$y = \psi(\gamma(x)) = f(x).$$

Очевидно, інтегральна крива рівняння (II) в точках, в яких вона визначена, збігається з траєкторією системи (I) або є частиною цієї траєкторії.

Припустимо, що розв'язок $y = f(x)$ визначений на інтервалі (x_1, x_2) , і нехай x наближається до одного з кінців цього інтервалу, наприклад $x \rightarrow x_1$. Враховуючи загальні теореми, можна побачити, що якщо при $x \rightarrow x_1$ точка з координатами $(x, f(x))$ не наближається до границі області G , то вона наближається до точки $M(x_1, f(x_1))$, для якої $P(x_1, f(x_1)) = 0$ тобто точки, в якій рівняння (II) втрачає сенс. Якщо при цьому $Q(x_1, f(x_1)) \neq 0$, то точка M , очевидно, є такою точкою траєкторії системи (I), в якій дотична паралельна осі y . В околі такої точки розглядається рівняння (II*), як «продовження» інтегральної кривої, що відповідає даному розв'язку $y = f(x)$ рівняння (II), що проходить через точку $M(x_1, f(x_1))$. Очевидно, в околі будь-якої точки, в якій ні $R(x, y)$, ні $Q(x, y)$ не перетворюються в нуль, розв'язок рівняння (II*) може бути отриманий із розв'язку $y = f(x)$ рівняння (II), якщо в ньому x виразити як функцію y , $x = g(y)$, а частини відповідних інтегральних кривих рівняння (II) і (II*), що лежать в достатньо малому околі такої точки, співпадають [8].

Аналогічно в точці $N(g(y_1), y_1)$ в якій $Q(g(y_1), y_1) = 0$, а $P(g(y_1), y_1) \neq 0$ «продовженням» інтегральної кривої рівняння (II*) потрібно вважати інтегральну криву рівняння (II), що проходить через цю точку.

Не важко переконатися в тому, що множина точок, що складається з точок інтегральної кривої рівняння (II), що проходить через деяку, відмінну від стану рівноваги системи (I) точку $M_0(x_0, y_0)$ області G і всіх «продовжень» цієї інтегральної кривої, збігається з траєкторією, що проходить через точку M_0 .

Таким чином, одночасне задання рівнянь (II) і (II*) визначає всі траєкторії системи (I), відмінні від стану рівноваги. В той же час, при розгляді системи (I) траєкторії визначаються за допомогою параметричних рівнянь, при розгляді рівнянь (II) і (II*) траєкторії визначаються рівняннями в змінних x і y (рівняннями в декартових координатах). В подальшому будемо використовувати наступні рівняння (II) і (II*), які симетричні відносно x і y [17]:

$$P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0 \text{ або } \frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (\text{III})$$

Траєкторії системи (I), відмінні від стану рівноваги, називають інтегральними кривими рівняння (II).

Точки, в яких одночасно $P(x, y) = 0$ і $Q(x, y) = 0$ і рівняння (II) і (II*) втрачають сенс, називають особливими точками рівнянь (II), (II*) або (III). Таким чином, станам рівноваги системи (I) відповідають особливі точки (II), (II*) або (III) і навпаки, особливим точкам – стани рівноваги.

В той же час, так як система (I) визначає в області G фазової площини векторне поле, як складається із векторів $r(x, y)$ з компонентами $P(x, y)$, $Q(x, y)$, рівняння (III) (або пара рівнянь (II) і (II*)) визначає поле напрямків або поле лінійних елементів. Лінійним елементом називається точка M і ненапрявлений відрізок, який проходить через цю точку, для якого M є внутрішньою точкою. Поле лінійних елементів, визначене рівнянням (III), отримується, якщо через кожну точку $M(x, y)$ області провести прямолінійний відрізок, що має кутовий коефіцієнт $\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ (якщо $P(x, y) = 0$, то відповідний відрізок паралельний осі y) [8].

Очевидно, лінійний елемент, що відповідає точці $M(x, y)$ лежить на дотичній до траєкторії, що проходить через точку M .

Якщо функція класу $C_1 f(x, y)$ не перетворюється в нуль в області G , то системі

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)f(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)f(x, y) \quad (\text{I}^*)$$

відповідає, очевидно, те ж саме диференціальне рівняння (III)

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)},$$

що і системі (I).

Звідси підтверджується твердження, що системи (I) і (I*) мають одні і ті ж траєкторії.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

3.1. Застосування у фізиці

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= G \left(n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1 \right) m = P(m, n), \\ \frac{dn}{dt} &= n_{01} - (m + 1)n = Q(m, n),\end{aligned}\tag{3.1}$$

при деякій ідеалізації описує динаміку оптичного квантового генератора з керованою добротністю резонатора [8].

Враховуючи фізичний зміст задачі розглядаються область фазового простору $m \geq 0$ і параметри, що задовольняють умов $\rho > 0$ і $G > 1$: $n_{01} > 0$, $n_{02} > 0$.

Координати стану рівноваги знаходимо, прирівнюючи до нуля праві частини системи (3.1):

$$\begin{aligned}\left(n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1 \right) m &= 0, \\ n_{01} - (m + 1)n &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Виключаючи із цих рівнянь n , для абсцис стану рівноваги отримаємо

$$m \left[m^2 - \left(n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho} \right) m - \frac{1}{\rho} (n_{01} - n_{02} - 1) \right] = 0.\tag{3.3}$$

Ординати стану рівноваги однозначно визначається абсцисами [18]:

$$n = \frac{n_{01}}{m + 1}.\tag{3.4}$$

Із (3.3) випливає, що система (3.1) при всіх розглянутих значеннях параметрів завжди має один стан рівноваги O_1 з координатами

$$m_1 = 0, n_1 = n_{01}.\tag{3.5}$$

і не може мати більше трьох станів рівноваги. Крім $m = 0$, рівняння (3.3) маємо ще два корені

$$\begin{aligned}m_{23} &= \frac{1}{2} \left(n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho} \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left(n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} (n_{01} - n_{02} - 1)}\end{aligned}\tag{3.6}$$

(перший індекс 2 відповідає знаку плюс перед радикалом, другий – 3 – знаку мінус), що у випадку, коли вони дійсні, є абсцисам двох інших станів рівноваги системи (3.1): O_2 і O_3 . В подальшому, досліджуючи розбиття простору параметрів на області з різною якісною структурою, природньо розглядати характер розбиття квадранта площини (n_{01}, n_{02}) , що відповідає $n_{01} > 0, n_{02} > 0$, при різних значеннях ρ і G . На площині (n_{01}, n_{02}) точкам прямої

$$n_{01} - n_{02} - 1, \quad (3.7)$$

очевидно, відповідають системи (3.1), що мають двократні стани рівноваги з координатою m , яка дорівнює нулю, то точкам кривої (параболи)

$$\Delta_{23} = \frac{1}{4} \left(n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - 1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} (n_{01} - n_{02} - 1) = 0 \quad (3.8)$$

– системи, що мають двократний стан рівноваги, які отримуються внаслідок злиття станів рівноваги O_2 і O_3 . Досліджуючи рівняння параболи звичайними методами, неважко побачити, що при $\rho < 1$ вона розміщена поза розглянутим квадрантом площини (n_{01}, n_{02}) , а при $\rho > 1$ в цьому квадранті [8].

Крім цього, не важко помітити, при $\rho < 1$ корінь m_3 від'ємний, а отже, у системи (3.1) при n_{01}, n_{02} значеннях вище прямої (3.7) – два стани рівноваги, а нижче – один – O_1^2 .

У випадку $\rho > 1$ для області значень $n_{01}, n_{02}, \Delta_{23} < 0$ система (3.1) має один стан рівноваги – O_1 . а для області значень, де $\Delta_{23} > 0$ (нижче прямої (3.6)) – три стани рівноваги O_1, O_2, O_3 . Пряма (3.7) в цьому випадку, також відповідає системам з кратними станами рівноваги. Загальна точка N параболи (3.8) з прямою, що відповідає динамічній системі з трьохкратним станом рівноваги і ділить пряму (3.7) на дві частини Δ_{12} і Δ_{13} (Δ_{12} відповідає злиттю O_1 і O_2 , а Δ_{13} – злиттю O_1 і O_3). На рис. 3.1-3.3 цифрами *I, II, III* вказані відповідно області площини параметрів, при яких система має один, два або три стани рівноваги з координатою $m \geq 0$ [4].

Розглянемо тепер питання про характер стану рівноваги системи (3.1). Якщо не враховувати відмінності між вузлами і фокусами, то границями в

просторі параметрів, що визначаються областями різного характеру стану рівноваги і різної стійкості вузлів та фокусів, є

$$\Delta = P'_m Q'_n - P'_n Q'_m = G \left[mn - \left(\frac{\rho n_{02} m}{(\rho m + 1)^2} + n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1 \right) (m + 1) \right] = 0, \quad (3.9)$$

$$\sigma = P'_m + Q'_n = -(m + 1) + G \left[\frac{\rho n_{02} m}{(\rho m + 1)^2} + n - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1 \right] = 0, \quad (3.10)$$

де замість m і n підставляються координати відповідних станів рівноваги. Із (3.9) отримуємо (після деяких перетворень) ті ж умови (3.7) і (3.8), що відповідають наявності у системи кратного стану рівноваги [8].

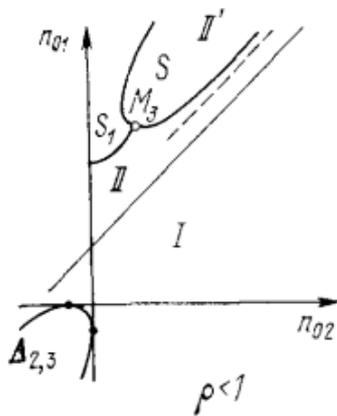


Рис. 3.1

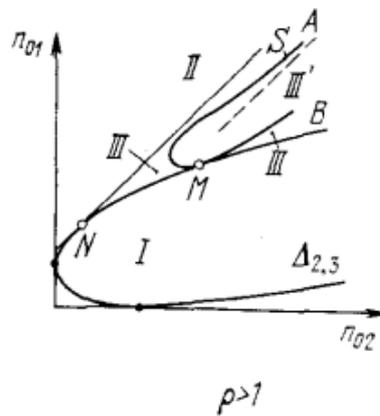


Рис. 3.2

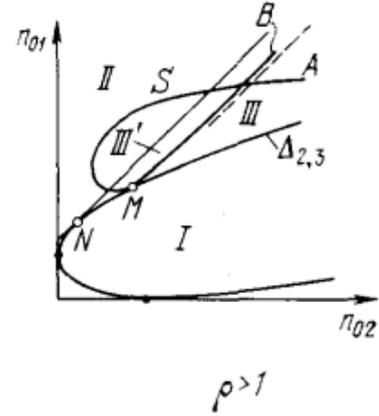


Рис. 3.3

Для того, щоб отримати на площині (n_{01}, n_{02}) криву, що відповідає $\sigma = 0$ (зміні стійкості), потрібно виключити m і n із рівнянь

$$\sigma(m, n) = 0, P(m, n) = 0, Q(m, n) = 0. \quad (3.11)$$

Однак такий виняток дуже складний, і простіше отримати параметричне рівняння цієї кривої. Виключаючи n із

$$P(m, n) = 0, Q(m, n) = 0,$$

отримаємо

$$n_{01}(\rho m + 1) - n_{02}(m + 1) - (\rho m + 1)(m + 1) = 0 \quad (3.12)$$

і покладаючи в (3.10) $n = n_{01}/(m + 1)$, за допомогою (3.10) і (3.12) виражаємо n_{01} і n_{02} через m (m – параметр):

$$n_{01} = \frac{(m + 1)^2(\rho m + 1)}{G\rho m} + m + 1, \quad n_{02} = \frac{(m + 1)(\rho m + 1)^2}{G\rho m}. \quad (3.13)$$

Криву на площині (n_{01}, n_{02}) , що визначена рівняннями (3.13), або рівняннями (3.11), будемо позначати через S . Основні випадки її характеру і розташування відносно кривої Δ_{23} дані на рис. 3.1-3.3. Маємо, що: 1) крива S має вітки, що йдуть у нескінченність при $t \rightarrow 0$ і $t \rightarrow \infty$, і при $t \rightarrow 0$ має асимптоту (штрихова пряма на рис. 3.3); 2) при $\rho > 1$ крива S має одну спільну точку M з кривою, що відповідає значенню $t = \bar{t}$. Неважко переконатись на основі виразів (3.9) і (3.10), що [11]:

А) Стан рівноваги O_1 – сідло, коли $n_{01} - n_{02} - 1 > 0$, і стійкий вузол, коли $n_{01} - n_{02} - 1 < 0$.

Б) У випадку $\rho < 1$ стан рівноваги O_2 , для якого $\sigma = 0$, завжди складний фокус. У випадку $\rho > 1$ стан рівноваги, в якому $\sigma = 0$, є складний фокус O_2 для $t < \bar{t}$ (тобто для вітки AM кривої S) і сідло O_3 для $t > \bar{t}$ (тобто для вітки MB кривої S).

В) При для $\rho > 1$ значень параметрів, що відповідають точці M , система має двократний стан рівноваги, для якого $\sigma = 0$. В точці M крива S дотикається до кривої Δ_{23} . Точкою M крива (Δ_{23}) ділиться на дві частини. Точки однієї відповідають системі (3.1), що має сідло-вузол з стійкою вузловою областю, а точки другої частини – з нестійкою вузловою областю. На рис. 3.1-3.3 штрихами вказані області, де стан рівноваги O_2 відповідно стійкий ($\sigma < 0$) і нестійкий ($\sigma > 0$). Очевидно, при переході в площині (n_{01}, n_{02}) через криву S у системі (3.1) можливе народження граничних циклів [8].

Покажемо спочатку, що існує замкнена область в фазовому просторі, що містить всі стани рівноваги, в середину якої входять траєкторії системи. Дійсно, розглядаючи прямі $\Gamma_1: n = 0, \Gamma_2: n = n_{01}$, можна показати, що всі траєкторії входять в полосу, що обмежена цими прямими.

Розглядаючи поле напрямків на прямій $\Gamma_3: t = C_1$ де C_1 – деяка додатна стала, для $n_{01} \leq 1$ отримаємо, що траєкторії перетинають цю пряму зверху вниз. Таким чином, для $n_{01} \leq 1$ існування замкненої області показано, а для $n_{01} > 1$ необхідно ще розглянути поле напрямків на прямій $\Gamma_4: t = -G(n_{01} - 1)n + C_2$. Вибираючи C_2 достатньо великим, можна переконатись, що

на інтервалі $1 < n_1 \leq n_{01}$ траєкторії перетинають цю пряму справа наліво, тобто існує область, всередину якої входять всі траєкторії системи (3.1) [16].

Взявши до уваги той факт, що існують значення параметрів, при яких система має один стан рівноваги, що лежить на інтегральній прямій $m = 0$, а також враховуючи, що стан рівноваги O_3 – сідло, можна стверджувати:

а) якщо граничні цикли існують, то вони обов'язково охоплюють стан рівноваги O_2 ;

б) граничних циклів в області значень параметра I , включаючи границі – пряму (3.7) і криву (3.8) може і не бути;

в) так як існує область фазового простору, в середину якої входять всі траєкторії системи і, крім того, при переході із області значень параметрів II в області II' стан рівноваги O_2 (що лежать вище інтегральної прямої $m = 0$) змінює стійкість, то повинен існувати хоча б один стійкий граничний цикл.

Покажемо, що в деяких випадках у системи може існувати два граничних цикла. Розглянемо вираз для першої ляпуновської величини

$$L(m) = \frac{\pi(m+1)}{4\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{f(m)}{m(\rho m + 1)^2},$$

де $f(m) = \rho(\rho + G\rho - 1)m^2 + 2(\rho - 1 - G\rho)m + \rho + 1$.

1) $\rho < 1$. В цьому випадку, очевидно, існує не більше двох станів рівноваги, сідло лежить на прямій $m = 0$, і, очевидно, його сепаратиси не можуть утворювати петлю (рис. 3.4).

Можливі два випадки:

а) $\rho - 1 + G\rho < 0$. Рівняння $f(m) = 0$ не має додатних коренів, $L(m) < 0$ при всіх m .

б) $\rho - 1 + G\rho > 0$. Границя області стійкості S складається із двох частин, на одній із яких $L < 0$, а на іншій $L > 0$;

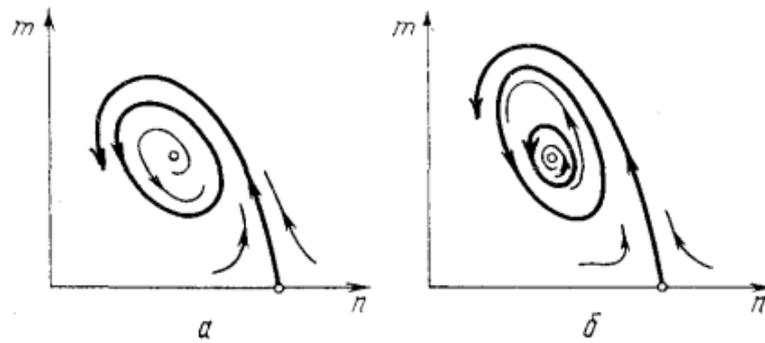


Рис. 3.4. Сідло на прямій $m = 0$

в точці M_3 , граничної для цих частин, $L = 0$. В точках, де $L < 0$, при переході із області, де $\sigma < 0$, в область, де $\sigma > 0$, у системі із фокуса впливає стійкий граничний цикл, а в точках, де $L > 0$, при зворотному переході із області, де $\sigma > 0$, в область, де $\sigma < 0$ впливає нестійкий граничний цикл.

Особливості в поведінці системи в околі тих значень, при яких $L = 0$, можна вяснити, встановлюючи знак другої величини L_2 . Одна можна розглянути можливості, які тут можуть мати місце і без знаходження цієї величини.

Якщо, виходячи із достатньо близької до прямої (3.7) точки, в якій немає граничних циклів, перейдемо із області $\sigma < 0$ в область $\sigma > 0$ через частини кривої S , де $L < 0$, то при цьому у системі народжується стійкий граничний цикл. Поки крива S не перетнеться знову, цей стійкий граничний цикл збережеться (якщо в області $\sigma > 0$ є точки, що відповідають двократним циклам, то тоді в будь-якому випадку число стійких циклів в цей час буде на одиницю більше, ніж нестійких). Якщо межа S ділиться на частини, де $L > 0$ переходячи із області $\sigma > 0$ в область $\sigma < 0$, то при цьому у системі із фокуса народжується нестійкий граничний цикл, стійкий же зберігається, і таким чином тепер у системі є стійкий і нестійкий граничні цикли (або однакове число і тих і інших).

Якщо, не перетинаючи криву S повернемося в область поблизу прямої (3.7), де немає граничних циклів, то неодмінно повинні пройти через значення параметрів, при яких ці граничні цикли зникають. Отже, повинна бути біфуркація, при якій стійкі і нестійкі цикли зливаються, утворюючи парно

кратний цикл, який потім зникне. Неодмінно існує, в області параметрів, де $\sigma > 0$, біфуркаційна крива S_1 , що впирається в точці M_3 і відповідає парно кратному циклу.

Можливі якісні структури на фазовій площині, показані на рис. 3.4 [8, 11].

2) $\rho > 1$. В цьому випадку у кривих Δ_{23} і S є спільна точка \bar{M} (припустимо, що вона лежить на частині S , де $L < 0$). При значеннях n_{01} і n_{02} , що відповідають цій точці, у системи є двократний стан рівноваги, для якого $\sigma = 0$.

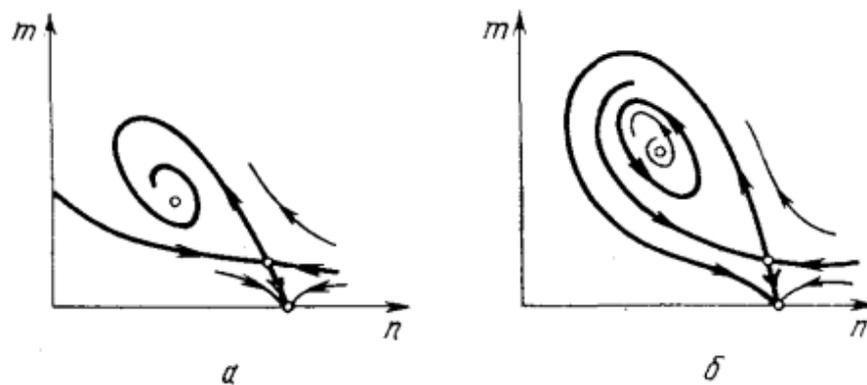


Рис. 3.5. Сепаратиси сідла

При біфуркації такої точки (при наявності незалежних параметрів) завжди з'являється петля сепаратиси, а також граничний цикл.

На площині (n_{01}, n_{02}) існує біфуркаційна крива S_1 , що впирається в точку M , що відповідає петлі сепаратиси.

Існування такої кривої, тобто існування петлі сепаратиси у системі (3.1) при деяких значеннях n_{01} і n_{02} можна також встановити, розглядаючи можливу поведінку двох сепаратрис сідла O_3 (по розташуванню ізоклін, а також за характером стану рівноваги близько кривої Δ_{23}) і переходячи при неперервному змінненню параметрів від розташування, поданого на рис. 3.5, а, до розташування, поданому на рис. 3.5, б. На рис. 3.5 подані деякі розбиття фазової площини [5].

Розглянемо систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma - \sin\varphi - \lambda(1 - d\cos\varphi)y. \quad (3.14)$$

Будемо припускати $\gamma \geq 0$ і $\lambda \geq 0$ (інші можливі випадки зводяться до розглянутої заміни змінних).

В циліндричному фазовому просторі (на смузі $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ з ототожненими краями) стани рівноваги будуть $O_1(\arcsin \gamma, 0)$ – фокус або вузол, $O_2(\pi - \arcsin \gamma, 0)$ – сідло.

Злиття і зникнення особливих точок – найпростіша біфуркація, можлива в системі (3.14). Інші можливі біфуркації пов'язані зі зміною стійкості стану рівноваги O_1 , з біфуркаціями сепаратрис, що виходять з сідла в сідло (при цьому з'являються або зникають граничні цикли) і появою граничних циклів із згущення траєкторій, із сепаратриси особливої точки сідло-вузол і з нескінченності. Всі ці біфуркації можуть бути простежені для системи (3.14). Знання всіх біфуркацій дозволяє дати розбиття простору параметрів $\gamma > 0$, $\lambda > 0, d$ на області з різною структурою розбиття фазового простору на траєкторії.

Площину параметрів (λ, d) можна покрити такою сіткою кривих, зміни параметрів вздовж яких здійснює монотонний поворот поля система (3.14). Різниця полів напрямку системи (3.14) з параметрами λ_0 і d_0 та зміненої системи з параметрами λ_1 і d_1 для $y \neq 0$ буде

$$\lambda_1 - d_0 + (\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1) \cos \varphi.$$

Монотонний поворот буде здійснюватися, якщо зміну значень параметрів λ_1 і d_1 вибирати так, щоб виконувалась умова

$$\lambda_0 d_0 - \lambda_1 d_1 = 0.$$

Це рівняння буде виконане, якщо λ і d змінять вздовж k -кривих:

$$\lambda d = k, \quad k = \text{const}, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Сім'я k -кривих покриває всю площину (λ, d) за винятком самих осей λ і d . На прямій $y = 0$ контакт помилковий. Криві вихідної та зміненої систем перетинаються з дотиком по осі φ . Різниця полів напрямів при зміні параметра γ буде $(\gamma_1 - \gamma_0)/y$. При зміні γ поле напрямків на нижньому і верхньому півциліндрах повертається в протилежному напрямку. Пряма $y = 0$ в цьому випадку буде контактною кривою [14].

Стан рівноваги Q_1 буде складним фокусом для поверхні

$$\sigma_1 = (P'_\varphi + Q'_y)_1 = \lambda \left(d\sqrt{1 - \gamma^2} - 1 \right) = 0.$$

При переході через поверхню $\sigma_1 = 0$ в напрямку зростання фокус із стійкого стає нестійким і із нього з'являється єдиний стійкий граничний цикл (перша величина Ляпунова для точок поверхні $\sigma_1 = 0$ має значення $\alpha_3 = - \left[\pi \lambda (1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{4}} \right] / 8 < 0$).

Щоб прослідкувати за зміною якісної структури фазового простору і можливими біфуркаціями при монотонному повороті поля із зміною параметрів вздовж k -кривих, потрібно знати структури розбиття фазового простору на кінцях k -кривих для малих і для великих λ (і відповідно для великих і малих d). Подамо (3.14) у вигляді

$$ydy + \sin\varphi d\varphi = [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)y]d\varphi. \quad (3.15)$$

Із (3.2) буде слідувати

$$\int_C [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)y]d\varphi = 0,$$

якщо C – граничний цикл (3.15). При малих γ і λ граничний цикл, що охоплює циліндр, буде близький до однієї із кривих

$$y_0 = \pm \sqrt{2(\cos\varphi + h)}, \quad 1 < h < \infty,$$

що є розв'язками рівняння (3.15) при $\gamma = \lambda = 0$. Значенню $h = 1$ відповідає сепаратриса, що виходить із сідла в сідло. Значення константи h , що виділяє криві консервативної системи, близько яких для малих γ і λ на верхньому і нижньому півциліндрах будуть існувати граничні цикли системи (3.14), визначаються відповідно як корені рівнянь

$$\begin{aligned} \psi_1(h) &= 0, \quad \psi_2(h) = 0, \\ \psi_{1,2}(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)y_0]d\varphi = \\ &= 2\pi\gamma \mp \lambda \left\{ \frac{8E}{\kappa} - \frac{8d}{3\kappa^3} [2(\kappa^2 - 1)F + (2 - \kappa^2)E] \right\} \equiv \psi_{1,2}(\kappa), \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$h > 1, \quad \kappa^2 = \frac{2}{h+1}.$$

Тут F і E – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду з модулем κ ; верхній знак для $\psi_1(\kappa)$, нижній знак для $\psi_2(\kappa)$. Граничний цикл, що відповідає кореню $\kappa = \kappa_0$, буде стійким, якщо $y_0 \psi'_{1,2}(\kappa_0) > 0$.

Функції $\psi_{1,2}$ до визначаються для $\kappa = 1$ їх граничними значеннями $\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{2}\lambda(d-3)$ і $\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{2}\lambda(d-3)$. Із (3.16) випливає, що для будь-яких d буде $\psi_1(0) = -\infty$, $\psi_2(0) = +\infty$, а також що при $d \geq 0$ похідна $\psi'_{1,2}$ не змінює знаку в інтервалі $0 \leq \kappa \leq 1$. Звідси одразу слідує, що якщо для $d \geq 0$ виконується умова

$$\psi_1(1) = 2\pi\gamma + \frac{8}{2}\lambda(d-3) > 0, \quad (3.17)$$

то на верхньому півциліндрі є єдиний стійкий граничний цикл, що охоплює циліндр, а якщо виконується умова

$$\psi_2(1) = 2\pi\gamma - \frac{8}{2}\lambda(d-3) < 0, \quad (3.18)$$

то на нижньому півциліндрі є єдиний стійкий граничний цикл. Якщо виконується умова (3.18), то виконується і умова (3.17). Вимога малості правої частини (3.15) ($\gamma < \varepsilon, \lambda < \varepsilon, \lambda|d| < \varepsilon$) виділяє на площині (λ, d) необмежену на d області дотичну до осі $\lambda = 0$ і таку, що містить криві $\psi_1(1) = 0$ і $\psi_2(1) = 0$. Рівняння $\psi_2(1) = 0$ при малому γ в площині параметрів λ, d (не малих) дає при $\lambda \rightarrow 0$ асимптотичному представленні кривої, що виділяє область площини параметрів, для точок якої в фазовому просторі системи (3.14) є стійким граничним циклом як на нижньому, так і на верхньому півциліндрах. При цьому $d > 0$ і стан O_1 рівноваги буде нестійким. Якісна структура фазового простору в цій області представлена на рис. 3.6, 1 [8].

Розглянемо поведінку α - і ω -сепаратрис сідла на верхньому півциліндрі при більших $\lambda, 0 < |d| < 1$ і $0 \leq \gamma \leq 1$. Якщо ω -сепаратриса сідла потрапляє в область вище максимуму ізокліни горизонтальних нахилів $u_{max} < (1 + \gamma)/[(1 - |d|)\lambda]$, то, очевидно, граничні цикли, що охоплюють циліндри, не можуть існувати. Такі значення параметрів можна вибрати при

більших λ . Напрямок, при якому траєкторії системи (3.14) входять в сіло O_2 визначаються рівняннями

$$\zeta^2 + \lambda(1 + d\sqrt{1 - \gamma^2})\zeta - \sqrt{1 - \gamma^2} = 0.$$

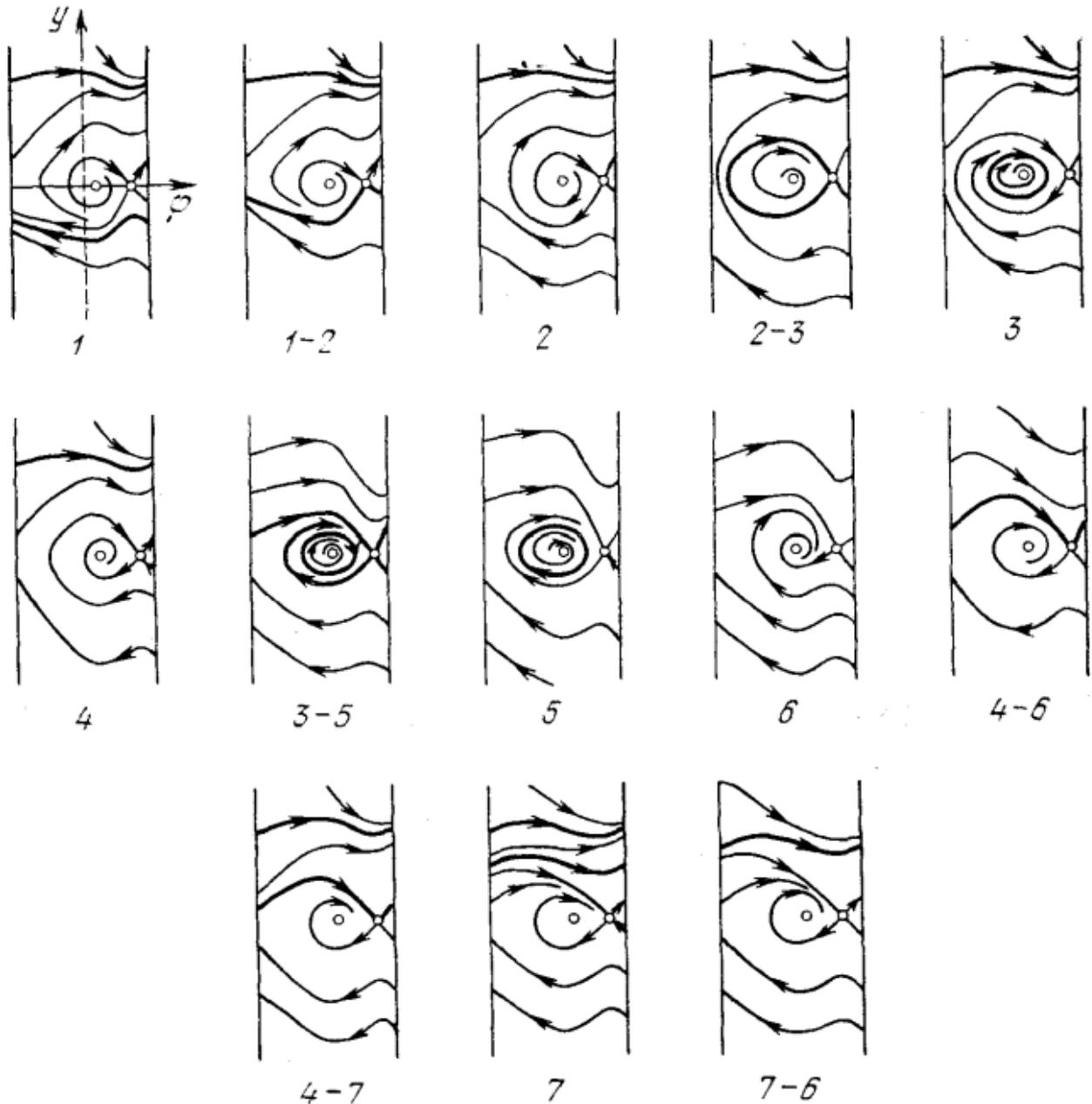


Рис. 3.6. Фазові простори

Для $0 \leq \gamma \leq 1$ один корінь завжди від'ємний і відповідає напрямку, по якому ω -сепаратриса входить в сідло. Нехай на деякій прямій $\varphi = \varphi_0$ відмічена координата η_0 точки перетину прямої з ω -сепаратрисою сідла. Якщо з зростанням λ рухається в просторі параметрів вздовж k -кривих, то векторне поле буде монотонно повертатися за часовою стрілкою і координата η_0 на прямій $\varphi = \varphi_0$ буде зростати, а максимум ізокліни спадають. Тому завжди

можна вибрати λ і d так, щоб нерівність $(1 + \gamma)/(1 - |d|)\lambda < \eta_0$ виконувалась.

Для вказаних значень параметрів граничні цикли не можуть існувати також на нижньому півциліндрі, так як якщо там існує замкнений контур, що складається із траєкторної системи (3.14), то повинно бути

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\gamma - \lambda(1 - d\cos\varphi)]y d\varphi = 0.$$

Але це неможливо при $y(\varphi) < 0$, $|d| < 1$ і додатних λ і γ . При $|d| < 1$ стан рівноваги O_1 – стійкий фокус або вузол. Граничний цикл біля стану рівноваги не можуть існувати при $|d| < 1$, так як тут $P'_\varphi + Q'_y = -\lambda(1 - d\cos\varphi) \neq 0$. Якісна картина фазового простору для достатньо великих λ на будь-якій кривій $\lambda d = k$ подано на рис. 3.6, 6 [12].

Розглянемо випадок $d > 0$. Умова $\psi_2(1) \equiv 2\pi\gamma - \frac{8}{3}\lambda(d - 3) = 0$ при малих γ і λ дає в площині асимптотичне представлення кривої, що виділяє область площини (λ, d) параметрів, що відповідає якісній структурі, представлений на рис. 3.6, 1.

Для $k < (3/4)\pi\gamma$ криві не входять в область, що визначається умовою (3.18). Для $k > (3/4)\pi\gamma$ існують k -криві, що лежать своєю частиною в області, що визначає вимоги малості величин γ, λ і λd і з'єднує області простору параметрів, що відповідають структурам розбиття, представленим на рис. 3.6, 1 і 3.6, 6.

Неважко виявити, простеживши за появою граничних циклів із нескінченності при малих γ і λ , що будь-яка k -крива, що не належить області $\lambda d < \varepsilon$, також з'єднує області простору на рис. 3.6, 1, 6. Змінення параметрів λ і d вздовж k -кривих визначає монотонний поворот векторного поля [8].

Розглянемо поведінку при цьому сепаратрис сідла. Для структури розбиття фазового простору, представленої на рис. 3.6, 1, на прямій $\varphi = \varphi_0$, що проходить через точку O_1 , відмітимо найближчі до сідла точки перетину з α - і ω -сепаратрисами: P_1 на α -сепаратрисі на нижньому півциліндрі, P_2 на

ω -сепаратрисі на нижньому півциліндрі, P_5 на α -сепаратрисі на верхньому півциліндрі, P_4 на ω -сепаратрисі на верхньому півциліндрі і P_3 – другу точку перетину на ω -сепаратрисі, що іде до стану рівноваги O_1 (рис. 3.7).

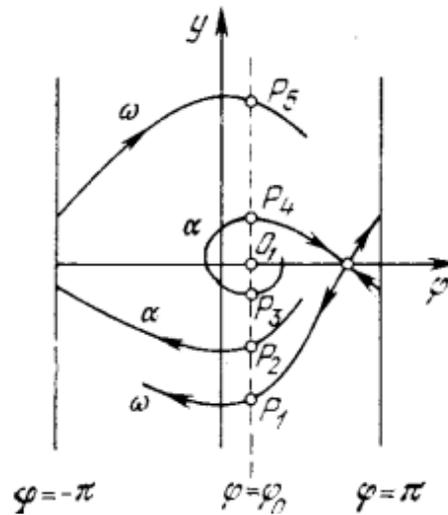


Рис. 3.7 Точки перетину сепаратрис

При зростанні λ вздовж k -кривих поле напрямків повертається за годинниковою стрілкою і точки P_1 і P_4 монотонно підіймаються, а точки P_2, P_3 і P_5 монотонно опускаються. Можливі біфуркації відповідають збігу точок P_2 і P_5 монотонно опускаються. Можливі біфуркації відповідають збігу точок P_2 і P_1 , після цього точок P_3 і P_1 , а також точок P_4 і P_5 . Ці біфуркації дійсно виникають, так як при зростанні λ вздовж k -кривих відбувається перехід від структури, що представлена на рис. 3.6, 1 до структури, представленої на рис. 3.6, 6, і при цьому різниці координат $y_3 - y_1$ і $y_5 - y_4$ змінюють знак (індекси при координатах відповідають індексам точок).

Множини точок на площині (λ, d) для яких існує збіг точок P_2 і P_1 (існує петля сепаратриси знизу), P_3 і P_1 (існує петля навколо точки O_1) або P_4 і P_5 (існує петля зверху), утворюють біфуркаційні криві L^-, L^0 і L^+ , що розділяють площину (λ, d) на області, для яких якісні структури відрізняються поведінкою сепаратрис сідла. Поведінка сепаратрис з точністю до парного числа граничних циклів визначає структуру розбиття фазового простору на траєкторії.

Рівняння $\psi_2(1) = 0$ дає для малих γ і λ асимптотичне підставлення L^- -кривої; L^+ -крива (та її частина, яка відповідає $d \geq 0$) починається на осі $d = 0$ (при $d = 0$ для малих і для великих λ будуть відповідно існувати

структури рис. 3.6, 4, 6; при зростанні λ поле монотонно повертається, а отже, існує єдине біфуркаційне значення, що відповідає точці L^+ -кривої).

Крива L^0 міститься між L^- і L^+ . Для малих γ і λ крива L^0 визначається $d = 3$. рівняння Криві L^-, L^0 і L^+ з кожною із k -кривих перетинаються в одній точці і йдуть в нескінченність. Вони не можуть перетинатися, так як при $\gamma > 0$ і будь-яких γ і d не може здійснюватися структура розбиття на траєкторії, при якій сепаратриси сідла утворюють дві петлі на нижньому і верхньому півциліндрах (такій структурі відповідала би точка, в якій перетинаються три криві L^-, L^0 і L^+).

Якщо припустити, що така структура при деякому $\gamma > 0$ здійснюється, то при спаданні γ в силу монотонності повороту векторного поля на верхньому і нижньому півциліндрах (відповідно за і прости годинникової стрілки) обидві петлі руйнуються і виникає структура, в якій і на нижньому, і на верхньому півциліндрах α -сепаратриса розміщується нижче ω -сепаратриси. Тільки від такого розміщення сепаратрис може з'явитися при зростанні γ подвійна петля, яка утворена сепаратрисами сідел. При $\gamma = 0$ і будь-яких γ і d такого розташування сепаратрис не може бути через симетрію поля напрямків відносно початку координат; і при зростанні γ воно не може виникнути, так як через різні напрямки повороту поля на нижньому і верхньому півциліндрах при зростанні γ точки α -сепаратрис на кожному півциліндрі можуть тільки підніматися а точки ω -сепаратрис – тільки опускатися.

Із вказаного випливає, що при зростанні λ вздовж k -кривих, що з'єднують структури, подані на рис. 3.6, 1, 6 ($k > (3/4)\pi\gamma$), здійснюється така послідовність біфуркацій, при якій спочатку збігаються точки P_2 і P_1 , потім точки P_3 і P_1 і нарешті, точки P_4 і P_5 , Криві L^+ і $\sigma_1 = 0$ перетинаються (це слідує із асимптотичного представлення L^+ – кривої рівняння $\psi(1) = 0$), і тому при русі вздовж k -кривих стягування граничного циклу до точки (при перетині лінії $\sigma_1 = 0$) може як передувати стягуванню граничного циклу до петлі сепаратриси (при перетині кривої L^+), так і відбуватись після нього. Крива L^0 не перетинає пряму $\sigma_1 = 0$, на якій фокус змінює стійкість, на відріжку між віссю d і L^+ -

кривою (перетин не можливий при $\gamma = 0$, так як $P'_\varphi + Q'_y$ не змінює знак на $\sigma_1 = 0$, а отже, неможливо і при малих γ) [7-9].

Послідовність якісних структур, що переходять одна в одну при описаній зміні параметрів, представлена на рис. 3.6 двома можливими послідовностями грубих структур: 1-4, 6 або 1-3, 5, 6. Негрубі структури, що відповідають біфуркаційним значенням параметра, позначені двома цифрами, що вказують на грубі структури, які вони розділяють. При русі вздовж k_1 -кривих ($0 < k_1 < (3/4)\pi\gamma$) структура 1 випадає із послідовностей (k_1 -криві не перетинаються криву $\psi(1) = 0$).

Повернемося до випадку $d < 0$. Умова (3.17) виділяє на площині (λ, d) область, для точок якої у фазовому просторі системи (3.14) є стійкий граничний цикл на верхньому півциліндрі. При $d < 0$ стан рівноваги O_1 стійкий. Якісна структура фазового простору в цій області буде такою, як на рис. 3.6, 4. Криві k (для $-(3/4)\pi\gamma < k < 0$) з'єднують області простору параметрів, що відповідають структурам, представленим на рис. 3.6, 4, 6. При зростанні λ вздовж k -кривих точки P_4 і P_5 на ω - і α -сепаратрисах сідла на верхньому півциліндрі (рис. 3.7) монотонно зближаються, збігаються при деякому знаменні $\lambda = \lambda_0(k)$ (відповідно $d = d_0(k)$) і потім монотонно розходяться. Множина точок $(\lambda_0(k), d_0(k))$, відповідає негрубій біфуркаційній структурі, для якої ω - і α -сепаратриси сідла утворюють петлю на верхньому півциліндрі, утворює неперервну криву – продовження L^+ -кривої в область $d < 0$. Через будь-яку точку L^+ проходить одна із $-$ кривих ($-(3/4)\pi\gamma < k < 0$).

Величина сідла $\sigma_2 = (P'_\varphi + Q'_y)_2 = -\lambda(1 + d\sqrt{1 - \gamma^2})$ змінює знак в площині (λ, d) на прямій $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} = 0$. Ця пряма має лише одну точку перетину з L^+ -кривою (так як L^+ не може мати з k -кривими більше однієї точки перетину).

Існує єдине значення $k = k_0$, що розділяє k -криві на два класи: k_1 -криві ($k_0 < k_1 < 0$), що перетинають L^+ при $\sigma_2 < 0$ і k_2 -криві ($-(3/4)\pi\gamma < k_2 < k_0$), що перетинають L^+ при $\sigma_2 > 0$. При малих λ здійснюється структура,

представлена на рис. 3.6, 4. При зростанні (λ вздовж k_1 -кривих граничний цикл опускається, а сепаратриси на верхньому півциліндрі зближаються [8].

При переході через значення λ , що відповідає перетину кривих k_1 і L^+ , виникає і потім руйнується петля сепаратриси на верхньому півциліндрі, в якій стягується стійкий граничний цикл (так як величина сідла $\sigma_2 < 0$). При подальшій зміні параметрів вздовж k_1 -кривих змінення якісної структури не відбувається. Послідовність якісної структури при зростанні λ вздовж k_1 -кривих представлені на рис. 3.6, 4, 3.6, 4-6, 3.6, 6.

При зростанні λ вздовж k_2 -кривих граничний цикл опускається і сепаратриси на верхньому півциліндрі наближаються, але при переході через значення λ , що відповідає перетину кривих k_1 і L^+ , при руйнуванні петлі сепаратриси з'являється нестійкий граничний цикл на верхньому півциліндрі (стійкий граничний цикл не може стягуватися до петлі сепаратриси, так як величина сідла $\sigma_2 > 0$) і виникає структура, представлена на рис. 3.6, 7, з двома граничними циклами, що охоплює верхній півциліндр.

При подальшому зростанні параметра λ вздовж k_2 -кривих граничні цикли монотонно зближаються. Так як для структури на рис. 3.6, 6 граничних циклів немає, то існує на кожній k_2 -кривій точка з координатами $\lambda^{++}(k), d^{++}(k)$, для якої стійкий і нестійкий цикли збігаються, утворюючи напівстійкий граничний цикл. Відповідна груба біфуркаційна структура представлена на рис. 3.6, 7-6. Множина точок $(\lambda^{++}(k), d^{++}(k))$ утворює неперервну L^{++} -криву, що перетинається з кожною із k_2 -кривих в одній точці права від L^+ -кривої і такої, що починається в точці перетину L^+ -кривої з прямою $\sigma_2 = 0$ (рис. 3.8).

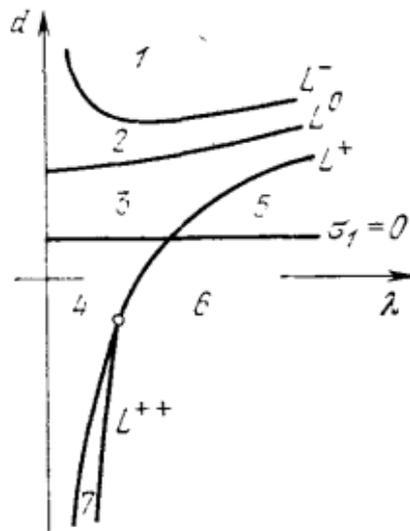


Рис. 3.8. Криві L^- , L^0 і L^+

Послідовність якісних структур при зростанні λ вздовж k_2 -кривих представлена на рис. 3.6, 4; 3.6, 4-7; 3.6, 7; 3.6, 7-6 і 3.6, 6.

Розбиття простору параметрів λ, d при малих γ представлено на рис. 3.8 цифрами 1-8 відмічені області в просторі параметрів, що відповідає грубим структурам в фазовому просторі, що відмічені тими ж цифрами на рис. 3.6. Негрубі структури на рис. 3.6, відмічені двома цифрами, що відповідають біфуркаційним кривим рис. 3.8, що розділяються відповідні області.

Слід зауважити, що визначення L^{++} -кривої спирається на існування L^+ -кривої, що доводиться з залученням методу малого параметра, а отже, для області фазового простору, що обмежена на координаті u . Для подвійних циклів, що розташовані в далеких частинах фазового циліндра, потрібно розглядати подовження L^{++} -кривої [8].

Прослідкуємо за змінами в фазовому просторі та поведінкою біфуркаційних кривих при переході від малих додатних значень γ до немалих в інтервалі $0 \leq \gamma \leq 1$. При зростанні γ стани рівноваги O_1 та O_2 зближуються. Поле напрямків на нижньому та верхньому півциліндрах монотонно повертається відповідно за і проти часової стрілки, та при цьому стійкі граничні цикли на верхньому та нижньому півциліндрі піднімаються. Якщо стійкий граничний цикл на верхньому півциліндрі існує для деякого γ_0 , то він буде існувати і для всіх $\gamma > \gamma_0$. Якщо для деякого γ_0 , існує петля на нижньому або

верхньому півциліндрах, то при зростанні γ петля знизу знищується без появи граничного циклу, а петля зверху – з появою стійкого граничного цикла. Точки L -кривої, поділяючої області 1 та 2 на рис. 3.8, при зростанні γ стають внутрішніми точками області 2. При зростанні γ точки L^+ -кривої стають внутрішніми точками областей 3 та 4, а точки L^{++} -кривої – внутрішніми точками областей 4 та 7 (або належать їй межах). Крива L^{++} , яка починається в точці перетину L^+ з прямою $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} = 0$, не існує вище прямої (припускається про існування таких точок приводить до необхідності існування для двох значень γ_1 та γ_0 точок перетину кривих $L^{++}(\gamma_1)$ та $L^{++}(\gamma_0)$, що неможливо через монотонність повороту поля у півциліндрі при монотонному зміні γ), та тому умови $1 + d\sqrt{1 - \gamma^2} < 0$, може бути оцінкою області існування структури розкладання фазового циліндра, з двома граничними циклами на верхньому півциліндрі, продемонстровані на рис. 3.6, 7. Область 7 простору параметрів, відповідає структурі на рис. 3.6, 7, з поверненням γ опускається.

При зростанні γ до значення $\gamma = 1$ стани рівноваги O_1 та O_2 зливаються утворюючи складну особливу точку сідло-вузол, а область 1-3, 5 та рис. 3.8 ідуть в безкінечність. На площині єдиною біфуркаційна крива буде L^+ -крива (її існування виходить з роздумів, аналогічних роздумам у випадках малих γ , які ґрунтуються на існуванні при $\gamma = 1$ деякі околиці осі d , для точок які є стійким граничним циклом на верхньому півциліндрі). Простір параметрів та структури розкладання фазового простору зображені на рис. 3.9.

При $\gamma > 1$ існує єдина структура розкладання фазового простору на траєкторії. Всі траєкторії накручуються на стійкий граничний цикл на верхньому півциліндрі (рис. 3.10). При зростанні γ від значення $\gamma = 1$ при λ та d , взятих з області 1 рис. 3.9, зникає стан рівноваги сідло-вузол. При значеннях λ та d , взятих з області 2, відбувається поява стійкого граничного цикла з α -сепаратриси сідло-вузла.

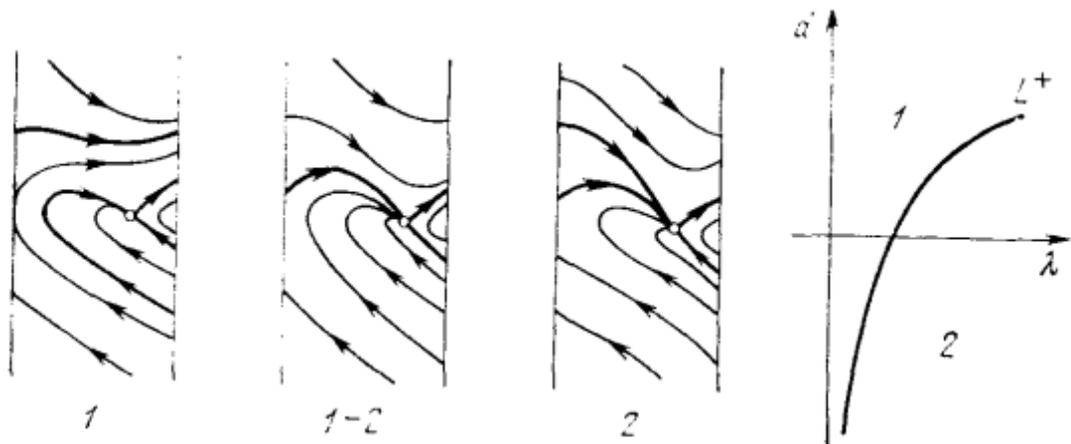


Рис. 3.9. Простір параметрів та структури розкладання фазового простору

При $\gamma = 0$ фазовий простір симетричний відносно початку координат (рис. 3.11). Стан рівноваги буде $O_1(0,0)$ та $O_2(0, \pm\pi)$. Якщо існує петля сепаратиси на верхньому півциліндрі, то існує і петля знизу. Така подвійна петля формує також замкнутий контур навколо стану рівноваги O_1 . Це означає, що криві L^-, L^0 та L^+ співпадають. При $\gamma \rightarrow 0$ криві L^- та L^+ зближуються та зливаються при $\gamma = 0$ з віссю d та L^0 -кривою. Точки L^{++} -кривої при зниканні γ стають внутрішніми точками області 6 (рис. 3.8).

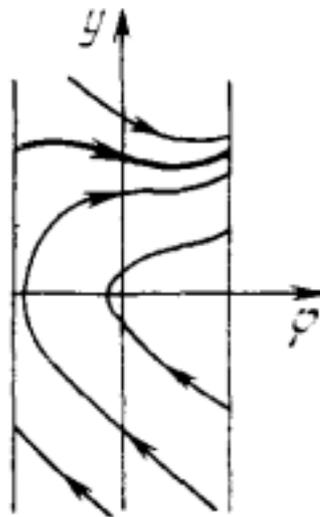


Рис. 3.10

Область 7 не може зберегтися при $\gamma = 0$, так як це означало б, що при достатній кількості малих γ буде існувати чотири цикла. При $\gamma \rightarrow 0$ крива L^{++} вклинюється в напівпряму $\lambda = 0, d < -1$. При $\gamma = 0$ на площині параметрів (λ, d) буде єдина біфуркаційна L -крива, виникаюча із зливання кривих L^-, L^0 , та L^+ . Крива L починається в точці $(\lambda = 0, D = 3)$ та переходить в

безкінечність. Вона не може перетнути ні пряму $d = 1$ (так як $P'_\varphi + Q'_y = -\lambda(1 - d \cos \varphi)$ не змінює знак при $|d| \leq 1$), ні пряму $\lambda = 0$ (так як з-кривими не може бути більше одної точки перетину). При переході через L -криву вздовж k -кривих при зростанні λ та виникненню подвійної петлі до кожної напівпетлі зтягується, стійкий граничний цикл (так як величина сідла $(P'_\varphi + Q'_y)_2 = -\lambda(1 + d)$ від'ємна, а векторне поле повертається за часовою стрілкою). При подальшій зміні λ і знищення петлі від подвійної петлі, розглядається як закритий контур, охоплюючий стан рівноваги O_1 , з'являється стійкий граничний цикл, охоплюючий цей стан рівноваги. Граничний цикл зтягується в точку при $d = 1$, та фокус стає стійким. Простір параметрів та структури розбиття фазового простору для $\gamma = 0$ зображені на рис. 3.11 [13, 18].

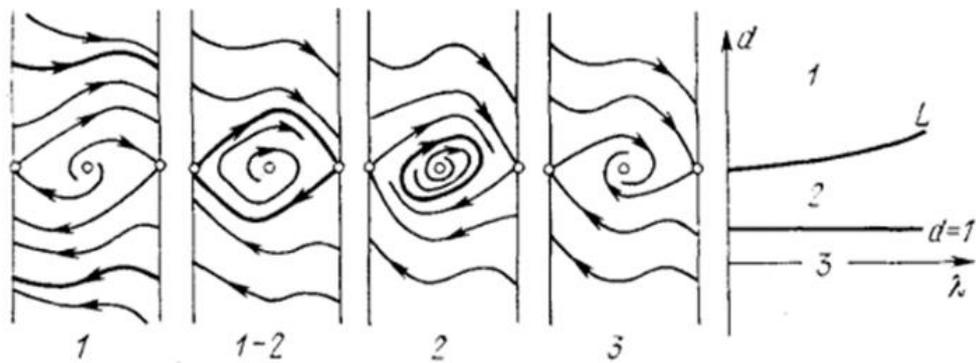


Рис. 3.11. Простір параметрів та структури розбиття фазового простору

3.2. Застосування у біології

Розглянемо класичну модель взаємодії видів, яка вперше була запропонована В. Вольтеррою в тридцяті роки ХХ століття для пояснення періодичних змін числа особин, так звану вольтеррівську модель «хижак-жертва».

Нехай в деякому замкненому районі живуть хижаки і жертви, наприклад, зайці і вовки. Зайці харчуються рослинною їжею, що є завжди в достатній кількості. Вовки можуть харчуватися лише зайцями. Позначимо число зайців (жертв) x , а число вовків (хижаків) – y . Так як кількість їжі у зайців необмежена, можемо припустити, що вони розмножуються зі швидкістю, яка пропорційна їх числу: $\varepsilon_x \cdot x$. Якщо народжуваність зайців перевищує їх

смертність, $\varepsilon_x > 0$ то цей вираз відповідає автокатолітичній реакції першого порядку [19].

Нехай спад зайців пропорціональний ймовірності зустрічі зайця з вовком, тобто пропорціональний добутку їх чисельностей $x \cdot y$. Можна припустити за аналогією з бімолекулярними реакціями, де ймовірність появи нової молекули пропорційна ймовірності зустрічі двох молекул, що і кількість вовків зростає тим більше, чим частіше відбувається їх зустріч з зайцями, а саме, пропорційно $x \cdot y$. Крім того, має місце процес природньої смертності вовків, причому швидкість смертності пропорційна їх кількості [20].

Ці роздуми приводять до системи рівнянь для зміни чисельності зайців-жертв до вовків-хижаків y :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_x \cdot x \cdot y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma_y \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y.$$

Покажемо, що ця система рівнянь має на фазовій площині ненульову особливу точку типу центр. Координати цієї точки (x^*, y^*) легко знайти, прирівнявши праві частини рівнянь системи до нуля. Це дає стаціонарні ненульові значення:

$$x^* = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_y}, \quad y^* = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_x}.$$

Так як всі параметри додатні, точка (x^*, y^*) розташована в першій чверті фазової площини. Лінеаризація системи в околі цієї точки дає наступне:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\left(\varepsilon_y \cdot \frac{\gamma_x}{\gamma_y}\right) \cdot \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\left(\varepsilon_x \cdot \frac{\gamma_y}{\gamma_x}\right) \cdot \xi.$$

Тут ξ, η – відхилення x, y чисельностей від їх стаціонарних значень. Характеристичне рівняння лінеаризованої системи

$$\lambda^2 + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y = 0$$

має уявні корені. Таким чином, дослідження системи показує, що фазові траєкторії в околі особливої точки є концентричними еліпсами, а сама особлива точка – центром. Як була зауважено раніше, особлива точка типу центр стійка за Ляпуновим, але не асимптотично. Це проявляється в тому, що при переміщенні зображувальної точки ближче до особливої (або далі від неї) не

відбувається повернення до колишньої траєкторії, а виникає нове стійке коливання іншої амплітуди.

Розглянута модель Вольтерра має і замкнені траєкторії, хоча форма цих траєкторій уже відрізняється від еліпсоїдальної і визначається параметрами системи. Зміни чисельності жертв і хижаків у часі являють собою коливання, причому коливання чисельності хижаків відстає по фазі від коливання чисельності жертв [22].

В літературі є дані про коливання чисельності хутрових звірів за даними компанії Гудзонового заливу про число заготовлених шкурок. У всіх класичних підручниках протягом багатьох років коливальний характер цих змін наводили як підтвердження гіпотез, що покладені в основу моделі Вольтерра. Дійсно, періоди коливань чисельності зайців (жертв) і рисей (хижаків) приблизно однакові і складають порядку 9-10 років. При цьому максимум чисельності зайців випереджає, як правило, максимум чисельності рисей на один рік. Можна вважати, що регулярні коливання ускладнені випадковими факторами, пов'язаними з погодою та іншим. Однак можлива і інша інтерпретація цих даних спостережень на основі моделей детермінованого хаосу [21].

Серйозним недоліком розглянутої моделі Вольтера є нестійкість розв'язків по відношенню до малих випадкових впливів, що приводять до змін змінних. Крім того, в силу «не грубості» цієї системи малі зміни виду правої частини рівняння (величин параметрів системи) приведуть до зміни типу особливої точки, а отже, до зміни характеру фазових траєкторій. Оскільки природні системи піддаються великій кількості випадкових впливів, реалістична модель може бути по відношенню до них стійкою. Тому не грубі системи не можуть давати адекватний опис природних явищ. Різні модифікації розглянутої системи, що вивчав Вольтерра та інші автори, позбавлені цих недоліків [19-22].

Зупинимось детальніше на моделі, яка враховує самообмеження в рості обох популяцій. На її прикладі видно, як може змінюватися характер розв'язків при зміні параметрів системи.

Отже, розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_x \cdot x \cdot y - \delta_x \cdot x^2, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma_y \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y - \delta_y \cdot y^2.$$

Нові квадратичні члени системи відображають той факт, що чисельність популяції жертв не може рости до нескінченності навіть за відсутності хижаків в силу обмеженості харчових ресурсів, ареалі існування та інше. Такі ж «самообмеження» накладаються на популяцію хижаків [20].

Система має два стаціонарних розв'язки: нульовий і ненульовий. Аналіз показує, що нульовий розв'язок являє собою нестійкий вузол, а ненульовий розв'язок при різних співвідношеннях параметрів являє собою або стійкий фокус, або стійкий вузол. В цьому, і в іншому випадку стаціонарний стан асимптотично стійкий і розв'язок стійкий до малих змін правих частин рівнянь. Таким чином, самообмеження популяції приводить до стійкості її чисельності.

3.3. Застосування у економіці

Одним із прикладів застосування динамічних систем в економіці є задача про зміну зарплати та зайнятості.

Ринок праці, на якому взаємодіють роботодавці на наймані працівники, характеризується зарплатою $p(t)$ і числом працівників $N(t)$. Нехай на ньому існує рівновага, тобто ситуація, коли за оплату $p_0 > 0$ згодні працювати $N_0 > 0$ людей. Якщо з яких-небудь причин ця рівновага руйнується (наприклад, за віком частина працівників йде на пенсію або у підприємців вникають фінансові труднощі), то функції $p(t)$ і $N(t)$ відхиляються від значень p_0, N_0 .

Будемо вважати, що роботодавці змінюють зарплати пропорційно відхиленню чисельності працівників від значення рівноваги. Тоді

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0), \quad \alpha_1 > 0.$$

Припустимо, що число працівників збільшується або зменшується також пропорційно зростанню або спаданню зарплати, тобто

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), \quad \alpha_2 > 0.$$

Диференціюючи перше рівняння по t і виключаючи із нього за допомогою другого рівняння величину N , приходимо до стандартної моделі коливань

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2(p - p_0)$$

заробітної плати відносно стану рівноваги (аналогічно і для величини $N(t)$). Із першого інтегралу цього рівняння

$$\alpha_1(N - N_0)^2 + \alpha_2(p - p_0)^2 = \text{const} > 0$$

видно, що в деякі моменти $t = t_i, i = 1, 2, \dots$, коли $p = p_0$ (тобто зарплата стає рівною значенню рівноваги), маємо $N > N_0$, тобто число працівників більше числа рівноваги, а при $N = N_0$ отримаємо $p > p_0$, тобто зарплата перевищує рівноважну. В цей момент фонд заробітної плати, рівний pN , перевищує значення рівноваги p_0N_0 (або менше нього), якщо при переході до моменту t_i виконано $p > p_0$ або $N > N_0$ (а навпаки). Але в середньому за період коливань величина pN дорівнює p_0N_0 [21].

Іншим прикладом є модель організації рекламної кампанії.

Нехай фірма починає рекламувати новий товар чи послугу. Зрозуміло, що прибуток від майбутніх продажів повинен повністю покривати витрати на дороговартісну кампанію. Спочатку витрати можуть перевищувати прибуток, оскільки лише мала частина потенційних покупців буде інформована про новинку. Потім, при збільшенні числа продажів, уже можна розраховувати на помітний прибуток, і, нарешті, настає момент, коли ринок насититься, і рекламувати товар далі стане безглуздо.

Модель рекламної кампанії, засновується на наступних основних припущеннях. Вважається, що величина dN/dt – швидкість зміни з часом числа споживачів, що дізнались про товар і готові його купити (t – час, що пройшов з початку рекламної кампанії, $N(t)$ – числа уже проінформованих клієнтів), - пропорційна числу покупців, які ще не знають про товар, тобто величині $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$, де N_0 – загальне число потенційних платоспроможних покупців, $\alpha_1(t) > 0$ характеризує інтенсивність рекламної

кампанії (фактично визначену затратами на рекламу у даний момент часу). Припускається також, що споживачі, які дізнались про товар тим чи іншим чином поширюють отриману інформацію серед непроінформованих, виступаючи як би додатковими рекламними «агентами» фірми. Їх вклад дорівнює величині $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ і є тим більшим, чим більше число агентів. Величина $\alpha_2(t) > 0$ характеризує ступінь спілкування покупців між собою (вона може бути встановлена, наприклад, за допомогою опитувань) [20].

В результаті отримаємо рівняння

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \quad (3.19)$$

При із (3.19) отримаємо модель типу моделі Мальтуса, при протилежній нерівності – рівняння логістичної кривої

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \quad d\tau = \alpha_2(t)dt.$$

Отримана аналогія цілком зрозуміла, так як при побудові даної моделі і моделі росту чисельності популяції використовувалась одна і та ж ідея «насичення»: швидкість росту з часом якої-небудь величини пропорційна добутку поточного значення цієї величини $N(t)$ на різницю $N_0 - N(t)$ між її значенням рівноваги або граничним і поточним значенням.

Аналогія між обома процесами закінчується, якщо в кожний момент часу величина $\alpha_1 + \alpha_2 N$ стає нульовою або навіть від'ємною (для цього необхідно, щоб один або два коефіцієнти $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ стали від'ємними). Подібний негативний ефект часто зустрічається в рекламних кампаніях різного типу і повинен спонукати їх організаторів або змінити характер реклами, або взагалі відмовитись від подальшої пропаганди. Заходи по збільшенню популяції товару можуть, в залежності від значень величини $\alpha_1(t), \alpha_2(t), N(t)$, спрямовуватись на покращення результатів як прямої (параметр α_1), так і непрямої (параметр α_2) реклами [1].

Модель (3.19) позбавлена очевидного недоліку, що властиво логістичному рівнянню. Дійсно, воно не має розв'язків, що перетворюються в нуль в скінченний момент часу. Стосовно реклами, це означало б, що частина

покупців ще до початку кампанії уже знають про новий товар. Якщо ж розглянути модель (3.19) в околі точки $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ – момент початку кампанії), вважаючи, що $N \ll N_0$, $\alpha_2(t)N \ll \alpha_1(t)$, то рівняння (3.19) набуває вигляду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

і має розв'язок

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (3.20)$$

що задовольняє початковій умові при $t = 0$.

Із (3.20) відносно легко вивести співвідношення між рекламними витратами і прибутком у самому початку кампанії. Позначимо через величину прибутку від одиничного продажу, якою вона б була без витрат на рекламу. Вважаємо для простоти, що кожний покупець купує лише одну одиницю товару. Коефіцієнт $\alpha_1(t)$ за своїм змістом – число рівнозначних рекламних дій в одиницю часу (наприклад, розклейка однакових афіш). Через s позначимо вартість елементарного акту реклами. Тоді сумарний прибуток є

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (3.21)$$

а витрати

$$S = s \int_0^t \alpha_1(t) dt.$$

Прибуток перевищує витрати при умові $pN_0 > s$, і якщо реклама дієва і недорога, а ринок достатньо місткий, то виграш досягається з перших же моментів кампанії (в реальності між оплатою реклами, рекламним впливом і подальшої покупки має місце так званий лаг – тимчасова затримка, яка може бути врахована в більш повних моделях). При не надто ефективній або дорогій рекламі фірма на перших етапах понесе збитки. Однак ця обставина, взагалі то кажучи, не може служити основою для переривання реклами. Дійсно, вираз

(3.21) і отримана з його допомогою умова $pN_0 > s$ справедливій лише при малих значеннях $N(t)$, коли функції P і S ростуть з часом за однаковими законами. При збільшенні $N(t)$ відкинені в (3.19) члени стають помітними, зокрема посилюється дія непрямої реклами. Тому функція $N(t)$ може стати більш «швидкою» функцією часу, ніж у формулі (3.21). Цей нелінійний ефект в змінні величини $N(t)$ при незмінному темпі росту витрат дає можливість компенсувати фінансову невдачу початкової стадії кампанії [20].

Пояснимо дане твердження в частковому випадку рівняння (3.19) з сталими коефіцієнтами α_1, α_2 . Заміною

$$\bar{N} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N$$

воно зводиться до логістичного рівняння

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N} (\bar{N}_0 - \bar{N}), \quad \bar{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0, \quad (3.22)$$

що має розв'язок

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_0 \left[1 + \left(\bar{N}_0 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 \right) \exp(-\bar{N}_0 \alpha_2 t) \right]^{-1}. \quad (3.23)$$

При цьому $\bar{N}(0) = \alpha_1/\alpha_2$, так що $N(0) = 0$, і початкова умова виконується. Із (3.22) видно, що похідна функції $\bar{N}(t)$, а отже, функції $N(t)$ може при $t > 0$ бути більшою її початкового значення (при умові $\bar{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ або $\bar{N}_0 > \alpha_1/\alpha_2$). Максимум похідної досягається при $\bar{N} = \bar{N}_0/2, N = (\alpha_1/\alpha_2 + \bar{N}_0)/2$:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt} \right)_m = \left(\frac{dN}{dt} \right)_m = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + \bar{N}_0)^2}{4}.$$

В цей період для поточної, тобто отриманої в одиницю часу прибутку маємо

$$P_m = p \frac{dN}{dt} = p \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Віднімаючи від P_m початковий поточний прибуток $P_0 = p \left(\frac{dN}{dt} \right)_{t=0} = \alpha_1 N_0$, отримаємо

$$P_m - P_0 = p \frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4}.$$

тобто різниця між початковим і максимальним поточним прибутком може бути дуже значною. Сумарний економічний ефект від кампанії (його необхідною умовою є, очевидно, виконання нерівності $P_m = (\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2/4 > \alpha_1 s$) визначається за її перебігом, характеристики якого знаходяться із (3.22), (3.23) за допомогою квадратур [1].

Як впливає з (3.22), починаючи з деякого моменту, продовжувати рекламу стає невигідно. Дійсно, при $\bar{N}(t)$, близьких до \bar{N}_0 , рівняння (3.22) записується у вигляді

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}_0 (\bar{N}_0 - \bar{N}). \quad (3.24)$$

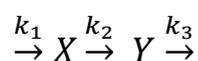
Його розв'язок прямує до граничного значення за повільним експоненціальним законом. За одиницю часу з'явиться мізерно мале число нових покупців, і прибуток, що надходить при будь-яких умовах не може покривати витрат, що продовжуються [20].

Аналогічні характеристики знаходяться для рівняння (3.19) і різних його узагальнень, що широко використовуються також для опису впровадження технологічних та інших нововведень.

3.4. Застосування у хімії

Розглянемо приклад застосування динамічних систем при моделюванні лінійних хімічних реакцій – так зване, рівняння Лотки.

Нехай речовина X надходить ззовні з постійною швидкістю, перетворюється на речовину Y та зі швидкістю, пропорційною концентрації речовини Y , виводиться з області реакції. Усі реакції мають перший порядок, крім припливу речовини ззовні, що має нульовий порядок. Схема реакцій має вигляд



та описується системою рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 \cdot x, \quad \frac{dy}{dt} = k_2 \cdot x - k_3 \cdot y,$$

Стаціонарні концентрації отримаємо, прирівнявши праві частини нулю:

$$x^* = \frac{k_1}{k_2}, \quad y^* = \frac{k_1}{k_3}.$$

Розглянемо фазовий портрет системи. Розділимо друге рівняння системи на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 \cdot x - k_3 \cdot y}{k_1 - k_2 \cdot x}.$$

Це рівняння визначає поведінку змінних фазової площині.

Рівняння ізоклін вертикальних дотичних:

$$\frac{dy}{dx} = \infty; \quad x = \frac{k_1}{k_2}.$$

Рівняння ізоклін горизонтальних дотичних:

$$\frac{dy}{dx} = 0; \quad y = \frac{k_1 \cdot x}{k_3}.$$

Особлива точка (стаціонарний стан) лежить на перетині головних ізоклін. Тепер визначимо під яким кутом перетинаються координатні осі інтегральними кривими. Якщо $x = 0$, то $dy/dx = (-k_3/k_1) \cdot y$. Таким чином, тангенс кута нахилу дотичної до інтегральних кривих, що перетинають вісь ординат $x = 0$, від'ємний у верхній напівплощині (згадаємо, що змінні x, y мають значення концентрацій і тому нас цікавить тільки правий верхній квадрант фазової площини). При цьому величина тангенса кута нахилу дотичної збільшується з видаленням від початку координат.

Розглянемо вісь $y = 0$. У місці перетину цієї осі інтегральними кривими вони описуються рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 \cdot x}{k_1 - k_2 \cdot x}.$$

При $0 < x < k_1/k_2$ тангенс кута нахилу інтегральних кривих, що перетинають вісь абсцис, додатний і збільшується від нуля до нескінченності зі збільшенням x . Потім при подальшому збільшенні тангенс кута нахилу зменшується по абсолютній величині, залишаючись від'ємним, і наближається

до -1 при $x \rightarrow \infty$. Знаючи напрямки дотичних до інтегральних кривих на головних ізоклінах та на осях координат, легко побудувати всю картину фазових траєкторій [23].

Характер стійкості особливої точки встановимо, користуючись методом Ляпунова. Характеристичне рівняння системи має вигляд:

$$\lambda^2 + (k_2 + k_3) \cdot \lambda + k_2 \cdot k_3 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-(k_2 + k_3) \pm \sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4 \cdot k_2 \cdot k_3} \right)$$

обидва дійсні, оскільки дискримінант $D = (k_2 + k_3)^2 - 4 \cdot k_2 \cdot k_3 = (k_2 - k_3)^2$ додатний за будь-яких значень параметрів. \sqrt{D} завжди менший за модулем, ніж $(k_2 + k_3)$, тобто корені характеристичного рівняння обидва від'ємні. Отже, стаціонарний стан системи є стійкий вузол. При цьому концентрація речовини X прагне до стаціонарного стану завжди монотонно, концентрація речовини Y може проходити через *min* чи *max*. Коливальні режими в такій системі неможливі.

ВИСНОВКИ

Магістерська робота присвячена динамічним системам диференціальних рівнянь, дослідженню на стійкість їх розв'язків та застосуванню таких систем до математичного моделювання реальних процесів.

Основні результати роботи:

- ✓ проведено огляд та вивчення навчальної літератури з теми дослідження;
- ✓ проаналізовано задачі, що приводять до диференціальних рівнянь;
- ✓ розглянуто загальні поняття та визначення теорії звичайних диференціальних рівнянь та їх систем;
- ✓ досліджено системи звичайних диференціальних рівнянь;
- ✓ досліджено класифікацію динамічних систем;
- ✓ розглянуто автоколивальні системи та фазові простори;
- ✓ подано приклади застосування динамічних систем.

Матеріали магістерської роботи можуть бути використані у роботі викладачів та студентів при вивченні курсів «Диференціальні рівняння», «Теорія динамічних систем» чи «Математичне моделювання».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. Київ: Київський університет, 2000. 197 с.
2. Борисенко С. Д. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2000. 15 с.
3. Габрусєв Г. В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с.
4. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. Київ : ВПЦ, Київський університет, 2014. 142 с.
5. Гащук, П. М. Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння. Львів : Українські технології, 2002. 607 с.
6. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
7. Лазарєв Ю. Ф. Математичні моделі та методи теоретичного дослідження стаціонарних лінійних динамічних систем. Конспект лекцій. Київ : КПІ, 1991. 156 с.
8. Лазарєв Ю. Ф. Методи теоретичного дослідження нелінійних і нестаціонарних динамічних систем. Конспект лекцій. Київ : КПІ, 1991. 180 с.
9. Новожилова М. В. Моделювання економічної динаміки. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Харків: ХДТУБА, 2006. 140 с.
10. Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. Київ : ВПЦ, Київський університет, 2005. 88 с.
11. Перестюк М. О., Капустян О. В., Фекета П.В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. Київ : ВПЦ Київський університет, 2015. 138 с.
12. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 1993. 334 с.

13. Перестюк М.О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Київ : «ТВіМС», 2004. 225 с.
14. Пічкур В. В. Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень. Київ : Київський університет, 2005. 141 с.
15. Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 348 с.
16. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.
17. Трохимчук, П. П. Нелінійні динамічні системи. Луцьк : Вежа-Друк, 2015. 275 с.
18. Хусаїнов Д. Я., Харченко І. І., Шатирко А. В., Введення в моделювання динамічних систем : Навч. посібник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2010. 130 с.
19. Barbu V. Differential Equations. Springer, Switzerland, 2016. 230 p.
20. Brin M., Stuck G. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press, 2002. 240 с.
21. D. K. Arrowsmith, C. M. Place. An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1990. 432 с.
22. Irwin M.C. Smooth dynamical systems. Singapore .New Jersey, London Hong Kong: World Scientific, 2001. 260 с.
23. Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V. Global attractors of multivalued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. Київ : Наукова думка, 2008. 215 p.
24. Richard Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems. Springer, 2013. 233 с.
25. Robert L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Westview Press, 2003. 350 с.
26. Steven H. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Westview Press, 2014. 528 с.