Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Задачі міжнародних олімпіад з математики

Виконала: студентка II курсу магістратури, групи М-М-21

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Карповець Ганна Олександрівна

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ	7
1.1. Історія становлення олімпіадного руху з математики	7
1.2. Поняття олімпіадних завдань з математики та основні вимоги до них	9
1.3. Аналіз олімпіад різного рівня	12
1.4. Положення про міжнародні олімпіади з математики	16
РОЗДІЛ 2. ЗАВДАННЯ МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД	20
2.1. Задачі міжнародних математичних олімпіад	20
2.2. Задачі з матеріалів журі міжнародних математичних олімпіад	29
2.3. Задачі, запропоновані на національних математичних олімпіадах	35
РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ	40
3.1. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (районний етап)	40
3.1.1. Завдання для учнів 6 класу	40
3.1.2. Завдання для учнів 7 класу	41
3.1.3. Завдання для учнів 8 класу	43
3.1.4. Завдання для учнів 9 класу	45
3.1.5. Завдання для учнів 10 класу	46
3.1.6. Завдання для учнів 11 класу	48
3.2. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (обласний етап)	50
3.2.1. Завдання для учнів 7 класу	50
3.2.2. Завдання для учнів 8 класу	52
3.2.3. Завдання для учнів 9 класу	54
3.2.4. Завдання для учнів 10 класу	55
3.2.5. Завдання для учнів 11 класу	57
3.3. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (заключний етап)	59
3.3.1. Завдання для учнів 8 класу	59
3.3.2. Завдання для учнів 9 класу	63
3.3.3. Завдання для учнів 10 класу	68

3.3.4. Завдання для учнів 11 класу 72
ВИСНОВКИ 77
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 78

ВСТУП

Актуальність теми. Математична освіта має особливе значення для інформаційного суспільства, що формується, оскільки у багатьох галузях людської діяльності спостерігається потреба у фахівцях, які володіють сучасними, універсальними математичними методами моделювання та дослідження реальних процесів та явищ. Важливою тенденцією сучасної освіти є здійснення комплексу заходів щодо приведення системи освіти в відповідність до сучасних світових стандартів. Модернізація загальноосвітньої школи передбачає орієнтацію освіти як засвоєння певної сукупності знань, так і на розвиток особистості.

Потужним засобом розвитку, виявлення здібностей та інтересів учнів є предметні олімпіади.

Під олімпіадною задачею розуміється завдання, якому характерна нестандартність умов і методів розв’язку, що потребують винахідливості. Виходячи з цього розроблено такі вимоги до олімпіадних завдань: вони повинні відповідати програмі курсу математики; бути нестандартними за своєю тематикою, мати оригінальні методи розв’язування; бути максимально зрозумілими, з короткими умовами; допускати варіативність розв’язку; відповідати тому рівню чи тому етапу, де вони пропонуються; бути доступними для розв’язання.

Отже, математична олімпіада – це предметна олімпіада між учнями з розв’язування нестандартних математичних завдань. При організації олімпіади ставиться завдання не тільки виявлення сильних учнів, а й створення спільної атмосфери свята математики, розвитку інтересу до виконання завдань та самостійності мислення.

Олімпіади бувають найрізноманітнішими за рівнем, масштабом, форматом роботи.

Найкращий формат для розуміння рівня підготовки учасників – це очний турнір, яким би масштабним він не був. Саме в такій ситуації, коли крім наявних знань, навичок, розвиненої кмітливості, логіки та розуму більше нічого не можна застосувати для виконання тих чи інших завдань, розкриваються здібності людини, про які вона часом навіть не здогадується. А ось систематичне розв'язування складних задач, у тому числі і на уроках математики в школі, сприяє формуванню нестандартного, критичного мислення у підході до виконання завдань складнішого рівня, ніж ті, що заявлені у шкільному курсі, розвивають логіку та інтелект, сприяють підготовці до розв'язування олімпіадних задач.

Математичні олімпіади і конкурси проводяться по всьому світу. З'явились спеціалісти з їх проведення, виникла «олімпіадна математика» з своєю методичною роботою і своєю літературою.

Учнівські олімпіади з математики в Україні мають давню історію. Перші Київські математичні олімпіади були започатковані у 1935 році. Саме вони стали фундаментом для створення Всеукраїнських олімпіад юних математиків.

Багато науковців зробили свій вклад у створення та розвиток олімпіадного руху в Україні, зокрема: М.О. Давидов, який був першим Головою Всеукраїнської олімпіади, М.Й. Ядренко, який був автором багатьох олімпіадних завдань, В.П. Моторний, М.О. Перестюк [11].

Починаючи з 1993 року збірна України офіційно стала учасником Міжнародних математичних олімпіад.

Таким чином тема ***«Задачі міжнародних олімпіад з математики»*** є актуальною і потребує детального дослідження.

Метою даної магістерської роботи є аналіз задач міжнародних олімпіад з математики.

З цією метою були поставлені такі **завдання** дослідження:

- здійснити огляд навчальної літератури за темою дослідження;
- проаналізувати загальні відомості про математичні олімпіади;
- розглянути положення про міжнародні олімпіади з математики;
- розглянути завдання міжнародних математичних олімпіад;
- підібрати завдання для проведення математичної олімпіади.

Об'єкт дослідження є процес організації та проведення міжнародної математичної олімпіади.

Предметом дослідження є система олімпіадних задач з математики.

Апробація результатів дослідження. За результатами роботи було підготовлено доповідь на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2023 рік. Також за результатами проведених досліджень було опубліковано тези доповіді на тему «Математичні олімпіади як чинник формування ключових компетентностей у здобувачів» на IV Міжнародній студентській науковій конференції «Модернізація та сучасні українські і світові наукові дослідження» (м. Кривий Ріг, 15 вересня 2023 року).

Структура та обсяг роботи. Дипломна робота складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел (26 найменувань). Загальний обсяг роботи складається із 80 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ

1.1. Історія становлення олімпіадного руху з математики

Олімпіадний рух існує з давніх часів і має багату історію. Перша згадка про олімпіади датується XIX століттям. 1886 р. вважається початком олімпіадного руху з математики, оскільки тоді вперше у Румунії відбувся математичний конкурс серед випускників ліцеїв. У багатьох країнах олімпіадам передували різноманітні заочні конкурси з виконання завдань.

Математичні змагання в Італії у XVI столітті, у яких брали участь такі математики як: Нікколо Тарталья, Людовико Феррарі, Антоні Фіорі, стали рушійною силою для створення математичних олімпіад. У XVII-XVIII століттях популярними були «Змагання з листування». Матеріали з цих змагань публікувались в журналі «Acta Eruditorum The Transactions of the Roylal Society» такими науковцями: брати Беруллі, Л. Ейлер, І. Ньютон, Г. Лейбніц та інші. В той же час для європейських математиків цікавими були «завдання на роздуми».

У XIX-XX століттях Франція була відома своїми змаганнями на приз французькою Академії наук, загальними змагання – Concours General та змаганнями «великих шкіл» - Concours of the French Gramdes Ecoles. Найкращі результати цих змагань запам’ятовувались, або ж ставали основою для написання наукових статей та монографій [15].

Першою повноцінною олімпіадою з математики вважається проведене в 1894 році в Угорщині змагання учнів шкіл. Її організація була здійснена з ініціативи Угорського фізико-математичного товариства. Завдання відрізнялися оригінальністю, несподіванкою та глибиною постановки, але водночас допускали прості та доступні для розуміння рішення.

Кінець XIX століття відомий проведенням першої «Олімпіади учнівської молоді» у Російській імперії. За ініціативи професора Київського університету В. П. Єрмакова у 1884 році був створений і виданий «Журнал елементарної математики», який пізніше отримав назву – «Вісник дослідної фізики та елементарної математики». Конкурс який був створений у 1885 році і завдання якого підбрукувались у «Віснику» став прообразом сучасних заочних олімпіад.

У листопаді 1933 році, в Тбілісі була проведена перша математична олімпіада на території СРСР. Першою масовою олімпіадою вважається олімпіада, проведена к 1934 р. в Ленінградському університеті. Вона складалася з трьох турів: I і II тури були підготовчими, а у III турі визначали переможців, які мали виконати по 2 завдання з різних галузей математики [14].

Ініціатором першої Київської олімпіади у травні 1935 р. став академік, професор Київського університету М. П. Кравчук. Учасниками олімпіади могли бути тільки учні 9-10 класів. Першими переможцями стали Селім Крейн та Циля Шуб [11].

Перша всеукраїнська олімпіада з математики була проведена Київським університетом у 1936 році. Переможцем цієї олімпіади був відомий математик з Харкова О. Погорєлов.

Математичні олімпіади в роки Другої світової війни проходили в Ашхабаді і Казані. Після війни Київські математичні олімпіади були відновлені в 1945 році з ініціативи академіка М. М. Боголюбова. Вагомий внесок у розвиток олімпіадного руху в 1945-1958 роках зробила відомий історик математики Л. М. Граціянська. До організаторів першої післявоєнної математичної олімпіади увійшли викладачі, аспіранти та студенти Київського університету, насамперед В. Королюк, Б. Гнеденко, Г. Шилов.

Через деякий час олімпіади стали традицією в багатьох радянських містах. Вони організовувалися спільними зусиллями місцевих навчальних закладів. Багато вищих навчальних закладів починають приділяти пильну увагу своїй роботі з школярами. Поступово олімпіади з математики почали проводити в усіх великих містах, де були вищі навчальні заклади, і все більшого значення вони набували як позакласна робота зі школярами. Однак на початку 50-х олімпіади проводилися нерегулярно в більшості регіонів і в багатьох великих містах, у яких брала участь лише невелика кількість школярів. Як і раніше, сільських школярів на олімпіаду не запрошували [15].

У 1961 році було відновлено проведення Всеукраїнської олімпіади з математики. Всеукраїнська олімпіада проводилася в чотири тури: шкільний, районний, обласний, заключний тур – Всеукраїнська олімпіада. Переможці багатьох математичних олімпіад стали видатними математиками.

Розвиток олімпіадного руху привів до створення Міжнародних олімпіад. Перша Міжнародна математична олімпіада відбулася в Брашові (Румунія) в липні 1959 року. До участі були запрошені команди з Болгарії, Угорщини, Східної Німеччини, Польщі, Румунії, СРСР та Чехословаччини.

Зараз щорічно проводиться Міжнародна математична олімпіада, в якій беруть участь близько 500 учасників з різних країн світу. Традиційно українська команда отримує повний комплект нагород і входить до першої двадцятки неофіційного рейтингу. Болгарія, Китай, США, Румунія та Угорщина традиційно показують найкращі результати.

Олімпіада закладає підґрунтя для дослідницької та творчої уяви, привчає учнів мислити та формує інтелект, завдяки чому вони набувають умінь і навичок наукової роботи, що відповідає гуманітарному завданню математичної освіти – розвитку особистості через математику.

Організація олімпіад послужила поштовхом до створення системи роботи зі здібними учнями з математики, спрямованої на розширення мережі шкіл із поглибленим та профільним навчанням; на розробку державних програм, які забезпечують підтримку вчителів-ентузіастів та обдарованих учнів; на об'єднання зусиль як державних, так і громадських структур щодо реалізації цих програм [19].

1.2. Поняття олімпіадних завдань з математики та основні вимоги до них

Олімпіадними завданнями з математики називають серію завдань, розв’язування яких потребує несподіваного й оригінального підходу.

На виконання олімпіадних завдань виділяється строго регламентований час, оскільки передбачаються завдання не обов'язкового або поглибленого рівня (за шкільними стандартами), а нестандартні.

Нестандартні завдання – це такі завдання, для яких в курсі математики немає загальних правил і положень, що визначають точну схему їх виконання». Проте слід зазначити, що поняття «нестандартне завдання» є відносним. Одне й те завдання може бути стандартним чи нестандартним, залежно від цього, чи знайомі ми зі способами виконання завдань такого типу.

Таким чином, олімпіадною (нестандартною) є задача, алгоритм якої невідомий, тобто невідомі як спосіб її розв'язання, так і навчальний матеріал, на основі якого розв'язується ця задача. Багато завдань вимагають спеціальних знань і підготовки. До таких завдань відносяться завдання на кмітливість, логічні завдання, застосування інваріантів, завдання на розмальовування тощо.

Складність завдання олімпіади з математики є об'єктивною ознакою завдання і визначається його структурою. Складність задачі залежить від [9]:

- розміру даних, необхідних для її розв'язання;
- обсягу інформації в завданні;
- числа взаємозв'язків між ними;
- кількісті різноманітних висновків, зроблених з умови завдання;
- кількості поєднання під час виконання завдання;
- часу на роздуми під час її розв'язання;
- загальної кількість кроків розв'язання, залучених аргументів тощо.

Складність олімпіадного завдання з математики – це суб'єктивна ознака завдання, яка визначається взаємозв'язком завдання з учнями, які розв'язують завдання. Складність завдання залежить від [15]:

- складності завдання;
- часу, що минув з моменту дослідження матеріалу, знайденого в тексті задачі;
- практики у розв'язуванні подібних задач;
- рівня розвитку учня;

- віку учня.

Завдання шкільного етапу олімпіади повинні відповідати таким вимогам:

1. У завданнях не повинно бути характеру регулярних контрольних робіт з різних розділів шкільної математики. Більшість завдань має містити елемент (наукової) творчості.

2. До складу завдання не може входити завдання з частини математики, яка не вивчалася хоча б в одному підручнику з основ математики, алгебри, геометрії відповідного класу на час проведення олімпіади.

3. Олімпіадні завдання повинні бути різної складності, щоб, з одного боку, дати можливість практично кожному учаснику виконати найпростіші завдання, а з іншого боку, щоб досягти однієї з головних цілей олімпіади – знайти найбільш здібних учасників. Бажано, щоб перше завдання успішно виконали не менше 70% учасників, друге – близько 50%, третє – 20%-30%, а останнє – кращий з учасників олімпіади.

4. Завдання повинні бути такі, які міститимуть інформацію, що швидко запам'ятовується.

5. Формулювання завдання має бути правильним, чітким і зрозумілим учасникам. Завдання не повинні бути двозначними в тлумаченні умов. У завданнях не повинно бути незнайомих для учнів цього віку термінів і понять.

6. Варіанти для кожного класу повинні містити 4-6 завдань. Тематика завдань повинна бути різноманітною і, по можливості, охоплювати всі розділи шкільної математики: арифметику, алгебру, геометрію. Варіанти також повинні містити логічні завдання (у початковій та середній школі), комбінаторику.

Тому для 4-6 класів рекомендується включити арифметичні задачі, логічні задачі, задачі з наочної геометрії та задачі з використанням поняття парності; для 7-8 класів – задачі на алгебраїчні перетворення, задачі на подільність, задачі на геометричне доведення та комбіновані задачі, для 9-11 класів Серед них по черзі додаються задачі на властивості лінійних і квадратичних функцій, задачі теорії чисел, задачі на нерівності, задачі з використанням тригонометрії, стереометрії, математичного аналізу, комбінаторики.

7. Завдання олімпіади не повинні складатися на основі одного джерела, з метою зниження ризику того, що учасники уже бачили одне або декілька завдань, що включені у варіанти олімпіади. Переважно використовуються різні джерела, незнайомі учасникам олімпіади, або включення до варіантів нових завдань.

8. Завдання для учнів 4-6 класів в ідеалі повинні містити завдання, які не потребують складних (багаторівневих) математичних міркувань [32].

Таблиця 1. Відповідність правильності розв'язання та балів

Бали	Правильність (помилковість) розв'язання
7	Повне правильне розв'язання
6-7	Правильне розв'язання. Є невеликі недоліки, що загалом не впливають на розв'язання.
5-6	Розв'язання загалом правильне. Однак розв'язання містить істотні помилки чи пропущені випадки, які впливають на логіку міркувань.
4	Правильно розглянутий один з двох (складніший) випадок, або в задачі типу «оцінка+приклад» правильний розв'язок.
2-3	Доведено допоміжні твердження, що допомагають у розв'язанні задачі.
0-1	Розглянуто окремі важливі випадки за відсутності розв'язання (або за помилкового розв'язання).
0	Розв'язання неправильне, алгоритм розв'язання відсутній.
0	Розв'язання відсутнє.

1.3. Аналіз олімпіад різного рівня

Всеукраїнські учнівські олімпіади з математики – це різновид інтелектуального змагання в освітянській галузі. Проведення таких олімпіад допомагає виявити учнів, які вміють мислити нестандартно (при цьому правильно) і застосовувати отримані в школі знання для виконання «нешкільних» завдань.

Основними завданнями олімпіад з базових і спеціальних дисциплін, конкурсів фахової майстерності, конкурсів та чемпіонатів захисту науково-дослідної роботи є [14]:

- спонукати до творчого самовдосконалення дітей та учнівської молоді;
- виявляти та розвивати талановитих учнів і допомагати їм у виборі професії;
- залучати талановитих учнів до навчання у вищих навчальних закладах країни;
- розвивати творчих молодих науковців і практиків для всіх сфер суспільного життя;
- розвивати зацікавленість до поглиблених досліджень з базових, характерних та оглядових дисциплін;
- навчати дослідницьким навичкам широкого кола учнів;
- пропагувати науково-технічні досягнення та новітні технології;
- поширювати серед молоді робітничі професій;
- підбивати підсумки діяльності факультативів, гуртків та учнівських наукових гуртків;
- збільшити форм позакласної та позашкільної роботи з учнями;
- підвищити рівень викладання базових, спеціальних та професійних предметів, виховувати професійні якості учнів;
- виявляти, поширювати і впроваджувати в навчально-виховний процес сучасні прийоми і методи навчання;
- залучати професорсько-викладацького склад, аспірантів, студентів вищих закладів освіти, працівників наукових закладів України для допомоги навчальним закладам удосконалювати викладання предметів, уміння та навички студентської та молоді;
- формувати команди для участі у міжнародних олімпіадах, конкурсах та турнірах.

Відповідно до положення, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України, Всеукраїнська олімпіада з математики проводиться в чотири етапи: шкільний, районний, обласний та підсумковий, Всеукраїнська етап олімпіади з математики.

Перший етап олімпіади (шкільна олімпіада з математики) проводився у жовтні в кожному навчальному закладі за своїми завданнями, які створює спеціальна предметно-методична комісія. Порядок проведення І етапу олімпіади, склад організаційного комітету, дисциплінарно-методичної комісії та журі, експертів-консультантів та рішення відповідних організаційних комітетів затверджуються керівником навчального закладу. Загалом усі учні 5-11 класів, які бажають, можуть брати участь у цьому етапі. Заклади освіти подають звіт про хід І етапу олімпіади до організаційного комітету ІІ етапу відповідно до регіону.

У другому етапі олімпіади конкурсанти відбираються у різних районах, містах та районах міста. ІІ етап проводиться у листопаді-грудні під керівництвом районних (міських) відділів освіти (оргкомітет, предметно-методична комісія, експертів-консультантів визначає суддівська комісія) за сприяння управлінь освіти та науки обласних державних адміністрацій.

Кількість турів, формат і час проведення олімпіади визначаються спільно Міністерством освіти, відповідними управліннями освіти обласних і міських адміністрацій, організаційними комітетами кожної олімпіади. На другому етапі школи кожної територіальної одиниці зазвичай обмежують кількість учасників на основі результатів своїх учнів на другому етапі попереднього року. До участі в другому етапі допускаються лише учасники, визначені як переможці першого етапу у своєму навчальному закладі. Цей етап для учнів 6-11 класів. Звіт ІІ етапу освітньої олімпіади подається до оргкомітету ІІІ етапу на визначених умовах відповідно до регіону [19].

Учнівські олімпіади ІІІ етапу проводяться в січні-лютому серед учнів областей, міст Києва та Севастополя. У третьому етапі можуть брати участь лише ті учасники, чий район, місто, селище увійшли до реєстрації за результатами другого етапу. Завдання третього етапу формулюються регіональними провідними фахівцями відповідних дисциплін відповідних регіональних підрозділів, або є можливість використання спільних завдань. За результатами третього етапу відбираються учні для участі у відбірковому навчанні для подальшої підготовки та відбору до четвертого етапу (фіналу) олімпіади. Проводиться серед учнів 7-11 класів. У деяких регіонах цей етап проходить у два тури. За підсумками першого туру, як правило, визначається переможець, а на другому етапі розподіляються фактичні місця (дипломи). Однак цей розподіл не регулюється, а його використання не є обов'язковим [11].

Оргкомітет надсилає до Інституту та оргкомітету Всеукраїнської учнівської олімпіади звіт про проведення III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з навчальної дисципліни, заявку команди на участь у IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади. (за місцем проведення) 5 березня поточного року.

Переможці III етапу з навчальних предметів отримають дипломи I, II та III ступенів. Переможцями можуть стати учасники, які набрали не менше однієї третини балів у кожному раунді, а їх кількість не повинна перевищувати 50% від кількості учасників відповідного фінального етапу.

Четвертий етап – останній, який проводиться щороку наприкінці березня в одній області України і, як правило, присвячений одночасно кільком предметам у різних населених пунктах.

IV етап є заключним і проводиться щороку наприкінці березня в одній з областей України часто одночасно з кількох предметів у різних населених пунктах. Кількісний та віковий склад команд визначається щороку відповідним наказом Міністерства освіти і науки України, виходячи з успішності команд на завершальних етапах двох попередніх навчальних років.

Завдання для олімпіад, чемпіонатів і конкурсів готує предметно-методична комісія, яку очолює голова журі. Завдання для проведення конкурсу складаються з авторських задач і вправ (тестів). У разі проведення міжнародної олімпіади, конкурсу, чемпіонату з відповідної дисципліни завдання заключного етапу відповідної олімпіади, конкурсу, чемпіонату складаються у відповідності з програмою міжнародного конкурсу [15].

Переможці підсумкового етапу з навчальних предметів нагороджуються дипломами I, II та III ступенів. Переможцями можуть стати учасники, які набрали не менше третини балів у кожному раунді, а їх кількість не може перевищувати 50% учасників відповідного фінального етапу. Серед переможців також розподіляються дипломи I, II та III ступенів у співвідношенні 1:2:3.

Кандидати на Міжнародну олімпіаду відбираються за результатами четвертого етапу олімпіади з математики. Для визначення остаточного складу учнівських команд МОН України, які беруть участь у Міжнародній олімпіаді, проводиться весняний конкурсний відбірково-тренувальний збір, до якого відносяться переможці IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади. Пропозиція щодо заявки на участь у весняному відбірковому навчальному зборі приймається спільним засіданням оргкомітету четвертого етапу та суддівського комітету олімпіади з відповідної дисципліни. Наказом Міністерства освіти і науки України затверджується список учасників весняного відбірково-тренувального збору для формування та підготовки учнівської команди до олімпіади з міжнародної навчальної дисципліни.

Відповідно до правил Міжнародних олімпіад, кількість кандидатів, які беруть участь у відповідних міжнародних змаганнях весняного відбіркового збору, не повинна перевищувати подвійної кількості вихованців збірної України.

Індивідуальний склад команди Міжнародної математичної олімпіади формується з переможців конкурсного відбору та тренувальних зборів за найбільшою кількістю набраних у конкурсі балів. Індивідуальний склад учнівських команд та керівників команд, які беруть участь у міжнародних олімпіадах, змаганнях і чемпіонатах, затверджується Міністерством освіти і науки України [9].

1.4. Положення про міжнародні олімпіади з математики

Починаючи з 1959 року щорічно проводяться міжнародні математичні олімпіади для школярів. Ці олімпіади доволі швидко завоювали великий міжнародний авторитет, і число країн, які беруть участь у них, з кожним роком збільшується.

Перша Міжнародна олімпіада з математики була проведена у 1959 році в Румунії, за ініціативи Румунської математичної та фізичної спільноти та Міністерства освіти Румунії. В перший олімпіадах бали участь лише європейські соціалістичні країни. А в XVI олімпіаді в 1974 році були представлені команди учнів з 18-ти країн, таких як: Австрія, Болгарія, Велика Британія, Угорщина, Німеччина, В'єтнам, Куба, Монголія, Нідерланди, Польща, Румунія, СССР, США, Фінляндія, Франція, Чехословаччина, Швеція та Югославія.

Для багатьох країн міжнародні олімпіади є безпосереднім продовження та завершенням великої роботи з проведення математичних олімпіад різного рівня всередині країни. В деяких країнах (Фінляндія, Австрія) загальнонаціональні олімпіади стали проводитись саме через те, що ці країни стали брати участь у міжнародних олімпіадах. В інших країнах, проведення національних математичних олімпіад і різних конкурсів щодо розв'язування задач є досить давньою традицією. Так, в Угорщині з 1894 року проводились математичні олімпіади для школярів, а в Румунії – конкурси щодо розв'язування математичних задач.

Для участі в міжнародній математичній олімпіаді кожна країна формує команду з переможців заключного туру національної олімпіади. При цьому враховуються також успіхи на попередніх олімпіадах. В команду входять учні 10-11 класів, а інколи і учні 9-х класів, які були найбільш успішні на національній олімпіаді.

Варто зазначити, що способи проведення національних олімпіад країн досить різноманітні. В США, наприклад, олімпіада проходить в певний день і час по всій країні, при цьому учнів виконають переставлені їм задачі у себе в школі. Потім, розв'язки цих задач надсилають для перевірки в центральний оргкомітет.

Команда кожної країни складається з 8-ми учасників, керівника команди і його заступника. Керівники команд в свою чергу утворюють Міжнародне журі.

Олімпіади проходять в різних країнах. На сьогодні немає загальноприйнятого положення про проведення міжнародних олімпіад, але за роки їх проведення виробилися певні традиції, яких дотримуються всі країни-організатори олімпіад. Олімпіади проводяться влітку, в першій половині липня. В країні-організаторі заздалегідь створюється оргкомітет, який здійснює всю підготовку для проведення олімпіади. В його склад входять відомі математики цієї країни і представники Міністерства освіти. На адресу оргкомітету всі країни-учасниці надсилають по декілька задач, з яких спеціальна комісія оргкомітету відбирає найбільш доречні і передає їх для кінцевого розгляду Міжнародному журі.

Протягом двох-трьох днів журі остаточно визначає список задач для олімпіади (зазвичай він складається з шести задач) і максимальне число балів за кожну із задач. Після чого редагує і затверджує тест задач на чотирьох робочих мовах журі – англійській, німецькій, російській та французькій. Після цього задачі перекладаються на рідні мови учасників олімпіади і підготовлюються листи з текстами задач для кожного учасника [6].

Змагання проводиться два дні, в кожен з яких часникам пропонується протягом чотирьох годин розв'язати по три задачі. Кожен учасник отримує певний порядковий номер від 1 до 8, і під час олімпіади, в одній аудиторії розв'язуються задачі учасники з однаковими номерами, тобто по одному з кожної команди.

В цей час журі визначає критерії оцінювання розв'язання окремих задач, а після закінчення першого дня змагань починає перевірку робіт. Спочатку попередню перевірку робіт проводять керівники команд, разом з своїми заступниками. Потім для забезпечення єдиного підходу оцінювання розв'язання всі роботи перевіряють так званні координатори по кожній задачі.

Координатори виділяються із числа математиків країни-організатора і зазвичай приймають участь у засіданні журі з правом голосу [9].

Остаточні результати олімпіади підбиваються на загальному засіданні журі, де вирішується питання про нагородження дипломами I, II та III ступенів, а також спеціальних призів за найбільш оригінальне розв’язання певних задач.

За традицією на міжнародних математичних олімпіадах підбиваються підсумки тільки особистої першості учасників. Однак завжди викликають зацікавленість неофіційні результати командної першості за сумами балів, набраних командами різних країн [6].

Міжнародні олімпіади є важливою формою міжнародної співпраці в області освіти. Вони не тільки дозволяють в якійсь мірі порівняти математичну освіту в різних країнах, а й обмінюватись досвідом позакласної роботи з школярами, в тому числі досвідом проведення національних олімпіад. Зрозуміло, що успіхи тої чи іншої країни на олімпіаді відображають перш за все, наскільки приділяється увага математичній освіті на всіх рівнях, починаючи з школи, яку увагу вченні-математики приділяють роботі з школярами, що проявляють математичні здібності.

Окрім цього, для учасників олімпіади ці міжнародні зустрічі важливі тим, що дають змогу познайомитися і подружитися з учнями інших країн, з якими їх поєднують спільні інтереси до математики. Учасникам надається змога також познайомитись з країною. де проходить олімпіада. Оргкомітет зазвичай планує велику кількість екскурсій, різноманітні спортивні змагання. Ці екскурсії, зустрічі ще більше сприяють зміцненню дружби між представниками різних країн [9].

РОЗДІЛ 2. ЗАВДАННЯ МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

2.1. Задачі міжнародних математичних олімпіад

Основною метою будь-якої математичної олімпіади чи конкурсного випробування є об'єктивне визначення її переможців та призерів, відповідно до їхнього рівня математичної компетентності.

Аналіз принципів комплектації завдань олімпіад з математики показав, що підбір завдань здійснюється з урахуванням можливості прояву учнями творчого підходу, який передбачає наявність варіативного діапазону відповідей, що передбачає сформованість їхньої готовності застосовувати математичні знання в незнайомих, часто стресових умовах, вміти виконувати аналіз, оцінювати різні підходи до вирішення завдань, виконувати пошук та знаходити креативне виконання, аргументувати власну позицію у відповідній предметній сфері. Таким чином, визначаючи рівень математичної компетентності учасників олімпіади, журі оцінює перелічені якості: ступінь самостійності мислення, уміння та навички аргументування, логіку, новизну, оригінальність, виявлені у вирішені олімпіадних завдань [9].

Оновлення системи шкільної освіти на основі компетентнісного підходу дозволяють зробити висновок, що математична олімпіада є одним з факторів, що впливають на розвиток предметної та ключових компетентностей таких як: уміння вчитися, спілкуватися державною, рідною та іноземними мовами, математична і базові компетентності в галузі природознавства і техніки, інформаційно-комунікаційна, соціальна, громадянська, загальнокультурна, підприємницька; здоров’язбережувальна компетентності [6].

Загалом на всіх рівнях математичної олімпіади, завдання пропонуються в наступних чотирьох розділах математики: теорія чисел, комбінаторика, алгебра, геометрія.

Теорія чисел. Завдання цього розділу математики вимагають від учнів розуміння ознак подільності та властивостей остачі при діленні на різні натуральні числа. Також багато цікавих задач з теорії чисел пов'язані з поняттям парності.

Задача 2.1.1. (2023) Дано натуральне число n. Японський трикутник складається з $1 + 2 + \cdots + n$ кругів, розташованих у формі рівностороннього трикутника так, що для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$, і рядок містить i кругів, та рівно один з них пофарбовано у червоний колір. Шляхом ніндзя в японсьому трикутнику назвемо довільну послідовність з n кругів, що отримується таким чином: починаємо з єдиного круга у верхньому ряду і послідовно спускаємось з нього до одного з двох кругів, що знаходяться одразу під даним та закінчуємо нижньому ряду. На рисунку зображено приклад японського трикутника для $n = 6$ разом із прикладом шляху ніндзя для цього трикутника, який містить два червоних круги [14].

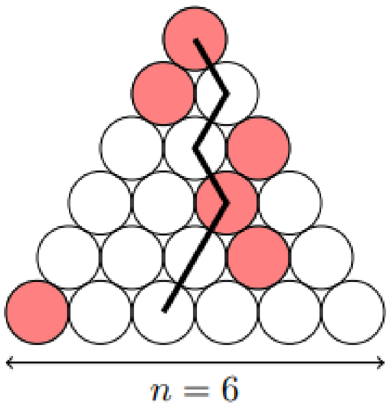

Рис 2.1. Рисунок до задачі 2.1.1.

В залежності від n, знайдіть найбільше натуральне k таке, що в довільному японському трикутнику існує шлях ніндзя, який містить мінімум k червоних кругів.

Задача 2.1.2. (2022) Дано натуральне число n. Дошку $n \times n$, в клітинках якої записано по одному числу, назвемо Нордичним Квадратом, якщо вона містить усі натуральні числа від 1 до n^2. Дві різні клітинки вважаються сусідніми, якщо у них є спільна сторона. Назвемо клітинку долиною, якщо число в кожній сусідній до неї клітинці більше за число в цій клітинці. Назвемо підйомом послідовність з однієї чи більше клітинок таку, що: (i) перша клітинка в послідовності є долиною, (ii) кожна наступна клітинка послідовності є сусідньою до попередньої, (iii) числа в клітинках послідовності йдуть в зростаючому порядку. Знайдіть, як функцію від n, мінімальну можливу кількість підйомів в Нордичному квадрат [6].

Задача 2.1.3. (2021) Дано деяке натуральне число $n > 100$. Іван записує числа $n, n+1, \ldots, 2n$ на $n+1$ картках, кожне по одному разу. Потім він перемішує ці $n+1$ картки певним чином і розділяє їх на дві купки. Доведіть, що принаймні в одній з купок знайдуться дві картки, сума чисел на яких є точним квадратом цілого числа [14].

Задача 2.1.4. (2019) Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) такі, що $k! = (2n-1)(2n-2)(2n-4)\ \cdot\ (2n-2n-1)$[14].

Задача 2.1.5. (2015) Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c), для яких кожне з чисел $ab-c, bc-a, ca-b$ є степенем двійки [9].

Задача 2.1.6 (2012) Знайдіть всі натуральні числа n, для яких існують такі невід'ємні цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Задача 2.1.7. (2011) Для множини $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, що складається з чотирьох попарно різних натуральних чисел, позначимо через s_A суму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через n_A позначимо кількість пар індексів $(i, j), 1 \leq i < j \leq 4$, для яких s_A ділиться на $a_i + a_j$. Знайдіть усі множини A, що складаються з чотирьох попарно різних цілих додатних чисел, для яких n_A набуває найбільшого можливого значення [23].

Задача 2.1.8. (2013) Доведіть, що для будь-якої пари натуральних чисел k та n існують k (не обов'язково різних) натуральних чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ таких, що виконується рівність

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2.1.9. (2017) Для довільного цілого $a_0 > 1$ визначимо послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots$таким чином:

$$a_{n+1} = \{\sqrt{a_n}, \qquad \textit{якщо } \sqrt{a_n} - \textit{ціле число}, a_{n+3}\ \textit{ в протилежному випадку}, n \geq 0$$

Знайдіть всі значення a_0, при яких існує число A таке, що $a_n = A$ для нескінченної кількості значень n.

Задача 2.1.10. (2007) Натуральні числа a і b такі, що число $(4a^2 - 1)^2$ ділиться на $4ab - 1$. Доведіть, що $a = b$ [6].

Комбінаторика. Комбінаторні задачі зазвичай пов'язані з підрахунком елементів у якомусь наборі або способом виконання певної операції [14].

Задача 2.1.11. (2017) Задане ціле число $N > 2$. Команда, що складається з $N(N + 1)$ футболістів, кожні двоє з яких мають різний зріст, вишикувана в ряд. Андрій Шевченко бажає прибрати з ряду $N(N - 1)$ гравців так, щоб для решти ряду з $2N$ гравців справджувались такі N умов:

(1) ніхто не стоїть між двома найвищими гравцями,

(2) ніхто не стоїть між третім і четвертим за зрістом гравцями,

...

(N) ніхто не стоїть між двома найнижчими гравцями.

Доведіть, що це завжди можна зробити.

Задача 2.1.12. (2016) Знайдіть усі натуральні n, для яких у кожну клітинку дошки $n \times n$ можна помістити одну з літер I, M або O так, що: у кожному рядку та у кожному стовпчику буде розташована рівно третина літер I, рівно третина літер M та рівно третина літер O; у кожній діагоналі, кількість клітинок якої ділиться на три, буде розташована рівно третина літер I, рівно третина літер M та рівно третина літер O [14].

Задача 2.1.13. (2016) На площині задано $n > 2$ відрізків таким чином, що довільні два перетинаються у внутрішній точці та жодні три не перетинаються в одній точці. Дід Панас має вибрати кінець кожного відрізка і посадити в нього жабеня очима у напрямку іншого кінця. Після цього, він плескає в долоні $n - 1$ раз. Кожного разу, коли він плескає, кожне жабеня одразу перестрибує у наступну точку перетину свого відрізку. Жабенята ніколи не змінюють напрямок стрибків. Дід Панас хоче розсадити жабенят таким чином, щоб жодна пара жабенят не опинилася в одній точці перетину у жодний момент часу [23].

(a) Доведіть, що дід Панас може завжди так зробити, коли n – непарне число.

(b) Доведіть, що дід Панас не зможе цього зробити, коли n – парне число.

Задача 2.1.14. (2014) Банк Кейптауна випускає монети номіналом $\frac{1}{n}$ для кожного цілого додатного числа n. Заданий скінченний набір таких монет, сума номіналів яких не перевищує $99 + \frac{1}{2}$ (номінали монет не обов'язково різні). Доведіть, що всі монети можна розбити на 100 або меншу кількість груп так, щоб сума номіналів монет у кожній групі не перевищувала 1.

Задача 2.1.15. (2012) Два гравці A та B грають у гру Ти ж мене підманула. Правила цієї гри залежать від двох натуральних чисел k та n, які відомі обом гравцям.

На початку гри A обирає натуральні числа x і N, для яких $1 \leq x \leq N$. Гравець A зберігає число x у таємниці, а число N правдиво повідомляє гравцю B. Гравець B після цього намагається отримати інформацію про x, задаючи гравцю A питання наступним чином: перед кожним питанням B вказує довільну множину S натуральних чисел (можливо, вже вказану в попередньому запитані) та питає A, чи належить x множині S. Гравець B може запитати стільки питань, скільки він захоче. На кожне задане B питання гравець A мусить одразу відповідати так чи ні, але їй дозволяється збрехати стільки разів, скільки вона забажає. Єдине обмеження – із будь-яких $k + 1$ послідовних відповідей принаймні одна має бути правдивою. Після того, як B задав стільки запитань, скільки він уважав за потрібне, він мусить указати множину X з щонайбільше n натуральних чисел. Якщо x належить X, то B перемагає; інакше він програє. Доведіть, що:

1. Якщо $n \geq 2^k$, то B має виграшну стратегію.

2. Для довільного достатньо великого k знайдеться таке ціле число $n \geq 1.99^k$, що В не має виграшної стратегії.

Задача 2.1.16. (2011) Задане ціле число $n > 0$. Є шалькові терези та n гирь з вагами $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Усі n гирь розміщуються послідовно одна за одною на шальки терезів, тобто на кожному з n кроків вибирається гиря, яка ще не поклаладена на терези, і розміщується або на ліву, або на праву шальку терезів; при цьому гирі розміщуються так, щоб у жоден момент права шалька не була важчою за ліву. Знайдіть кількість способів виконати таку послідовність кроків.

Задача 2.1.17. (2009) Дані попарно різні натуральні числа $a_1, a_2, .., a_n$, а також множина M яка складається з $n-1$ натурального числа, але не містить число $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Коник має зробити n стрибків праворуч вздовж числової прямої, починаючи з точки з координатою 0. При цьому довжини його стрибків маю дорівнювати числам $a_1, a_2, .., a_n$, узятим у деякому порядку. Доведіть, що цей порядок можна вибрати таким чином, щоб коник кожного разу не приземлявся у точці, яка має координату з множини M.

Задача 2.1.18. (2007) Деякі учасники математичного змагання товаришують один з одним, при чому якщо A товаришує з B, то й B товаришує з A. Назвемо групу учасників кліткою, якщо кожні двоє з неї товаришують. Назвемо кількість людей у клітці її розміром. Відомо, що найбільший розмір клітки, що складається з учасників змагання, є парним числом. Доведіть, що можливо розсадити усіх учасників у дві кімнати таким чином, щоб найбільший розмір клітки в одній кімнаті дорівнював найбільшому розміру клітки у другій кімнаті [14].

Задача 2.1.19. (2022) Задано натуральне число k та скінченну множину S, що складається з непарних простих чисел. Доведіть, що існує не більше одного способу (з точністю до поворотів та симетрій) розставити всі елементи множини S по колу таким чином, щоб добуток довільних двох сусідніх чисел подавався у вигляді $x^2 + x + k$ для деякого натурального числа x [23].

Задача 2.1.20. (2021) Дві білки, Івасик та Телесик, зібрали на зиму 2021 горішок. Івасик пронумерував горішки числами від 1 до 2021, і вирив у землі 2021 маленьку ямку по колу навколо їх улюбленого дерева. Наступного ранку з’ясувалось, що Телесик поклав по одному горішку в кожну ямку, але зовсім не звернув уваги на нумерацію. Засмучений, Івасик вирішує переставити горішки, виконавши послідовність з 2021 кроків. На k-му кроці, Івасик міняє місцями два горішки, сусідні до горішка з номером k. Доведіть, що існує таке значення k, що на k-му кроці Івасик поміняє місцями два горішки з номерами a та b такими, що $a < k < b$ [14].

Алгебра. Алгебраїчні завдання на різних математичних олімпіадах зазвичай включають розв'язування алгебраїчних, трансцендентних і функціональних рівнянь із використанням елементів математичного аналізу, розв'язування чи доведення нерівностей.

Задача 2.1.21. (2022) Через R^+ позначимо множину додатних дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon R^+ \to R^+$ такі, що для всіх чисел $x \in R^+$ існує єдине число $y \in R^+$, для якого справджується нерівність $xf(y) + yf(x) \leq 2$.

Задача 2.1.22. (2021) Доведіть, що нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

справджується для всіх дійсних чисел $x_1, \dots, x_n$.

Задача 2.1.23. (2020) Задано дійсні числа a, b, c, d такі, що $a > b > c > d > 0$ і $a + b + c + d = 1$. Доведіть, що $(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Задача 2.1.24. (2019) Нехай Z – множина всіх цілих чисел. Знайдіть усі функції $f\colon Z \to Z$ такі, що для будь-яких цілих чисел a і b справджується рівність $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$ [15].

Задача 2.1.25. (2016) Рівняння

$(x - 1)(x - 2)\ \cdot\ (x - 2016) = (x - 1)(x - 2)\ \cdot\ (x - 2016)$,

ліва і права частини якого містять по 2016 лінійних множників. Знайдіть найменше можливе значення k, для якого можна витерти з дошки рівно k з цих 4032 лінійних множників так, що хоча б один множник залишиться у кожній частині рівняння, і рівняння, що залишилось, не має дійсних коренів?

Задача 2.1.26. (2011) Нехай f – функція, визначена на множині цілих чисел та набуває цілих додатних значень. Відомо, що для довільних цілих m і n різниця $f(m) - f(n)$ ділиться на $f(m - n)$. Доведіть, що для довільних цілих m і n таких, що $f(m) \leq f(n)$, число $f(n)$ ділиться на $f(m)$.

Задача 2.1.27. (2010) Знайти всі функції $f: R \rightarrow R$ такі, що $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ для всіх $x, y \in R$. (Через $[z]$ позначається найбільше ціле число, що не перевищує z.)

Задача 2.1.28. (2015) Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f: R \rightarrow R$, що задовольняють рівність

$$fx + f(x + y) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

для довільних дійсних чисел x і y.

Задача 2.1.29. (2013) Позначимо через $Q > 0$ множину всіх додатніх раціональних чисел. Нехай $f: Q > 0 \rightarrow R$ – функція, що задовольняє такі умови:

(i) для всіх $x, y \in Q > 0$ виконується нерівність $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) для всіх $x, y \in Q > 0$ виконується нерівність $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) існує раціональне число $a > 1$ таке, що $f(a) = a$.

Доведіть, що $f(x) = x$ для всіх $x \in Q > 0$.

Задача 2.1.30. (2008) Доведіть, що нерівність

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

виконується для усіх відмінних від 1 дійсних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$. Доведіть, що вказана нерівність перетворюється на рівність для нескінченої кількості трійок відмінних від 1 раціональних чисел x, y, z таких, що $xyz = 1$.

Геометрія. Геометричні задачі зазвичай пов'язані з властивостями геометричних об'єктів, які більшою чи меншою мірою використовуються при розв'язуванні більшості задач.

Задача 2.1.31. (2023) Дано гострокутний трикутник ABC, у якому $AB < AC$. Нехай Ω – описане коло трикутника ABC. Точка S – середина дуги CB кола Ω, що містить точку A. Перпендикуляр з точки A на пряму BC перетинає пряму BS в точці D та вдруге перетинає коло Ω в точці $E \neq A$. Пряма, що проходить через точку D паралельно прямій BC, перетинає пряму BE в точці L. Позначимо описане коло трикутника BDL через □. Нехай кола □ та Ω вдруге перетинаються в точці $P \neq B$. Доведіть, що дотична до кола □, яка проведена з точки P, перетинає пряму BS в точці, що належить внутрішній бісектрисі кута $\angle BAC$ [14].

Задача 2.1.32. (2022) Дано опуклий п’ятикутник $ABCDE$, в якому $BC = DE$. Нехай всередині $ABCDE$ знайшлась така точка T, що $TB = TD, TC = TE$ і $\angle ABT = \angle TEA$. Нехай пряма AB перетинає прямі CD та CT в точках P та Q, відповідно. Припустимо, що точки P, B, A, Q лежать на прямій AB у вказаному порядку. Нехай пряма AE перетинає прямі CD та DT в точках R та S, відповідно. Припустимо, що точки R, E, A, S лежать на прямій AE в цьому порядку. Доведіть, що точки P, S, Q, R лежать на одному колі [15].

Задача 2.1.33. (2021) Нехай D – внутрішня точка гострокутного трикутника ABC з $AB > AC$ така, що $\angle DAB = \angle CAD$. Точка E на відрізку AC вибрана таким чином, що $\angle ADE = \angle BCD$, точка F на відрізку AB вибрана таким чином, що $\angle FDA = \angle DBC$, і точка X на прямій AC вибрана таким чином, що $CX = BX$. Нехай O_1та O_2 – центри описаних кіл трикутників ADC та EXD, відповідно. Доведіть, що прямі BC, EF, та O_1O_2 перетинаються в одній точці [23].

Задача 2.1.34. (2020) Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ знайшлася точка P така, що справджується рівності $\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1:2:3 == \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$. Доведіть, що три такі прямі перетинаються в одній точці: внутрішні бісектриси кутів $\angle ADP$ і $\angle PCB$ та серединний перпендикуляр до відрізку AB.

Задача 2.1.35. (2019) Нехай I – центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC, та $AB \neq AC$. Вписане коло □ трикутника ABC дотикається сторін BC, CA і AB у точках D, E та F відповідно. Пряма, що проходить через D перпендикулярно до EF, вдруге перетинає коло □ у точці R. Пряма AR вдруге перетинає коло □ у точці P. Описані кола трикутників PCE та PBF вдруге перетинаються в точці Q. Доведіть, що прямі DI та PQ перетинаються на прямій, що проходить через A перпендикулярно до AI.

Задача 2.1.36. (2018) Нехай □ – описане коло гострокутного трикутника ABC. Точки D і E лежать на відрізках AB і AC відповідно, при цьому $AD = AE$.

Серединні перпендикуляри до відрізків BD і CE перетинають менші дуги AB і AC кола ⍰ у точках F і G відповідно. Доведіть, що прямі DE і FG паралельні або співпадають [14].

Задача 2.1.37. (2010) Нехай P – точка всередині трикутника ABC. Прямі AP, BP і CP вдруге перетинають коло ⍰, що описане навколо трикутника ABC, в точках K, L і M відповідно. Дотична до ⍰, що проведена через точку C, перетинає пряму AB в точці S. Відомо, що $SC = SP$. Доведіть, що $MK = ML$.

Задача 2.1.38. (2016) Задано прямокутний трикутник BCF з прямим кутом B. Нехай A – точка на прямій CF така, що $FA = FB$ та F лежить між A і C. Точку D вибрано так, що $DA = DC$ і AC – бісектриса ⍰DAB. Точку Е вибрано так, що $EA = ED$ і AD – бісектриса ⍰EAC. Нехай M – середина CF, а точка X така, що $AMXE$ – паралелограм (у якому $AM \| EX$ i $AE \| MX$). Доведіть, шо прямі BD, FX і ME перетинаються в одній точці [15].

Задача 2.1.39. (2014) Точки P і Q вибрані на стороні BC гострокутного трикутника ABC так, що ⍰$PAB = \angle BCA$ і ⍰$CAQ = \angle ABC$. Точки M і N вибрані на променях AP і AQ відповідно так, що P – середина відрізка AM, а Q – середина відрізка AN. Доведіть, що прямі BM і CN перетинаються на колі, описаному навколо трикутника ABC [23].

Задача 2.1.40. (2012) Для трикутника ABC точка J є центром зовні вписаного кола напроти вершини A. Це зовні вписане коло дотикається до сторони BC у точці M і до прямих AB та AC у точках K та L відповідно. Прямі LM і BJ перетинаються у точці F, а прямі KM і CJ перетинаються у точці G. Нехай S – точка перетину прямих AF і BC, а точка T – точка перетину прямих AG і BC. Доведіть, що точка M ділить відрізок ST навпіл [15].

2.2. Задачі з матеріалів журі міжнародних математичних олімпіад

Задача 2.2.1. (Німеччина) Дано n додатних числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, таких, що $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Доведіть, що $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Задача 2.2.2. (Польща) На площині дано 5 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що серед цих точок існують такі 4 точки, які є вершинами опуклого чотирикутника [15].

Задача 2.2.3. (Румунія) Знайдіть x, якщо

$$\frac{sin3x \cdot cos\, cos\, (60° - 4x) + 1}{sin\, sin\, (60° - 7x) - cos\, cos\, (30° + x) + m} = 0,$$

де m – дане дійсне число [8].

Задача 2.2.4. (Німеччина) Скільки дійсних розв'язків має рівняння $x = 1964 sinx - 189$?

Задача 2.2.5. (Польща) Знайдіть найбільше число областей, на які розділяють круг відрізки, що з'єднують n точок, які лежать на цьому колі [17].

Задача 2.2.6. (Польща) На колі дані точки A, B, C, D такі, що AB – діаметр кола, а CD – ні. Доведіть, що пряма, що з'єднує точку перетину дотичних до кола в точках C і D з точкою перетину прямих AC і BD, перпендикулярна прямій AB.

Задача 2.2.7. (Румунія) Нехай $ABCD$ і $A'B'C'D'$ – два паралелограма, довільно розміщені в просторі і M, N, P, Q – точки, що ділять відрізки AA', BB', CC', DD' в однаковому співвідношенні [8].

а) Доведіть, що $MNPQ$ – паралелограм.

Задача2.2.8. (Угорщина) Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{sinx} + \frac{1}{cosx} = \frac{1}{p},$$

де p – дійсний параметр. Дослідіть, при яких значеннях параметра існують розв'язки і скільки.

Задача 2.2.9. (Угорщина) Побудуйте трикутник, якщо відомі радіуси вписаних кіл.

Задача 2.2.10. (Угорщина) Дано три конгруентних прямокутники. Їх центри співпадають, а площини взаємно перпендикулярні. Кожна пряма по якій перетинаються площини двох прямокутників, містить по одній із середніх ліній цих двох прямокутників, причому довжина цих ліній різна. Розглянемо опуклий многогранник, вершини якого співпадають з вершинами прямокутників [8].

а) Визначте об’єм цього многогранника.

б) Чи може многогранник бути правильним і якщо може, то яка умова для цього?

Задача 2.2.11. (Болгарія) Доведіть, що об’єм V і бічна поверхня S будь-якого прямого кругового конуса задовольняє нерівність

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^2,$$

коли можлива рівність?

Задача 2.2.12. (Болгарія) Нехай P і P' – рівновеликі паралелограми, сторони яких a, b і a', b' задовольняють нерівності $a' \leq a \leq b \leq b'$, причому відрізок b' може бути цілком розміщений в P. Доведіть, що P і P' рівноскладені і можуть бути розкладені на чотири попарно конгруентних многокутників [18].

Задача 2.2.13. (Болгарія) Три грані тетраедра – прямокутні трикутники, а четверта грань не тупокутний трикутник. Доведіть, що:

1) необхідною і достатньою умовою того, щоб і четверта грань була прямокутним трикутником, є припущення, що рівно два із плоских кутів при одній вершині тетраедра – прямі;

2) якщо всі грані тетраедра прямокутні трикутники, то об’єм тетраедра дорівнює $\frac{1}{6}$ рівності трьох найменших ребер, що не належать одній грані.

Задача 2.2.14. (Польща) В залі знаходяться людини. Доведіть, що в залі знайдіть дві людини, які мають серед присутніх однакове число знайомих (припустимо, що, якщо A – знайомий B, тоді B – знайомий A) [17].

Задача 2.2.15. (Польща) Дано тетраедр $ABCD$. Нехай $x = |AB| \cdot |CD|, y = |AC| \cdot |BD|, z = |AD| \cdot |BC|$. Доведіть, що існує трикутник зі сторонами x, y, z.

Задача 2.2.16. (В'єтнам) Нехай a – дійсне число, відмінне від нуля. Для цілого n покладемо $S_n = a^n + a^{-n}$. Доведіть, що якщо для деякого цілого k суми S_k і S_{k+1} є цілими числами, то для всіх цілих n S_n дорівнюють цілим числам.

Задача 2.2.17. (Фінляндія) Доведіть, що $2^{147} - 1$ ділиться на 343.

Задача 2.2.18. (Куба) Нехай x, y, z – дійсні числа, абсолютна величина яких відмінна від $\frac{1}{\sqrt{3}}$ і котрі задовольняють умову $x + y + z = x \cdot y \cdot z$. Доведіть, що тоді виконується рівність

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^3}.$$

Задача 2.2.19. (Франція) Чи є число $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ раціональним або ірраціональним?

Задача 2.2.20. (Франція) Обруч радіуса 1 розміщений в кутку кімнати (тобто дотикається до горизонтальної підлоги і двох вертикальних, перпендикулярних одна одній стін). Знайдіть множину центрів обруча при всіх можливих припущеннях [6].

Задача 2.2.21. (Болгарія) Нехай h_n – апофема правильного n-кутника, вписаного в коло радіусу R. доведіть, що $(n + 1)h_{n+1} - nh_n > R$.

Задача 2.2.22. (Монголія) Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, сторони якого є коренями квадратного рівняння $x^2 - ax + b = 0$.

Задача 2.2.23. (Польща) Дано многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, значення якого кратне 3 для трьох цілих значень: $k; k + 1; k + 2$. Покажіть, що $f(m)$ кратне 3 для будь-якого цілого m [17].

Задача 2.2.24. (Нідерланди) Вершини многокутника з $n + 1$ сторонами розташовані на сторонах правильного многокутника з n сторонами так, що периметр многокутника з n сторонами був розділений на рівні частини. Як потрібно вибрати ці точки, щоб площа многокутника з $n + 1$ сторонами була:

а) найбільшою;

б) найменшою?

Задача 2.2.25. (Нідерланди) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – цілі додатні числа, котрі задовольняють співвідношення:

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$
$$> 0, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 > 0, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 > 0.$$

а) Знайдіть найбільше значення степеня $(x_1 + x_3)^{x_2+x_4}$.

б) Скількома різними способами можна вибрати x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, при яких досягається це найбільше значення?

Задача 2.2.26. (Швеція) В просторі дано 6 таких точок $P_j; j = 1; 2; \dots; 6$, що ніякі чотири з них не знаходяться в одній площині. Кожен відрізок прямої P_jP_k $(j \neq k)$ пофарбований в чорний або білий колір. Доведіть, що існує хоча б один трикутник $P_jP_kP_l$, сторони якого були б одного кольору [6].

Задача 2.2.27. (Швеція) Доведіть, що існує нескінченна множина цілих додатних чисел, які не можуть бути записані як сума квадратів трьох цілих чисел.

Задача 2.2.28. (Німеччина) Знайдіть всі дійсні числа ?, для яких рівняння

$$sin^4x - cos^4x = \lambda(tg^4x - ctg^4x);$$

а) не має розв'язків;

б) має тільки один розв'язок;

в) має тільки два розв'язки;

г) має більше двох дійсних розв'язків у проміжку $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 2.2.29. (Угорщина) Доведіть, що

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Задача 2.2.30. (Угорщина) Нехай на площині дано 4000 точок, таких, що ніякі три із них не лежать на одній і тій же прямій. Доведіть, що в цьому випадку можна намалювати на площині 1000 чотирикутників без спільних точок, але щоб їх вершини були би даними точками.

Задача 2.2.31. (Велика Британія) Поліном $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$, де $a_0, a_1, \dots, a_k$ цілі, називається таким, що ділиться на m, якщо $P(x)$ кратне m і для кожного цілого значення x.

Покажіть, що якщо $P(x)$ – ділиться на m коли $k!\,a_0$ кратне m.

Доведіть, що якщо a_0, k, m – додатні цілі, такі, що $k!\,a_0$ кратне m, тоді може бути знайдений поліном $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$, що ділиться на m.

Задача 2.2.32. (Велика Британія) Дано точка O і три довжини x, y, z. Доведіть, що рівносторонній трикутник ABC такий, що $|OA| = x; |OB| = y; |OC| = z$ існує тоді і тільки тоді, якщо $x + y \geq z; y + z \geq x; z + x \geq y$ (точки $O; A; B; C$ лежать в одній площині).

Задача 2.2.33. (Швеція) Нехай $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле, що не перевищує a і $(a) = a - [a]$ дробова частина. Покажіть, що числа $\left(10^n\sqrt{2}\right)$, де $n = 0; 1; \ldots$ всі (попарно) різні.

Задача 2.2.34. (Швеція) Два кораблі пливуть по морю з сталими швидкостями за фіксованим напрямком. В 9.00 відстань між ними 20 миль, в 9.35 – 15 миль і в 9.55 0 13 миль. В який момент часу відстань між кораблями мінімальна і яка ця відстань [15]?

Задача 2.2.35. (Румунія) Доведіть, що якщо n – ціле додатне число, то:

$$\square)\ lg\, lg\,(n+1)\ > \frac{3}{10n} + lgn;$$

$$б)\ lg\, lg\,(n!)\ > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - 1\right).$$

Задача 2.2.36. (Румунія) Розв’яжіть рівняння і дослідіть його розв’язок для різних m:

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx.$$

Які пари цілих чисел (x, m) задовольняє дане рівняння?

Задача 2.2.37. (Болгарія) Дані сторони a, b, c трикутника ABC утворюють арифметичну прогресію. Арифметичну прогресію утворюють і довжини сторін трикутника $A_1B_1C_1$. Крім того, $\angle A = \angle A_1$. Доведіть, що трикутники подібні [18].

Задача 2.2.38. (Болгарія) Знайдіть всі пари додатних цілих чисел (x, y), що задовольняють рівняння $2^x = 3^y + 5$.

Задача 2.2.39. (Польща) Доведіть, що чотири перпендикуляри, які опущені з середини сторін вписаного чотирикутника на протилежні сторони, перетинаються в одній точці [17].

Задача 2.2.40 (Угорщина) Доведіть, що для будь-якої пари векторів f і g простору має місце нерівність

$$af^2 + bfg + cg^2 \geq 0$$

тільки в тому випадку, коли виконуються умови

$$a \geq 0; c \geq 0; 4ac \geq b^2.$$

2.3. Задачі, запропоновані на національних математичних олімпіадах

Задачі англійських олімпіад

Задача 2.3.1. Квадратний кусок фанери розрізаний на n^2 рівних одиничних квадрати. Вона переставлені так, щоб вийшло 4 прямокутника і 1 одиничний квадрат. Причому всі 9 розмірів цих фігур різні [14].

а) Знайдіть найменше значення n, що задовольняє умову задачі, і визначте розмір фігури для цього значення n.

б) Знайдіть всі значення n, що задовольняють умову задачі.

Задача 2.3.2. $f(x)$ – дійсна функція дійсної змінної , не тотожно дорівнює нулю. Нехай $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$ для всіх можливих дійсних значень x і y. Знайдіть $f(x)$.

Задача 2.3.3. Дана множина, що складається із $n + 1$ додатного цілого числа, кожне з яких не перевищує $2n$. Доведіть, що хоча б один із елементів множини ділиться на інший [15].

Задача 2.3.4. Доведіть, що у випуклого многогранника всі грані не можуть бути шестикутниками [6].

Задача 2.3.5. Навколо кола радіуса r описані всі можливі трикутники. В трикутники вписані квадрати (сторони яких мають довжину x). Доведіть, що

$$2r > x > \sqrt{2}r.$$

Задачі болгарських олімпіад

Задача 2.3.6. Доведіть, що поліном $f(x) = x^5 - x + a,$ де a – ціле число, що не ділиться на 5, не можна подати у вигляді рівності двох поліномів з цілими коефіцієнтами [15].

Задача 2.3.7. Із трьох різних цифр x, y, z утворені всі можливі трицифрові числа. Сума цих чисел в три рази більша тризначного числа, кожна цифра якого є x. Знайдіть цифри x, y, z.

Задача 2.3.8. Розв’яжіть нерівність

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{x} + \frac{15}{2(x+1)} \geq 1.$$

Задача 2.3.9. Побудуйте трикутник, подібний даному трикутнику, одна вершина якого – дана точка, інші дві вершини лежать на даній прямій і даному колі [14].

Задача 2.3.10. Доведіть, що якщо правильний тетраедр перетнути площиною, яка паралельна будь-яким двом його ребрам, що перетинаються, то: а) перетин є прямокутником; б) периметр перетину не залежить від розміщення площини перетину [15].

Задачі угорських олімпіад

Задача 2.3.11. В гострокутній трикутник вписано квадрат, дві вершини якого знаходяться на одній стороні трикутників, одна – на другій і одна – на третій. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник, лежить в середині квадрата.

Задача 2.3.12. Знайдіть дійсні числа a, b, c для яких $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1$ при $|x| \leq 1$ і $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ максимально [8].

Задача 2.3.13. Дано натуральне число n. Визначте невід’ємні числа k і l, для яких $\frac{k}{k+l} + \frac{n-k}{n-(k+l)}$ максимально.

Задача 2.3.14. x_i – додатне число, менше 1 $(x_i < 1)$. Утворимо послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, де x_{k+1} задовольняє співвідношення $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ $(k = 1,2,\dots)$. Доведіть, що для будь-якого n: $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$.

Задача 2.3.15. $ABCD$ – плоский чотирикутник. Точка A_1 симетрична точці A відносно B; B_1 симетрична B відносно C; C_1 симетрична C відносно D; D_1 симетрична D відносно A. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ вважаючи точки A_1, B_1, C_1, D_1 даними [8].

Задачі німецьких олімпіад

Задача 2.3.16. Доведіть наступне твердження: трикутник з кутами α,β,γ прямокутний тоді і тільки тоді, коли $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma = -1$ [6].

Задача 2.3.17. Доведіть, що $n^3 + 3n^2 - n - 3$ при будь-якому непарному n діляться на 48 [14].

Задача 2.3.18. Дано два числа $z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ і $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$. Встановіть, не обчислюючи коренів, яке з чисел більше [15].

Задача 2.3.19. а) Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 є 1 або просте число. б) Перевірте справедливість цього твердження при ділені простого числа на 60 [6].

Задача 2.3.20. Нехай даний тетраедр (не обов’язково правильний), всі грані якого рівновеликі між собою. доведіть, що центр вписаного нього і описаного навколо нього шарів співпадають [15].

Задачі польських олімпіад

Задача 2.3.21. Дано точки А і B коло K. Побудуйте коло, що проходить через точки A і B і таке, що утворює хорду даної довжини – q у результаті перетину з колом K [17].

Задача 2.3.22. Знайдіть тризначне число x, таке, що числа, що складається з тих же цифр в тому ж порядку, але за іншою основою (не дорівнює 10), в два рази більше за дане число x.

Задача 2.3.23. Доведіть, що якщо $n \geq 3$, то $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$.

Задача 2.3.24. Через точку A кола k проведено перпендикуляр AB до площини цього кола. Знайдіть множину проекцій точки A на всі можливі прямі BM, де M – довільна точка кола k.

Задача 2.3.25. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $|AB| + |BD|$ не більше, ніж $|AC| + |CD|$. Доведіть, що тоді довжина сторони AB менша за довжину діагоналі AC [17].

Задачі румунських олімпіад

Задача 2.3.26. Доведіть, що рівняння $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ має корені $tg\frac{\pi}{8}, tg\frac{3\pi}{8}, tg\frac{5\pi}{8}, tg\frac{7\pi}{8}$.

Задача 2.3.27. Доведіть, що

$$\left(\frac{x^2 siny - 2x + siny}{x^2 - 2xsiny + 1}\right)^2 \leq 1$$

при всіх x і y, за винятком тих, при яких знаменник перетворюється в нуль.

Задача 2.3.28. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\{2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0, 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \cdots + 2nx_n = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 + \cdots + \left(1 + k^2\right)x_k + \cdots + nkx_n = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, nx_1 + 2nx_2 + 2nx_3 + \cdots + (1 + n^2)x_n = 0.$$

Задача 2.3.29. Знайдіть дійсний розв'язок рівняння

$$\sqrt{x^4 - 18x^2 + 81} - 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2} + x + 7 = 0.$$

Задача 2.3.30. Три групи рибаків зловили 113 риб. На кожного рибака I групи припало по 13 риб, на кожного рибака II групи – по 5 риб і на кожного рибака III групи – по 4 риби. Скільки рибаків було в кожній групі, якщо всього їх було 16 [14]?

Задачі шведських олімпіад

Задача 2.3.31. Числа $1, 2, \dots, n$ подані в деякому порядку $a_1, a_2, \dots, a_n$. Доведіть, що якщо n непарне, то рівність $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\dots(a_n - n)$ обов'язково парна [14].

Задача 2.3.32. Знайдіть многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами, що перетворюються в нуль при $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ і $x = \sqrt{x} + \sqrt[3]{3}$.

Задача 2.3.33. Доведіть, що для кожного дійсного числа $x \geq \frac{1}{2}$ знайдеться ціле n, таке, що $|x - x^2| \leq \sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

Задачі олімпіад США

Задача 2.3.34. Дано рівнобедрений тетраедр $ABCD$, тобто $|AB| = |CD|, |AC| = |BD|, |AD| = |BC|$. Доведіть, що всі грані тетраедра гострокутні трикутники [15].

Задача 2.3.35. Нехай R – невід'ємне раціональне число. Знайдіть фіксований набір цілих чисел a, b, c, d, e, f, таких, що для будь-якого R справедлива нерівність:

$$\left|\frac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f} - \sqrt[3]{2}\right| < \left|R - \sqrt[3]{2}\right|.$$

Задача 2.3.36. Дві точки P і Q, лежать всередині правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $\angle PAQ < 60°$.

Задача 2.3.37. Знайдіть всі корені, дійсні чи комплексні, даної системи рівнянь:

$$\{x + y + x = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^5 + y^5 + z^5 = 3.$$

Задача 2.3.38. Доведіть, що кубічні корені трьох різних простих чисел не можуть бути трьома членами (не обов'язково послідовними) деякої арифметичної прогресії [14].

Задача 2.3.39. Нехай a, b і c позначають три різних цілих числа і P – поліном з цілочисельними коефіцієнтами. Доведіть неможливість одночасного виконання рівностей $P(a) = b, P(b) = c$ і $P(c) = a$.

Задача 2.3.40. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c справедлива нерівність

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

3.1. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (районний етап)

3.1.1. Завдання для учнів 6 класу

Завдання 3.1.1. На прямій відмітили три точки A, B і C так, що $AB = 20$ см, $BC = 10$ см Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC [10].

Розв'язання

Слід розглянути всі можливі випадки розташування точок на прямій.

1 варіант коли всі зазначені точки йдуть один за одним:

A – 20 см – B – 10 см – C

2 варіант коли C стоїть між A і B,

A – 10 см – C – 10 см – B

Для 1-го варіанта відстань між центрами дорівнює:

$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot 10 = 10 + 5 = 15 \text{ см.}$$

Для 2-го варіанта дорівнює

$$\left|\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot 20 - \frac{1}{2}\cdot 10\right| = 10 - 5 = 5 \text{ см.}$$

Завдання 3.1.2. У клітинках таблиці розміром 4×4 запишіть числа, відмінні від 5, так, щоб суми чисел, які стоять у кутових клітинках кожного квадрата розміром $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4$ були рівними 20 [16].

Розв'язання

За приклад можна взяти дану таблицю:

6	7	6	3
4	3	4	7
6	7	6	3
4	3	4	7

Завдання 3.1.3. Мурашка виповзла з точки O, проповзла відрізок довжиною 1 і повернула на кут 90°. Далі вона приповзла відрізок довжиною 2 і

повернула на кут 90°. Далі, вона проповзла відрізок довжиною 3 і повернула на кут 90° і т.д. Чи може мураха повернутися в точку O підібравши відповідні напрямки поворотів [11]?

Розв'язання

Так, зможе. Кожен $(2n-1)$-й крок мурашки може розглядатися як переміщення на $\pm(2n-1)$ у горизонтальному напрямку, кожен $2n$-ий крок – як переміщення на $\pm 2n$ у вертикальному. Використовуючи рівності $1-3-5+$ $+7=2-4-6+8=0$, можна легко побудувати потрібний шлях

Завдання 3.1.4. Чи існує восьмицифрове число, у записі якого всі цифри різні, і яке ділиться на всі свої цифри [25]?

Розв'язання

Ні, не існує. Цифра нуль відсутня. Сума інших дев'яти цифр дорівнює 45. Якщо ще одна відсутня цифра – це 5, то число не ділиться на 3. Якщо цифра 5 присутня, то число ділиться на 5, цифра 5 – на останньому місці, але тоді не буде подільності на будь-яку парну цифру.

Завдання 3.1.5. Одинадцять учнів відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є два учні, A і B такі, що всі гуртки які відвідує A,відвідує й B [13].

Розв'язання

Пронумеруємо гуртки числами $1, 2, 3, 4, 5$. Тоді розглянемо 10 груп множин гуртків: $\{1, 12, 123, 1234, 12345\}, \{2, 23, 234, 2345\}, \{3, 34, 345, 3451\}, \{4, 45, 451, 4512\}, \{5, 51, 5$
За принципом Діріхле, якісь два учні потраплять до однієї групи, це й будуть шукані учні A і B.

3.1.2. Завдання для учнів 7 класу

Завдання 3.1.6. Є 5 розеток в електромережі кабінету фізики і 13 трійників. Яку найбільшу кількість електроприладів можна увімкнути в електромережу цього кабінету з їхньою допомогою [20]?

Розв'язання

Кожен увімкнений трійник додає до мережі дві розетки, тому: $13 \cdot 2 + 5 = 31$.

Завдання 3.1.7. Усередині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE, причому $OC \perp OA, OD$ – бісектриса кута AOB, OE і – бісектриса кута BOC. Знайдіть величину кута DOE [11].

Розв’язання

Промені розташовані в такому порядку: OA, OD, OC, OE, OB. Якщо $\angle AOB = 2\alpha$, то $\angle BOD = \alpha, \angle BOE = \alpha - 45°$, а тому

$$\angle DOE = \angle BOD - \angle BOE = 45°.$$

Завдання 3.1.8. Буратіно записує натуральні числа, починаючи з 2, червоним, чорним і синім чорнилом (він використовує всі три кольори, кожне число записує одним кольором). Він стверджує, що коли помножити будь-які два числа різного кольору, то добуток буде іншого (третього) кольору. Чи не помиляється він [19]?

Розв’язання

Буратіно помиляється. Нехай a_1 і a_2 – червоні числа, b − синє, а c – чорне. Тоді $a_1 b$ – чорне, а $a_2(a_1 b)$ – синє. Звідси випливає, що число $a_1 a_2$ – синє, бо $a_2(a_1 b) = (a_1 a_2)b$. Замінивши в цих міркуваннях число b на число c, одержимо, що число $a_1 a_2$ – чорне. Отримали суперечність.

Завдання 3.1.9. На основі Контрастів живуть лицарі та брехуни. Лицарі завжди кажуть правду, брехуни завжди брешуть. Деякі жителі острова зробили заяву, що на острові парна кількість лицарів, а всі інші зробили заяву, що на острові непарна кількість брехунів. Чи може кількість жителів острову бути рівною 2001 [25]?

Розв’язання

Ні, не може. Оскільки 2001 – число непарне, то або кількість лицарів парна, а брехунів – непарна, або кількість лицарів непарна, а брехунів – парна. У першому випадку і всі, хто зробив першу заяву, - лицарі, і всі, хто зробив другу, – також лицарі, що неможливо, бо на острові є хоча б один брехун. Аналогічну суперечність одержуємо й у другу випадку.

Завдання 3.1.10. Незнайка купив у магазині чотири однакові гральні кубики. граючись, він став прикладати їх один до одного гранями з однаковою кількістю очок. У результаті з’явилась конструкція, зображена Незнайком на рисунку. Знайка, придивившись на рисунок, заявив, що Незнайка помилився. Чи правий Знайка [20]?

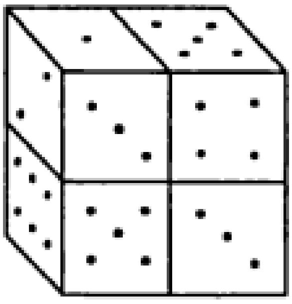

Рисунок 3.1. Конструкція, зображена Незнайком

Розв’язання

Так, правий. Позначимо кубики на малюнку через A, B, C, D «по колу», починаючи з лівого нижнього і закінчуючи правим нижнім. З розташувань кубиків A і B випливає, що вони покладені один на одного четвірками, а тому проти гра з одиницею в усіх кубиках розташована грань з четвіркою. Далі, з розташування кубиків B і C випливає, що вони прикладені один до одного шістками, і тому проти грані з двійкою розташована грань з шісткою, а звідси випливає, що проти трійки розташована п’ятірка, це суперечить правильному розташуванню кубиків C і D.

3.1.3. Завдання для учнів 8 класу

Завдання 3.1.11. Чи існують такі чотири попарно різні натуральні числа, що сума будь-яких двох з них є степенем числа 3 [13]?

Розв’язання

Ні, не інують. За принципом Діріхле, серед даних чисел є два числа, сума яких парна, а тому й не може бути степенем трійки.

Завдання 3.1.12. На складі склотари зберігаються банки місткістю 0,5 л, 0,7 л та 1,0 л. Відомо, що на складі знаходиться 2600 банок загальною місткістю 2002 л. Доведіть, що там є принаймні одна півлітрова банка [11].

Розв’язання

Припустимо, що це не так, і на складі є a банок місткістю по 0,7 л і b банок місткістю по 1,0 л. Тоді $a + b = 2600$ і $0,7a + b = 2002$. Звідси $3a = 5980$, що неможливо для цілих невід’ємних a.

Завдання 3.1.13. Нехай AF – медіана трикутника ABC. На продовжені сторони AB за точку B відмітили точку D так, що для точки E перетину прямої DF зі стороною AC має місце рівність $AB = BD = AF$. Доведіть, що $CE = EF$.

Розв’язання

Трикутники BFD і FCA рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle DFB = \angle FCA = \gamma$, але $\angle EFC = \angle BFD = \gamma$, тому $CE = EF$.

Завдання 3.1.14. Доведіть, що в будь-якому 50-значному числі, десятковий запис котрого не містить жодного нуля, можна закреслити декілька цифр так, щоб одержане після цього числа ділилося без остачі на 101 [19].

Розв’язання

У такому числі знайдуться чотири однакові цифри. Викреслюючи всі цифри, крім чотирьох однакових, одержуємо число, яке ділиться на 101.

Завдання 3.1.15. За круглим столом $2n$ сидить науковців – n фізиків та n хіміків, причому деякі з них завжди кажуть правду, а решта – завжди бреше. Відомо, що кількість хіміків-брехунків дорівнює кількості фізиків-брехунів. На запитання: «Хто ваш сусід праворуч?» – усі, хто сидить за столом. відповіли: «Хімік». Доведіть, що число n є парним [13].

Розв’язання

Зрозуміло, що поруч з кожним фізиком зліва сидить брехун, отже кількість фізиків не більша від кількості всіх брехунів. До того ж, зліва від кожного хіміка сидить правдива особа, тому кількість хіміків не більша від кількості всіх правдивих. Звідси отримуємо, що $2n \leq 2n$. А це означає, що кількість фізиків дорівнює кількості брехунів. оскільки брехунів-фізиків і брехунів-хіміків – порівну, то n – парне.

3.1.4. Завдання для учнів 9 класу

Завдання 3.1.16. Десятковий запис добутку деяких 25 натуральних чисел закінчується на 25. Доведіть, що серед цих чисел можна вибрати три числа так, що десятковий запис їхнього добутку також закінчується на 25 [25].

Розв’язання

Так як добуток даних чисел ділиться на $25 = 5^2$, то серед них знайдуться два непарні числа m і n для яких mn ділиться на 25. Усі інші числа також непарні, і від ділення на 4 дають в остачі 1 або 3. Розіб’ємо 23 числа, які залишилися, на пари, що дають однакові остачі від ділення на 4. Отримаємо 11 пар і ще одне число k. Зрозуміло, що число k від ділення на 4 дає в остачі 1. Тому добуток mnk закінчується на 25.

Завдання 3.1.17. Доведіть, що коли в опуклому чотирикутнику $ABCD, \angle CBD = \angle CAB$ і $\angle ACD = \angle BDA,$ то $\angle ABC = \angle ADC$.

Розв’язання

Маємо:

$$\angle ABC = 180° - \angle CAB - \angle ACB = 180° - \angle CBD - -(\angle BCD - \angle ACD)$$
$$= (180° - \angle CBD - \angle BCD) + \angle ACD == \angle BDC + \angle BDA = \angle ABC.$$

Завдання 3.1.18. У Карлсона є 100 паличок різної довжини. Доведіть, що зламавши не більше від двох із них (кожну – на дві частини), він може із всіх паличок скласти прямокутник [11].

Розв’язання

Карлсон може зламати навпіл довільну паличку. Ці половинки будуть вертикальними сторонами прямокутника. Із паличок, що залишилися, Карлсон складе відрізок і розділить йог навпіл (якщо потрібно, розламає ще одну паличку). Це й будуть горизонтальні сторони.

Завдання 3.1.19. У ряд виписали 40 попарно різних додатних чисел, кожне з яких менше від 1. Сума чисел, що стоять на місцях з парними номерами, на 1 більша від суми чисел, що стоять на місцях з непарними номерами. Доведіть, що серед записаних чисел знайдеться таке, яке менше від обох своїх сусідів [13].

Розв’язання

Нехай наприклад, такого числа немає. Розглянемо найбільше числ aо послідовності. Розіб’ємо решту на дві частини: числа, які записані перед числом a, і числа, які записані після числа a. Друга частина утворює спадну послідовність, а перша – зростаючу (якщо це не так, то все доведено). Приєднаємо число a до тієї частини. де кількість чисел непарна (одна з частин може бути порожньою). Дале легко довести, що різниця між останнім і першим числом зростаючої частини не менша від 1, що суперечить умові (числа належать інтервалові $(0; 1)$).

Завдання 3.1.20. Цілі числа x, y, z такі, що $xy + yz + zx = 1$. Доведіть, що число $(1 + x^2)(1 + y^1)(1 + z^2)$ є квадратом цілого числа [11].

Розв’язання

Зрозуміло, що $1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$.

Аналогічно $1 + y^2 = (y + x)(y + z)$ і $1 + z^2 = (z + x)(z + y)$.

Тобто, $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2$.

3.1.5. Завдання для учнів 10 класу

Завдання 3.1.21. Функція $f: R \to R$ для всіх дійсних x задовольняє рівність $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$. Знайдіть $f(2004)$, якщо $f(0) = 0$ [19].

Розв’язання

Послідовно одержимо:

$$f(1) = f(0) + 2 \cdot 0 + 1, f(1) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1, f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1, \ldots, f(2004) = f(2003) + 2 \cdot 3003 + 1.$$

Додавши ці рівності, одержимо:

$$f(2004) = f(0) + 2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 2003) + 2004,$$

тобто $f(2004) = 2004^2$.

Завдання 3.1.22. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння

$$3x^3 + 5xy + 2y^2 = 2005.$$

Розв’язання

Таких x та y не існує. Запишемо рівняння у вигляді:

$$(x+y)(3x+2y)=5\cdot 4001.$$

Оскільки $2\leq x+y<3x+2y, 5$ та 401 – прості числа, то можливим є лише один випадок: $x+y=5, 3x+2y=401$. Але ті дві рівності для натуральних x і y одночасно виконуватися не можуть.

Завдання 3.1.23. Величина кута A трикутника ABC дорівнює $60°$, точка I – центр його вписаного кола. На променях BA і CA відповідно відклали відрізки BX та CY, які за довжиною дорівнюють стороні BC. Доведіть, що точки X, Y та I лежать на одній прямій [25].

Розв'язання

Оскільки I – центр вписаного кола, то I – точка перетину бісектрис трикутника ABC. Тобто трикутники BIC та BIX рівні Отже $\angle BIC=\angle BXI==120°$. Звідси випливає, що $\angle CIX=120°$. Трикутники CIY та CIB рівні, а тому $\angle CIY=\angle CIB=120°$. Так як $\angle CIY=120°=\angle CIX$, то точки I, X, Y лежать на одній прямій.

Завдання 3.1.24. Для довільних дійсних чисел $a\leq 1$ і $b\leq 1$, що задовольняють умову $a+b\geq \frac{1}{2}$, доведіть нерівність $(1-a)(1-b)\leq \frac{9}{16}$.

Розв'язання

Нехай $1-a=x, 1-b=y$, тоді з умови задачі випливає, що $x\geq 0, y\geq 0$ і $x+y\leq \frac{3}{2}$, За нерівністю Коші,

$$(1-a)(1-b)=xy\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leq \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},$$

що й треба було довести.

Завдання 3.1.25. Серед 18-ти деталей, які розташовані в ряд, деякі три, що стоять поспіль, важать 99 г, а всі інші – по 100 г. Двома зважуваннями на вагах, що показують результат зважування в грамах, знайдіть усі 99-ти грамові деталі.

Розв'язання

Занумеруємо деталі зліва направо числами $1, 2, \dots, 18$. Зважимо деталі з номерами $4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15$. Можливими є чотири такі випадки.

Випадок 1. Маса всіх зважених деталей дорівнює 800 г, тобто серед них немає жодної 99-грамової. Для другого зважування вибираємо деталі з номерами $1, 2, 3, 8, 9$. Їхня маса може бути рівною 497 г (і тоді по 99 г важать деталі $1, 2, 3$), 498 г (і тоді по 99 г важать деталі $8, 9, 10$), 499 г (і тоді по 99 г важать деталі $9, 10, 11$) і 500 г (і тоді по 99 г важать деталі $16, 17, 18$).

Випадок 2. Маса всіх зважених деталей дорівнює 799 г, тобто серед них одна 99-грамова деталь. Для другого зважування вибираємо деталі з номерами $2, 3, 4, 7, 8, 12$. Їхня маса може бути рівною 597 г (і тоді по 99 г важать деталі $2, 3, 4$), 598 г (і тоді по 99 г важать деталі $7, 8, 9$), 599 г (і тоді по 99 г важать деталі $10, 11, 12$) і 600 г (і тоді по 99 г важать деталі $15, 16, 17$).

Випадок 3. Маса всіх зважених деталей дорівнює 798 г, тобто серед них дві 99-грамові. Для другого зважування вибираємо деталі з номерами $3, 4, 5, 6, 7, 12$. Їхня маса може бути рівною 597 г (і тоді по 99 г важать деталі $3, 4, 5$), 598 г (і тоді по 99 г важать деталі $6, 7, 8$), 599 г (і тоді по 99 г важать деталі $11, 12, 13$) і 600 г (і тоді по 99 г важать деталі $14, 15, 16$).

Випадок 3. Маса всіх зважених деталей дорівнює 797 г, тобто серед них три 99-грамові деталі. Для другого зважування вибираємо деталі з номерами $4, 5, 6, 12$. Їхня маса може бути рівною 397 г (і тоді по 99 г важать деталі $4, 5, 6$), 398 г (і тоді по 99 г важать деталі $5, 6, 7$), 399 г (і тоді по 99 г важать деталі $12, 13, 14$) і 400 г (і тоді по 99 г важать деталі $13, 14, 15$).

3.1.6. Завдання для учнів 11 класу

Завдання 3.1.26. Розв’яжіть нерівність $\left||x-1|-5\right| < 3-2x$.

Розв’язання

$$\left||x-1|-5\right| + 2x < 3;$$

$$\{|x-1|-5+2x<3, |x-1|-5 \geq 0, -(|x-1|-5)+2x<3, |x-1|-5<0; \ \Rightarrow \{x \in (-\infty;3), x \in (-\infty;\ -4] \cup [6;\ +\infty), x \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right), x \in (-4;6);$$

$$\{x \in (-\infty;\ -4), x \in \left(-4;\ -\frac{1}{3}\right);\ \Rightarrow x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right).$$

Завдання 3.1.27. Дотична в точці A до описаного кола трикутника ABC перетинає продовження сторони BC за точку B в точці K. Нехай L – середина сторони AC, точка M лежить на стороні AB так, що $\angle AKM = \angle CKL$. Доведіть, що $MA = MB$ [25].

Розв'язання

Трикутники BAK і ACK подібні (за двома кутами). Тому, з урахуванням умови задачі, KM і KL – відповідні елементи цих трикутників. Отже, M – середина відрізка AB.

Завдання 3.1.28. Доведіть, що не існує такої функції $f: R \to R$ що для всіх x цілих виконується рівність $f(-x^2 + x + 3) = (f(x+1))^2 + 2$.

Розв'язання

Підставляючи до функціонального співвідношення $x = 0$ і $x = 2$, одержуємо суперечність.

Завдання 3.1.29. Дитячий конструктор складається з паличок – кожна завдовжки 8 см або 9 см (причому палички обох типів присутні в комплекті). Сума їхніх довжин дорівнює 18 м. Доведіть, що з усіх цих паличок можна скласти 8 відрізків однакової довжини [13].

Розв'язання

Нехай у конструкторі x паличок по 8 см та паличок y по 9 см. Тоді $8x + 9y = 1800$. Звідси випливає, що $x = 9a, y = 8b, a + b = 25, a \in N, b \in N$. Довжина кожного відрізка дорівнює $1800: 8 = 225 = 9 + 3 \cdot 72$. Оскільки $b \geq 1$, то $y \geq 8$. Це означає, що кожен потрібний відрізок викладаємо з однієї палички довжиною 9 см і за допомогою трьох груп паличок довжиною по 72 см кожна, бо поклавши по одній паличці довжиною 9 см на кожен потрібний відрізок, усі інші палички конструктора розбиваються на $a + b - 1 = 24$ групи по 72 см кожна (палички довжиною 8 см розбиваються на a груп по 9 штук у кожній, а палички довжиною 9 см – на $b - 1$ групу по 8 штук у кожній).

Завдання 3.1.30. Доведіть, що серед чисел вигляду $7^m + 7^n, m \in N, n \in N$, немає жодного квадрата натурального числа, але є безліч кубів натуральних чисел [16].

Розв'язання

Припустимо, що $7^m + 7^n$ є квадратом деякого натурального числа. Оскільки $7^m + 7^n = 7^n(7^{m-n} + 1), m > n,$ і числа 7^n та $7^{m-n} + 1$ взаємно прості, то вони також є квадратами натуральних чисел. Отже, $7^{m-n} + 1 = b^2, b > 2, b \in N$. Звідси випливає, що $7^{m-n} = (b-1)(b+1)$. Нескладно бачити, що кожне з чисел $b-1$ і $b+1$ є степенем числа 7 (з натуральним показником). Тому їхня різниця ділиться на 7, що неможливо. Нехай тепер $m = 3k + 1, n = 3k$. Тоді $7^m + 7^n = 7^n(7^{m-n} + 1) = 7^{3k} \cdot 8 = (2 \cdot 7^k)^3$, тобто серед чисел вигляду $7^m + 7^n$ є безліч кубів цілих чисел.

3.2. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (обласний етап)

3.2.1. Завдання для учнів 7 класу

Завдання 3.2.1. У компанії з трьох осіб один – правдивий, тобто завжди говорить правду, один – брехун, тобто завжди бреше, і один – дипломат, тобто говорить правду або бреше на свій розсуд Щоб узнати, хто з них є ким, кожного запитали, хто він є. Перший відповів, що він правдивий, другий – що він брехун, а третій – що він правдивий або брехун. Хто з них є ким [7]?

Розв'язання

Зауважимо, що ні другий, ні треті брехунами бути не можуть. Тому брехуном буде перший. Після цього зрозуміло, що другий може бути лише дипломатом. А тоді третій – правдивий.

Завдання 3.2.2. Доведіть, що число $1334\,\underbrace{00\ldots00}_{2002\text{ нулі}}\,4669$ ділиться без остачі на 2001.

Розв'язання

Зауважимо, що $2001 = 3 \cdot 667$, причому числа 3 і 667 взаємно прості. Тому достатньо довести подільність даного числа на 3 і на 667. Перша подільність випливає з відповідної ознаки подільності (сума цифр у даному числі ділиться на 3), а другу можна встановити ділення «стовпчиком», використовуючи те, що 1334 і 4669 діляться на 667 [7].

Завдання 3.2.3. Після того, як Наталка з'їла половину слив з банки, рівень компоту знизився на одну третину. На яку частину (від одержаного рівня) знизиться рівень компоту, якщо вона з'їсть половину слив, що залишились [7]?

Розв'язання

Так як половина слив становить $1/3$ рівня, то половина від половини слив буде становити $1/6$ рівня. Тому, одержаний рівень ($2/3$ рівня) понизиться на $1/6$ рівня, що складає $\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$ частину одержаного рівня.

Завдання 3.2.4. Клітинки квадрата розміром 100×100 пофарбовані в білий і чорний кольори в шаховому порядку. квадрат розрізали по лініях сітки на квадрати з непарними сторонами і в кожному квадраті відмітили центральну клітину. Доведіть, що білих і чорних клітинок відмічено порівну [25].

Розв'язання

Нехай квадрат розміром 100×100 розрізали на n квадратів, у яких центральна клітинка біла, і на m квадратів, у яких центральна клітинка чорна. Позначимо через k кількість усіх білих клітинок у квадратах, у яких центральна клітинка біла, тоді в цих квадратах $k-n$ чорних клітинок. Позначимо через l кількість усіх чорних клітинок у квадратах, у яких центральна клітина чорна, тоді в цих квадратах $l-m$ білих клітинок. Оскільки в даному квадраті 5000 чорних і 5000 білих клітинок, то $k+l-m=5000$ і $k-n+l=5000$. Звідси $m=n$.

Завдання 3.2.5. Є лінійка довжиною 9 см без поділок. Яку найменшу кількість поділок потрібно нанести на лінійку, щоб за допомогою неї можна було відкласти відрізки довжиною 1 см, 2 см, 3 см, ..., 9 см, приклавши лінійку лише один раз (у кожному випадку) [19]?

Розв'язання

Двох поділок недостатньо, бо разом з кінцями лінійки отримаємо 4 точки, і матимемо лише $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ відрізків, а нам потрібно 9 різних за довжиною відрізків. Поставивши три поділки в $1,4$ і 7 см від лівого кінця лінійки, одержимо потрібну нам лінійку.

3.2.2. Завдання для учнів 8 класу

Завдання 3.2.6. Розв'яжіть рівняння: $\big||x|-2\big|=x$.

Розв'язання

З умови випливає, що $x \geq 0$ тому рівняння рівносильне рівнянню $|x-2|=x$.

$$|x-2|-x=0;$$

$$\{x-2-x=0, x-2 \geq 0, -(x-2)-x=0, x-x<0; \Rightarrow \{\emptyset, x \geq 2, x=1, x<2,$$

$$\{\emptyset, x=1; \Rightarrow x=1.$$

Завдання 3.2.7. Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до $2/3$ цього шляху він пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху, в напрямі від A до B, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A і B, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від A до B. (Указана середня швидкість дорівнює відношенню відстані від до всього часу руху в напрямі від до) [7].

Розв'язання

Позначимо половину шляху через x см, тоді час руху від A до B дорівнює $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$ годин. Тому середня швидкість становить

$$\frac{2x}{\frac{x}{4}+\frac{x}{6}}=4{,}8\ км/год.$$

Отримаємо рівняння

$$\frac{2x}{4{,}8}-\frac{\frac{4x}{3}}{4{,}8}-\frac{\frac{2x}{3}}{5}=\frac{1}{30}.$$

Звідси $x=6$.

Завдання 3.2.8. Чи існують цілі числа k і l такі, що $k^3+l^3=2001$?

Розв'язання

Ні, не існують. Так як $(k+l)^3=k^3+l^3+3kl(k+l)=2001+3kl(k+l)$ ділиться на 3, то й $k+l$ ділиться на 3. Тоді $2001=(k+l)^3-$

$3kl(k+l) == (k+l)((k+l)^2 - 3kl)$, але значення останнього виразу ділиться без остачі на 9, а 2001 на 9 не ділиться.

Завдання 3.2.9. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрали точки, M, P, N, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Нехай O – точка перетину відрізків MN і PQ. Доведіть, що $P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}$, де P_F позначає периметр фігури F [20].

Розв’язання

Проведемо через центр O_1 квадрата відрізки з кінцями на сторонах: $M_1N_1 \| MN$ та $P_1Q_1 \| PQ$. Тоді $M_1N_1 = MN, P_1Q_1 = PQ$, і тому

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{AM_1O_1Q_1} + P_{CP_1O_1N_1} = P_{BM_1O_1P_1} + P_{DN_1O_1Q_1} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}.$$

Завдання 3.2.10. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають в наступну гру. Вони по черзі роблять такі ходи: вибирається довільна купа, що містить більше від одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. Після кожного поділу купи на дві записується добуток кількостей сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилась без остачі на 1000. Чи може другий гравець йому завадити [7]?

Розв’язання

Ні, не може. Розглянемо величину S, рівну півсумі квадратів кількостей сірників у купах. На початку гри $S = 2001^2/2$, а наприкінці $S = 2001/2$. Якщо купка, у якій було $k + l$ сірників, розбивається на дві, що містять k і l сірників, то S зменшиться на kl, тобто на число, яке записують. Тому сума всіх записаних чисел буде рівною загальному зменшенню числа S і дорівнюватиме $\frac{2001^2}{2} - \frac{2001}{2} = 2001 \cdot 1000$, що ділиться на 1000. Зауважимо, що результат гри не залежить від дій гравців.

3.2.3. Завдання для учнів 9 класу

Завдання 3.2.11. Нехай m – натуральне число. Доведіть, що число $\frac{(m-1)^{2003}+1}{m}$ є цілим і непарним [7].

Розв’язання

Слід скористатись формулою

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}), k \in N.$$

Завдання 3.2.12. Чи існують такі дійсні a, b, c $(a \neq 0)$, числа що всі дійсні корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ будуть коренями рівняння

$$a(x^2-1)^2 + b(x^2-1) + x = 0?$$

Розв’язання

Так, існують. Нехай задане квадратне рівняння має вигляд $(x-\lambda)^2 = 0$, тоді всі його корені мусять бути коренями рівняння $(x^2 - 1 - \lambda)^2 = 0$. Відтак $(x^2 - \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - \lambda^2)^2 = 0$, якщо $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Отже, $a = 1, b = -2\lambda, c = \lambda^2$, де $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Завдання 3.2.13. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD прямокутної трапеції $ABCD\,(BC \parallel AD, \angle A = \angle B = 90°)$; M – основа перпендикуляра, проведеного з точки O до бічної сторони AB. Доведіть, що $\angle CMO = \angle DMO$.

Розв’язання

Оскільки $MO \parallel BC \parallel AD$, то

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{BM}{MA}.$$

Звідки випливає подібність трикутників CBM і DAM. Отже $\angle MCB == \angle MDA$.

Завдання 3.2.14. Дано дійсні числа a, b, c які належать сегменту $[0; 1]$. Доведіть, що $a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - b^{10}c^7 + c^{17} - c^{10}a^7 \leq 1$.

Розв’язання

Досить зауважити, що якщо $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, то $0 \leq \beta - \alpha \leq 1$.

Завдання 3.2.15. Вузли нескінченного в усі боки аркуша клітчастого паперу пофарбовані в три кольори (причому всі три кольори використано). Доведіть, що знайдеться прямокутний трикутник (з катетами, які не обов'язково паралельні лініям сітки), усі вершини котрого розташовані у вузлах і мають різні кольори.

Розв'язання

Нехай, не існує прямокутних трикутників з вершинами різного кольору. В такому випадку обов'язково знайдеться пряма (вертикальна або горизонтальна). яка містить вузли двох або трьох різних кольорів. Розглянемо таку пряму l і припустимо, що вона горизонтальна. Якщо вона містить вузли тільки двох кольорів, наприклад, синього і червоного, то візьмемо довільний вузол A зеленого кольору, вузол B, який лежить на l – на одній вертикалі з A. Нехай вузол B має синій колір. Тоді вузол C який лежить на l і має червоній колір, утворює – разом з вузлами A і B – утворює прямокутний трикутник ABC з прямим кутом B і з різноколірними вершинами. Отримали суперечність. Тоді, на прямій L є вузли всіх трьох кольорів. Нехай B, C і D – відповідно синій, червоний і зелений вузли, які лежать на l тоді на вертикалі, яка проходить через вузол B, усі вузли – синього кольору (якщо це не так, то легко можемо побудувати прямокутний трикутник з різноколірними вершинами). Аналогічно вертикаль, яка проходить через точку D, містить вузли – усі зеленого кольору. Через точку C проводимо дві прямі: першу під кутом $45°$ до L і другу – під кутом $90°$ до першої. Ці дві прямі перетинають синю і зелену вертикалі в чотирьох точках. Дві з них сині, а дві – зелені. Вибравши одну синю і одну зелену точки – разом з точкою C одержимо прямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C, усі вершини якого – різного кольору. Знов маємо суперечність.

3.2.4. Завдання для учнів 10 класу

Завдання 3.2.16. Нехай α, β, γ – такі гострі кути, що $cos\alpha = tg\beta, cos\beta = tg\gamma, cos\gamma = tg\alpha$. Доведіть, що $sin\alpha = sin\beta = sin\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Розв'язання

Використовуючи рівності умови задачі, одержимо:

$$1-sin^2\alpha = tg^2\beta = \frac{1}{cos^2\beta}-1 = \frac{1}{tg^2\gamma}-1 == \frac{2cos^2\gamma-1}{1-cos^2\gamma} = \frac{2tg^2\alpha-1}{1-tg^2\alpha} = \frac{\frac{2sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}-1}{1-\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}}.$$

Звідси нескладно отримати, що $sin^2\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$. Оскільки ? є гострим кутом, то $sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Рівності для інших кутів одержуються аналогічно.

Завдання 3.2.17. Нехай a – таке дійсне число, що числа a^2+a і a^3+2a є раціональними. Доведіть, що a також є раціональним числом [7].

Розв'язання

Нехай $A=a^2+a, B=a^3+2a$ – раціональні числа. Тоді $B=a(A+3)-A$. Зауважимо, що оскільки рівняння $a^2+a+3=0$ не має дійсних коренів, то $A\neq -3$, а тому $a=\frac{A+B}{A+3}$. Звідси й випливає твердження задачі.

Завдання 3.2.18. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел a, b і c, що ab^3-2003, bc^3+2005 і ca^3-2007 є квадратами натуральних чисел [16].

Розв'язання

Оскільки числа a, b і c є непарними, то

$$ab^3 = 4x^2+2003 \equiv -1(mod4),$$

$$bc^3+2005 \equiv -1(mod4),$$

$$ca^3-2007 \equiv -1(mod\ 4), x, y, z \in N.$$

Тоді $(abc)^4 = (ab^3)\cdot(bc^3)\cdot(ca^3) \equiv -1(mod\ 4)$, що є неможливим.

Завдання 3.2.19. Знайдіть усі такі дійсні числа x, які не є цілими і при цьому задовольняють рівність

$$x+\frac{2004}{x} = [x]+\frac{2004}{[x]}.$$

Розв'язання

Для нецілих x вихідне рівняння є рівносильним рівнянню $x[x] = 2004$. Нехай $n = [x], \alpha = \{x\}, \alpha \in (0;1)$. Тоді $n(n+\alpha) = 2004$. Якщо $n \geq 0$, то з нерівності $n^2 < 2004$ випливає, що $n < 44$. Проте для $n < 44$ маємо: $n(n + \alpha) << n(n+1) < 44 \cdot 45 = 1980 < 2004$. Отже $n = -m, m \in N$. А тоді маємо співвідношення $m(m-\alpha) = 2004$. Звідси отримуємо такі оцінки: $m(m-1) < < m(m-\alpha) = 2004 < m^2$, З необхідністю $m = -[x] = 45$. Залишається тільки зауважити, що $x = \frac{2004}{-45} = -44\frac{8}{15}$ дійсно задовольняє умову задачі

Завдання 3.2.20. Нехай у трикутнику ABC точки M і N є серединами сторін BC і AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC співпадає з точкою перетину медіант трикутника AMN. Знайдіть величину кута ABC [20].

Розв'язання

З умови задачі безпосередньо випливає, що трикутник ABC є гострокутним. Нехай H – точка перетину висот AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC. Якщо $K = AA_1 \cap MN$, то $NK = KM$. Проведемо висоту NL трикутника NCM. Тоді $NL \| AA_1$, і за теоремою Фалеса, $CL = LA_1 = A_1M$. Нехай $F = CC_1 \cap NL, E = CC_1 \cap NM$. Оскільки $MN \| AB$ і $AH{:}HK = 2{:}1$, то $C_1H{:}HE = 2{:}1$. Далі, якщо $h_C = CC_1$, то $CE = EC_1 = \frac{1}{2}h_C, HE = \frac{1}{3}EC_1 = \frac{1}{6}h_C, HC_1 = \frac{1}{3}h_C$. Відтак, $CH = \frac{2}{3}h_C, CF = FH = \frac{1}{3}h_C$, оскільки точка F – середина CH. Враховуючи, що $CH{:}CC_1 = 2{:}3 = CA_1{:}CM$, то $C_1M \| HA_1$. Отже, $C_1M \perp CB$, і з того, що $C_1M = MC = MB$, отримаємо $\angle ABC = 45°$.

3.2.5. Завдання для учнів 11 класу

Завдання 3.2.21. Розв'яжіть нерівність $(x - 2006)\sqrt{x^2 - 2005} \geq 0$.

Розв'язання

Задана нерівність рівносильна сукупності

$$\left[\frac{\{x-2006\geq 0,\sqrt{x^2-2005}\geq 0,}{\{x-2006\leq 0,\sqrt{x^2-2005}\leq 0;}\right. \Rightarrow \left[\{x\geq 2006, x\in R,\right.$$
$$\{x\leq 2006, x=-\sqrt{2005}, x=\sqrt{2005};\ \Rightarrow\Rightarrow \{x\in[2006;\ +\infty), x$$
$$=-\sqrt{2005}, x=\sqrt{2005};\ \Rightarrow\ x\in[2006;\ +\infty)\cup\left\{-\sqrt{2005};\ \sqrt{2005}\right\}.$$

Завдання 3.2.22. Чи можна число 2006 подати у вигляді $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$, де a, b, c і d – натуральні числа [7]?

Розв'язання

Ні, не можна. Нехай $2006=\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $a>b, c>d$. Позначимо $m=a-b, n=c-d, k=b-d$. Тоді одержуємо: $2006(2^n-1)=2^k(2^m-1), 1003(2^n-1)=2^{k-1}(2^m-1)$.

Оскільки в лівій частині стоїть непарне число, то $k-1=0$, тобто $k=1$. Тоді $1003(2^n-1)=(2^m-1)$. Зазначимо, що $n=1$ не задовольняє умову, бо тоді $2^m=1004$, що неможливо. Якщо $m>n>1$, то числа 2^m-1 і 2^n-1 від ділення на 4 дають в остачі 3. Оскільки 1003 також від ділення на 4 дає в остачі 3, то число $2003(2^n-1)\equiv 1(4)$. Отже, ліва і права частини від ділення на 4 дають остачі 1 і 3 відповідно. Суперечність.

Завдання 3.2.23. Нехай $a_1>0$ і $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$ для всіх натуральних n. Доведіть, що $a_n\geq n$ для всіх $n\geq 2$.

Розв'язання

Зауважимо, що $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geq 2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}=2$. Якщо $a_n\geq n$, то

$$a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{1}{a_n}-n-1=\frac{a_n^2-na_n-a_n+n}{a_n}==\frac{(a_n-1)(a_n-n)}{a_n}$$
$$\geq 0,$$

бо $a_n\geq n\geq 1$. Отже, за індукцією, $a_n\geq n$ для всіх натуральних $n>1$.

Завдання 3.2.24. Усі вершини одного куба лежать на гранях другого куба. Чи може статися так, що жодна грань першого куба не буде паралельною жодній грані другого [7]?

Розв'язання

Ні, не може Припустимо супротивне: нехай вісім вершин другого куба K_2 лежать на шести гранях першого куба K_1, і при цьому жодна грань одного куба не паралельна жодній грані другого куба. Тоді куб K_1 матиме грань G (будемо вважати її горизонтальною), на якій лежать дві вершини куба K_2, тобто на грані G лежить ребро куба K_2, а на протилежній грані G_1 куба K_1, лежить друге ребро куба K_2. Приймаємо ребро куба K_1 за 1, ребро куба K_2 за x. Проекція куба K_2 на грань G буде прямокутником зі сторонами 1 і x, де $1 \leq x\sqrt{2}$. Отримати суперечність.

Завдання 3.2.25. Знайдіть значення дробів $\frac{□□□}{□+\beta+\gamma}$ і $\frac{□□□sin□□□□sin□□□□sin□}{□□□sin□+sinsin□+sinsin□}$, якщо числа α, β і □ вибрані так, що обидва вирази додатні й один з них утричі більший від другого [7]

Розв’язання

Позначивши перший дріб через t, другий через s, маємо, що $t > 0$, $s = kt$, де $k = 3$ або $k = \frac{1}{3}$, причому

$$\frac{1}{t} = \frac{sin\, sin□\ □□□\, cos□\ □□□\, cos□ + cos\, cos□\ □□□\, sin□\ □□□\, cos□ + cos\, cos□\ □□□\, cos□\ □□□\, sin□}{□□□\, sin□\ □□□\, sin□\ □□□\, sin□}$$

$$= \frac{sin\, sin\,(\alpha+\beta+\gamma) - sin\, sin□\ □□□\, sin□\ □□□\, sin□}{□□□\, sin□\ □□□\, sin□\ □□□\, sin□} = \frac{1}{s} - 1.$$

З рівності $\frac{1}{t} = \frac{1}{kt} - 1$ знаходимо $t = \frac{1}{k} - 1$. Звідси випливає, що $k = \frac{1}{3}$ (бо $\frac{1}{3} - 1 < 0$). Отже, $t = 2$ і $s = \frac{2}{3}$.

3.3. Завдання для Всеукраїнської учнівської олімпіади (заключний етап)

3.3.1. Завдання для учнів 8 класу

Задача 3.3.1. Вася додав до чисельника і знаменника правильного дробу одне і те ж натуральне число, менше, як за чисельник, так і за знаменник. В результаті дріб збільшився більше, ніж на 50%. Вася стверджує, що якщо він віднімає число від чисельника і знаменника, то дріб зменшиться менше, ніж на 50%. Чи це можливо [10]?

Розв'язання

$$\{\frac{a+n}{b+n} > \frac{3}{2}\frac{a}{b}\ \frac{a-n}{b-n} > \frac{1}{2}\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \{2ab+2nb > 3ab+3an\ 2ab-2nb > ab-an \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 4ab > 4ab+2an, \textit{це неможливо}.$$

Задача 3.3.2. В паралелограмі $ABCD$ позначено точка K така, що $AB == BK = KC$. Доведіть, що центр паралелограма рівновіддалений від середини всіх сторін трикутника AKD [25].

Доведення

Нехай O – точка перетину діагоналей, E – середина відрізка AK, F – середина відрізка KD, M – середина відрізка AD. Тоді, розглядаючи середні лінії в трикутниках ACK, BDF і ACD отримаємо рівність

$$OF = \frac{BK}{2} = \frac{CK}{2} = OE = \frac{CD}{2} = OM.$$

Що і потрібно було довести

Задача 3.3.3. Існує прямокутний паралелепіпед. Вася вважає, що при збільшені кожного з його ребер на 1 см повна поверхня паралелепіпеда збільшиться на 9 см^2, а об'єм збільшиться на 5 см^3. Чи може він бути правий [13]?

Зауваження. Прямокутний паралелепіпед – просторова фігура, що нагадує куб, але ребра, що виходять з однієї вершини, можуть мати різну довжину. Його об'єм дорівнює добутку довжин трьох ребер, що виходять з однієї вершини.

Доведення

Об'єм паралелепіпеда з ребрами a, b, c дорівнює $X = abc$, а його повна поверхня дорівнює $2Y = a(ab + ca + bc)$. Позначивши $Z = a + b + c$, отримаємо:

$$5 = (a+1)(b+1)(c+1) - abc = Y + Z + 1 \ \Rightarrow y + Z = 4;$$
$$9 = 2((a+1)(b+1) + (c+1)(a+1) + (b+1)(c+1) - -(ab + ac + bc)$$
$$= 4Z + 6 \ \Rightarrow Z = \frac{3}{4}, Y = \frac{13}{4}.$$

Але всі ребра менші 1 і $Y < 3$. Отже, це неможливо.

Задача 3.3.4. В оракула в саду живе чотири черепашки. відвідувач може за всіх видрати будь-яку підмножину черепашок і питати оракула, скільки серед цих черепашок самців (відповіді оракула завжди правильні). За яку найменшу кількість кроків можна дізнатись про всіх черепах, якого вони роду [16]?

Розв’язання

За три питання можна отримати відповідь наступним чином. Перші два запитання про черепах 1 і 2, про 2 і 3. Якщо хоча б один із відповідей 0 або 2, про відповідну пару знаємо, якого вони роду, про останню із трьох знаємо із другого питання, залишається 1 питання на 4-ту черепашку. Якщо дві відповіді 1, то черепашки 1 і 3 одного роду. Тоді запитаємо про 1, 3, 4. Ми почуємо відповідь не менше 2, якщо черепашки 1 і 3 були самцями, і відповідь не більше 1 в іншому випадку. При цьому рід черепашки 4 також однозначно встановлюється, і залишається одним запитання вияснити рід черепашки 2.

Доведемо, що двох питань недостатньо. Перш за все зауважимо, що:

а) за одне питання, не знаючи загальної кількості самців, ми не можемо розібратися навіть з двома черепахами;

б) знаючи загальне число самців, ми можемо розібратись з двома, але не можемо розібратися з трьома черепашками.

Тому в ситуації чотирьох черепашок і двох питань задавати перше запитання про всіх черепашок зразу або про одну черепашку немає сенсу. Оскільки при запитані про групу із трьох чи двох черепашок ми можемо почути відповідь 1, таке питання також не призведе до успіху.

Задача 3.3.5. Трикутник ABC такий, що $BC < AC < AB$. Точка M – середина AC. На стороні AB існує точка K така, що $CK = BC$ і $BK = AC$. Доведіть, що $\angle BAC = 2\angle ABM$ [11].

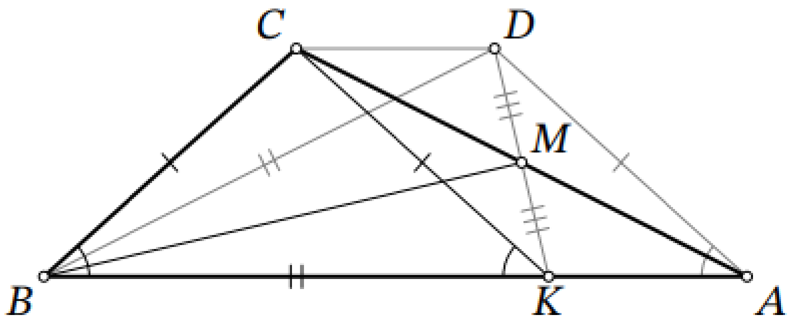

Рис. 3.2. Трикутник ABC

Доведення

Продовжимо відрізок KM за точку M на його довжину і позначимо точку D (рис. 3.2.). В чотирикутнику $AKCD$ діагоналі перетинаються в свої серединах, тому він паралелограм. Отримаємо $AD = CK$ і $\angle BAD = \angle BKC$; а використовуючи те, що трикутник BCK рівнобедрений, знаходимо $AD = BC$ і $\angle BAD = \angle CBK$. Отже, трикутники BAD і ABC рівні за двома сторонами і кутом $\angle BAD = \angle ABC$ між ними, тобто $BD = AC$ і $\angle ABD = \angle BAC$.

Залишилось довести, що $\angle ABD = 2\angle ABM$ тобто те, що BM – бісектриса кута ABD. Ми вже знаємо, що BM – медіана в трикутнику BDK, а із $BD = AC = = BK$ отримаємо, що цей трикутник рівнобедрений, звідси випливає, що $\angle BAC = 2\angle ABM$.

Задача 3.3.6. У Насті є 5 жовтих монет, про які їй відомо, що вони справжні. В неї є також 5 синіх монет, про які їй відомо, що серед них 3 справжні та дві фальшиві. Усі 8 справжніх монет важать однаково, одна з фальшивих монет важча за справжню на 1 грам, а інша – легша за справжню також на 1 грам. Чи зможе Настя за допомогою шалькових терезів без гир за 3 зважування визначити обидві фальшиві монети та вказати, яка з них більш важка, а яка більш легка [20]?

Розв’язання

Позначимо для зручності блакитні монети $Б_1, \dots, Б_5$. Спочатку порівняємо 3 жовтих та 3 блакитних монети $Б_1, Б_2, Б_3$:

1) $Ж_1 + Ж_2 + Ж_3 \ ? \ Б_1 + Б_2 + Б_3$.

Розглянемо можливі випадки.

1а) $Ж_1 + Ж_2 + Ж_3 = Б_1 + Б_2 + Б_3$.

Тоді можливі варіанти. Фальшиві серед $Б_1, Б_2, Б_3$, або серед $Б_4$ та $Б_5$. У тій групі, де фальшиві монети, усі монети різної ваги.

Другим зважуванням порівняємо такі монети:

2) $Б_1 \; ? \; Б_2$.

Можливі такі варіанти.

2а) $Б_1 = Б_2$.

Це означає, що ці монети справжні, а тому фальшиві $Б_4$ та $Б_5$. Треба просто порівняти їх і з'ясувати яка більш важка, яка більш легка.

2б) $Б_1 > Б_2$.

Тоді можливі три варіанти розподілу справжніх та фальшивих монет. $Б_1$ – важка, $Б_2$ легка, або $Б_1$ – важка, $Б_2$ справжня, або $Б_1$ – справжня, $Б_2$ легка. Порівняємо сумарну вагу монет $Б_1$, $Б_2$ та $Ж_1$, $Ж_2$ (двох справжніх). У першому випадку вони рівні, у другому $Б_1$, $Б_2$ важчі, а у третьому – легші за $Ж_1$, $Ж_2$, а тому маємо відповідь на усі питання після результатів третього зважування:

3) $Ж_1 + Ж_2 \; ? \; Б_1 + Б_2$.

Очевидно, що аналогічно завершується розв'язання задачі у випадку

2в) $Б_1 < Б_2$.

Другий випадок.

1б) $Ж_1 + Ж_2 + Ж_3 > Б_1 + Б_2 + Б_3$.

Тоді серед $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ є більш легка фальшива, а серед $Б_4$, $Б_5$ – більш важка. Далі все просто з'ясовується за допомогою другого та третього зважувань:

2) $Б_1 \; ? \; Б_2$ та 3) $Б_4 \; ? \; Б_5$.

Наприклад, якщо 2а) $Б_1 = Б_2$ та 3а) $Б_4 > Б_5$, то $Б_3$ фальшива більш легка, а $Б_4$ – фальшива більш важка. Аналогічно розглядаються усі інші результати зважувань.

Третій випадок.

1в) $Ж_1 + Ж_2 + Ж_3 < Б_1 + Б_2 + Б_3$.

Цей випадок аналогічний до випадку 1б), але тепер серед $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ є більш важка фальшива, а серед $Б_4$, $Б_5$ – більш легка.

3.3.2. Завдання для учнів 9 класу

Задача 3.3.7. Знайдіть суму

$$1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \cdots + 2017^2 + 2018^2.$$

Розв’язання

Зауважимо, що при будь-якому k правильна рівність

$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = 4.$$

Тому ця сума дорівнює $1 + 504 \cdot 4 + 2018^2 = 4074341$.

Задача 3.3.8. В таблиці 9×9 розставлені різні натуральні числа, сума яких дорівнює $2S$. Відомо, що в кожному рядку числа зростають зліва направо, а в кожному стовпці – знизу вверх. Чи може сума чисел в центральному квадраті 5×5 бути більшою S [16]?

Розв’язання

Може. Наприклад:

81	82	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089
71	72	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
61	62	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
51	52	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
41	42	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
31	32	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
21	22	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$2S = 101646, S = 50823$$

Сума чисел в центральному квадраті 5×5 дорівнює 51125.

Задача 3.3.9. В ряд стоїть n будинків k різних кольорів, причому до будь-якого кольору знайдеться 100 будинків, що знаходяться поряд, серед яких будинків цього кольору строго більше, аніж будинків будь-якого іншого кольору. При якому найбільшому k це можливо, якщо

а) $n = 404$;

б) $n = 406$?

Розв’язання

Пункт а). Кольорів не можу бути більше 202, інакше є колір, в який пофарбований тільки один будинок, тоді будинків цього кольору ні на якому відрізку не може бути строго більше за будь-який інший. Покажемо, як побудувати приклад на 202 кольори. тобто щоб для кожного кольору було пофарбовано два будинки, причому існував відрізок, в який ця пара однокольорових будинків попадає, а будь-яка інша – ні.

Назвемо 198-блоком наступну конструкцію: підряд стоїть 198 будинків, пари будинків на відстані 99 (тобто такі, між якими рівно 98 інших будинків) пофарбуємо в один колір, і більше в колір цієї пари не будемо фарбувати інші будинки (не тільки в цьому блоці); 2-блоком назвемо два будинки, які стоять поруч, що пофарбовані в унікальний колір. Тоді 404 будинки можна розфарбувати так: 2-блок, 198-блок, 2-блок, 2-блок, 198-блок, 2-блок.

Залишилось показати, що цей приклад правильний. Справді, в будь-якого 2-блоку є з’єднаний 198-блок, а отже, можна взяти 100 будинків підряд, в яких 2-блок є крайнім, а всі ніші кольори зустрічаються по одному разу. для кольорів 198-блоку можна взяти 100 будинків, що містять два будинка кольору i. Тоді будинків цього кольору два, а всі інші кольори будуть зустрічатися на цьому відрізку по одному разу.

Пункт б). Цей же приклад дозволяє реалізувати 202 кольори на 406 будинка: в кінець добавимо ще два будинки, колір яких співпадає з 2-блоком.

Оцінка. Зрозуміло, що в кожний колір повинно бути пофарбовано хоча б два будинки, отже, відповідь для $n = 406$ не більше 203. Якщо для $n = 406$ відповідь 203 то в кожний колір пофарбовано рівно два будинки. Пронумеруємо кольори в порядку їх появи зліва направо, і нехай будинки i-го кольору мають номери a_i і b_i причому $a_i < b_i$. За визначенням $1 = a_1 < a_2 <$

$a_3 \dots < a_{203}$. Доведемо, що $b_1 < b_2 < b_3 \dots < b_{203} = 406$. Припустимо протилежне, тобто нехай для якихось $i < j$ виявилося $b_j < b_i$. Врахувавши, що $a_j < b_j$ і $a_i < a_j$, отримаємо, що $a_i < a_j < b_j < b_i$, тобто будь-який відрізок, що містить a_i, b_i, також містить a_j, b_j, тобто немає відрізка, на якому будинків i-го кольору найбільше. Протиріччя.

Задача 3.3.10. Дійсні числа a, b, c, d такі, що $a + b = \frac{9}{c-d}$ і $c + d = \frac{25}{a-b}$. Яке найменше значення може набувати величина $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Розв’язання

Якщо дані рівності помножити на знаменники відповідних дробів і додати, ми отримаємо $2(ac - bd) = 34$. Доведемо, що $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ac - bd)$. Це випливає з $a^2 + c^2 \geq 2ac$ (еквівалентно $(a - c)^2 \geq 0$) і $b^2 + d^2 \geq -2bd$ (еквівалентно $(b + d)^2 \geq 0$). Отже $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 34$.

Рівність досягається, якщо всі вказані вище нерівності перетворюються в рівності, тобто при $a = c$ і $b = -d$. Підставивши ці співвідношення в рівності, дані в умові, неважко знайти відповідні значення, наприклад $a = 4, b = -1, c = 4, d = 1$.

Задача 3.3.11. Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB і BC знайшлись точки N і M відповідно такі, що $\angle BAC = \angle NOA$ і $\angle BCA = \angle MOC$. Точка K – центр описаного колі трикутника Доведіть, що $AK = CK$ [11].

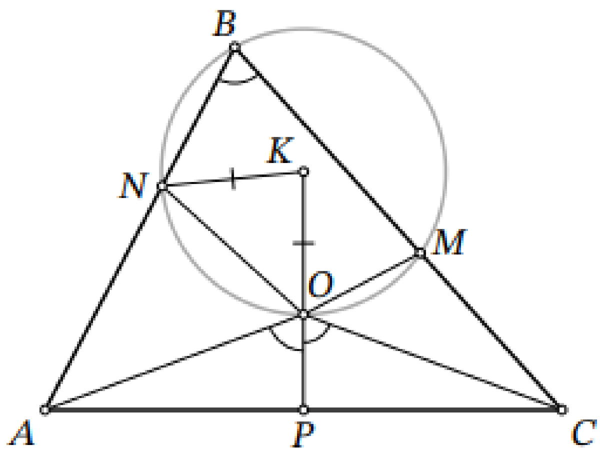

Рис. 3.3. Трикутник ABC

Розв’язання

Позначимо $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$; маємо $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Так як O є центром описаного кола трикутника ABC, то $OA = OB = OC, \angle AOB = 2\gamma, \angle AOC = 2\beta, \angle OBA = \angle OAB = 90° - \gamma, \angle OAC = \angle OCA = 90° - \beta$.

Із умови випливає, що $\angle MON = 360° - \alpha - \gamma - 2\beta = 180° - \beta$. Тоді чотирикутник $ONBM$ є вписаним, оскільки $\angle MBN + \angle MON = 180°$. Отже, точка є центром його писаного кола (рис. 3.3).

Отримаємо, що $\angle OKN = 2\angle OBN = 2(90° - \gamma) = 180° - 2\gamma$. Тоді

$$\angle KON = \angle KNO = \gamma.$$

Нехай пряма KO перетинає пряму AC в точці P. Тоді

$$\angle AOP = 180° - \angle AON - \angle KON = 180° - \alpha - \gamma = \beta.$$

Отже, пряма OP в рівнобедреному трикутнику AOC є бісектрисою кута AOC, тому вона також є і серединним перпендикуляром до відрізка AC. Точка K лежить на цій прямій, тому $AK = CK$.

Задача 3.3.12. У місті є 13 станцій метро, через них проходять три кільцеві лінії. Кожна кільцева лінія проходить через усі станції по одному разу. Рух по кожній лінії двосторонній. Будь-які дві станції безпосередньо сполучені щонайбільше однією ділянкою підземної колії. на всіх станціях дозволено робити пересадки [19].

а) Доведіть, що таке метро існує.

б) Доведіть, що з будь-якої станції можна доїхати до будь-якої іншої, побувавши щонайбільше на одній проміжній станції.

Розв’язання

а) Розглянемо приклад такого метро. Перша лінія: $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow\leftrightarrow 13 \leftrightarrow 1$; друга: $1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 13 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 12 \leftrightarrow 1$; третя: $1 \leftrightarrow\leftrightarrow 4 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 11 \leftrightarrow 1$.

б) Через кожну станцію проходять 3 лінії, а це означає, що можна потрапити на 6 різних станцій. Якщо станції A і B не з’єднані безпосередньо, то серед інших 11 станцій є така, що з’єднана з двома цими станціями, бо з A можна потрапити до 6 станцій, так же само і з B.

Задача 3.3.13. У трикутнику $ABC, \angle A = 2\angle B, M$ – середина сторони AB. Доведіть, що $\frac{4 \cdot CM^2}{AC^2} = 5 - 4cos^2 \angle A$.

Розв’язання

Нехай $CM = m, AC = b, CB = a, \angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Тоді

$$4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \frac{4m^2}{b^2} = 2 + \frac{2a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}.$$

Так як $\alpha = 2\beta$, то $\frac{a}{b} = \frac{sin2\beta}{sin\beta}, \frac{c}{b} = \frac{sin3\beta}{sin\beta}$. Отже

$$\frac{4m^2}{b^2} = 2 + \frac{2sin^2 2\beta}{sin^2\beta} - \frac{sin^2 3\beta}{sin^2\beta} = 2 + 8cos^2\beta - \left(3 - 4sin^2\beta\right)^2 =$$
$$= 2 + 4(1 + cos\alpha) - (1 + 2cos\alpha)^2 = 5 - 4cos^2\alpha.$$

Задача 3.3.14. Дано додатні числа a і b, які задовольняють умову $ab > 2002a + 2003b$ Доведіть, що тоді виконується й нерівність

$$a + b > \left(\sqrt{2002} + \sqrt{2003}\right)^2.$$

Розв’язання

Так як $a > 0$ і $b > 0$ то з умови задачі випливає, що $a > 2002 \cdot \frac{a}{b} + 2003$ і $b > 2002 + 2003 \cdot \frac{b}{a}$. Отримаємо:

$$a + b > \left(2002 \cdot \frac{a}{b} + 2003\right) + \left(2002 + 2003 \cdot \frac{b}{a}\right) =$$
$$= 2002 + 2003 + \left(2002 \cdot \frac{a}{b} + 2003 \cdot \frac{b}{a}\right)$$
$$\geq 2002 + 2003 + +2\sqrt{2002 \cdot \frac{a}{b} \cdot 2003 \cdot \frac{b}{a}} = \left(\sqrt{2002} + \sqrt{2003}\right)^2.$$

3.3.3. Завдання для учнів 10 класу

Задача 3.3.15. Знайдіть найменше натуральне число, яке можна отримати при підстановці натуральних чисел замість змінних в наступний вираз

$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y.$$

Розв’язання

Зауважимо, що

$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y = (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + y.$$

Оскільки квадрат цілого числа завжди додатне число, він набуває мінімуму, коли дорівнює 0. Натуральне число y не менше 1. Якщо ж $y = 1$, то число $(2x - y)$ – непарне і його квадрат також не менший 1. Тому даний вираз не менший 2 для будь-яких натуральних x, y, z. Значення 2 може бути досягнуте декількома способами, наприклад $x = 1, y = 2, z = 3$ або $x = 1, y = 1, z = 3$.

Задача 3.3.16. Дано описаний чотирикутник $ABCD$, у кого радіуси вписаних кіл трикутників ABC і ADC рівні. Знайдіть кут між діагоналями AC і BD [11].

Розв’язання

Доведемо, що точки дотику вписаних кіл трикутників ABC і ADC з діагоналлю AC співпадають.

Позначимо точки дотику T_B і T_D відповідно. Тоді

$$|AT_B| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \qquad |AT_D| = \frac{|AD| + |AC| - |DC|}{2}.$$

З того, що чотирикутник $ABCD$ описаний випливає рівність $|AB| + |CD| == |BC| + |AD|$, а ця рівність рівносильна рівності $|AT_B| = |AT_D|$.

Тепер можна побачити, що малюнок однозначно задається радіусом вписаних кіл трикутників ABC і ADC та відстанню від точки дотику до точок A і C. Отже, малюнок переходить в себе при симетрії відносно прямої AC, при цьому точки B і D міняються місцями. Але це означає, що пряма BD також переходить в себе, тобто вона перпендикулярна осі симетрії AC.

Задача 3.3.17. Для дійсних чисел $x > 2$ і $y > 2$ доведіть, що

$$\frac{x^2 - x}{y^2 + y} + \frac{y^2 - y}{x^2 + x} > \frac{2}{3}.$$

Розв’язання

Помноживши дві частини на добуток знаменників, отримаємо

$$3(x^4 - x^2 + y^4 - y^2) > 2(x^2 + x)(y^2 + y).$$

Розкривши дужки в правій частині і перенісши від’ємні доданки в праву частину, отримаємо

$$3x^4 + 3y^4 > 2x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2xy + 3x^2 + 3y^2.$$

Ця нерівність отримується в результаті додавання трьох наступних нерівностей, що справедливі для будь-яких $x > 2$ і $y > 2$:

- $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$. Ця нерівність рівносильна тому, що $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$.
- $x^4 + y^4 = x^2 \cdot x^2 + y^2 \cdot y^2 > 4x^2 + 4y^2 \geq 3x^2 + 3y^2 + 2xy$.

Остання нерівність рівносильна тому, що $(x - y)^2 \geq 0$.

- $x^4 + y^4 = x \cdot x^3 + y \cdot y^3 > 2x^3 + 2y^3 \geq 2x^2y + 2xy^2$.

Остання нерівність рівносильна тому, що $2(x + y)(x - y)^2 \geq 0$.

Задача 3.3.18. Функція $f(x)$ визначена при всіх дійсних x є парною. Крім цього, при будь-якому дійсному x виконується рівність

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Наведіть приклад такої функції, відмінної від константи.

б) Доведіть, що будь-яка така функція є періодичною.

Розв’язання

а) Наприклад $f(x) = 2 + cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Парність очевидна, перевіримо другу умову:

$$f(x) + f(10 - x) = 4 + cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + cos\left(\frac{\pi(10 - x)}{10}\right) =$$
$$= 4 + cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

тобто ▯▯▯ $cos\,(\pi - \alpha) = -\,cos\,cos\,(▯)$.

б) Із парності отримаємо $f(10 - x) = f(x - 10)$ тобто

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при будь-якому x. Підставивши сюди $x + 10$ і $x + 20$ замість x, отримаємо

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$
$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Віднявши від другого перше, отримаємо $f(x + 20) - f(x) = 0$ при будь-якому x, тобто функція періодична з періодом 20.

Задача 3.3.19. Ін натурального числа n можна отримати або число $n^2 + 2n$, або число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральних числа називаються сумісними, якщо з них можна отримати одне і те ж число за допомогою деякої кількості таких операцій. Знайдіть всі числа, сумісні з числом 2018 [13].

Розв’язання

Зробимо заміну $k = n + 1$ і будемо вважати, що ми перетворюємо число k, яке може набувати значення натуральних чисел k, крім одиниці. Заміна $n \to n^2 + +2n$ для k відповідає заміні $f_1: k = n + 1 \to n^2 + 2n + 1 = k^2$. Друга заміна відповідає $f_2: k \to k^3$. Зауважимо, що для будь-якого k справедливо $f_1(f_2(k)) == f_2(f_1(k))$. Таким чином, якщо ми застосуємо декілька раз операції f_1 і f_2 до числа k не важливий порядок, а важлива тільки кількість операцій.

Припустимо, числа k_1 і k_2 еквівалентні. Тоді застосуємо операції до одного і другого числа декілька раз, можна отримати одне і те ж число, тобто $k_1^{2^{l_1}3^{m_1}} = k_2^{2^{l_2}3^{m_2}}$. Таким чином, всі натуральні числа, еквівалентні заданому k, мають вид $k^{2^{q_1}3^{q_2}}$ для раціональних q_1, q_2. Відповідно, для $n = 2018$ всі сумісні з ним числа будуть мати вид $2019^{2^{q_1}3^{q_2}} - 1$. Число $2019 = 3 \cdot 673$ не є степенем натурального числа вищим першого. Таким чином, раціональні числа q_1 і q_2 повинні бути цілими, для будь-яких цілих q_1 і q_2 ми отримаємо сумісність з 2018.

Задача 3.3.20. У кожній із трьох країн живуть по n математиків. Відомо, що кожен із них листується не менше, ніж з $n + 1$ іноземним математиком. доведіть, що існують троє математиків, які попарно листуються між собою [16].

Розв’язання

Нехай M – математик, який листується з найбільшою кількістю (позначимо її k) математиків з однієї країни. Тоді цей математик M живе в країні A і листується з k математика з країни B. Оскільки кожен листується із щонайменше $n + 1$ математиком, то M листується ще й з якимось математиком N з третьої країни C. Якщо N листується з одним із k математиків країни B, з якими листується M то все доведено. Якщо ні, то N листується не більше, ніж $n - k$ з математиками країни B. Але тоді він листується щонайменше з $n + 1 - -(n - k) = k + 1$ математиками країни C, що суперечить вибору математика M.

Задача 3.3.21. Множину чисел $1, 2, 3, \dots, 2001, 2002$ розбито на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої – з парною. знайдіть різницю між сумою чисел першої групи і сумою чисел другої групи [20].

Розв'язання

Для даного розбиття числа k і $1000 + k, 0 \leq k \leq 999$ потрапляють до різних груп. Отже, якщо множину чисел $\{0; 1; 2; \dots; 1999\}$ розбити на дві групи, як в умові задачі, то сума всіх чисел однієї групи дорівнює сумі всі чисел другої. Далі, доповнюючи групи числами $2000, 2001$ і 2002, отримаємо, що шукана різниця буде дорівнювати -2001.

Задача 3.3.22. Знайдіть усі такі пари числових функцій f і g, визначених на множині всіх дійсних чисел, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність

$$f(x) + f(y) + g(x) - g(y) = x^3 + \sqrt[3]{y}.$$

Розв'язання

Для $x = y$ маємо, що $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + \sqrt[3]{x}\right)$. звідси одержуємо, що для всіх $x \in R$ і $y \in R$

$$g(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x} - x^3\right) = g(y) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{y} - y^3\right).$$

Залишається перевірити, що функції

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + \sqrt[3]{x}\right), g(x) = a + \frac{1}{2}\left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right)$$

($a \in R$ довільне) задовольняють умову задачі.

3.3.4. Завдання для учнів 11 класу

Задача 3.3.23. Кожне натуральне число покрасили в один із трьох кольорів: червоний, синій і зелений, причому всі 3 кольори зустрічаються. Чи може бути так, що саму будь-яких двох чисел різних кольорів є числом третього кольору?

Розв'язання

Припустимо, що таке можливо. Без обмеження загальності можна вважати. що число 1 пофарбовано в перший колір. Виберемо довільне число x другого кольору. Зауважмо, що тоді $x+1$ повинно бути третього кольору, $x+2$ – другого, $x+3$ – третього і так далі. Таким чином, всі числа, більші x, що пофарбовані в другий і третій колір. З іншої сторони, так як x пофарбоване в другий колір, а $x+1$ – в третій, число $2x+1$ повинно бути пофарбоване в перший колір, протиріччя.

Задача 3.3.24. Дано описаний чотирикутник $ABCD$, у якого радіуси вписаних кіл трикутників ABC і ADC рівні. Знайдіть кут між діагоналями AC і BD [16].

Розв’язання

Доведемо, що точки дотику вписаних кіт трикутників ABC і ADC з діагоналлю AC співпадають.

Насправді, позначимо точки дотику T_B і T_D відповідно. Тоді

$$|AT_B| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \qquad |AT_D| = \frac{|AD| + |AC| - |DC|}{2}.$$

З того, що чотирикутник $ABCD$ описаний випливає рівність $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, а ця рівність рівносильна рівності $|AT_B| = |AT_D|$.

Тепер можна побачити, що малюнок однозначно задається радіусом вписаних кіл трикутників ABC і ADC та відстанню від точки дотику до точок A і C. Отже, малюнок переходить в себе при симетрії відносно прямої AC, при цьому точки B і D міняються місцями. Але це означає, що пряма BD перпендикулярна AC, отже відповідь 90°.

Задача 3.3.25. Петрик хоче перевірити знання свого брата Колі – переможця олімпіади з математики. Для цього Петрик задумав три натуральних числа a, b, c і знайшов $x = \text{НСД}(a, b), y = \text{НСД}(b, c), z = \text{НСД}(c, a)$. Потім він написав на дошці три ряди по п’ять цифр в кожному:

$$6, \quad 8, \quad 12, \quad 18, \quad 24$$

$$14, \quad 20, \quad 28, \quad 44, \quad 56$$

$$5, \quad 15, \quad 18, \quad 27, \quad 42$$

Петрик повідомив Колі, що одне із чисел в першому ряду дорівнює x, одне із чисел в другому ряду y, одну із чисел в третьому ряду дорівнює z, і попросив вгадати числа x, y, z. Подумавши декілька хвилин, Коля впорався з задачею, правильно назвавши всі три числа. Назвіть їх і ви. доведіть, що існує єдина така трійка (x, y, z).

Розв'язання

Будемо використовувати наступне твердження:

Лема. Якщо два із чисел x, y, z діляться на деяке натуральне число m, то і третє ділиться на m.

Доведення. Нехай наприклад x і y діляться на m.

$$\{x \vdots m \Rightarrow a \vdots m, b \vdots m \; y \vdots m \Rightarrow b \vdots m, c \vdots m. \;\Rightarrow\; \{a \vdots m \; c \vdots m \;\Rightarrow z \vdots m.$$

Наслідок: якщо одне із чисел x, y, z не ділиться на m, то із двох чисел, що залишилися хоча б одне також не ділиться на m.

Розглянемо тепер дані в задачі числа:

$$\begin{array}{ccccc} 6, & 8, & 12, & 18, & 24 \\ 14, & 20, & 28, & 44, & 56 \\ 5, & 15, & 18, & 27, & 42 \end{array}$$

Зауважимо, що в перших двох прядках всі числа парні, тобто: $x \vdots 2, y \vdots 2 \;\Rightarrow z \vdots 2 \;\Rightarrow z = 18$ або $x = 42$. Далі, два числа і діляться на 3, тобто $z \vdots 3$. В другому рядку немає чисел, що діляться на три, тобто $x = 8$. Далі, $x \vdots 4 \;\Rightarrow y = 14$. Нарешті $y \vdots 7 \;\Rightarrow z = 18$.

Задача 3.3.26. Трійка цілих чисел (x, y, z), найбільший спільний дільник яких дорівнює 1, є розв'язком рівняння

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Доведіть, що є кубом цілого числа.

Розв'язання

Число z єдиним чином розкладається в добуток простих: $z = \pm p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$. Візьмемо будь-яке просте число p і доведемо, що ступінь його входження в z ділиться на 3.Зрозуміло, що із цього випливає, що z є кубом цілого числа.

Нехай $v_p(n)$ дорівнює k, якщо n ділиться на p^k і не ділиться на p^{k+1} (будемо вважати, що $v_p(0) = \infty$). Згрупуємо доданки:

$$x^3 + z(x^2 - y^2) = z^2(2x + y).$$

Зрозуміло, що якщо z ділиться на p, то і x ділиться на p, але тоді y не ділиться на p, так як найбільший дільник x, y, z дорівнює 1. Розглянемо остачу від ділення $v_p(z)$ на 3.

Припустимо, що остача дорівнює 1, тобто $v_p(z) = 3k + 1$. Тоді x^2 ділиться на p^{6k+2}, а степінь p, на яку ділиться x^3 , ділиться на 3. Таким чином, два доданки в лівій частині і права частина ділиться на попарно різні степені p, так як остачі цих степенів по модулю 3 різні (так як $x^2 - y^2$ і $2x + y$ не ділиться на p). Тоді рівність не може бути виконане. У випадку $v_p(z) \equiv 2 mod(3)$ аналогічно, рівність не може бути виконана. Отже, залишається тільки випадок, де $v_p(z)$ ділиться на 3.

Задача 3.3.27. В коло ? вписаний трикутник ABC такий, що $AB < BC$. Бісектриса зовнішнього кута B перетинає ? в точці M. Пряма, паралельна BM, перетинає сторони BC, AB і продовження сторони CA за точку A в точках P, Q і R відповідно Пряма MR вдруге перетинає ? в точці X. Доведіть, що точки B, P, Q, X лежать на одному колі [13].

Доведення

Доведемо, що точки B, P, Q, X лежать на одному колі ω. Дійсно, $\angle XRP = \angle BMX$ як такі, що лежать навхрест при паралельних прямих BM і RP, а $\angle BMX = \angle BCX$ як ті, що спираються на одну дугу в ω, звідки $\angle XRP = \angle XCP$.

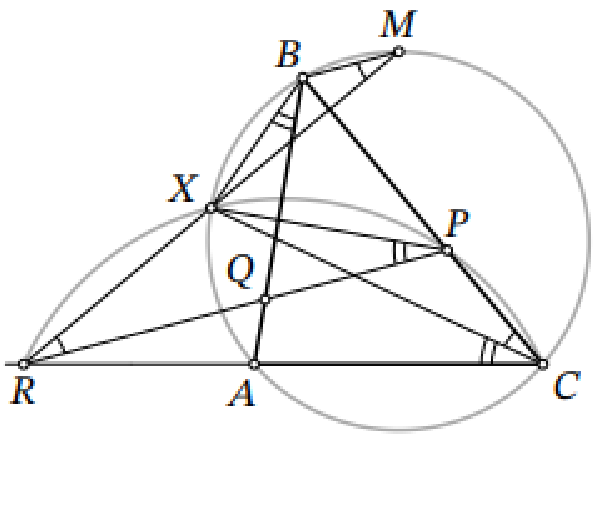

Рис. 3.4. Трикутник ABC

Тепер отримаємо $\angle XBQ = \angle XCA$ із кола ? і $\angle XCA = \angle XPR$ із кола ω. Отже, $\angle XBQ = \angle XPQ$ звідки і випливає, що точки B, P, Q, X лежать на одному колі.

Задача 3.3.28. Нехай a і b – довільні раціональні числа. Доведіть, що графік функції $f(x) = x^3 - 6abx - 2a^3 - 4b^3, x \in R$ має з віссю Ox рівно одну спільну точку [25].

Розв'язання

Оскільки $f'(x) = 3x^2 - 6ab$, то за умови $ab \leq 0$ функція f строго зростає на всій числовій прямій, набуває від'ємних і додатних значень, а тому твердження задачі справджується. Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то точками локального екстремуму будуть $x = \pm\sqrt{2ab}$, причому $f\left(\pm\sqrt{2ab}\right) = -\left(\sqrt{2a^3} \mp \sqrt{4b^3}\right)^2 \leq 0$. Рівність в останній нерівності не може досягатися через ірраціональність числа $\sqrt[3]{2}$. Тобто, в обох точках екстремуму кубічний многочлен набуває від'ємних значень, а тому, його графік має з віссю Ox єдину спільну точку. Аналогічно розглядається випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$.

Задача 3.3.29. Знайдіть усі такі функції f, які визначені на множині всіх дійсних чисел і набувають дійсних значень, що для всіх дійсних x і y справджується рівність $f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$.

Розв'язання

$f(x) = kx, x \in R$ – довільне. З вихідного рівняння маємо, що $f(y^3) \equiv y f(y^2), f(x^3) \equiv x^2 f(x)$. Тому для всіх $x \in R, y \in R$

$$f(x^3 + y^3) = f(x^2) + f(y^3).$$

Отже, функція є адитивною: для всіх $u \in R, v \in R, f(u + v) = f(u) + f(v)$. Оскільки, $f(0) = 0$ і $f(x^3) \equiv x^2 f(x) \equiv x f(x^2)$, то $f(x^2) \equiv x f(x)$.

Тому

$$f(x^2 + 2x + 1) \equiv (x + 1) f(x + 1) \equiv (x + 1)\big(f(x) + f(1)\big).$$

З іншого боку, $f(x^2+2x+1) \equiv xf(x)+2f(x)=f(1)$. З цих співвідношень отримаємо, що $f(x)=f(1)x, x \in R$. Залишається перевіркою переконатися, що всі функції вигляду $f(x)=kx, x \in R$,задовольняють умову.

Задача 3.3.30. Доведіть, що для будь-яких чисел x і y має місце нерівність

$$|cosx|+|cosy|+|cos\,(x+y)| \geq 1.$$

Розв'язання

$$|cosx|+|cosy|+|cos\,cos\,(x+y)\,| \geq |cosxsiny|+|cosysinx|+cos^2(x+y) \geq$$
$$\geq |sin\,sin\,(x+y)\,|+cos^2(x+y) \geq sin^2(x+y)+cos^2(x+y)=1.$$

ВИСНОВКИ

У даній роботі увага приділяється організації та проведенню математичних олімпіад, зокрема завданням які використовуються на таких олімпіадах.

Основні результати роботи:

- ✔ проведено дослідження навчальної літератури з теми дослідження;
- ✔ проаналізовано загальні відомості про математичні олімпіади;
- ✔ розглянуто положення про організацію та проведення міжнародних олімпіад з математики;
- ✔ розглянуто завдання міжнародних математики олімпіад;
- ✔ підібрано завдання для проведення математичної олімпіади на різних етапах.

Матеріали магістерської роботи можуть бути використані у роботі викладачів та студентів, я також учителями шкіл, при підготовці учнів до математичних олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України 2007-2008 та 2008-2009. Львів: Каменяр, 2010. 552 с.
2. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б.В. Всеукраїнські математичні бої 2009. Дніпропетровськ: Інновація, 2010 96 с.
3. Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Українські математичні олімпіади: Довідник. Київ : Вища школа, 1993. 415 с.
4. Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловський В. І., Ядренко М. Й. Київські математичні олімпіади. 1984-1993 рр. Київ : Либідь, 1993. 144 с.
5. Коваль Т. В., 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи. Тернопіль: Мандрівець, 2004. 80 с.
6. Конет І. М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. Кам’янець-Подільський : Абетка, 2005. 344 с.
7. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Львів: Євро світ, 1999. 128 с.
8. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Львів : Євросвіт, 1999. 128 с.
9. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 рр. Київ : Техніка, 2003. 541 с.
10. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України. 2001-2006 рр. Львів : Каменяр, 2008. 351 с.
11. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру. Київ : Вища школа, 1992. 91 с.
12. Лейфура В.М., Змагання юних математиків України. 2003 рік. Харків: Основа, 2004.

13. Лось В. М., Тихієнко В. П., Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. Київ : Кондор, 2005 312 с.

14. Математичні олімпіади в Києві. URL: http://surl.li/kipyg (дата звернення 22.08.2023).

15. Міжнародна математична олімпіада. URL: https://www.imo-official.org/?language=ru (дата звернення 22.08.2023).

16. Олімпіади – математичний олімпіадних рух України. URL: https://matholymp.org.ua/contests/types/olympiads/ (дата звернення 22.08.2023).

17. Сарана О. А., Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Київ : А.С.К., 2005. 344 с.

18. Українські математичні олімпіади / В. А. Вишенський. Київ : Вища школа, 1993. 415 с.

19. Українські математичні олімпіади URL: http://surl.li/kipxr (дата звернення 22.08.2023).

20. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики. Чернівці : Зелена Буковина, 2002. 340 с.

21. Ясінський В. А., Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2005. 208 с.

22. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Вінниця : ВДПУ, 1998. 266 с.

23. Ясінський В.А. Практикум з розв’язування задач математичних олімпіад. Харків : Основа, 2006. 128 с.

24. International Mathematical Olympiads 1978-1985 and Forty Supplementary Problems. Murray S. Klamkin