Міністерство освіти і науки України

Рівненський державний гуманітарний університет

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота магістерського рівня

на тему:

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку та їх місце у сучасній теорії

Виконала: студентка II курсу магістратури

групи М-М-21

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Яковчук Вікторія Анатоліївна

Керівник: доктор технічних наук, професор

Бичков Олексій Сергійович

Рецензент: доктор технічних наук, професор, директор ННІ автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного господарства та природокористування

Мартинюк Петро Миколайович

Рівне 2024 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівняння з частинними похідними (РЧП) першого порядку мають важливу роль у конструювані складних процесів, які відбуваються в природі та техніці. Рівняння описують явища, що змінюються в часі та просторі, таке як поширення хвиль, перенесення тепла та маси, рух рідини та газів. Завдяки своїй універсальності та здатності описувати різноманітні фізичні, економічні та екологічні процеси, також РЧП широко використовується в багатьох наукових і технічних дисциплінах.

Актуальність дослідження рівнянь з частинними похідними першого порядку обумовлена постійним розвитком числових методів та комп'ютерних технологій, які дозволяють ефективно розв'язувати складні задачі, що раніше були недоступні для аналітичних методів. Це відкриває нові можливості для аналізу і прогнозування різноманітних процесів, що мають велике значення для науки і техніки.

Дослідження та розвиток методів розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку є актуальними через безперервну потребу у точних і ефективних засобах моделювання складних систем. Розробка нових алгоритмів і числових методів, разом із тим впровадження у їх практичні застосування, сприяє прогресу для різних наукових та інженерних галузях.

Метою даної магістерської роботи є дослідження методів розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та їх застосування у різних галузях науки і техніки. Для досягнення цієї мети передбачено вирішення таких завдань:

1. Огляд історії розвитку рівнянь з частинами похідними першим порядком.

2. Вивчення основних понять та класифікації РЧП першого порядку.

3. Дослідження загальних методів розв'язку рівнянь.

4. Аналіз чисельних методів розв'язку рівнянь з частинними похідними першим способом.

5. Розгляд прикладних задач , що описуються рівняннями з частинами похідними.

6. Оцінка практичного застосування рівнянь з частинними похідними в моделюванні фізичних процесів, інженерії.

Об'єктом дослідження є рівняння з частинними похідними першого порядку.

Предметом дослідження є методи їх розв'язання та застосування в різних наукових і технічних галузях.

Методи дослідження: для досягнення поставлених завдань у роботі використовуватимуться такі методи:

- аналітичні методи, включаючи метод характеристик та метод відокремлення змінних;
- числові методи, зокрема використовуються методи скінченних різниць та скінченних елементів;
- моделювання задач, що описують РЧП у фізиці та інженерії, з метою їх практичного застосування.

Структура роботи: Робота складається з трьох розділів. Перший розділ присвячений теоретичним основам рівнянь з частинами похідними першого порядку, включаючи їх історію розвитку, основні поняття та класифікацію. В іншому розділі розглядаються методи розв'язки РЧП, зокрема загальні та чисельні методи, а також аналізуються прикладні задачі . Третій розділ зосереджується на практичному застосуванні рівнянь з частинами похідними в моделюванні фізичних процесів, а також у галузі інженерії.

Ця робота спрямована на систематичне дослідження рівнянь з частинними похідними першим способом та їх широкого застосування для розв'язку прикладних задач у різних наукових галузях.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИНИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Історія розвитку теорії РЧП

Історія диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (ДРЧП) пов'язана з розвитком математичного аналізу, фізики та механіки. Багато видатних математиків та фізиків зробили великі внески в дослідження цих рівнянь, адже вони відіграють важливу роль у моделюванні природних процесів.

Поява теоретичних відомостей про диференціальні рівняння охоплює другу половину XVII ст., коли математики усвідомили про взаємно обернений характер двох операцій аналізу нескінченно малих, а саме диференціювання та інтегрування [7].

«Обернені задачі на дотичні» (мають на увазі задачі для знаходження кривих за властивостями їх дотичних) які були актуальні на той період, були першими, які включались при розв’язанні диференціальних рівнянь [7].

Розглянемо приклад такої задачі.

Дано декартову прямокутну систему координат xOy на площині. Знайдемо криву, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в кожній його точці пропорційний коефіцієнту k ординати точки дотику.

Будемо шукати дану криву у вигляді графіка диференційовної функції $y = y(x),\ \ x \in B,$ врахувавши геометричний зміст похідної.

Тоді подамо умову задачі у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яка представляє собою одне з найпростіших, а також дуже важливих диференціальних рівнянь. Переконуємось, що співвідношення задовільняє кожна функція вигляду $y = ce^{kx}$ де c - довільне дійсне число. У 1639 р. цей факт виявив Рене Декарт (Рис.1).

Рис 1. Рене Декарт

Популярний у XVII ст. кінематичний спосіб побудови різних кривих , що базувався на понятті миттєвої швидкості, є одним із важливих джерел виникнення диференціальних рівнянь.

Розглянемо приклад запропонований Рене Декартом про кінематичну інтерпретацію кривих.

Припустимо, що точка M рухається в площині так, що швидкість абсциси цієї точки є величина стала , та рівна до певної одиниці, і в кожен момент часу t миттєва швидкість пропорційна кожному коефіцієнту k самій ординаті [7].

Розглянемо функції $x(t)$ та $y(t)$, що визначають залежність координат точки M від часу і відповідають системі рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = ky.$$

Перше співвідношеня формулює задачу про первісну функії $f(t) = 1$. Розв'язки втрачаються функцією $x = t + c_1$, де стала c_1 охоплює всю множину дійсних чисел).

Відомо, що друге рівняння задовольняє кожна функція $y = c_2 e^{kt}$, $c_2 \in R$. Після вилучення параметра t отримуємо залежність $y = c_2 e^{k(xc_1)}$, якщо ввести позначення $c = c_2 e^{kc_1}$, маємо $y = ce^{kx}$.

У другій половині XVII ст. формулюється уявлення про диференціальне та інтегральне та інтегральне числення, його творцями вважаються німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646-1716)(Рис.3) та англійський математк Іссак Ньютон (1643-1727)(Рис.2) .

Диференціальні рівняння, відкриті І. Ньютоном (1642—1727), вважав настільки значущим досягненням, тож закодував своє відкриття в анаграмі. Суть, у сучасному розумінні, можна передати як : «закони природи описуються диференціальними рівнями». [12]

Рис.2. Ісаак Ньютон

Рис.3. Готфрід Вільгельм Лейбніц

Дії диференціювання та інтегрування появились не з пустого місця, їх існування закладене ще з античних часів. Відомий вчений Стародавньої Греції Архімед (ІІ ст. до н.е.) використовував ділення на елементарні частин , та їх додавання при визначенні об’ємів кулі, кругового конуса та площі круга. Архімед застерігає, що даним методом не можна користуватись для довільної форми тіл [6].

В перші десятиліття XVII ст. наука та техніка почала швидко розвиватись , яка вимагала точних розрахунків. В цей період також створюються нові методи обчислення, над ними працювали такі вчені як Б. Паскаль, Й.Кеплер, І.Барроу,П.Ферма. Саме роботи даних вчених допомогли пришвидчити створення диференціального та інтегрального числення.

Нові методи обчислення у XVIII і XIX століттях знаходять широке застосування у наукових роботах вченних: О.Коші (1789— 1857), Г.Монжа (1746—1818), Ж.Лагранжа (1736—1813), Ж.Даламбера (1717—1783), Л.Ейлера (1707—1783), Д.Бернулі (1700—1782), У.Гамільтона (1805—1865), К.Вейерштраса (1815—1879), Д.Максвелла (1831—1879) і ін [22].

Новий розділ “Диференціальні рівняння” з’являється в кінці XIX ст. Розділ складається з двох частин: “Звичайні диференціальні рівняння” та “Диференціальні рівняння у частинних похідних ”. Цей розділ має прикладний характер , оскільки за допомогою рівнянь можна точніше описати багато явищ та процесів, що відбуваються у природі. Також у свої працях методи розвязування диференціальних рівнянь розробили такі вчені:

У XVIII і XIX століттях ці нові методи обчислення знайшли широке застосування у наукових роботах вчених: О.Коші (1789— 1857), Г.Монжа (1746—1818), Ж.Лагранжа (1736—1813), Ж.Даламбера (1717—1783), Л.Ейлера (1707—1783), Д.Бернулі (1700—1782), У.Гамільтона (1805—1865), К.Вейерштраса (1815—1879), Д.Максвелла (1831—1879) і ін. В кінці XIX ст. з’являється новий розділ: “Диференціальні рівняння”. Він складається з двох частин: “Звичайні диференціальні рівняння” та “Диференціальні рівняння у частинних похідних”. Цей розділ математики має прикладний характер тому, що за допомогою диференціальних рівнянь можна точніше записати будь-які явища чи процеси, що відбуваються у природі. Методи розв’язування диференціальних рівнянь у своїх працях розробляли : Б.Г.Гальоркін, А.Клеро, М.М.Крилов, Ж.Фурь’є М.В.Остроградський, Д.Гільберт, Д.О.Граве, та інші вчені [22].

1.2. Основні поняття та визначення рівнянь

У дослідженні різних фізичних явищ, технологічних процесів в багатьох галузях науки і техніки, також деяких процесів, що виникають в екології, економіці та соціальних науках, часто не вдається безпосередньо знайти закон, який зв’язує величини, що характеризують певний процес чи явище. У багатьох випадках достатньо легко виявити функціональні залежності між визначальними характеристиками процесу та швидкостями їх зміни, тобто маємо знайти рівняння, яке містять шукані функції та їх похідні або диференціали.

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку є важливою складовою математичного аналізу та має широке застосування у різних галузях науки та техніки. Ці рівняння описують процеси, які змінюються як у просторі, так і в часі, і містять частинні похідні функції по кількох незалежних змінних.

Рівняння з частинними похідними є окремим випадком диференціальних рівнянь, їх також часто називають ***рівняння з частинними похідними першого порядку***.

Рівняння, яке включає в собі незалежні змінні, невідомі функції та їх диференціали називають ***диференціальними рівняннями*** [11].

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Приклади диференціальних рівнянь:

1) $y' + y^{IV}x + (y''')^2 = 15x$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x + y = 0$;

3) $y^2dx + (1 + x^2)dy = 0$.

Порядком даного рівняння 1.1 називається порядок найвищої похідної, яка входить у диференціальне рівняння. [11].

Звичайним диференціальним рівнянням називається невідома функція рівняння, яка залежить від одного аргументу [4].

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називається функція, якщо вона залежить від двох або більше незалежнних змінних.

Функція, яка в підстановці у диференціальне рівняння перетворює його в тотожність називається ***розв'язком диференціального рівняння*** [6].

Загальним розв'язком називається сімейство розв'язків, до яких входять всі розв'язки диференціальних рівнянь [6].

Інтегруванням називається процес знаходження розв'язків диференціального рівняння [6].

Загальний розв'язок рівняння (1.1) записується так

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$,

а загальний інтеграл —

$$\Phi\left(x, y, C_{1,} C_2, \dots, C_n\right) = 0, \qquad (1.2)$$

де x– це незалежна змінна, а y – функція, C_1, C_2 ,...C_n – довільні сталі.

Загальний розв'язок стає частковим розв'язком при певних значеннях вільних сталих.

Диференціальним рівнянням I порядку з частинними похідними називається співвідношення, що зв'язує між собою незалежні змінні, шукану функцію та похідні першого порядку від шуканої функції.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1.3)$$

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку називається функція [22]:

$u: D \in R^n \to R$ називається розв'язком диференціальних рівнянь в області D, якщо

1) $u(x_1, \dots, x_n)$ неперервно-диференційовна в області D;

2) $(x_1, \dots, x_n, u) \in T$ для $\forall(x_1, \dots, x_n) \in D$;

3) $u(x_1, \dots,)$ задовільняється рівняння для $\forall$(x1 ,..., xn)$\in$ D [8] .

Наведемо приклад для лінійного однорідного ДРЧП першого порядку

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.4)$$

функція $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + 2$ є розв'язком в області $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, після підстановки її частинних похідних, маємо

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{2x_1}{x_2^2} - x_2 \frac{2x_1^2 x_2}{x_2^4} + x_2 \frac{2x_2}{x_3^2} - x_3 \frac{2x_2^2 x_3}{x_3^4} = 0;$$

тоді дана функція $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_2 x_3$ не буде розв'язком ДРЧП , тому що в даному випадку

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3(x_1 + x_3) \neq 0.$$

Розглянемо деякі приклади розв'язку задач диференціальних рівняннь частинних похідних першого порядку:

Приклад. Дано рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$$

Знайти загальний розв'язок рівняння.

Розв'язання.

Нехай $y = const$.Тоді маємо випадок, що функція u залежна від однієї змінної x , тому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$.

Зінтегруємо це рівняння по dx :

$$\int \frac{du}{dx} dx = \int (2x + y) dx ,$$

$$u = x^2 + yx + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$– довільна функція.

Врахуємо, що x і y– незалежні змінні, тоді запишемо загальний розв'язок рівняння:

$u(x, y) = x^2 + yx + \varphi(y)$.

Переконаємось чи дане рівняння розв'язано вірно, візьмемо частинну похідну по x від отриманої функції і підставити її в рівняння. Можемо побачити, що отримається тотожність:

$2x + y = 2x + y$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Підберемо спочатку частинний розв'язок рівняння.

Розв'язання.

Можемо побачити, що частинний розв'язок рівняння є функція: $u(x, y)$.

Справді: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -1.$. Вибрана функція задовольняє рівняння.

Запишемо загальний розв'язок рівняння так: $u(x, y) = \varphi(x - y)$, де φ − диференційовна функція.

Перевірка. Знайдемо частинні похідні по x і також по y від загального розв'язку рівняння, будемо дивитись на нього, як на складну функцію:

$u(x, y) = \varphi(z)$.

Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\varphi' .$$

Якщо підставити знайдені значення в рівняння, воно перетвориться на тотожність, отже, загальний розв'язок рівняння знайдемо вірно.

1.3. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку (ДРЧП) використовуються у різних галузях науки і техніки, зокрема, в фізиці, хімії, біології, економіці тощо. Ці рівняння показують процеси, в яких відбуваються зміни функцій часу, так і просторових координат. Класифікація ДРЧП першого порядку допомагає зрозуміти природу процесів і вибрати відповідні методи розв'язання.

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку мають різні види, в залежності від властивостей та структури , що вони описують.

Основні типи класифікації таких рівнянь:

1. Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням частинних похідних першого порядку

називається рівняння виду

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}=B(x)u+f(x), \qquad (1.5)$$

де $a_i(x) \quad (i=1,\dots,n),\ \ B(x)$ і $f(x)$ – задані функції точки

$x=(x_1,\dots,x_n)\ \in\ D$, причому $\sum_{i=1}^{n} A_i^2(x)\neq 0$ для будь-якого $x\in D$

Лінійні однорідні та лінійні неоднорідні ДРЧП першого порядку:

Лінійні однорідні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Лінійним однорідним ДРЧП називається рівняння виду

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \qquad (1.6)$$

де $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – невідома функція незалежних змінних $x_1,x_2,\dots,x_n$, визначені у деякій області $D\in R^n$ n -вимірного простору [1].

Для того щоб, зінтегрувати лінійне однорідне рівняння (1.6) , складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає рівнянню (1.6) :

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n}, \qquad (1.7)$$

що називається ***системою рівнянь характеристик***, яка записана симетричній формі. У системі(1.7) $(n-1)$-рівняння.

З системи рівнянь (1.7) знаходимо (n −1) перші незалежні інтеграли, запишемо у такій формі

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \qquad (1.8)$$

Ці перші інтеграли рівняння називаються ***характеристиками диференціального рівняння*** [1.6], або ще називають ***фазовими лініями рівняння***, а також ***гіперповерхнями*** [8].

Загальний розв’язок рівняння (1.6) записується так

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \qquad (1.9)$$

де F – це довільна диференційовна функція $(n-1)$ аргументів $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ [6].

Систему рівнянь характеристик (1.6) запишемо у параметричній формі, де позначимо дані відношення в рівняннях(1.6) через dt , де t − параметр. Запишемо рівняння

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \frac{dx_2}{dt} = a_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = a_n, \qquad (1.10)$$

Доведемо правильність знайденого загального розв'язку, а потім обчислимо частинні похідні функції $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$по її аргументах:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}\right); \ldots;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\right);$$

Оскільки у рівняннях (1.8) $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$– це довільні сталі, тоді маємо, що їхні похідні дорівнюють нулю. Якщо підставимо отримані значення частинних похідних у рівняння, тоді перетворимо їх в тотожність [6].

Приклад . Знайти загальний розв’язок рівняння:

$$\mathrm{y}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{x}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = 0.$$

Розв’язання.

Запишемо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

Знаходимо перший інтеграл:

$\mathrm{x\,dx} = \mathrm{y\,dy}$, $x^2 - y^2 = C_1$.

Отримаємо загальний розв’язок рівняння який має вигляд:

$$\mathrm{u(x, y) = F(x^2 - y^2)}.$$

Задача Коші для рівняння(1.6) називається задачею про визначення розв’язку $\mathrm{u} = u(x)$ (де $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $u(x)\mathrm{I}_{x \in \gamma} = \varphi(x)$, - де γ- це визначена гладка гіперповерхня у D, а φ(x)- гладка функція на цій гіперповерхні [22]. ***Гіперповерхня γ*** називається початковою гіперповерхнею, а функція φ(x) — початковою умовою. ***Нехарактеристичною*** називається точка x на початковій гіперповерхні, якщо характеристика, що проходить через цю точку, трансверсальна (не дотична) до початкової гіперповерхні. Маємо, що розв'язком задачі Коші буде частинний розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних, який задовольняє початкову умову [22].

Приклад . Знайти розв'язок даного рівняння:

$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} - 2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = 0$, - який задовольняє умові: $\mathrm{u}(0, \mathrm{y}) = \mathrm{y}$.

Іншими словами: розв'язати задачу Коші.

Розв'язання.

Складемо рівняння характеристик: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2}$.

Знайдемо характеристики: $2x + y = C$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння:

$$u(x, y) = F(2x + y),$$

де F-довільна неперервно-диференційована функція, що формує множину площин у просторі. Відшукаємо функцію, яка буде проходити у площині: $x = 0$ через пряму $u = y$. Позбудемось x і y в рівняннях: $x = 0$, $u = y$, $2x + y = C$, і отримаємо: $u = C$. Підставимо в дане рівняння замість C — його значення. Отримаємо шуканий розв'язок:

$$u(x, y) = 2x + y.$$

Розв'язок визначає площину, яка проходить через початок координат, рис.4.

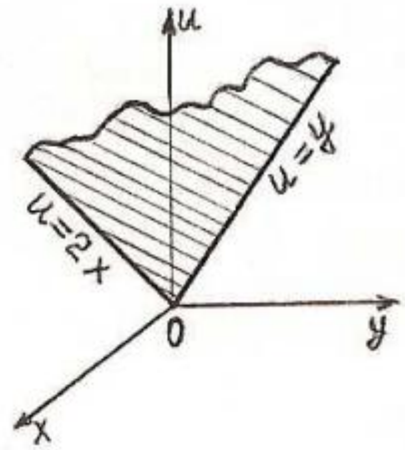

Рис.4

Лінійні неоднорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням в частинних похідних першого порядку називається рівняння виду

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b, \qquad (1.11)$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$невідома функція, $a_1, a_2, \dots, a_n, b-$ коефіцієнти рівняння, що залежать від даних аргументів $x_1, x_2, \dots, x_n$, або постійні дійсні числа, які задані в окремій області $D \subset R^n$, n -вимірного простору [22].

Щоб розв'язати рівняння (1.11) запишемо систему рівнянь характеристик (у симетричній формі):

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}. \qquad (1.12)$$

Із системи (1.12) знаходимо n перших незалежних інтегралів, що записуються у формі

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_2, \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_n, \end{cases}$$

Загальний розв'язок подається у вигляді

$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0,$ (1.13)

де F − це довільна неперервна і диференційовна функція,та залежить від $x_1, x_{2,} \dots, x_n, u$. У випадку, коли невідома функція знаходиться в останньому інтегралі, то розв'язок запиується в явному вигляді

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Рівняння характеристик можна представити і в параметричній формі [6]:

$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \frac{dx_2}{dt} = a_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = a_n, \frac{du}{dt} = b.$ (1.14)

Приклад . Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Розв'язання.

Складемо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}$$

Знайдемо два перші інтеграли:

1) $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}, \quad x\,dx = y\,dy, \quad x^2 - y^2 = C_1.$

2) $\frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}, \quad du = \frac{dy}{y}, \ u - \ln y = C_2.$

У такому разі загальний розв’язок диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$F(x^2 - y^2; u - \ln y) = 0$$

Запишемо розв’язок явного виду :

$$u - \ln y = f(x^2 - y^2)$$

або

$$u(x, y) = \ln y + f(x^2 - y^2)$$

де $f(x^2 - y^2)$ – це неперервна, диференційовна функція.

Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними , а також для однорідного , полягає у пошуку розв’язку $u = u(x), x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, рівняння, який відповідає умові:

$u(x)\mathrm{I}_{x\in\gamma} = \varphi(x)$,

де γ– визначена гладка гіперповерхня в області D , ϕ(x)– гладка функція на даній поверхні. ***Початковою гіперповерхнею*** називається гіперповерхня γ, а функція ϕ(x) — початковою умовою. ***Нехарактеристичною точкою*** називається точка x на початковій гіперповерхні γ , якщо характеристика, що проходить через дану точку, трансверсальна до її початкової гіперповерхні [22].

Задача Коші для рівняння (1.11) забезпечує розв’язок у достатньо малому околі будь-якої нехарактеристичної точки x_0 початкової поверхні γ і при тому має єдиний розв’язок. Даний розв’язок визначається формулою:

$$u\big(g(x,t)\big) = \varphi(x) + \int_0^t b\big(g(x,\tau)\big)d\tau$$

де g(t_x)– значення розв’язку рівняння характеристик (з початковою умовою g(x_0) = 0 на початковій поверхні) у момент часу t [22].

Приклад. Знайти розв’язок задачі Коші:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$$

при початковій умові: $u(0; y) = \frac{1}{y^2}$.

Розв’язання.

І спосіб. Запишемо рівняння характеристик у параметричній формі:

$\frac{dx}{dt} = y;\ \ \frac{dy}{dt} = -x$

Знайдемо розв’язки даних рівнянь у параметричній формі:

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

$$y = C_1 \cos t - C_2 \sin t,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Правильність отриманих розв’язків можна перевірити за допомогою диференціювання їх по параметру t :

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \cos t - C_2 \sin t = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -C_1 \sin t - C_2 \cos t = -x.$$

У початкових умовах параметр t = 0 , — а незалежні змінні: x(0) = 0 , y(0) = y . Із розв’язків знаходимо при t = 0 : $C_2 = 0$, $C_1 = y$. Крім того $\varphi(x) = u(0; y) = \frac{1}{y^2}$.

Введемо позначення:

$$x = g_1(t, x, y),$$

$$y = g_2(t, x, y).$$

Знаходимо:

$$x = g_1(t, x, y) = y \cdot \sin t\,;$$

$$y = g_2(t, x, y) = y \cdot \cos t.$$

Згідно формули розв'язку задачі Коші: $u(y \cdot sin\, t\,; y \cdot cos\, t) = \frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2(\cos^2\tau - \sin^2\tau)d\tau = \frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2 \cos 2\tau\, d\tau = \frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{2}\sin 2t\,.$

Замінимо змінні: $y \cdot sin\, t$ на x, $y \cdot cos\, t$ на y,

$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t$

$y^2 = y^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = y^2\, sin^2\, t + y^2\, cos^2\, t$ замінимо на $x^2 + y^2$;

$y \sin t \cdot y \cos t$- на $x \cdot y$.

Розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x \cdot y$$

Який задовольняє одночасно і дане рівняння, а також початкову умову.

2. Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку має загальний вигляд

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \qquad (1.15)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$- це незалежні змінні, u - неявна функція від даних незалежних змінних, $p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1,2, \dots, n)$ - частинні похідні функції u по незалежних змінних [8].

Нелінійні рівняння виду (1.15) у коефіцієнтах можуть включати, окрім незалежних змінних, також добутки чи степені частинних похідних першого порядку. Можемо побачити, що з геометричної точки зору частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x_k}$

встановлюють напрями дотичних площин до інтегральної гіперповерхні у будь-якій її точці $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [6].

Таким чином сім'я площин, що проходить через будь-яку точку інтегральної гіперповерхні рівняння(1.15), визначає,що в кожній точці гіперплощини, дотичні до цієї поверхні. Безпосередньо інтегральна поверхня є обвідною всіх гіперплощин простору і називається ***конусом Т*** або ще ***конусом Монжа*** [22].

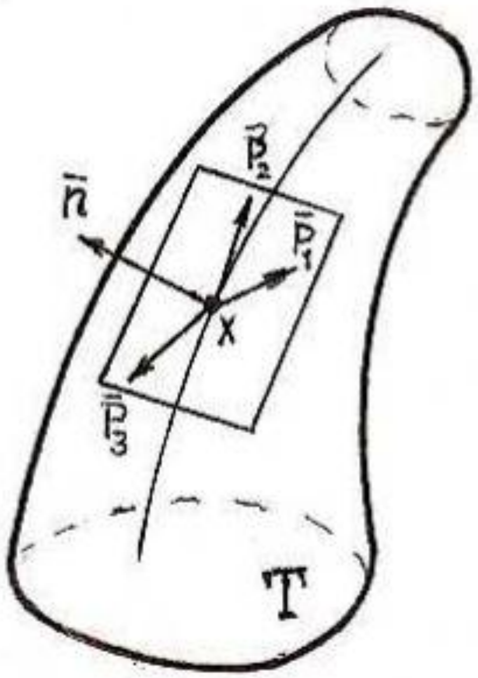

Рис.5

У нелінійному диференціальному рівнянні, гіперплощини дотикаються до конуса T , а в лінійному диференціальному рівнянні, гіперплощини дотикаються до гіперповерхні в n -вимірному просторі, . Через це розв'язки на гіперплощині будуть не у формі гіперліній, а у формі гіперполосок, розташованих вздовж конуса T , тоді рівняння характеристик має більш складний вигляд ніж у лінійних диференціальних рівнянь. Спершу знаходиться сім'я обвідних дотичних площин конуса T , а вже потім визначається твірна конуса T , її напрям дасть змогу записати рівняння характеристик для нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Запишемо систему рівнянь характеристик для диференціального рівняння :

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_1 p_1 + \cdots + P_n p_n} = -\frac{dp_1}{(X_1 + Up_1)} = -\frac{dp_n}{(X_n + Up_n)} = ds,$$
(1.16)

де $P_k = F_{p_k} = \frac{\partial F}{\partial p_k}$, $X_k = F_{x_k} = \frac{\partial F}{\partial u}$, s – числовий параметр [6].

Система має перший інтеграл такого виду

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = C. \qquad (1.17)$$

Характеристичними полосами називаються всі розв'язки системи, які одночасно задовольняють рівняння. Ці полоси утворюють $(2n-1)$-параметричну сім'ю.

Зінтегрувавши систему отримаємо:

Де $x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}$ — початкові значення функцій при s = 0 . Будемо вважати, що дані початкові значення функцій є функціями від (n −1)-параметрів

$$\begin{cases} x_k = x_k\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}\right), \\ u = u\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}\right), \\ p_k = p_k\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{0}\right). \end{cases}$$

де $x_k^0, u^{(0)}, p_k^0$— початкові значення функцій при $s = 0$. Початкові значення функцій є функціями від $(s-1)$-параметрів

$$x_k^0(t_1, \dots, t_{n-1}), u^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), p_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}).$$

Підставляючи їх у рівняння, одержимо:

$$\begin{cases} x_k = x_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}), \\ u = u(s, t_1, \dots, t_{n-1}), \\ p_k = p_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}). \end{cases} \qquad (\text{ де } k = 1,2, \dots, n)$$

Якщо функціональний детермінант

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(s, x_1, \dots, x_{n-1})},$$

який, в силу перших рівнянь системи можна представити у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & \dots & P_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \qquad (1.17)$$

не обертається на нуль у початковому многовиді (тобто при $s = 0$) і в такому разі, завдяки неперервності похідних, не перетворюється в нуль у деякому околі цього многовиду, отримаємо, що величини $s, t_1, \dots, t_{n-1}$, в цьому околі можуть бути представленф через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Підставивши ці вирази у $u = u(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, отримаємо деяку поверхню $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка має початковий многовид. Дана поверхня буде інтегральною поверхнею рівняння , при умові, якщо функції задовольняють n співвідношенням

$$\begin{cases} F\left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}\right) = 0, \\ \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j} = \sum_{v=1}^{n} p_v^{(0)}. \ \frac{\partial x_v^{(0)}}{\partial t_j} \quad (j = 1,2, \dots, n-1), \end{cases}$$

тотожно по t_j

Задача Коші полягає у визначенні інтегральної поверхні рівняння , яка охоплює в собі даний $(n-1)$-вимірний многовид

$$x_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), u^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}). \qquad (1.18)$$

Многовид доповнюється до многовиду знайденим $p_k^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1})$ з рівнянь . У цьому випадку визначник, який відмінний від нуля впродовж такого многовиду, тоді маємо, що розглянутий метод спричиняє до розв'язоку Коші, ідо того ж даний розв'язок єдиний.

Приклад . Знайти розв'язок нелінійного рівняння (за допомогою задачі Коші):

$$F \equiv x_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - u = 0,$$

якщо початкова умова: $x_1^{(0)} = t_1, x_1^{(0)} = 1, u^{(0)} = \frac{1}{2}t_1^2$

Розв'язання.

Введему такі позначення:

$p_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$

Запишемо дане рівняння так:

$F \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 - p_1^2 - u = 0\,.$

Для $p_1^{(0)}$ і $p_2^{(0)}$: $p_1^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} = t_1$ знайдено початкові значення, для цього підставимо значення початкових умов у дане рівняння:

$t_1 \cdot t_1 + 1 \cdot p_2^{(0)} - t_1^2 - \frac{1}{2}t^2 = 0,\ p_2^{(0)} = \frac{1}{2}t_1^2.$

Отриманими значеннями $p_1^{(0)}$ і $p_2^{(0)}$ додамо початкові умови задачі Коші.

Сформулюємо рівняння характеристик для даного нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{du}{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2} = \frac{-dp_1}{X_1 + U \cdot p_1} = \frac{-dp_2}{X_2 + U \cdot p_2} = ds,$$

де $P_1 = \frac{\partial F}{\partial p_1} = x_1 - 2p_1$; $P_2 = \frac{\partial F}{\partial p_1} = x_2$; $X_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = P_1$; $X_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = P_2$; $U = \frac{\partial F}{\partial u} = -1$.

Знайдемо вирази:

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = (x_1 - 2p_1) \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = x_1 p_1 - 2p_1^2 + x_2 \cdot p_2 = u - p_1^2,$$

$$X_1 + U \cdot p_1 = p_1 - p_1 = 0;\ X_2 + U \cdot p_2 = p_2 - p_2 = 0.$$

Рівняння характеристик мають вигляд:

$$\frac{dx_1}{x_1 - 2p_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{u - p_1^2} = \frac{-dp_1}{0} = \frac{-dp_2}{0} = ds.$$

Знайдемо перші інтеграли з даних рівнянь характеристик

1) $\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1 - 2p_1^{(0)}} = \int_0^s ds$;

$\ln\left(x_1 - 2p_1^{(0)}\right) - \ln\left(x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}\right) = S$;

$\ln \frac{x_1 - 2p_1^{(0)}}{x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}} = S$;

$x_1 = 2p_1^{(0)} + \left(x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}\right) e^s$.

2) $\int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_0^s ds$;

$\ln \frac{x_2}{x_2^{(0)}} = S$;

$x_2 = x_2^{(0)} \cdot e^s$.

3) $\int_{u^{(0)}}^{u} \frac{du}{u - p_1^{(0)2}} = \int_0^s ds$;

$\ln \frac{u - p_1^{(0)2}}{u^{(0)} - p_1^{(0)2}} = S$;

$u = p_1^{(0)2} + \left(u^{(0)} - p_1^{(0)2}\right) e^s$.

4) $\frac{dp_1}{0} = ds;$

$\int_{P_1^{(0)}}^{P_1} dp_1 = 0;$

$P_1 = P_1^{(0)};$

5) $\frac{dP_2}{0} = ds;$

$p_2 = p_2^{(0)}$

У отримані перші незалежні інтеграли використаємо значення початкових умов:

$x_1 = 2t_1 + (t_1 - 2t_1)e^s = 2t_1 - t_1 \cdot e^s;$

$x_2 = e^s;$

$u = t_1^2 + \left(\frac{1}{2}t_1^2 - t_1^2\right)e^s = t_1^2 - \frac{1}{2}t_1^2 e^s;$

$p_1 = t_1;$

$p_2 = \frac{1}{2}t_1^2.$

Встановимо параметри S і t перших двох рівнянь та введемо їх значення у третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_1 \cdot e^S \\ x_2 = e^S \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_1 \cdot x_2 = t_1(2 - x_2); \\ t_1 = \dfrac{x_1}{2 - x_2}; \quad S = \ln x_2. \end{cases}$$

$$u = \frac{x_1^2}{(2 - x_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{x_1^2 \cdot x_2}{(2 - x_2)^2} = \frac{2x_1^2 - x_1^2 x_2}{2(2 - x_2)^2} = \frac{x_1^2}{2(2 - x_2)}$$

Маємо, розв’язок задачі Коші який має вигляд:

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2(2 - x_2)}.$$

Системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Загальний вигляд системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку має вигляд:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \qquad (1.19)$$

де невідома функція $u = u(x, y)$ — залежить від двох аргументів та обмежуються [6] .

Систему даних рівнянь можна розв'язати відносно частинних похідних:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u). \end{cases} \qquad (1.20)$$

Необхідною і достатньою умовою сумісності для системи є співвідношення:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A. \qquad (1.20)$$

Система має безліч розв'язків, якщо умова виконується, тобто має загальний розв'язок, який залежний від довільної сталої.

Умова визначає одну неявну функцію від аргументів x і y, якщо вона не перетворюється в тотожність .

Якщо система рівнянь має розв'язок, тоді він повинен збігатися з функцією, яка визначається рівнянням.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{4xu}{x^2+y^2} + yu, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{4yu}{x^2+y^2} + xu. \end{cases}$$

Розв’язання.

Перевіримо дотримання умови про сумісність системи рівнянь

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = -\frac{8xyu}{(x^2+y^2)^2} + u + \left(\frac{4x}{x^2+y^2} + y\right)\left(\frac{4y}{x^2+y^2} + x\right),$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A = -\frac{8xyu}{(x^2+y^2)^2} + u + \left(\frac{4x}{x^2+y^2} + y\right)\left(\frac{4y}{x^2+y^2} + x\right).$$

Умова сумісності виконується тотожно. Тому, система має розв’язки. Зінтегруємо перше рівняння системи по dx при умові, що $y = const$.

$\frac{du}{u} = \left(\frac{4x}{x^2+y^2} + y\right) dx,$

$\ln u = 2\ln(x^2+y^2) + xy + \ln\varphi(y),$

$\ln \frac{u}{(x^2+y^2)^2\varphi(y)} = xy,$

$u = (x^2+y^2)^2\varphi(y) \cdot e^{xy}.$

Від одержаної функції знайдемо частинну похідну по змінній y та підставимо значення у друге рівняння системи.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\varphi(y) \cdot e^{xy} \cdot 2y + (x^2+y^2)^2\varphi'(y)e^{xy} + (x^2+y^2)^2\varphi(y) \cdot x \cdot e^{xy}$$

$$= \frac{4yu}{x^2+y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}u + xu.$$

Отримаємо:

$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = 0.$

З цього випливає, що $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$, де C — довільна стала. Підставимо значення функції $\varphi(y)$ у вираз для u , та запишемо отриманий розв'язок системи рівнянь:

$u(x, y) = C(x^2 + y^2)^2 e^{xy}.$

Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \ln x. \end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо дотримання умови сумісності системи рівнянь:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = \frac{1}{x}; \ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A = \frac{1}{x}.$$

Система сумісна.

Зінтегруємо перше рівняння по dx при умові, що $y = const$: $u = \int \frac{y}{x} dx = y \ln x + \varphi(y), \quad u(x, y) = y \ln x + \varphi(y).$

Знайдемо похідну від функції $u(x, y)$ по змінній y та підставимо її у друге рівняння, маємо

$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x + \varphi'(y);$

$\ln x + \varphi'(x) = \ln x;$

$\varphi'(x) = 0;$

$\varphi(x) = C.$

Загальний розв'язок рівнянь:

$u(x, y) = y \ln x + C.$

Приклад . Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = yu + u^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xu. \end{cases}$$

Розв'язання.

Перевіримо виконання умов сумісності рівнянь:

$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = u + (y + 2u) \cdot xu = u + xyu + 2xu^2;$

$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A = u + x(yu + u^2) = u + xyu + xu^2.$

Підставимо в умову сумісності:

$u + xyu + 2xu^2 = u + xyu + xu^2$; $xu^2 = 0$. $x = 0$ - не задовольняє рівняння.Тоді $u^2 = 0$; $u(x, y) = 0$ задовольняє.

Отже, розв'язок: $u(x, y) = 0$. Єдиний розв'язок.

3. Рівняння в повних диференціалах (інтегровані рівняння):

Рівнянням у повних диференціалах називаються рівняння виду:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;$ (1.21)

або

$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$ (1.22)

при умові, якщо ліва частина його є повним диференціалом певної функції $u(x, y)$ або $u(x, y, z)$ [19].

Щоб отримати розв'язки рівняння потрібно знайти функцію $u = u(x, y)$,таку щоб повний диференціал від якої $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ дорівнює лівій частині рівняння [6] .

Загальний інтеграл для даного рівняння запишемо: $u(x, y) = C$, — де C— довільна стала.

Рівняння матиме розв'язок, якщо виконується умова інтегровності [6]:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для рівняння умова інтегровності матиме вигляд [6]:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \qquad (1.23)$$

Якщо умова інтегровності виконується, тоді розв'язок рівняння знаходиться різними способами безпосереднього інтегрування.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(2x + 3x^2y)dx + x(x^3 - 3y^2)dy = 0$$

Розв'язання:

Преревіряємо умову інтегровності

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$. Виконується.

I спосіб.

Знайдемо функцію $u(x, y)$ таку, що

$du = u_x dx + u_y dy$,

де $u_x = 2x + 3x^2y, u_y = x^3 - 3y^2$.

Зінтегруємо перше рівняння по dx при умові, що

$y = const: u(x, y) = \int(2x + 3x^2y)dx = x^2 + x^3y + \varphi(y)$.

Від отриманого виразу обчислимо похідну по змінній "y" та підставимо її у друге рівняння:

$u_y = x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2$.

Маємо

$\frac{d\varphi}{dy} = -3y^2, \varphi(y) = \int -3y^2 dy = -y^3 + C,$

де C - довільна стала. Отримали функцію:

$\mathrm{u(x,y) = x^2 + x^3y - y^3 + C}.$

Загальний розв'язок рівняння:

$$x^2 + x^3y - y^3 + C$$

<u>II спосіб.</u>

Функцію $\mathrm{u(x,y)}$, знайдемо за формулою

$\mathrm{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy}.$

Маємо

$\mathrm{u(x,y) = \int_{x_0}^{x}(2x + 3x^2y)dx + \int_{y_0}^{y}(x_0^3 - 3y^2)dy = (x^2 + x^3y)I_{x_0}^{x} +}$

x03y−y3I03=x2+x3y−x02−x03y+x03y−y3−x03y0+y03=x2+x3y−y3+C,

де $\mathrm{C = -x_0^2 - x_0^3y_0 - y_0^3}.$

Отримали функцію:

$\mathrm{u(x,y) = x^2 + x^3y - y^3 + C}.$

Маємо розв'язок:

$x^2 + x^3y - y^3 = C.$

<u>III спосіб.</u>

Зінтегруємо частинні похідні u_xпо dx, а u_y по dx:

$\mathrm{u(x,y) = \int(2x + 3x^2y)dx = x^2 + x^3y} + \varphi_1\mathrm{(y)},$

$\mathrm{u(x,y) = \int(x^3 - 3y^2)dy = x^3y - y^3} + \varphi_2\mathrm{(x)}.$

Щоб отримати шукану функцію та перший інтеграл запишемо всі доданки із незалежними змінними, а з другого випишемо - лише ті, які відсутні у першому. На місце довільних функцій $\varphi_1(y)$ і $\varphi_2(x)$ запишемо: C - довільну сталу:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3\mathrm{y} - \mathrm{y}^3 + \mathrm{C}.$$

Розв'язок

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

Нехай дано рівняння виду:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} + \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy} = 0.$$

Якщо ліва частина не є повним диференціалом даного рівняння, а саме не виконується умова: $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}$, але якщо виконується умова існування розв'язку, тобто, функції P і Q мають неперервні частинні похідні і стають рівними нулю одночасно, тоді існує функція μ = μ(x,y), -інтегрувальний множник, для якої

$$\mu(\mathrm{x},\mathrm{y}) \cdot (\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} + \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy}) = \mathrm{du},$$

де du - повний диференціал функції $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Звідси маємо, що виконується умова інтегрованості

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mu Q) \text{ [6].}$$

Маємо, що інтегрувальний множник отримується при розв'язуванні диференціального рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{y}} \cdot P + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{x}}Q + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}\mu$$

або

$$\mu\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}\right) = -\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{P} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{Q}.$$

Загального методу для визначення інтегрувального множника з рівняння немає. Проте існують окремі випадки. Розглянемо деякі з них.

1. Якщо вираз: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, тоді інтегрувальний множник отримується у вигляді $\mu=\mu(x)$ із рівняння: $\frac{\partial\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=F(x)dx$ [3].

2. Якщо вираз: $-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\Phi(y)$, то інтегрувальний множник знаходиться у вигляді $\mu=\mu(y)$ із рівняння: $\frac{\partial\mu}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy=\Phi(y)dy$.

3. Якщо інтегрувальний множник набуває вигляду $\mu(x,y)=\mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ –відома функція. В такому випадку інтегрувальний множник отримується з диференціального рівняння :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\omega}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}}$$

є також і інші випадки [6].

Нехай $\mu_0(x,y)$ - інтегрувальний множник рівняння , а $u_0(x,y)$ інтеграл рівняння, що відповідає йому, тоді інтегрувальні множники рівняння отримуються за формулою:

$$\mu(x,y)=\mu_0(x,y)\cdot\varphi(u_0(x,y)),$$

де $\varphi(z)$ - довільна неперервно диференційована функція [6].

Використовуючи дане твердження, інтегрувальний множник можна знайти так. Рівняння розбивається на дві частини:

$$P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy+P_2(x,y)+Q_2(x,y)dy=0.$$

Припустимо, що вдалося знайти інтегрувальні множники $\mu_1(x,y)$ і $\mu_2(x,y)$ і інтеграли $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$ відповідно для рівнянь:

$P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)=0$ і $P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy=0$.

Тоді інтегрувальні множники першого рівнянь матимуть вигляд $\mu(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \varphi_1(u_1(x, y))$, а другого $\mu(x, y) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_1(u_1(x, y))$, а другого $\mu(x, y) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2(u_2(x, y))$, де $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ - довільні диференційовані функції. Якщо удасться підібрати функції $\varphi_1^*(z)$ і $\varphi_2^*(z)$ так, що

$\mu_1(x, y) \cdot \varphi_1^*(u_1(x, y)) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2^*(u_2(x, y))$, то $\mu(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \varphi_1^*(u_1(x, y))$ - є інтегрувальним множником рівняння.

Розглянемо деякі розв’язки диференціальних рівнянь.

Приклад . Розв’язати рівняння

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \cdot \sin 2y\, dy = 0.$$

Розв’язання.

Позначимо:

$P(x, y) = x^2 - \sin 2y$; $Q(x, y) = x \cdot \sin 2y$.

Перевіримо умову інтегрованості:

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin 2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y,$

маємо: $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Шукаємо інтегрувальний множник:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{2}{x};\ \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{x}dx;\ \ln \mu = -2\ln x + C$$

Нехай C=0, тоді $\mu = \frac{1}{x^2}$.

Дане рівняння домножимо на $\mu = \frac{1}{x^2}$, та перетворимо його у рівняння в повних диференціалах:

$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}\sin 2y\, dy = 0.$

Знайдемо розв’язок отриманого диференціального рівняння:

$u(x,y) = \int \left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x}\sin^2 y + \varphi(y);$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} 2\sin y \cdot \cos y + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \cdot \sin 2y + \varphi'(y);$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sin 2y + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \cdot \sin 2y, \frac{d\varphi}{dy} = 0, \varphi = C$$

Розв'язок рівняння такий: $u(x,y) = x + \frac{1}{x}\sin^2 y + C$

Приклад . Розв'язати рівняння

$$(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^3)dx = 0$$

Розв'язання.

Позначимо:

$P(x,y) = y^4 - 4xy,\ Q(x,y) = 2xy^3 - 3x^2.$

Перевіримо умову інтегрованості: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3 - 4x; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^3 - 6x,$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$

Шукаємо інтегрувальний множник.

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^3 + 2x.$

При діленні одержаного виразу на $P(x,y)$і на $Q(x,y)$ отримуються функції від (x,y). А отже, потрібно шукати інтегрувальний множник у вигляді $\mu = \mu(x,y)$. Нехай $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y) = x \cdot y$. Підставимо у рівняння $\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{2y^3 + 2x}{xy^4 + x^2 y} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{\omega}.$

Звідки: $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2d\omega}{\omega}$, $\ln \mu = 2\ln \omega + \ln C$, $\mu = C \cdot \omega^2$. Нехай C=1, тоді $\mu = \omega^2 = x^2 y^2.$

Домноживши рівняння з заданої умови задачі на функцію $\mu = x^2y^2$, отримаємо рівняння у повних диференціалах:

$(x^2y^6 - 4x^3y^3)dx + (2x^3y^5 - 3x^4y^2)dy = 0.$

Знайдемо розв'язок:

$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = x^2y^6 - 4x^3y^3; Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y^5 - 3x^4y^2.$

Знайдемо частинну похідну по dy від одержаного виразу зінтегрувавши перше рівняння по dx при $y = const$, та та підставимо її значення у друге рівняння

$$u(x, y) = \int (x^2y^6 - 4x^3y^3)dx = \frac{x^3y^6}{3} - x^4y^3 + \varphi(y);$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y^5 - 3x^4y^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 2x^3y^2, \frac{d\varphi}{dy} = 0$, $\varphi = C$, де C - довільна стала.

Шукана функція

$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^6 - x^4y^3 + C.$

Загальний розв'язок:

$\frac{x^3y^6}{3} - x^4y^3 = C.$

Приклад. Розв'язати рівняння

$x(y - 1)(z - 1)dx + y(z - 1)(x - 1)dy + z(x - 1)(y - 1)dz = 0.$

Розв'язання.

Позначимо:

$P = x(y - 1)(z - 1), Q = y(z - 1)(x - 1), R = z(x - 1)(y - 1).$

Знаходимо:

$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = x(z-1), \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{z}} = x(y-1), \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{z}} = y(x-1), \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} = y(z-1), \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{x}} = z(y-1),$
$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{y}} = z(x-1).$

Підставляючи значення P, Q, R і їх похідних в умову,бачимо , що дана умова виконується.

Представимо dz через інші диференціали:

$$\mathrm{dx} = -\frac{\mathrm{x(z-1)}}{\mathrm{z(x-1)}}\mathrm{dx} - \frac{\mathrm{y(z-1)}}{\mathrm{z(y-1)}}\mathrm{dy}$$

Запишемо повний диференціал від функції z та визначимо його частинні похідні :

$\mathrm{dz} = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy}, \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{x(z-1)}{z(x-1)}, \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{y(z-1)}{z(y-1)}.$

Зінтегруємо першу частинну похідну по dx:

$$\frac{z\,dz}{z-1} = \frac{-x\,dx}{x-1};$$

$\frac{(z-1+1)}{z-1}dz = \frac{-x+1-1}{x-1}dx,$

$\left(1+\frac{1}{z-1}\right)dz = \left(-1-\frac{1}{x-1}\right)dx,$

$\mathrm{z} + \ln(\mathrm{z}-1) = -\mathrm{x} - \ln(\mathrm{x}-1) + \varphi(\mathrm{y}).$ Одержане рівняння диференціюємо по dy і підставимо замість $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ його значення $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{1}{z-1}\cdot\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{d\varphi}{dy};$ $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\left[1+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{d\varphi}{dy}; -\frac{y(z-1)}{z(y-1)}\cdot\left[1+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{1-y}, \varphi(\mathrm{y}) = -\mathrm{y} - \ln(\mathrm{y}-1) + \mathrm{C},$ C -довільна стала.

Загальний розв'язок: $\mathrm{z} = -\ln(\mathrm{z}-1) - \mathrm{x} - \ln(\mathrm{x}-1) - \mathrm{y} - \ln(\mathrm{y}-1) + \mathrm{C},$ або

$\ln(z-1) + \ln(x-1) + \ln(y-1) = -x - y - z + C.$

$\ln(z-1)(x-1)(y-1) = -x - y - z + C;$

Розв'язок у неявному вигляді: $(z-1)(x-1)(y-1)=e^{-x-y-z+C}$.

4. Квазілінійні диференціальні рівняння:

Квалізійним диференціальними рівнянням з частинними похідними першого порядку називається рівняння виду [2]

$$b_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+b_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=b_{n+1}(x,u) \qquad (1.24)$$

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння , треба відшувати n незалежних перших інтегралів

$$\begin{cases} u_1(x_1,\dots,x_n,u)=C_1, \\ \qquad\quad . \\ \qquad\quad . \\ \qquad\quad . \\ u_n(x_1,\dots,x_n,u)=C_n \end{cases} \qquad (1.25)$$

Системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{b_1(x,u)}=\cdots=\frac{dx_n}{b_n(x,u)}=\frac{du}{b_{n+1}(x,u)}.$$

Загальний розв'язок рівняння в неявному вигляді задається формулою

$$\Phi\big(u_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n,u)\big)=0, \qquad (1.26)$$

де Ф – довільна неперервно диференційовна функція [2].

Якщо функція u є частинною одного з перших інтегралів системи , наприклад, в u_n, тоді загальний розв'язок запишемо :

$$u_n(x_1,\dots,x_n,u)=\Psi\big(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big), \qquad (1.27)$$

де Ψ – довільна неперервно диференційована функція. Розв'язавши рівняння стосовно u, отримаємо загальний розвязок рівнянння в явному вигляді

$$u = \Theta\big(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big), \qquad (1.28)$$

де Θ – довільна неперервно диференційована функція [2].

Рівняння характеристик для квазілінійного рівняння першого порядку має такий самий вигляд, як і для лінійного , а саме [6]:

а) У симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}.$$

б) У параметричній формі

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = a_2, \cdots, \frac{dx_n}{dt} = a_n, \ \frac{du}{dt} = b.$$

Задача Коші для квазілінійного ДР полягає у знаходжені функції $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, яка є розв'язком диференціального рівняння і задовільняє початковій умові: $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)_{x\epsilon y} = \varphi(x)$, де будь-яка нехарактеристична точка x ,що належить початковій гладкій гіперповерхні γ ,та функція u, яка перетворюється в $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. В $n -$ вимірному евклідовому просторі E_n гіперповерхня γ містить $(n-1)$-вимір [22].

Початкова умова $\big(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)$ називається нехарактеристичною для диференціального рівняння (13) якщо у точці x_0 на гіперповерхні γ , характеристика, що перетинає цю точку трансверсальна, іншими словами не дотична до початкової поверхні γ , і тому її напрямний вектор $\vec{a}(x_0, u_0) = \vec{a}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, де $u_0 = \varphi(x_0)$, у цій точці не дотикається до поверхні γ . Якщо знайдемо n перших незалежних інтеграли з рівнянь характеристик

$$\Psi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) = C_i, \qquad i = 1,2, \cdots, n,$$

то загальний розв'язок рівняння має вигляд $F(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n) = 0$, де $F-$ довільна диференційовна функція [6].

Щоб знайти розв'язок $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ рівняння , який задовольняє початкову умову $u\mathrm{I}_{x\in\gamma} = \varphi(x)$, де гіперповерхня γ визначена рівнянням $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, необхідно із системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_i, \\ u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), \ \ (i = 1,2, \cdots, n) \end{cases} \qquad (1.29)$$

виключити $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ та одержати співвідношення $F(C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$. Підставляючи в нього замість $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ліві частини співвідношень , отримаємо [6] :

$$F\big(\Psi_1(x,u), \Psi_2(x,u), \cdots, \Psi_n(x,u)\big) = 0.$$

Отримане рівняння є шуканим розв'язком, яке відповідає початковій умові задачі.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy}.$$

З даних рівнянь визначаємо два перших інтеграли:

1) $\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu}$, $\ln y - \ln x = \ln C_1$, $\frac{y}{x} = C_1$;

2) $\frac{ydx+xdy}{yxu+xyu} = \frac{du}{-xy}$, $\frac{d(x\cdot y)}{2u} = \frac{du}{-1}$, $d(x \cdot y) = -2udu$, $x \cdot y + u^2 = C_2$.

Формулюємо систему рівнянь, що містить перші інтеграли з рівнянь характеристик, рівняння гіперповерхні і початкова умова:

$$\frac{y}{x} = C_1, x \cdot y + u^2 = C_2, \ \ x \cdot y = 1, u = 1.$$

З цієї ситеми виключимо x, y і u , та встановимо зв'язок між C_1 і C_2 . Для досягнення такого взаємозв'язку, здійснимо еквівалентне перетворення другого рівняння, домноживши почленно його на

$\frac{y}{x}$: $y^2 + \frac{yu^2}{x} = \frac{y}{x}C_2 = C_1 \cdot C_2 = C_3$.

Маємо:

$y^2 + \frac{yu^2}{x} = C_3$.

Тепер будемо визначати взаємозв'язок між C_1 і C_3 . Із третього рівняння: $y = \frac{1}{x}$, тому одержимо : $\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = C_3$ або $2C_1 = C_3$.

Після того, як підставимо в останнє рівняння значеня C_1 і C_3 одержимо:

$\frac{2y}{x} = y^2 + \frac{yu^2}{x}$; $u^2 = 2 - xy$.

Останнє співвідношення в області $x \cdot y < 2$ має два розв'язка даного диференціального рівняння: $u = \sqrt{2 - xy}$, і $u = -\sqrt{2 - xy}$. Саме:

$$u(x, y) = \sqrt{2 - xy}, \qquad xy < 2$$

є одним із цих шуканих розв'язком задачі Коші.

Розглянемо випадок задачі Коші, коли початкова гіперповерхня γ задана рівняннями в параметричній формі:

$$x_1^0 = x_1(s), x_2^0 = x_2(s), \cdots, x_n^{(0)} = x_n(s), u^{(0)} = u(s), \qquad ()$$

де отримані функції неперервно диференційовні у даній області. В даному випадку характеристики для рівняння визначаються з рівнянь у параметричній формі:

$$x_1 = x_1(s, t), x_2 = x_2(s, t), \cdots, x_n = x_n(s, t), u = u(s, t),$$

Отримані функції мають неперервні частинні похідні першого порядку по параметрах s і t . Але саме вони утворюють шукану інтегральну поверхню $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, якщо з перших n рівнянь системи визначити параметри s і t та підставити отримані значення в останнє рівняння. Потрібно, щоб на гіперповерхні γ не обертався у нуль Якобіан:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta = 0$, тоді гіперповерхня γ і є характеристикою рівняння, а це означає існує інтеграл $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Матиме місце теорема:

Якщо $\Delta \neq 0$ всюди на початковій поверхні γ , тоді задача Коші для рівняння має один і тільки один розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$ на всій гіперповерхні γ , тоді для того, щоб задача Коші мала розв'язок, гіперповерхня γ має бути характеристикою. В нашому випадку задача Коші має нескінченно багато розв'язків [6].

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$(y^2 - u)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$$

Початкова умова:

Інтегральна поверхн перетинає лінію γ :

$x_{(0)} = 1, y_{(0)} = s, u_{(0)} = \frac{s^2}{2},$ де s – параметр

Запишемо рівняння характеристик у параметричній формі:

$\frac{dx}{dt} = y^2 - u, \quad \frac{dy}{dt} = y, \ \frac{du}{dt} = u.$

Визначимо розв'язки даних рівнянь через початкові значення змінних (x, y, u):

1) $\frac{du}{dt} = u; \ \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} = \int_0^t dt; \ \ \ln u - \ln u_0 = t; \ \ln \frac{u}{u_0} = t; \ u = u_0 e^t;$

2) $\frac{dy}{dt} = y; \ \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t dt; \ y = y_0 e^t;$

3)$\frac{dx}{dt} = y_0^2 e^{2t} - u_0 e^t$, $\int_{x(0)}^{x} dx = \int_0^t \left(y_{(0)}^2 e^{2t} - u_{(0)} e^t\right) dt$;

$$x = \left(\frac{1}{2} y_{(0)}^2 e^{2t} - u_{(0)} e^t\right) \mathrm{I}_0^t + x_0 = \left(\frac{1}{2} y_{(0)}^2 e^t - u_{(0)}\right) e^t - \left(\frac{1}{2} y_{(0)}^2 - u_{(0)}\right) + x_{(0)}.$$

Підставимо значення початкових умов у отримані вирази, матимемо:

$x = \frac{1}{2} s^2 (e^t - 1) e^t + 1$, $y = se^t$, $u = \frac{1}{2} s^2 e^t$.

Якобіан для системи перших двох рівнянь

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \frac{s^2}{2} e^{2t} \neq 0$ при $t = 0, s \neq 0$.

Отже, задача має єдиний розв’язок, і отримується він виключенням параметрів s і t із отриманої системи рівнянь:

$e^t = \frac{y}{s}$;

$x = \frac{y^2}{2} - \frac{ys}{2} + 1$;

$\frac{ys}{2} = 1 - x + \frac{y^1}{2}$;

$u = \frac{ys}{2} = 1 - x + \frac{y^2}{2}$.

Отримаємо, розв’язок задачі Коші має вигляд:

$$u(x, y) = 1 - x + \frac{y^2}{2}.$$

Приклад. Знайти загальний розв’язок квазілінійного диференціального рівняння

$$2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

та знайти поверхню, яка задовольняє дане рівняння і перетинає лінію (коло) γ :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

Розв’язання.

Складемо рівняння характеристик $\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$.

Знайдемо перші інтеграли, а саме характеристики даного рівняння:

1) $\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}$; $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$; $\ln x-\ln y=\ln C_1$; $\ln\frac{x}{y}=\ln C_1$; $\frac{x}{y}=C_1$

2) $\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$; $\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-y^2C_1^2-y^2}$; $2z\frac{dz}{dy}-\frac{z^2}{y}=-y(C_1^2+1)$.

Отримали рівняння Бернуллі. Виконаємо підстановку: $u=z^2.\frac{du}{dy}=2z\frac{dz}{dy}$;

Тепер рівняння Бернуллі набуває вигляду лінійного:

$\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}=-y(C_1^2+1)$.

Знайдемо розв’язок за формулою:

$u=e^{-\int Pdy}\left\{\int Qe^{\int Pdy}dy+C_2\right\}$;

$u=-(C_1^2+1)y^2+C_2y=(x^2+y^2)+C_2y$;

Звідси маємо:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2.$$

Загальний інтеграл рівняння запишеться так

$$F\left(\frac{x}{y};\frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0$$

Із системи рівнянь, до якої належать рівняння характеристик і рівняння кривої γ :

$\frac{x}{y}=C_1$, $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$, $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=a_2$

позбудемось змінних x, y, z.

З другого і четвертого рівняння отримуємо: $\frac{a^2}{y} = C_2$, таким чином $y = \frac{a^2}{C_2}$. Тоді рівняння:

$x = a^2 \frac{C_1}{C_2}$, а з третього отримаємо : $z = -\frac{a^2}{C_2}(C_1 + 1)$.

Використовуючи друге рівняння, отримаємо залежність між C_1 і C_2 :

$$\frac{a^4 C_1^2}{C_2^2} + \frac{a^4}{C_2^2} + \frac{a^4}{C_2^2}(C_1 + 1)^2 = a^2$$

або

$$2a^2(C_1^2 + C_1 + 1) = C_2^2.$$

Тепер замінивши C_1 і C_2 відповідними їх виразами, отримаємо рівняння шуканої поверхні:

$$(x^2 + y^2 + x^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$$

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Загальний метод розв’язку диференціальних рівнянь

У теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними постає задача знайдення загального розв’язку, з якого можна отримати частинні розв’язки, що відповідають додатковим умовам.

У процесі вивчення звичайних диференціальних рівнянь було встановлено, що їхній загальний розв’язок залежить не лише від незалежних змінних, а й від довільних сталих. Зокрема, загальний розв’язок звичайного диференціального рівняння першого порядку містить одну довільну сталу, тоді як загальний розв’язок рівняння другого порядку включає дві довільні сталі і так далі. [21]

Щоб з’ясувати суть загального розв’язку диференціального рівняння у частинних похідних, проаналізуємо прості приклади цих рівнянь. Припустимо, потрібно розв’язати ДРЧП I порядку двох змінних вигляду [21]

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2.1)$$

де $u = U(x, y)$.

У рівнянні чітко присутня тільки одна частинна похідна $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, при розв’язку якої аргумент y слід розглядати як сталу.Отже, рівняння можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з невідомою функцією U і незалежною змінною x та параметром y . Нехай $U = \varphi(x, y, C)$ – це загальний розв’язок звичайного диференціального рівняння. Тоді отримуємо, що загальний розв’язок ДРЧП першого порядку виду має вигляд $U = \varphi\big(x, y, C(y)\big)$.

Зауваження. Аналогічно для $F\left(x, y, u, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0$ загальний розв'язок приймає вигляд $U = \varphi\big(x, y, C(x)\big)$.

Приклад. Зінтегрувати ДРЧП першого порядку

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2xy^2 - e^{-3y} + 2.$$

Розв'язання

Вважаємо, що y параметром та інтегруємо його за x :

$$Z = \int (2xy^2 - e^{-3y} + 2)dx = x^2y^2 - xe^{-3y} + 2x + C(y).$$

Зрештою отримаємо ***загальний розв'язок***:

$$Z(x, y) = x^2y^2 - xe^{-3y} + 2x + C(y).$$

Приклад . Розв'язати рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} + xy^2$.

Розв'язання

Розглядаємо рівняння, як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке містить у собі параметр y . Розв'яжемо його за допомогою метода Лагранжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x}{x},$$

$$\ln|z| = ln|x| + ln|C(y)|.$$

З останнього виразу отримуємо:

$z = C(y) \cdot x.$

З використанням методу варіації довільної сталої шукатимемо розв'язок неоднорідного рівняння у формі $z = C(x, y) \cdot x$. Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C'_x(x,y) \cdot x + C(x,y).$$

Підставимо отриманий вираз у початкове рівняння маємо :

$$C'_x(x,y) \cdot x + C(x,y) = \frac{C(x,y)}{x} + xy^2,$$

$$C'_x(x,y) = y^2.$$

Зінтегруємо останнє рівняння та отримаємо:

$$C(x,y) = xy^2 + C(y).$$

У результаті загальний розв’язок рівняння набуває вигляду

$$z(x,y) = \left(xy^2 + C(y)\right) \cdot x.$$

Означення. Якщо у

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

функція F залежить лінійно від частинних похідних функції $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, , тоді її називають лінійним ДРЧП першого порядку і записують у вигляді [22]

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Якщо $R(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \equiv 0$, а функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ не залежать від шуканої функції $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то диференціальне рівняння з частинними похідними називають ***лінійним однорідним*** ДРЧП І порядку та має вигляд

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

Позначимо системою характеристик ДРЧП виду (верхнє рівняння) систему з (n −1) звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Твердження 1. Кожний інтеграл системи характеристик представляє розв'язкок ДРЧП першого порядку виду .

Твердження 2. Будь-який розв'язок ДРЧП першого порядку виду є інтегралом системи характеристик .

Твердження 3 (побудова загального розв'язку ДРЧП виду). Нехай нам дано $C_1(x_1, x_2, \dots, x_n), C_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, C_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$– це незалежні інтеграли системи характеристик (1.6), у такому випадку функція $u = u(C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, де u – довільна функція, яка має неперервні похідні по змінних $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, називається ***загальним розв'язком*** .

Приклад . Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання .

Сформудюємо та розв'яжемо систему характеристик, що відповідає даному лінійному однорідному ДРЧП першого порядку:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \to \quad \int x dx = -\int y dy, \to \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}.$$

Отже врахуємо, в систему єдиний інтеграл вигляду $C = x^2 + y^2$ та твердження 3 і в результаті отримаємо загальний розв'язок даного ДРЧП:

$$z = z(x^2 + y^2),$$

де z – довільна неперервна функція.

2.2.Числові методи рівняння з частинними похідними першого порядку.

Наявні різні класифікації методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Відповідно можна виділити такі методи: класичні (точні), приближені та чисельні.

Класичні методи надають змогу отримати розв'язок у вигляді формул через аналітичного перетворення та інтегрування функцій (квадратурне інтегрування). Однак такі методи далеко не завжди можуть бути застосовні, а якщо і застосовні, то нерідко призводять до досить величезних виразів виразів, які втрачають практичну цінність. Дані методи розв’язання застосовують, в основному для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних і, також, для канонічних областей [18].

На практиці часто застосовують ***наближені*** та ***чисельні*** методи.

Чисельні методи - це приближення розв'язок, який подають у вигляді таблиці.Але ці методи не дозволяють отримати загальний розв'язок, а лише дають можливість знаходити потрібний частковий розв'язок задачі в деяких точках заданої області. Чисельні методи, завдяки їх інтенсивним застосуванням ЕОМ набули значного розвитоку. Деякі з чисельних методів розроблені спеціально для застосування ЕОМ. Як правило,вони зводяться до перегляду систем алгебричних рівнянь розв'язування яких дозволяє отримати таблицю значень шуканої функції у вибраних точках області. Такі чисельні методи застосовуються до широкого класу задач для рівнянь у частинних похідних [18].

Перелічимо конкретні методи, які відносяться до перелічених вище груп методів [12]:

1. Метод розділення змінних (метод Фур'є);
2. Варіаційні методи;
3. Групові методи;

4. Метод перетворення координат, залежної змінної;
5. Метод статистичних випробувань (Монте-Карло);
6. Метод інтегральних рівнянь;
7. Метод інтегральних перетворень;
8. Асимптотичні методи;
9. Апроксимаційні методи;
10. Чисельні методи:

a) метод скінчених різниць;

b) метод скінчених елементів (МСЄ);

c) метод граничних елементів (МГЕ);

Процес побудови різницевої схеми на основі постановки задачі називають ***дискретизацією задачі*** . Заміну задачі її дискретним аналогом-різницевою схемою, частіше отримують одним із двох даних способів:

a) безпосередньо шляхом заміни похідних їх різницевими відносинами;

b) методом невизначених коефіцієнтів апроксимації операторів (метод Рейнбаха), що дозволяє, окрім прямокутних, також використовувати косокутні сітки, а також ще різні групи навколишніх вузлів при апроксимації диференціального рівняння.

Великого значення варто звернути увагу на апроксимація граничних умов завдання у разі криволінійного контуру даної області, коли застосування стандартного шаблону не вважається можливим, та часто може сприяють до значних технічних труднощів практичної реалізації того чи іншого методу.

Іноді застосовують знесення значень функції та межі області на внутрішні вузли сітки, що найближче прилягає до неї. Часто, крім простого знесення, застосовують інтерполяційні методи першого та іншого порядку. Одержану в результаті апроксимації систему алгебричних рівнянь , або ще різницеву схему – розв'язують чисельними методами. Найчастіше – це ітераційні методи, метод прогонки тощо [22].

Класифікація численних методів розв'язання задачі Коші

Протягом багатьох років чисельний розв’язок задачі Коші перебуває в центрі уваги науковців. Чисельний розв’язок знаходить широке застосування в різних галузях науки і техніки, що зумовило розробку великої кількості відповідних методів.

Чисельні методи розв'язання задачі Коші поділяють на 3 групи:

a) одноточкові;
b) багатоточкові (методи прогнозу та корекції);
c) методи з автоматичним вибором кроку інтегрування [20].

На малюнку показана класифікація найвідоміших чисельних методів розв‘язання диференційних рівнянь з частинними похідними .

До *одноточкових методів* відносять методи, що мають спільні характеристики, зокрема такі як:

1. У всіх одноточкових методах лежить розклад функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що мають h в степені до k включно. Порядком метода називається ціле число k. Похибка на будь-якому кроці має порядок $k+1$ [20].

2. Усі одноточкові методи не вимагають безпосереднього обчислення похідних, оскільки обчислюється лише сама функція, однак у деяких випадках потребуються її значення в проміжних точках, а це призводить до додаткових затрат зусиль та часу [20].

3. Щоб отримати інформації у новій точці, необхідно мати дані лише попередньої точки. Дану властивість можемо назвати „самостартуваням”. Властивість „самостартуваня” дає змогу без зусиль змінювати величину кроку h [20].

4. В зіставлені з одноточковими методами *методи прогнозу і корекції* матимуть ряд особливостей:

   - Для реалізації методів прогнозу і корекції потрібно мати дані про кілька попередніх точок. Щоб отримання більше інформації, доводиться використовувати одноточковий метод. Якщо в процесі розв’язку диференційних рівнянь методом прогнозу і корекції змінюється крок, зазвичай виникає необхідність тимчасово перейти до одноточкового методу [20].
   - Одноточкові методи і методи прогнозу і корекції забезпечують майже однакову точність результатів. Однак на відміну від перших- другі дозволяють лише оцінити похибку на кроці. У разі використання одноточкових методів, крок h зазвичай обирають дещо меншим, ніж це необхідно, що робить методи прогнозу і корекції найефективнішими [20].

Застосовуючи метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності, на кожному кроці необхідно обчислювати чотири значення функції, і для збіжності методу прогнозу і корекції цього ж порядку точності зазвичай вистачає двох значень функції. В результаті маємо, що методи прогнозу і корекції потребують вдвічі менше машинного часу, а ніж методи Рунге-Кутта порівнюваної точності.

2.3. Задачі Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Приклади задач, що описують застосування задачі Коші в рівняннях

Задача Коші для ДРЧП першого порядку

Задача Коші для диференціальних рівнянь першого порядку полягає в знаходженні розв'язку $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який виконує початкову умову $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, де φ – наперед задана функція.

Дано геометричну інтерпретацію ДРЧП першого порядку на прикладі покажемо рівняння для функції двох змінних $z(x, y)$, що має вигляд

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \qquad (2.2)$$

Постановка задачі Коші для РЧП: знайти такий розв'язок $z(x, y)$ ДРЧП, який справджує початкову умову $z(x_0, y) = \varphi(y)$або $z(x, y_0) = \varphi(x)$. *Геометрична інтерпретація* ДРЧП називається співвідношенням, яке пов'язує координати x, y, z на поверхні $z = z(x, y)$, що називається *інтегральною поверхнею* ДРЧП,і кутові коефіцієнти дотичної площини до даної поверхні. Початкова умова дає просторову криву, через яку проходить інтегральна поверхня. Якщо через дану криву $z = \varphi(y)$ [або $z = \varphi(x)$] проходить нескінченна кількість інтегральних поверхонь, тоді така крива називається *характеристикою* ДРЧП.

Розглянемо приклади застосування задач Коші у рівняннях.

Задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку.

Диференціальні рівняння з частинними похідними має багато розв’язків, тоді для виокремлення одного з розв’язків потрібно задати додаткову умову. Однією з таких умовою може бути умова Коші. Зафіксуємо одну із змінних , наприклад, $x_n = x_n^0$, а далі будемо вимагати, щоб для отримання розв’язку u рівняння виконувалася умова $u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ [14].

Нехай дано, що функція φ визначена у деякому околі точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ і $P_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ [14].

Підставимо значення в загальний інтеграл системи. Отримаємо

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_1, \\ \boldsymbol{\psi}_2(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_2, \\ \boldsymbol{\psi}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_{n-1}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Якобіан системи (2.3) відмінний від нуля в даній точці . Тоді існує єдиний розв’язок системи

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}). \end{cases} \qquad (2.4)$$

Побудуюмо функцію

$$u = \varphi(\omega_1(\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}), \omega_2(\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n-1})).$$

Дана функція буде розв’язком задачі Коші тому що, функція залежить від частинних розв’язків , тобто вона також буде розв’язком рівняння. Крім того,

$$uI_{x_n = x_n^0} =$$
$$\varphi(\omega_1(\boldsymbol{\psi}_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0), \dots, \boldsymbol{\psi}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)), \dots, \omega_{n-1}(\boldsymbol{\psi}_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0), \dots,$$
$$\varphi(\omega_1(C_1, \dots, C_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(C_1, \dots, C_{n-1})) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$$ [14].

Отже функція задовільняє початкову умову.

Задача Коші для квазілінійного рівняння.

Рівняння вигляду

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u)$$

$$P_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\dots,x_n,u)$$

називається квазілінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку [13].

Формулюємо роз'язок задачі , так само як і для лінійного однорідного рівняння.

Потрібно знайти розв'язок рівняння, що задовільняє початкову умову [13]

$$\mathrm{uI}_{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n). \qquad (2.5)$$

В загальний інтеграл системи підставимо значення [13] .

$$\begin{cases}\boldsymbol{\psi}_1(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1},\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^0,\mathrm{u})=\mathrm{C}\\ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1},\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^0,\mathrm{u})=\mathrm{C}\end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему відносно $x_1,\dots,x_{n-1},u$, матимемо

$$\begin{cases}x_1=\omega_1(C_1,\dots,C_n),\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(C_1,\dots,C_n),\\ u=\omega(C_1,\dots,C_n).\end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші формулюється за формулою [13]

$$\omega(\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}})-\varphi(\omega_1(\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}),\dots,\omega_{\mathrm{n}-1}(\boldsymbol{\psi}_1,\dots,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}))=0 \qquad (2.6)$$

Приклад .

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

Складаємо симетричну систему до даного рівняння

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

Далі інтегруючи дану систему, знаходимо перші інтеграли

$\frac{x_1}{x_n}=C,\frac{x_2}{x_n}=C_2,\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=C_{n-1}.$

Отримаємо загальний розв’язок, який має вигляд

$$\mathrm{u}=F\left(\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_\mathrm{n}},\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_\mathrm{n}},\ldots,\frac{\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1}}{\mathrm{x}_\mathrm{n}}\right),$$

де – довільна диференційована функція аргументів.

Приклад .

Знайти загальний розв’язок рівняння

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})\frac{\partial z}{\partial x}+(\mathrm{y}-\mathrm{x})\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Симетрична система складатиметься з одного рівняння

$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{y-x}$ або $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}.$

Маємо однорідне рівняння, тоді робимо заміну $\mathrm{y}=\mathrm{ux}$.

$x\frac{du}{dx}+u\frac{u-1}{u+1}, x\frac{du}{dx}+\frac{u^2+1}{u+1}=0.$

$\frac{u+1}{u^2+1}du+\frac{dx}{x}=0,$

$\frac{1}{2}ln(u^2+1)+arctg\, u\ +ln|x|=ln\, C,$

$\sqrt{u^2+1}e^{arctg\, u}x=C, \sqrt{x^2+y^2}e^{arctg\frac{y}{x}}=C.$

В результаті, загальний розв’язок вихідного рівняння має вигляд

$\mathrm{z}=\Phi\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}}\right).$

Приклад .

Знайти розв’язок рівняння

$$\mathrm{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

що задовольняє умову

$$\mathrm{uI}_{\mathrm{x}=2}=\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2$$

Звідси утворюємо симетричну систему

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

та знаходимо перші інтеграли

$\frac{x}{z}=C_1$,$\frac{y}{z}=C_2$.

Підставимо значення $\mathrm{x}=2$ у інтеграли, маємо

$\frac{2}{z}=C_1$, $\frac{y}{z}=C_2$.

Випливає, що

$\mathrm{z}=\frac{2}{\mathrm{C}_1}$,$\mathrm{y}=\frac{2\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}$.

Тоді підставимо в початкову умову їх значення з останніх двох рівностей

$\mathrm{u}=4\left(\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}\right)^2+4\left(\frac{1}{\mathrm{C}_1}\right)^2$.

На місце C_2 підставимо їх значення з перших інтегралів. Отримаємо

$\mathrm{u}=4\frac{\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}{\mathrm{x}^2}$.

Приклад .

$(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial y}+xz\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

$$uI_{x=0} = \frac{z^2}{y} - y.$$

Складаємо систему

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}.$$

З останнього рівняння отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dz}{z}, \ln y = 2\ln z - \ln C_1, \frac{z^2}{y} = C_1.$$

З першого рівняння маємо

$$\frac{dx+dy}{(x+y)^2} = \frac{dx-dy}{(x-y)^2}, -\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{x-y} + 2C_2,$$

$$\frac{y}{x^2-y^2} = C_1.$$

Підставимо значення $x = 0$ в перші інтеграли. Матимемо

$$-\frac{1}{y} = C_2, \frac{z^2}{y} = C_1$$

Випливає, що

$$y = -\frac{1}{C_2}, z^2 = -\frac{C_1}{C2}.$$

Підставляємо в початкову умову

$$u = C_1 + \frac{1}{C_2}.$$

В результаті маємо

$$u = \frac{z^2+x^2-y^2}{y}.$$

Приклад .

Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Дане рівняння квазілінійне , у такому відповідна симетрична система матиме вигляд

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}.$$

Знайдемо перші інтеграли даної системи. З першого рівняння

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

Отримуємо

$$\frac{x}{y}=C_1.$$

Запишемо рівність, використовуючи властивість пропорцій,

$$\frac{ydx+xdy}{2xyz}=\frac{dz}{xy},$$

З цього

$$z^2-xy=C_2.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$\Phi\left(\frac{x}{y},z^2-xy\right)=0.$$

Ще його можна записати у вигляді

$$z^2=xy+\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Приклад .

Знайти розв'язок рівняння

$$\left(1+\sqrt{u-x-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2,$$

який відповідає початковій умові

$$uI_{y=0}=2x.$$

Запишемо відповідну симетричну систему

$$\frac{dx}{1+\sqrt{u-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}.$$

З другого рівняння маємо один перший інтеграл

$$\mathrm{u} - 2\mathrm{y} = \mathrm{C}_1.$$

Використовуючи властивість пропорцій, матимемо інтегровану комбінацію

$$\frac{du-dx-dy}{\sqrt{u-x-y}} = -dy.$$

Звідки маємо

$$2\sqrt{\mathrm{u} - \mathrm{x} - \mathrm{y}} + \mathrm{y} = \mathrm{C}_2.$$

Запишемо дані значення $\mathrm{y} = 0$ в перші інтеграли. Маємо

$$\mathrm{u} = \mathrm{C}_1,\ 2\sqrt{\mathrm{u} - \mathrm{x}} = \mathrm{C}_2.$$

Звідки

$$\mathrm{x} = \mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{C}_2^2}{4},\ \mathrm{u} = \mathrm{C}_1.$$

Підставляємо ці значення в початкову умову

$C_1 = 2\left(C_1 - \frac{C_2^2}{4}\right)$ або $2\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2^2$.

$$2(\mathrm{u} - 2\mathrm{y}) = \left(2\sqrt{\mathrm{u} - \mathrm{x} - \mathrm{y}} + \mathrm{y}\right)^2.$$

Приклад .

Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$2\mathrm{xz}\frac{\partial z}{\partial x} + 2\mathrm{yz}\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{z}^2 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2,$$

яка перетинає криву

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}.$$

Тоді симетрична система матиме вигляд

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - y^2 - z^2}.$$

Запишемо інтегровану комбінацію

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{z(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dx}{2xz} \text{ або } \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dx}{x}.$$

З цього

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2.$$

Виключимо тепер x, y, z з рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = C_1, \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2, \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

З другого і четвертого рівнянь отримаємо $\frac{a^2}{y} = C_2$, тому, $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{C}_2}$.

Маємо з першого рівняння $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}^2\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}$. З третього отримаємо $\mathrm{z} = -\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{C}_2}(\mathrm{C}_1 + 1)$.

Тепер ми можемо знайти залежність , використовуючи друге рівняння

$$\frac{a^4 C_1^2}{C_2^2} + \frac{a^4}{C_2^2} + \frac{a^4}{C_2^2}(C_1 + 1)^2 = a^2.$$

Тому,

$$a^2 C_1^2 + a^2 + a^2 (C_1 + 1)^2 = C_2^2,$$

$2a^2(C_1^2 + C_1 + 1) = C_2^2,$

Підставляючи відповідні їм виразами з перших інтегралів, отримуємо рівняння шуканої поверхні

$$2a^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{y^2}$$

або

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy).$$

Загальні рекомендації щодо розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку

На першому етапі ми обираємо метод розв'язання задачі. Як правило, зручніше використовувати різницевий метод, який в потребує більш простої підготовки задачі до розв'язання, проте у деяких випадках для задач з добре розробленою теорією доцільно звернутися до методу скінченних елементів.

Під час визначення кроку розв'язання задачі основним фактором є точність. Але необхідно взяти до уваги, що похибка різницевих методів має другий порядок. Її оцінку можна здійснити аналогічно звичайним диференціальним рівнянням за методом Рунге.

У разі симетрії в області розв'язання необхідно число вузлів зменшити у два або навіть і в чотири рази. Це дозволить зекономити час та обсягу обчислень.

Важливу роль у ефективності розв'язання задачі видіграє вибір початкових наближень. Під час застосування ітераційних методів цей вибір значною мірою впливає на швидкість збігання. Часто доцільно розв'язувати задачу поетапно: на першому за допомогою грубої сітки (або розбиття на крупні елементи) отримується якісне початкове наближення, далі на наступних - шукають більш точніший розв'язок на дрібній сітці. [20]

РОЗДІЛ 3 . ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

3.1.Використання в моделювані фізичних процесів

Диференціальні рівняннями з частинними похідними першого порядку описує багато різних фізичних процесів у областях, таких як механіка суцільних середовищ, термодинаміка, квантова механіка, теорія пружності і багато іншого. Отже розділ математики, який досліджує можливість розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними називається ***математичною фізикою***, а рівняння – ***рівняннями математичної фізики*** [17].

Прикро, що більшість таких рівнянь не мають аналітичного розв'язку, тому для їх розв'язання, необхідно вдаватися до чисельних методів. Для розв'язання звичайні рівнянь існує багато різних методів , проте для розв'язання рівнянь із частинними похідними вибір обмежується в основному між методом кінцевих різниць і методом кінцевих елементів [17]. Розглянемо питання про чисельне інтегрування рівнянь із частинними похідними, які аналізуються з точки зору застосування цих методів для розв'язання різних технічних завдань.

Метод кінцевих різниць для розв'язання рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Основою розв'язку рівнянь з частинними похідними методом кінцевих різниць є, – різницева апроксимація похідних, яка більш нагадує апроксимацію похідних. Розв'язання виконується в три етапи. Спочатку в даній області розв'язку вводять рівномірну сітку "вузлових точок", яка відповідає специфіці задачі і граничним умовам. Потім отримане рівняння з частинними похідними записують у найбільш зручній системі координат і, подають похідні в кінцеворізницевій формі, що приводить його до виду різницевого рівняння. Отримане різницеве рівняння використовується надалі для опису функціональних зв'язків між сусідніми вузлами сітки. На останньому етапі отриману систему алгебраїчних рівнянь розв’язують за допомогою одного з чисельних методів. На перший погляд дана процедура, що складається з трьох етапів, може здатись простою , яка прямо встановлює розв'язок проте насправді це не є таке– широке розмаїття типів і розмірів сіток, видів рівнянь із частинними похідними, кінцево-різницевих апроксимацій даних рівнянь і методів розв’язання отриманих систем алгебраїчних рівнянь ставлять задачі чисельного розв’язання рівнянь із частинними похідними цікавим дослідженням. Побудова в області розв'язку сітки, що містить n вузлових точок. Конфігурація сітки повинна відповідати характеру задачі і її граничним умовам. Побудова в області розв'язку сітки, що містить n вузлових точок,в такому випадку конфігурація сітки повинна відповідати характеру задачі і граничним умовам.

Етапи чисельного розв’язку диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку методом кінцевих різниць доцільно розглянути три етапи рішення [17] :

Етап 1. Сітки, які використовуються при подачі диференціальних рівнянь з частинними похідними в кінцево-різницевій формі. Згадані раніше ДРЧП були записані в декартовій системі координат, про інколи зручніше користуватися іншими системами координат, які мають спеціальні геометричними властивостями та які враховують форму фізичного тіла. У більшості випадків інженерної практики застосовується декартова, циліндрична та сферична системи координат. Інколи необхідно мати справу з областями неправильної форми [17] .

Розглянемо прикладів рівнянь першого порядку з частинними похідними.

В описі поведінки великого ансамблю частинок, прикладом може бути електронний газ в твердому тілі, використовують статистичні методи.

Статистичний розгляд пов'язано з введенням функції розподілу $f(t, r, v)$, яка має щільної ймовірності того, що довільна частка в момент часу t і в точці простору, яка характеризується радіус вектором r має швидкість v .

Для системи однотипних частинок, що розташовані настільки рідко, і які практично не зіштовхуються одна з одною, визначною властивістю функції розподілу f є її сталість уздовж траєкторії руху довільної частинки, тоді вона є інтегралом руху:

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Якщо розглядати f як функцію часу, координат і швидкостей , тоді рівняння (3.4) набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0,$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} v + \frac{\partial f}{\partial v} F = 0, \qquad (3.1)$$

де F — сила, що діє на частинку, m — маса частинки.

Рівняння (3.1) називають ***рівнянням Власова*** [17].

Якщо знехтувати зіткненнями частинок не можна, то

$$\frac{df}{dt} = S(f),$$

де $S(f)$ — інтеграл зіткнень. Тоді рівняння (3.5) необхідно замінити рівнянням:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = S(f), \qquad (3.2)$$

яке називають ***кінетичним рівнянням Больцмана*** [17].

В більшості кінетичне рівняння Больцмана розв'язують в наближенні часу релаксації. У цьому випадку приймають, що інтеграл зіткнень дорівнює:

$$S(f) = \frac{f - f_0}{\tau}, \qquad (3.3)$$

де f_0 — функція розподілу у рівновазі, τ — час релаксації, що залежить від механізмів розсіювання.

Тоді кінетичне рівняння Больцмана матиме вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{f - f_0}{\tau}. \qquad (3.4)$$

На прикладі розглянемо середовище, в якому протікає струм, і виділимо в ній замкнену поверхню S (Рис.6). Для струму i, що виходить в одиницю часу з об'єму V, який обмежено поверхнею S, маємо

$$i = \oint j \cdot ds, \qquad (3.5)$$

де j — вектор щільності струму, $ds = ds \cdot n, ds$— площа елементарної поверхні, n — вектор нормалі до поверхні, направлений назовні.

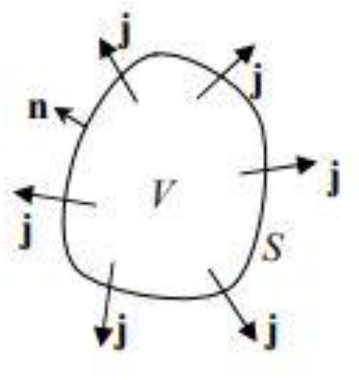

Рис.6. Струм, що тече через замкнену поверхню S, яка обмежує об'єм V.

В силі закону збереження заряду ця величина повинна дорівнювати швидкості убування заряду q, що міститься в даному об'ємі:

$$\oint_S j \cdot ds = -\frac{dq}{dt}. \qquad (3.6)$$

Співвідношення називають рівнянням неперервності в інтегральній формі. З огляду маємо, що заряд у об'ємі може бути знайдено як

$$q = \int_V \rho dv,$$

де ρ — об'ємна щільність заряду, отримаємо:

$$\oint_S j \cdot ds = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dv.$$

Перетворивши ліву частину рівності за теоремою Остроградського-Гаусса, знайдемо:

$$\oint_S j \cdot ds = \int_V div\, j dv = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dv$$

Тоді в кожній точці простору виконується умова

$$div\, j = -\frac{d\rho}{dt},$$

яка є диференціальною формою рівняння неперервності, а з математичної точки зору є рівнянням з частинними похідними першого порядку.

3.2. Використання в інженерії

В інженерії дуже виникає необхідність стикатися з задачами, у яких невідома величина залежить від декількох змінних. У даному випадку розв’язування рівняння має частинні похідні і називаються **рівняннями з частинними похідними** [17].

Основою розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними методом кінцевих різниць є природним, – різницева апроксимація похідних, шо багатьох аспектах нагадує апроксимацію похідних, присвячена розв'язанню крайової задачі для звичайних рівнянь з частинними похідними. Відшукання розв’язків здійснюється в три етапи . На першому етапі в області розв'язку вводять рівномірну сітку "вузлових точок", що відповідає характеру задачі.

Після того дане розв'язуване рівняння з частинними похідними записують у більш зручній системі координат і, показавши похідні в кінцеворізницевій формі, надають виду різницевого рівняння. Здобуте різницеве рівняння використовують далі у описі функціонального зв'язку між сусідніми вузлами сітки. Різницеве рівняння записують для всіх вузлів сітки і в результаті отримують систему n алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Останній етап- це отримання системи алгебраїчних рівнянь,які розв'язують одним із чисельних методів.

Етапи чисельного розв'язання рівнянь із частинними похідними методом кінцевих різниць

Розглянемо три етапи чисельного рішення докладніше.

Етап 1. Сітки, що використовуються при надані диференціальних рівнянь з частинними похідними в кінцево-різницевій формі. Зазначені раніше рівняння з частинними похідними були записані в декартовій системі координат, однак інколи зручніше користуватися іншими системами координат, що мають спеціальні геометричні властивості і враховують форму фізичного тіла [16]. Частіше всього в інженерній практиці використовується декартова, циліндрична та сферична системи координат. На рисунках побачимо показані сітки, які здебільшого використовуються при розв'язанні рівнянь з частинними похідними – прямокутна, полярна, трикутна та скошена [17]. Нерідко необхідно мати справу в областях неправильної форми, наприклад, такими, як зображено на рис. 7.

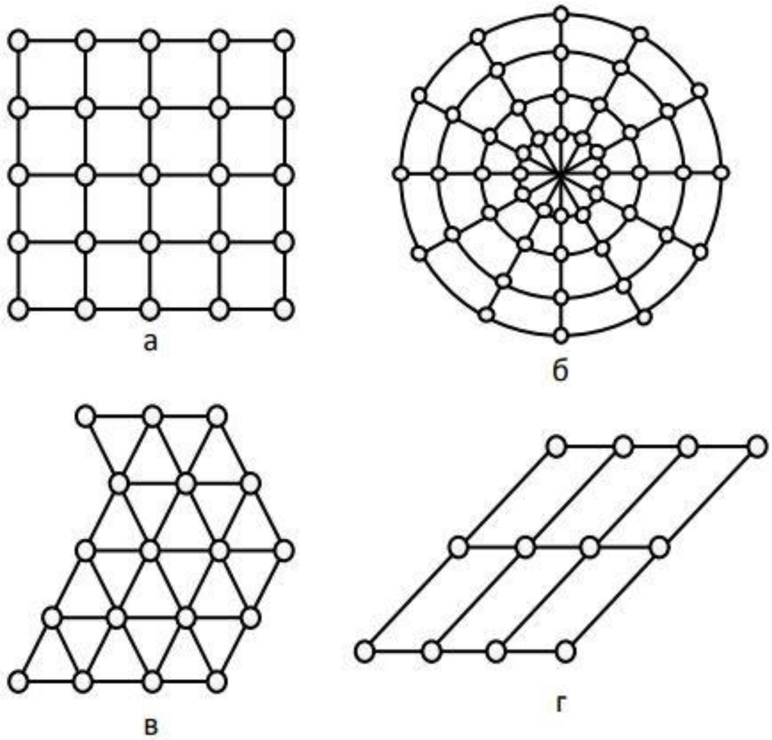

Рис. 7. Найчастіше використовуючі види сітокк при чисельному розв'язанні диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку: а – прямокутна, б – полярна, в – трикутна, г – скошена.

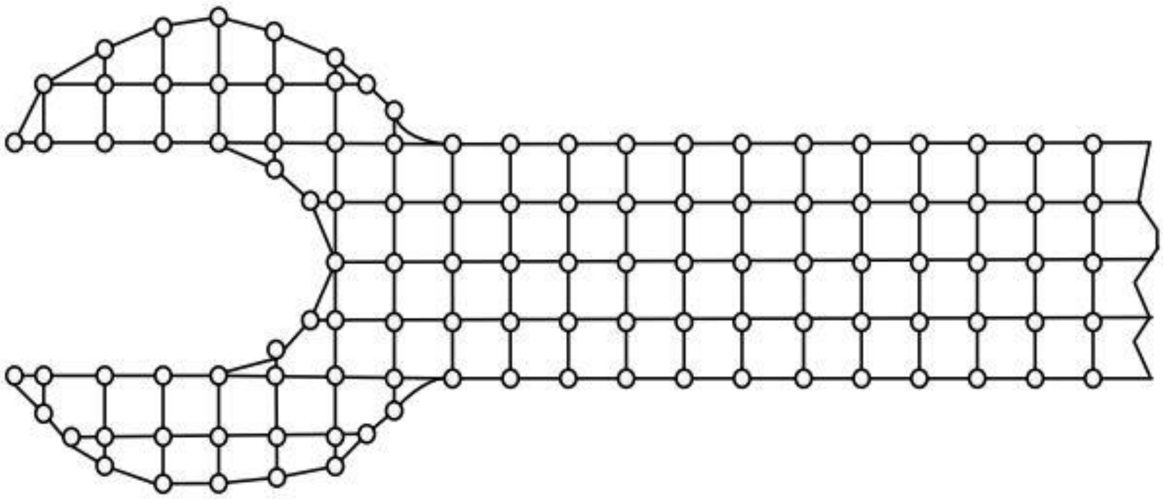

Рис.8 . Приклад задачі з границею складної форми конфігурації.

Етап 2. Подавання частинних похідних у кінцево-різницевому вигляді.

Для представлення частинних похідних у кінцево-різницевому вигляді використовують формули, подібні формулам чисельного диференціювання

[16]. Вони переписуються у випадку декількох змінних. Для двох змінних на практиці найчастіше застосовують симетричні формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}$$

де u_k, m – це значення функції $u = u(x, y)$ у вузлах,які розташовані в околі центральної точки , та відповідає значенням ui, j [17].

Етап 3. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь на останьому етапі методу кінцевих різниць використовують чисельні методи. Зазвичай матриці такої системи є розрідженними, оскільки в більшій частині розрахункових схем використовуються тільки сусідні вузли, а не всі вузли сітки [16].

Метод кінцевих елементів для рівнянь із частинними похідними

Метод кінцевих елементів для опису навколишнього середовища був застосований в середені 50-х років XX століття. Він широко використовується в гідродинаміці, при розрахунку складних напружених станів та в інших областях науки . Хоча метод кінцевих елементів застосовується для розв'язання однакових задач, що і метод кінцевих різниць, але вони на різних ідеях. В методі кінцевих різниць застосовується різницева апроксімація похідних, що входить до диференціальних рівнянь з частинними похідними . В той самий час, у методі кінцевих елементів фізична задача трансформується кусочно-гладкою моделлю, тоді наближено так це робиться при інтерполяції функції сплайнами тільки в об'ємному вигляді [5].

Наведено в таблиці основні етапи застосування методу кінцевих елементів [17]:

1.	Розділення тіла на елементи;
2.	Вибір схеми інтерполяції переміщень в середині елементів;
3.	Визначення залежності між напругою і деформацією у вузлах;
4.	Виведення рівнянь для системи в цілому;
5.	Розв'язання системи лінійних рівнянь;
6.	Обчислення значень інших величин.

Табл.1

Етапи чисельного розв'язання задач методом кінцевих елементів

Перший етап включає розподіл тіла на менші елементи простої форми, що стикаються в точках і називають їх ***вузлами***. Вибір схеми інтерполяції переміщень у середині можна здійснити багатьма різними способами, через те, що вибір розмірів, форми й орієнтації елементів визначається уявленнями інженера, щоб простіше розв'язати цю задачу. Елементи плоского тіла мають в більшості трикутну або чотирикутну форму, а елементи тривимірних тіл – форму тетраедрів або гексаедрів. Ці ділянки тіла, для яких з фізичних причин потрібно отримати більш детальну інформацію, які розбиваються на більшу кількість дрібних елементів. Якщо фізичні властивості тіла змінюються в точці або впродовж лінії, то можна змінювати його форму, розміри, а також орієнтацію елементів на цій ділянці тіла [17].

Другий етап застосування методу скінченних елементів заключається у виборі будь-якої простої схеми інтерполяції, яка дає змогу виразити переміщення у будь-якій точці в межах елемента через його значення у вузлах. Як правило переміщення задається будь-яким простим поліномом. Проте у межах кожного елемента для інтерполяції значень переміщення застосовуються поліноми з коефіцієнтами, зумовленими в процесі розв'язання [17].

а

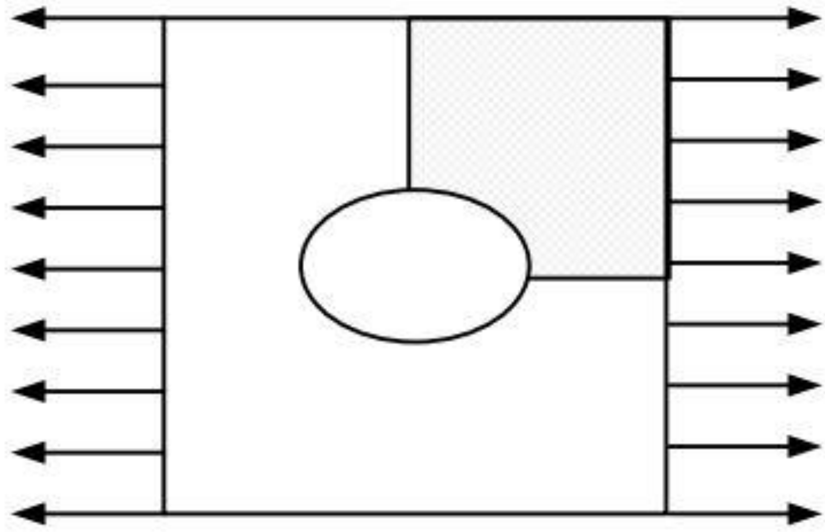

Рис.9

б

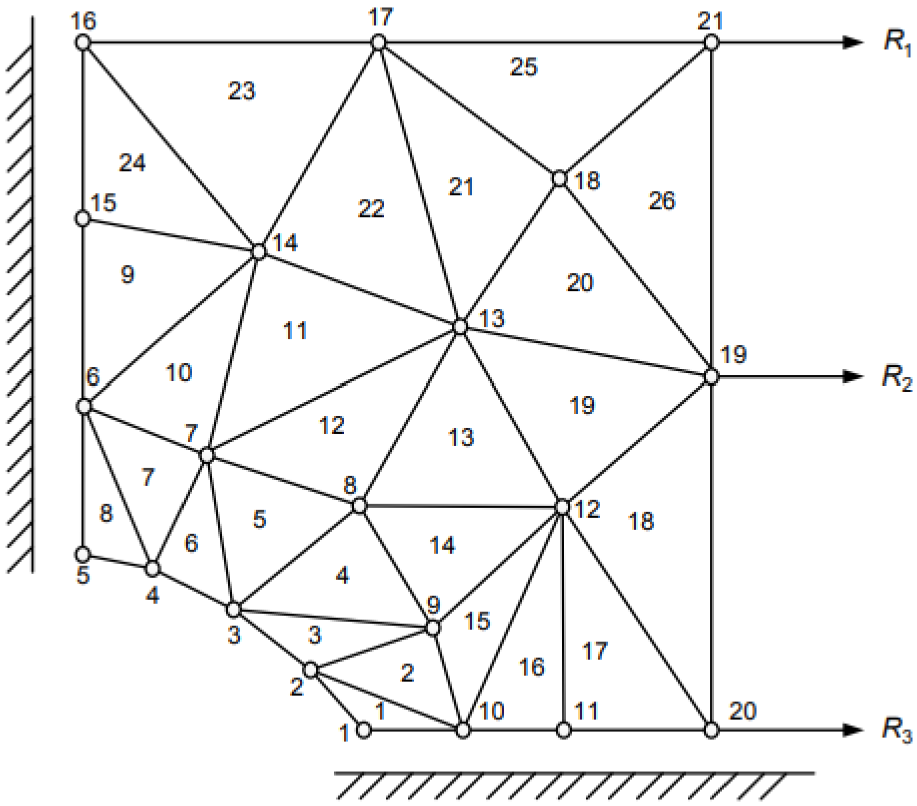

Рис.10. Розбиття рівномірно навантаженої квадратної пластинки

На третьому етапі розглядаються залежності між напруженнями і деформаціями в вузлах всіх елементів. На цьому етапі доцільно використати концепція матриць і коефіцієнтів впливу. Знаючи співвідношення між напругою і деформаціями елементів, побудуємо однакові співвідношення і для системи в цілому. Деформації дотичних елементів мають бути рівними, а сили, що діють у вузлах, повинні в сумі становити зовнішню силу, прикладену в тій же точці. Як наслідок отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$Ad = b,$$

де A – відома матриця жорсткості системи;

d – шуканий вектор переміщень системи;

b – відомий вектор навантаження.

Дана система рівнянь містить велику кількість нульових елементів, оскільки не кожен вузол належить кожному елементу. Відомі значення переміщень можна виключити із системи рівнянь, зменшуючи таким чином її порядок. Через те, що в даному випадку в обчисленнях виходить, що розріджена система лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, і для розв'язання зручніше застосовувати методом Гауса – Зейделя. У висновку отримують значення переміщень для всіх вузлів [17].

ВИСНОВКИ

Магістерська робота присвячена дослідженню диференціальних рівнянь з частиними похідними першого порядку та їх практичне застосування.

Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку відіграють важливу роль у багатьох галузях науки та техніки, оскільки вони дозволяють моделювати динамічні процеси.

В даній роботі наведені історичні відомості про ДРЧП першого порядку, основні поняття рівнянь та їх класифікацію, методи розв’язання , а саме загальний метод розв’язку та числовий метод, також описується застосування задач Коші в рівняннях ДРЧП . У третьому розділі описується практичне використання рівнянь з частинними похідними першого порядку у фізиці та інженерії.

Робота може бути корисна студентам математичних спеціальностей, а також вчителям математики для проведення занять в математичних гуртках та в підготовці учнів до математичної олімпіади. Учні опанувавши даний матеріал роботи зможуть ефективно використовувати її при розв’язуванні задач з математики та фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – Стор. 309-322.

2. Бугрій О.М., Бугрій Н.В. Диференніальні рівняння: Навчально-методичний посібник. -Львів. 2018.-40 с.

3. В.В. Сабчук, О.В. Чичурін. Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами ком'ютерної алгебри Mathematica. Київ, -2021.

4. ВИЩА МАТЕМАТИКА Розділ: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ : https://mph.kpi.ua/assets/img/books/ZF/2._Dovgai_V.V.__Melnik_A.F._Zvichaini_diferencialni_rivnjannja.pdf

5. Гончаров О. А. Чисельні методи розв'язання прикладних задач : навч. посіб. / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 142 с.

6. Диференціальні рівняння в частинних похідних.Ульшин П.І., Лов'янова І.В. Диференціальні рівняння в частинних похідних. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. / Під заг. ред. проф. В.В. Корольського — Кривий Ріг: КДПУ, 2007. – 142 с.

7. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння.– Київ ВПЦ Київський університет, 2010.-600 с.

8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ: https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/30075

9. Диференціальні рівняння першого порядку. [Електронний ресурс].https://mph.kpi.ua/assets/img/Kochaenko-O.B/Semestr-2-FBT/Teor-vidomosti-pryklady/Dif.riv._pershogo_porjadku.pdf

10. Диференціальні рівняння першого порядку. [Електронний ресурс]. https://mph.kpi.ua/assets/img/Kochaenko-O.B/Semestr-2-FBT/Teor-vidomosti-pryklady/Dif.riv._pershogo_porjadku.pdf

11. Диференціальні рівняння. Основні поняття: https://yukhym.com/uk/prikladi-diferentsialnikh-rivnyan/diferentsialni-rivnyannya-osnovni-ponyattya.html

12. Диференціальні рівняння. [Електронний ресурс]. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F

13. Завдання Коші для квазілінійного рівняння. [Електронний ресурс]. https://studfile.net/preview/9357651/page:6/

14. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння в частинних похідних першого порядку. [Електронний ресурс]. https://studfile.net/preview/9357651/page:6/

15. Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку. [Електронний ресурс]. https://studfile.net/preview/9357651/page:6/

16. МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. [Електронний ресурс].https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/36149/2/MSNTK_2021_Khudetskyi_N-Method_of_finite_differences_35-36.pdf

17.Методи математичної фізики. [Електронний ресурс]https://pns.hneu.edu.ua/pluginfile.php/293311/mod_resource/content/1/%D0%A2%D0%B5%D0%BC%D0%B0%2010.pdf

18.Методи розв'язування задач для рівнянь у частинних похідних. [Електронний ресурс].https://studfile.net/preview/9327448/

19. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. [Електронний ресурс] https://yukhym.com/uk/prikladi-diferentsialnikh-rivnyan/rivnyannya-v-povnikh-diferentsialakh-prikladi.html

20.ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ЕОМ. [Електронний ресурс].https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/14moskvina__komp_metod_dosl_analiz_danykh/lek9.htm

21.ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ. Київ КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2023. – 124с.

22.Диференціальні рівняння в частинних похідних . [Електронний ресурс]. https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/2502/1/2007_%D0%9C2_%D0%9B%D0%BE%D0%B2%27%D1%8F%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A3%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B8%D0%BD_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%A7%D0%9F.pdf

ДОДАТКИ

Розв'язування рівнянь з частинними похідними першого порядку засобами ком'ютерної алгебри Mathematica

Приклад. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних [3]

$$(x+2y)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

з двома незалежними змінними x та y.

Розв'язок

Диференціальне рівняння з частинними похідними розв'язується за допомогою функції Dsolve

```
Clear[x,y,pdeq,u,sol]
pde1=(x+2 y)∂xu[x,y]-y ∂yu[x,y]==0
sol1=DSolve[pde1,u[x,y],{x,y}] ⟦1,1⟧ /.{C[i_]→c[i]}//Simplify
```

$-yu^{(0,1)}[x,y] + (x+2y)u^{(1,0)}[x,y] == 0$

$u[x,y] \to c[1][\mathrm{Log}[y(x+y)]]$

Тут c [1] — довільна гладка функція. Результат одержується вигляді сіткової функції, в DSolve в другий параметр замість u [x,y] підставимо u.

```
sol=DSolve[pde1,u,{x,y}] ⟦1,1⟧ /.{C[i_]→c[i]}
```

$u \to \mathrm{Function}\left[\{x,y\},\ c[1]\left[\mathrm{Log}\left[\frac{1}{4}(4xy+4y^2)\right]\right]\right]$

Приклад . Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних [3]

$$\partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = \frac{a}{xy}, \qquad a = const.$$

Розв'язок. Диференціальне рівняння з частинними похідними розв'язується за допомогою функції *DSolve*. Означимо команду для заміни виразу C [i] на c_i .

```
coeff[X_]:={X[i_]→ToExpression[ToLowerCase[ToString[X]]]ᵢ}
pde2=∂ₓu[x,y] + ∂ᵧu[x,y] == a/(xy)
sol2=DSolve[pde2,u[x,y],{x, y}] ⟦1,1⟧ /.coeff[C]//Simplify
```

$u^{(0,1)}[x,y] + u^{(1,0)}[x,y] == \frac{a}{xy}$

$u[x,y] \to \frac{a(-\text{Log}[x]+\text{Log}[y])}{x-y} + c_1[-x+y]$

Результат отримуємо у вигляді так званої чистої (анонімної) функції, якщо другий параметр $u[x,y]$підставимо u у *DSolve*.

```
DSolve[pde2,u,{x,y}] ⟦1,1⟧ /.coeff[C]
```

$u \to \text{Function}\left[\{x,y\}, \frac{-a\text{Log}[x]+a\,\text{Log}[y]+xc_1[-x+y]-yc_1[-x+y]}{x-y}\right]$

Приклад . Знайти загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$x\partial_x w(x,y,z) + y\partial_y w(x,y,z) + z\partial_z w(x,y,z) - xyz = 0$$

Розв’язок. Це лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними 1-го порядку з трьома незалежними змінними, для якого є загальний розв’язок в замкнутій формі

```
pde3= x∂ₓw(x,y,z) + y∂ᵧw(x,y,z) + z∂zw(x,y,z) == xyz
sol3=DSolve[pde3,w[x,y,z],{x,y,z}] ⟦1,1⟧ /.coeff[C]//Simplify
```

$zw^{(0,0,1)}[x,y,z] + yw^{(0,1,0)}[x,y,z] + xw^{(1,0,0)}[x,y,z] == xyz$

$w[x,y,z] \to \frac{xyz}{3} + c_1\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right]$

Розглянемо приклад інтегрування квазілінійного рівняння в частинних похідних.

Приклад . Знайти загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$x^2\left(\partial_x u(x,y) - \partial_y u(x,y)\right) - (u(x,y) - x - y)^2 = 0$$

Розв'язок. Це квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку, яке квазілінійне по одній залежній змінній і двом незалежним змінних $\{x, y\}$.

```
pde4= x^2 (∂_x u(x,y) − ∂_y u(x,y)) − (u(x,y) − x − y)^2 == 0
sol4=DSolve[pde4,u[x,y],{x,y}] [[1,1]] /.coeff[C]//Simplify
```

$$u[x,y] \to x + y + \frac{x}{1 - x c_1[x+y]}$$

Функція $c_1[x + y]$ в розв'язку є довільною функцією від $(x + y)$.

Приклад . Знайти загальний розв'язок нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\left(\partial_x u(x,y)\right)^3 - \left(\partial_y u(x,y)\right)^2 = 0$$

Розв'язок. Це нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку типу Гамільтона–Якобі .

```
pde5= (∂_x u(x,y))^3 − (∂_y u(x,y))^2 == 0
```

$$-u^{(0,1)}[x,y]^2 + u^{(1,0)}[x,y]^3 == 0$$

Якщо загальний розв'язок недоступний, то функція DSolve замість цього намагається знайти повний інтеграл.

```
sol5=DSolve[pde5,u[x,y],{x,y}]//FullSimplify
```

$$\left\{\{u[x,y] \to C[1] + xC[2]^{2/3} + yC[2]\},\ \{u[x,y] \to C[1] - (-1)^{1/3} xC[2]^{2/3} + yC[2]\},\ \{u[x,y] \to C[1] + (-1)^{2/3} xC[2]^{2/3} + yC[2]\}\right\}$$

Тут C [1], C [2] – довільні сталі. З трьох можливих значень повного інтеграла вибрано перший розв'язок, тому, що він єдиний, який має дійсні коефіцієнти.

```
U=(u[x,y]/.sol5) [[1]]
```

$$C[1] + xC[2]^{2/3} + yC[2]$$

Це двопараметричний розв’язок вихідного рівняння pde5 і тому не може бути загальним розв’язком.