Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
магістра
на тему

Методика навчання учнів тотожних перетворень тригонометричних виразів

Виконала: студентка 2 курсу магістратури, спеціальності 014 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання Марія Петрівна Коханевич

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Олександр Васильович Крайчук

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри Інформаційних систем і обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені Степана Дем'янчука Юрій Георгійович Лотюк

Рівне – 2024 року

Зміст

Вступ

У сучасному світі з розвитком технологій пов'язаних зі штучним інтелектом, воєнними діями на території України, активної співпраці України з країнами Європи (намагання удосконалити українську систему освіти), виникає багато запитань не тільки в учнів, а й в батьків щодо необхідності вивчення окремих тем з математики та й інших дисциплін.

Педагогам на даний момент потрібно не просто «викласти матеріал», а й надати мотивацію учням – обгрунтовуючи актуальність даних тем у майбутньому світі.

У концепції загальної середньої освіти також відбулися зміни, основа яких була відображена в меті концепції. Отож, метою середньої освіти є: різнобічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка усвідомлює себе громадянином України, здатна до життя в суспільстві і цивілізованої взаємодії з природою, прагне до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, трудової діяльності та громадянської активності, має сформовані моральні цінності.

На основі цієї мети базується і мета, функції шкільної математичної освіти, яка зобов'язує підготувати учнів до повноцінної життєдіяльності в суспільстві з високим рівнем розвитку, технологій, що вимагають високого рівня математичних знань, навичок, умінь та неперервного удосконалення протягом життя.

Протиріччя між думками учасників освітнього процесу й інколи його неструктурованість у висновку спричиняють велику кількість учнів з досить низьким рівнем математичної підготовки (особливо в класах з поглибленим вивченням інших дисциплін або ж через некомпетентного вчителя).

Ще важливу роль грає освітня програма, яка містить досить непрості теми для освоєння, однією з таких є тотожні перетворення тригонометричних виразів (на них часто жаліються учні). При викладанні даної теми виникають три основні проблеми - мотивація учнів, недостатність часу для пояснення даної теми, ну і звісно навчальні матеріали адаптовані під психологічний портрет учня.

Вивченням даних тотожних перетворень тригонометричних виразів займалося досить мало математиків, але можна відзначити, таких як: Я.Й.Айзенштат, Б.Г.Білоцерківська, С.І.Новосёлов, З.І.Слепкань, Г.П.Бевз, Істер та інші.

Враховуючи те, що математика є обов’язковою дисципліною при складанні НМТ/ЗНО, важливою в медичній, військовій, ІТ, економічній будівельній та інших сферах, які зараз надзвичайно актуальні не тільки в Україні, а й у світі.

Нам потрібна сильна і незламна Україна, яка в майбутньому ставатиме все кращою, а це можливо тільки за допомогою якісної освіти для наших дітей, ну звісно наших зусиль.

Актуальність дослідження зумовлена тим що: відомі способи навчання учнів виконання тотожних перетворень тригонометричних виразів не приносять успіху, існуюча методика недостатня, про що свідчать результати НМТ/ЗНО.

Тому нами було обрано саме цю тему для написання магістерської роботи.

Мета дослідження - розробити методику вивчення тотожних перетворень тригонометричних виразів, перевірити її ефективність.

Об’єкт дослідження – процес навчання тотожних перетворень тригонометричних виразів.

Предмет дослідження – методика вивчення тотожних перетворень тригонометричних виразів.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація навчально-виховного процесу в основній школі при вивченні тотожних перетворень тригонометричних виразів на основі розробки системи самостійних робіт та наочних прикладів різних сфер забезпечить покращення вмінь та навичок, сприятиме розвитку особистості, формування стійкого інтересу до предмету.

Об'єкт, мета і предмет дослідження дозволили сформулювати **основні завдання:**

1. Проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з теми дослідження; розкрити поняття «методична система», «тотожні перетворення виразів».

2. Систематизувати матеріал по прийомах та методах тотожних перетворень тригонометричних виразів з курсу геометрії і алгебри та початків аналізу в основній школі.

3. Провести експериментальне дослідження

4. Розробити методичні рекомендації по навчанню учнів тотожних перетворень тригонометричних виразів.

Магістерська робота складається з вступу, трьох розділів , висновку та списку використаних джерел.

У першому розділі розглядається історія розвитку тригонометрії, психолого-педагогічні умови навчання учнів тотожних перетворень тригонометричних виразів; вивчення запобігання математичних помилок при тотожних перетвореннях тригонометричних виразів.

У другому розділі розглядається методика навчання учнів тригонометричних перетворень в основній школі; між предметні зв'язки, аналіз шкільних підручників та програм з алгебри та геометрії; педагогічний експеримент; розробка самостійних робіт.

Третій розділ – рівнева диференціація в академічному рівні навчання, де розглядаються види диференціації, її зв'язок з іншими науками.

Методологічною основою дослідження стали підручники для студентів математичної спеціальності по методиці викладання математики, психолого-методичні, педагогічні посібники, дидактичний матеріал, збірники задач на вправ, освітні сайти, програми для загальноосвітніх закладів України та інших країн, науково-методичні журнали.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому що дані висновки, приклади використання технологій штучного інтелекту, наочне використання теоретичних знань на практиці, система самостійних робіт допоможуть вчителям організувати цікавий навчальний процес в сфері вивчення тригонометричних виразів в результаті чого зможуть отримати якісні знання учнів та мотивацію для подальшого освоєння нового матеріалу з математики.

Апробація. Результати роботи були представлення на звітній науково-практичній конференції науковців, співробітників та студентів РДГУ.

Розділ І Предмет і задачі дослідження

1.1 Історія розвитку тригонометрії

Тригонометрія є досить давнім розділом математики, адже вчені історики стверджують, що піраміди стародавнього Єгипту не могли бути побудовані без даних знань, також у Китаї та Вавилоні були знайдені папіруси з тригонометричними обчисленнями.

Засновниками ж тригонометрії вважають давніх греків у ІІІ ст. до н. е., але не як повноцінної науки, а як частини астрономії. Греки були зосереджені на розвитку астрономії (розрахунку відстані на основі космічних тіл та відстані між ними). Яскравими представниками епохи були: Евклід (теореми: «напроти найбільшого кута лежить найбільша сторона трикутника», «сума кутів трикутника 180 градусів», «нерівність трикутника») та Архімед (теорема ділення хорд, яка по суті еквівалентна формулі синуса половинного кута), Аристарх Саморський (теорема співвідношення сторін трикутнка при відомих градусних мірах трикутника) які вивчали співвідношення між хордами та кутами, вписаними в коло, і довели геометрично ряд теорем, деякі з яких використовуються і сьогодні.

Ще один відомий грецький учений Птолемей у ІІ ст. н.е. в своїй роботі «Алмагест» («Велика книга») вивів співвідношення в крузі, які за своєю суттю аналогічні сучасним формулам синуса половинного і подвійного кутів, синуса суми і різниці двох кутів.

Щодо інших країн Шумерські астрономи займалися вимірюванням кутів, використовуючи поділ круга на 360 градусів. Вони, а пізніше й вавилоняни та давні нубійці, вивчали відношення сторін подібних трикутників, і виявили деякі закономірності в цих відношеннях, однак не розвинули їх у систематичне вчення для знаходження сторін і кутів трикутників.

Поняття синуса в сучасному аспекті вперше було згадане у праці «Сур'ї Сіддханті» індійським математиком і астрономом Аріабхатою у V ст. н.е. Згодом середньовічні мусульманські математики переклали та допрацювали праці індійських та грецьких вчених і вже у X ст. застосовували всі нам відомі тригонометричні функції у сферичній геометрії.

Отож, поняття «синус» виникло від латинського *sinus* («перегин»), яке, у свою чергу, походить від арабського слова «брехлива» («тятива лука»), в свою чергу поняття «косинус» – скорочення словосполучення *complementi sinus* («синус доповнення»), що пояснює той факт, що *cosa* дорівнює синусу кута, доповнюючого кут *a* до *П/2*, тобто *cosa =sin(П/2-a)*, а от поняття тангенсу *tangens* переводиться як «дотична» («дотична до кола»).

Ідея введення тригонометричних понять за допомогою одиничного кола набула поширення в X-XI ст. в сферичній тригонометрії.

Виникають суперечки з приводу того, кого назвати засновником тригонометрії, хтось вважає, що першим був перський учений Ходжа Насіреддін у XIII ст. який згадав термін тригонометрії у своїй роботі «Про секторальну фігуру». Саме в цій праці він вивів теорему синусів для плоских і сферичних трикутників, винайшов теорему тангенсів для сферичних трикутників підтверджуючи їх доведенням.

Більшість вважають, що засновником був німецький математик Реґіомонтан (*І.Мюллер)* в 1462-1464 рр. у науковій праці «De Triangulis» де він описав тригонометрію, як самостійну науку.

Після праці Реґіомонтана у Західній Європі почався інтенсивний розвиток тригонометрії. Над розвитком цієї науки працювати такі науковці, як Н.Коперник у 1543 році присвятив тригонометрії два розділи праці «О зверненні небесних тіл», І.Кеплер (1571-1630), Й.Бюрги (1552-1632), Ф.Вієта (1540-1603) й інші відомі математики. В їхніх працях зустрічаються складні перетворення тригонометричних виразів і виводяться багато формул, які використовуються до сьогодні. Досить цікавими є формули Вієта, такі як: формули кратних кутів (1,2) та спосіб вирішення кубічного рівняння для найскладнішого в той період — незвідного випадку (нескінченного добутку) (3).

Цікаві, наприклад, рекурентні формули, отримані Ф.Вієтом:

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \ldots$$

$$\sin m\alpha = m \cos^{m-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \ldots$$

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{4} \cdot \cos \frac{90^\circ}{8} \ldots$$

Але поняття тригонометрії вперше вжив німецький математик Бартоломей Пітиск, опублікувавши свою працю «Тригонометрію» в 1595 році.

Тригонометрія (із давньогрецької τρίγωνον – «трикутник», і μέτρον – «міра») – розділ елементарної математики, що вивчає співвідношення між довжинами сторін і кутами трикутників.

Допрацювали і розвинули тригонометрію інші відомі вчені, це помітно навіть у понятті:

Тригономе́трія — розділ елементарної математики, що лежить на перетині алгебри та геометрії і вивчає співвідношення між сторонами й кутами трикутників, дозволяючи проводити кутові обчислення через спеціально визначені функції кутів.

Сучасна тригонометрія нам відома завдяки Леонарду Ейлеру, який зробив багато відкриттів, найвідоміші з них: обернені функції, розглянув поняття тригонометричних функцій, як безрозмірних та аналітичних, встановив зв'язок між тригонометричними і показниковими функціями, поняття комплексних чисел і т.д.

XIX століття розвинула тригонометрію у неймовірних масштабах, прикладом є додання до сферичної та плаской тригонометрії гіперболічної-вченими Бояй та Лобачевським. В ній було показано, що формули сферичної тригонометрії переходять у формули гіперболічної тригонометрії при заміні довжин сторін трикутника a, b, c на уявні величини: ai, bi, ci — чи, що еквівалентно, при заміні тригонометричних функцій на відповідні гіперболічні[8].

У XIX—XX століттях стрімкого розвитку набули теорія тригонометричних рядів і пов'язані з нею області математики: гармонічний аналіз, теорія випадкових процесів, кодування аудіо і відеоінформації та інші. Ще Даниїл Бернуллі висловив думку, що будь-яку (неперервну) функцію на заданому проміжку можна представити тригонометричним рядом[9]. Дискусії тривали до 1807 року, коли Фур'є опублікував теорію представлення довільних шматково-аналітичних функцій тригонометричними рядами.

Зараз тригонометрія також розвивається і вирішує інші проблеми людства, відкриваючи не просто нові шляхи вирішення, а й нові світи.

Так, зараз вчені використовують тригонометрію у досить незвичних для нас сферах: у медицині (для обробки рентгенівських знімків), у комп’ютерній графіці та анімації (3D, анімація, ігри, веб-дизайн сторінок, інтер’єру), економіка, фінанси, маркетинг (аналіз даних, трендів), геодезія, ну і звісно фізика, список можна продовжувати.

1.2 Психолого-педагогічні умови навчання учнів тотожних тригонометричних перетворень

Всі ми маємо, якісь мрії поставивши часові межі яким, ми отримаємо цілі, які ми можемо досягнувши приклавши необхідні зусилля, говорячи не тільки про математику, а й про всі життєві сфери.

Зрозуміло, що цього потрібно навчати дітей і це можна зробити за допомогою тотожних перетворень, які впливають підсвідомо на розум та психіку дітей. Так, під тотожними перетвореннями ми розуміємо алгебраїчну рівність в якої ліва і права частина рівні, але за умови спрощення або ж виконання інших математичних операцій.

Якщо пояснювати простими словами, ми маємо результат в одній частині, за допомогою перетворень іншої (беремо теперішнє і діями робимо результат) отримаємо рівність.

Тотожні тригонометричні перетворення є складнішими за прості тотожності, але вони необхідні для розвитку учнів старших класів, підтвердженням цього є їх наявність у системі вищої освіти не тільки України, а й інших країн світу (атестація знань не є винятком, тригонометричні тотожності є невід'ємною частиною НМТ/ЗНО, вступних іспитів у іноземних вузах). Тому, їх потрібно вміти розв'язувати учням.

Варто також зауважити, що тригонометричні тотожності можливо розв'язати лише знайшовши потрібний метод перетворення виразу, інколи це потребує часу, ну і звісно хороших знань щодо методів розв'язування тотожностей та тригонометричних функцій. Отож, успіх можливий лише за умови хорошого знання методів розв'язування тотожних перетворень і уміння правильно проводити математичні розрахунки, що виробляється тільки достатньою практикою і власним досвідом (дисципліною).

Так, як і в житті деякі тригонометричні тотожності мають декілька способів розв'язання, залежно від того, на якій ідеї воно будується, як перетворяться тотожні вирази. Ви обираєте спосіб і чим він простіший, тим і кращий.

Щодо шкільної програми, то тригонометричним тотожностям виділене місце особливо у програмі з поглибленим вивченням математики. Школярі та абітурєнти досить вправні при розв'язуванні тригонометричних тотожностей, але бувають і помилки, багато школярів не доводить справу (розв'язок до кінця) залишаючи бажаний результат не отриманим. Тому, варто їм допомогти проаналізувати отримані помилки або/та ж навести приклади схожих тригонометричних тотожностей і не забути показати різні способи розв'язування тригонометричних тотожностей.

Не забуваємо і про психологічну складову тотожностей (описано вище), також і про мотивування учнів прикладами з життя. Якщо ж говорити про завдання з результатом з боку психології варто донести учням, що не розв'язок певної тригонометричної тотожності не говорить про його не можливість досягти результату в інших дисциплінах, а також показати, що цілеспрямованість і дисциплінованість дає все що захочеш (в межах реального світу, хоча, якщо припускати про навність альтернативних реальностей, все можливе у всесвіті).

До функцій математичних завдань належать: навчальна, розвивальна, виховна і контролююча.

Навчальна функція полягає у формуванні в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах її засвоєння. В процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення у школярів, на формування у них прийомів ефективної розумової діяльності, алгоритмічного мислення.

Виховну функцію задач спрямовано на формування в учнів наукового світогляду, вона розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю та ін.).

Контролююча функція задач направлена на встановлення навчeності, рівня загального і математичного розвитку, можливості до самостійного навчання математики[17].

Всі функції мають бути присутні в навчальній програмі, ніяка не може бути проігнорована, але враховуючи те, що в одному завданні можна обрати одну провідну фінкцію, то потрібно давати різнопланові завдання.

Нині у дослідженнях психологи, дидакти і методисти переконливо показали, що вміння школярів розв'язувати задачі прямо не залежить від кількості розв'язаних задач. Якщо, навіть, учень розв'язав багато задач, але в нього не сформований загальний підхід до задачі, аналізу її, пошуку плану розв'язування, самостійно розв'язувати задачі він не зможе. Отже однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є навчання учнів методів і способів розв'язування задач, самостійного пошуку розв'язку задач [30].

Найважливішим завданням навчання математики в школі є навчання учнів математичних методів. У методиці математики методом розв’язування задач називають сукупність прийомів розумової діяльності, або логічних математичних дій та операцій,за допомогою яких розв’язується великий клас задач. Поняття «спосіб розв’язування задачі» вживається при розв’язуванні окремої задачі або невеликої сукупності задач певного виду[14].

Етапи розв’язання завдань складається з:

1) аналіз матеріалу (умови), визначення проблематики (питання) та вихідних даних;

2) пошук методів розв’язку;

3) виконання плану відповідно до методу розв’язання, перевірка і дослідження знайденого розв’язку;

4) перевірка на адекватність та правильність результату та загалом методу;

5) необов’язковий пункт (розв’язання не правильне) – пошук нового методу і повторення пунктів (2-4).

Звісно підхід до кожного завдання може бути інакшим, тому етапи є загальним алгоритмом. Також, як підхід до завдання та і підхід до унів має бути різним, так у шкільній програмі поглилених класів математики вивчається більша кількість матеріалу, розглядається більша кількість завдань, ну і звичайно більше часу виділяється на самостійне опрацювання матеріалу задля стимулювання подальшого розвитку учнів. Саме в цих класах основи прийняття життя та досягнення результатів лягає на математику, не просто, правда ж.

1.3 Аналіз математичних помилок при виконанні тотожних перетворень тригонометричних виразів

В попередньому пункті ми розглянули етапи розв’язування завдань тотожності не є винятком. Розв’язування тригонометричних тотожностей базується на перетвореннях, формулах та понятті основних тригонометричних функцій.

Після вивчення загальних характеристик тригонометричних функцій та їх перетворень, вивчення тотожностей розбивають на дві групи.

До першої групи відносять завдання, які нагадують що таке тотожність?, і розв'язують завдання навчального типу поєднавши матеріали декількох уроків.

До другої групи вправ належать завдання, які нагадують поняття та основні перетворення тригонометричних функцій, тут використовуються завдання різного формату із застосуванням попередньо вивченого матеріалу.

Дані групи допомагають виробити навички учнів, щодо розв'язування тотожностей та необхідних перетворень тригонометричних функцій.

На етапі поєднання цих груп завдань відбувається ускладнення і злиття, утворюючи тотожності різних видів складності та перетворень.

Вивчення тригонометричних тотожностей неможливе без повторення тотожних перетворень алгебраїчних виразів, яке поглиблюють з переходом учня з класу в клас. Завдання ж ускладнюються переплітанням ліній тотожних перетворень з числовими перетвореннями та перетвореннями тригонометричних функцій.

Починаючи з перших завдань учень здійснює прості та зрозумілі перетворення тотожностей, згодом поступово завдання починають ускладнюватися, тобто розв'язання потребує більшої кількості знань, часу та перетворень. На кожному кроці перетворень учень має вміти пояснити перетворення та підтвердити правильність виконання наявними знаннями.

Щодо тотожних перетворень тригонометричних виразів, то широко використовуються два методи: підстановки та заміни рівним.

Складності виконання виникають при застосуванні першого методу – способу підстановки, саме в ньому учні часто допускають помилки. Відповідно, спочатку (на початковому рівні) вчитель виправляє помилки з детальним поясненням застосування підстановки, згодом виправлення помилок відбувається учнем (з метою виховання і розвитку професійних умінь і навиків самоперевірки і самоконтролю), а в кінці вчитель закріплює навички правильного виконання перетворень системою виконання вправ. Як вже заначалося в другому пункті, виконання великої кількості різноманітних вправ не завжди забезпечує отримання бажаного результату у навчанні та розвитку учнів. Тому, варто використовувати різні види завдань, кожне з яких було б доцільним та забезпечило б підхід, який допомагає учням виробити навики застосування тригонометрії та отримати необхідну логічну культуру.

Психологічний аналіз математичних помилок школярів ставить своєю ціллю розкрити природу і пояснити причини появи тої чи іншої помилки. Вказувати шлях попередження та викоренення помилок враховуючи їх природу і причини є завданням дидактики математики, а психологічний аналіз типових математичних помилок здійснюється і з позиції асоціативно-рефлекторної теорії навчання у працях П.А. Байденко.

Здійснюючи психологічний та дидактичний аналіз математичних помилок, з'ясовують, які умови і причини забезпечують правильне виконання учнями навчальних завдань, які причини і фактори викликають або можуть викликати помилкове виконання.

При відсутності хоча би однієї умови або причин, забезпечують правильне виконання завдання, учні його або не виконують, або виконують з помилками. З точки зору асоціативно-рефлеторної теорії помилкові дії учнів можуть виникнути тільки в двох випадках: коли в учня активується вірний ланцюг асоціацій, але активується не повністю, відсутня якась ланка; коли в учня активується помилкова асоціація [59].

У першому випадку потрібно перевірити склад і міцність всіх ланок правильного ланцюга асоціацій, в іншому – виявити помилкову асоціацію, актуалізуватися в мисленні учня, вияснити природу і причину виявлення помилок, вказавши шлях її усунення і заміни правильної асоціації.

Аналіз найбільш поширених помилок учнів можна подивитися на сайтах різних журналів («Математика в школі»), курсів, приватних шкіл, освітніх платформ, а от ще плюс статистику успішності складення ЗНО/НМТ на сайті міністерства освіти. Крім того, на даних сайтах є відео де детально розбираються найбільш поширені помилки навіть по темах.

Дослідження, щодо математичних помилок учнів їх систематизації та причини виникнення досліджувалися з початком виникнення освіти. Відомі дослідники поділилися, щодо різних підходів:

- тематичний (навчальна тема, під час вивчення якої з'являються помилки – І. М. Кирилецький, А. В. Самусенко, О. А. Тарасова);
- причинний (причина виникнення помилки – В. О. Далінгер, С. І. Зенько, І. М. Кирилецький, Д. М. Майергойз);
- діяльнісний (вид навчально-пізнавальної діяльності, під час якої допускаються помилки – В. О. Колосова, З. І. Слєпкань, Г. Н. Скобєлєв).

Вивчення будь-якої дисципліни не можливе без помилок, а помилки потрібно аналізувати і з психологічного аспекту. Так, більшість вчених не зважаючи на відмінність у досліджуваних сферах (підходах), підтримують думку: що вирішення складного прикладу зводиться до послідовного вирішення ряду простих прикладів і розглянувши це з точки зору психологічного і педагогічного аналізу, потрібно давати учневі спочатку прості приклади (аналізуючи помилки і наводячи приклади застосування у житті) і поступово піднімаючи рівень складності, а також давати приклади з різними підходами вирішення і декількома способами розв'язку.

Досвідчені вчителі також дотримуються цієї думки складаючи конспекти уроків, адже розуміють що від них залежить формування міцних умінь і навиків вирішення різнопланових завдань. Так, хорошим способом є розбиття складної вправи на декілька простих кроків. Ще деякі автори книг з математики та науковці припускають, що вивчення математики не можливе також від інших аспектів.

Слєпкань пише, що: У підручниках та методичних розробках достатньо багато задач для творчого розвитку учнів, хоча при цьому вчителю варто і самому проявити свої творчі здібності та фантазії. Тригонометричні функції краще вводити, за допомогою конкретних прикладів, а не одразу з загальних означень. Під час вивчення учнями нових тверджень та формул, важливо їх не просто формулювати, а й доводити, оскільки це веде до більш ефективного засвоєння матеріалу. При цьому очевидно, що коли учні приймають активну участь у доведені тверджень, то у них розвивається критичне мислення та розумові здібності [22].

Бевз стверджує, що тригонометрія асоціюється з великим набором формул, що на перший погляд учням здаються зовсім не потрібними для життя. Щоб розвіяти це враження, потрібно обґрунтовувати різноманіття цих формул задачами на їх практичне застосування не тільки в математиці, а й в інших шкільних предметах та в різних видах практичної діяльності. Крім того, школярів слід навчити певним мнемонічним прийомам, які полегшують запам’ятовування цих формул. Наприклад, кожну з формул синуса суми кутів та синуса подвійного кута, не варто запам’ятовувати, оскільки другу з них, легко отримати з першої [10]. Тобто різні методи запам’ятовування матеріалів і пам’ятати, що всі формули між собою так чи інакше пов’язані.

На міжнародному конгресі психологів було помічено, що важливою причиною виникнення помилок являється придушення більш слабких (хоч і правильних) асоціацій, сильними і звичними асоціаціями, особливо асоціаціями за суміжністю [18]. Практика навчання математики свідчить про часте необгрунтоване перенесення учнями записаних раніше правил у зошит, не дає результату для розв’язання завдань по даних формулах, тому необхідними є завдання на доведення і пояснення інших завдань.

Важливими у допущенні помилок є і особистісні психічні функції (уваги, пам’яті, мислення), втома, нервозність, поспішність в роботі. Для усунення цих помилок учитель повинен забезпечити мотивацію вивчення матеріалу, удосконалювати форми і методи організації учнів.

Типові помилки допускаються школярами навіть при доброму поясненні учителя, при активації уваги на ці помилки. Це пов’язано в першу чергу з тим, що людська свідомість, як правило, об’єктивно не в стані охопити всі сторони явища. Але і допущену учнями помилку вчитель повинен використати для поглиблення розуміння школярами математичних фактів і закономірностей [53].

При тотожних перетвореннях виразів, які містять значення тригонометричних функцій, найчастіше допускаються такі помилки:

1) $\mathrm{t}g(x+y) = \mathrm{t}g\,x + \mathrm{t}g\,y$

2) $(\cos(x+y))^2 = (\cos x)^2 \cdot (\cos y)^2 - (\sin x)^2 \cdot (\sin y)^2$

3) $cos2x = 2cosx$

4) $\frac{\sin 4x}{4} = \sin x$

5) $sin\,5x + sin\,2x = sin\,7x$

У першому прикладі символ tg розуміють як множник, який необхідно внести в дужку, в другому – допускається помилка у формулі скороченого множення піднесення до квадрату двочлена, в третьому – коефіцієнт кута стає коефіцієнтом тригонометричної функції, в четвертому – неадекватне скорочення (схожа до третьої помилки), в останньому – sin виносять як множник за дужку і виконують дію додавання.

Всі помилки пов’язані з нерозуміння того, що тригонометричні функції вже означають знак операції, а не окрему змінну. Для уникнення цих помилок потрібно нагадувати учням, що таке тригонометричні функції і їх властивості, аргументуючи пояснення завдань. попередження таких помилок необхідно провести профілактичну роботу ще при вивченні теорії додавання і властивостей тригонометричних функцій. Тут корисними можуть виявитися прямі попередження типу: «Так робити не можна» з поясненням причини. Нарешті, у випадку цих помилок найбільш ефективним буде шлях їх усунення – обчислення лівої та правої частини рівності при заданих значеннях змінних.

Шляхи усунення помилок в загальному залежать від їх причини та кількості дітей, що їх допускають, так якщо помилки пов’язані з недоліками в засвоєнні фактичного матеріалу, то тут зазвичай допомагають додаткові пояснення, підкріплення матеріалу наочними прикладами, ну і звісно домашні завдання на закріплення матеріалу. Якщо ж це системні помилки, то ефективними і цікавими для дітей може бути застосування додаткових завдань з освітніх навчальних проблем або з цифрових тренажерів.

У випадку, якщо типові помилки допускають багато дітей у класі, то необхідно скоригувати тематичний план (виділення додаткових годин, повторне опрацювання незасвоєних розділів).

Коли причинами помилок дітей є психологічні та психічні стани це є найскладнішим, тут потрібна допомога батьків і психолога, якщо вчитель не може самостійно надати необхідну допомогу. Найчастіше виникають такі з них:

- Страх перед помилками. Часто трапляються в учнів молодших класів, адже психіка та самооцінка дитина формується із зовнішнього середовища (батьків, вчителів, інших дорослих, рідше дітей). Багато з них бояться зробити помилку, адже це не принесе бажаної винагороди (похвали, інколи відзнаки інтерпритуються як любов), тобто допущення помилки асоціюється з власною безпорадністю, нікому непотрібністю. Постійний страх помилки вбиває критичне, аналітичне та особливо творче мислення в дитини, згодом спричинить втрату інтересу до предмету, а можливо і до всього нового.

  Порада: підтримуйте дітей навіть якщо вони припускаються помилок, пояснюйте, що помилки є частиною навчання; заохочуйте дитину аналізувати помилки, шукати різні способи розв’язку завдань.
- Занижена самооцінка. Учні часто неодоцінюють свої знання, успіхи та на перше місце ставлять невдачі на перше місце ототожнюючи себе з ними. Дуже часто учні з низькою самооцінкою не починають завдання на високий рівень думаючи, що не зможуть його виконати. Також, вони самокритичні і піддаються негативному навіюванні, яке повністю може зруйнувати успішність людини.

Порада: частіше хваліть дітей, навіть за незначні успіхи, наводьте переконливі приклади зі свого життя (де допускалися помилки), а також приклади звершень дитини у будь-яких сферах.

- Тривожність і стрес. Під час війни, та й в різних життєвих ситуаціях діти відчувають тривожність, ці життєві ситуації можуть бути пов'язані зі стресом, джерелом якого може бути навіть перевірочна робота або ж відповідь перед класом. Цей стан дитини (інколи навіть переходить у шоковий стан) заважає раціонально мислити, згадувати вивчений матеріал й призводить до помилок, чарівного словосполучення «не знаю» або ж до відмови відповідати. Такий стан може передаватися від дорослих або бути пов'язаним з ними, також через високі вимоги до себе або від інших.

  Порада: потурбуйтеся про свій стабільний психологічний стан, а також атмосферу уроку в якій буде панувати підтримка і спокій, а також по можливості відволікайте учня іншими цікавими заняттями та розмовами.

- Відсутність мотивації. Ця проблема зустрічається найчастіше, особливо у вчителів математики, саме вона призводить до неуважності учня на уроці і невиконання завдань на уроці та вдома.

  Порада: наводьте приклади застосування теоретичного матеріалу на практиці, придумуйте цікаві завдання, створіть ситуацію де дитина зможе на практиці використати знання.

Помилки в навчанні є невіддільною частиною навчального процесу, якщо у Вас немає помилок, отже Ви нічого не робите. Розуміння причин помилок, їх аналіз та адекватна робота над ними допомагають дітям не лише здобувати знання, а й розвивати критичне мислення, впевненість в собі та здатність до самоконтролю.

Розділ II. Методична система навчання учнів тотожних перетворень тригонометричних виразів та застосування тригонометрії у різних галузях

2.1 Загальна характеристика методичної системи навчання учнів тотожних перетворень

Методична система будь-якого предмета складається з поєднання таких компонентів: цілі, змісту, методів та організаційних форм навчання. Поєднання різних видів та типів цих компонент дає змогу зробити навчання ефективним та цікавим для учнів, змінюючись відповідно до потреб та психологічних особливостей дітей. Так, поділ класів на профільні та з поглибленим вивченням тягне за собою різну методику викладання для кожного класу плюс різні програми, вимоги, а також становлення особистості з концентрацією уваги на певному способі мислення.

Відповідно цілі методичної системи змінюються за темою, рівнем знань учнів та психологічними особливостями учнів. Так, як темою магістерської роботи є тотожні перетворення тригонометричних виразів, було вирішено розглянути цілі на різних рівнях навчання.

На рівні стандарту учні засвоюють та вміють виконувати елементарні тотожні перетворення тригонометричних виразів. Учитель повинен навчити їх основних тригонометричних формул та методів розв’язування таких завдань. Рівень стандарту, можна сказати, є найнижчим рівнем навчання, тому навантажувати учнів не потрібно, але потрібно урахувати те, що тотожні перетворення тригонометричних виразів є у завданнях ЗНО/НМТ [8].

На наступному рівні (академічному) для вивчення даної теми відводиться більше годин, відповідно і вимагається більше. На цьому рівні від учнів вимагається не тільки знати, розуміти, виконувати тотожні перетворення тригонометричних виразів на рівні початкових знань, але й на більш складнішому, тому вчитель виділяє більше часу й уваги складнішим виразам та діям над ними.

Класи, які займаються профільним і рідше поглибленим вивченням математики вивчають цю тему на набагато вищому рівні. Вчитель підбирає завдання починаючи від найпростіших до найскладніших, поступово показуючи різні методи виконання тотожних перетворень тригонометричних виразів. Негативний досвід щодо переходу учнів з класів стандартного рівня вивчення математики до поглибленого рівня у 10 класі, показав, що діти не встигають освоїти такий величезний об'єм матеріалу, адже тригонометрія містить дуже багато формул, початок вивчення яких починається ще у 7-8 класі. Тому, було прийнято рішення ввести профільні класи та класи поглибленого вивчення з 7-8 класу поступово підвищуючи складність завдань.

Так, у профільних класах та класах з поглибленим вивченням математики вчителі дають багато матеріалу на самостійне опрацювання, особливо це стосується 10-11 класів, розвиваючи здатність учнів до самонавчання, інколи уроки проходять у вигляді лекцій з залученням інформаційно-комунікаційних технологій. Після опрацювання учнями матеріалу, вчитель задає класу уточнюючі запитання (це триває 10-15 хвилин у формі діалогу). Загалом традиційна лекційно-практична система виглядає, так: підготовчий урок, лекція, практичні заняття, семінари, контрольно-залікові уроки. Так, замість підготовчого уроку, що проводиться вчителем, вдаються до самостійного ознайомлення учнів з новою темою за підручником (у порядку підготовки до лекції). Після лекції проводяться уроки підготовки до семінару, після семінару — підготовка до контрольної роботи, після контрольної роботи і її аналізу — підготовка до заліку і, нарешті, залік. Таким чином, виучуваний матеріал перекомпоновується в межах розділу і багатократно повторюється, причому упорядкування знань здійснюється у безпосередньому зв'язку з вивченням нового матеріалу[16].

Повертаючись до питання про лекцію, вкажемо на деякі аспекти методичного характеру. Лекція у 10 класі повинна бути близькою до бесіди з класом. Під час лекції можна заслуховувати короткі повідомлення і коментарі, підготовлені самими учнями на основі вивчення додаткових джерел (наприклад, завдання на відшукання інформації про застосування теоретичного матеріалу на практиці, самими учнями).

Готуючи матеріал до лекції учителю варто звернути увагу на тип лекції (вступна, оглядова), рівень сприймання матеріалу учнями на минулих лекціях, виділити час на записування необхідних формул та понять, ну і звісно час на самостійне опрацювання матеріалу з книжки або додаткових матеріалів, час на бесіду і дискусію.

Інколи варто проводити лекції і для учнів, які вивчають програму за рівнем стандарту, яскравим прикладом є необхідність проведення вступної лекції до розділу «Тригонометричні вирази та їх перетворення».

Справа в тому, що відповідно до прийнятого порядку вивчення тригонометричного матеріалу в основній школі він розподіляється між курсами геометрії та алгебри та має різне цільове призначення, але одним з важливих завдань формування в учнів поняття про те, що розглянуті в курсі геометрії залежності sinα, cosα, tgα і їх узагальнення функціями[8].

Цю лекцію можна побудувати за таким планом:

1. Нагадати учням вже вивчені раніше поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса гострого кута (з 8 класу) і розширити поняття.

2. Розповісти про історію введення їм відомих тригонометричних функцій та потребу у розширенні цих знань для різних сфер (доповіді від учнів про застосування тригонометрії у фізиці, моделюванні, ІТ і т.д.)

3. Ввести поняття тригонометричних функцій для будь-якого кута використовуючи одиничне коло.

4. Розкриття функціональної природи залежностей sinα, cosα, tgα. Учитель підкреслює що функція — одне з основних понять математики, яке характеризує залежність одних змінних величин від інших. Залежності sinα, cosα, tgα, ctgα встановлені для кутів α від 0° до 180°, є функціями.

Учні пригадують зміну sinα, cosα і tgα при зростанні кута *α* (геометрія. 8-й клас)

5. Введення учнів у новий розділ «Тригонометричні вирази та їх перетворення».

Учитель пояснює, що ми переходимо від понять sinα, cosα і tgα, встановлених для кутів α від 0° до 180° до розгляду цих залежностей для будь-яких кутів. Для цього вводиться поняття кута повороту, яке треба добре усвідомити. Кут повороту є узагальненням міри геометричного кута.

Роз'яснюється, що кут повороту є напрямлена величина, яка може набувати будь-яких значень. За допомогою малюнків, моделей учні переконуються в тому, що заданням початкового і кінцевого положення радіуса кут повороту визначається не однозначно, а лише з точністю до цілого числа повних обертів.

Вступна лекція закінчується розв'язуванням усних вправ на визначення кутів повороту за готовими малюнками[18].

На зміну лекціям в навчальній програмі є семінари, які використовують для узагальнення і систематизації знань. На семінарах учні обговорюють тему, дискутують, виступають біля дошки з власними ідеями та вивченим матеріалом по темі. Саме семінари закріплюють знання учнів по темі та допомагають підготуватися до перевірочних робіт.

Підготовка учнів до семінару має великий навчально-виховний ефект і включає в себе: опрацювання матеріалу за підручником і додатковою літературою, розв'язування задач раціональними способами, самостійне складання вправ і задач, виготовлення наочних посібників, підготовку повідомлень і виступів, рефератів і т. п.

Відповідно, семінари семінари мають такі види: семінар-розгорнута бесіда, семінар-доповідь, семінар-захист інновацій, обговорення рефератів та творчих робіт, коментоване читання, семінар-розв'язування задач, семінар-диспут, коментоване читання, семінар-конференція та семінар-мозковий штурм.

Всі семінари мають відповідати, таким вимогам:

- тема семінару має бути ключовою, тобто такою, щоб у ній поєднувалися пізнавальний, виховний і розвиваючий аспекти;

- тема семінару повинна викликати в учнів інтерес і бути посильною для самостійного опрацювання;

- необхідно, щоб у розпорядженні учнів була додаткова література за темою, доступна для них;

- школярі повинні володіти необхідним для участі в семінарі запасом знань і умінь [17].

Під час підготовки і проведення семінару учитель стає організатором пізнавальної діяльності учнів, які включаються у підготовчу роботу з самого початку вивчення нового розділу.

Вони дістають від учителя перелік теоретичних питань і задач, що будуть розглянуті та список наочних посібників. Перелік згаданих матеріалів вивішують у класі (математичному кабінеті), де проводяться заняття[18].

Вчитель учням надає рекомендації щодо виступів, написання рефератів та розв’язування завдань (скидає посилання на електронні ресурси, поради в усній формі, надає роздруковані пам’ятки).

Виступати мають всі учні, незалежно від рівня знань, а також виконувати завдання в групах, можливе і проведення турнірів та дискусій між командами.

Розглянувши два основні види уроків перейдемо до того, як працювати над темою «Тотожні перетворення тригонометричних виразів», а також над іншими темами на даному прикладі, отож потрібно почати з визначення обов’язкового мінімуму складу матеріалу, планування результатів навчання, при цьому намагаємось забезпечити розвиток кожного учня.

Виходячи з програми, матеріалів підручників з алгебри, методичних рекомендацій, пропозицій по даній темі, виділяємо мінімально обов’язковий рівень знань і вмінь учнів. Перш за все визначаємо конкретно, що потрібно знати: основні формули; що потрібно вміти: застосування обов’язкового теоретичного матеріалу у вирішенні опорних задач, які сприяють формуванню обов’язкових навиків, таких як стандартні міркування, обчислення [5].

Планування теми:

1. Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. (1 год.)

2. Тригонометричні функції числового аргументу, знаки значень тригонометричних функцій. (1 год.)

3. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. (2 год)

4. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Гармонічні коливання (3 год.)

5. Формули зведення. (2 год.)

6. Тригонометричні тотожності: формули додавання. (2 год.)

7. Тригонометричні тотожності: формули подвійного, потрійного та половинного аргументів. (2 год.)

8. Тригонометричні тотожності: формули перетворення суми, різниці та тригонометричних добутку. (3 год.)

9. Обернені тригонометричні функції. (3 год.)

10. Контрольна робота: Тригонометричні функції (1 год.)[19].

Загальна кількість годин, яка виділяється на вивчення даної теми – 19 годин (академічний рівень) +11 годин на розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Зрозуміло, що велика кількість формул вимагає часу для засвоєння учнями, тому інколи вчителі проводять додаткові заняття для поглиблення вивчення даного матеріалу або ж просто пояснення.

При вивченні тригонометричних тотожних перетворень цикл вправ пов'язаний з вивченням однієї тотожності, навколо якої групуються інші тотожності, що знаходяться з нею в природному зв'язку, тобто вчитель показує учням взаємозв’язок між формулами, та як вивести формулу одну через іншу або ж використати одну тотожність для доведення інших.

Взагалі завдання щодо доведення тотожностей розбиті на дві групи [23].

До *першої* відносяться завдання, що виконуються при первісному знайомстві з тотожністю.

Вони слугують навчальним матеріалом для декількох уроків, об'єднаних однією темою [23].

Друга група вправ пов'язує досліджувану тотожність з різними додатками. Ця група не утворює композиційної єдності - вправи тут розкидані по різних темах [22].

Поєднавши різні групи завдань ми отримуємо ефективне засвоєння матеріалу учнями.

Так, вивчення тотожностей і тотожних перетворень тригонометричних виразів проводиться в тісному зв'язку з вивченням тотожних перетворень алгебраїчних виразів, але вони є досить складними для сприйняття через тригонометричні функції їх властивості та переплетення з числовими перетвореннями.

Тому, варто почати вивчення з простих тотожних перетворень, які зрозумілі учням, а далі поступово ускладнювати та доповнювати наявний матеріал новими видами тотожностей, перетвореннями, формулами та правилами. За таким принципом і складені підручники з математики, які ми проаналізуємо в наступному пункті.

2.2 Аналіз шкільних підручників алгебри і початків аналізу та програм

Тригонометричні вирази учні починають вивчати тригонометричні вирази у 8 класі на уроках геометрії, саме тоді вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника. Це робиться для того, щоб спочатку довести теорему Піфагора, а згодом вміти розв'язувати трикутники. У 9 класі учні вивчають основні співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1, \quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}, \quad 1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{(\sin\alpha)^2}$$

і найпростіші формули зведення:

$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha, \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha, tg(90^0-\alpha)=\frac{1}{tg\alpha},$$

$$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha, \cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha, tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha$$

Тут α – градусна міра кута трикутника, спочатку – тільки гострого, а згодом і прямого, і тупого [1].

Основна ж тема присвячена перетворенню тригонометричних виразів розглядається на уроках алгебри 10 класу, де тригонометричні функції розглядаються більш ширше (як приклад, навіть поняття тригонометричних функцій застосовуються не тільки для гострих кутів, а взагалі кут повороту можна розглядати як завгодно великим).

Головним джерелом для вивчення і засвоєння матеріалу учнями і досі є підручники. Вибір підручника залежить від рівня на якому діти вивчають математику, так для рівня стандарту зазвичай використовують підручники - Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу (рівень стандарту) для 10-11 класів, Шкіль М. І. Алгебра та початки аналізу (рівень стандарту) 10 клас або ж М.І. Бурда Математика (рівень стандарту), для академічного рівня - Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас або Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас, для профільного рівня - Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас або Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас, ну і для поглибленого Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (поглиблений рівень) 10 клас або Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (дворівневий підручник) 10 клас (перелік підручників можна продовжувати).

Провівши аналіз підручників можна зауважити, що різниця між формою викладу матеріалу, його кількістю, різнорівневістю завдань досить значна. Так, у підручниках з поглибленим вивченням математики додаються матеріали з вищої математики, а також форма викладу – більш наукового характеру, завдання ж початкового рівня (це завдання середнього для академічного рівня), а достатнього (це високий рівень для академічного рівня вичення математики), високого (трапляються завдання з вищої математики).

Можна продовжувати аналізувати всі аспекти підручників з математики, але в цьому немає потреби, зазвичай вчителі до програми (рівня вивчення математики) обирають підручники (або ж закупляє школа) та дають завдання з інших підручників або додаткових матеріалів, платформ.

Опрацьовуючи тему «Тригонометричні вирази і їх перетворення» вчителі намагаються урізноманітнити завдання, тому користуються різними матеріалами, а також при поясненнях можуть використовувати матеріал з інших книжок або ж для поглиблення знань (використовують різні підручники, відеоматеріали з поясненнями термінології, виведення формул та поясненням завдань).

Для вивчення даної теми у школі приділяється різна кількість годин для засвоєння даної теми (30 годин в профільному рівні, 19-20 годин в академічному рівні)[14]. Матеріал є складний і вимагає великої зосередженості та практичних навиків. Якщо аналізувати в середньому то 8 годин піде на вивчення теорії і на контрольні роботи. Решта – на розв’язування вправ[14].

Вчителі дають на самоопрацювання досить багато матеріалу та завдань, задля розуміння учнями теми (тригонометричних функцій, тотожностей), вивчення формул та тотожностей, а також розв’язування різнорівневих завдань (можливо, додаткові відео, конспекти з поясненням завдань високого рівня).

2.3 Тригонометричні функції через відношення сторін в трикутнику

Початок вивчення тригонометричних функцій пов’язаний з розв’язуванням трикутника, а саме прямокутного. Так, основні тригонометричні поняття (функції) виводяться зі співвідношення сторін прямокутного трикутника.

Отож, розглянемо спочатку прямокутний трикутник ABC, в якому сторони позначимо через a, b, c, де c — гіпотенуза, ∠C— прямий (рис.1).

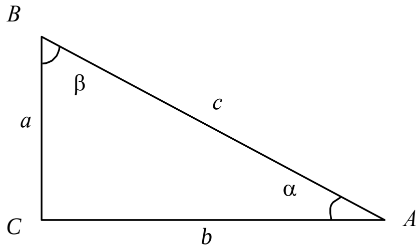


Рис. 1

В даному трикутнику існують наступні співвідношення:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta, \quad \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta, \quad \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}\beta \quad (1)$$

Наступними, теоремами які вивчаються у 9 класі є теорема синусів і косинусів. За теоремою синусів: сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів і доіврнюють двом радіусам описаного кола навколо цього трикутника.

Отож, нехай ABC — довільний трикутник зі сторонами a, b, c і кутами α, β, γ (рис. 2).

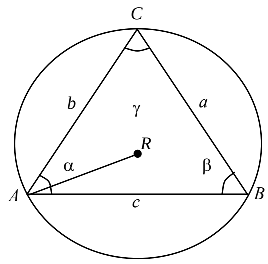


Рис. 2

Через R позначимо радіус описаного кола.

Справджується формула

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \qquad (2)$$

яку називають *теоремою синусів*.

Доведення формули (2) випливає з того, що всі вписані в коло кути, які спираються на одну хорду, рівні між собою (рис. 3).

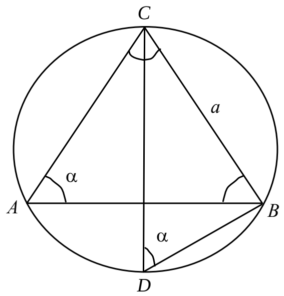


Рис. 3

Проведемо діаметр CD. Кут $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$. Кут $\angle CBD$ — прямий, а тому $a = 2R\sin\alpha$. Аналогічно доводяться рівності $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, з яких випливає формула (2) [3].

Теорему косинусів також часто застосовують для розв’язування трикутників (3).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma. \qquad (3)$$

Доведемо першу формулу (рис. 4).

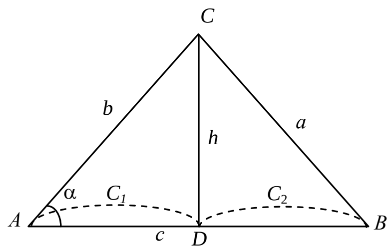


Рис. 4

З трикутника ADC знаходимо:

$$c_1 = b\cos\alpha,\ h = b\sin\alpha,\ c_1^2 + h^2 = b^2,\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Скориставшись теоремою Піфагора, дістаємо першу з формул (3):

$$a^2 = h^2 + c_2^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha.$$

Прямий кут поділяється на 90 рівних між собою частин, — *градусів*. Кут 30° становить одну третину а, кут 45° — половину прямого кута. Наведемо таблицю значень функцій $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ [2].

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2.4 Методичні особливості розв'язування основних тригонометричних тотожностей

При вивченні перших формул з тригонометрії учні мають вміти обчислювати значення тригонометричних функцій для будь-якого аргументу, а також на основі формул та співвідношення тригонометричних фунцій доводити основні види тотожностей.

Так, як формул в тригонометрії багато і учням треба, не тільки їх вивчити напам'ять, а й вміти їх застосовувати. Зазвичай доведення тотожностей розбивають по темах або ж групах тотожностей і їх поділяють на три групи:

1) тотожності з формулами квадратів (кубів) – доведення за допомогою алгебраїчних спрощень;

2) доведення тотожностей з використанням формул обернених величин;

3) доведення тотожностей за допомогою формул ділення (на основі співвідношення тригонометричних функцій).

На всіх етапах можуть застосовуватися різні формули зведення, додавання, добутку тригонометричних функцій, детальніше це ми розглянемо в наступних пунктах.

Даний ж розподіл тотожностей на типи допомагає дітям зрозуміти як діяти покроково, так в підручниках запропоновано розв'язувати подібні задачі в такій послідовності: спершу звертатись до формул квадратів, потім до формул обернених величин, далі до формул ділення і, нарешті, знову до формул обернених величин. Таким чином, формули квадратів і формули ділення використовуються лише по одному разу, а формули обернених величин — двічі [1,9].

Розв'язавши достатню кількість таких прикладів, ми переходимо до прищеплення учням основних навичок у доведенні тригонометричних тотожностей.

Деякі вчителі вважають зайвим давати учням будь-які поради щодо методів доведення тригонометричних тотожностей, мовляв, прийде час і вони самі навчаться, адже ні в методичній, ні в навчальній літературі, ні в деяких підручниках або ж інформаціно-комунікаційних матеріалах таких вказівок щодо обов'язкового вивчення методів доведення тригонометричних тотожностей немає. В результаті, учні, які мають початковий або середній рівень знань не розуміють, як доводити тотожності, і що це взагалі таке, а згодом учні можуть не розуміти, як розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності або ж прості вирази.

Тому, ми повинні нагадувати учням методи доведення основних тригонометричних тотожностей, навіть якщо даного матеріалу немає в підручнику.

Отож, почнемо із вказівок, які допоможуть учням зрозуміти основні типи доведення тотожностей.

Вказівка 1. Перетворюйте складнішу частину тотожності до другої частини — простішої [1].

Приклад 1. Довести тотожність:

$$cos^4\alpha + sin^4\alpha - \ cos^6\alpha - sin^6\alpha = cos^2\alpha * sin^2\alpha$$

Складнішою є ліва частина тотожності, тож її і перетворимо.

$$cos^4\alpha + sin^4\alpha - \ cos^6\alpha - sin^6\alpha = cos^4\alpha - cos^6\alpha + sin^4\alpha - \ sin^6\alpha =$$
$$= cos^4\alpha(1 - cos^2\alpha) + sin^4\alpha(1 - sin^2\alpha) = cos^4\alpha * sin^2\alpha + sin^4\alpha * cos^2\alpha =$$
$$= sin^2\alpha * cos^2\alpha * (cos^2\alpha + sin^2\alpha) = cos^2\alpha * sin^2\alpha,$$

Тотожність доведена[1].

Вказівка 2. Перетворюйте одну частину тотожності до виразів (функцій, кутів), що містяться в другій частині тотожності.

На етапі навчання вчителі звичайно не дозволяють (і ми з цим цілком згодні) учням одночасно перетворювати всю тотожність, тому розв'язання цього прикладу становить певні труднощі. Цьому можна запобігти, якщо (як і в попередньому прикладі) розв'язання логічно обґрунтувати, спираючись на сформульовану другу вказівку [4].

Приклад 2.

$$\frac{\sin\alpha + tg\ \alpha}{1+\cos\alpha} = tg\ \alpha$$

Знаменник правої частини даної тотожності $\cos\alpha$ не містить, тому виражаємо знаменник цього дробу через $\sin\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha + \frac{sin\,\alpha}{\cos\alpha}}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha * \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} : (1+\cos\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\alpha * (\cos\alpha + 1)}{\cos\alpha\,(1+\cos\alpha)} = \frac{sin\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha$$

Вказівка 3. Якщо, крім синуса і косинуса, в тотожність входять ще які-небудь тригонометричні функції, то подавайте всі функції через синуси і косинуси або ж через одну з тригонометричних функцій (приклад 2).

Вказівка 4. Якщо тотожність містить тільки тангенс 1 котангенс, то не слід (як правило) переходити до синуса і косинуса[2].

Приклад 3. Довести тотожність

$$\frac{1+ctg\alpha}{1+tg\alpha} = ctg\alpha$$

$$\frac{1+\mathrm{ctg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1+\mathrm{ctg}\alpha}{1+\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}} = \frac{(1+\mathrm{ctg}\alpha)\mathrm{ctg}\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha$$

Вказівка 5. Використовуйте основні тригонометричні тотожності в різному вигляді [2].

Учні зазвичай звикають використовувати формули тільки в тому вигляді, як зазначено в підручнику, тому потрібно навчити їх використовувати їх в різних завдання, інколи розписуючи самі ж формули.

Приклад 4. Довести тотожність

$$\sqrt{9+18\sin\alpha\cos\alpha} = |3(\cos\alpha + \sin\alpha)|$$

$$\sqrt{9+9*2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{9(1+2\sin\alpha\cos\alpha)} = \sqrt{9(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{9(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2} = \sqrt{(3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha))^2}$$
$$= |3(\cos\alpha+\sin\alpha)|$$

Вказівка 6. Тотожність буде доведена, якщо її частини перетворити до одного й того самого виразу [3].

Цю вказівку рідше використовують ніж перетворення однієї частини, адже вона є складнішою для сприйняття учнями (інколи виникає плутанина в перетвореннях), тому її дають після вивчення попередніх вказівок.

Приклад 5. Довести тотожність

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$$

Перетворимо ліву частину:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha = 1+2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Перетворимо праву частину

$$1+\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha} = 1+\frac{2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = 1+2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Отже, тотожність доведена [3].

Наведені вказівки потрібно давати учням на різних уроках, вивчаючи новий матеріал або ж повторюючи старий, так у підручниках ці вказівки даються в розділі «Основні тригонометричні тотожності», але поширюють свій вплив і на наступні розділи з вивчення тригонометричних функцій.

Тепер перейдемо до розгляду деяких задач, які ми також розв’язуємо з учнями при вивченні основних тригонометричних тотожностей.

Значний інтерес становлять задачі, в яких треба обчислити числове значення одного тригонометричного виразу, коли відомо числове значення якого-небудь іншого тригонометричного виразу (найчастіше такого, що містить ті самі тригонометричні функції)[2].

При розв'язуванні багатьох таких задач буде дуже корисною така вказівка: крім заданого співвідношення, слід також використати ті з основних тотожностей, які зв’язують функції, що входять у дане й шукане співвідношення [2].

Ми знаємо такі рівності:

$$cos^2 t + sin^2 t = 1;$$

$$\mathrm{tg}t = \frac{sin\, t}{cos\, t}; \ \mathrm{ctg}t = \frac{cos\, t}{sin\, t}; \ \mathrm{tg}t \cdot \mathrm{ctg}t = 1;$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{cos^2 t}, \ 1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{sin^2 t}.$$

Ці рівності дають змогу знаходити значення тригонометричних функцій $cos\, t$, $sin\, t$, $\mathrm{tg}t$, $\mathrm{ctg}t$, коли відомі значення однієї з них [1].

Нехай, наприклад, кут t міститься в першій четверті, ctg t = 3. З рівності $1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{sin^2 t}$ знаходимо: $sin^2 t = \frac{1}{10}$; $sin\, t = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $cos^2 t = 1 - sin^2 t = \frac{9}{10}$; $cos\, t = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\mathrm{tg}t = \frac{1}{\mathrm{ctg}t} = \frac{1}{3}$.

2.5 Методичні особливості навчання формул зведення

Як вже було зазначено для доведення тригонометричних тотожностей потрібно знати досить багато формул перетворення тригонометричних функцій. Одними з перших і основних вивчають формули зведення, які вчитель пояснює за допомогою одиничного кола, а результати(формули) записуються в таблицю (зазвичай вона є на палітурці підручників) (табл.1).

Часто доводиться перетворити вирази

$$cos\left(n\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right), sin\left(n\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right), \mathrm{tg}\left(n\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right), \mathrm{ctg}\left(n\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$$

на тригонометричні функції від α, використовуючи формули зведення.

Наприклад, оскільки $cos\, \pi = -1$, $sin\, \pi = 1$, маємо:

$$cos(\pi - \alpha) = cos\, \pi\, cos\, \alpha + sin\, \pi\, sin\, \alpha = -cos\, \alpha,$$

$$sin(\pi - \alpha) = sin\, \pi\, cos\, \alpha - cos\, \pi\, sin\, \alpha = sin\, \alpha. \quad (4)$$

Аналогічно виводяться формули:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha. \qquad (5)$$

Наведемо формули, які потрібно запам’ятати:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\,\alpha\,,sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\,\alpha\,,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{ctg}\alpha,\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{tg}\alpha. \qquad (6)$$

Формули зведення наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$
$\cos\beta=\pm\sin\alpha$	$\cos\beta=-\cos\alpha$	$\cos\beta=\pm\sin\alpha$	$\cos\beta=\cos\alpha$
$\sin\beta=\cos\alpha$	$\sin\beta=\pm\sin\alpha$	$\sin\beta=-\cos\alpha$	$\sin\beta=\pm\sin\alpha$
$\text{tg}\,\beta=\pm\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\beta=\pm\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\beta=\pm\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\beta=\pm\text{tg}\,\alpha$
$\text{ctg}\,\beta=\pm\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\beta=\pm\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\beta=\pm\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\beta=\pm\text{ctg}\,\alpha$

У разі зведення до горизонтального діаметра при парному значенні n назва тригонометричної функції зберігається. У разі зведення до вертикального діаметра при непарному значенні n назва функції змінюється на подібну [1]:

$$\boldsymbol{sin}\Leftrightarrow\boldsymbol{cos},\boldsymbol{tg}\Leftrightarrow\boldsymbol{ctg}$$

2.6 Методичні особливості навчання формул додавання і віднімання

Наступними вивчають формули додавання і віднімання тригонометричних функцій, виконання завдань із застосуванням яких не викликає труднощів в учнів, навіть якщо замість $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ у формулах можуть бути інші не тільки кути, а й вирази.

Формули додавання і віднімання подані нижче.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=-\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}$$

Наведемо приклад використання тригонометричних формул додавання для доведення тотожності.

Приклад 1

Доведіть тотожність [1].

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{cos}\,(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{cos^2\alpha}-\boldsymbol{sin^2\beta}$$

Доведення:

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$$
$$=(\boldsymbol{cos\alpha\,cos\beta}-\boldsymbol{sin\alpha\,sin\beta})(\boldsymbol{cos\alpha\,cos\beta}+\boldsymbol{sin\alpha\,sin\beta})=$$
$$=\boldsymbol{cos^2\alpha\,cos^2\beta}-\boldsymbol{sin^2\alpha\,sin^2\beta}=\boldsymbol{cos^2\alpha}(\mathbf{1}-\boldsymbol{sin^2\beta})-\boldsymbol{sin^2\beta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{cos^2\alpha})=$$
$$=\boldsymbol{cos^2\alpha}-\boldsymbol{cos^2\alpha\,sin^2\beta}-\boldsymbol{sin^2\beta}+\boldsymbol{sin^2\beta\,cos^2\alpha}=\boldsymbol{cos^2\alpha}-\boldsymbol{sin^2\beta}$$

Також формули додавання і віднімання використовують для знаходження значень (їхнього знаку) тригонометричних функцій будь-яких кутів через інші тригонометричні функції (приклад 2).

Приклад 2

Знайти $\mathbf{cos}(\mathbf{70^0}+\boldsymbol{\alpha})$, якщо $\mathbf{sin}(\mathbf{40^0}+\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{b}$, причому $\mathbf{0^0}<\boldsymbol{\alpha}<\mathbf{45^0}$.

Даним є кут $\mathbf{40^0}+\boldsymbol{\alpha}$; крім цього, відомі функції кута $\mathbf{30^0}$; це дає можливість виразити шуканий кут $\mathbf{70^0}+\boldsymbol{\alpha}$ через відомі кути: $\mathbf{70^0}+\boldsymbol{\alpha}=(\mathbf{40^0}+\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{30^0}$.

Далі маємо:

$$\begin{aligned}\cos(70^0+\alpha) &= \cos((40^0+\alpha)+30^0)\\ &= \cos(40^0+\alpha)\cos 30^0 - \sin(40^0+\alpha)\sin 30^0\\ &= \sqrt{1-b^2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - b * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3(1-b^2)}}{2} - b\end{aligned}$$

(оскільки $40^0 < 40^0+\alpha < 85^0$, то перед $\sqrt{1-b^2}$ взято знак +) [3].

2.7 Методичні особливості навчання формул подвійного, потрійного і половинного аргументу

Викладаючи тригонометричні математику у школі можна помітити, що формули подвійного, потрійного і половинного аргументу трактуються дітьми не правильно, що в подальшому стає причиною неправильно розв'язаних завдань або ж виведення нових «супер формул».

Так, з формули $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ учні вивводять ось такі формули:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha;\ \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha,$$

Адже не розуміють де ті формули взялись і як саме розгорнути за цією формулою $\sin\alpha$ або $\sin(\alpha+\beta)$, а звичайні перетворення $\sin\alpha = \sin 2\frac{\alpha}{2}$ здаються незрозумілими.

Словесний опис формули $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ у підручниках виглядає так: «Синус подвійного аргументу дорівнює подвоєному добутку синуса і косинуса даного аргументу» [1]. Це ж формулювання не допомагаэ розібратися з формулою, а ще більше заплутує учнів, тому доречно пояснити учня, що будь-який кут може бути подвійний, потрійний або ж половинний. Так, формулу синуса подвійного кута можна вивести таким чином:

1) Беремо співвідношення:

$$\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

2) Припускаємо що $\beta = \alpha$, тоді й дістанемо формулу:

$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}\,\mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}$, яку називаємо формулою синуса подвійного кута і формулюємо так: синус будь-якого аргументу дорівнює подвоєному добутку синуса і косинуса половини цього аргументу [2] .

Для косинуса подвійного кута варто знати ще дві формули:

$$\boldsymbol{cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha;\quad cos\,2\alpha = 1 - 2(sin\,\alpha)^2}.$$

Ці формули зустрічаються навіть частіше, ніж основна, й іноді вони значно полегшують розв’язування задачі.

Формули подвійного кута для тангенса і котангенса, вони зустрічаються рідше і їх виводять з формул подвійного кута синуса і косинуса і вони мають такий вигляд.

$$\frac{2tg\alpha}{1-(tg\alpha)^2} = \mathbf{tg}\,2\boldsymbol{\alpha};\qquad \frac{1-(\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathbf{ctg}\,2\boldsymbol{\alpha}.$$

Формули потрійного аргументу і половинного виводяться аналогічно.

Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формули потрійного аргументу

$$\sin 3 = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

Формули тригонометрії ми завжди спочатку подаємо для довільного кута $\boldsymbol{\alpha}$ і лише після засвоєння їх переходимо до традиційного вигляду формул [2].

Доведемо тотожність використовуючи дані формули.

Приклад 1.Довести тотожність:

$\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}$.

Ліва частина тотожності є геометричною прогресією, знаменник якої дорівнює 2, тому спробуємо згортати ліву частину, для цього поділимо і помножимо заданий вираз на $2 \sin 3\alpha$, тоді:

$$\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \frac{2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha}{2 \sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin 6\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha}{4 \sin 3\alpha} = \frac{2 \sin 12\alpha \cos 12\alpha}{2*4 \sin 3\alpha} = \frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}.$$

Довели.

Отже, формули подвійного, потрійного і половинного аргументу є досить важкими для засвоєння, тому вчителю важливо більше часу дати на розв'язання завдань та пояснень теоретичного матеріалу.

2.8 Методичні особливості навчання пониження степеня синуса і косинуса

Після формул половинного аргументу вивчають формули понижнення степеня, адже другі виходять з перших.

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

або

$$sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \ cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

Форули пониження степеня тригонометричної функції дозволяють значно простіше розв'язувати завдання (спрощувати вирази, доводити тотожності, тощо).

В підручниках академічного і стандартного рівня вивчення математики, ці формули інколи пропускають вважаючи, що це досить складний матеріал, але згодом можна простежити тенденцію, що саме відсутність цих формул створюють проблеми для обчислення виразів та доведення тотожностей. Так, наприклад зведення до добутку виразу: $(\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2$ за цим способом приводить до таких перетворень:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = (\sin\alpha + \cos\beta)(\sin\alpha - \cos\beta) = \Big(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\Big)\Big(\sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\Big) =$$
$$2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} =$$
$$2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta)\sin\sin(\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta) = \sin(-\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta))\sin(\frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta)) = -\sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta))\cos(\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)[5].$$

Тепер перетворимо цей вираз за допомогою формул зниження степеня:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\beta}{2} = -\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)[5].$$

Отже, як можна помітити з даного прикладу формули зниження степеня тригонометричних функцій допомагають спростити обчислення значення виразів, доведення тотожностей, розв’язання тригонометричних рівнянь та нерівностей.

2.9 Методичні особливості навчання перетворення добутків синусів і косинусів на суму

Крім формул перетворення суми тригонометричних функцій у добуток є й обернені формули, які можна вивести з даних співвідношень[5]:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

Для ефективної роботи необхідно запам’ятати такі формули:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

При цьому необхідно звернути увагу учнів на те, що в правій частині першої з цих формул при знаходженні $\sin(\alpha-\beta)$треба завжди від кута, що стоїть при синусі в лівій частині, відняти кут, що стоїть там же при косинусі[4].

Приклади доведення тригонометричних тотожностей з використанням цих формул подані нижче.

Приклад 1. Довести тотожність:

$$\mathbf{tg}\,3\alpha - \mathbf{tg}\,2\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha.$$

Ліву частину цієї тотожності учні найчастіше перетворюють так:

$$\mathbf{tg}\,3\alpha - \mathbf{tg}\,2\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha = (\mathbf{tg}\,3\alpha - \mathbf{tg}\,2\alpha) - \mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(\cos\alpha - \cos 3\alpha\cos 2\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha}.$$

Залишається довести, що $\cos\alpha - \cos 3\alpha\cos 2\alpha = \sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

Цілком природно перетворити добуток косинусів на суму:

$$\cos\alpha - \cos 3\alpha\cos 2\alpha = \cos\alpha - \frac{\cos 5\alpha + \cos\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha - \cos 5\alpha}{2} = \sin 2\alpha\sin 3\alpha.$$

Той самий результат можна дістати і за допомогою таких перетворень:

$$\cos\alpha - \cos 3\alpha\cos 2\alpha = \cos(3\alpha - 2\alpha) - \cos 3\alpha\cos 2\alpha = \cos 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 3\alpha\sin 2\alpha - \cos 3\alpha\cos 2\alpha = \sin 3\alpha\sin 2\alpha,$$

Але учням нелегко догадатись замітини $\cos\alpha$ на $\cos(3\alpha - 2\alpha)$.

Ясно, що доданки лівої частини даної тотожності можна було групувати і інакше, наприклад так:

$$\mathbf{tg}\,3\alpha - \mathbf{tg}\,2\alpha - \mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}(3\alpha - 2\alpha) - \mathbf{tg}\,2\alpha,$$

або так: $\mathbf{tg}\,3\alpha - (\mathbf{tg}\,2\alpha + \mathbf{tg}\,\alpha)$.

Раніше ми вказували, що коли тотожність містить тільки функції тангенс, то не слід (як правило) переходити до синусів і косинусів; це положення зберігає свою силу і в даному випадку, бо задану тотожність можна довести і так:

$\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}(2\alpha-\alpha)-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\frac{\mathbf{tg}\,2\alpha+\mathbf{tg}\,\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}-(\mathbf{tg}\,2\alpha+\mathbf{tg}\,\alpha)=\frac{\mathbf{tg}\,2\alpha+\mathbf{tg}\,\alpha}{1-\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha}(1-1+\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha)=\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha$.

Цей спосіб доведення також допускає варіації, наприклад:

$$\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}(3\alpha-2\alpha)$$
$$=\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\frac{\mathbf{tg}\,3\alpha+\mathbf{tg}\,2\alpha}{1+\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha}$$

Або

$\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}(3\alpha-\alpha)=\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha-\frac{\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha}{1+\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha}$.

Особливий інтерес становлять доведення тотожностей шляхом перетворення якої-небудь очевидної тотожності. У даному випадку можна виходити з очевидного співвідношення між кутами, що входять у дану тотожність: $3\alpha-2\alpha=\alpha$ (або $3\alpha-\alpha=2\alpha$, або $\alpha+2\alpha=3\alpha$).

Послідовно знаходимо:

$$\mathbf{tg}(3\alpha-2\alpha)=\mathbf{tg}\,\alpha \text{ або } \frac{\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha}{1+\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha}=\mathbf{tg}\,\alpha$$

або $\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha=\mathbf{tg}\,\alpha+\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha$ і

$\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha$, що й треба було довести.

Останній спосіб показує, як саме можна дістати такі тотожності, і справляє на учнів велике враження (наприклад, з тотожності $73^0=50^0+23^0$ маємо тотожність:

$$\mathbf{tg}\,73^0-\mathbf{tg}\,50^0-\mathbf{tg}\,23^0=\mathbf{tg}\,73^0\,\mathbf{tg}\,50^0\,\mathbf{tg}\,23^0.$$

Зауважимо що тотожність

$$\mathbf{tg}\,3\alpha-\mathbf{tg}\,2\alpha-\mathbf{tg}\,\alpha=\mathbf{tg}\,3\alpha\,\mathbf{tg}\,2\alpha\,\mathbf{tg}\,\alpha$$

є окремий випадок більш загальної тотожності:

$$\mathbf{tg}(\alpha+\beta)-\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}\,\beta=\mathbf{tg}(\alpha+\beta)\,\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta,$$

Яку також можна довести усіма зазначеними способами.

2.10 Застосування тригонометрії у фізиці, механіці, техніці

Тригонометричні обчислення застосовуються практично у всіх областях геометрії, фізики і інженерної справи. Велике значення має техніка тріангуляції, що дозволяє вимірювати відстані до недалеких зірок в астрономії, між орієнтирами в географії, контролювати системи навігації супутників. Слід відзначити застосування тригонометрії в наступних областях: техніка навігації, теорія музики, акустика, оптика, аналіз фінансових ринків, електроніка, теорія ймовірностей, статистика, біологія, медицина (включаючи ультразвукове дослідження (УЗД), комп'ютерна томографія, фармацевтика, хімія, теорія чисел, сейсмологія, метеорологія, океанологія, картографія, багато розділів фізики, топографія, геодезія, архітектура, фонетика, економіка, електронна техніка, машинобудування, комп'ютерна графіка, кристалографія [19].

Найбільш простим прикладом застосування тригонометрії у фізиці є коливання маятника, який відбувається за синусиїдальним законом.

При розкладі сили (або якої-небудь іншої векторної величини) на складові за двома (або трьома в просторі) взаємно перпендикулярними напрямками, проходиться обчислювати проекції сили на дані напрямки. Нехай під дією постійної сили F тіло прямолінійно, прикладом може слугувати рух тіла по похилій площині. Якщо сила утворить з прямою, по якій рухається тіло, кут $\boldsymbol{\varphi}$, то для обчислення роботи потрібно знайти проекцію сили F на пряму $\boldsymbol{l}$:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\cos\boldsymbol{\varphi}.$$

Якщо довжина шляху, пройденого тілом по прямій $\boldsymbol{l}$, дорівнює sто відповідна робота виразиться формулою:

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{F}|\boldsymbol{s}\cos\boldsymbol{\varphi}.$$

Задача. Визначити роботу A, яку виконує сила тяги по підйому вантажу по похилій площині і середню потужність підйомного пристрою, якщо маса вантажу m = 100 кг, довжина похилої площини l = 2 м, кут її нахилу до горизонту $\alpha = 30°$, коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$, прискорення під час підйому a = 1 м/с2 . Початкова швидкість вантажу дорівнює нулю.

Розв'язання.

На вантаж, який рухається по похилій площині, діють сили: тяжіння mg, нормальної реакції похилої площини N, тяги з боку підйомного пристрою Fтр., тертя Fтер.. Вибираючи напрями координатних осей Ox і Oy вздовж напряму руху вантажу і перпендикулярно до цього напряму та проектуючи на них векторне рівняння другого закону Ньютона

маємо

$$m\vec{a} = m\vec{g} + N + F_т + F_{тер},$$

$$Ox:\ ma = -mg\sin\alpha + F_т - F_{тер},$$

$$Oy:\ 0 = -mg\cos\alpha + N.$$

$$F_т = m(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))$$

Робота цієї сили на шляху l $A_т = F_т\, l = ml(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))$.

Середня потужність $\langle N\rangle = \frac{A_т}{t}$. Час підйому вантажу можна одержати з формули шляху для рівноприскореного руху без початкової швидкості $l = \frac{at^2}{2}$, звідки $t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$.

Тригонометрія широко застосовується в різних задача геометричної оптики. Для ілюстрації розглянемо наступну задачу.

З а д а ч а. Промінь світла проходить через скляну пластинку, обмежену паралельними площинами. Визначити положення променя після його проходження через пластинку.

Р о з' я з о к. Нехай MN і PQ, які обмежують пластинку, n – показник заломлення пластинки, d – її товщина. Падаючий промінь AB відчуває дворазове заломлення при вході в пластинку і при виході з неї. Промінь AB, зустрівши пластинку, змінить свій напрям і піде по прямій BC, напрямок якої визначається по відомому закону заломлення світла:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

При виході з пластинки промінь пройде по напрямку CD, який визначається з умови:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}.$$

З отриманих рівнянь слідує, що:

$\sin\alpha = \sin\gamma$, тобто $\alpha = \gamma$, так як α і γ - гострі кути. Відповідно, пройшовши через плоско паралельну пластинку, промінь не змінює свого напрямку. Обчислимо зміщення СК променя. З трикутника ВКС знаходимо:

$$CK = BC\sin\angle CKB = BC\sin(\alpha - \beta).$$

Відповідно:

$$CK = \frac{d}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha - \beta) = \frac{d\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

I. На нижченаведеному прикладі показано застосування тригонометрії до технічних розрахунків[22].

Задача. Промінь світла падає під кутом α= 60 градусів до поверхні землі. Як треба розмістити плоске дзеркало, щоб після відбивання промінь йшов паралельно поверхні землі?

Розв’язання.

Під час повороту дзеркала MN на кут β нормаль до дзеркала також повертається на кут β. Тепер кут падіння буде α+ β, а кут між падаючим і відбитим променями дорівнює 2(α+ β). За умовою задачі 2(α+ β) = 60 + 90 = 150 (град.). Звідси β = 15 (град.).

II.*Гармонійне коливання*. У фізиці і техніці тригонометричні функції грають важливу роль у вивченні періодичних процесів, як, наприклад, коливальний рух, поширення хвиль, рух механізму парової машини, сила і напруга змінного електричного струму і т.д.[22].

Простіший періодичний рух характеризується *гармонійним* або *синусоїдальним* коливанням:

$$y = A\sin(\omega x + \alpha),$$

Де А – амплітуда, ω – частота, Т = $\frac{2\pi}{\omega}$ - період коливань.

Функція $\mathbf{A}\sin(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha})$має наступну кінематичну інтерпретацію. Розглянемо відрізок ОМ довжини А, який обертається навколо свого кінця О з постійною кутовою швидкістю ω. Отже, точка М рівномірно рухається по колу радіуса А. Проекція М' точки М на деяку пряму $\boldsymbol{l}$(на малюнку пряма $\boldsymbol{l}$ зображена у вертикальному положенні) здійснює гармонічний коливальний рух. Насправді, шлях О' – проекція на пряму $\boldsymbol{l}$ точки О, α (початкова фаза) – кут, утворений початковим положенням радіуса с горизонтальним діаметром. За відрізок часу $\boldsymbol{x}$ (від початкового моменту) рухомий радіус опише кут, який дорівнює $\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha}.$ Відхилення у точки М' від точки О' виразиться формулою:

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha}).$

Точка М' здійснює періодичний (з періодом $\frac{2\pi}{\omega}$) коливальний рух на відрізку [-А, А] осі $\boldsymbol{l}$. Найбільше відхилення вгору (вниз) від точки О досягається в момент часу $\boldsymbol{x}$, при яких $\sin(\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{1}$(відповідно -1), звідки $\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha}=\frac{4k+1}{2}\boldsymbol{\pi}$(відповідно $\frac{4k-1}{2}\boldsymbol{\pi}$) і $\boldsymbol{x}=\frac{(4k+1)\pi-2\alpha}{2\omega}$(відповідно $\boldsymbol{x}=\frac{(4k-1)\pi-2\alpha}{2\omega}$).

Рух характеризується рівнянням:

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\sin\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{b}\cos\boldsymbol{\omega x}$, є гармонічне коливання. Насправді, якщо ввести допоміжний кут α, який визначається умовами:

$\cos\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}$, $\sin\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}$,

То отримаємо$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha})$, деА = $\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$.

Результуючий рух двох гармонічних коливань одного і того ж періоду є гармонічне коливання того ж періоду. Насправді, нехай:

$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{A}_1\sin(\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha}_1)$, $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}_2\sin(\boldsymbol{\omega x}+\boldsymbol{\alpha}_2)$,тоді маємо:

$\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2=(\boldsymbol{A}_1\cos\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}_2\cos\boldsymbol{\alpha}_2)\sin\boldsymbol{\omega x}+(\boldsymbol{A}_1\sin\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}_2\sin\boldsymbol{\alpha}_2)\cos\boldsymbol{\omega x}.$

Вийшов лінійний тригонометричний двочлен відносно $\sin\omega x$ і $\cos\omega x$:

$y_1 + y_2 = a\sin\omega x + b\cos\omega x,$

де а $= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$, $b = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)\cos\omega x$.

Відповідно, в силу викладеного $y_1 + y_2 = A\sin(\omega x + \alpha),$

де А $= \sqrt{(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2 + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2} = \sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$

і

$\cos\alpha = \frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A},\ \sin\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A}.$

Помітимо, що амплітуда А результуючого коливання може бути отримана геометричною побудовою, показаною на малюнку. А є діагональ паралелограма, сторони якого дорівнюють A_1і A_2 і утворюють між собою кут, який дорівнює $\alpha_2 - \alpha_1$.

Нехай $y = f(x)$ - рівняння довільного періодичного руху з найменшим додатнім періодом l. Нижченаведені тригонометричні функції мають період l:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{l}x + \alpha_1\right), \sin\left(\frac{4\pi}{l}x + \alpha_2\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi n}{l}x + \alpha_n\right), \dots,$$

При чому для першої з них l є найменшим періодом. У дуже багатьох зустрічаються в додатках випадках функція f(x) може бути представлена у вигляді суми нескінченого ряду Фурьє:

$$f(x) = A_0 + A_1\sin\left(\frac{2\pi}{l}x + \alpha_1\right) + \dots + A_n\sin\left(\frac{2\pi n}{l}x + \alpha_n\right) + \cdots$$

Таким чином, складний періодичний рух представляється як результат сумісної дії (накладання) простіших гармонічних коливань з періодом (найменшими), рівними:

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \dots, \frac{l}{n}, \dots$$

Гармонічне коливання $A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{l}x + \alpha_n\right)$ називається n-ою гармонічною функцією f(x).

Для знаходження гармонік функції f(x), заданої графічно (наприклад, у результаті експериментальних досліджень), сконструйовані прилади – гармонічні аналізатори, - які дають автоматично деяку кількість перших гармонік функції f(x) по її графіку.

При складані гармонік з різними періодами можуть вийти неперіодичні коливальні рухи (у випадку коли періоди не виміряні між собою).

Нехай:

$y_1 = A_1 \sin(\omega x + \alpha_1)$, $y_2 = A_2 \sin(\omega x + \alpha_2)$.

Позначимо через φ різницю аргументів:

$$\varphi = (\omega_2 x + \alpha_2) - (\omega_1 x + \alpha_1) = (\omega_2 - \omega_1)x + (a_2 - a_1);$$

Тоді результуючі рухи можна представити у вигляді:

$$y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_1 x + \alpha_1 + \varphi) =$$
$$(A_1 + A_2 \cos\varphi)\sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin\varphi \cos(\omega_1 x + \alpha_1).$$

Якщо по звичайних правилах ввести допоміжний кут, то отримаємо:

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega_1 x + \alpha),$$

де «амплітуда»: $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cos\varphi}$, а також «фаза» α суть функції часу x.

Якщо періоди даних коливань близьких між собою, то різниця $\omega_2 - \omega_1$мала, в цьому випадку «амплітуда» А і «фаза» α результуючого коливання повільно змінюється. На протязі невеликого проміжку часу результуючий рух сприймається як синусоїдальне коливання. Проте з плином часу амплітуда змінюється, її найбільше і найменше значення суть $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ і $|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2|$ (при $\cos\varphi \pm 1$). Описане явище носить у фізиці назву биття: сумарне коливання сприймається як коливання з амплітудою, яке змінюється періодично, яка то зростає, то спадає. Зокрема, явище биття можна спостерігати, слухаючи результуючий рух, яких виходить з двох джерел, які дають коливання з близькими, але різними періодами.

2.11 Застосування тригонометрії до розв’язання геометричних задач

Навчити учнів застосовувати аналітичний метод тригонометрії при розв’язуванні різних задач – одна з важливих цілей викладання тригонометрії в школі.

Суть цього методу полягає в тому, що в задачу вводять кути, внаслідок чого і відкривається можливість застосування тригонометричних функцій з усіма їх властивостями.

Своєрідна сила аналітичного методу тригонометрії розкривається в достатній мірі саме при розв’язуванні різних геометричних задач.

Особливо велике враження на учнів справляють такі задачі, умови яких ніби нічого «тригонометричного» в собі не мають[2].

Розглянемо кілька таких задач.

Задача_1. Користуючись теоремою синусів, довести відому з геометрії теорему про бісектрису внутрішнього кута трикутника.

Треба довести, що коли ∠ABD= ∠CBD (мал.), то $\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{DC}}{\mathbf{BC}}$.

Позначимо: ∠ABD=∠CBD=α, ∠ADB=β, тоді ∠CDB=180^0-β.

З трикутників ADBiDBC за теоремою синусів маємо:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ i\ \frac{DC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^0-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

отже, $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, що й треба було довести.

Задача_2. В якому прямокутному трикутнику відношення k радіуса вписаного кола до периметра буде найбільшим?

З геометрії відомо, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, можна знайти за формулою *r=p-c*(це випливає з відомої тригонометричної формули $\mathbf{tg}\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{p-c}}$ при C=90^0)[42]

де p – півпериметр, а c- гіпотенуза.

Отже, $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{2p}} = \frac{\mathbf{p-c}}{\mathbf{2p}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right)$.

Якщо позначити один з гострих кутів трикутника через α, то катети його будуть дорівнювати c $\sin\alpha$ і c $\cos\alpha$, тому

$$2p = c + c\sin\alpha + c\cos\alpha = c(1+\cos\alpha) + c\sin\alpha +$$
$$= 2c(\cos\alpha)^2 + 2c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2c\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$= 2c\cos\frac{\alpha}{2}\,2\cos 45^0\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2}) = 2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2})$$
$$= c\sqrt{2}[\cos 45^0 + \cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)]$$

Тепер маємо:

$$2k = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}\left[\cos 45^0 + \cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}.$$

Ясно, що k дістане найбільше значення тоді, коли від'ємник матиме найменше значення, тобто коли знаменник дробу буде найбільшим, а це можливо тільки при найбільшому значенні $\cos(45^0 - \alpha)$.

Таким чином, відношення радіуса вписаного кола до периметра прямокутного трикутника досягає найбільшої величини в рівнобедреному трикутнику; оскільки всі рівнобедрені прямокутні трикутники подібні між собою, то це відношення для всіх таких трикутників буде одне й те саме. Це саме випливає і з іншого розв'язку, бо найбільше значення

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)2} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

не залежить від кута α.

Задача_3. Знайти найменше значення площі прямокутного трикутника, що має дану висоту h, опущену на гіпотенузу.

Позначимо один з кутів даного трикутника (мал.) через x (на мал. кут A). Ясно, що ∠BCD=90^0-x, ∠B=90^0-(90^0-x)=x.

З трикутників ACDiBCD знаходимо: AD=hctgx; BD=htgx.

Гіпотенуза даного трикутника AB=hctgx+htgx.

Площа трикутника:

$$\boldsymbol{S=\frac{h^2}{2}(ctgx+tgx)=\frac{h^2}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{h^2}{2\sin x\cos x}=\frac{h^2}{\sin 2x}}$$

Цей вираз досягає найменшого значення тоді, коли знаменник надуває найбільшого значення, тобто при $\boldsymbol{\sin 2x=1}$.

Шукане найменше значення s=h^2 і досягається в рівнобедреному прямокутному трикутнику.

Задача_4. Довести, що x усіх трикутників з даною основою a і з даним кутом при вершині α найбільшу площу має рівнобедрений трикутник.

Позначимо два інші кути через x та y. Тоді площа трикутника

$$\boldsymbol{S=\frac{a^2\sin x\sin y}{2\sin\alpha}=\frac{a^2[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{4\sin\alpha}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{a^2[\cos(x-y)-\cos\alpha]}{4\sin\alpha}}$$

Тепер ясно, що найбільшого значення площа досягає разом з функцією $\boldsymbol{\cos(x-y)}$, тобто при $\boldsymbol{\cos(x-y)=1}$, що для кутів трикутника можливо лише при x-y=0, звідки x=y, що й треба було довести.

2.12 Педагогічний експеримент

Україна намагається стати ближчою до країн Європи, тому реформи проводяться у всіх сферах, освіта не є виключенням. Так, індивідуалістський підхід в навчанні та використання інформаційно-комунікаційних технологій в Європі є звичним, для української системи освіти -це щось нове.

Зазвичай зміни ведуть до кращого, але кожна зміна в будь-якій сфері має своїх прихильників та опонентів, на думку яких треба також зважати. Якщо ж говорити про вивчення тригонометрії у шкільній програмі до думки різняться (більшість все таки проти поглибленого вивчення цього розділу математики).

Педагогічний експеримент був проведений серед учнів двох десятих класів Обласного наукового ліцею в м. Рівне Рівненської обласної ради. Для даного експерименту було обрано дві групи: контрольну та експериментальну. Для учнів експериментальної групи було проведено заняття за методикою, запропонованою у даній магістерській роботі. Щоб оцінити ефективність даної методики, спочатку було визначено середню успішність учнів з математики у двох групах до проведення експерименту, а згодом і після – для оцінки ефективності запропонованої методики.

Дослідження результатів експерименту (порівняння успішності учнів двох програм) здійснювалося за законом розподілу ймовірностей Стьюдента, адже досліджувані сукупності є малими за обсягом (15 та 16 учнів).

Теорія малої вибірки дає можливість оцінити істотність відмінності між двома вибірковими середніми. Ймовірність значень різниць між двома вибірковими середніми, за абсолютною величиною не менших від фактичної різниці, яка відома з досвіду, визначається за формулою

$$P[\left|\tilde{x}' - \tilde{x}''\right| > \delta_{ф}] = 2[1 - S(t_{ф})].$$

Де $\tilde{x}'$ і $\tilde{x}''$ - вибіркові середні;

$\delta_{ф} = \tilde{x}' - \tilde{x}''$ - фактична різниця між двома вибірковими середніми;

$t_{ф}$ - визначається за формулою

$$t_{ф} = \frac{\delta_{ф}}{\mu_{MB}} = \frac{\delta_{ф}}{\sqrt{\dfrac{[\sum(x' - \tilde{x}')^2 + \sum(x'' - \tilde{x}'')^2](n_1 + n_2)}{(n_1 + n_2 - 2)n_1 n_2}}}.$$

Коли за таблицею визначається ймовірність, яка дорівнює $2[1-S(t_{ф})]$, замість *n* слід брати n_1+n_2-2. Якщо ймовірність дістанемо велику, то слід чекати різниць, які перевищують фактичну - це означає, що фактична різниця, будучи меншою за ті, яких слід чекати з більшою ймовірністю, не дає підстав вважати, що відмінності між середніми істотні. Коли дістанемо малу ймовірність, відмінність між середніми не випадкова, а істотна.

Оцінимо розходження між середніми успішностями навчання у двох підгрупах на початку проведення занять та на закінчення теми.

Експериментальна група

Учні	Успішність у балах (x')	$(x')^2$
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	11	121
8	10	100
9	8	64
10	10	100
11	7	49
12	5	25
13	9	81
14	7	49
15	10	100
Всього	133	1219

Контрольна група

Учні	Успішність у балах *(x'')*	*(x'')²*
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	12	144
9	6	36
10	8	64
11	9	81
12	7	49
13	8	64
14	9	81
15	11	121
16	9	81
Всього	142	1300

Дано: $n_1 = 15;$ $\sum x' = 133;$ $\sum (x')^2 = 1219;$ $n_2 = 16;$ $\sum x'' = 142;$ $\sum (x'')^2 = 1300;$

$$1)\sum (x' - \tilde{x}')^2 = \sum (x')^2 - \frac{(\sum (x'))^2}{n_1} = 1219 - \frac{133^2}{15} = 39{,}73.$$

$$2)\sum (x'' - \tilde{x}'')^2 = \sum (x'')^2 - \frac{(\sum (x''))^2}{n_2} = 1300 - \frac{142^2}{16} = 39{,}75.$$

$$3)\delta_{\partial} = \tilde{x}' - \tilde{x}'' = 39{,}75 - 39{,}73 = 0{,}02.$$

$$4)\ t_{\partial} = \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{(39{,}73 + 39{,}75)(15 + 16)}{(15 + 16 - 2)\cdot 15 \cdot 16}}} = 0{,}03.$$

5) З таблиці для $n_1 + n_2 - 2$ =15+16-2=29 знаходимо S(0,03) = 0,518

6) Знаходимо ймовірність $P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0{,}03] = 2[1 - S(0{,}03)] = 2(1 - 0{,}518) = 0{,}964.$

Ймовірність досить велика, тому середній бал успішності двох груп на початок проведення уроків за запропонованою методикою майже однаковий.

По завершенні вивчення теми обом підгрупам була дана однакова контрольна робота, на основі підсумкових оцінок якої знову було проведено обробку результатів успішності контрольної та експериментальної груп.

Експериментальна група

Учні	Успішність у балах $(x^{'})$	$(x^{'})^2$
1	10	100
2	11	121
3	9	81
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	10	100
8	11	121
9	8	64
10	10	100
11	8	64
12	5	25
13	9	81
14	10	100
15	10	100
Всього	138	1302

Контрольна група

Учні	Успішність у балах $(x^{''})$	$(x^{''})^2$
1	9	81
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	10	100
9	5	25
10	9	81

11	8	64
12	7	49
13	8	64
14	9	81
15	10	100
16	9	81
Всього	137	1205

Дано:

$$n_1 = 15; \qquad n_2 = 16;$$
$$\sum x' = 138; \qquad \sum x'' = 137;$$
$$\sum (x')^2 = 1302; \qquad \sum (x'')^2 = 1205;$$

$$1)\sum (x' - \tilde{x}')^2 = \sum (x')^2 - \frac{(\sum (x'))^2}{n_1} = 1302 - \frac{138^2}{15} = 32,4;$$

$$2)\sum (x'' - \tilde{x}'')^2 = \sum (x'')^2 - \frac{(\sum (x''))^2}{n_2} = 1205 - \frac{138^2}{16} = 31,94;$$

$$3)\delta_{\delta} = \tilde{x}' - \tilde{x}'' = 32,4 - 31,94 = 0,46.$$

$$4)\ t_{\delta} = \frac{0,46}{\sqrt{\frac{(32,4 + 31,94)(15 + 16)}{(15 + 16 - 2) \cdot 15 \cdot 16}}} = 0,86.$$

5) З таблиці для $n_1 + n_2 - 2$ =15+16-2=29 знаходимо S(0,86)=0,785.

6) Знаходимо ймовірність $P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0,86] = 2[1 - S(0,86)] = 2(1 - 0,785) = 0,4.$

Ймовірність досить мала, тому середній бал успішності двох груп наприкінці експерименту істотно відрізняється.

Отже, можна стверджувати, що запропонована методика викладання тотожних перетворень тригонометричних виразів є ефективною. Це підтверджує успішність учнів, яка свідчить, що вони засвоїли матеріал глибше, збільшили свою мотивацію до навчання, навчились аналізувати та розв’язувати вправи.

2.13 Самостійні роботи

2.13.1 Співвідношення між тригонометричними формулами одного і того ж аргументу

Варіант I

1. Спростити вираз

$$sin^2\alpha - (1 - 2cos^2\alpha)$$

2. Перетворити вираз

$$sin^2\beta + cos^2\beta + ctg^2\beta$$

3. Довести тотожність

$$(sin\alpha + \frac{1}{sin\alpha})^2 + (cos\alpha + \frac{1}{cos\alpha})^2 - (tg^2\alpha + ctg^2\alpha) = 7$$

4. Довести тотожність

$$\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \cdot \frac{1 + ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha} = tg^2\alpha$$

5. Довести тотожність

$$tg^2\alpha - sin^2\alpha = tg^2\alpha sin^2\alpha$$

Варіант II

1. Спростити вираз

$$4 - sin^2\alpha - cos^2\alpha$$

2. Перетворити вираз

$$tg^2\beta + sin^2\beta + cos^2\beta$$

3. Довести тотожність

$$(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha + sin\beta)^2 = 4sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}$$

4. Довести тотожність

$$\frac{1 - sin^6\alpha - cos^6\alpha}{1 - sin^4\alpha - cos^4\alpha} = \frac{3}{2}$$

5. Довести тотожність

$$\frac{sin\alpha + tg\beta}{1 + cos\alpha} = tg\alpha$$

2.13.2 Формули додавання

Варіант I

1. Спростити вираз

$$ctg\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)+ctg\left(135^0-\frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Обчислити

$$sin^2\frac{\pi}{8}+cos^2\frac{3\pi}{8}+sin^2\frac{5\pi}{8}+cos^2\frac{7\pi}{8}$$

3. Довести тотожність

$$\frac{cos^4(\alpha-\pi)}{cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}=-\frac{1}{2}ctg^2\alpha$$

4. Довести справедливість рівностей

$$cos36^0-sin18^0=sin30^0$$

Варіант II

1. Спростити вираз

$$cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$$

2. Обчислити

$$ctg\frac{13\pi}{12}-ctg\frac{5\pi}{12}$$

3. Довести тотожність

$$tg\alpha+cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

4. Довести справедливість рівностей

$$sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$$

2.13.3 Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів. Універсальна підстановка

Варіант I

1. Спрости вираз

$$cos^2(\alpha + 2\beta) + sin^2(\alpha - 2\beta) - 1$$

2. Обчислити

$$sin2\alpha, \text{ якщо } \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1.4$$

3. Довести тотожність

$$ctg\left(4\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos(4\alpha - 3\pi)} = ctg(2\alpha - \frac{\pi}{4})$$

4. Знайти найбільше значення виразу

$$sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 4\alpha\right) - \sin\left(\frac{17\pi}{8} - 4\alpha\right), \text{якщо } 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{8}$$

5. Доведіть тотожність

$$sin3\alpha - sin2\alpha cos\alpha = sin\alpha cos\alpha$$

Варіант II

1. Спрости вираз

$$sin^2(\alpha + 2\beta) + sin^2(\alpha - 2\beta) - 1$$

2. Обчислити

$$sin2\alpha, \text{ якщо } \sin\alpha - \cos\alpha = p$$

3. Довести тотожність

$$\frac{sin^2(3\pi - 4\alpha) + 4cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) - 4}{cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4cos^2(2\alpha - \frac{5\pi}{2})} = ctg^4 2\alpha$$

4. Знайти найменше значення виразу

$$\frac{ctg2\alpha - tg2\alpha}{1 + \sin(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha)}, \text{якщо } 0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$$

5. Доведіть тотожність

$$\frac{tg2\alpha}{tg4\alpha - tg2\alpha} = cos4\alpha$$

2.13.4. Перетворення добутку в суму і суми в добуток

Варіант I

1. Спростити вираз

$$\cos\alpha\,(1+cos^{-1}\alpha+tg\alpha)(1-cos^{-1}\alpha+tg\alpha)$$

2. Подати у вигляді добутку

$$\frac{sin13\alpha+sin14\alpha+sin15\alpha+sin16\alpha}{cos13\alpha+cos14\alpha+cos15\alpha+cos16\alpha}$$

3. Обчислити

$$(1+ctg\alpha)(1+ctg\beta),\text{якщо } \alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

4. Довести тотожність

$$\frac{(1+sin\alpha)ctg(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}{2\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}=-tg^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$$

5. Довести тотожність

$$ctg6\alpha-ctg4\alpha+tg2\alpha=-ctg6\alpha ctg4\alpha tg2\alpha$$

Варіант II

1. Спростити вираз

$$sin^2\alpha(1+sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)(1-sin^{-1}\alpha+ctg\alpha)$$

2. Подати у вигляді добутку

$$\frac{cos7\alpha-cos8\alpha-cos9\alpha+cos10\alpha}{sin7\alpha-sin8\alpha-sin9\alpha+sin10\alpha}$$

3. Обчислити

$$(1+tg\alpha)(1+tg\beta),\text{якщо } \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

4. Довести тотожність

$$\frac{cos^4(\alpha-\pi)}{cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)+sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)-1}=-\frac{1}{2}ctg^2\alpha$$

5. Довести тотожність

$$tg3\alpha-tg2\alpha-tg\alpha=tg3\alpha tg2\alpha tg\alpha$$

Відповіді до самостійних робіт

Варіант – I **Варіант – II**

2.14.1

Варіант – I

1. $\cos^2\alpha$
2. 3

Варіант – II

1. $\frac{1}{sin^2\beta}$
2. $1+\frac{1}{cos^2\beta}$

2.14.2

Варіант – I

1. $2tg\alpha$
2. 2

Варіант – II

1. $\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}$
2. $2\sqrt{3}$

2.14.3

Варіант – I

1. $-\sin 2\alpha \sin 4\beta$
2. 0.96
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{16}$

Варіант – II

1. $-\cos 2\alpha \cos 4\beta$
2. $1-p^2$
3. 2, якщо $\alpha = \frac{\pi}{16}$

2.14.4

Варіант – I

1. $2\sin 2\alpha$
2. $\operatorname{tg}\frac{29}{2}\alpha$
3. 2

Варіант – II

1. $\sin 2\alpha$
2. $\operatorname{ctg}\frac{17\alpha}{2}$
3. 2

Розділ ІІІ. Аналіз систем освіти Сінгапуру та Ізраїлю Рекомендації щодо вдосконалення української системи освіти з математики

З розвитком штучного інтелекту та мережі інтернет, пошук інформації не є проблемою і так, як діти найлегше засвоюють нововведення, то використання програм зі штучним інтелектом для учнів стало повсякденністю.

Освітня програма намагається реагували на зміни у сучасному суспільному житті, так на зміну ЗНО прийшло НМТ і змінилася не тільки назва, а й організаційні процеси, мета. Так, раніше від учнів вимагалося знання всіх формул та теорем і вміння їх застосовувати до завдань різного типу, зараз більшість формул подані на НМТ і вимагають тільки розв'язання задач орієнтованих на вирішення життєвих ситуацій.

Завдань із застосуванням тригонометричних формул стає все менше і розв'язання їх все легшим. Учні багато яких навчалися закордоном стверджують, що там освітня програма є легшою, але чи дають ці програми усі необхідні знання. Так, вже багато років підряд перше місце за результатами PISA, результатами міжнародних олімпіад займає Сінгапур, його методику викладання всіх предметів ставлять в приклад у результативності і називають «освітнім дивом».

Специфікою освіти в Сінгапурі є навчання з великою кількістю іспитів, рівневою диференціацією, можливість учнів вибирати дисципліни та брати участь в проектах від міжнародних компаній та організацій, постійне підвищення кваліфікації вчителів (плюс кожен вчитель знає психологію на високому рівні), також вчитель активно кумунікує з батьками, роблячи все для комфорту учнів, освіта орієнтована на дітей, ринок праці, ну і звісно основний акцент робиться на любові до країни, яка зростає разом з учнями, які відчували підтримку і потрібність від своїх наставників та батьків (люди – це і є представники країни).

Якщо пройти шлях дитини від народження і до закінчення отримання вищої освіти, то цей шлях в Сінгапурі буде виглядати так. Спочатку дитина йде в садочок, де в старших групах дітей навчають манерам, діти досліджують навколишнє середовище, вчаться з ним взаємодіяти та працюють над формуванням емоційного інтелекту, розвитку здібностей, які наявні у дитини. У початковій школі продовжується розвиток здібностей дитини і закладаються основи фінансової грамотності, працелюбності (діти готують їсти, прибирають клас і подвір'я), після початкової школи діти складають свої перші іспити (так визначається приблизний напрямок учня), далі у середній школі він обирає напрямок, який включає в себе певний набір предметів, потім знову іспити коледж (по наявному в середній школі напрямку), знову іспити і університет. Є звісно і обов'язкові предмети для вивчення, до них входять математика, англійська та ще декілька.

Іспитів є досить багато, але вони більше спрямовані на виявлення талантів учнів, а не перевірочну. Також, вчителі підтримують учнів і є здебільшого їхніми друзями, вчителі не проходять щорічну атестацію, але самостійно вдосконалюють свої навички на основі внутрішньої та зовнішньої мотивацій.

Завдання та програма складені, таким чином: мінімум теоретичного матеріалу, відразу його застосування на практиці + просторове мислення. Згодом результат закріплюється вирішенням життєвих ситуацій, а у старших класах проектом, який працює над вирішенням якоїсь глобальної проблеми або проблеми певної компанії. Кількість тем пройдених за рік перевищує стандарти української освіти, але теми вивчаються не на такому поглибленому рівні, тільки в класах з поглибленим вивченням кількість тем не тільки перевищує кількісно, а й якісно.

Ще одною системою освіти, яку варто розглянути є Ізраїльська система освіти, яка дає перше місце у світі Ізраїлю за кількістю вчених на 10000 населення (припадає 145 вчених).

Коротко опишемо відмінності ізраїльської освіти від української.

ізраїльська система математичної освіти демонструє ряд відмінностей від традиційних підходів, зокрема:

- **Акцент на ранньому засвоєнні понять:** Програма початкової школи передбачає більш швидкий темп вивчення математичних концепцій, особливо в галузі геометрії. Такий підхід сприяє формуванню міцної основи для подальшого навчання.
- **Інтегрований підхід до викладання:** У середніх класах математика викладається як єдиний предмет, без поділу на алгебру та геометрію. Це дозволяє учням бачити зв'язки між різними математичними поняттями та розвивати комплексне розуміння дисципліни.
- **Гнучкість у виборі методів навчання:** Вчителям надається значна свобода у виборі підручників, матеріалів та методик навчання. Це дозволяє адаптувати процес навчання до індивідуальних потреб учнів та використовувати різноманітні підходи, такі як проектна діяльність та дослідження.
- **Диференціація навчання:** Старша школа пропонує кілька рівнів складності математичних програм, що дозволяє учням обирати курс відповідно до своїх здібностей та інтересів.

Такий підхід до викладання математики дозволяє розвивати учнів як творчих мислителів, здатних застосовувати математичні знання для розв’язання реальних проблем."

Що ми додали:

- **Більш детальний опис кожного етапу:** ми додали конкретні приклади того, як реалізуються особливості ізраїльської системи на різних рівнях навчання.
- **Акцент на розвитку учнів:** ми підкреслили, що мета ізраїльської системи - не просто передати знання, а розвинути в учнів такі якості, як критичне мислення, творчість та здатність до самостійного навчання.
- **Струнка структура:** інформація подається у вигляді чітких тез, що полегшує сприйняття матеріалу.

У старшій школі, орієнтованій на отримання атестата зрілості, учні вивчають математику на трьох різних рівнях. Рівні визначаються так званими єхідотами (що в перекладі з івриту може тлумачитись як “навчальна одиниця”) та відрізняються кількістю годин на вивчення математики, складністю завдань, які ставляться перед учнями, необхідною глибиною розуміння і, до певної міри, змістом. Також відрізняються і кількістю балів за атестат зрілості, які вони присуджують [22].

В дев'ятому класі, після здачі екзаменів, школярі самостійно обирають собі напрямок навчання далі (природничі дисципліни, театральне мистецтво, сільське господарство тощо) і складність вивчення того чи іншого предмету: три єхідоти (мінімальний обсяг матеріалу), чотири єхідоти (вищий рівень), п’ять єхідот (поглиблений рівень). Навчальні одиниці (єхідоти) вказують на кількість щотижневих годин вивчення математики. Традиційно близько 60% учнів навчаються на рівні 3 одиниць, 30% — на рівні 4 одиниць і 10% — на рівні 5 одиниць [22].

Розглянемо детальніше окремі теми і порівняємо зміст чинної програми з математики ізраїльської старшої школи на три, чотири та п’ять єхідот з українською (табл.1) [22].

Таблиця 1

Порівняння змісту окремих тем програми з математики в ізраїльській та українській школах

№ п/п	Тема	Ізраїль	Україна
1.	Перетворення тригонометричних виразів	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+
2.	Тригонометричні функції	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+
3.	Перетворення ірраціональних та степеневих виразів	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+
4.	Перетворення логарифмічних Виразів	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+
5.	Ірраціональні рівняння	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+
6.	Показникові Рівняння І Нерівності	На 3 єхідоти – відсутні, на 4 і 5 – Наявні	+

7.	Похідна функції	Матеріал, що вивчається На всіх Рівнях	+
8.	Первісна функції, поняття Інтегралу	Матеріал, що вивчається На всіх Рівнях	+
9.	Елементи комбінаторики	Матеріал, що вивчається На всіх Рівнях	+
10.	Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики	Матеріал, що вивчається На всіх Рівнях	+
11.	Комплексні числа	Матеріал вивчається лише на рівні 5 єхідот	У класах з поглибл. вивч.
12.	Рівняння еліпса, гіперболи, Параболи	Матеріал вивчається лише на рівні 5 Єхідот	-

З аналізу двох найкращих систем освіти світу та зіставлення їх з українською системою освіти виділяється багато недоліків української системи освіти, а саме: вивчення матеріалів на основі практики, а не бездумне вирішення завдань, немає хороших проектів для учнів і системи мотивації, як для вчителів так і для учнів і т.д.

Навіть завдання світових олімпіад математики більше сконцентровані на вирішення проблем та завдань, які зустрічаються у житті, актуалізуючи математику, приклади завдань (додаток 1).

Отож, наші рекомендації, щодо вдосконалення системи освіти в Україні в аспекті математики.

Для вчителів:

- **Професійний розвиток:** Регулярне підвищення кваліфікації, участь у тренінгах, семінарах та конференціях для ознайомлення з новими методиками та технологіями навчання.
- **Використання інтерактивних методів:** Застосування різноманітних інтерактивних форм роботи, таких як групові завдання, дискусії, проектна діяльність, використання гаджетів та онлайн-платформ.
- **Індивідуальний підхід:** Врахування особливостей кожного учня, створення умов для їхнього успіху.
- **Співпраця з колегами:** Обмін досвідом, розробка спільних проектів, створення методичних об’єднань.

- **Популяризація математики:** Організація математичних гуртків, олімпіад, конкурсів для стимулювання інтересу до математики серед учнів.

Для учнів:

- **Створення мотивації:** Залучення учнів до цікавих математичних проектів, організація математичних ігор та конкурсів.
- **Розвиток критичного мислення:** Заохочення учнів до самостійного пошуку рішень, аналізу інформації та формулювання висновків.
- **Підтримка індивідуальних досягнень:** Створення умов для розвитку обдарованих учнів, а також надання додаткової допомоги тим, хто відстає.

Для системи освіти в цілому:

- **Оновлення навчальних програм:** Розробка нових програм, які відповідають сучасним вимогам і містять більше практичних завдань.
- **Забезпечення матеріально-технічної бази:** Оснащення шкіл сучасними технічними засобами навчання (комп’ютерами, інтерактивними дошками, математичними лабораторіями тощо).
- **Підвищення престижу професії вчителя математики:** Збільшення заробітної плати, надання пільг, створення сприятливих умов для роботи.
- **Співпраця з вищими навчальними закладами:** Спільні проекти, стажування вчителів, розробка нових методичних матеріалів.
- **Впровадження нових технологій:** Активне використання цифрових технологій у навчальному процесі, створення онлайн-платформ для навчання математики.

Додаткові рекомендації:

- **Співпраця з батьками:** Залучення батьків до навчального процесу, організація спільних заходів.
- **Популяризація математики в суспільстві:** Проведення математичних фестивалів, конкурсів, лекцій для широкої аудиторії.

- **Підтримка наукових досліджень у галузі математичної освіти:** Фінансування наукових проектів, спрямованих на розробку нових методів навчання математики.

Важливо розуміти, що покращення рівня математичної освіти – це тривалий і комплексний процес, який вимагає зусиль від усіх учасників освітнього процесу.

Висновки

Методична система будь-якого предмета складається з поєднання таких компонентів: цілі, змісту, методів та організаційних форм навчання. Поєднання різних видів та типів цих компонент дає змогу зробити навчання ефективним та цікавим для учнів, змінюючись відповідно до потреб та психологічних особливостей дітей.

Так, з розвитком інформаційно-комунікаційних технологій, потреб суспільства та частково зміни світобачення, система освіти не могла не зазнати змін і ці зміни стосуються як методики викладання так і обсягу матеріалу, який необхідно освоїти та застосувати учням на НМТ/ЗНО, життєвих ситуаціях.

Через те, що вивчення математики в Україні сконцентрована більше на теорії, діти втрачають мотивацію, а також вивчені формули не завжди можуть застосувати до життєвих ситуацій та завдань з підручників. Так, у третьому розділі було проаналізовано найкращі освітні системи світу та надані рекомендації щодо вдосконалення української системи освіти.

Якщо говорити про тригонометричні тотожності, то їх вивчають у всіх країнах світу, обсяг вивченого матеріалу залежить від профільної диференціації, ну і звісно рівневої (індивідуальні особливості учня). Проведене дослідження дозволило розв’язати поставлені завдання:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу з теми дослідження; розкрити поняття «методична система», «тотожні перетворення виразів».
2. Систематизувати матеріал по прийомах та методах тотожних перетворень тригонометричних виразів з курсу геометрії і алгебри та початків аналізу в основній школі.
3. Розробити методичні рекомендації по навчанню учнів тотожних перетворень тригонометричних виразів.
4. Проаналізувати світовий досвід.

У процесі вивчення варто зацікавлювати учнів та мотивувати використовуючи завдання пов’язані з реальними ситуаціями та використовувати різні підходи до учнів різних профілів та індивідуальних особливостей. Інші рекомендації детально описані в третьому розділі, а приклади застосування тригонометрії у другому.

Також самостійні роботи (розроблені на основі підручників різних рівнів), що допоможуть учням краще засвоїти матеріал, а вчителям додаткові структуровані матеріали, щодо тригонометричних тотожностей можна переглянути у другому розділі.

Гіпотеза була експериментально підтверджена.

Матеріал магістерського дослідження може бути використаний вчителями математики загальноосвітніх шкіл на математичних гуртках та факультативних заняттях.

Вказівки щодо подання певного матеріалу були виокремлені та поданні у табличному вигляді і подані у магістерській роботі як додатки.

Сучасний світ потребує сучасної системи освіти. Українська система освіти стала на шлях змін, але це тільки початок, ще багато чого потрібно зробити і не тільки нашим урядовцям, а й нам. Освіта починається з кожного з нас і ми завжди є частиною її, а вона нас.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. PISA 2018: Завдання PISA, Електронний ресурс: https://vseosvita.ua/c/news/post/5425
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Вид 2-е, перероб. і доп. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст./ Г.П. Бевз– К.: Вища школа. 2017. 76-98с.
3. Бугайов О.І. Диференціація навчання у загальноосвітній школі/О.І. Бугайов, Д.І. Дейкун – К., 2012. – с.9–19.
4. БурдаМ.І. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи./ М.І.Бурда – К.: ВТФ «Перун», 2011. – 64 с.
5. Васильєва Д.О. Особливості Сінгапурської методики. Електронний ресурс: https://vseosvita.ua/c/news/post/5425
6. Вишенський В. А. Збірник задач з математики: Навч. посібник./ В. А.Вишенський, М. О.Перестюк, А. М. Самойленко — 2-ге вид., доп. — К.: Либідь, 2013. — 344 с.
7. Воєводова А.Л. Порівняльний аналіз навчальних програм математики для учнів старшої школи в Україні та Ізраїлі. Електронний ресурс: https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/42996/tezy%20dopovidei.pdf?sequence=1#page=99
8. Гордійчук Г. Б. Історико-педагогічні аспекти неперервної освіти // Всеукр. наук.-практ. конф. Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість"/ Г. Б. Гордійчук– К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2013. – Т. 1. – С. 67-70.
9. Дубинчук О.С. Методика викладання алгебри 7-9 класах. Посібник для вчителя/ О.С. Дубинчук, Ю.І. Мальований, Н.П. Дичек, - К.: Ряд.шк.,2012 р. – 254 с.
10. Календарно-тематичне планування з математики 5-11 класи. – Мерзляк.А.Г.: Підручники і посібники, 2021.

11. Коваль В.В. Загальна методика викладання математики/ В.В.Коваль, О.В.Крайчук, Г.Я. Клекоць.– РДГУ, Рівне 2005. 165с.
12. Литвиненко Г.М. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту/ Г.М.Литвиненко, Л.Я.Федченко, В.О.Швець, частина I.–Львів, ВНТЛ, 2017. – 78с.
13. Мальцева Н.О.Алгебра. Готуємось до зовнішнього незалежного оцінювання/ Н.О.Мальцева, Т.Г. Роєва – Х.: Країна мрій, 2019. – 304 с.
14. Маслай Г. С. Рівняння та системи рівнянь з параметрами: Математика. № 21–22 (81–82),/ Г. С.Маслай, Л. О. Шоголева Червень 2021.
15. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір // Підр. для 10 кл. загальноос. навч. закл., академч. рівень, .Х.: Гімназія, –2021. – 445 с.
16. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч.для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір // – Х.: Гімназія, 2021. - 352 с.
17. Методика викладання математики: Наук.-метод. зб./ За ред. І.Є. Шиманського, Г. П. Бевза. – К.: Рад. шк., 2014-2017 .– Вип. 1-14.
18. Мордкович, А.Г. Методичні проблеми вивчення тригонометрії в загальноосвітній школі [Текст] / А.Г. Мордкович / / Математика в школі. 2020 – № 6 - с.32-38.
19. Онопрієнко О.В. Помилки в навчанні математики: коли можуть бути корисними та як їм зарадити. Електронний ресурс: https://nus.org.ua/view/pomylky-v-navchanni-matematyky-koly-mozhut-buty-korysnymy-ta-yak-yim-zaradyty/
20. Рего В.Л. Історичний нарис розвитку тригонометрії. 2021. Електронний ресурс: https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/54450
21. Саушкін О. Ф. Розв'язування алгебраїчних рівнянь/ О. Ф. Саушкін – К.: КНЕУ – 162 с.

22. Сіра І.Т., Толок Д. В. Сучамні методи викладання тригонометрії в закладаі середньої та передвищої освіти. 2022. Електронний ресурс: https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/10514
23. Слєпкань З.І. Методика навчання математики :Підручник для студ. спец. пед. навч. закладів./ З.І.Слєпкань – К.: Зодіак ЕКО, 2020. – 304 с.
24. Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі/ А.А. Столяр – Харків, 2012.
25. Чайковський М. А. Квадратні рівняння/ М. А. Чайковський – К., 2017. – 242 с.
26. Швець В.О. Навчальні цілі і методика їх формування / методика викладання математики і фізики. Респ. наук. метод. зб./В.О.Швець –К.: Рад. шк., 2022 р.
27. Шкіль М. І.Алгебра і початки аналізу: Проби, підруч. для 10-11 кл. серед, шк./ М. І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С Дубинчук - К.: Зодіак-ЕКО, 2015.– 608с.
28. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник (для учнів середніх ПТУ)/ М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Вища шк., 2012.– 479с.

Додатки

Приклади завдань PISA

Запитання 1

Група завдань – ***ВІТРИЛЬНІ КОРАБЛІ***

Назва корабля : «Нова хвиля»

Тип: фрахтове судно

Довжина: 117 метрів

Ширина: 18 метрів

Вантажопідйомність: 12 000 тонн

Максимальна швидкість: 19 вузлів

Витрати дизельного палива за рік без використання кайта: приблизно 3 500 000 літрів.

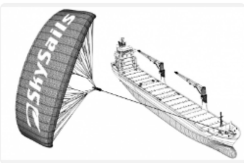
Із-за високої вартості дизельного палива (0,42 грошової одиниці за літр) господарі корабля «Нова хвиля» думають про те, щоб забезпечити свій

корабель кайтом. Підраховано, що аналогічний кайт дає можливість зменшити витрату дизельного палива на 20%.

Вартість установки на «Новій хвилі» кайта складає 2 500 000 грошових одиниць. Через скільки приблизно років економія на дизельному паливі покриє вартість установки кайта?

Зробіть обчислення,що підтверджують вашу відповідь.

Запитання 2



Група завдань – ***ВІТРИЛЬНІ КОРАБЛІ***

Одна з переваг використання кайта полягає в тому, що він рухається

на висоті 150 м. Там швидкість вітру приблизно на 25% більша, ніж на рівні

палуби корабля. З якою приблизно швидкістю дме вітер на кайт, коли

швидкість вітру, що виміряна на палубі корабля, дорівнює 24 км/год?

варіанти відповідей

- 6 км/год
- 25 км/год
- 18 км/год
- 30 км/год
- 49 км/год
- Немає відповіді

Запитання 3

Група завдань – ***ВЕЛОСИПЕДИСТКА***

Олена щойно придбала новий велосипед. У нього є спідометр, що закріплений на кермі. Спідометр показує відстань, яку Олена проїхала, і середню швидкість її поїздки.

Запитання 1:

В одній із поїздок Олена спочатку проїхала 4 км за 10 хвилин, а потім ще 2 км за наступні 5 хвилин. Яке з наступних тверджень правильне?

варіанти відповідей

- Середня швидкість Олени була більшою впродовж перших 10 хвилин, ніж впродовж наступних 5 хвилин.
- Середня швидкість Олени була однаковою впродовж перших 10 хвилин і впродовж наступних 5 хвилин.
- Середня швидкість Олени була меншою впродовж перших 10 хвилин, ніж впродовж наступних 5 хвилин.
- За наданою інформацією неможливо нічого сказати про середню швидкість Олени.

Запитання 4

Група завдань – ***ВЕЛОСИПЕДИСТКА***

Олена щойно придбала новий велосипед. У нього є спідометр, що закріплений на кермі. Спідометр показує відстань, яку Олена проїхала, і середню швидкість її поїздки.

Запитання 2:

Олена проїхала 6 км до будинку своєї тітки. Спідометр показав, що в середньому вона їхала зі швидкістю 18 км/год під час всієї поїздки. Яке з наступних тверджень правильне?

варіанти відповідей

- Олена витратила 20 хвилин, щоб доїхати до будинку тітки.
- Олена витратила 30 хвилин, щоб доїхати до будинку тітки.
- Олена витратила 3 години, щоб доїхати до будинку тітки.
- Неможливо сказати, скільки часу витратила Олена, щоб доїхати до будинку тітки.

Група завдань – КНИЖКОВІ ПОЛИЦІ

Щоб зібрати один комплект книжкових полиць, теслі потрібні

наступні деталі:

4 довгих дерев'яних панелі; 6 коротких дерев'яних панелей;

12 маленьких скоб; 2 великі скоби; 14 шурупів.

У теслі є 26 довгих дерев'яних панелей, 33 короткі панелі, 200 маленьких скоб, 20 великих скоб і 510 шурупів.

Запитання:

Яку найбільшу кількість комплектів книжкових полиць може зібрати тесля з цих деталей?

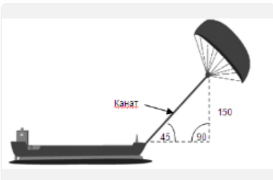
Запитання 7

Група завдань: ***КОСМІЧНА СТАНЦІЯ***

Космічна станція N залишалася на орбіті впродовж 15 років і приблизно 86 500 разів облетіла навколо Землі впродовж усього часу свого існування в космосі. Щонайдовший період перебування космонавта на станції N тривав приблизно 680 днів.

Запитання:

Скільки разів при цьому космонавт облетів навколо Землі? вкажіть найбільш близьке значення.



Група завдань – ***ВІТРИЛЬНІ КОРАБЛІ***

Чому приблизно має дорівнювати довжина канату кайта, щоб він тягнув корабель під кутом в 45° і знаходився на висоті 150 метрів по вертикалі,

як показано на малюнку?