МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ З МЕТОДИКОЮ ВИКЛАДАННЯ

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему

«Методика розв'язування нестандартних математичних задач для учнів 5-6 класів»

Виконала: здобувач ступеня вищої освіти «магістр»
Вікторія КРАВЕЦЬ

Керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Наталія СИНІЦЬКА

Рецензент:
кандидат педагогічних наук, доцент
Юрій ЛОТЮК

Рівне – 2024 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Розв'язування та складання математичних задач у визначений час, з урахуванням їх освітнього, розвивального, виховного та практичного значення, безсумнівно, є однією з найважливіших форм організації навчальної діяльності учнів. Майбутній вчитель математики повинен усвідомлено володіти основними методами та способами розв'язування задач. Він також має вміти реалізувати методичну функцію задач, що пов'язана з розвитком умінь навчати учнів розв'язувати задачі.

Аналіз літератури та практики навчання математики в загальноосвітніх школах свідчить про недостатню розробленість технології розв’язування нестандартних задач у методиці викладання математики. Актуальність дослідження проблеми створення технології розв’язування нестандартних задач, орієнтованої на інтелектуальний розвиток учнів, зумовлена необхідністю подолання протиріччя між потребами суспільства та окремих індивідів у формуванні інтелектуально розвиненої особистості. Така особистість повинна бути здатною до активного творчого засвоєння знань, самостійної, свідомої та цілеспрямованої діяльності у розв’язанні різноманітних завдань. Водночас існує брак практичних технологій навчання, які б забезпечували інтенсифікацію інтелектуального розвитку учнів під час оволодіння способами роботи з математичною інформацією..

Ступінь розробки теми у науковій літературі. Проблема застосування нестандартних завдань для логіко-математичного розвитку учнів привертала увагу вітчизняних педагогів, таких як А. Алексюк, О. Біляєва, Е. Голанд, Л. Гордон, О. Синиця, В. Сухомлинський, В. Онищук, О. Савченко та інших. Проте, через свою багатогранність, ця проблема не має однозначного вирішення. Формування стійких і глибоких інтересів у школярів є завданням першочергової важливості.

Поняття «математична задача» було предметом дослідження в працях таких вчених, як Г. П. Бевз, Є., М. В. Богданович, М. І., В. І. Крупич, Є. І. Лященко, Д. Пойя, З. І. Слєпкань, Л. М. Фрідман та інших. Ці автори аналізують структуру задачі, виділяють етапи її розв’язання, описують методи та прийоми, які використовуються в процесі, а також розробляють різноманітні класифікації математичних задач.

Актуальність даної проблеми полягає в необхідності виховання у учнів пізнавального інтересу до математики та розвитку їх інтелектуальних здібностей через впровадження нестандартних завдань. Завдання виконують роль як предмета, так і засобу навчання. Вони слугують основним інструментом для забезпечення зв'язку між навчанням і реальним життям, а також для реалізації міжпредметних зв'язків як у межах математики, так і з іншими навчальними дисциплінами.

Метою даного дослідження є вивчення характеристик нестандартних математичних задач та аналіз їхнього впливу на розвиток пізнавального інтересу і інтелектуальної активності учнів під час вивчення математики.

Для досягнення поставленої мети поставлено такі **завдання:**

1. Проаналізувавши науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрити поняття «задача» та «нестандартна задача».

2. Схарактеризувати особливості мислення учнів при розв’язуванні нестандартних математичних задач.

3. Визначити основні методичні принципи добору змісту розв’язування і складання математичних задач.

4. Дослідити логічні та алгебраїчні підходи до діяльності, пов’язаної з розв’язуванням і складанням математичних задач.

5. Узагльнити, розвинути та систематизувати матеріали для розв’язування нестандартних математичних задач в 5-6 класах відповідно до їх видів.

Об'єктом є процес навчання учнів 5-6 класів розв’язуванню нестандартних математичних задач.

Предмет дослідження становить формування змісту та методів навчання учнів 5-6 класів розв’язуванню нестандартних математичних задач.

Для розв'язання поставлених завдань використана система загальнонаукових **методів** теоретичного та емпіричного дослідження:

1) теоретичні: аналіз відомостей з проблеми дослідження, представлених в науковій літературі, та узагальнення здобутої інформації; систематизація та інтерпретація отриманих даних; аналіз, зіставлення й узагальнення теоретичного та емпіричного матеріалу;

2) емпіричні: спостереження, бесіда, анкетування;

3) методи описової та математичної статистики.

Практичне значення дослідження полягає в науковому обґрунтуванні, розробці методики та експериментальній перевірці систематизації нестандартних задач з математики для учнів 5-6 класів.

Теоретичне значення дослідження полягає у тому, що з позиції системного й особистісно-орієнтовного підходу розглянута проблема розвитку творчих здібностей учнів в навчальному процесі на сучасному етапі, розкрито поняття «нестандартна задача», а також у виявленні шляхів, методів, прийомів і засобів, які сприяють розв'язуванню нестандартних задач математики учнями 5-6 класів.

Апробація результатів дослідження здійснювалася в ході педагогічної практики. Основні положення та висновки дослідження було викладено на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2023 р. травень 2024 р.

Дослідження має таку **структуру**: вступ, два розділи та висновки до кожного з них, загальні висновки, список використаних джерел та додатки.

РОЗДІЛ І. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

1.1. Роль і місце задач у навчанні математиці

Математика та її характерний стиль мислення є важливими складовими загальної культури сучасної людини. Завдання вчителів математики полягає в тому, щоб ознайомити учнів з цими культурними елементами та надати їм базові математичні знання, необхідні для кожної освіченої особи.

Одним із ключових завдань шкільної математики є розвиток логічного мислення учнів. Логічне мислення характеризується послідовністю, несуперечливістю та доказовістю. Звісно, в простих ситуаціях кожна людина може мислити логічно, але коли йдеться про складніші концепції, такі як розрізнення необхідних і достатніх умов або класифікація, людина з недостатньо розвиненим логічним мисленням може відчувати труднощі. Тому учням необхідні певні знання та навички. Варто зазначити, що розвиток логічного мислення можливий і важливий у процесі вивчення всіх навчальних предметів, а не лише математики. Проте математика надає один із найкращих матеріалів для цього. На уроках математики учні навчаються формулювати визначення, проводити аналогії, ознайомлюються з основними законами логіки тощо. Важко знайти інший шкільний предмет, який би так ефективно сприяв розвитку логічного мислення, як математика.

Суспільно-практичні цілі навчання математики полягають у підготовці учнів до реального життя та суспільно корисної праці. Школа повинна приділяти особливу увагу тим аспектам програми, з якими учні можуть зіткнутися в повсякденному житті. Це і є практичні цілі навчання математики. При обговоренні практичних застосувань важливо також враховувати міжпредметні зв'язки, адже на уроках математики доцільно наводити приклади, знайомі учням з курсів фізики, хімії та інших предметів.

Виховні цілі навчання математики в школі в основному полягають у розвитку культури мислення учнів, формуванні в них колективізму, наполегливості та інших позитивних рис характеру [12].

Відомо, що в процесі своєї діяльності людина стикається не лише з повторюваними завданнями, а й з новими, які раніше не зустрічались. Школа повинна навчити випускників знаходити шляхи вирішення проблем, що передбачає формування у учнів здатності до самостійного творчого мислення. Залучення учнів до навчальної діяльності творчого характеру сприяє розвитку їх математичних здібностей. Не випадково відомий педагог і математик Д. Пойа зазначає: "Велике наукове відкриття вирішує масштабну проблему, але навіть у розв'язанні будь-якої задачі присутня частка відкриття"[5].

Кожна конкретна навчальна математична задача зазвичай має на меті досягнення не однієї, а кількох педагогічних, дидактичних та навчальних цілей. Ці цілі визначаються змістом задачі та її призначенням, яке надає їй вчитель. Дидактичні цілі, які вчитель ставить перед тією чи іншою задачею, визначають її роль у навчанні математики. В залежності від змісту задачі та дидактичних цілей її використання можна виділити її основну роль.

Навчальну функцію математичні задачі виконують під час формування у учнів системи знань, умінь і навичок у галузі математики та її окремих дисциплін. Важливо виділити кілька типів задач залежно від їх навчальної ролі.

Задачі для засвоєння математичних понять. Відомо, що формування математичних понять відбувається успішно лише за умови ретельної та систематичної роботи над цими поняттями, їх визначеннями та властивостями. Щоб повноцінно оволодіти поняттям, недостатньо лише вивчити його визначення; необхідно глибоко зрозуміти значення кожного слова в визначенні та чітко знати властивості вивченого поняття. Такі знання, в першу чергу, здобуваються через розв'язування задач і виконання вправ.

1.2. Поняття задача, структура задачі

Історико-генетичний аналіз терміна «задача» у філософських, психолого-педагогічних та інших дослідженнях дозволяє виявити його походження, а також закони подальшого розвитку та функціональне навантаження в умовах сучасної шкільної освіти. Це поняття є одним із основоположних у психології, кібернетиці, а також у всіх науках природничо-математичного циклу, а також у теорії навчання і виховання. У літературі, що стосується цих галузей знань, термін має різні формулювання, оскільки в залежності від специфіки тієї чи іншої наукової дисципліни досліджуються різні аспекти цього об'єкта.

У найширшому сенсі термін "задача" розглядається як мета, яку потрібно досягти, або як питання, що вимагає вирішення на основі знань і логічних міркувань.

Це визначення в цілому відповідає життєвим асоціаціям, пов'язаним зі словом "задача". З філософської перспективи задача є усвідомленням незнання, що виникає внаслідок протиріччя між об'єктом і суб'єктом [10].

Задача – це сформульоване питання, на яке можна знайти відповідь, використовуючи арифметичні дії. Розглянемо основні складові, з яких складається кожна задача, і з'ясуємо, що означає її розв'язання.

З визначення задачі випливає, що в ній обов'язково має бути присутнє запитання. Без запитання задача не існує. Оскільки відповідь на запитання задачі отримується в результаті виконання арифметичних дій, очевидно, що в ній повинна бути вимога визначити певне число – шукане, а також мають бути вказані ті числа, з якими можна виконати дії для знаходження шуканого. Отже, обов'язковими елементами будь-якої арифметичної задачі є невідоме (шукане) число (або кілька таких) і відомі числа..

Термін «задача» має різні значення. У найзагальнішому сенсі можна стверджувати, що задача вимагає свідомого пошуку відповідних засобів для досягнення мети, яка є чітко визначеною, але безпосередньо недосяжною. З психологічної точки зору задача сприймається як свідома мета, що існує в певних умовах, а дії розглядаються як процеси або акти, спрямовані на її досягнення, тобто на розв'язання задачі.

В. М. Брадіс визначає задачу як всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу [25].

Суб'єктивна інформація, що міститься в задачі, сприймається як результат пізнання, який виникає внаслідок свідомих дій щодо цієї задачі.

Об'єктивна інформація, що також міститься в задачі, проявляється під час логічного розв'язання і визначається логічною структурою самої задачі.

Якщо суб'єктивна інформація про задачу сприймається певним реальним суб'єктом, то об'єктивна інформація є абстрактною (суб'єктом). Дії абстрактного суб'єкта відрізняються від дій реального суб'єкта, і це відображає різницю між логічним і психологічним процесами розв'язання задачі. Ці поняття тісно взаємопов'язані. В ідеальному випадку об'єктивна та суб'єктивна інформація про задачу можуть збігатися, але в реальних ситуаціях часто виникають різноманітні невідповідності. Тому в психології мислення розрізняють принаймні два визначення інформації: суб'єктивну та об'єктивну. Однак, коли ми характеризуємо розв'язання задачі як результат взаємодії суб'єкта з об'єктом, слід також враховувати проміжні або синтетичні значення цього поняття.

Розробляючи теорію задач, важливо дослідити об'єктивну логічну структуру їх розв'язання та співвіднести її з суб'єктивною психологічною структурою, оскільки між цими двома аспектами існують певні взаємозв'язки. У цьому контексті можна говорити про «об'єктивну логіку розв'язання» та «суб'єктивну логіку розв'язання». Введення цих термінів є виправданим, оскільки вони відображають теоретичну різницю в науці між об'єктивними та суб'єктивними аспектами поняття задачі та інформацією, що в ній міститься. Суб'єктивну структуру задачі, яка визначається її умовою та вимогою, прийнято називати інформаційною структурою задачі. Вона дозволяє класифікувати задачі за ступенем їх психологічної складності (проблемності).

Математична задача визначається як будь-яка вимога, що вимагає обчислень, перетворень, побудови, доведення або дослідження чогось, що пов'язане з кількісними відношеннями та просторовими формами, створеними людським розумом на основі знань про навколишній світ.

Серед великої кількості математичних задач можна виділити різні їх типи, такі як арифметичні, текстові та сюжетні..

Усі ці задачі мають такі характеристики:

1) вони сформульовані на природній мові, тому їх називають текстовими;

2) зазвичай у них описується кількісний аспект певних явищ або подій, що робить їх сюжетними;

3) ці задачі полягають у визначенні шуканого значення певної величини, які в початковій школі розв'язуються за допомогою арифметичних методів, тому їх іноді називають арифметичними. Отже, усі ці терміни відображають одне й те саме поняття [37].

Отже, основними складовими задачі є умови та запитання. Числові (або буквені) дані становлять частину умови. Шукане завжди представлено в запитанні. Проте іноді задача сформульована так, що запитання включає частину умови, або вся задача подана у вигляді запитання.

Усе це потрібно враховувати під час навчання дітей розв'язувати задачі. Один з ключових аспектів цього процесу полягає в тому, щоб діти навчилися самостійно проводити первинний аналіз тексту задачі, відокремлюючи відоме від невідомого. Важливо, щоб вони не лише виділяли числові дані, а й могли пояснити, що кожне з них означає в контексті задачі, зокрема, що стосується числа, яке потрібно знайти, і так далі. Також важливо, щоб під час первинного аналізу зверталася увага не лише на виділення даних і шуканого, а й на зв'язки між ними, які викладені в тексті задачі.

Під терміном "задача" ми маємо на увазі систему задач, яка розглядається у контексті її взаємозв'язку з існуючою або потенційною системою, що її розв'язує.

Обговорюване тут загальне визначення задачі ми називаємо кібернетичним. При цьому ми виходимо з того, що розв'язання задачі будь-якою розв'язуючою системою можна трактувати як процес управління, де задачна система виступає в ролі об'єкта управління, а розв'язуюча система – в ролі керівника [45].

Для того щоб вирішити задачу, розв'язуюча система повинна мати інструменти для розв'язання, такі як числа, фігури, поняття, а також певний набір операцій перетворення (складання, множення тощо). Крім того, необхідні способи розв'язування, які представляють собою послідовності операцій, що використовуються для вирішення задачі (до них належать алгоритми, інструкції, приклади рішень тощо).

Відомо, що при визначенні поняття важливо виявити його характеристики. На думку А. М. Сохора, основною рисою задач є потреба в здогадці та евристичному підході, що відрізняє їх від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І. Я. Лернер визначає ознаки будь-якої задачі наступним чином:

1) наявність мети розв'язання, що визначається вимогою або запитанням до задачі;

2) необхідність врахування умов і факторів, які є передумовами для застосування методу розв'язання та коректності самого розв'язку;

3) наявність або потреба у виявленні та формуванні методу розв'язання [52].

І. Я. Лернер визначає зміст задачі як проблему, що виникає внаслідок суперечності між відомим і невідомим. Це трактування відрізняється від загальноприйнятого в педагогічних дослідженнях, де будь-яке завдання, яке потребує виконання певних дій, вважається задачею, а будь-яка пізнавальна дія – розв'язанням пізнавальної задачі[47].

Умова визначається як «конкретні інформаційні системи, на основі яких слід працювати при вирішенні задачі», тоді як вимога – це те, до чого потрібно прагнути або що необхідно досягти в процесі трансформації інформаційних систем. Л. М. Фрідман також виділяє три елементи в структурі задачі: умову, вимогу та оператор. Оператором задачі він називає сукупність дій (операцій), які потрібно виконати над умовою задачі для досягнення її вимог. [14]

Доцільно підходити до визначення навчальної задачі з позицій кібернетики, тобто, окрім виділення задачної системи, також акцентувати увагу на розв'язуючій системі. Такий підхід суттєво змінює як процес розв'язування задач, так і навчання учнів цим навичкам. У цьому контексті навчальна задача розглядається як система, що складається з задачної та розв'язуючої підсистем, і визначається через їх взаємодії. Задана підсистема, як складова частина задачі, існує об'єктивно і формується через завдання та вправи в підручнику (може бути створена вчителем або учнем). Однак задача стає актуальною для суб'єкта лише в тому випадку, якщо вона передбачає певні перетворення з боку розв'язуючого для досягнення вимог ситуації задачі.

1.3. Нестандартні задачі і їх розв'язування

Розв'язання задачі можна охарактеризувати як «процес трансформації її умови, що базується на знаннях з відповідної галузі, певних логічних правилах виводу та специфічних інтуїтивних (евристичних) принципах». У найзагальніших рисах цей процес включає кілька етапів: аналіз задачі, пошук стратегії розв'язання, реалізація знайденого плану (безпосереднє розв'язання), перевірка того, чи відповідає отриманий результат вимогам задачі (перевірка розв'язання) та аналіз самого процесу розв'язання (вивчення використаних методів і розгляд альтернативних способів розв'язання).

Приступаючи до розв'язання задачі, важливо спочатку сприйняти її в цілому, а потім розділити на окремі частини. Під час фронтального ознайомлення вчитель читає (або переказує) задачу двічі. Перший раз мета читання — ознайомлення з загальним змістом. Другий раз задачу читають частинами, так, щоб кожна частина містила певну смислову «одиницю» тексту. Розподіл задачі на частини зазвичай передбачає виділення окремих числових даних. Під час другого читання доцільно записувати умову на дошці. Читаючи задачу, вчитель за допомогою пауз і інтонації акцентує увагу на числових даних та словах, що визначають вибір дії і запитання задачі. Якщо в задачі є терміни, які дітям маловідомі, їх слід пояснити заздалегідь, використовуючи предметне ілюстрування або малюнки [49].

Для того щоб перевірити, наскільки учні зрозуміли умову задачі, вчитель може поставити їм запитання, що стосуються окремих частин, або запропонувати переказати всю задачу. Щоб активізувати контрольне повторення, доцільно заздалегідь ставити перед учнями певні завдання. Наприклад: «Послухайте задачу і повторіть вголос її запитання» або «Прочитайте задачу самостійно і скажіть, що нам відомо про...» [55].

2) Аналіз задачі та пошук плану її розв'язання. Учень зможе успішно вирішити задачу, якщо зрозуміє значення слів і виразів, з яких вона складається. На початку навчання та при розгляді нових задач усвідомлення значення слів і зв'язків між величинами досягається через відтворення реальної проблемної ситуації, яка є моделлю задачі. У подальшому дедалі частіше використовується вербальний (словесний) аналіз задачі.

Вербальний аналіз у широкому сенсі охоплює, з одного боку, семантичний аналіз, а з іншого — пошук способу його розв'язання. Основна мета семантичного аналізу полягає в тому, щоб на основі розгляду тексту задачі визначити окремі значення величин та зв'язки між ними.

Під час аналізу необхідно з'ясувати, скільки величин розглядається в задачі та які значення вони мають. Визначення кожного значення величини зазвичай складається з трьох елементів: назви величини, вказівки на особливість конкретного значення та числового значення, якщо воно відоме (задане). Якщо числове значення не вказано, воно вважається невідомим, і якщо в умові задачі є запитання «скільки?» або вимога «знайти», то це значення є шуканим [23].

3) Розв'язання задачі полягає у виконанні арифметичних операцій згідно з попередньо складеним планом. Цей план також використовується, коли задача вирішується шляхом формування виразу або рівняння. Під час виконання дій учні коментують свої кроки, пояснюючи, що було знайдено в результаті кожної операції. При усному розв'язуванні задачі не обов'язково щоразу повністю повторювати питання плану; можна обмежитися короткими коментарями.

4) Перевірка розв'язання є важливою складовою математичної діяльності. Вона полягає у визначенні правильності розв'язку задачі. Для вчителя цей процес слугує способом виявлення прогалин у знаннях учнів, а в поєднанні з аналізом і оцінкою — також засобом формування інтересу до вивчення математики. Важливо поступово виховувати в дітей усвідомлення необхідності самоперевірки та знайомити їх із простими методами перевірки. Для цього доцільно проводити бесіди, під час яких аналізуються помилки, допущені учнями..

Під час розв'язування простих задач учні формують певні уявлення про структуру задачі. Учителі пропонують різноманітні запитання та завдання, але в основному вони зводяться до необхідності розділити задачу на умову та запитання. Це може включати повторення умови задачі та її запитання, читання задачі з виділенням запитання, читання умови про себе, а вголос — лише запитання, а також визначення відомого та невідомого в задачі. Щоб підкреслити основну різницю між складеною та простою задачею, ставлять, наприклад, такі запитання: Чи можна розв'язати задачу за допомогою однієї дії? Чому неможливо вирішити задачу однією дією? Яка це задача — проста чи складена? Хоча ці запитання є корисними, вони не охоплюють усіх аспектів поняття "задача". Тому важливо урізноманітнити роботу в цьому напрямку.

У підручниках для початкових класів більшість задач містить запитання зі словом "скільки". Інші задачі формулюються за допомогою таких слів і виразів, як “Чому дорівнює .?”, “Знайти .”, “Обчислити”. Кількість таких задач з кожним наступним етапом зростає, проте за змістом вони відносяться до практичних задач. Це одна з причин, чому учні сприймають вимогу задачі як речення, що починається зі слова "скільки"[19].

Щоб уникнути такого стереотипу, іноді варто змінювати формулювання запитань. Наприклад, замість "Скільки літрів бензину залишилося?" можна запитати "Яка залишилася кількість бензину?" або "Визначте залишок бензину", "Яка величина залишку бензину?" У цьому випадку узагальнюючим терміном є "залишок". Запитання "Скільки учень заплатив за всю покупку?" можна переформулювати як "Яка загальна вартість покупки?" або "Обчисліть загальну вартість покупки". Запитання без слова "скільки" пропонує вчитель, тоді як учні формулюють запитання, що містять це слово.

Для розвитку уявлень учнів про структуру задачі дуже корисними є вправи на перетворення та складання задач. Основними вправами для простих задач є підбір запитання до умови або підбір умови до запитання. До творчих завдань відносяться: складання задач за заданим розв’язком або малюнком; порівняння задач; перетворення даної задачі в споріднену (в яких величини пов'язані однаковою залежністю). Розв'язування даної задачі та складання задачі, оберненої до неї, вимагає ще раз розглянути залежності між величинами, але з іншого кута зору. Це сприяє глибшому усвідомленню не лише залежностей між величинами і способів розв'язування задач, а й їх структури.

Свідоме вивчення математики та розвиток мислення учнів активізується через самостійне створення (конструювання) математичних задач. По-перше, це сприяє формуванню самостійності, адже діти працюють з вивченими об'єктами та фактами математики, аналізуючи та оцінюючи їхні властивості, відмінності та характерні риси. По-друге, це стимулює їхню творчу розумову активність.

Не існує єдиного загальноприйнятого визначення терміна «задача». Наразі існує близько 20 різних визначень. Наприклад, математичною задачею вважається така задача, що розв'язується за допомогою математичних методів. Або ж: математична задача – це вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити щось, що стосується просторових форм і кількісних відносин [32].

1.4. Що ж таке нестандартна задача? Постановка і розв'язування проблем при навчанні математики

Основним засобом розвитку творчого мислення учнів є вирішення нестандартних задач або задач стандартного формату, які вирішуються незвичайними методами. Що таке нестандартна задача? Це така задача, для якої в рамках курсу математики немає загальних правил і принципів, що визначають чітку програму її розв'язання.

При розв'язуванні нестандартної задачі учні повинні:

- ознайомитися з умовою задачі;
- розробити план її розв'язання;
- створити математичну модель та вирішити її;
- проаналізувати отриману відповідь і метод, використаний для розв'язання задачі.

Основна мета задач полягає в розвитку творчого мислення учнів, зацікавленні їх математикою та спонукання до відкриття математичних фактів. Прикладом такої задачі є: визначити об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра перпендикулярні одне одному і мають довжини 15, 16 і 17. Коли учні намагаються розв'язати цю задачу стандартним методом, вони часто "заплутуються" в обчисленні площі основи за формулою Герона. Натомість, цю задачу можна вирішити набагато простіше, використовуючи нестандартний підхід. Якщо "перевернути" піраміду так, щоб одна з бічних граней стала основою, учні можуть побачити, що одне з ребер є висотою піраміди, а в основі розташований прямокутний трикутник.

Оскільки ми живемо в епоху змін, інновацій та інтелекту, ця епоха визначає нові умови життя і висуває нові вимоги до особистості. Якісні зміни в суспільстві підтверджують, що найбільшою цінністю є унікальна людська особистість зі своїми нахилами, вподобаннями та обдаруваннями. Тому виявлення розумової обдарованості (як інтелектуальної, так і творчої), а також розвиток і реалізація спеціальних здібностей у дітей є однією з найактуальніших проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики. Відтак, навчання і виховання обдарованих учнів повинно базуватися на таких дидактичних принципах, як індивідуалізація та диференціація навчання, довіра і підтримка, а також залучення обдарованих учнів до активної участі в житті школи.

Нестандартні дослідницькі завдання, які вчитель інтегрує в навчальний процес, обдаровані діти сприймають як виклик для свого інтелекту. Інтелектуальний та естетичний потенціал шкільного курсу математики значно зростає, коли на уроках та в інших формах взаємодії зі школярами використовуються ігрові елементи, яскраві історичні факти та цікаві "красиві задачі"[34].

Обов'язковою умовою розвитку обдарувань учнів як під час уроків, так і в позаурочний час має бути проблемний підхід до викладання. Творчість учнів, а також новизна і оригінальність їх навчальної діяльності виявляються тоді, коли вони самостійно формулюють проблему і шукають способи її вирішення.

Важливо прагнути до постійного підвищення рівня творчості обдарованих дітей, знаходити оптимальні співвідношення всіх видів їхньої діяльності для досягнення найкращих результатів. Вчителю слід звернути увагу на те, що при формулюванні проблеми варто залишати "нерозв'язані питання", на які учні повинні знайти відповіді самостійно, використовуючи різні джерела: літературу, експерименти, консультації тощо.

При вирішенні нестандартних завдань з обдарованими дітьми можна використовувати різні форми навчання: індивідуальні, фронтальні та групові. Фронтальні заняття можуть включати дискусії, організаційно-діяльні ігри (ОДІ) та рольові ігри. Групові заняття передбачають створення постійних груп з чергуванням ролей учасників, поділ класу на групи з однаковими завданнями, а також з різними завданнями, з подальшим загальним звітом кожної групи перед усім класом.

Математичні гуртки є важливою формою позакласної діяльності з математики. Заняття в них доповнюють уроки та надають можливість учням задовольнити свої інтереси і прагнення, які виходять за межі навчальної програми. Під час гурткової роботи учні навчаються розв’язувати математичні задачі, працювати з математичною літературою та готуватися до участі в математичних олімпіадах [54].

Олімпіада — це свято, на якому розкриваються яскраві математичні ідеї та елегантні міркування. Проте успіх на такому заході чекає лише на тих, хто ретельно до нього підготувався. Без систематичної роботи на уроках і поза ними досягти значних результатів на олімпіаді неможливо..

Активний пошук рішень для задач є процесом творчого мислення, який є важливою складовою творчої діяльності. Вирішуючи нестандартні задачі, учні краще підготовлені до розв’язання різноманітних викликів, які ставить перед ними життя та практична діяльність.

Процес розв’язування будь-якої нестандартної задача полягає у послідовному застосуванні двох основних операцій:

- Зведення (шляхом перетворення або переформулювання) нестандартної задачі до іншої, їй еквівалентної, але уже стандартної задачі;
- Розбиття нестандартної задачі на декілька стандартних підзадач.

В залежності від характеру нестандартної задачами використовуємо одну із цих операцій або обидві. При розв'язуванні більш складних задач ці операції доводиться застосовувати багаторазово.

Не існує єдиного способу розв'язання нестандартних задач. Навпаки, кількість методів постійно зростає. Деякі задачі можна вирішити за допомогою кількох різних підходів або їх комбінацій. Характерною рисою таких задач є те, що розв'язання, яке на перший погляд виглядає простим, може вимагати використання методів, що застосовуються в серйозних математичних дослідженнях. Нижче наведено (за визначенням) неповний перелік методів розв'язання нестандартних задач: принцип Діріхле, доказ від протилежного, використання методів з інших наук (перетворення алгебраїчної задачі в геометричну або фізичну і навпаки), правило крайнього, розв'язання з кінця, пошук інваріанта, побудова контрприкладів, математична індукція, рекурсія, метод ітерацій, підрахунок двома способами, метод аналогій, провокаційний метод, допоміжна побудова, перехід у простір з більшою кількістю вимірів, допоміжна розмальовка.

Серед "шкільних" задач є й такі, які зазвичай позначаються зірочками, і їх розв'язання може продемонструвати окремі аспекти справжньої дослідницької діяльності в математиці. Це не прості задачі на підстановку чисел у готові формули чи виконання дій за відомими алгоритмами та правилами. Це задачі, в яких потрібно самостійно знайти (тобто справді відкрити для себе) метод дій. Яскравими прикладами таких задач є задачі на побудову в геометрії [52].

Особлива цінність нестандартних задач полягає в тому, що їх розв'язання вимагає застосування схем міркувань, які характерні для реальної дослідницької діяльності в математиці. Серед таких методів можна виділити доведення від супротивного, метод координат, векторний метод, традиційний геометричний метод та інші. Саме тому ці задачі користуються великою популярністю на різноманітних математичних конкурсах і олімпіадах. Отже, ознайомлення з ними та деякими методами їх розв'язання допоможе досягти успіху на таких змаганнях. Пропонований матеріал можна використовувати для занять у гуртках, підготовки олімпійців, індивідуальної роботи з обдарованими учнями, а також на уроках.

Зміст додаткового навчання математики поглиблює та розширює матеріал шкільного курсу. Це навчання спрямоване на розвиток навичок розв’язання складних і нестандартних задач, а також на засвоєння основних ідей і методів математики.

Пошук методу розв'язання є третім етапом у процесі вирішення задачі.

Коли метод знайдено, його потрібно реалізувати — це вже четвертий етап.

Після виконання розв'язання (письмово чи усно) важливо переконатися, що воно є правильним і відповідає всім вимогам задачі. Для цього проводиться перевірка, яка є п'ятим етапом процесу розв'язування.

При вирішенні багатьох задач, окрім перевірки, важливо також провести дослідження задачі. Це включає в себе визначення умов, за яких задача має розв'язок, а також кількість різних розв'язків у кожному конкретному випадку. Крім того, потрібно з'ясувати, за яких обставин задача не має жодного розв'язку. Усе це становить шостий етап процесу розв'язування.

Після того, як ви впевнилися у правильності розв'язання і, за потреби, виконали дослідження задачі, важливо чітко сформулювати відповідь. Це буде сьомий етап процесу розв'язування..

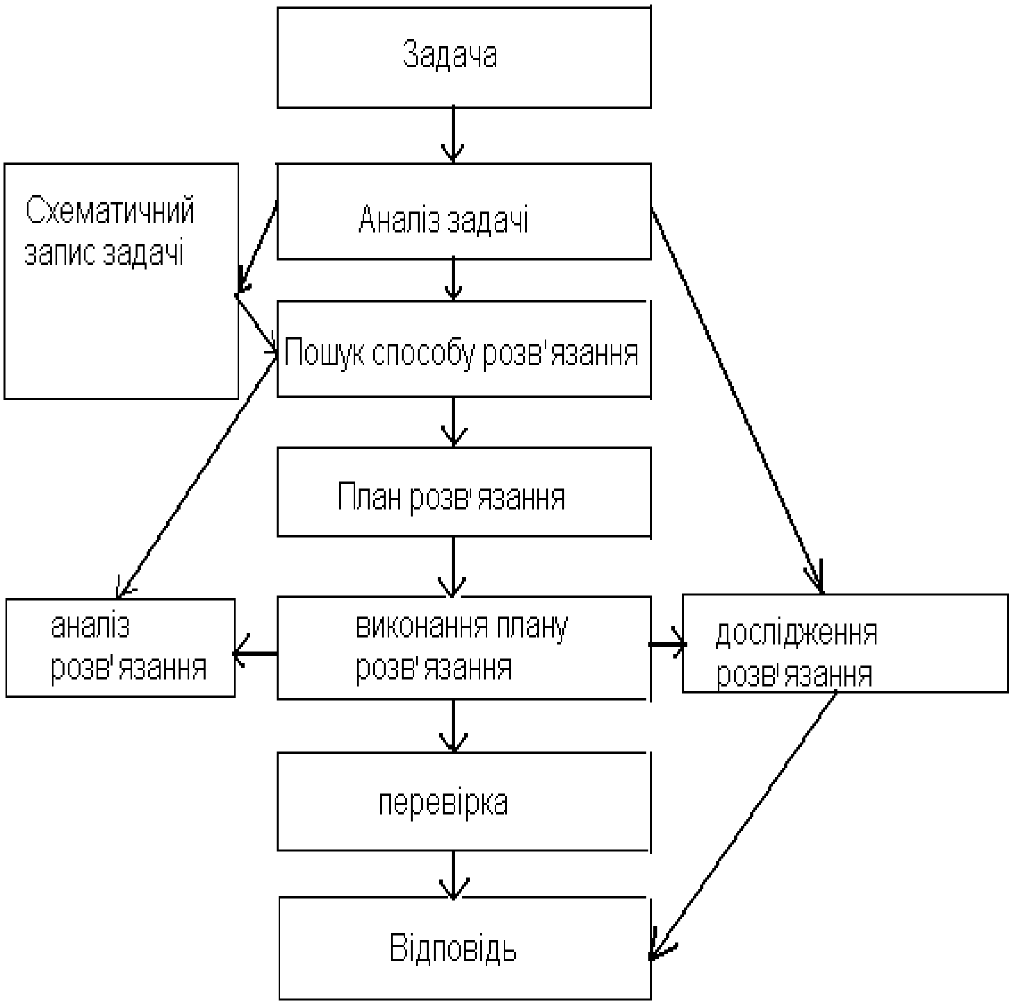
Врешті-решт, для навчальних і пізнавальних цілей важливо провести аналіз виконаного розв'язання. Це означає, що слід визначити, чи існує інший, більш ефективний метод розв'язання, чи можна узагальнити задачу, а також які висновки можна зробити на основі цього розв'язання. Усе це становить останній, восьмий етап процесу розв'язування.

Отже, весь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

- 1-й етап - аналіз задачі;

- 2-й етап - схематичний запис задачі;
- 3-й етап - пошук способу розв'язування задачі;
- 4-й етап - виконання розв'язування задачі;
- 5-й етап-перевірка розв'язку задачі;
- 6-й етап - дослідження задачі;
- 7-й етап - формулювання відповіді задачі;
- 8-й етап - аналіз розв'язування задачі.

Схема розв’язання задачі наведена в таблиці1



Таблиця 1.

Математичні задачі, для яких у шкільному курсі математики існують готові правила або які безпосередньо випливають з визначень чи теорем, що формують програму їх розв'язування у вигляді послідовності кроків, називаються стандартними. При цьому передбачається, що для виконання окремих етапів розв'язування стандартних задач у курсі математики існують конкретні правила [23].

Процес розв'язування стандартних задач має деякі особливості.

1. Аналіз задач зводиться до встановлення (розпізнавання) виду задач, до якого належить дана задача.

2. Пошук розв'язання полягає у створенні програми, що базується на загальному правилі (формулі, тотожності) або загальному положенні (визначенні, теоремі) – це послідовність кроків для розв'язування задач певного типу. Зазвичай немає потреби формулювати цю програму письмово; достатньо просто окреслити її усно для себе.

3. Розв'язання стандартної задачі полягає в застосуванні загальної програми до конкретних умов цієї задачі. Якщо певні етапи програми розв'язування потребують використання інших програм, то для них виконуються ті ж самі дії: розпізнається тип задачі, складається програма розв'язування та здійснюється розв'язання на основі цієї програми. Таким чином, для ефективного розв'язання стандартних задач (які є основними математичними задачами, оскільки всі інші в кінцевому підсумку зводяться до них) необхідно:

- - запам'ятовувати всі загальні правила (формули, тотожності) та основні положення (означення, теореми), вивчені в курсі математики;
- - вміти розгортати згорнуті загальні правила, формули, тотожності, а також означення і теореми у вигляді програми - послідовності кроків для розв'язування задач відповідних типів.

У визначенні стандартних задач основною характеристикою вважається наявність у курсі математики загальних правил або положень, які чітко окреслюють програму розв’язання цих задач та виконання кожного етапу цієї програми.

Таким чином, нестандартні задачі – це ті, для яких у курсі математики відсутні загальні правила і положення, що визначають точну програму їх розв’язання..

Процес розв’язування будь-якої нестандартної задача складається у послідовному застосуванні двох основних операцій:

1. Зведення (шляхом перетворення або переформулювання) нестандартної задачі до іншої, їй еквівалентної, але уже стандартної задачі;

2. Розбиття нестандартної задачі на декілька стандартних підзадач.

В залежності від характеру нестандартної задачами використовуємо одну із цих операцій або обидві. При розв'язуванні більш складних задач ці операції доводиться застосовувати багаторазово.

Типи задач:

1. алгоритмічні;

2. напівалгоритмічні;

3. евристичні.

Алгоритмічні – задачі, для розвяз. яких є алгоритм. Розвязуються за допом. безпосер. застос. визначення, формули, доведеної теореми. Роль таких задач – навчити учнів діяти в стандартних умовах.

Напівалгоритмічні - задачі, правила розвязання яких носять узагальнений характер і не м.б. зведені до об'єднання елементарних кроків, але зв'язки між елементами легко виявляються. Розвязуючи їх, учень вчитися застосовувати алгоритми в різних ситуаціях, відбувається узагальнення правил розвязання задач.

Евристичні - задачі, для розвязання яких необх. з'ясувати деякі приховані зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти невідомий спосіб розвязанняя.

Така типологія задач дає зрозумілий напрям діяльності вчителя по організації навчання учнів розвязуванню задач.

Обовязкові вимоги до розвязування задач:

- безпомилковість;
- обгрунтованість;
- повнота розвязку, вичерпний характер.

Бажані вимоги:

- найбільша простота розвязку;
- належний його запис;
- пояснення шляхів розвязання;
- можливе узагальнення розвязку задачі.

Етапи розвязання задачі:

1. Засвоєння змісту задачі.
2. Складання плану розвязання задачі.
3. Реалізація плану розвязання.
4. Аналіз і перевірка правильності розвязку задачі.

Організація навчання розвязанню задач.

Фронтальне розвязання задач - розвязання однієї і тієї ж задачі всіма учнями класу в один і той же час:

1. Усне фронтальне ррозвязання;
2. Письмове розвязання із записом на класній дошці;
3. Письмове самостійне розвязання;
4. Коментування розвязання.

При обговоренні розвязання задачі потрібно зупинитися на наступних питаннях:

- більш повне викор. умови задачі;
- обговорення роботи з пошуку розвязання;
- виявлення зв'язків з раніше розвязаними задачами.

1.5. Прийоми аналітико-синтетичного пошуку розв’язання задач

При роботі з цікавими задачами важливо враховувати такі моменти:

- Виділяйте 7-10 хвилин уроку для їх розв'язання не менше ніж 2-3 рази на тиждень.

- Комбінуйте додаткові вправи з програмними (стандартними) так, щоб попереднє завдання готувало учнів до наступного, ґрунтуючись на їхньому життєвому досвіді.

- Приділяйте особливу увагу розкриттю сюжету цікавої вправи, щоб діти усвідомили кінцеву мету завдання.

- Емоційно та образно розкривайте умови задач, використовуючи наочність.

- Не обов'язково, щоб учень самостійно розв'язав додаткову задачу; важливо створити ситуації, в яких він замислиться над нею та спробує знайти розв'язок.

- При розв'язуванні творчих вправ необхідно всебічно реалізовувати принцип диференційованого підходу.

- Не варто демонструвати весь процес розв’язування; набагато важливіше правильно направити думки учня. Головне – це не остаточний результат, а сам процес розв’язування [37].

- Слід практикувати повторне розв’язування цікавих задач.

Розв'язування задач є унікальною рисою інтелекту, а сам інтелект – це особливий дар, притаманний людині. Тому розв'язування задач можна вважати одним з найяскравіших проявів людської діяльності.

Вчитель, підбираючи задачі, має допомогти учневі усвідомити, що математичні задачі можуть бути не лише цікавими, а й привабливими, а інтенсивна розумова праця, що завершується успіхом, може приносити велику радість.

Використання різноманітних цікавих задач у навчальному процесі сприяє формуванню інтересу учнів до математики та розвитку їх математичних здібностей.

Аналізуючи різноманітні цікаві завдання, ми прийшли до висновку, що найбільший вплив на розвиток математичних навичок учнів мають вправи:

- логічного характеру;

- комбінаторні;

- з елементами дослідження;

- на кмітливість.

Досвід вчителів свідчить, що вже в початкових класах варто впроваджувати дослідницьку діяльність. Це допомагає учням усвідомити значення індукції, спостереження та експерименту, а також сприяє розвитку не лише навичок логічного мислення, але й евристичного, відкриваючи їм шлях до математичної творчості.

Постійна робота над цікавими завданнями спрямована на вдосконалення базових розумових операцій, формування критичного мислення, а також на загальне розкріпачення і гнучкість їхнього мислення.

Мати гнучке мислення означає, перш за все, вміти швидко відмовитися від звичного способу дій, коли він перестає бути ефективним, і замінити його новим, нестандартним, що відповідає новим умовам.

Під час розв’язування цікавих задач учні здобувають навички планування, раціонального вибору засобів для досягнення цілей, а також обґрунтування та аналізу своїх дій. Основна мета полягає в тому, щоб учні навчилися самостійно знаходити розв’язки будь-яких доступних їм задач.

Система навчання вирішенню захоплюючих задач повинна забезпечувати поступове збільшення складності виконуваних завдань і бути тісно пов'язаною з розвитком логічного мислення учнів.

У психології мислення, як вже згадувалося, встановлено, що процес мислення полягає, насамперед, в аналізі та синтезі інформації, що виділяється в результаті аналізу. Далі йдуть абстракція та узагальнення, які є їх похідними [19]. Таким чином, процес розв'язання завдань тісно пов'язаний із формуванням таких прийомів мислення, як аналіз, синтез, узагальнення, абстрагування та інші.

Існує дві основні форми аналізу:

- чуттєвий аналіз, що полягає в дослідженні чуттєвих образів, предметів і явищ;

- абстрактно-логічний аналіз, який є розумовим аналізом словесних образів, що виконується за допомогою понять і думок, виражених у мовах (знакових системах науки).

У методиці та практиці навчання математики аналіз і синтез, як основні операції, що лежать в основі діяльності учнів, мають особливо важливе значення. В навчанні математики аналіз і синтез проявляються в різних формах: як методи розв’язування задач, доведення теорем, дослідження властивостей математичних понять тощо.

Аналіз і синтез тісно пов’язані між собою, вони взаємодіють і доповнюють один одного, утворюючи єдиний аналітико-синтетичний метод.

Аналіз – це процес уявного або реального розподілу предмета (явища, процесу), його властивостей або відносин між предметами на складові частини (ознаки, властивості, відносини). Синтез, як протилежна процедура аналізу, полягає в об'єднанні частин предмета, явища або процесу в єдине ціле. Наприклад, розбиття складної задачі на кілька елементарних завдань є аналізом, тоді як об'єднання знайдених рішень цих елементарних завдань – це синтез. Іншим прикладом може бути структурний аналіз процесу навчання.

Аналіз під час пошуку рішення задачі або доведення теореми може бути або спадним, або зростаючим. Спадний аналіз базується на припущенні про істинність доведення твердження і дозволяє отримати систему наслідків, необхідних для підтвердження цього твердження. Він вимагає синтезу, що є протилежним напрямком міркувань.

Зростаючий аналіз, навпаки, має на меті довести, що відомі (дані в умові) відношення є достатніми для підтвердження доведеного твердження. У зростаючому аналізі також присутній синтез, тому він не потребує протилежних міркувань.

Зростаючий аналіз має свої методичні переваги: він сприяє усвідомленому та самостійного пошуку доказів, розвиває логічне мислення та забезпечує чітке розуміння і цілеспрямованість дій на кожному етапі міркувань.

Схема методу є досить простою. Вона полягає у вирішенні двох основних питань: що потрібно знайти та довести, і яку інформацію для цього слід мати? Важливо зазначити, що в молодших класах доцільно шукати розв'язки задач і доводити теореми за допомогою спадного аналізу.

Це зумовлено тим, що виводити необхідні ознаки легше, ніж підбирати достатні умови для формулювання відповідних висновків і тверджень.

В даному параграфі розглянемо прийоми Зростаючий аналізу для пошуку розв'язку задач на прикладі геометричних задач на обчислення, доведення і побудову.

Задача 1. Визначити радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо бічні сторони трикутника відповідно рівні 6 см і 5 см.

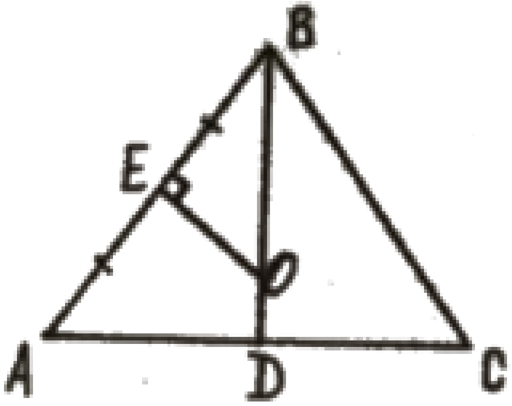


Рис.8

Дано: ΔABC, $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, $OB -$ радіус описаного кола.

Знайти: OB.

Виконаний малюнок за умовою задачі (рис.8) дозволяє висунути припущення про те, що радіус OB описаного навколо рівнобедреного трикутника кола доцільно шукати, виходячи з подібності прямокутних трикутників ABD і OBE ($\angle OBE$ спільний).

Оскільки, $\Delta OBE \sim \Delta ABD$, то $\frac{OB}{AB} = \frac{BE}{AB}$, звідси,

1) $OB = \frac{AB \cdot BE}{BD}$, де BE і BD невідомі;

2) $BE = \frac{1}{2} \cdot AB$, де AB відомо;

3) $BD^2 = AB^2 - AD^2$, де AD невідомо;

4) $AD = \frac{1}{2} \cdot AC$, де AC відомо.

Пошук розв'язку даної задачі закінчений. Тут не були виконані обґрунтування кожного кроку пошуку, так як вони очевидні.

Було звернуто увагу на інше, а саме на те, що невідоме в кожній формулі, що треба шукати. Дійсно, виявивши на першому кроці аналізу, що величини BE і BD невідомі, ми підбираємо для їх відшукання необхідні формули. Цей процес триває до тих пір, поки ці невідомі величини не будуть виражені через відомі. Для того, щоб записати розв'язок задачі, досить здійснити зворотний (протилежний) перехід від четвертої дії до першої. Для полегшення виконання зазначених в пошуку розв'язку дій можна послідовно виконувати відповідні обчислення.

Виконаний пошук дозволяє побудувати модель пошуку розв'язку задачі.

З цією метою побудуємо орієнтований графік пошуку її вирішення за допомогою зростаючого аналізу (ребра графіка спрямовані вгору, що означає: "досить знайти", "досить довести") (рис.9).

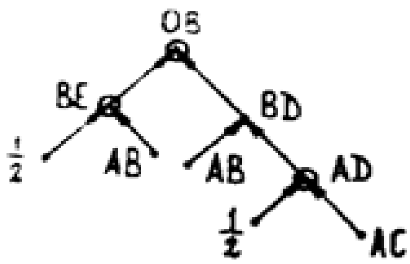


Рис.9

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

Міркування, виконані в протилежному напрямку від вершин, розташованих на четвертому рівні графіка, до вершини - на першому рівні є синтез (розв'язок задачі).

Однак, як було сказано вище, в цьому немає логічної необхідності, оскільки зростаючий аналіз забезпечує побудову достатніх умов для умови задачі, яка є наслідком її умови, а вірні умови при правильному міркуванні не можуть дати невірного значення шуканого.

Задача 2. Визначити площу рівнобедреної трапеції, у якій основи дорівнюють 10 см і 26 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін (рис.10).

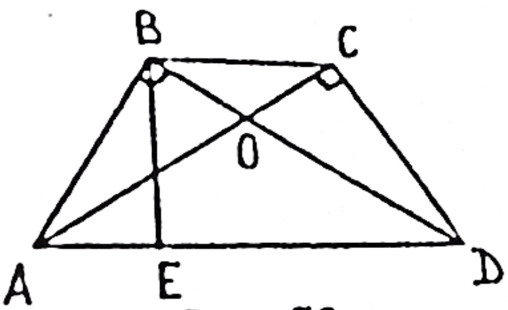


Рис.10

Дано: $ABCD$- трапеція, $AB = CD, AC \perp CD$,

$BD \perp AB$, $BC = 10$см$, AD = 26$см.

Знайти: $S_{\text{тр.}}$

Виконаємо аналітичний пошук розв'язку даної задачі:

1) $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AE$, де BC і AD відомо, BE невідомо;

2) $BE^2 = AE \cdot ED$, де AE і ED невідомі;

3) $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ де AD і BC відомі;

4) $ED = AD - AE$, де AD відомо, AE невідомо, але було визначено вище на 3-му кроці пошуку рішення.

Побудуємо відповідний орієнтований графік пошуку розв'язку задачі (рис.11).

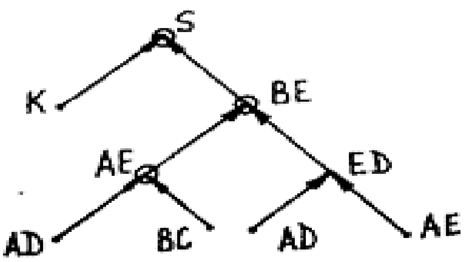


Рис.11

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

Пошук розв'язку задачі закінчений. Зауважимо, що виконаний пошук розв'язку задачі не завершився формулою, в якій невідомі величини визначаються даними задачі (як у випадку пошуку розв'язку задачі). Однак невідома величина AE на останньому етапі пошуку була визначена вище на 3-му кроці отже, спосіб розв'язку задачі знайдений.

Якщо зіставити умови і вимоги задачі, тобто дані і шукане, то в результаті такої розумової операції в геометричних задачах на обчислення можна встановити функціональне відношення між ними. Це відношення може бути як відомим, так і невідомим для суб'єкта, що прийняв задачу з метою її вирішення. Наприклад, в задачі 1 функціональне відношення невідоме, тобто учням невідома формула для знаходження шуканого. В цьому випадку його треба виявити. Раніше було встановлено, що шукане (радіус кола описаного навколо трикутника) може бути знайдено, виходячи з подібності трикутників ABD і OBE ($\angle OBE$ спільний).

У задачі 2 функціональне відношення відомо, тобто відома формула для знаходження шуканого - площа трапеції.

Знаходження або знання функціонального відношення є вихідним моментом в аналітико-синтетичному пошуку розв'язку задачі, а також базисом основного відношення, реалізованого на предметній області задачі. Основне відношення, як результат узагальнення системи відношень, реалізованої в задачі, керує пошуком її розв'язання (гл.2, 3).

Задача 3. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і гострим кутом α, прилеглим до цього катета. Бічна грань, що проходить через даний катет, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані утворюють з основою рівні кути, кожен з яких дорівнює β. Знайти об'єм піраміди.

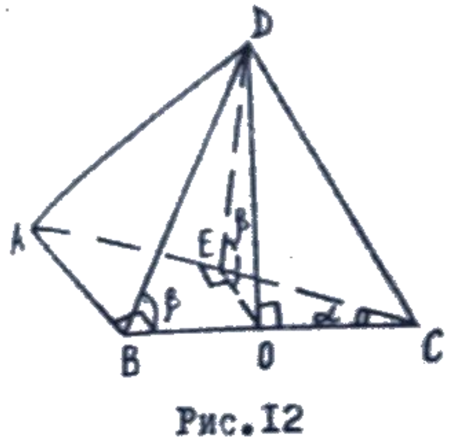


Рис.12

Дано: $DABC$- піраміда, ΔABC- основа піраміди, $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \alpha, BC = a$, $\text{дв. кут } AB = \beta$, $\text{дв. кут } AC = \beta, \Delta DBC \perp \Delta ABC$.

Знайти: V піраміди

Виконаний малюнок по умові завдання (рис.12.) дозволяє відзначити наступне: $\angle DOE = 90° -$ лінійний дв.кута BC, $\angle DEO = \beta -$ лінійний дв.кута AC, $\angle DBC = \beta -$ лінійний дв.кута AB.

У цій задачі функціональне відношення, тобто формула для знаходження шуканого, відома. У позначеннях на малюнку ця формула буде наступною: $V = \frac{1}{6} BC \cdot AB \cdot DO$.

Виконаємо аналітичний пошук розв'язку задачі.

1) $V = \frac{1}{6} BC \cdot AB \cdot DO,$ де BC відомо, AB і DO невідомі;

2) $AB = BC \cdot \tan \angle ACB$, де BC і $\angle ACB$ відомі;

3) $DO = OE \cdot \tan \angle OED$, де OE невідомо, $\angle OED$ невідомий;

4) $OE = OC \cdot \sin \angle ACB,$ де OC невідомо, $\angle ACB$ відомий;

5) $OC = BC - OB,$ де BC відомо, а OB невідомо;

6) $OB = \frac{DO}{\tan \angle OBD}$, де $\angle OBD$ відомий, а ,DO невідомо.

Тут має місце той випадок, коли невідома величина DO в пошуку розв'язку повторюється двічі. Тому пошук розв'язку задачі слід вважати завершеним, так як послідовна підстановка значень величин в протилежному напрямку, починаючи від шостого кроку, включаючи до третього кроку пошуку, дозволяє отримати рівняння з одним невідомим. Дійсно, маємо:

$$OB = \frac{DO}{\tan \angle OBD}, OC = BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}, OE = \left(BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}\right) \cdot \sin \angle ACB,$$

$$DO = \left(BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}\right) \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED.$$

Так як $\angle OBD = \angle OED = \beta$, то отримуємо:

$DO = BC \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED - DO \cdot \sin \angle ACB$, звідси випливає, що

$$DO = \frac{BC \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED}{1 + \sin \angle ACB}$$

Величини, що входять в праву частину формули для знаходження DO, є даними. Тому DO відомо, що дозволяє отримати розв'язок задачі.

Орієнтований графік пошуку розв’язку даної задачі буде наступним (рис.13).

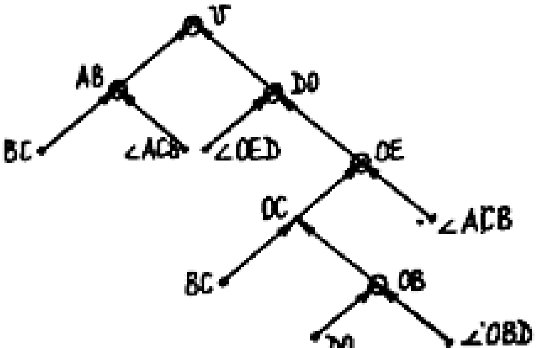


Рис.13

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

п’ятий рівень

шостий рівень

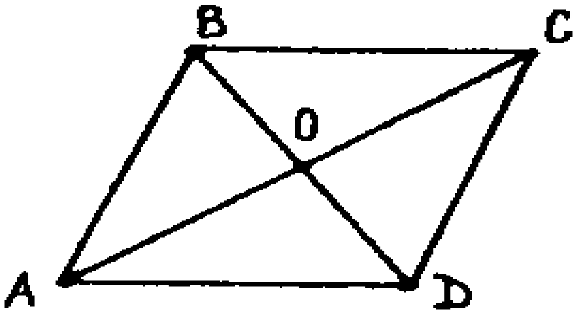


Рис.14

Задача. Знайти сторону ромба, знаючи, що його діагонагоналі відносяться як 1: 2, а площа ромба дорівнює 12 см^2 (рис.14).

Дано: $ABCD$- ромб, BD і AC - діагоналі ромба, $BD: AC = 1: 2$, площа ромба S = 12 см^2

Знайти: BC.

Приймемо відрізок m за одиницю вимірювання довжини відрізка. Так як

$BD: AC = 1: 2$, то $BD = m$ і $AC = 2m$.

Функціональне відношення невідоме, проте сторону ромба можна знайти за теоремою Піфагора: $BC^2 = BO^2 + OC^2$.

Виконаємо аналітичний пошук розв’язку даної задачі.

1) $BC^2 = BO^2 + OC^2$

2) $BO = \frac{1}{2}BD$

3) $BD = m$

4) $OC = \frac{1}{2}AC$

5) AC=2m

Пошук розв'язку задачі закінчений.

Однак знайти сторону ромба не можна, так як послідовна підстановка значень величин в протилежному напрямку дозволяє встановити, що, $BC^2 = \frac{5}{4}\mathrm{m}^2$, де m невідоме. У цьому випадку виникає необхідність здійснити синтетичний пошук, виходячи з даних задачі, для визначення числового значення одиничного відрізка m. Площа ромба

$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Враховуючи, що $S = 12\text{см}^2$, $AC = 2m$, $BD = m$, отримаємо:

$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m = 12$ або $\mathrm{m}^2 = 12$, тобто $m = 2 \cdot \sqrt{3}$

Зробивши послідовну підстановку знайденого значення т., у виконаний вище пошук розв'язку задачі; отримаємо: $OC = 2\sqrt{3}$, $BO = \sqrt{3}$, отже, сторона ромба $BC = \sqrt{15}$.

Таким чином, для розв'язання даної задачі виникла необхідність здійснити почерговий рух від шуканого (аналіз) до даних (синтез). При цьому синтетичний пошук дозволив знайти те значення невідомої величини, яке аналітичний пошук виявити не зміг. Графік аналітичного пошуку розв'язку задачі буде наступним (рис. 15).

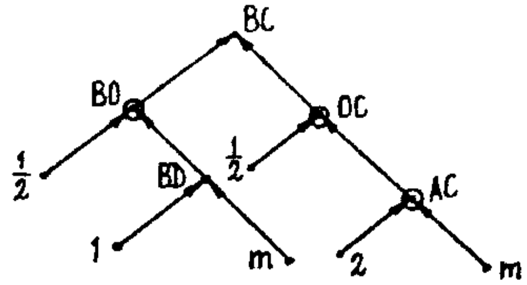


Рис.15

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

Задача 4. Площина α паралельна стороні BC трикутника ABC і проходить через середину AB. Довести, що площина α проходить так само через середину AC (рис.16).

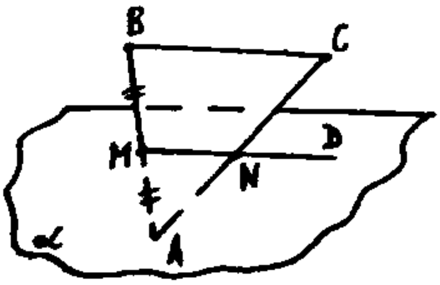


Рис.16

Дано: $\alpha, \Delta ABC, \alpha \parallel BC, AM = MB, M \in \alpha$.

Довести: α проходить через середину AC.

У задачах на доведення і побудову поняття "функціональне" і "основне" відношення збігаються за своїм змістом, що не завжди має місце для геометричних задач на обчислення.

У цій задачі, розглядаючи її як систему відношень, можна виділити наступні:

- відношення паралельності,
- відношення перетину,
- відношення прилеглостіі,
- відношення рівності.

У цій системі відношень на основі узагальнення з урахуванням умов і вимог задачі можна вказати два, відношення, які керують пошуком розв'язку задачі. Це відношення паралельності і відношення перетину. Однак, при виявленні внутрішньої структури задачі повинно бути вибрано одне з них.

Графік пошуку розв'язку задачі на доведення буде наступним (рис.17)

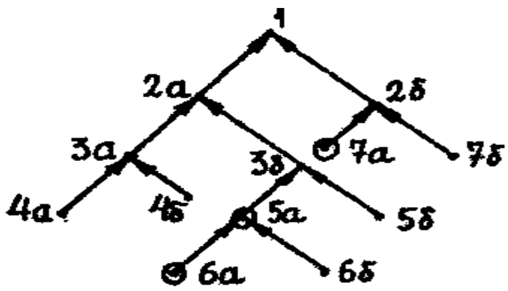


Рис.17

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

п'ятий рівень

Задача 5. Через три дані точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, провести коло.

Виконаємо пошук розв'язку задачі за допомогою зростаючого аналізу (рис.18).

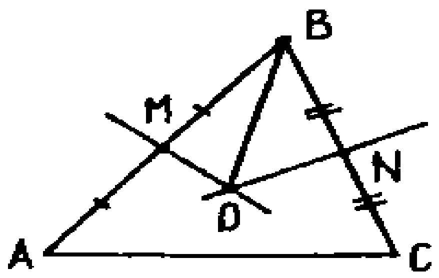


Рис.18

1. Побудувати коло, прояке проходить через три дані точки A, B, C, такі, що $C \notin AB$

2. Для цього досить побудувати точку O рівновіддалену від точок A, B і C.

3. Для реалізації п.2 досить побудувати $O = OM \cap ON$

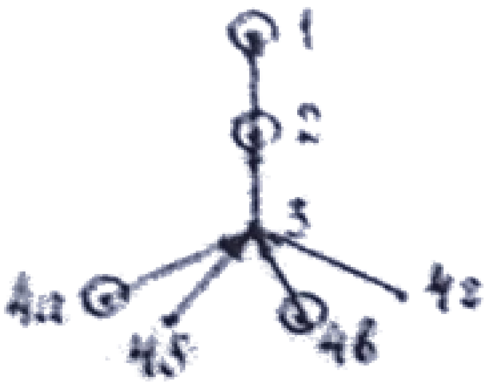


Рис.19

4. Для реалізації п.3 досить побудувати:

а) $OM \perp AB$ б) $AM = BM$, де $M \in AB$;

в) $ON \perp BC$ г) $BN = NC$, де $N \in DC$.

Метод пошуку розв'язку на побудову буде наступним (рис.19)

У даній задачі за основне відношення слід прийняти відношення перпендикулярності, бо рівновіддаленість точки O від даних точок A, B і C є визначальною умовою.

Отже, ми розглянули деякі особливості аналітико-синтетичного пошуку розв'язання геометричних задач на обчислення, доведення і сторонніх.

Аналітично-синтетичний пошук розв'язку геометричних задач на обчислення є найбільш складним, так як евристична компонента цього пошуку в порівнянні з алгоритмічною є домінуючою.

Нижче пропонується узагальнений прийом, що розкриває механізм пошуку розв'язку геометричних задач на обчислення за допомогою зростаючого аналізу. Цей прийом містить наступну послідовність дій:

1. Записати формулу (функціональне відношення) в позначеннях малюнка для знаходження шуканого завдання.

2. У цій формулі виявити невідомі величини, які досить визначити, щоб знайти шукане.

3. Для кожної невідомої величини, що входить у вихідну формулу, підібрати формулу для знаходження цих величин (послідовно для кожної величини).

4. Процес пошуку завершити в той момент, коли:

а) для послідовності невідомих величин, що беруть участь в пошуку розв’язку задачі, будуть вказані формули їх знаходження;

б) для останньої невідомої величини (в цій послідовності) вказана формула, в якій невідомі величини визначаються даними задачі.

5. Якщо процес аналітичного пошуку не дозволяє висловити невідомі величини через дані завдання, то:

а) виявити невідому величину, яка може бути виражена двома різними способами, тобто в пошуку мають місце дві формули, в які вона входить;

б) здійснити послідовно підстановку формули, що містить невідому величину (отриманої на останньому кроці пошуку), в протилежному аналізі напрямку і отримати рівняння з одним невідомим, яке визначає шукане. В іншому випадку продовжити аналітичний пошук до виявлення іншої невідомої величини.

6. Якщо процес аналітичного пошуку не призводить до реалізації пункту 5, то, виходячи з даних завдзадачі, здійснити синтетичний пошук розв’язку задачі, при цьому:

а) синтетичний пошук припинити в той моменг, коли будуть знайдені значення невідомих величин, отриманих на останньому кроці аналітичного пошуку;

б) знайдені значення невідомих величин підставити в виконаний раніше аналітичний пошук для отримання відповідного значення шуканої величини [5].

В іншому випадку продовжити виконання аналізу і синтезу.

Аналітично-синтетичний пошук рішень завдань, як і будь-яка пошукова діяльність, має цілеспрямований характер. Тому він є важливою складовою навчальної діяльності учнів у процесі вивчення математики.

Дійсно, розв'язання навчальної задачі вимагає від учнів: 1) аналізу фактичного матеріалу для виявлення загальних зв'язків; 2) виявлення на основі абстракції та узагальнення часткових зв'язків даного матеріалу та їх об'єднання (синтезу) в єдиний об'єкт, тобто створення його "клітинки" та поділеного конкретного об'єкта; 3) оволодіння в цьому аналітико-синтетичному процесі загальним методом побудови досліджуваного об'єкта [52].

У зв'язку з цим виникає необхідність розкриття сутності навчальної діяльності учнів у навчанні математики.

1.6. Проблема співвідношення алгоритмічних і неалгоритмічних процесів пошуку розв’язування задач

У попередньому тексті було зазначено, що процес розв'язання завдання є, в широкому розумінні, процесом пошуку її рішення, який є необхідним для досягнення практичних або пізнавальних цілей навчання. Оскільки шукане в задачі лише задане, але не представлено в явній, доступній для сприйняття формі, розв'язання можна охарактеризувати як процес поступового виявлення того, що приховано і що є предметом пошуку. Ця психологічна установка вимагає обов'язкового розгляду теоретичних основ проблеми пошуку рішень завдань.

Пошук рішення задачі є ключовим аспектом творчого мислення учнів, яке формується в рамках системи знань, що підлягають засвоєнню. У психології мислення під пошуком розв’язання розуміється виявлення принципу та логіки рішення, згідно з якими виконуються певні дії.

При цьому неможливо заздалегідь визначити, чи призведуть вони до бажаного результату. З точки зору Л.Л. Гурової, терміни "розв’язання" в найширшому сенсі та "пошук розв’язку" є синонімами.

Постає питання, яким чином людина "шукає" рішення задачі. Виявляється, існують принципово різні підходи до дій, які не завжди чітко розмежовуються в конкретному процесі розв’язання, але суттєво відрізняються.

Перший тип пошуку - це систематичний перебір, при якому послідовно розглядаються всі можливі варіанти на кожному етапі розв’язання. Цей метод можна охарактеризувати як «повний перебір варіантів розв’язку».

Четвертий тип пошуку - це евристичний (упорядкований) пошук, який використовує специфічну евристичну інформацію, закладену в завданні. У процесі евристичного пошуку відбувається зменшення обсягу пошуку завдяки відкиданню явно неперспективних напрямків (стратегій). Чим раніше в ході пошуку проводиться аналіз можливих напрямків і чим більше з них підлягає оцінці, тим більше скорочується обсяг пошуку.

У дослідженнях теорії та методики навчання математики недостатньо уваги приділено умовам, які сприяли б формуванню прийомів розв’язання задач. На практиці ці прийоми у учнів часто виникають стихійно. Це закономірно, оскільки засоби для формування прийомів розв’язування задач у навчальному матеріалі представлені неявно, з пропусками важливих елементів, і розподілені в часі їх використання. Проблема полягає в необхідності виокремлення цих умов і засобів у навчальному процесі та відновлення відсутніх ланок.

Один із можливих способів вирішення цієї проблеми полягає в організації самонавчання, яке спрямоване на поступове формування навичок висування та перевірки гіпотез, а також на створення і реалізацію планів розв'язання задач.

Важливу роль у цьому процесі відіграють методи діяльності.

Зміст поняття "прийом"

У психолого-педагогічній літературі існують різні погляди на поняття "прийом". У даному дисертаційному дослідженні ми будемо розуміти під прийомом діяльності узагальнене знання про дії або систему дій, які необхідні для вирішення специфічних завдань, характерних для цієї діяльності. Це знання може бути об'єктивоване різними способами, наприклад, у формі словесного опису.

Структурні елементи прийому зазвичай включають предмет, мету та операційний склад, які так чи інакше відображені в змісті прийому. Предметом прийому є сукупність об'єктів, до яких можна застосувати цей прийом. Найчастіше предмет прийому являє собою задачну ситуацію або її окремі частини.

Мета прийому визначає результат, якого прагнуть досягти за допомогою цього прийому. Наприклад, це може бути доведення того, що певний чотирикутник є багаторазовим паралелограмом. Проте в деяких випадках мета прийому не зазначається прямо. У таких ситуаціях вважається, що мета полягає у формуванні плану або ідеї для розв'язання задачі.

Операційний склад прийому являє собою набір дій, які виконуються для досягнення мети прийому і є частиною його змісту.

Як показує аналіз, структурні елементи прийому можуть характеризуватися такими параметрами:

а) узагальненість предмета прийомі;

б) узагальненість мети прийомі;

в) заданість (визначеність) операційного складу;

г) форма (складність) операційного складу.

Перші три параметри показують, наскільки повно зміст прийому розкриває відповідно його предмет, мета і операційний склад. Ці параметри визначають в свою чергу важливу інтегральну характеристику прийому - можливість и досягнення мети. Розглянемо приклади.

Задача 6. Дано чотирикутник $ABCD$. Точка E належить продовженню сторони AB за точку A, а точки M і K - продовженням сторін BC і CD за точку C. Кути EAD і ABC рівні 120 °, а кут MCK - 60 °. Довести, що чотирикутник $ABCD$ - паралелограм.

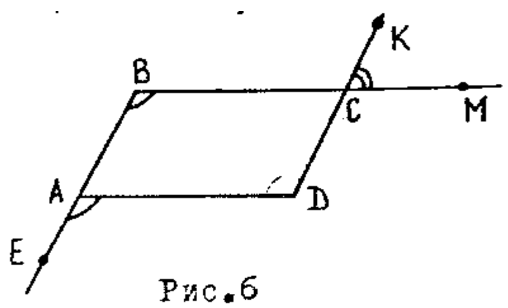


Рис.6

Розв’язання. Оскільки $\angle DCM = 120°$, то кути ACD і DCM рівні і, відповідно

$BC \parallel AD$ (рис.6). Так як кути EAD і ABC рівні, то $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ -паралелограм.

Задача 7. Промінь BC проходить між сторонами кута ABD, причому $AB \parallel CD$, $BD = CD$. Довести, що BC - бісектриси кута ABD.

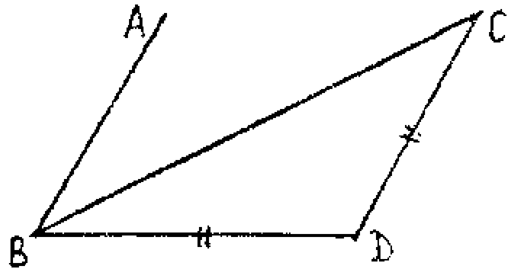


Рис.7

Розв’язання. Оскільки $BD = CD$, то трикутник BDC рівнобедрений, і відповідно, $\angle CBD = \angle BCD$ (рис.7). З іншого боку $\angle BCD = \angle ABC$ оскільки $AB \parallel CD$. Звідси випливає, що $\angle ABC = \angle CBD$ і тому промінь BC - бісектриси кута ABD.

Незважаючи на зовнішню відмінність наведених задач і їх розв’язків, можна вважати, що в обох випадках був реалізований один і той самий прийом [29].

Прийом 1. Щоб встановити, чи належить даний об'єкт A поняттю B, необхідно:

- згадати визначення поняття B;
- виділити його суттєві ознаки;
- перевірити, чи володіє об'єкт A кожним з цих ознак;
- при наявності у об'єкта A всіх істотних ознак дати позитивну відповідь, а за відсутності хоча б одного з цих ознак дати негативну відповідь.

Таким чином, різні на перший погляд системи дій, виконані в різних завданнях, можуть бути реалізацією одного і того ж прийому.

З іншого боку, одна і та сама конкретна дія може нерідко вважатися реалізацією різних прийомів. Рішення завдання I, розглядається кек одну дію, можна вважати реалізацією не тільки прийому I, а й, наприклад, таких прийомів:

Прийом 2. Щоб довести, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, необхідно встановити що $AB \parallel CD, BC \parallel AD$.

Прийом 3.

Розвя'язуючи задачу, доцільно, звести її до розв'язання однієї або декількох допоміжних задач - підзадач.

У зв'язку з цим необхідно використовувати в навчання різні класифікації прийомів.

Виділені вище параметри структурних елементів прийому дозволяють здійснити відповідну класифікацію прийомів, наприклад:

- за рівнем узагальненості прийому (загальні та часткові прийоми);
- за рівнем узагальненості мети, або інакше, прийоми, що спрямовані на пошук розв'язку, та прийоми, які містять чітко визначені вказівки щодо мети - прийоми для досягнення конкретних цілей;
- за рівнем визначеності складу прийому (повні, незавершені та неповні прийоми);
- операційний склад можна класифікувати за формою на три категорії: елементарні, прийоми та складні прийоми. Елементарні дії описуються як одна нероздільна дія. Прийоми представлені у вигляді лінійної послідовності елементарних дій або операцій, які виконуються в строго визначеному порядку (умовно їх можна назвати "прийом-схема"). Складні прийоми, в свою чергу, описуються як сукупність кількох послідовних дій, які можуть виконуватися в лінійному порядку, але незалежно одна від одної. Деякі з цих послідовностей можуть складатися лише з однієї дії або операції;
- щодо можливості досягнення мети (евристичні, коли жодна гарантія досягнення мети не надається, навіть якщо склад прийому реалізується успішно; напівевристичні, коли можливість виконання окремих дій зі складу прийому в загальному випадку не є гарантованою, але за умови їх виконання з'являється гарантія досягнення мети;

алгоритмічні, коли можливість реалізації прийому та гарантія досягнення мети виражені значно чіткіше).

У психолого-педагогічних дослідженнях немає єдиного визначення поняття евристичного прийому, або евристики. Зазвичай виділяють такі їхні характеристики:

- евристичні прийоми відповідають принципу редукції (зменшення) підцілей;

- евристики обмежують процес перебору варіантів;

- на відміну від алгоритмів, евристики можуть "відхилятися" від основного шляху; вони не гарантують досягнення успіху;

- застосування евристик є високоефективним;

- евристичні методи можна розглядати як теорію поведінки людини під час розв’язання задач.

Однак варто зазначити, що вказані особливості в різному ступені властиві всім методам розв’язання задач. Лише третя особливість збігається з характеристикою, на якій базуються виділені евристичні прийоми. Класифікація методів за можливістю досягнення мети дає змогу розглянути питання співвідношення алгоритмічних і евристичних прийомів, а також проблему відповідної типології завдань.

У психології мислення виокремлюють два принципово різні підходи до розв’язання задач: алгоритмічний та евристичний. Перший з них реалізується учнями відповідно до відомого алгоритму, тоді як другий базується на стратегії, яку обирає сам учень для пошуку розв’язку.

У зв'язку з цим серед частини психологів виникли заперечення щодо визнання евристичних програм як теорії творчого мислення. Дійсно, творчість у мисленні часто розглядається як протилежність строгим логічним висновкам, діям та алгоритмам, тоді як сама природа евристичних програм має алгоритмічний характер.

Проте евристичні та творчі процеси відрізняються тим, що не підпорядковуються суворим правилам, які детально визначають всі етапи процесу. Це може призводити до несподіваних результатів у вирішенні завдань. Водночас, у процесі розв'язання проблемних ситуацій та в умовах інтелектуальної діяльності людини можна спостерігати різні динамічні співвідношення між евристичними (пошуковими, що ведуть до нових шляхів вирішення) і неевристичними (які виконуються за певними алгоритмами) компонентами. Такий подвійний характер взаємозв'язку між евристичними та неевристичними елементами, що включає ставлення до суб'єкта, який вирішує завдання, є неминучим, оскільки сама задача та її зміст розкривають як суб'єктивні, так і об'єктивні аспекти. Здається, що ця проблема може бути пов'язана лише з співвідношенням об'єктивної невизначеності задачі (як об'єкта) та суб'єктивної невизначеності сфери, в якій відбувається пошук рішення. Проте, незважаючи на всі якісні відмінності між різними формами інтелектуальної діяльності, закономірності мислення, що визначають динаміку цих процесів, повинні залишатися єдиними. Тому теоретично неправильно вважати творче та репродуктивне (основане на відомих правилах) мислення двома абсолютно протилежними видами [15].

Проте в реальному навчальному процесі вчителю потрібно надати такі навчальні засоби, які б дозволили враховувати динаміку репродуктивного та творчого мислення, а також їх діалектичну єдність. Саме тому в психології навчання виділяють методи розв'язання завдань алгоритмічного та неалгоритмічного типу.

Основною характеристикою алгоритмічних прийомів є повна і чітка детермінація розумових процесів через інструкції, що входять до складу алгоритму, а також точно визначений порядок дій і операцій у заданих умовах.

У цьому випадку існує безліч об'єктів (умов), з якими необхідно виконувати певні дії (операції), причому ці дії заздалегідь визначені.

На відміну від алгоритмічних, прийоми неалгоритмічного типу відрізняються неповною визначеністю розумових процесів, а також невизначеністю і неоднозначністю у виборі конкретних дій та їх послідовності.

В контексті цих двох типів у дидактиці та методиці навчання математики зазвичай розрізняють алгоритмічні та неалгоритмічні завдання, які також можуть називатися творчими, нестандартними, евристичними тощо.

Навчання методам пошуку рішень задач має базуватися не лише на загальних теоретичних принципах, але й на специфіці самих завдань. Відповідно до закономірностей, пов'язаних із "можливістю досягнення мети", можна виділити таку типологію задач: алгоритмічні, напівевристичні та евристичні.

Мета дії полягає в уявленні людини про результат, який відповідає певним вимогам або потребам. Вона визначає предмет дії, до якого належать знання, закономірності, відносини, властивості тощо. Ці елементи формують основу для розв’язання задачі, тобто теоретичну та практичну базу, необхідну для обґрунтування рішення. Якщо особа, яку навчають, усвідомлює завдання, вона може визначити, які знання та вміння потрібні для його виконання. У такому випадку вона зможе виділити ці знання, оскільки вони є невід’ємною частиною основи завдання. В іншому випадку, знання та вміння, необхідні для розв’язання задачі, можуть знадобитися навіть при бажанні вирішити запропоновану задачу. Таким чином, постає проблема пошуку відповідних знань і їх включення до складу основи задачі.

Спосіб дії формує основу для різних видів діяльності. Кожна дія складається з набору операцій, які виконуються в певних умовах. Способи дій сприяють перетворенню об'єкта дії, що веде до досягнення поставленої мети. Спосіб, який визначає процес розв'язання задачі, є методом перетворення умов завдання для знаходження необхідного результату. У цьому контексті також можливий вибір: алгоритм (метод) розв'язання задачі може бути як відомим, так і невідомим. У другому випадку постає питання про те, як визначити місце кожного алгоритму в процесі виконання завдання [39].

Умови виконання дії включають не специфічні характеристики предмета дії, а також особливості стану людини та моменту виконання дії. Оскільки завдання є об'єктом діяльності людини, неспецифічна характеристика задачі може відображати явне або неявне уявлення про основи завдання, що також включає функціональне відношення, яке встановлює зв'язок між умовами (умовою) та вимогами завдання. Функціональне відношення, в свою чергу, визначає основне (істотне) відношення, яке реалізується в предметній області задачі і керує процесом пошуку її розв'язку.

Якщо той, якого навчають прийняв завдання, то його неспецифічний стан визначається процесом пошуку функціонального відношення, що міститься в базисі, коли воно задано неявно. Отже, умови виконання дії знаходяться в прямій залежності від того як задано функціональне відношення в завданні явно або неявно, тобто чи є воно відомим для учня або невідомим.

Виділені характеристики (нові знання, закономірності, відносини, властивості, алгоритм (метод) розв’язання задачі або їх послідовність, теоретична та практична основа (базис) розв’язку задачі) формують психологічну структуру алгоритмічних, напівевристичних і евристичних задач, залежно від того, які з них є відомими або невідомими, а також того, чому навчають у кожному з зазначених типів.

Відповідно до цього приймемо такі угоди:

Угода 1. Задача може бути класифікована як алгоритмічна, якщо під час роботи з нею, у разі її прийняття, учень отримує:

- нові знання, закономірності, відносини та властивості, які необхідні для обґрунтування розв'язання задачі, незалежно від того, чи вони вже відомі, чи ні;

- алгоритм (метод) або послідовність відомих алгоритмів (методів) для розв'язання задачі;

- теоретичну та практичну основу (базу) розв'язання задачі, що містить функціональні відносини, яка є відомою.

Алгоритм у цьому контексті розглядається як чіткий і зрозумілий набір інструкцій для виконання дій (елементарних операцій) у визначеній послідовності, спрямованих на досягнення конкретної мети або вирішення задач, що належать до певного класу (типу).

Поняття "прийом" є більш широким, оскільки воно включає також пошукову діяльність учня.

Угода 2. Задача може бути класифікована як напівевристична, якщо під час взаємодії з нею, у разі її прийняття, учень встановлює:

- нові знання, закономірності, відносини та властивості, які є необхідними для обґрунтування розв'язання задачі, незалежно від того, чи вони відомі чи невідомі;

- алгоритм (метод) або послідовність заданих алгоритмів (методів) для розв'язання задачі, які є невідомими;

- теоретичну та практичну основу (базу) розв'язання задачі, що містить функціональне відношення, яке є відомим.

Угода 3. Задача може бути класифікована як евристична, якщо під час роботи з нею, у разі її прийняття, учень встановлює:

- нові знання про закономірності, відносини, властивості, які є необхідними для обґрунтування розв'язання задачі, незалежно від того, чи вони відомі чи невідомі;

- алгоритм (метод) або послідовність певних алгоритмів (методів) для розв'язання задачі, які є невідомими;

- теоретичну та практичну основу (базу) для розв'язання задачі, що містить функціональні відносини, які є невідомими.

Внесемо прийняті угоди в таблицю (табл.2).

Слід зазначити, що наведена вище типологія завдань не є бездоганною і має умовний характер. В залежності від ряду факторів (хто виконує завдання, коли, на якому етапі навчання) одна й та ж задача може бути віднесена до різних категорій. Тому, говорячи про різні типи завдань, ми маємо на увазі, перш за все, їх послідовність у процесі розв’язування учнями під час засвоєння нових знань та формування вмінь і навичок [33].

У методичній літературі іноді виділяють напівалгоритмічні задачі. Порівняння їх з напівевристичними завданнями дозволяє стверджувати, що в напівалгоритмічних задачах евристичний елемент не є домінуючим, на відміну від напівевристичних задач, де алгоритмічний компонент не є провідним.

№ ПП	Компоненти дії	Ознаки задачі	Тип задач		
			Алгоритмічні	Напів-евристичні	Еврес-тичні
1	Мета (предмет) дії	Кінцевий результат розв’язку задачі: нові знання, закономірності, відношення, властивості, необхідні для обгрунтування розв’язку задачі	+ або	+ або	+ або
		відомі			
		невідомі	+	+	+
2	Спосіб дії	Алгоритм (прийом) або послідовність алгоритмів (прийомів) розв’язання задачі	+		
		відомі			
		невідомі		+	+
3	Умови виконання дії	Теоретична і практична основа (базис) розв’язання задачі, що містить функціональне відношення	+	+	
		відомі			
		невідомі			+

Таблиця 2.

Математичні задачі в межах кожного типу мають різний ступінь складності. Проте задачі одного типу об'єднуються за рівнем пізнавальної діяльності учнів під час їх розв'язання.

У дидактиці, як було зазначено в першому розділі, виділяють три рівні пізнавальної діяльності учнів: репродуктивний, частково-пошуковий та дослідницький (творчий).

Змістовний аналіз цих рівнів та визначеної топології задач дозволяє дійти висновку, що репродуктивному рівню пізнавальної діяльності відповідають алгоритмічні задачі, які є домінуючими в цьому контексті. Частково-пошуковому рівню відповідають напівевристичні задачі, тоді як дослідному рівню - евристичні. Проте варто зазначити, що між рівнями пізнавальної діяльності та відповідними типами завдань немає чітко окреслених меж.

Нижче наведені приклади задач різних типів з виділеної типології:

Алгоритмічні задачі:

- Представити у вигляді степеня добуток $x \cdot x^2 \cdot x^3$.
- У прямокутному трикутника гіпотенуза і катер: відповідно рівні 17см і 8см. Знайти другий катет.

При розв'язуванні зазначених задач учні безпосередньо відтворюють нове правило і теорему. У цих задачах виконуються ознаки задач алгоритмічного типу:

1) учні мають знання, необхідні для вирішення кожного завдання;

2) їм відомі алгоритми розв'язування цих задач;

3) відомі також функціональні відншення, відповідно $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, де $a \neq 0$ і $c^2 = a^2 = b^2$.

Напівевристичні задачі:

1. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a-1)x - 2a = a$ дорівнює 9?

2. Бічні сторони рівнобедреного трикутника рівні 5см, а основа 6см. Обчислити радіус описаного кола.

Дані задачі не можна вирішити за допомогою послідовного застосування відомих учням формул, визначень, властивостей.

Учні мають необхідні знання для розв’язування запропонованих задач, проте їм заздалегідь невідомі алгоритми їх розв’язування. Виникає потреба в пошуку відповідних алгоритмів. Теоретична основа розв’язування задач, включаючи функціональне відношення, відома. Отже, дані задачі є задачами напівевристичного типу.

Евристичні задачі:

- Розв’язати в цілих числах рівняння
$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\cdots+\frac{1}{x}=3$$
- Довести, що будь-який відрізок з кінцями на різних сторонах трикутника не більший за одну найбільшу сторіну трикутника.

В учнів недостатньо знань для розв’язування цих задач. Їм невідомі алгоритми їх розв’язування і функціональні відношення, що визначаються умовою і вимогою в кожній з цих задач. Значить ці задачі є здаачами евристичного типу.

Слід зазначити, що в сучасних підручниках з алгебри та геометрії представлені два основні типи задач: алгоритмічні та напівевристичні. Кількість напівевристичних задач у цих підручниках значно перевищує кількість алгоритмічних. Зазвичай задачі евристичного типу розміщуються в розділі "Завдання підвищеної складності" [18].

Виділена типологія алгоритмічних та неалгоритмічних задач використовується в цьому дослідженні для оцінки ступеня складності завдань шкільного курсу математики. Загалом, алгоритмічні та напівевристичні задачі є алгоритмічно розв'язними, тому їх можна віднести до стандартних задач. Евристичні задачі, під час пошуку розв'язків, дозволяють виявити локальні алгоритми. Проте для завершення процесу їх розв'язання необхідний евристичний пошук, який встановлює зв'язки між виявленими локальними алгоритмами. Таким чином, евристичні задачі є алгоритмічно нерозв'язними.

Описана структура пошуку рішень евристичних задач, які є складними, дозволяє класифікувати їх як нестандартні.

Розглянемо коротко проблему пошуку рішень нестандартних задач.

Задача вважається нестандартною, якщо її не можна віднести до жодного класу алгоритмічно нерозв'язних задач..

Нестандартні задачі мають найзначніший вплив на розвиток творчого мислення учнів. У процесі розв'язування як нестандартних, так і стандартних задач можна виділити два основні елементи: уявлення (опис) задачі та пошук розв'язку. Проте, як було зазначено раніше, ключовим елементом у процесі розв'язування задачі є саме пошук. Цей пошук може полягати в знаходженні всіх можливих розв'язків, одного з найбільш оптимальних варіантів або в установленні можливості чи неможливості розв'язання задачі.

Ми не маємо на меті детально розкривати суть цих методів пошуку, оскільки відповідна теорія вже достатньо детально представлена в ряді методичних досліджень.

Проте варто зазначити, що при формулюванні завдання в просторі станів (яке описується як певний математичний об'єкт) виникають такі поняття, як стан (включаючи початковий та цільовий), опис стану, оператор, що перетворює один стан в інший, а також простір станів (або простір пошуку).

Формулювання задачі в просторі станів визначається трьома параметрами:

1) описом початкового стану, що представляє дані задачі;

2) множиною операторів з характеристиками їх застосування та впливу;

3) цільовим станом (або критерієм для визначення мети).

Метод пошуку стане більш ефективним, якщо простір пошуку буде меншим. Мінімальний з усіх можливих просторів пошуку визначає оптимальний спосіб розв'язання задачі.

Більш загальний підхід до пошуку рішень задач полягає у зведенні задачі до підзадач. Цей підхід застосовується до різноманітних завдань, включаючи пошук рішень для задач на доведення [22].

Суть такого підходу до розв'язання задач полягає в тому, щоб звести початкову задачу до ряду підзадач, розв'язання яких є необхідним для вирішення основної задачі. Цей процес продовжується, поки початкова задача не трансформується в набір елементарних задач. Елементарні задачі визначаються, по-перше, як ті, що можуть бути розв'язані за один крок перебору, а по-друге, як задачі, розв'язання яких вже відоме, незалежно від того, чи йдеться про стандартні, чи нестандартні задачі. Важливо зазначити, що термін "елементарна задача" має прагматичний зміст, відображаючи зв'язок між задачею та її розв'язком.

Як приклад розглянемо таку задачу: "За яких значеннях a значення суми дробів $\frac{a}{a-3}$ і $\frac{6}{a+3}$ дорівнює значенню їх добутків?"

Ця задача заможе бути зведена до підзадач, кожна з яких є елементарною. Операторами відомості, в даному випадку, є првила суми, множення і порівняння дробів:

1) знайти суму дробів

$$\frac{a}{a-3}+\frac{6}{a+3}=\frac{a^2+9a-18}{a^2-9a}$$

2) знайти добуток дробів

$$\frac{a}{a-3}\cdot\frac{6}{a+3}=\frac{6a}{a^2-9a}$$

3) порівняти дроби з однаковими знаменниками;

4) розв’язати рівняння $a^2+9a-18=6a$, при $a \neq \pm 3$

Отже, пошук відбувається як при вирішенні стандартних, так і нестандартних завдань. У першому випадку метод розв'язання в загальних рисах відомий, і пошук адаптується до конкретного змісту задачі, щоб, враховуючи можливі варіації, налаштувати відомий підхід до конкретної ситуації.

При цьому основний процес розв'язання задачі складається з двох етапів, які взаємопов'язані та взаємозумовлені: пошук розв'язання та його реалізація.

У другому випадку метод розв'язання залишається невідомим. Він формується в процесі вирішення задачі. Пошук у розв'язанні нестандартної задачі не є окремим етапом, а пронизує весь процес.

У методиці викладання математики існує погляд, згідно з яким метою пошуку є не лише знаходження способу розв'язання задачі, а й виявлення найбільш ефективного з усіх можливих варіантів. У найпростіших ситуаціях це означає вибір найшвидшого шляху до досягнення мети та простоту виконання розв'язання [23].

Однак варто зазначити, що такий односторонній підхід до утримання і сутності пошуку є неправомірним, оскільки виявлене вимагає розгляду всіх можливих способів його вирішення, включаючи і нераціональні, як було зазначено вище.

Це необхідно також тому, що підвищення ефективності навчання математики можливе лише через взаємодію об'єктивної та суб'єктивної інформації, яку містить задача як складний об'єкт. Окрім того, процес засвоєння знань є досить складним, і на сьогоднішній день не встановлено з достатньою достовірністю, які умови сприяють досягненню вищого рівня засвоєння нових знань учнями під час взаємодії раціональних і нераціональних способів розв'язання задач. Ця проблема ще потребує вирішення.

Висновки до розділу I

Основним засобом розвитку творчого мислення учнів є вирішення нестандартних задач або задач стандартного формату, які вирішуються незвичайними методами. При вирішенні нестандартних завдань з обдарованими дітьми можна використовувати різні форми навчання: індивідуальні, фронтальні та групові. Фронтальні заняття можуть включати дискусії, організаційно-діяльні ігри (ОДІ) та рольові ігри. Групові заняття передбачають створення постійних груп з чергуванням ролей учасників, поділ класу на групи з однаковими завданнями, а також з різними завданнями, з подальшим загальним звітом кожної групи перед класом.

Отже, у цьому розділі представлені деякі теоретичні основи, які слугують вихідною точкою точкою для подальшого дослідження проблеми пошуку та процесу розв'язання завдань. Показано, що в психології мислення терміни "спосіб розв'язання" і "пошук розв'язання" задач у широкому сенсі є синонімічними.

Розв’язуючи задачу підвищеної складності, доцільно розглянути різні способи її розв’язування. Корисніше одну й ту ж задачу розв’язати декількома способами, аніж декілька однотипних задач – одним і тим же способом. Важливо допомагати в пошуку різних способів розв’язування задач, а не намагатися нав’язати учню власний розв’язок. Колективізм у розв’язуванні задач повинен викликати в учнів вміння використовувати особливості кожної задачі. Саме відступ від шаблону і конкретний аналіз умови задачі є запорукою її успішного розв’язання. Особливу увагу слід звертати на розв’язування задач арифметичним способом (особливо після того, як учні навчилися розв’язувати задачі за допомогою рівнянь), оскільки саме арифметичний спосіб в значній мірі сприяє розвитку незалежності, оригінальності мислення та винахідливості.

Це необхідно також тому, що підвищення ефективності навчання математики можливе лише через взаємодію об'єктивної та суб'єктивної інформації, яку містить задача як складний об'єкт.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ

2.1. Вимоги до нестандартних завдань на уроках математики в початковій школі

Для активізації та підтримки інтересу до математики нестандартні завдання мають відповідати таким критеріям:

1) бути оригінальними та відрізнятися від традиційних математичних завдань;
2) зміст завдань повинен бути зрозумілим для дітей;
3) розв'язання завдань має бути доступним для всіх присутніх дітей;
4) відповіді повинні отримуватися швидко;
5) якщо потрібні обчислення, їх слід виконувати переважно усно.

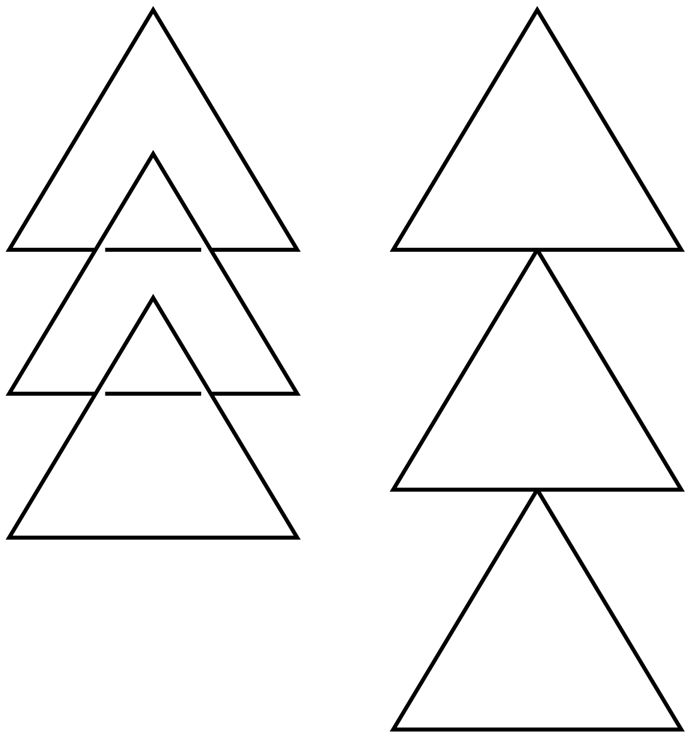
Діти з великим інтересом беруться за розгадування простих ребусів. Важливо пропонувати не будь-які ребуси, а лише ті, що мають певний зв'язок з математикою: або в їх зображенні присутні математичні знаки, або у відповіді є математичний термін, або обидва ці аспекти поєднуються. Ребуси можна заздалегідь підготувати на аркушах паперу, що дозволить вчителю в будь-який момент запропонувати їх дітям для розгадування.

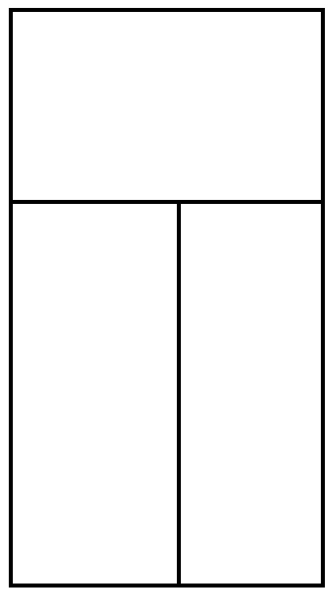
Діти завжди з великим інтересом розгадують загадки. Важливо зазначити, що загадки повинні містити певні математичні елементи. Найчастіше таким елементом є число, яке присутнє в загадці і слугує однією з ознак для пошуку відповіді. У деяких загадках можуть бути використані математичні відношення, такі як "рівність", "більше", "менше", або відповіддю може бути термін, пов'язаний з математикою [12].

Доцільно також пропонувати дітям рухливі математичні ігри, наприклад "Математичні салки", "Знай таблицю множення". Можна також проводити логічні вправи, наприклад:

1. З яких геометричних фігур складені ці ялинки? Чим відрізняється одна ялинка від іншої? В якій ялинці більше трикутників і на скільки?

2. З скількох різних прямокутників складено це “вікно”?





Знайомлячи дітей з цікавими аспектами математики під час відпочинку, можна пробудити в них бажання систематично брати участь у групових позакласних заняттях.

Ці заняття з математики проходять після уроків, але їх зміст і форма суттєво відрізняються від занять, які проводяться для учнів з низькими результатами.

До позакласних групових занять доцільно залучати всіх учнів класу, починаючи з 1 класу. Кожне заняття планується учнями з урахуванням потреб у підвищенні їхнього інтересу до математики, а також з урахуванням вже наявних знань, умінь та навичок. Послідовне ускладнення змісту занять здійснюється на основі накопичення учнями знань з математики та вмінь виконувати цікаві математичні вправи, такі як ребуси, шаради, головоломки, загадки тощо.

Позакласні заняття з математики можуть мати тематичний характер. У таких випадках вчитель ставить за мету, використовуючи цікаві та ігрові форми вправ, сприяти закріпленню знань з певної теми.

Часто проводяться комбіновані заняття, матеріал яких не завжди пов'язаний з темами останніх уроків з математики. Збільшення кількості комбінованих занять пояснюється можливістю використовувати різноманітний матеріал як за змістом, так і за формою. Це робить заняття для дітей більш захоплюючими.

Організація заняття відіграє важливу роль у підтримці інтересу дітей протягом усього процесу. Кожне позакласне заняття складається з трьох основних частин: 1) вступної, 2) основної та 3) підсумкової. У вступній частині діти одразу відчувають важливість цих занять і їхню відмінність від звичайних уроків. Вчитель може запропонувати ребуси, задачі у віршах або ввести в заняття персонажів з дитячих оповідань і казок, від імені яких пропонуються різноманітні математичні завдання. Основна частина містить завдання, що вимагають більшої розумової активності, уваги та зосередженості учнів. Діти розв’язують різні математичні задачі, виконують логічні вправи, задачі-жарти тощо. Підсумкова частина заняття зосереджена на загадках та математичних або логічних іграх. Корисно закінчувати заняття в той момент, коли діти готові з задоволенням повторити гру. Ці бажання слугують “зародком інтересу” до наступних позакласних занять, оскільки у молодших школярів інтереси до математики поки ще тісно переплітаються з прагненням до ігрової діяльності [39].

Під час організації позакласних занять важливо ретельно обміркувати використання наочних матеріалів. З одного боку, вони повинні бути цікавими, а з іншого – сприяти розумінню учнями суті вирішення різних питань та запам’ятовуванню деталей математичних або логічних завдань.

У процесі занять слід забезпечити диференційований підхід, враховуючи індивідуальні особливості учнів, оскільки поставлені їм питання та завдання можуть бути націлені на розвиток уваги, пам’яті на числа, формування обчислювальних навичок, розширення загального світогляду та заохочення інтересу до розв'язання задач тощо.

Отже, роботу з учнями щодо активізації їхніх пізнавальних інтересів слід організовувати на уроках у такій послідовності: цікаво – знаю – вмію. Важливо не просто спростити навчання, а зробити його зрозумілішим. Дитина повинна чітко усвідомлювати мету завдання, і тоді вона зможе з інтересом виконувати багато нецікавих, але необхідних завдань.

Вміння пробуджувати в дітей інтерес до знань є важливою рисою творчого вчителя. Лише тоді, коли дитина зацікавиться матеріалом, у неї з'явиться бажання дізнатися про нього більше.

Ефективне навчання математики неможливе без пошуку способів активізації пізнавальної діяльності учнів. Діти повинні не лише засвоїти певний обсяг знань, а й навчитися спостерігати, порівнювати, виявляти взаємозв'язки між поняттями та міркувати. Досягти цього можна лише за допомогою методів, які стимулюють пізнавальну активність під час формування інтересу до вивчення математики.

Розв’язання цікавих задач розвиває в учнів ці розумові операції, а також вимагає від учня певної незалежності мислення, творчих пошуків, оригінального підходу, кмітливості й винахідливості, критичного ставлення до своєї роботи.

Розв'язання захоплюючих задач значно впливає на розвиток уваги та пам'яті учнів, сприяє формуванню самостійного мислення, лаконічної математичної мови, уяви, а також вихованню волі, активності та ініціативності. Використання різноманітних цікавих задач у навчальному процесі допомагає формувати інтерес учнів до математики та розвивати їх математичні здібності.

Аналізуючи різноманітні цікаві завдання, ми прийшли до висновку, що найбільший вплив на розвиток математичних навичок учнів мають вправи:

- логічного характеру;
- комбінаторні;
- з елементами дослідження;
- на кмітливість.

Досвід вчителів свідчить, що вже в початкових класах варто впроваджувати дослідницьку діяльність. Це допомагає учням усвідомити значення індукції, спостереження та експерименту, а також сприяє розвитку не лише навичок логічного мислення, але й евристичного, відкриваючи їм шлях до математичної творчості. Постійна робота над цікавими завданнями сприяє вдосконаленню базових розумових операцій, формуванню критичного мислення, а також загальному розкріпаченню та гнучкості їхнього мислення.

Усі ці нестандартні завдання в поєднанні з традиційними сприяють розвитку логічного мислення у молодших школярів, допомагають їм оволодіти математичною мовою та підвищують інтерес дітей до «цариці наук». Крім того, така діяльність формує у учнів мислячу особистість. Система навчання, що передбачає розв’язування цікавих задач, повинна забезпечувати поступове ускладнення виконуваних завдань і бути тісно пов’язаною з розвитком логічного мислення учнів.

В процесі занять потрібно забезпечити диференційований підхід, враховуючи особливості окремих учнів, оскільки запропоновані їм питання та завдання можуть бути спрямовані на виховання уваги, пам’яті на числа, формування обчислювальних навичок, розширення загального світогляду, прищеплення інтересу до розв'язання задач

Ефективна методика навчання учнів розв'язуванню задач може бути реалізована лише за умови комплексного підходу до навчального процесу. Це передбачає чітке визначення мети навчання учнів розв'язуванню задач певного типу або оволодіння конкретним методом, ретельно розроблену систему самих задач, які будуть розв'язуватись на уроці та пропонуватись для домашнього виконання, обґрунтований вибір методів і організаційних форм роботи на уроці, а також засобів навчання. Крім того, необхідно здійснювати контроль за сприйняттям учнями методів і способів розв'язування, а також за набутими ними навичками та вміннями [47].

У процесі вирішення задач відбувається як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Багато шкільних задач, зокрема алгебраїчні вправи, опорні задачі на побудову, а також вправи на дослідження функцій, обчислення похідних і інтегралів, виконуються за певними алгоритмами. Опанування цих алгоритмів учнями є важливим завданням у навчанні математики. Філософи стверджують, що немає кращого способу створити умови для творчої діяльності, ніж досконале знання алгоритмів. Дійсно, розв'язування творчих і нестандартних задач врешті-решт зводиться до виконання відомих опорних задач, які розв'язуються за певними алгоритмами. На жаль, часто на уроках у школі та на вступних іспитах до вищих навчальних закладів деякі учні знаходять спосіб розв'язання складної нестандартної задачі, але не можуть довести справу до кінця, оскільки забули, як розв'язувати опорну задачу, до якої зводиться нестандартна, або не можуть правильно вирішити найпростіше, наприклад, тригонометричне, рівняння.

Одночасно навчити учнів розв'язувати задачі та вправи алгоритмічного характеру, просто надаючи їм готові алгоритми, не є ефективним. Краще організувати колективний пошук алгоритму на прикладах розв'язування однієї-двох задач. Це також стосується навчання учнів розв'язування задач і вправ певних типів за визначеними алгоритмами чи правилами-орієнтирами.

Наведемо приклади. На уроці в 5 класі учні розв'язують задачі на рух двох типів: зустрічний і рух в одному напрямку.

Задача. З двох міст, відстань між якими 840 км, одночасно назустріч один одному виїхали два поїзди: один зі швидкістю 60 км/год, а другий - зі швидкістю 80 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться?

Задача. Літак вилетів з аеропорту зі швидкістю 500 км/год. Через 2 год з того самого аеропорту в тому самому напрямку вилегів другий літак зі швидкістю 700 км/год. Через скільки годин після вильоту другий літак наздожене перший? Яка відстань буде між ними через 3 год?

Розв'язавши ці дві задачі та подібні до них, учні можуть колективно дійти висновку, що при розв'язуванні задач на зустрічний рух, де потрібно визначити час, через який об'єкти зустрінуться, необхідно додати їхні швидкості та поділити відстань між початковими пунктами на сумарну швидкість.

У задачах на рух, де об'єкти рухаються від одного пункту в одному напрямку, а потрібно знайти відстань між ними через певний час, більш доцільним є метод, при якому обчислюється різниця між швидкостями об'єктів, а потім множиться на заданий час.

У задачах на спільну роботу орієнтиром для розв'язування є вказівка щодо прийняття всієї роботи за одиницю і вираження частки всієї роботи, яку виконують окремі особи чи механізми за одиницю часу, або частки роботи, яку вони виконують разом.

Схожі вказівки або правила-орієнтири доцільно надавати учням для розв'язання задач на проценти, пропорційний поділ, геометричні задачі на побудову, які вирішуються за допомогою методів геометричних місць, геометричних перетворень, задач на доведення методом від супротивного, побудови перерізів багатогранників, графіків функцій за допомогою геометричних перетворень, а також розв'язування задач векторним методом тощо.

Особливу увагу варто приділити навчанню учнів основним методам розв'язування задач. Наприклад, розглянемо методику навчання методу рівнянь для вирішення текстових (сюжетних) задач.

Шкільна практика показує, що хоча метод рівнянь вводять уже в 6 класі та використовують протягом усього курсу математики, результати вступних іспитів до вищих навчальних закладів свідчать про те, що значна частина випускників має труднощі з його засвоєнням. Однією з причин цього є недостатня увага вчителів до розв'язування текстових задач і вправ арифметичним способом у 5-6 класах, що безпосередньо готує учнів до розуміння методу рівнянь. Крім того, важливо спеціально контролювати, як учні засвоюють евристичну схему пошуку рівняння як моделі зв'язків між відомими і шуканими величинами.

Уміння розв'язувати задачі за допомогою рівнянь, як складова відповідної діяльності, включає такі розумові процеси: аналіз задачі (виокремлення умов і вимог); встановлення важливих зв'язків між відомими та шуканими величинами; визначення величин, які потрібно прирівняти, позначення невідомої величини та вираження необхідних величин через цю невідому; складання рівняння та його розв'язування; перевірка отриманого розв'язку. Це вміння можна сформувати, якщо попередньо опрацювати всі його складові [45].

Учні можуть успішно аналізувати формулювання задачі лише тоді, коли вони зрозуміли її зміст. Для цього важливо правильно представити задачу. Існує кілька способів зробити це. Якщо задача взята з підручника, то найефективніше, коли її вголос читає вчитель або один з учнів, а інші уважно слідкують за формулюванням. Досвід показує, що найкраще читати задачу не менше ніж двічі. Корисно, щоб учень, який буде розв'язувати задачу, після повторення її змісту та виділення умови і вимоги коротко записав їх на дошці. Перші скорочені записи на дошці доцільно робити вчителю, пропонуючи учням зразок для наслідування. Для деяких задач умову і вимогу можна подати у вигляді таблиці або графічної ілюстрації. Ось приклад.

Задача. Один кусок дроту на 54 м довший за другий. Після того як від обох кусків відрізали по 12 м, перший виявився в 4 рази довшим, ніж другий. Знайти довжину кожного куска.

Скорочений запис змісту задачі може мати вигляд:

I	II + 54	−12;	II · 4	?
II		−12		?

Геометричне зображення змісту задачі наочно ілюструє зв'язок між даними і шуканими, допомагає доцільно вибрати невідому *x* і скласти просте для розв'язання рівняння 3x = 54 (рис. 6.1).

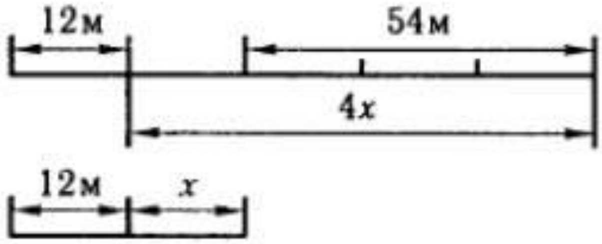


Рис. 6.1

У процесі пошуку рівняння потрібно з'ясувати, про які величини йдеться в змісті задачі, які зв'язки існують між цими величинами і шуканим, значення яких величин можна прирівняти. Залежно від цього доцільно ввести невідому і скласти рівняння.

У методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі.

Першу схему застосовують до розв'язування нескладних задач, вона має такий вигляд:

1) позначити як x шукану величину (або одну із шуканих);
2) виразити через x інші величини, про які йдеться в змісті задачі;
3) ґрунтуючись на залежності між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складніших задач:

1) з'ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти;
2) вибрати невідому і позначити її буквою x;
3) виразити через x значення величин, які прирівнюватимуться;
4) скласти рівняння.

Друга евристична схема забезпечує цілеспрямований вибір невідомої та вираження через неї потрібних величин.

На початковому, підготовчому етапі навчання учнів методу рівнянь слід нагадати про всі основні види задач, які вирішуються за допомогою арифметичних дій, а також їх буквений запис. Необхідно сформувати навички складання простих виразів з невідомими. Після цього усно розв'язуються найпростіші задачі на складання рівнянь відповідно до умов задачі.

Для прикладу наведемо кілька задач.

1. До якого числа слід додати 12, щоб дістати 68? (Учні позначають як x невідоме число і записують рівняння: $x + 12 = 68$.)
2. Число а на 7 більше за число Ь. Як можна записати залежність між *а* і *Ь* за допомогою рівності?
3. Число те втричі більше, ніж число *п.* Як можна записати залежність між те і и за допомогою рівності?
4. Купили 10 кг цукерок по x гривень за 1 кг. Як записати у вигляді виразу вартість покупки?

Важливо домогтися усвідомлення учнями того, що словосполучення «а на стільки-то більше за *Ьь* іноді потребує дії додавання, а іноді - віднімання залежно від того, якої з двох величин воно стосується. Це саме стосується словосполучення <<а в стільки-то разів більше за Ь>». Досвід показує, що деякі учні не реагують на слова «сума», «додано», «всього» в умові задач. Тому на першому етапі потрібно спеціально акцентувати слова, які містять інформацію для складання рівняння.

Існують різні організаційні форми для вирішення задач. На уроці можуть використовуватися колективне фронтальне розв'язування, групова робота окремих колективів та індивідуальне розв'язування.

Готуючись до колективної фронтальної роботи, яка іноді проводиться у формі евристичної бесіди, важливо заздалегідь продумати та записати в конспекти (особливо якщо мова йде про практиканта або вчителя-початківця) систему запитань, що стосуються пошуку способів розв'язання. Рекомендується пропонувати слабшим учням відповідати на прості запитання, щоб залучити їх до процесу пошуку розв'язання задачі. Іноді сильні учні знаходять спосіб розв'язання, а реалізацію цього способу доцільно доручити середньому чи слабкому учневі. Не слід допускати, щоб учні механічно переписували розв'язання задачі з дошки, не усвідомлюючи при цьому сам процес. Тому під час оформлення запису можна запропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або який має бути наступний крок у розв'язанні.

При організації розв'язування задач у груповій формі вчитель повинен підготувати для кожної групи набір завдань, що відповідають здібностям учнів. Під час уроку важливо контролювати роботу кожної групи та надавати допомогу тим, хто її найбільше потребує. Іноді доцільно провести коротку консультацію (3-5 хвилин), в якій активну участь братимуть більш сильні учні, а не лише вчитель.

Існують різні способи організації самостійного розв'язування задач учнями під час уроку. Це, в основному, навчальні самостійні роботи, але іноді також потрібні контрольні. Самостійні роботи можуть займати весь урок, але частіше вони займають лише його частину. В залежності від мети, такі роботи можуть проводитися на початку, в середині або наприкінці уроку. Якщо вчитель бажає перевірити виконання домашнього завдання і надати допомогу учням, які стикаються з труднощами, він може запропонувати задачу або вправи, схожі на ті, що були задані додому. Якщо учні освоюють певний тип задач, самостійну роботу можна запропонувати під час уроку або в його завершенні. Для швидкої та ефективної перевірки таких робіт доцільно залучити двох-трьох учнів, які оформлять розв'язання на плівці та продемонструють його на екрані за допомогою графопроектора. Іноді двоє учнів можуть розв'язувати задачу на відкидних дошках, а після завершення разом аналізувати допущені помилки. Також можлива усна фронтальна перевірка за етапами розв'язування задач і вправ.

2.2. Проведення нестандартних уроків математики у школі

Ефективність проведення нестандартних уроків залежить від ряду дій, які виконують вчителі та учні:

• Здійснюється ретельна підготовка до таких уроків: надаються попередні завдання, пояснюється структура уроку, визначаються ролі та завдання кожного учня, готуються наочні матеріали.

• Розробляється план занять з урахуванням рівня та особливостей класу в цілому, а також індивідуальних характеристик учнів, які отримали конкретні завдання, і послідовності виконання операцій [27].

Зрозуміти головне в нестандартному уроці допомагають творчі принципи:

1. Відмова від шаблону в організації уроку, від рутини і формалізму у його проведенні.
2. Максимальне залучення учнів класу в активну діяльність на уроці. Різні форми групової роботи на уроці.
3. Не розважальність, а цікавість і захопленність як основа емоційного тону уроку.
4. Підтримка альтернативності, множинності думок.
5. Розвиток функції спілкування на уроці як умова забезпечення взаєморозуміння, спонукання до дії, відчуття емоційного задоволення.
6. «Прихована» диференціація учнів за навчальними можливостями, інтересами, здібностями і нахилами.
7. Використання оцінки в якості формуючого інструменту.

Виділяють три етапи підготовки та проведення нестандартного уроку: підготовчий, власне урок і його аналіз.

Підготовчий етап. У ньому активну участь беруть і вчитель, і учні. Учні діляться на групи (команди, екіпажі), отримують або набирають певні завдання, які необхідно виконати до уроку: підготовка повідомлень на тему майбутнього уроку, складання питань, кросвордів, вікторин, виготовлення необхідного дидактичного матеріалу і т. д.

Власне Урок (виділяють три основних етапи):

Перший етап. Він є передумовою формування і розвитку мотиваційної сфери учнів:

- ставляться проблеми,
- з'ясовується ступінь готовності до їх вирішення, до знаходження шляхів досягнення мети уроку.

Виникають ситуації, участь у яких сприяє вирішенню пізнавальних, розвиваючих і виховних завдань. Розвиток мотиваційної сфери відбувається тим ефективніше, чим успішніше пройшов підготовчий етап: якість виконання учнями попередніх завдань впливає на їхній інтерес до майбутньої діяльності. Під час проведення уроку вчитель враховує ставлення учнів до новаторської форми заняття, рівень їхньої підготовленості, а також вікові та психологічні особливості.

Другий етап. Ознайомлення з новим матеріалом та розвиток знань учнів через різноманітні нестандартні форми організації їхньої розумової активності.

Третій етап. Цей етап зосереджений на формуванні вмінь і навичок. Контроль, як правило, не виділяється в окремий час, а інтегрується в кожен з попередніх етапів.

Аналіз. Під час оцінювання даних уроків важливо враховувати не лише результати навчання, виховання та розвитку учнів, а й атмосферу спілкування – емоційний настрій уроку. Це стосується не тільки взаємодії вчителя з учнями, а й спілкування між самими учнями, а також взаємодії в окремих робочих групах [5,8]

У навчальному процесі важливу роль, як зазначають психологи, відіграє рівень розвитку пізнавальної активності та процесів, таких як увага, сприйняття, спостереження, пам'ять, уява і мислення. Нестандартні форми уроків сприяють розвитку та формуванню цих пізнавальних процесів. Регулярне застосування спеціальних задач і завдань на уроках математики, які орієнтовані на розвиток пізнавальних можливостей і здібностей, розширює математичний кругозір учнів початкових класів, сприяє їх математичному розвитку, підвищує якість підготовки з математики та дозволяє дітям більш впевнено орієнтуватися в простих закономірностях навколишньої дійсності, а також активніше використовувати математичні знання в повсякденному житті. Для того щоб дитина могла максимально реалізувати свої здібності, необхідно викликати в неї бажання вчитися та здобувати знання. Важливо допомогти дитині повірити в себе та свої можливості. Майстерність вчителя полягає в умінні активізувати, зміцнювати та розвивати пізнавальні інтереси учнів під час навчального процесу. Це досягається шляхом створення змісту предмета, який буде багатим, глибоким і привабливим, а також використанням різноманітних, творчих і продуктивних методів навчання. Уроки математики мають бути спрямовані не лише на повторення вивченого матеріалу, а й на створення невимушеної атмосфери для спілкування з дітьми. Співпраця між учнями та вчителем повинна проходити без страху та напруги, а нетрадиційні уроки сприяють встановленню контакту між ними. На звичайному уроці діти можуть почуватися скуто, тоді як на нестандартному уроці вони зможуть розслабитися, а вчитель матиме можливість звернути увагу на кожного з них. [14].

Відомо, що урок є складним педагогічним явищем, створеним вчителем, на якому учні демонструють свої знання, вміння та навички.

— Чи цікаво дітям на уроці? Чи мають вони бажання вчитися?

— На ці питання неможливо дати однозначну відповідь.

Іноді діти приходять на уроки з великим бажанням, а іноді — без нього. Як можна зацікавити їх? Як привернути увагу до свого предмета? Звісно, це можна зробити, запропонувавши їм те, що буде для них найцікавішим, і те, що вони зможуть виконувати з задоволенням.

Як донести матеріал до їх свідомості так, щоб він запам'ятався яскраво і надовго?

Іноді можна почути, що математика є складною, сухою та нецікавою наукою. Це вражає і ображає тих, хто любить математику. Вона дійсно сувора, але водночас красива і глибока, як чиста криниця. Завдання вчителя полягає в тому, щоб показати учням емоційний бік математики, її чутливу і привабливу сторону. Як найкраще цього досягти?

Уроки, які вражають своєю красою та цікавістю. Це заняття, що пробуджують цікавість і працездатність, зосереджують увагу учнів. Отже, це нестандартний урок, який не підпорядковується традиційним рамкам дидактики. На такому уроці можна не дотримуватись чітких етапів навчального процесу, методів чи звичних видів роботи. Основною рисою такого уроку є інформаційно-пізнавальна система навчання — засвоєння готових знань, пошук нових форм викладання, розкриття сутності явищ через гру, змагання або нетрадиційні методи роботи з дітьми. Використовуються також власні дидактичні матеріали, часто саморобні, які виявляються особливо корисними для учнів.

Для прикладу наведу урок у 6 класі з теми «Відсотки» під назвою «Бізнес-гейм».

Щоб наблизити математику до життя, щоб показати її різноманітність застосування, цей урок було проведено у вигляді ділової гри.

Учнів класу розділили на три команди, і протягом усього уроку вони працювали в групах. Кожна команда займала окремий великий стіл. Концепція уроку полягала в тому, що учні виступають у ролі гостей, які прибули до міста «Відсоток», а вчитель — бізнесмен, що живе в цьому місті, знайомить їх з його мешканцями. Під час цієї подорожі учні переживають захоплюючі пригоди: вони витрачають і заробляють гроші, займаються бізнесом, а відсотки допомагають їм у цьому. Урок доцільно проводити наприкінці теми, коли діти вже ознайомлені з усіма типами задач на відсотки. Для проведення цього уроку вчителю потрібна ретельна підготовка. Слід підготувати яскраві плакати з назвами товарів, картки із задачами, а також принести гральний кубик і кашкети з написом «Бізнес-гейм». Під час проведення уроку вчителю допомагають учні цього класу, які виконують ролі «працівників фірми». Учень, що відповідає за фінанси, буде вести облік банківських рахунків команд на одній з відкидних дощок. Троє менеджерів, по одному біля кожного з трьох столів, займатимуться виплатою коштів, зароблених учнями окремо, а також киданням грального кубика.

Під час цього уроку спостерігається значна зацікавленість учнів: вони активні, енергійні та працюють із задоволенням. Це можна пояснити тим, що учні відчувають себе в ролі бізнесменів, мають можливість заробити та витратити власний капітал. Урок є міні-моделлю сучасного життя, де знання про відсотки та їхнє застосування є необхідними. Тому ми можемо говорити про мотиваційний аспект цього заняття. Під час підведення підсумків я акцентую увагу не лише на командній роботі певної групи учнів, а й на індивідуальних відповідях.

Досвід роботи свідчить, що для покращення розуміння, закріплення та відтворення інформації доцільно організовувати такі уроки, як уроки-змагання, вікторини, "круглі столи", ігри тощо. Щоб підтримувати зацікавленість учнів у вивченні математики, важливо регулярно проводити ігри з використанням інтерактивних технологій.

У 6 класі я практикую проведення уроків-змагань під час узагальнення та систематизації знань учнів з певної теми. Наприклад, на уроці узагальнення та систематизації знань за темою "Числові вирази" клас ділиться на три команди: "Трикутник", "Квадрат" та "Коло".

Актуалізація базових знань учнів (міні-іспит) проводиться у формі змагання між трьома командами. Кожна команда ставить іншим командам по два питання; за правильну відповідь нараховується 1 бал, а за неправильну – знімається 1 бал.

Математичне лото. Кожній команді надається завдання, що складається з дев'яти задач. До них додається така ж кількість (квадратних) карток, на яких написані відповіді. Номер розміщується на тій стороні картки, де вказана відповідь, а на зворотному боці міститься частина висловлювання про математику.

- Захист творчих робіт капіталами команд.
- Підсумок уроку.
- Така організація учбової діяльності на уроці дає можливість

– реалізувати принципи диференціації навчання, оскільки гарантує участь кожного учня на тому чи іншому етапі уроку. Так, учні з низьким рівнем навчальних здібностей можуть забезпечити команді бали на І етапі уроку, а учні з високими здібностями – виступи із захистом творчих робіт. Другий етап уроку – “поле діяльності” для учнів з середніми навчальними здібностями.

Позакласна діяльність з математики має велике значення для формування в учнів інтересу до цього предмета. Математичні вікторини, змагання, ігри, прес-конференції та вечори сприяють підвищенню математичної культури, розширюють і поглиблюють знання, здобуті на уроках, демонструють їх практичне застосування, розвивають мислення та математичні здібності, а також допомагають зануритися у світ наукових і технічних ідей.

Наприклад, під час проведення прес-конференції "Гранітна опора наук" учні 5-6 класів отримали багато нової інформації про роль математики в різних сферах людської діяльності. Така форма роботи сприяє розширенню кругозору учнів, розвитку вмінь самостійно та творчо працювати з навчальною і науково-популярною літературою, формуванню інтересу до математики та поглибленню знань.

Учням дуже подобається брати участь в іграх, правила яких максимально наближені до умов тих ігор, за якими вони мають можливість спостерігати з екранів телевізорів. Такими іграми є “Перший мільйон”, “Поле чудес”, “Слабка логіка” та інші.

Щоб розвинути творчі здібності учнів, поступово та систематично залучати до самостійної пізнавальної діяльності, щоб забезпечити співпрацю між учнями та учителем, традиційного уроку недостатньо.

У проведенні нестандартних уроків є своя специфіка.

Однотипність уроків може призводити до втоми у дітей. Якщо педагог переважно говорить сам, це зменшує зворотний зв’язок, який дозволяє урізноманітнити форми роботи, поглибити знання та залучити до активної участі якомога більше учнів. На нестандартних уроках особливу увагу приділяють елементам творчого пошуку. Серед різноманітних форм можна виділити мандрівки, змагання, ігри, живі журнали, теле- та радіозаняття, концерти, іспити тощо. Ці заняття можуть бути присвячені окремим предметам, але найчастіше в їх змісті можна знайти майстерно інтегровані компоненти кількох дисциплін. На таких уроках учні виконують ролі вчителя, журналіста, ведучого "телерадіопередачі", артиста, коментатора, поета, капітана команди, лоцмана тощо, враховуючи вікові особливості учнів.

Готуючись до уроку, добрий вчитель ретельно обирає матеріали та форми роботи, щоб забезпечити активну розумову діяльність кожного учня протягом усього заняття. А справді видатний педагог, окрім цього, передбачає моменти, коли ця діяльність може почати згасати, і має на увазі методи її стимуляції. При цьому він не вдається до примусових заходів, а вводить у структуру уроку щось несподіване, незвичайне, цікаве, веселощі, що викликає природний, живий інтерес у учнів і проганяє нудьгу.

Що потрібно знати тим, хто бажає створити позитивну емоційну атмосферу на своїх уроках? По-перше, важливо усвідомити, що навіть на уроках такої складної дисципліни, як математика, це можливо лише за рахунок впровадження цікавих елементів. Ці елементи можуть бути безпосередньо пов'язані з темою уроку (К. Д. Ушинський називав їх «внутрішніми»), або ж зовсім не мати відношення до неї (за К. Д. Ушинським - «зовнішніми»). Очевидно, що «внутрішня» цікавість є більш бажаною, ніж «зовнішня». Адже хороший вчитель не просто «оживляє» сухий матеріал уроку цікавими моментами, а ретельно підбирає їх і знаходить відповідне місце, щоб максимально використати їх потенціал. Нестандартні уроки – це імпровізовані навчальні заняття, які не мають традиційної структури. Погляди педагогів на такі уроки розділяються: одні вважають їх прогресом у педагогічній думці та кроком до демократизації освіти, тоді як інші вважають їх небезпечним відступом від педагогічних принципів, зумовленим тиском учнів, які не бажають і не вміють серйозно працювати.

Аналіз педагогічної літератури дозволив виділити декілька десятків типів нестандартних уроків . Найбільш поширеними типами є:

1. Уроки - ділові ігри .
2. Уроки - змагання.
3. Уроки типу КВН .
4. Комп'ютерні уроки.
5. Уроки творчості
6. Уроки - аукціони .
7. Уроки - конкурси .
8. Урокі - рольові ігри .
9. Міжпредметні уроки.
10. Уроки - ігри « Поле чудес».
11. Уроки - фантазії. [12,8]

Завдяки сучасним технологіям вчителі мають безліч можливостей для впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес з математики та інших предметів. Можна організувати нестандартний урок, на якому всі етапи будуть представлені на мультимедійній дошці або на персональному комп'ютері, якщо є можливість провести заняття в комп'ютерному класі.

Гарним посібником може стати програма Microsoft Power Point.

Використання презентацій у форматі Microsoft Power Point необхідно для розробки проблемних ситуацій на уроках математики. POWER POINT - це програма, у якій можна створювати різноманітні презентації із почерговою зміною слайдів. На слайдах можна розставляти графіку, звук та ін. Мультимедійна презентація допомагає структурувати матеріал і активізувати увагу.

Отже, застосування нестандартних уроків та окремих нетрадиційних методів педагогічної техніки і технології на заняттях сприяє розвитку творчості як у вчителів, так і в учнів. Переваги нестандартних уроків математики в порівнянні зі звичними формами навчання полягають у підвищенні інтересу учнів до навчального процесу, їх активності в пізнанні та творчості, самостійності в пошуку знань, відчутті успіху в досягненнях, ініціативності, можливості індивідуального підходу до кожного учня, використанні інноваційних та інформаційних педагогічних технологій, а також у розвитку культури спілкування та взаємовідповідальності тощо.

Але є деякі складності і недоліки використання нестандартних уроків:

- затрати більшого часу на підготовку і проведення таких уроків;
- не всі учні в рівній мірі активні;
- організаційні труднощі (дисципліна, правила поведінки);
- ускладнюється система оцінювання, аналізу результатів навчання;
- забезпечення науково-методичної і матеріально-технічної бази навчання;
- труднощі із заміною учасників, якщо хтось відсутній (залежно від типу нестандартного уроку)
- знаходження певного місця таких уроків в навчально-виховному процесі тощо.

Не випадково відомий педагог В.О. Сухомлинський стверджував, що до якісного уроку потрібно готуватися протягом усього життя.

2.3. Педагогічний експеримент

Методи педагогічних досліджень – це способи та підходи до вивчення педагогічної реальності. Завдяки цим методам педагогіка отримує інформацію про різні явища та процеси, аналізує і обробляє зібрані дані, інтегруючи їх у вже існуючу систему знань. Таким чином, темп і рівень розвитку педагогічної теорії залежать від вибору методів дослідження, які вона застосовує.

Педагогічний експеримент (лат. experimentum – проба, дослід) є методом дослідження, що полягає у спеціально організованій педагогічній діяльності вчителів і учнів, вихователів і вихованців. Його мета – перевірка та обґрунтування заздалегідь сформульованих теоретичних припущень або гіпотез.

Якщо гіпотеза підтверджується в практиці, дослідник робить відповідні теоретичні узагальнення та висновки.

Педагогічні експерименти можна класифікувати за різними критеріями: за спрямованістю, об'єктами дослідження, місцем і часом проведення тощо.

Метою експерименту було оцінити знання учнів щодо методів розв’язання математичних задач, їх обізнаність про визначення планіметричних фігур (таких як довільний трикутник, квадрат, рівнобедрений трикутник тощо), а також рівень зацікавленості до геометрії до початку курсу за вибором і після його завершення.

Для експерименту було вибрано два 6-х класи Опорного закладу Прислуцький ліцей Березнівської міської ради Рівненського району Рівненської області у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий.

При вивченні теми «Раціональні числа» у 6 -А класі на уроках математики широко використовувались нові методи при вирішенні задач, в 6–Г класі проводились уроки математики без застосування різних підходів до розв’язку поставлених задач.

Оскільки робота проводилася одночасно в двох класах, де на цю тему було виділено однакову кількість годин, результати експерименту мали з'явитися після певної кількості уроків, що передбачали застосування різних методів розв'язання математичних задач. Визначення результатів експерименту здійснювалося шляхом проведення самостійної роботи в обох паралельних класах.

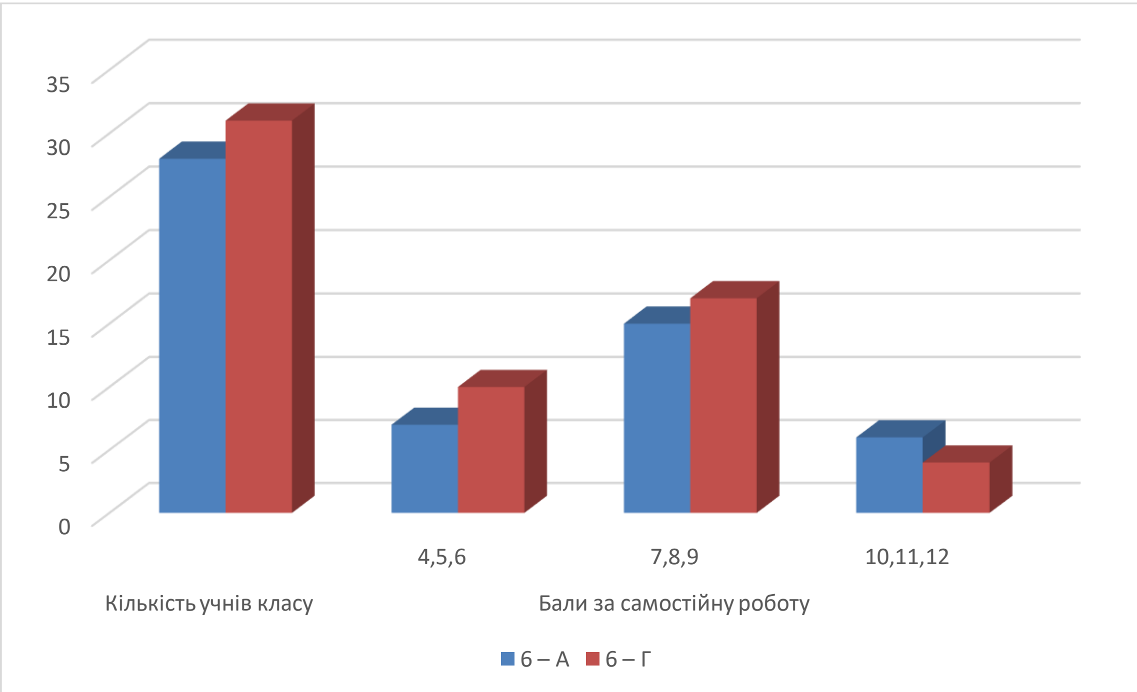
На підсумковому уроці була проведена самостійна робота у 6-А та у 6-Г класах. На основі результатів виконання самостійної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів.

Рівень засвоєння знань в учнів 6-А класу був значно вищим, ніж в учнів 6-Г класу. Це було зумовлено розвитком навичок використовувати різні методи рішення математичних задач в учнів. Якісний характер цього процесу і обумовлює ефективність проведеного педагогічного експерименту. Це видно із результатів виконання самостійної роботи (Таблиця 3)

Класи	Кількість учнів класу	Бали за самостійну роботу		
		4-6	7-9	10-12
6 – А	28	7	15	6
6 – Г	31	10	17	4

Таблиця 3

Покращення успішності у 6-А класі показує, що дуже важливо у своїй практиці вчителю проводити нетрадиційні уроки та використовувати різні методи до розв'язування математичних задач, адже це сприяє вихованню в учнів активності, наполегливості, розвиває логічне та просторове мислення учнів.



Таким чином, на основі аналізу вище наведених таблиць, можна обґрунтовано стверджувати, що описані в даній роботі рекомендації щодо використання нестандартних задач як засобу розвитку творчих здібностей учнів можуть з успіхом застосовуватись як учителями та студентами, так і самими учнями, заради покращення умов навчання, в яких і проводилось наше дослідження.

Висновки до розділу II

Ефективна методика навчання учнів розв'язуванню задач може бути реалізована лише за умови комплексного підходу до навчального процесу. Це передбачає чітке визначення мети навчання учнів розв'язуванню задач певного типу або оволодіння конкретним методом, ретельно розроблену систему самих задач, які будуть розв'язуватись на уроці та пропонуватись для домашнього виконання, обґрунтований вибір методів і організаційних форм роботи на уроці, а також засобів навчання.

Отже, роботу з учнями щодо активізації їхніх пізнавальних інтересів слід організовувати на уроках у такій послідовності: цікаво – знаю – вмію. Важливо не просто спростити навчання, а зробити його зрозумілішим. Дитина повинна чітко усвідомлювати мету завдання, і тоді вона зможе з інтересом виконувати багато нецікавих, але необхідних завдань.

Вміння пробуджувати в дітей інтерес до знань є важливою рисою творчого вчителя. Лише тоді, коли дитина зацікавиться матеріалом, у неї з'явиться бажання дізнатися про нього більше.

Ефективне навчання математики неможливе без пошуку способів активізації пізнавальної діяльності учнів. Діти повинні не лише засвоїти певний обсяг знань, а й навчитися спостерігати, порівнювати, виявляти взаємозв'язки між поняттями та міркувати. Досягти цього можна лише за допомогою методів, які стимулюють пізнавальну активність під час формування інтересу до вивчення математики.

Педагогічний експеримент є методом дослідження, що полягає у спеціально організованій педагогічній діяльності вчителів і учнів, вихователів і вихованців. Його мета – перевірка та обґрунтування заздалегідь сформульованих теоретичних припущень або гіпотез. Метою експерименту було оцінити знання учнів щодо методів розв’язання математичних задач, їх обізнаність про визначення планіметричних фігур (таких як довільний трикутник, квадрат, рівнобедрений трикутник тощо), а також рівень зацікавленості до геометрії до початку курсу за вибором і після його завершення.

ВИСНОВКИ

Теоретичне та експериментальне дослідження методики розв’язування нестандартних задач для учнів 5-6 класів, дозволило зробити такі висновки:

1. Здійснено теоретичний аналіз досліджуваної проблеми. Проаналізувавши науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з теми дослідження, розкрили поняття «задача» та «нестандартна задача». У найширшому сенсі термін "задача" розглядається як мета, яку потрібно досягти, або як питання, що вимагає вирішення на основі знань і логічних міркувань. «Нестандартна задача»−це така задача, для якої в рамках курсу математики немає загальних правил і принципів, що визначають чітку програму її розв’язання. Основна мета задач полягає в розвитку творчого мислення учнів, зацікавленні їх математикою та спонукання до відкриття математичних фактів.

2. Схарактеризовано особливості мислення учнів при розв’язуванні нестандартних математичних задач. Постійна робота над цікавими завданнями спрямована на вдосконалення базових розумових операцій, формування критичного мислення, а також на загальне розкріпачення і гнучкість їхнього мислення. Мати гнучке мислення означає, перш за все, вміти швидко відмовитися від звичного способу дій, коли він перестає бути ефективним, і замінити його новим, нестандартним, що відповідає новим умовам.

3. Визначено основні методичні принципи добору змісту розв’язування і складання математичних задач. Особлива цінність нестандартних задач полягає в тому, що їх розв'язання вимагає застосування схем міркувань, які характерні для реальної дослідницької діяльності в математиці. Серед таких методів можна виділити доведення від супротивного, метод координат, векторний метод, традиційний геометричний метод та інші. Саме тому ці задачі користуються великою популярністю на різноманітних математичних конкурсах і олімпіадах.

4. Досліджено логічні та алгебраїчні підходи до діяльності, пов'язаної з розв'язуванням і складанням математичних задач. Під час розв'язування нестандартних задач учні оволодівають новими методами та прийомами, засвоюють нові математичні факти, які вони можуть використати під час розв'язування інших задач. Нестандартні задачі корисні ще й тим, що не містять алгоритмічних підходів, потребують проведення аналізу, систематизації, висування гіпотез, стимулюють пізнавальні інтереси учнів, формують навички самостійної роботи, допомагають оволодіти дедуктивним методом.

5. Узагальнено та систематизовано матеріали для розв'язування нестандартних математичних задач в 5-6 класах відповідно до їх видів.

Ефективна методика навчання учнів розв'язуванню задач може бути реалізована лише за умови комплексного підходу до навчального процесу. Це передбачає чітке визначення мети навчання учнів розв'язуванню задач певного типу або оволодіння конкретним методом, ретельно розроблену систему самих задач, які будуть розв'язуватись на уроці та пропонуватись для домашнього виконання, обґрунтований вибір методів і організаційних форм роботи на уроці, а також засобів навчання. Крім того, необхідно здійснювати контроль за сприйняттям учнями методів і способів розв'язування, а також за набутими ними навичками та вміннями.

Таким чином, на основі результатів проведеного педагогічного експерименту, можна обґрунтовано стверджувати, що описані в даній роботі рекомендації щодо використання нестандартних задач як засобу розвитку творчих здібностей учнів можуть з успіхом застосовуватись як учителями та студентами, так і самими учнями, заради покращення умов навчання, в яких і проводилось наше дослідження.

Проведене дослідження не вичерпує всіх аспектів, пов'язаних із методикою розв'язування нестандартних задач учнями 5-6 класів. У процесі наукового пошуку визначено нові проблемні позиції, що потребують подальшого вивчення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдулаєва Н.П. Формування творчої особистості учня у процесі позакласної роботи з математики. *Обдарована дитина*. 2010. № 2. С. 18–21.
2. Апостолова Г. В., Бакал О. П. Розв’язуємо задачі логічного характеру: Навч. посібн. БілаЦерква: КОІПОПК, 2010.- 160 с.
3. Бабенко С. П. Усі уроки математики. 6 клас І семестр. *Усі уроки*. Харків: Вид. група «Основа», 2014. 254 с.
4. Бабій Н.М. Способи розв’язування задач із математики як засіб інтегрованого навчання в школі. *Математика в школах України.* 2019. № 13-15 (601-603) травень. С. 8- 12.
5. Бараболя М. М. Педагогічний довідник вчителя математики. Посібник для самоосвіти вчителів математики. Вінниця, 2008. 128 с.
6. Белешко Д. Т. Загальні питання теорії математичних задач. поняття задачі, класифікація задач, вправи, запитання. РДГУ. 2014. С. 3-5.
7. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. - 3-тє вид., переробл. і допов. Київ: Вища шк., 1989. 367с.
8. Бевз Г. П. Методика розв’язання стереометричних задач: Посібник для вчителя. Київ: Рядянська школа, 1988. 192 с.
9. Буковська О. І. Математична логіка. 5–9 класи. Харків: Вид. група «Основа», 2005. 176 с.
10. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Академія логіки. Навчально-методичний посібник. 5 клас.-Харків: ФОП Співак В. Л., 2010. 224 с.
11. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Академія логіки. Навчально-методичний посібник. 6 клас.-Харків: ФОП Співак В. Л., 2010. 224 с.
12. Бурляй М. Ф. Задачі, розв’язування яких пов’язане з пошуком нової ідеї. *Математика в школах України.* Київ. 2012. № 4.
13. Василенко Н. Логіка 5-11 класи. Харків: Видавнича група «Основа», 2011. 256 с.
14. Власенко К.В. Актуалізація евристичних ситуацій на уроках

геометрії (основна школа). Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. 192 с.

15. Власенко О. І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посібник для студ. фізико-математ. факультетів пед. ін-тів. Київ: Вища шк., 1974. 208 с.

16. Геращенко В.О. Горішки для розуму. Логіка. Збірник задач. 5-9 класи. Харків: Торсінг плюс, 2010. 384 с.

17. Гільбух Ю. З. Розумово обдарована дитина. Психологія, діагностика, педагогіка. Київ: Освіта, 1992. 176 с.

18. Гончарова І.В. Прийоми розвитку особистості учня на евристичних факультативах з математики. *Вісник черкаського університету.* Вип.93. Черкаси, 2006. С.30-35.

19. Губа Л.А. Нестандартні уроки математики. Харків: Основа, 2005. 96 с.

20. Джус І. І. Особливості підготовки вчителів до роботи з обдарованими учнями. Освіта та розвиток обдарованої особистості. 2014. Вип. №3 (22). С. 4-18.

21. Жук Ю.О., Шишкіна М.П. Електронний підручник та проблема систематики комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання. *Нові технології навчання*. 2000. № 25. С. 44-49.

22. Закономірності [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://playcoolmath.com/uk/math-lessons/math-for-kids/basic-math-concepts/patterns

23. Зважування (5 клас) [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://shahistua.wixsite.com/site/post/2018/11/30/%D0%B7%D0%B2%D0%B0%D0%B6%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F

24. Задачі на переливання та зважування [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/30235

25. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором. Харків.: Вид-во «Ранок», 2011. 320 с.

26. Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України. №17-18, 18-21. Київ. 2011.

27. Козира В.М. Технологія уроку з математики. Посібник для вчителя. Тернопіль: Астон, 2002. 53 с.

28. Корецька Л. В. Підготовка вчителів до роботи з обдарованими учнями: Навч.- метод. посібн. для сист. післядипл. освіти. Кіровоград: Вид-во Кіровоградського обл. інст. післядипл. пед. освіти ім. В. Сухомлинського, 2008. 137 с.

29. Кривоносова Т. Р. Розв'язування задач логічного характеру з використанням кругів Ейлера. Навчально-методичний посібник для вчителів та учнів. Кривий Ріг: КЦМГ, 2017. 44 с.

30. Кривошия Т. І. Нестандтартні задачі як засіб формування пізнавальної діяльності та творчості учнів *Математика в школах України.* Київ. 2007. № 5.

31. Кремінський Б.Г. Обдарованість та проблема розвитку здібностей особистості. *Практична психологія та соціальна робота*. 2004. №12. С. 74–80.

32. Кушнір В.А. Особливості творчості у розв'язуванні задач. *Математика в школі*. 2010. № 10. С. 8–17.

33. Кушнір Ісаак. Задачі з однією підсказкою. - Київ: Факт, 2003. 176 с.

34.Ликова Т. А. Факультативні заняття з математики для учнів 5-6 класів. Наука, освіта, суспільство очима молодих: матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих науковців. Частина 1. Психолого-педагогічний напрям. Рівне: РВВ РДГУ. 2018. С. 102-103.

35. Маланюк П. М. Стежини до математичних узагальнень. Тернопіль: Мандрівець, 1997. 64 с.

36. Максименко В.П. Дидактика: курс лекцій: навч. посіб.. Хмельницький: ХмЦНП, 2013. 222 с.

37. Маркова І. С. Математика після уроків. Матеріали для позакласної

роботи. *Математика в школах України*. Харків: Вид. група «Основа», 2004. Вип. 11(23).192 с.

38. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5 – 12 класи. Київ: Ірпінь: Перун, 2005. 64 с.

39. Мерзляк А. Г. Математичні гуртки для тих, кому 10+ .Харків: Гімназія, 2021. 272 с.

40. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка: навчальний посібник.– 5-е вид., доповн. й перер. Київ, 2007.

41. Приймак О. П. Математика. Практичні заняття для студентів І курсу педагогічного факультету (1 семестр). –2-е вид., доповн. Рівне: РДГУ, 2015. 68 с.

42. Поліщук О. Р. Математична логіка. 5-6 класи. Харків: Вид. група «Основа», 2007. 110 с.

43. Положення про навчально-методичний комплекс навчальної дисципліни. Путивльський педагогічний коледж ім. С. В. Руднєва, 2017.

44. Прокопенко Н.С. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором. Харків: Вид-во «Ранок», 2011. Ч. 1. 320 с.

45. Скляренко О. Ю. Числові головоломки. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо математичного циклу «ІТМ плюс - 2015»: матеріали ІІ міжнародної науково-математичної конференції (3-4 грудня 2015 р. м. Суми): у 3 ч. / упорядн. Чашечникова О. С. Суми: видавничо-виробниче підприємство «Мрія», 2015. Ч. 1. 131 с.

46. Соломатнікова О. М. Методичні рекомендації та поради щодо використання варіативної складової робочого навчального плану з математики. Науково-методичний супровід. Херсон,2012.

47. Сухарєва Л. С. Задачі на переливання, зважування, перекладання. Харків: Вид. група «Основа», 2007. 48 с.

48. Овчар О. Методи розв'язування прикладних задач на уроках математики. *Молодь і ринок*. 2010. № 10(69). С. 145-150.

49. Пазиненко С.В. Збірник прикладних задач ДЛЯ 5-6-Х КЛАСІВ «Математика навколо нас»: Збірник задач для вчителів математики і учнів загальноосвітніх шкіл. URL: https://naurok.com.ua/zbirnik-prikladnih-zadach-93930.html ст12- 14

50. Орендарчук Г.О. Логіка. Видання друге, перероблене і доповнене. Тернопіль: Астон,2008. 272 с.

51. Перенчук В.К. Нестандартні підходи до навчання учнів на уроках математики. *Математика в школах України.* № 1. 2006. С. 2–3.

52. 23. Підручна М.В. Позакласна робота. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2003. 188 с.

53. Поліщук О. Р., Чайчук О. Р. Математична логіка. 5–6 класи. Харків: Вид. група «Основа»:«Тріада +», 2007. 112 с.

54. Прошкуратова П. Від творчих вчителів до творчих учнів. *Початкова школа*. Київ. 1998. №2. С. 2-4.

55. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 386 с.

56. Способи розв'язування текстових задач. URL: https://studopedia.com.ua/1_212132_sposobi-rozvyazuvannya-tekstovih-zadach.html.

57. Тадеєв В.О. Неформальна математика 5-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається в школі. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. 288 с.

58. Тарасенкова Н.А. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2014. 304 с.

59. Факультативні заняття – методика організації [Електронний ресурс]: Режим доступу:http://www.pedahohikam.net/nervs-921-1.html

60. Факультативні заняття та його аналіз [Електронний ресурс]: Режим доступу:https://osvita.ua/school/method/technol/726/

61. Фіцула М.М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. Київ. 2000. С. 170–171.

62. Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5–7.-Харків: Вид. група «Основа», 2008. 143 с.

63. Черкасов Р.С. Методика викладання математики в середній школі. Харків: Основа, 1992. 151 с.

64. Чуманська С. О. Роль факультативних занять та курсів за вибором у формуванні інтересу до знань з математики та здійсненні соціалізації учнів. *Таврійський вісник освіти.* 2015. № 4. 212 с.

65. Ядренко М.Й. До шістдесятиріччя математичних олімпіад в Україні. *У світі математики*. 1995. № 2. С. 95–97.

ДОДАТКИ

Додаток А

Задачі для самостійного розв'язання

1. У похід пішло 20 чоловік: чоловіки, жінки й діти. Разом вони несли 200 кг. Кожен чоловік ніс 20 кг, жінка – 5 кг, дитина – 3 кг. Скільки чоловіків, жінок і дітей пішло в похід?

Відповідь: 8 чоловік, 2 жінки й 10 дітей.

2. На лузі паслися 90 телят і гусей. Усього в них було 256 ніг. Скільки було телят і скільки було гусей?

Відповідь: 38 телят і 52 гуски.

3. Учаснику гри було запропоновано 30 запитань. За кожну правильну відповідь він отримував 7 балів, а за кожну неправильну (або відсутність відповіді) знімали 12 балів. Скільки правильних відповідей дав учасник гри, якщо він отримав 77 балів?

Відповідь: 23 правильні відповіді й 7 неправильних.

4. Маса 10 слив така сама, як маса 3 яблук і 1 груші. Маса 2 слив і 1 яблука така сама, як маса 1 груші. Скільки слив треба взяти, щоб їх маса дорівнювала масі 1 груші?

Відповідь: Маса 1 груші дорівнює масі 4 слив.

5. Андрій з Віктором організували платну бібліотеку: Андрій приніс 48 книг по 6 грн. кожна, а Віктор – 27 книг по 8 грн. кожна. До них вирішив приєднатися Сергій, але книг для бібліотеки в нього не було, тому він вніс свою частину грошима. Скільки гривень Сергій заплатив Андрію і скільки – Віктору, щоб усі троє стали рівноправними власниками бібліотеки?

Відповідь: 120 грн. Андрію і 48 грн. Віктору.

6. Поверхня ставка поступово покривається ліліями, що розростаються. Вони ростуть так швидко, що за кожний день подвоюється площа, покрита ліліями. Вся поверхня покрилася ліліями за 30 днів. За скільки днів була покрита перша половина всієї поверхні ставка?

Відповідь: За останній день покрилася ліліями друга половина ставка. Отже, перша половина ставка покрилася за 29 днів.

7. У таборі відпочинку одного дня влаштували змагання грибників. Підводячи підсумки, вожатий сказав: «Найбільше число грибів, яке назбирали переможці, виявилося цікавим. Якщо це число зменшити в 7 разів і одержане число зменшити на 7, то вийде 7». Чи багато грибів у переможців?

Відповідь: 98 грибів.

8. Олена, Тетяна, Микола і Дмитро збирали ягоди. Тетяна зібрала ягід найбільше, Олена – не менше від усіх. Чи правильно, що дівчата зібрали ягід більше від хлопців?

Відповідь: Правильно, Олена зібрала найбільше, вона зібрала більше від кожного з хлопців, так як Тетяна зібрала не найменше, але менше від Олени, то вона зібрала більше хоча б від одного з хлопців. Отже, разом дівчата зібрали більше від хлопців.

9. Терещенко й Павлюк – співвласники фірми. Терещенку належать акції фірми на суму 34 тисячі гривень, а Павлюку – 56 тисяч гривень. Вони вирішили частину акцій продати Якименку, так щоб кожний володів рівно третиною фірми. Скільки гривень Якименко має заплатити Терещенку і скільки – Павлюку, щоб кожен володів третьою частиною акцій?

Відповідь: 4 тис. грн. Терещенку і 26 тис. грн. Павлюку.

10. Учень прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. В третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги. Скільки сторінок у книзі?

Відповідь: 270 сторінок.

11. Сашко витрачає на дорогу в школу 12 хвилин, а Марійка 18 хв. Через 3 хвилини після виходу Марійки до школи вийшов Сашко. Через який час він її наздожене?

Відповідь: на півшляху.

12. В неділю рибалка ловив рибу 3 рази: вранці, вдень і ввечері. Весь улов – 3кг, причому, вранці він зловив в 3 рази більше, ніж ввечері, а вдень стільки ж, скільки і ввечері. Скільки риби зловив рибалка вранці і ввечері?

Відповідь: 1,8 кг – вранці; 0,6 кг – ввечері.

13. Зарплату токарю підвищили спочатку на 10%, а через рік ще на 20%. На скільки відсотків підвищилася зарплата порівняно з початковою?

Відповідь: на 32%.

14. Яку найбільшу кількість однакових букетів можна скласти із 24 волошок і 32 ромашок, використавши всі квіти?

Відповідь: 8 букетів.

15. Позавчора лисичка купила в лісовій крамниці молоко за 4 грн. Учора ціна молока піднялася на 5%, а сьогодні знизилася на 5%. За яку ціну сьогодні лисичка купила те саме молоко?

Відповідь: 3,99 грн.

16. У ведмедя на пасиці 120 вуликів. 6 вуликів ще не заселені, а в решті живуть працьовиті бджоли. Скільки відсотків вуликів дадуть меду?

Відповідь: 95%.

17. На своїй лісовій грядці зайчик посадив 45 морквин. 9 морквин він вже з'їв. Який відсоток морквин залишився на грядці зайчика?

Відповідь: 80%.

18. На галявині росла полуниця, що містить 6% цукру. Лисичка зібрала 4 кг полуниці. Чому дорівнює маса зібраної полуниці без цукру?

Відповідь: 3,76 кг.

19. Дюймовочка сплела вінок із лісових квітів. У вінку було 15 дзвіночків, що становило 30% усіх квітів, а решта – ромашки. Скільки ромашок у вінку?

Відповідь: 35 ромашок.

20. Перший тракторист зорав 40% поля, а другий зорав 35% поля. Чому дорівнює площа всього поля, якщо перший зорав на 4 га більше?

Відповідь: 80 га.