Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему

Детерміновані моделі цілочислового лінійного програмування

Виконала: студентка II курсу
магістратури, групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Крохмаль Ганна Володимирівна

Керівник: доктор технічних наук,
професор Бичков О.С.

Рецензент: кандидатка технічних наук,
доцентка кафедри автоматизації,
електротехнічних та комп'ютерно-
інтегрованих технологій НУВГП
Присяжнюк О.В.

Рівне-2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. Розвиток математики в кінці 19 ст. і на початку 20 ст. зумовлювався головним чином під впливом потреб фізики. Саме завдяки теоретичній фізиці розвивалась диференціальна геометрія, векторний і тензорний аналіз, диференціальні та інтегральні рівняння, теорія ймовірності, математична статистика та ряд інших математичних дисциплін. Згодом життя висунуло на перший план проблеми організації виробництва, планування народного господарства, автоматизації промисловості і управління воєнною технікою. Природною реакцією на це був швидкий розвиток кібернетичних наук. Стало очевидним, що економічний ефект від раціональних методів управління і планування, що застосовується в широких масштабах і на високому рівні, здатний перевищити ефект від істотного збільшення потужностей. Тому виникає необхідність у знаходженні оптимального набору виробничих ресурсів, розробці раціонального плану організацій виробничого процесу, застосуванні найефективніших методів і технологічних систем [3, 8, 21].

Таким чином, на даному етапі розвитку в прикладній математиці значну увагу приділяють новому класу задач оптимізації, що полягають у знаходженні в заданій області точок найбільшого чи найменшого значення деякої функції, що залежить від великої кількості змінних.

Цілочислове лінійне програмування (ЦЛП) орієнтоване на розв’язування задач лінійного програмування, у яких усі чи деякі змінні мають набувати цілочислових (або дискретних) значень.

Не зважаючи на інтенсивні дослідження, що проводяться протягом останніх десятиліть, відомі обчислювальні методи розв’язування задач ЦЛП все ще далекі від ідеалу.

В той же час, відомі методи розв’язування задач ЦЛП, їх вдосконалення та пошук нових є актуальною задачею сучасного етапу розвитку прикладної математики.

Метою і завданням дипломної роботи є ознайомлення з постановкою задач цілочислового лінійного програмування, систематизація відомостей про такі задачі та основні методи їх розв’язування, підбір та розв’язання конкретних прикладів задач, які є задачами ЦЛП.

Методи дослідження. Під час дослідження у роботі використовувалися методи аналізу, синтезу, математичного моделювання, порівняння результатів досліджень.

Робота містить вступ, основну частину, яка складається з трьох розділів, висновки та список використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Канонічна форма задачі лінійного програмування

Лінійне програмування – розділ математичного програмування, який вивчає методи досліджень і відшукання екстремальних (найбільших і найменших) значень лінійної функції, на невідомі якої накладені лінійні обмеження. Ця лінійна функція називається цільовою, а обмеження, які математично записуються у вигляді рівнянь або нерівностей, називаються системою обмежень [10].

Математичний вираз цільової функції і її обмежень називається математичною моделлю економічної задачі.

Задача лінійного програмування вважається записаною в канонічній формі, якщо вона формулюється так: треба знайти мінімум лінійної функції

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.3}$$

де a_{ij}, b_i, c_i - задані постійні величини. При цьому припустимо, що $b_i \geq 0$ (i=1,2,…,m) і m<n.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до канонічної форми [34].

Якщо для задачі (1.1) – (1.3) ввести вектори $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_0 = (b_1, b_2, .., b_m)^T$, $P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = (1, 2, .\ .n)$, то задачу можна переписати у вигляді

$$L = cX \to \min, \tag{1.4}$$

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0\ , \tag{1.5}$$

$$X \geq 0, \qquad (1.6)$$

де cX- скалярний добуток векторів c і X .

Планом задачі лінійного програмування називається вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти якого задовольняють умови (1.1)- (1.3).

План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається опорним, якщо вектори P_j, які відповідають додатнім компонентам x_j плану X, утворюють лінійно незалежну систему.

Оскільки вектори P_j є m-вимірними, то максимальне число таких векторів, що утворюють лінійно незалежну систему, не перевершує m.

Опорний план називається невиродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент. Якщо опорний план містить менше за m додатних компонент, то такий опорний план називається виродженим.

Оптимальним планом, або розв’язком задачі лінійного програмування, називається план, який мінімізує лінійну форму (1.1) [3, 14].

1.2. Теорія двоїстості в лінійному програмуванні

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні вивчає загальні властивості пари тісно пов'язаних між собою так званих двоїстих задач лінійного програмування. Виявляється, що з кожною задачею лінійного програмування зв'язана деяка інша, також цілком визначена задача лінійного програмування. Їх зв'язок взаємний і настільки тісний, що при розв'язуванні однієї з них фактично розв'язується й інша. Таку пару задач називають парою взаємно двоїстих задач лінійного програмування [2, 7].

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$x_j \geq 0,\ j=1, 2, \ldots ,n,\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Двоїстою до неї є задача

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n, \end{cases} \qquad (1.8)$$

$$y_i \geq 0,\ i=1, 2, \ldots ,m,\quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Задача (1.7) називається прямою задачею [7].

Теорема (перша теорема двоїстості). Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв’язок , то друга також має оптимальний розв’язок, причому для будь-яких оптимальних розв’язків X, Y виконується рівність $L(x)_{max}=S(y)_{min.}$ Якщо одна із двоїстих задач не має розв’язків в силу того, що $L(x)_{max}\to\infty$ (або $S(y)_{min}\to-\infty$), то інша задача не має допустимих розв’язків [34].

Теорема (друга теорема двоїстості). Для оптимальності допустимих розв’язків X і Y пари двоїстих задач необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли систему рівнянь

$$\begin{cases} x_{onmj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_{onmi} - c_j\right) = 0, \\ y_{onmi}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{onmj} - b_i\right) = 0. \end{cases}$$

Теореми двоїстості дозволяють визначити оптимальний розв’язок однієї із пари задач по розв’язку іншої. Економічний зміст першої теореми двоїстості наступний. План виробництва X і набір оцінок ресурсів Y являються оптимальними тоді і тільки тоді, коли прибуток від реалізації продукції, визначений при відомих заздалегідь цінах продукції c_1, c_2, …, c_n, рівна затратам на ресурси по “внутрішніх” (які визначаються лише із розв’язку задачі) цінам ресурсів y_1, y_2,…, y_m. Для всіх інших планів $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ обох задач прибуток від реалізації продукції завжди менша (або рівна) вартості затрачених ресурсів: $f(\overline{X}) \le g(\overline{Y})$, тобто цінність всієї виробленої продукції не перевищує сумарної оцінки наявних ресурсів. Значить величина $g(\overline{Y}) - f(\overline{X})$характеризує виробничі витрати в залежності від розглядуваної виробничої програми і вибраних оцінок ресурсів. Із першої теореми двоїстості слідує, що при оптимальних виробничій програмі і векторі оцінок ресурсів виробничі втрати рівні нулю. Економічний зміст першої теореми двоїстості можна інтерпретувати і так: підприємству однаково чи виробляти продукцію і по оптимальному плану $\overline{X}$ і отримати максимальний прибуток чи продати ресурси і по оптимальних цінах $\overline{Y}$ і компенсувати від продажу рівні їй мінімальні затрати на ресурси [20].

Із другої теореми двоїстості в даному випадку випливають такі вимоги на оптимальну виробничу програму $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і оптимальний вектор оцінок $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$: якщо$y_i$>0,то$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}$;

$$\text{якщо } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i, \text{ то } y_i = 0, i = \overline{1,m}; \qquad (1.9)$$

$$\text{якщо } x_i > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, j = \overline{1,n};$$

$$\text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > c_j, \text{то } x_j = 0, j = \overline{1,n}. \qquad (1.10)$$

Умови (1.9) можна інтерпретувати так: якщо оцінка y_i одиниці ресурсу i-го виду додатна, то при оптимальній виробничій програмі цей ресурс буде використаний повністю; якщо ж ресурс використовується не повністю, то його оцінка дорівнює нулю. Із умови (1.10) слідує, що якщо j-й вид продукції ввійшов в оптимальний план, то він в оптимальних оцінках не збитковий; якщо ж j-й вид продукції збитковий, то він не ввійде в оптимальний план, не буде вироблятися [11].

Двоїстий симплекс-метод полягає в послідовному переході від одного псевдоплану задачі до іншого, значення лінійної форми для якого більше, ніж для попереднього псевдоплану. Збільшення значення лінійної форми при переході до нового псевдоплану зв'язане з тим, що кожному псевдоплану *X* задачі відповідає опорний план У двоїстої задачі, причому кожному наступному псевдоплану — кращий від попереднього (тобто який надає цільовій функції двоїстої задачі більшого значення). Метод дає змогу за скінчене число кроків або знайти оптимальний план задачі, або пересвідчитись у тому, що задача не має розв'язку.

Розглянемо задачу лінійного програмування (1.7) і двоїсту до неї (1.8). Припустимо, що *X*—деякий псевдоплан задачі (1.7). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що X має такий вигляд:

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_m, 0\dots, 0)$$

і базис, що йому відповідає, складається з векторів P_1, P_2, …, P_m. Знайдемо розклад векторів P_j, через вектори базису, оцінки Δ_j значення лінійної форми z_0 для псевдоплану X. Нехай

$$Pj=x_{1j}P_1 +x_{2j}P_2 +\dots+x_{mj}P_m \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Тоді

$$\Delta_j=c_1x_{1j}+c_2x_{2j}+\dots+c_mx_{mj}-c_j \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$z_0=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_mx_m.$$

Теорема (ознака переходу до нового псевдоплану). Якщо для псевдоплану X з базисом P_1, P_2,…, P_m виконуються умови:

а) існує такий індекс 1 ($l\le m$), що $x_l<0$;

б) серед коефіцієнтів x_{lj} ($j=m+1, \dots, n$) існує такий x_{lk}, що $x_{lk}<0$ і $\frac{\Delta_k}{x_{lk}} \le \frac{\Delta_j}{x_{lj}}$

для всіх $j(j \neq 1, 2, \ldots, m; k)$, для яких $x_{lj}<0$, то введення в базис вектора P_k замість P_l дає новий псевдоплан X' такий, що $L(X') \geq L(X)$.

Теорема (ознака нерозв'язності задачі лінійного програмування на основі псевдоплану). Якщо для псевдоплану X з базисом $P_1, P_2, \ldots, P_m$ існує такий індекс 1 ($l \leq m$), що $x_l<0$ і всі коефіцієнти $x_{lj} \geq 0$ $(j=m+l, \ldots, n)$, то задача (1.7) не має планів [5].

1.3. Приклади задач ЦЛП. Загальна задача ЦЛП

Розглянемо практичні задачі, математичними моделями яких є задачі ЦЛП. Для зручності, задачі, у яких усі змінні мають бути цілочисловими, називаються повністю цілочисловими, а задачі, у яких лише деякі змінні мають набувати цілочислових значень, – частково-цілочисловими.

Задача 1 (про розподіл капіталовкладень). Оцінюються п'ять проєктів з точки зору їх можливого фінансування на період трьох років. Таблиця 1.1 містить очікуваний прибуток від реалізації кожного проєкту і розподіл необхідних капіталовкладень за роками.

Таблиця 1.1

Проєкт	Витрати (млн грн / рік)			Прибуток (млн грн)
	1-й рік	2-й рік	3-й рік	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Доступний капітал (млн грн)	25	25	25	

Передбачається, що кожен затверджений проєкт буде реалізовано за трирічний період. Необхідно визначити сукупність проєктів, якій відповідає максимум сумарного прибутку.

Задача зводиться до розв'язку типу «так-ні» відносно кожного проєкту.

Визначимо двоїсті змінні x_j:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо проєкт } j \text{ затверджено;} \\ 0, \text{ якщо проєкт } j \text{ не затверджено.} \end{cases}$$

Задача ЦЛП буде мати наступний вигляд:

максимізувати $z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \le 25, \\ &x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \le 25, \\ &8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \le 25, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ або } 1. \end{aligned}$$

Оптимальним цілочисловим розв'язком цієї задачі буде $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,\ x_5 = 0$ із $z_{\max} = 95$ млн грн. Цей розв'язок означає, що необхідно вибрати для фінансування усі проєкти, крім п'ятого.

Цікаво порівняти розв'язок даної задачі ЦЛП із розв'язком «звичайної» задачі лінійного програмування із тими ж обмеженнями, але без умови цілочисленості змінних. Задача лінійного програмування отримується заміною умов $x_j = 0$ або 1 на умову $0 \le x_j \le 1$ для усіх j. Ця задача має розв'язок $x_1 = 0{,}5789,\ x_2 = x_3 = x_4 = 1,\ x_5 = 0{,}7368$ і $z_{\max} = 108{,}68$ млн грн. Такий розв'язок з точки зору цілочислової задачі позбавлений сенсу, оскільки дві змінні є дробами. Можна було б спробувати округлити отриманий результат, що привело б до $x_1 = x_5 = 1$. Отриманий при цьому розв'язок є недопустимим, оскільки порушуються обмеження задачі. Більш суттєвим у цій ситуації є те, що округлення застосовувати не можна, оскільки x_j представляють розв'язок задачі типу «так-ні», для якого дробові значення позбавлені сенсу.

Задача 2 (задача зі сталими витратами). Три телефонні компанії пропонують передплатити їх послуги зі зв'язку у межах Євросоюзу. Послуги компанії №1 коштують 16 євро на місяць плюс 0,25 євро за кожну хвилину розмови. Компанія №2 оцінює свої послуги у 25 євро на місяць, але має похвилинну оплату 0,21 євро. Місячна абонплата компанії №3 становить 18 євро, а вартість хвилини розмови – 0,22 євро. Ваші телефонні дзвінки у межах Євросоюзу, як правило, становлять 200 хв на місяць. Як варто організувати свої дзвінки, використовуючи дані компанії, щоб мінімізувати витрати на них (абонплати здійснювати не потрібно, якщо не використовуєте телефон для дзвінків у Євросоюз, а дзвінки можна розподіляти між усіма трьома компаніями, як заманеться)?

Нехай x_1 – кількість хвилин розмови (у межах Євросоюзу) у місяць через компанію №1, x_2 – кількість хвилин розмови (у межах Євросоюзу) у місяць через компанію №2, x_3 – кількість хвилин розмови (у межах Євросоюзу) у місяць через компанію №3; $y_1 = 1$, якщо $x_1 > 0$, і $y_1 = 0$ при $x_1 = 0$; $y_2 = 1$, якщо $x_2 > 0$, і $y_2 = 0$ при $x_2 = 0$; $y_3 = 1$, якщо $x_3 > 0$, і $y_3 = 0$ при $x_3 = 0$.

Для забезпечення рівності $y_j = 1$ при додатних значеннях змінної x_j використовуємо обмеження $x_j \le My_j$, $j = 1,2,3$, де M – досить велике число, яке не має обмежувати величину x_j. Так як дзвінки у межах Євросоюзу займають близько 200 хв на місяць, тобто $x_j \le 200$ для всіх j, то досить покласти $M = 200$.

Тепер можна сформулювати наступну задачу:

мінімізувати $z = 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200,$$
$$x_1 \le 200 y_1,$$
$$x_2 \le 200 y_2,$$
$$x_3 \le 200 y_3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$
$$y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ або } 1.$$

Формулювання задачі показує, що помісячна j-та оплата за користування телефоном є частиною цільової функції z лише при умові $y_j = 1$, яка, за означенням, може виконуватись лише тоді, коли $x_j > 0$. Якщо у оптимальному розв'язку буде $x_j = 0$, то мінімуму функції z (із врахуванням додатності коефіцієнта при y_j) можна досягнути лише при рівності нулю y_j, що і вимагається.

Оптимальним розв'язком даної задачі буде $x_3 = 200, y_3 = 1$, а всі інші змінні рівні нулю. Це означає, що компанія №3 має бути обрана для дзвінків у межах Євросоюзу. Варто зазначити, що інформація, яку несе значення змінної $y_3 = 1$, є надлишковою, оскільки такий же результат випливає з $x_3 > 0 (= 200)$. Справді, основною причиною використання змінних y_1, y_2 та y_3 є лише облік місячної абонплати. По суті, тільки ці двійкові змінні перетворюють вихідну нелінійну задачу у частково-цілочислову, яка дозволяє пошук аналітичного розв'язку.

Викладена концепція «твердого гонорару» є типовою для задачі, відомої в літературі як задача зі сталими витратами.

Задача 3 (про покриття). Для забезпечення безпеки студентів відділ безпеки університету встановлює телефону екстреного виклику на території студмістечка. Відділу бажано встановити мінімальну кількість телефонів таким чином, щоб на кожній з основних вулиць цього містечка було розташовано принаймні один телефон. На рисунку 1.2 представлені основні вулиці (від A до K) студмістечка.

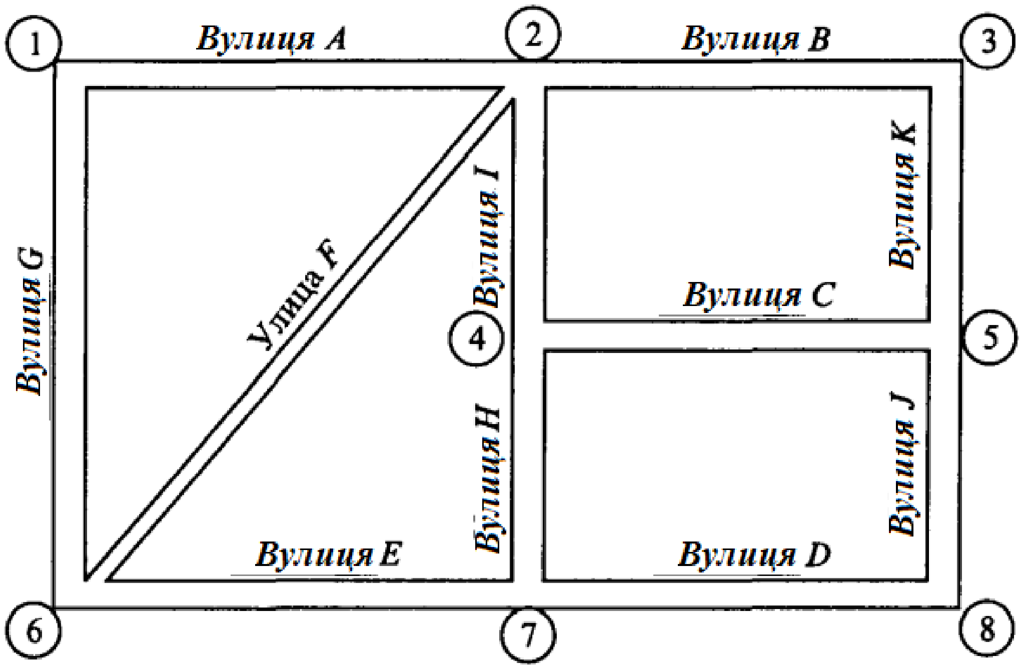


Рис. 1.2

Логічно розташувати телефони на перетині вулиць так, щоб кожен телефон міг обслуговувати принаймні дві вулиці. З рис. 1.2 видно, що таке розташування вулиць вимагає не більше 8 телефонних апаратів.

Нехай змінна $x_j = 1$ дорівнює 1, якщо телефон розташовано на перехресті j $(j = 1,2,\ldots,8)$, і 0 у протилежному випадку.

Умови задачі вимагають встановлення принаймні одного телефону на кожній з 11 вулиць. Тому задачу можна сформулювати наступним чином:

$$\text{мінімізувати } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \geq 1 \text{ (вулиця A)},$$
$$x_2 + x_3 \geq 1 \text{ (вулиця B)},$$
$$x_4 + x_5 \geq 1 \text{ (вулиця C)},$$
$$x_7 + x_8 \geq 1 \text{ (вулиця D)},$$
$$x_6 + x_7 \geq 1 \text{ (вулиця E)},$$
$$x_2 + x_6 \geq 1 \text{ (вулиця F)},$$
$$x_1 + x_6 \geq 1 \text{ (вулиця G)},$$
$$x_4 + x_7 \geq 1 \text{ (вулиця H)},$$

$$x_2 + x_4 \geq 1 \text{ (вулиця I)},$$
$$x_5 + x_8 \geq 1 \text{ (вулиця J)},$$
$$x_3 + x_5 \geq 1 \text{ (вулиця K)},$$
$$x_j = 0 \text{ або } 1,\ j = 1,2,...,8.$$

Ця модель є типовим представником загального класу задач, які називають задачами про покриття. У ній усі змінні є двійковими. Усі коефіцієнти лівої частини кожного обмеження дорівнюють 0 або 1, а права частина обмежень має вигляд «≥ 1». Цільова функція завжди має вигляд $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, де $c_j > 0$ для всіх $j = 1,2,..., n$, і має бути мінімізована. У розглянутому прикладі $c_j = 1$ для всіх j. Однак, якщо величина c_j буде рівною вартості встановлення телефона на j-му перехресті, ці коефіцієнти можуть набувати значень, відмінних від 1.

Задача 4 (обмеження типу «або-або»). Машинобудівна компанія використовує один станок для виконання трьох замовлень. Час виконання, а також термін виконання кожного замовлення задані у таблиці 1.3. Термін виконання замовлень розраховуються від початкової дати, тобто від початку виконання першого замовлення. Потрібно визначити послідовність виконання замовлень, яка мінімізує штраф за прострочення терміну виконання замовлень.

Таблиця 1.3

Замовлення	Час на виконання замовлення (дні)	Термін виконання замовлення (дні)	Штраф за прострочення (грн / день)
1	5	25	190
2	20	22	120
3	15	35	340

Нехай x_j – дата виконання замовлення, що вимірюється у днях від дати початку виконання. Задача має два типи обмежень: 1) обмеження, які гарантують, що ніякі два замовлення не виконуються одночасно; 2) обмеження по термінах виконання замовлення. Спочатку розглянемо перший тип обмежень.

Два замовлення i та j, час виконання яких p_i і p_j, не будуть виконуватись одночасно, якщо

$$\text{або } x_i \geq x_j + p_j, \text{ або } x_j \geq x_i + p_i,$$

у залежності від того, буде замовлення i передувати виконанню замовлення j, чи навпаки.

Оскільки усі математичні моделі мають справу лише із сумісними обмеженнями, перетворимо обмеження типу або-або, увівши додаткову двійкову змінну:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо замовлення } i \text{ передує замовленню } j, \\ 0, \text{ якщо замовлення } j \text{ передує замовленню } i. \end{cases}$$

При досить великому M обмеження або-або перетворюється у наступні два сумісних обмеження:

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ і } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i. \qquad (1.10)$$

Це перетворення гарантує, що лише одне з двох обмежень (1.10) може бути активним у довільний момент часу. Якщо $y_{ij} = 0$, то перше з обмежень (1.10) є активним, а друге – надлишковим (оскільки його ліва частина буде містити величину M, яка набагато більша за p_i). Якщо ж $y_{ij} = 1$, то перше із обмежень (1.10) є надлишковим, а друге – активним.

Розглянемо тепер обмеження по термінах виконання замовлень. При заданій даті d_j виконання замовлення j введемо у розгляд необмежену за знаком змінну s_j. Тоді відповідне обмеження набуде вигляду:

$$x_i + p_j + s_j = d_j. \qquad (1.11)$$

Якщо $s_j \geq 0$, то замовлення виконується із дотриманням термінів, якщо $s_j \leq 0$, то отримуємо збитки, пов’язані із штрафними санкціями, що нараховуються. Використовуючи стандартну заміну

$$s_j = s_j^+ - s_j^-, \quad s_j^+, s_j^- \geq 0,$$

обмеження (1.11) зводимо до вигляду

$$x_i + s_j^+ + s_j^- = d_j - p_j.$$

Штраф за затримку термінів виконання замовлення пропорційний s_j^-.

Математична модель розглядуваної задачі матиме вигляд:

$$\text{мінімізувати } z = 190 s_1^- + 120 s_2^- + 340 s_3^-$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
& x_1 - x_2 + My_{12} \geq 20, \\
& -x_1 + x_2 - My_{12} \geq 5 - M, \\
& x_1 - x_3 + My_{13} \geq 15, \\
& -x_1 + x_3 - My_{13} \geq 5 - M, \\
& x_2 - x_3 + My_{23} \geq 15, \\
& -x_2 + x_3 - My_{23} \geq 20 - M, \\
& x_1 + s_1^+ - s_1^- = 25 - 5, \\
& x_2 + s_2^+ - s_2^- = 22 - 20, \\
& x_3 + s_3^+ - s_3^- = 35 - 15, \\
& x_1, x_2, x_3, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, s_3^+, s_3^- \geq 0, \\
& y_{12}, y_{13}, y_{23} = 0 \text{ або } 1.
\end{aligned}$$

Цілочислові змінні та уведені для перетворення обмежень типу або-або у сумісні обмеження. Остаточна задача є частково-цілочисловою задачею лінійного програмування [1, 13, 20, 21].

Серед задач цілочислового програмування найбільш вивчені задачі лінійного цілочислового програмування. Математична модель задачі цілочислового програмування у загальній постановці формулюється так: знайти екстремум (мінімум або максимум) лінійної функції

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i \ (i = 1, 2, ..., m),$$
$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, ..., n),$$
$$x_j - \textit{ціле} \ (j = 1, 2, ..., n_1;\ n_1 \le n).$$

Застосувати загальні методи лінійного програмування безпосередньо до розв'язання задач лінійного цілочислового програмування не можна, бо здебільшого вони дають дробові розв’язки. Округлення компонент не цілочислового розв’язку до найближчих цілих чисел може не лише відвести від оптимального плану, а й вивести за межі множини планів [12].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЦЛП

2.1. Метод гілок та меж

Методи розв'язування задач цілочислового лінійного програмування ґрунтуються на використанні обчислювальних можливостей методів лінійного програмування. Зазвичай алгоритми цілочислового програмування містять три кроки.

Крок 1. «Послаблення» простору допустимих розв'язків задачі цілочислового лінійного програмування шляхом заміни будь-якої двійкової змінної y неперервним обмеженням $0 \le y \le 1$ і відкиданням вимоги цілочисловості для усіх інших змінних. У результаті отримується звичайна задача лінійного програмування.

Крок 2. Розв'язування задачі лінійного програмування та визначення її оптимального розв'язку.

Крок 3. Додавання спеціальних обмежень, які ітераційним шляхом змінюють простір допустимих розв'язків задачі лінійного програмування таким чином, щоб, у кінцевому результаті, отримати оптимальний розв'язок, що задовольняє умови цілочисловості.

Добре відомі два загальних методи генерування спеціальних обмежень, про які йде мова при реалізації кроку 3:

1) метод гілок і меж;

2) метод відтинання.

Уперше метод гілок і меж був запропонований 1960 року А. Лендом і Дж. Дойгом для розв'язування повністю цілочислових і частково-цілочислових задач лінійного програмування. Пізніше, у 1965 році, Е Белес розробив адитивний алгоритм для розв'язування задач із двійковими змінними. Цей алгоритм з обчислювальної точки зору виявився настільки простим (в основному використовуючи тільки операції додавання і віднімання), що його розглядали як можливий прорив у методах розв'язування задач ЦЛП загального виду. На жаль, цей алгоритм не виправдав надій, що на нього покладалися. Більше того, якщо спочатку алгоритм не був пов'язаний з методом гілок і меж, то згодом було встановлено, що адитивний алгоритм є частковим випадком методу гілок і меж [4, 20].

З'ясуємо суть методу гілок і меж на конкретному прикладі.

Приклад 1. Максимізувати $z = 5x_1 + 4x_2$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45, \\ x_1, x_2 &\ge 0 \text{ і цілі.} \end{aligned}$$

На рисунку 2.1 простір допустимих розв'язків задачі цілочислового лінійного програмування представлено точками. Відповідна початкова задача лінійного програмування (позначимо її ЛП0) отримується шляхом відкидання умов цілочисловості. Її оптимальним розв'язком буде $x_1 = 3{,}75, x_2 = 1{,}25$ і $z_{max} = 23{,}75$.

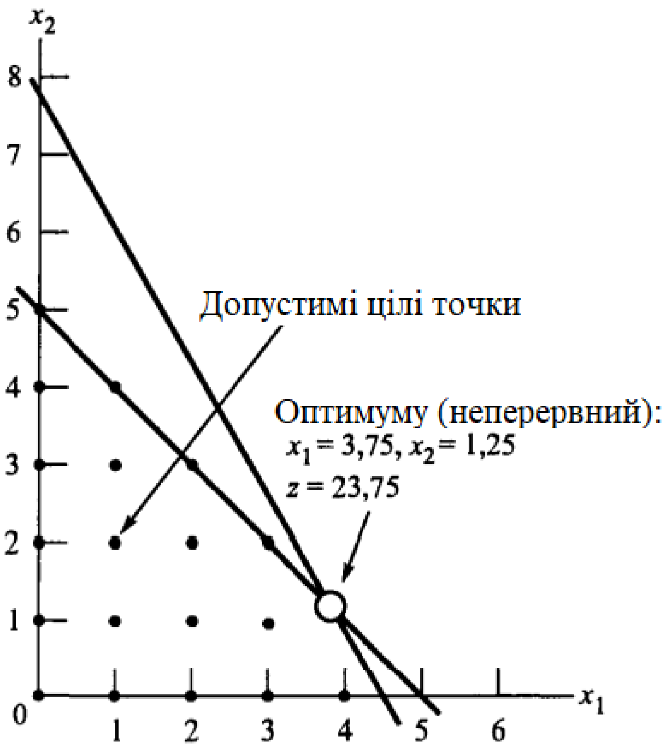


Рис. 2.1.

Оскільки оптимальний розв'язок задачі ЛП0 не задовольняє умові цілочисловості, метод гілок і меж змінює простір розв'язків задачі лінійного програмування так, що, в кінцевому підсумку, отримується оптимальний розв'язок задачі цілочислового програмування. Для цього спочатку вибирається одна із цілочислових змінних, значення якої в оптимальному розв'язку задачі ЛП0 не є цілочисловим. Наприклад, вибираючи $x_1 (=3{,}75)$, помічаємо, що область $3 < x_1 < 4$ простору допустимих розв'язків задачі ЛП0 не містить цілочислових значень змінної x_1 і, отже, може бути виключена з розгляду, як безперспективна. Це еквівалентно заміні вихідної задачі ЛП0 двома новими задачами лінійного програмування ЛП1 і ЛП2, які визначаються наступним чином:

простір допустимих розв'язків ЛП1 = простір допустимих розв'язків ЛП0 + $(x_1 \le 3)$,

простір допустимих розв'язків ЛП2 = простір допустимих розв'язків ЛП0 + $(x_1 \ge 4)$.

На рисунку 2.2 зображено простори допустимих розв'язків задач ЛП1 і ЛП2. Обидва простори містять усі допустимі розв'язки вихідної задачі ЦЛП. Це означає, що задачі ЛП1 і ЛП2 «не втратять» розв'язків вихідної задачі ЛП0.

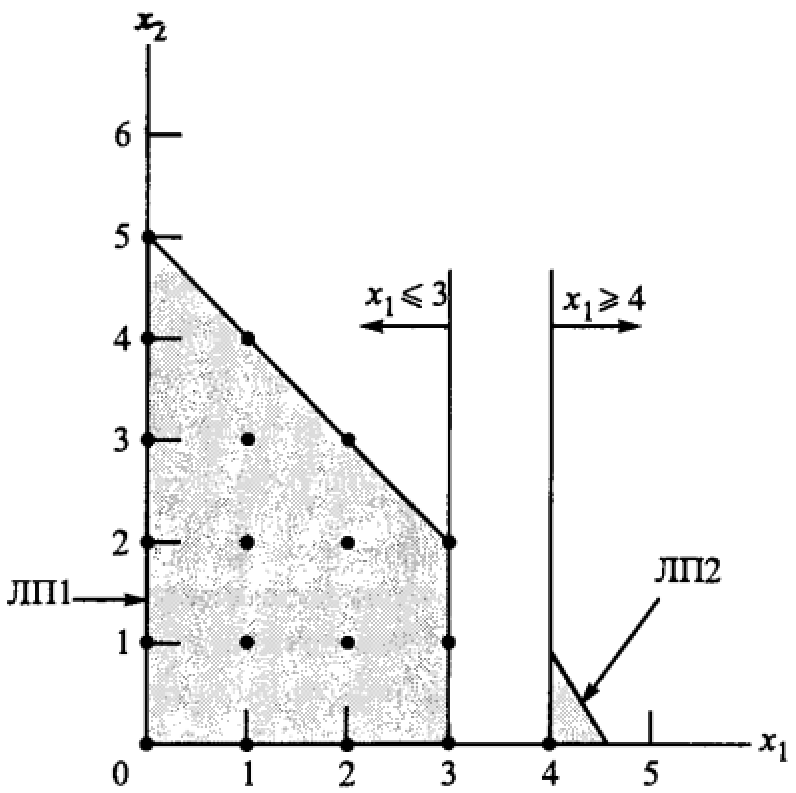


Рис. 2.2

Як продовжити розумним чином виключити із розгляду області, що не містять цілочислових розв'язків (таких як $3 < x_1 < 4$), шляхом введення належних обмежень, то, в кінцевому підсумку, отримаємо задачу лінійного програмування, оптимальний розв'язок якої задовольняє вимоги цілочисловості. Іншими словами, будемо розв'язувати задачу ЦЛП шляхом розв'язування послідовності задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_1 \le 3$ і $x_1 \ge 4$ взаємовиключають одне одного, так що задачі ЛП1 і ЛП2 необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування, що і показано на рисунку 2.3. Дихотомізація задачі ЛП – основа концепції розгалуження у методі гілок та меж. У цьому випадку x_1 називається змінною розгалуження.

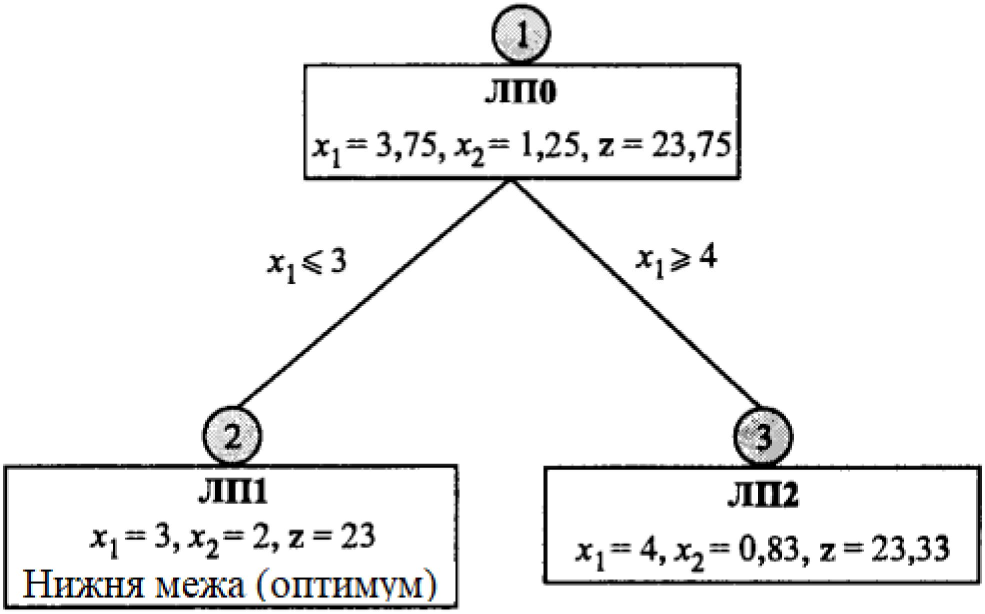


Рис. 2.3

Оптимальний розв'язок задачі ЦЛП знаходиться у просторі допустимих розв'язків або задачі ЛП1, або ЛП2. Отже, обидві підзадачі мають бути розв'язані [7].

Виберемо спочатку задачу ЛП1 (вибір довільний), що має додаткове обмеження $x_1 \le 3$:

$$\text{максимізувати } z = 5x_1 + 4x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 \le 5,\\&10x_1 + 6x_2 \le 45,\\&x_1 \le 3,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

Оптимальним розв'язком задачі ЛП1 (який можна отримати методом розв'язування задачі з обмеженими змінними) є $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ та $z = 23$.

Оптимальний розв'язок задачі ЛП1 задовольняє умову цілочисельності змінних x_1 та x_2. У цьому випадку кажуть, що задача ЛП1 прозондована. Це означає, що задача ЛП1 не повинна більше зондуватись, оскільки вона не може містити кращого розв'язку задачі ЦЛП.

Ми не можемо у цьому випадку оцінити якість цілочислового розв'язку, отриманого із розгляду задачі ЛП1, оскільки розв'язок задачі ЛП2 може привести до кращого цілочислового розв'язку (з більшим значенням цільової функції z). Поки можна лише сказати, що значення $z = 23$ є нижньою межею оптимального (максимального) значення цільової функції вихідної задачі ЦЛП. Це означає, що будь-яка нерозглянута підзадача, яка не може привести до цілочислового розв'язку з більшим значенням цільової функції, має бути виключена з розгляду, як безперспективна. Якщо ж нерозглянута підзадача може привести до кращого цілочислового розв'язку, то нижня межа має бути належним чином змінена.

При значені нижньої межі $z = 23$ досліджуємо задачу ЛП2 (єдину підзадачу, яка залишилась нерозглянутою). Так як у задачі ЛП0 оптимальне значення цільової функції дорівнює 23,75 і усі її коефіцієнти є цілими числами, то неможливо отримати цілочисловий розв'язок задачі ЛП2 (прості розв'язків якої більш вузький, ніж у задачі ЛП0), який буде кращим існуючого. У результаті відкидаємо підзадачу ЛП2 і вважаємо її прозондованою.

Реалізація методу гілок та меж завершена, оскільки обидві підзадачі ЛП1 та ЛП2 прозондовані (розгляд першої привів до цілочислового розв'язку, а другої – до висновку, що її можливий цілочисловий розв'язок не може бути кращим за існуючий). Отже, оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є розв'язок, що відповідає нижній межі, а саме: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ та $z = 23$ [9, 21].

Залишились без відповіді два запитання, пов'язані з реалізацією описаної обчислювальної процедури:

1) чи можна було у задачі ЛП0 вибрати змінну x_2 у якості змінної розгалуження замість x_1?

2) чи можна було при виборі підзадачі для зондування розв'язати спочатку ЛП2 замість ЛП1?

Відповіді на обидва запитання негативні. Проте наступні обчислення можуть значно відрізнятись. Ситуація, коли першою розв'язується задача ЛП2, ілюструється схемою обчислень (рис. 2.4), що підтверджує висловлену думку. Оптимальним розв'язком задачі ЛП2 є $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}83$ і $z = 23{,}33$.

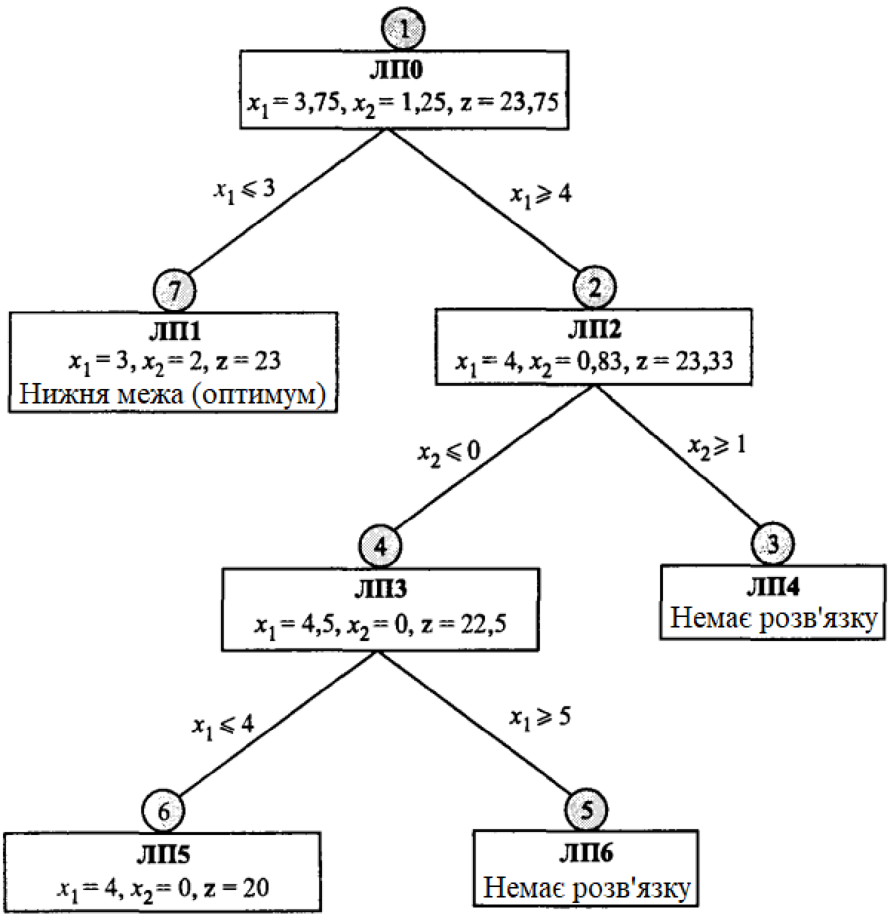


Рис. 2.4

Маємо три нерозглянуті підзадачі, які потрібно розв'язати, – ЛП1, ЛП3 і ЛП4. Припустимо, що ми довільно вибрали першою задачу ЛП4. Ця задача не має розв'язку і, отже, є прозондованою. У якості наступної виберемо підзадачу ЛП3. Її оптимальним розв'язком є $x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 0$ і $z = 22{,}5$. Нецілочислове значення змінної $x_1(= 4{,}5)$ породжує дві гілки розв'язків при $x_1 \le 4$ та $x_1 \ge 5$ і відповідні їм підзадачі ЛП5 та ЛП6. При цьому

простір розв'язків ЛП5 = простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 \ge 4) + (x_2 \le 0) +$ $(x_1 \le 4) =$ простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 = 4) + (x_2 \le 0)$,

простір розв'язків ЛП6 = простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 \ge 4) + (x_2 \le 0) +$ $(x_1 \ge 5) =$ простір розв'язків ЛП0 + $(x_1 \ge 5) + (x_2 \le 0)$.

Тепер не розглянуті підзадачі ЛП1, ЛП5 і ЛП6. Підзадача ЛП6 прозондована, оскільки не має допустимих розв'язків. Підзадача ЛП5 має цілочисловий розв'язок $(x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ z = 20)$ і, отже, породжує нижню межу $(z = 20)$ оптимального значення цільової функції задачі ЦЛП. Тепер залишається лише підзадача ЛП1, розв'язок якої також є цілочисловим $(x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ z = 23)$. Отже, нижню межу значень цільової функції покладаємо рівною 23. Так як усі підзадачі прозондовані, оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є розв'язок, що відповідає останній нижній межі, а саме $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ і $z = 23$.

Послідовність розв'язування підзадач, показана на рисунку 2.4 (ЛП0, ЛП2, ЛП4, ЛП3, ЛП6, ЛП5, ЛП1), є найгіршою; тим не менше, вона зустрічається на практиці. Цей приклад вказує на основну слабкість методу гілок і меж: як вибирати наступну підзадачу для дослідження і як вибирати для неї змінну розгалуження?

У процесі розв'язування, представленого на рисунку 2.3, ми випадково натрапили на хорошу нижню межу значень цільової функції на самій першій підзадачі ЛП1, що дозволило прозондувати ЛП2 без детальних досліджень і закінчити обчислення. По суті, обчислення завершили, розв'язавши лише одну підзадачу. У процесі розв'язування, поданому на рис. 2.4, довелось досліджувати 7 підзадач, і лише тоді завершились обчислення методу гілок та меж. Хоча можна, користуючись евристичними міркуваннями, вгадати, яка з гілок може привести до покращеного розв'язку задачі ЦЛП, не існує строгої теорії, яка завжди забезпечувала б надійні результати [17, 20].

Тепер сформулюємо алгоритм методу гілок і меж у загальному випадку. Припустимо, що розглядається задача максимізації. Задамо нижню межу оптимального значення цільової функції z задачі ЦЛП рівною $-\infty$. Покладемо $i = 0$.

Крок 1. (Зондування і визначення межі). Вибираємо i-ту підзадачу лінійного програмування ЛПi для дослідження. Розв'язуємо ЛПi і зондуємо її, при цьому можлива лише одна з трьох ситуацій.

а) Оптимальне значення цільової функції задачі ЛПi не може покращити поточну нижню межу.

б) ЛПi приводить до кращого допустимого цілочислового розв'язку, ніж поточна нижня межа.

в) ЛПi не має допустимих розв'язків.

Можливі два варіанти.

а) Якщо задача ЛПi прозондована, нижня межа міняється тільки при умові, що знайдено кращий розв'язок задачі ЦЛП. Якщо усі підзадачі прозондовані, необхідно закінчити обчислення: оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є той, який відповідає поточній нижній межі, якщо така існує. Інакше покласти $i = i + 1$ та повторити крок 1.

б) Якщо задача ЛПi не прозондована, переходимо до кроку 2 для виконання розгалуження.

Крок 2. Розгалуження. Вибираємо одну з цілочислових змінних x_i, оптимальне значення x_j^* якої у оптимальному розв'язку задачі ЛПi не є цілим числом. Виключаємо з простору допустимих розв'язків область

$\left[x_j^*\right] < x_j < \left[x_j^*\right] + 1$ (де $[v]$ – ціла частина від v) шляхом формулювання двох підзадач ЛП, які відповідають обмеженням $x_j < \left[x_j^*\right]$ та $x_j \geq \left[x_j^*\right] + 1$.

Покладаємо $i = i + 1$ і переходимо до кроку 1.

Описаний алгоритм застосовуємо для розв’язування задач максимізації. Для розв’язування задач мінімізації у ньому слід замінити нижню межу верхньою (початкове значення якої дорівнює $+\infty$).

Алгоритм методу гілок та меж безпосередньо поширюється на задачі частково-цілочислового ЛП (у яких лише деякі зі змінних повинні набувати цілочислових значень). Якщо певна змінна є неперервною, то вона ніколи не вибирається у якості змінної розгалуження. Допустима підзадача визначає нову межу для значення цільової функції, якщо значення дискретних змінних є цілочисловими і значення цільової функції покращене у порівнянні з поточною межею [4].

2.2. Метод відтинання

Даний метод, як і метод гілок та меж, починає роботу з оптимального розв’язку «звичайної» (неперервної) задачі лінійного програмування. Проте замість розгалуження і побудови меж цей метод видозмінює простір допустимих розв’язків, послідовно додаючи спеціальним чином побудовані обмеження (які називають відтинаннями). Розглянемо спочатку ідею цього методу на графічному прикладі, а потім продемонструємо, як відтинання будуються алгебраїчно.

Приклад 2. Максимізувати $z = 7x_1 + 10x_2$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 6, \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ і цілі.} \end{aligned}$$

Даний метод шляхом додавання відтинань (відтинаючих площин) перетворює простір допустимих розв’язків відповідної задачі лінійного програмування у опуклий многогранник, вершина якого, що відповідає оптимуму, є цілочисловою і дає розв'язок вихідної задачі. На рисунку 2.5 показано приклад двох таких відтинань.

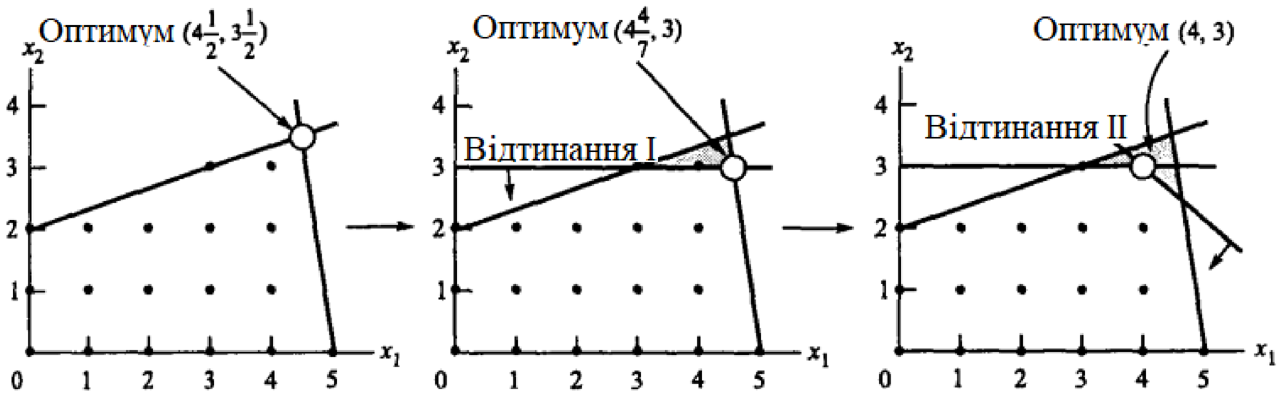


Рис. 2.5

Починаємо з оптимального розв'язку неперервної задачі лінійного програмування $(x_1, x_2) = (4{,}5,\ 3{,}5)$ і $z = 66{,}5$. Після цього додаємо відтинання I, яке разом з обмеженнями вихідної задачі лінійного програмування приводить до оптимального розв'язку $(x_1, x_2) = (4\frac{4}{7}, 3)$ із $z = 62$. Після цього додається відтинання II, яке разом з відтинанням I та вихідними обмеженнями приводить до оптимального розв'язку $(x_1, x_2) = (4, 3)$ із $z = 58$. Останній розв'язок є повністю цілочисловим, що і вимагалося.

Додані відтинання не відкидають жодної вихідної допустимої цілочислової точки, але повинні проходити принаймні через одну цілочислову точку (допустиму чи недопустиму). Цим основним вимогам має задовольняти будь-яке відтинання.

У загальному випадку може знадобитись будь-яке (скінченне) число відтинань для досягнення повністю цілочислової екстремальної точки. У дійності, кількість необхідних для цього відтинань не залежить від розмірності задачі у тому розумінні, що для розв'язування задачі з невеликою кількістю змінних і обмежень може знадобитись більше відтинань, ніж для задачі більшої розмірності [5].

Метод відтинань починає роботу з розв’язку неперервної задачі лінійного програмування. У симплекс-таблиці, що відповідає оптимальному розв’язку задачі лінійного програмування, потрібно вибрати один із рядків (який називається похідним), для якого базисна змінна є цілочисловою. Шукане відтинання будується на основі дробових складових коефіцієнтів похідного рядка. З цієї причини його називають дробовим відтинанням [4]. Продемонструємо побудову дробового відтинання даному прикладі.

При додаткових змінних x_1 і x_2 для даних обмежень оптимальна симплекс-таблиця вихідної задачі має такий вигляд, як таблиця 2.1.

Таблиця 2.1

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Розв’язок
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	66,5
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	3,5
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	4,5

Оптимальним неперервним розв’язком є $x_1 = 4{,}5$, $x_3 = 3{,}5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ і $z = 66{,}5$. Цілочислове відтинання отримується у припущенні, що усі змінні задачі є цілочисловими. Оскільки коефіцієнти вихідної цільової функції є цілочисловими, то і значення z, яке відповідає цілочисловому розв’язку, має бути цілочисловим.

Інформація, що міститься у симплекс-таблиці, яка відповідає оптимальному розв’язку, може бути записана у вигляді рівнянь:

$$z + \frac{63}{22}x_3 + \frac{31}{22}x_4 = 66{,}5; \tag{2.1}$$

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3{,}5; \tag{2.2}$$

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4{,}5. \qquad (2.3)$$

Так як у цьому прикладі і мають бути цілочисловими і усі вони на даний момент мають дробові значення у оптимальній симплекс-таблиці, то будь-яке з рівнянь (2.1)-(2.3) можна використовувати в якості похідного рядка для побудови відтинання. Виберемо (довільно) для цієї цілі рівняння (2.1).

Для побудови дробового відтинання кожен із нецілочислових коефіцієнтів розкладається на цілу і дробову частину при умові, що дробова частина є строго додатною. Наприклад,

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2},$$

$$-\frac{7}{3} = -3 + \frac{2}{3}.$$

Розклад коефіцієнтів похідного рядка приводить до наступного рівняння

$$z + \left(2 + \frac{19}{22}\right)x_3 + \left(1 + \frac{9}{22}\right)x_4 = \left(66 + \frac{1}{2}\right). \qquad (2.4)$$

Після перенесення усіх цілочислових доданків у ліву частину рівняння (2.4), а усіх дробових доданків – у праву, отримуємо:

$$z + 2x_3 + x_4 - 66 = \frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4. \qquad (2.5)$$

Оскільки усі змінні у розглядуваній задачі набувають цілочислового значення, ліва частина рівняння (2.5) має бути цілочисловою, звідки випливає, що і права частина також має набувати цілих значень. Перепишемо її наступним чином

$$\frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 = \frac{1}{2} - \left(\frac{19}{22}x_3 + \frac{9}{22}x_4\right). \qquad (2.6)$$

Так як $x_3, x_4 \geq 0$, вираз у дужках у правій частині (2.6) є невід’ємним. Тому величина $\frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4$, будучи цілочисловою, не може перевищувати $\frac{1}{2}$.

Звідси випливає, що необхідна умова цілочисловості може бути записана наступним чином:

$$\frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 \le 0. \tag{2.7}$$

(2.7) і є дробовим відтинанням, що породжене похідним рядком (2.1). Неважко переконатись, що раніше знайдений оптимальний неперервний розв'язок $x_1 = 4{,}5$, $x_3 = 3{,}5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ не задовольняє відтинання. Справді, оскільки $x_3 = x_4 = 0$, відтинання не задовольняється (воно приводить до нерівності $\frac{1}{2} \le 0$). Отже, якщо приєднати відтинання до останньої симплекс-таблиці, то оптимальний розв'язок нової симплекс-таблиці буде «рухатись» у напрямку виконання обмеження цілочисловості.

Можна таким же чином побудувати відтинання, виходячи з похідного рядка (2.2) або (2.3).

Розглянемо, спочатку, рядок (2.3). Розкладемо його:

$$x_1 + \left(-1 + \frac{21}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{3}{22}\right)x_4 = \left(4 + \frac{1}{2}\right).$$

Відповідним відтинанням буде

$$-\frac{21}{22}x_3 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2} \le 0.$$

Аналогічно з рядка (2.2) отримуємо розклад

$$x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right).$$

Отже, у даному випадку відтинання має вигляд

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} \le 0.$$

Будь-яке з трьох відтинань може бути використане на першій ітерації методу відтинань. Тому немає необхідності будувати усі три відтинання перед вибором одного з них.

Вибираючи (довільним чином) відтинання, породжене рядком (2.2), записуємо його наступним чином

$$-\frac{7}{22}x_3-\frac{1}{22}x_4+s_1=-\frac{1}{2},\ s_1\ge 0.$$

Це обмеження додається у якості додаткового у оптимальну симплекс-таблицю задачі (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Розв'язок
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	0	66,5
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	3,5
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	4,5
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	-0,5

Таблиця 2.2 дає оптимальний, але недопустимий розв'язок. Для відновлення допустимості розв'язку застосуємо двоїстий симплекс-метод, що приведе до наступної симплекс-таблиці (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Розв'язок
z	0	0	0	1	9	62
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

Через дробові значення змінних x_1 та x_3 останній розв'язок все ще нецілочисловий. Виберемо рядок (2.3) у якості похідного, тобто

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)s_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right).$$

Відповідним відтинанням буде

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + s_2 = -\frac{4}{7},\ s_2 \ge 0. \tag{2.8}$$

Приєднуючи (2.8) до симплекс-таблиці 2.3, отримуємо

Таблиця 2.4

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Розв'язок
z	0	0	0	1	9	0	62
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

Застосувавши двоїстий симплекс-метод, отримуємо наступну симплекс-таблицю 2.5.

Оптимальний розв'язок $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $z = 58$, що визначається симплекс-таблицею 2.5, є цілочисловим. Те, що усі елементи даної симплекс-таблиці є цілочисловими, не випадковість. Це типове явище при використанні дробових відтинань [22].

Слід зауважити, що застосування дробового відтинання передбачає цілочисловість усіх змінних, включаючи додаткові. Це означає, що даний метод застосовний лише до розв'язування повністю цілочислових задач.

Важливість цього продемонструємо на наступному прикладі.

Розглянемо обмеження

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le \frac{13}{2},$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.} \tag{2.9}$$

Таблиця 2.5

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Розв'язок
z	0	0	0	0	3	7	58
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

З точки зору розв'язку відповідної задачі ЦЛП обмеження (2.9) перетворюється у рівняння шляхом введення невід'ємної додаткової змінної s_1, тобто

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + s_1 = \frac{13}{2}. \tag{2.10}$$

Застосування дробового відтинання передбачає, що обмеження має допустимий цілочисловий розв'язок за усіма змінними, тобто x_1, x_2 і s_1. Розглянувши рівняння (2.10), можна помітити, що воно може мати допустимі цілочислові розв'язки змінних x_1 і x_2 лише у тому випадку, коли змінна s_1 набуває нецілочислових значень. Отже, застосування дробового відтинання приведе до недопустимого цілочисловго розв'язку, оскільки усі змінні x_1, x_2 та s_1 не можуть одночасно бути цілочисловими. Тим не менше, обмеження (2.10) має допустимі цілочислові розв'язки для розглядуваних змінних x_1 та x_2.

Є дві можливості виправити цю ситуацію.

1) Можна помножити усі обмеження на відповідну константу для того, щоб позбутись дробів. Наприклад, наведене вище обмеження (2.9) шляхом множення на 6 зводиться до $6x_1 + 2x_2 \le 39$. Будь-який цілочисловий розв’язок змінних x_1 та x_2 автоматично дає цілочислове значення додаткової змінної. Проте цей тип перетворення застосовний лише для простих обмежень, оскільки значення необхідних цілочислових коефіцієнтів у деяких випадках можуть бути надзвичайно великими.

2) Можна використовувати спеціальні відтинання, що називаються частково-цілочисловими. Вони орієнтовані на розв’язок задач, у яких лише частина змінних має приймати цілочислові значення, а інші (включаючи додаткові) залишаються неперервними [6, 15, 21].

Розглянемо метод розв’язування задач лінійного цілочислового програмування, який був запропонований в 1958 році американським математиком Р. Гоморі спочатку для повністю цілочислових задач лінійного програмування, а пізніше й для частково цілочислових задач. Цей метод належить до групи методів відтинання.

Нехай задача лінійного цілочислового програмування має такий вигляд:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\; (i = 1, 2 \ldots, m), \tag{2.12}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.13}$$

$$x_j - \textit{ціле} \;\; (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.14}$$

Алгоритм методу Гоморі для повністю цілочислових задач лінійного програмування полягає в наступному. Задачу (2.11) – (2.14) розв'язують симплексним методом. Якщо одержаний оптимальний план задачі є цілочисловим, то він є розв'язком поставленої задачі і на цьому процес розв'язування задачі закінчується. Якщо оптимальний план задачі (2.11) – (2.13) не є цілочисловим, то складають додаткове обмеження, яке відтинає від M частину області, у якій немає планів задачі (2.11) – (2.14), але є знайдений оптимальний план задачі (2.11) – (2.13). Задачу (2.11) – (2.13), доповнену додатковим обмеженням, продовжують розв'язувати двоїстим симплекс-методом. Якщо знайдений оптимальний план є цілочисловим, то він є розв'язком задачі (2.11) – (2.14). У протилежному випадку складають нове додаткове обмеження, яке відтинає від *M* ще одну частину області, у якій немає планів задачі (2.11) – (2.14), але є знайдений оптимальний план, і задачу продовжують розв'язувати двоїстим симплекс-методом. Процес складання додаткових обмежень і розв'язання одержаних при цьому задач лінійного програмування продовжують доти, поки не одержиться цілочисловий розв'язок або не виявиться, що задача є нерозв'язною [14].

2.3. Задача комівояжера

Задачі такого типу відомі під спільною назвою «задача комівояжера», у класичному формулюванні якої комівояжер намагається визначити найкоротший маршрут для одноразового відвідання *n* міст. По суті, ця задача є задачею про призначення з додатковими обмеженнями, які гарантують виключення із оптимального розв'язку неповних замкнених маршрутів. У задачі комівояжера замкнений маршрут, що проходить через кожен пункт тільки один раз, називається циклом. Цикл, що проходить через усі пункти, називається повним; у протилежному випадку – частковим, або підциклом.

У задачі комівояжера з *n* містами можна визначити такі змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщ місто } j \text{ досяжне з міста } i, \\ 0, \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Маючи значення d_{ij}, відстань від міста *i* до міста *j* (вважається, що $d_{ij} = \infty$ при $i = j$), задачу комівояжера можна формалізувати наступним чином:

$$\text{Мінімізувати } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

при обмеженнях

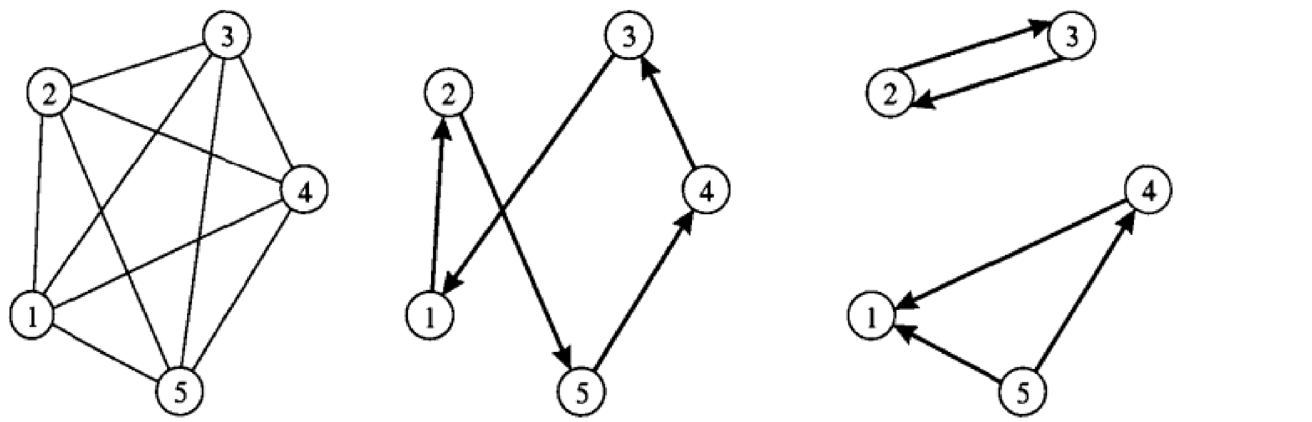
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,2,...,n,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1,$$

розв'язок має бути повнимциклом.

Обмеження задачі, крім останнього, визначають звичайну задачу про призначення. У загальному випадку немає гарантії, що оптимальний розв’язок задачі комівояжера може бути отриманий шляхом розв’язування відповідної задачі про призначення, тобто, що оптимальний розв’язок задачі про призначення утворює повний цикл. Більш імовірно, що він буде містити часткові цикли, що з’єднують разом деякі підмножини вузлів мережі. На рис. 2.6 показано задачу комівояжера, що складається з 5 міст. Ребра, які сполучають вузли (міста) мережі, відповідають дорогам із двостороннім рухом. На цьому рисунку показано розв’язок задачі комівояжера і часткові цикли, які відповідають розв’язку задачі про призначення. Якщо задача про призначення формує повний цикл, то це буде оптимальним розв’язком задачі комівояжера. Якщо оптимальний розв’язок задачі про призначення складається з кількох часткових циклів, то у цю задачу додаються спеціальні обмеження, які віддаляють розв’язки з частковими циклами. Такі обмеження будуть розглянуті нижче.



Задача 5-ти міст

Розв'язок задачі комівояжера ($x_{12} = x_{25} = x_{54} = x_{43} = x_{31} = 1$)

Розв'язок задачі про призначення ($x_{23} = x_{32} = x_{15} = x_{54} = x_{41} = 1$)

Рис. 2.6

Основні методи розв’язування задачі комівояжера побудовані на тих же основах, що і методи гілок та меж і методі відтинання, розглянуті у попередніх підрозділах. Перш, ніж представити ці методи, розглянемо приклад, що демонструє універсальність задачі комівояжера для опису різноманітних практичних ситуацій [18].

Приклад 3. Щоденний графік роботи підприємства, що виробляє фарбу, включає у себе виготовлення партій білої (Б), жовтої (Ж), коричневої (К) і чорної (Ч) фарб. Так як підприємство використовує одне і те ж обладнання для виготовлення усіх чотирьох типів фарби, то потрібне його належне чищення між виготовленням різних партій фарби. Таблиця 2.6 містить час чищення обладнання у хвилинах, якщо за виготовленням фарби, вказаної у рядку, слідує виготовлення фарби, вказаної у стовпці. Оскільки за певним кольором фарби не може слідувати той самий колір, то відповідний час чищення вважається рівним нескінченності. Визначте оптимальну послідовність щоденного виробництва чотирьох типів фарби, яка мінімізує сумарний час чищення обладнання.

Таблиця 2.6

Поточний колір	Час чищення у хвилинах, якщо наступний колір			
	білий	жовтий	чорний	коричневий
Білий	∞	10	17	15
Жовтий	20	∞	19	18
Чорний	50	44	∞	25
Коричневий	45	40	20	∞

Умови даної задачі можна представити графічно, поставивши у відповідність кожному кольору фарби вузол мережі, і приписавши кожній дузі, що з’єднує два вузли, числове значення, рівне часу чищення. Задача, таким чином, зводиться до визначення найкоротшого контуру, який починається у одному вузлі, проходить через усі інші вузли по одному разу перед тим, як повернутись у початковий вузол.

Цю задачу можна розв’язати шляхом повного перебору шести $\left((4-1)!=3!=6\right)$ можливих контурів мережі. Таблиця 2.7 демонструє, що послідовність $Б \to Ж \to К \to Ч \to Б$ визначає оптимальний контур.

Таблиця 2.7

Виробничий цикл (контур)	Сумарний час чищення
$Б \to Ж \to Ч \to К \to Б$	10+19+25+45=99
$Б \to Ж \to К \to Ч \to Б$	10+18+20+50=98
$Б \to Ч \to Ж \to К \to Б$	17+44+18+45=124
$Б \to Ч \to К \to Ж \to Б$	17+25+40+20=102
$Б \to К \to Ч \to Ж \to Б$	15+20+44+20=99
$Б \to К \to Ж \to Ч \to Б$	15+40+19+50=124

Метод повного перебору контурів практично застосовний лише для задач малої розмірності. Наприклад, мережа з 11 вузлами має 10!=3628800 контурів. Отже, потрібен більш ефективний підхід до розв’язування таких задач.

Визначимо змінні x_{ij} рівними 1, якщо вузол *j* досягається з вузла *i*, та 0 у протилежному випадку. Необхідною умовою для контуру (циклу) є те, що вузол *i* зв’язується лише з одним вузлом і вузол *j* досягається лише з одного вузла. Вважаючи *M* досить великим додатним числом, можна записати задачу із прикладу 3 наступним чином:

мінімізувати $z = Mx_{ББ} + 10x_{БЖ} + 17x_{БЧ} + 15x_{БК} + 20x_{БЖ} + Mx_{ЖЖ} + 19x_{ЖЧ} +$
$+18x_{ЖК} + 50x_{ЧБ} + 44x_{ЧЖ} + Mx_{ЧЧ} + 25x_{ЧК} + 45x_{КБ} + 40x_{КЖ} + 20x_{КЧ} + Mx_{КК}$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&x_{ББ} + x_{БЖ} + x_{БЧ} + x_{БК} = 1,\\
&x_{ЖБ} + x_{ЖЖ} + x_{ЖЧ} + x_{ЖК} = 1,\\
&x_{ЧБ} + x_{ЧЖ} + x_{ЧЧ} + x_{ЧК} = 1,\\
&x_{КБ} + x_{КЖ} + x_{КЧ} + x_{КК} = 1,\\
&x_{ББ} + x_{ЖБ} + x_{ЧБ} + x_{КБ} = 1,\\
&x_{БЖ} + x_{ЖЖ} + x_{ЧЖ} + x_{КЖ} = 1,
\end{aligned}
$$

$$x_{БЧ} + x_{ЖЧ} + x_{ЧЧ} + x_{КЧ} = 1,$$
$$x_{БК} + x_{ЖК} + x_{ЧК} + x_{КК} = 1,$$
$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1 \text{ для вссіх } i \text{ та } j,$$
$$\text{розв'язок має бути контуром.}$$

Використання константи M у цільовій функції гарантує, що виробництво фарби одного кольору не буде повторюватись підряд [17-19].

Спочатку застосуємо метод гілок та меж до задачі про призначення, яка відповідає даній задачі комівояжера. Якщо отриманий оптимальний розв'язок утворює повний цикл, то на цьому обчислення зупиняються. У протилежному випадку у задачу необхідно ввести обмеження, що видаляють часткові цикли. Це створює ряд підзадач, яких у загальному випадку стільки ж, скільки змінних утворюють один частковий цикл. У кожній підзадачі одна з таких змінних встановлюється рівною нулю. Розв'язки цих підзадач можуть або сформувати, або ні повний цикл. Якщо такий цикл сформовано у якій-небудь підзадачі, то оптимальне значення цільової функції цієї підзадачі дає верхню межу довжини повного циклу. Якщо ж підзадача не формує повний цикл, то вона знову розбивається на ряд нових підзадач у відповідності до змінних, які утворюють часткові цикли у розв'язку даної підзадачі. Цей процес продовжується до тих пір, поки не будуть розглянуті усі існуючі підзадачі, або поки не буде отримано краще (менше) значення верхньої межі довжини повного циклу, або поки не буде доведено, що підзадачі не можуть мати кращого розв'язку. Оптимальним розв'язком задачі комівояжера буде повний цикл, на якому досягається найкраще значення верхньої межі.

Приклад 4 демонструє деталі застосування методу гілок і меж для розв'язування задачі комівояжера.

Приклад 4. Відстані (у км) між 5 містами задачі комівояжера задаються матрицею:

$$\left\|d_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

Розв'язок початкової задачі про призначення наступний: $z = 15$, $x_{13} = = x_{31} = x_{25} = x_{54} = x_{42} = 1$, усі інші змінні рівні 0.

Цей розв'язок породжує два часткові цикли (1-3-1) і (1-5-4-2). Цей же розв'язок позначено як вузол 1 дерева підзадач на рис. 2.7. Отримане значення цільової функції $z = 15$ приймаємо у якості нижньої межі довжини оптимального циклу, що проходить через усі 5 міст.

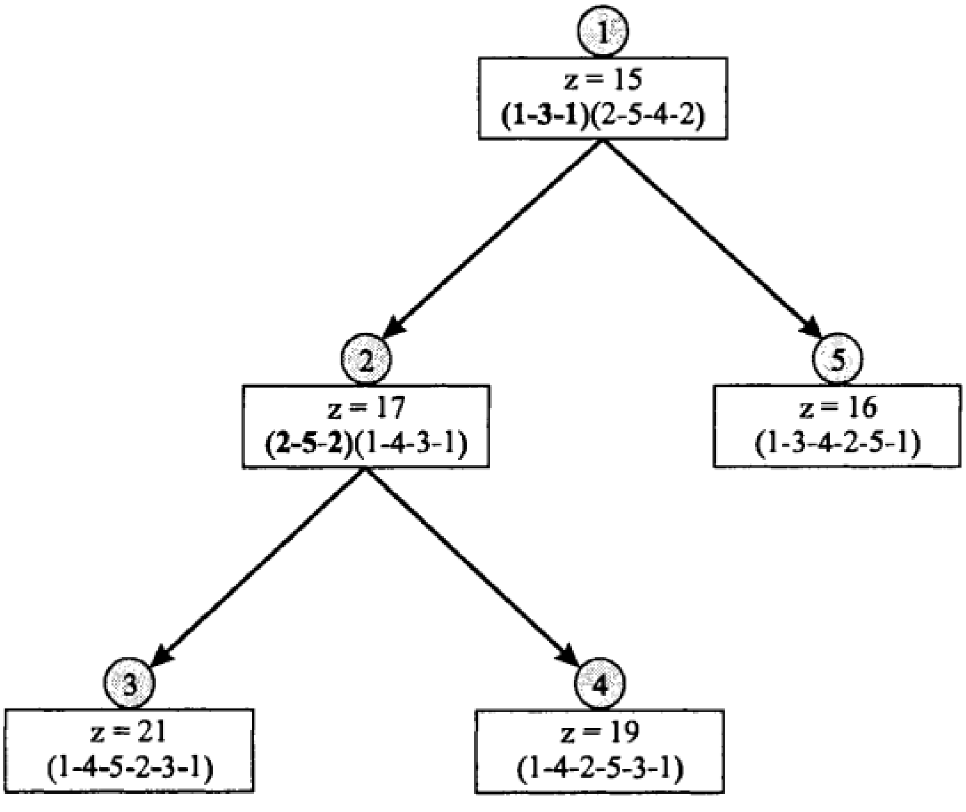


Рис. 2.7

Прямолінійний спосіб знаходження верхньої межі оптимального циклу полягає у тому, щоб вибрати який-небудь повний цикл і порахувати його довжину. Наприклад, повний цикл 1-2-3-4-5-1 дає загальну довжину 10+5+7+4+3=29.

Знайдені нижня та верхня межі демонструють, що довжина оптимального повного циклу лежить в межах від 15 до 29. Підзадачі, що дають розв’язок з довжиною циклу більшою за 29, відкидаються як такі, що «не виправдали надій».

Щоб виключити часткові цикли у задачі вузла 1, потрібно розбити ці часткові цикли шляхом самовільного прирівнювання змінних x_{ij}, що задають ці цикли, до нуля. Частковий цикл 1-3-1 можна розбити, якщо покласти $x_{13} = 0$ або $x_{31} = 0$ (одночасно тільки одну змінну). Аналогічно частковий цикл 2-5-4-2 можна розбити, якщо увести обмеження $x_{25} = 0$, $x_{54} = 0$ або $x_{42} = 0$. Кожне із подібних обмежень породжує окрему гілку дерева підзадач (і, звичайно, окрему підзадачу). Важливо відмітити, що немає необхідності розбивати усі наявні часткові цикли – достатньо виключити тільки один частковий цикл. Причина цього у тому, що уведення в задачу нового обмеження автоматично впливає на значення усіх змінних цієї задачі, що створює сприятливі умови для формування повного циклу. На основі цього аргументу зазвичай розбивають один частковий цикл, найменший за кількістю складових його дуг, оскільки це приводить до меншої кількості нових гілок у дереві підзадач.

Вибираючи для видалення короткий цикл 1-3-1, отримаємо на дереві підзадач дві гілки, що визначаються умовами $x_{13} = 0$ та $x_{31} = 0$, які виходять із вузла 1. Нові задачі про призначення будуються шляхом видалення із останньої задачі змінної розгалуження (тобто x_{13} або x_{31}), що зменшує розмір підзадач. Інший шлях побудовий підзадач (який дає той же самий результат при розв’язуванні цих підзадач і який зберігає їх розмір) полягає у тому, щоб призначити змінним розгалуження значення відстаней, рівні нескінченності. Наприклад, у підзадачі з обмеженням $x_{13} = 0$ відстані d_{13} присвоюється значення ∞.

З двох наявних підзадач розв’яжемо спочатку задачу з умовою $x_{13} = 0$ (вузол 2 на рисунку 2.7) – порядок розв’язування задач довільний. Отримаємо розв’язок $z = 17$, який формує два часткові цикли (2-5-2) і (1-4-3-1). Цю підзадачу розбиваємо на дві шляхом уведення додаткових обмежень $x_{25} = 0$ і $x_{52} = 0$ так само, як це зроблено у задачі вузла 1.

Тепер маємо три нерозв’язані підзадачі, які відповідають вузлам 3, 4 і 5 на рис. 2.7. Довільно вибираємо для розв’язування підзадачу вузла 3. У вихідних даних для цієї підзадачі покладаємо $d_{13} = \infty$ і $d_{25} = \infty$. Її розв’язок дає $z = 21$ з повним циклом 1-4-5-2-3-1. Оскільки отримано розв’язок із повним циклом, то розгалуження гілок у вузлі 3 не буде.

Розв’язок підзадачі вузла 3 дає можливість покращити значення верхньої межі, $z = 21$, оптимальної довжини повного циклу. Це означає, що будь-яка нерозглянута підзадача, для якої можна показати, що вона дасть розв’язок, який перевищує чи дорівнює 21, може бути відкинута і не розглядатись.

Із нерозглянутих підзадач 4 і 5 вибираємо для розв’язування підзадачу 4. Для її розв’язування у даних вихідної задачі про призначення покладемо і . Отримаємо розв’язок цієї підзадачі з і повним циклом 1-4-2-5-3-1. Цей розв’язок дає нову верхню межу $z = 17$.

Залишилась нерозглянутою лише підзадача вузла 5. Для її розв’язування у даних вихідної задачі про призначення покладемо $d_{31} = \infty$. Отримаємо розв’язок із $z = 16$ та повним циклом 1-3-4-2-5-1, а також нову верхню межу $z = 16$.

Нерозглянутих підзадач не залишилось. Оптимальним циклом буде цикл 1-3-4-2-5-1 з довжиною у 16 кілометрів.

Слід зауважити, що надмірно довга послідовність розв’язування підзадач $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$, яка привела до оптимального розв’язку у цьому прикладі, знову показує основний недолік методу гілок і меж – неможливо передбачити послідовність вибору підзадач, яка веде до оптимального розв’язку найшвидше. Наприклад, якби першою була б розв’язана підзадача вузла 5, то це дало б значення верхньої межі, рівне 16. Це автоматично відкидає можливі підзадачі, що породжені вузлом 2.

Звичайно, існують евристичні підходи, що дозволяють допомогти у передбаченні послідовності підзадач, яка веде до опитмального розв'язку найшвидше. Наприклад, після того, як визначено усі гілки (підзадачі), що виходять із певного вузла дерева підзадач, першою розв'язується та підзадача, у якої змінній x_{ij}, що виключається, відповідає найбільше значення відстані d_{ij} серед розглядуваних підзадач. Якщо скористатись цим правилом у даному прикладі, то, після визначення підзадач вузла 1, першою потрібно розв'язувати підзадачу 5, що приведе до оптимального розв'язку всього за 2 етапи (перший етап – розв'язування підзадачі 5, другий – розв'язування підзадачі 2, який дає гірше значення цільової функції $z = 17$, ніж існуюча на той момент верхня межа, рівна 16) [8, 21].

Ідея застосування методу відтинань для розв'язування задачі комівояжера полягає в тому, щоб у вихідну задачу про призначення ввести додаткові обмеження, які гарантовано видаляють часткові цикли. Ці додаткові обмеження будуються наступним чином. Нехай у задачі комівояжера з n містами кожному місту з номерами 2, 3, …, n ставиться у відповідність неперервна невід'ємна змінна u_i. Тоді додаткові обмеження мають вигляд

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n - 1,\ i = 2,3,\dots,n,\ \ j = 2,3,\dots,n,\ i \ne j.$$

Ці обмеження, додані у вихідну задачу про призначення, автоматично видаляють із розв'язку часткові цикли, залишаючи усі повні цикли.

Приклад 5. Відстані (у км) між 4 містами задачі комівояжера задаються матрицею:

$$\left\| d_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} \infty & 13 & 21 & 26 \\ 10 & \infty & 29 & 20 \\ 30 & 20 & \infty & 5 \\ 12 & 30 & 7 & \infty \end{pmatrix}.$$

Дана задача комівояжера формалізується як відповідна задача про призначення плюс наступні додаткові обмеження (табл. 2.8), які виключають із розв’язування часткові цикли. Усі змінні x_{ij} двійкові, усі змінні u_i невід’ємні. Задача розв’язується як частково-цілочислова задача лінійного програмування.

Таблиця 2.8

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	u_1	u_2	u_3	
						4										1	-1		≤ 3
							4									1		-1	≤ 3
									4							-1	1		≤ 3
											4						1	-1	≤ 3
													4			-1		1	≤ 3
														4			-1	1	≤ 3

Оптимальний розв’язок цієї задачі наступний:

$$u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 2, x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1, \text{ довжина повного циклу} = 59.$$

Цей розв’язок формує повний цикл 1-2-3-4-1. Розв’язок задовольняє усім додатковим обмеженням.

Щоб показати, що часткові цикли не задовольняють додаткові умови, розглянемо розв’язок із частковими циклами (1-2-1) і (3-4-3): $x_{12} = x_{21} = 1$, $x_{34} = x_{43} = 1$. Тепер розглянемо обмеження 4 і 6 із таблиці 2.8:

$$\begin{aligned} &4x_{34} + u_3 - u_4 \le 3, \\ &4x_{43} - u_3 + u_4 \le 3. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Підставивши у кожну з нерівностей (2.15) значення $x_{34} = x_{43} = 1$ і додавши їх, отримаємо неправильну нерівність $8 \le 6$, що говорить про неможливість часткового циклу 3-4-3.

Головним недоліком застосування методу відтинання до розв’язування задачі комівояжера є те, що уведення додаткових обмежень різко збільшує розмір задачі, при цьому кількість таких обмежень зростає експоненціально при зростанні кількості міст [20].

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНИЙ МАТЕРІАЛ

3.1. Задачі до розділу 1.

Запишіть наведені нижче задачі у вигляді задач цілочислового програмування.

Задача 1. Гральна дошка складається із 9 рівних квадратів, розташованих 3x3. Потрібно заповнити кожен квадрат числом від 1 до 9 таким чином, щоб сума чисел кожного рядка, кожного стовпця і кожної діагоналі дорівнювала 15. Визначте числа у кожному квадраті для наступних випадків:

а) числа у кожному рядку і кожному стовпці не повторюються;

б) числа у всіх квадратах не повторюються.

Задача 2. Верстат використовується для виготовлення двох взаємозамінних видів продукції. Продуктивність верстату дозволяє за добу виготовити не більше 20 одиниць продукції першого виду та 10 одиниць другого виду. Існує альтернативне налаштування верстату, яке дозволяє щоденно виготовляти не більше 12 одиниць продукції виду 1 та 22 одиниць виду 2. Аналіз ринку показує, що максимальний сумарний попит на два види продукції складає 35 одиниць щоденно. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого і другого виду становить 100 грн і 120 грн відповідно. Яке з двох можливих налаштувань верстату має бути обране?

Задача 3. Компанія виготовляє 3 види продукції. Щоденні витрати часу і сировини, необхідні для виготовлення одиниці продукції кожного виду, наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Продукція	Необхідний час (год / од.)	Необхідна сировина (кг / од.)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду становить 25, 30 і 22 грн відповідно. Компанія має можливість організувати випуск цієї продукції у двох своїх цехах. Цехи відрізняються ресурсом робочого часу і сировини так, як демонструє таблиця 3.2. Яка організація виробництва по цехах є оптимальною?

Таблиця 3.2

Цех	Ресурс робочого часу (годин на робочий день)	Ресурс сировини (кг на день)
1	100	100
2	90	120

Задача 4. Розгляньте задачу планування виробничої лінії, пов'язаної з виготовленням двох різних виробів на одному станку. Послідовність виконання необхідних для цього восьми операцій зображена на рисунку 3.1. Нехай p_j – час виконання *j*-ї операції (*j*=1, 2, …, *n*). Терміни здачі виробів типу 1 та 2, які визначаються на основі деякого вихідного моменту, дорівнюють d_1 і d_2 відповідно. Будь-яка операція, що виконується на станку, має бути завершена до початку іншої операції.

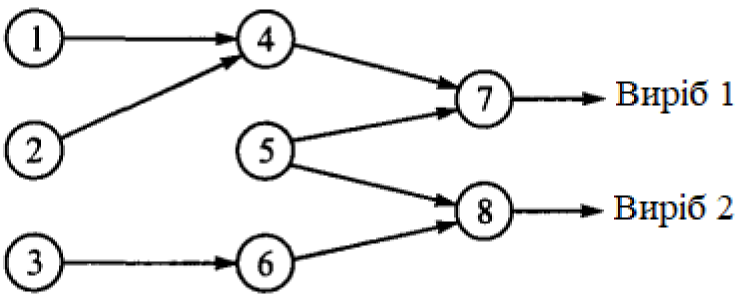


Рис. 3.1

Задача 5. Компанія володіє фабрикою, яка виготовляє продукцію 3 видів. Необхідні трудові витрати та витрати сировини для виготовлення однієї одиниці кожного виду продукції наведені у таблиці 3.3. Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду становить 25, 30 та 45 грн відповідно. Якщо буде виготовлятись виріб типу 3, то його щоденний обсяг виробництва має бути не менше 5 одиниць. Знайдіть оптимальний план виробництва.

Таблиця 3.3

Тип виробу	Необхідний час (год / од.)	Необхідна сировина (кг / од.)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Наявний обсяг	100	100

Задача 6. Опишіть неопуклі заштриховані області допустимих розв'язків, які зображені на рисунку 3.2, у вигляді набору одночасно виконуваних обмежень [2, 4, 11, 20, 21].

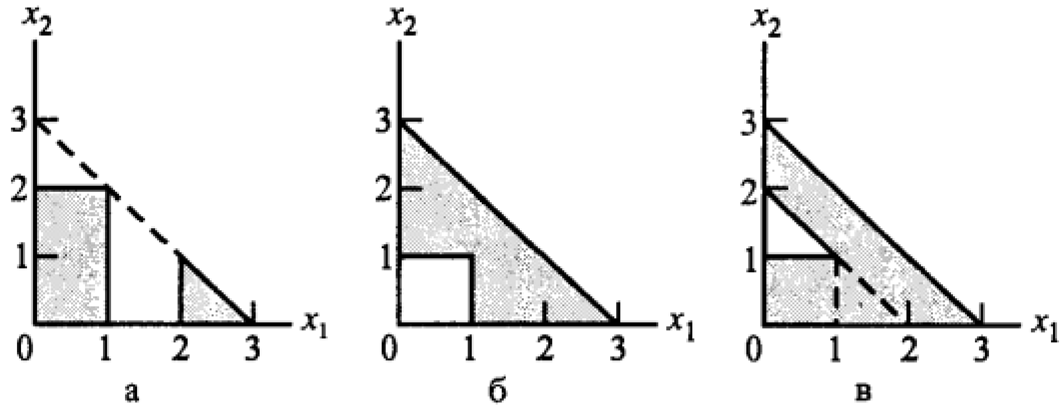


Рис. 3.2

3.2. Приклади задач ЦЛП для розв'язування методом гілок і меж

Задача 1. Розв'яжіть задачу із прикладу 1 розділу 2 методом гілок і меж, починаючи зі змінної x_2 як змінної розгалуження.

Задача 2. Побудуйте дерево підзадач, що отримується при використанні методу гілок і меж для кожної із задач а)-д). Для зручності у нульовому вузлі в якості змінної розгалуження завжди вибирайте x_1.

а) Максимізувати

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &2x_1 + 5x_2 \le 9, \\ &4x_1 + 2x_2 \le 9, \\ &x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.} \end{aligned}$$

б) Максимізувати

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + 7x_2 \le 35,\\
&4x_1 + 9x_2 \le 36,\\
&x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}
$$

в) Максимізувати

$$z = x_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 5x_2 \le 16,\\
&6x_1 + 5x_2 \le 27,\\
&x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}
$$

г) Мінімізувати

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \ge 5,\\
&2x_1 + 3x_2 \ge 7,\\
&x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}
$$

д) Максимізувати

$$z = 5x_1 + 7x_2$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 \le 13,\\
&6x_1 + 9x_2 \le 41,\\
&x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}
$$

Задача 3. Розв’яжіть задачі з попереднього прикладу, вважаючи, що на змінну x_1 не накладається умова цілочисловості.

Задача 4. Покажіть графічно, що наступна задача ЦЛП не має допустимих розв’язків, а після цього перевірте результат за допомогою гілок і меж.

Максимізувати

$$z = 2x_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&10x_1 + 10x_2 \le 9,\\
&10x_1 + 5x_2 \ge 1,\\
&x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}
$$

Задача 5. Розв’яжіть задачу методом гілок і меж:

$$\text{максимізувати } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \le 37,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ або } 1.
\end{aligned}
$$

Задача 6. Розв’яжіть задачу з прикладу 4 із розділу 2, почавши з видалення часткового циклу 2-5-4-2. При проходженні дерева підзадач застосуйте наступні правила:

а) на кожному рівні дерева підзадач дослідіть підзадачі зліва направо; переходьте на наступний рівень тільки після того, як будуть розглянуті усі підзадачі поточного рівня;

б) дослідіть підзадачі «вертикально», починаючи від нульового вузла і послідовно проходячи вздовж гілок, поки не будуть розглянуті усі підзадачі однієї послідовності гілок.

Задача 7. Продавець книг, що проживає у місті А, один раз на місяць повинен відвідати своїх чотирьох клієнтів, які проживають у містах Б, В, Г і Д відповідно. Таблиця 3.4 містить відстані у кілометрах між різними містами. Складіть маршрут руху продавця книг, який мінімізує сумарну відстань [2, 6, 8, 20].

Таблиця 3.4

	А	Б	В	Г	Д
А	0	120	220	150	210
Б	120	0	80	110	130
В	220	110	0	160	185
Г	150	110	160	0	190
Д	210	130	185	190	0

3.3. Приклади задач ЦЛП для розв'язування методом відтинання

Задача 1. У прикладі 2 із розділу 2 покажіть графічно, чи може кожне з наступних обмежень слугувати правильним відтинанням:

а) $x_1 + 2x_2 \le 10$;

б) $2x_1 + x_2 \le 10$;

в) $3x_2 \le 10$;

г) $3x_1 + x_2 \le 15$.

Задача 2. У прикладі 2 із розділу покажіть графічно, як наступні два правильні відтинання можуть привести до оптимального цілочислового розв'язку:

а) $x_1 + 2x_2 \le 10$;

б) $3x_1 + x_2 \le 15$.

Задача 3. Запишіть відтинання а) та б) із попередньої задачі для прикладу 2 із розділу 2 через рівняння для змінних x_1 та x_2, і покажіть, що вони співпадають із відтинаннями, які показані на рисунку 2.5.

Задача 4. Покажіть, що дробове відтинання не приводить до допустимого розв'язку у наведеній нижче задачі, якщо не усунені усі дроби в обмеженні:

максимізувати $z = x_1 + 2x_2$

при обмеженнях

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le \frac{13}{4},$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ і цілі.}$$

Задача 5. Розв'яжіть наступні задачі методом відтинання і порівняйте оптимальний цілочисловий розв'язок із розв'язком, отриманим шляхом округлення відповідного неперервного розв'язку.

а) Максимізувати

$$z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 4x_2 \le 5,\\
&-x_1 + 6x_2 \le 5,\\
&-x_1 + x_2 + x_3 \le 5,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}$$

б) Максимізувати

$$z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4,\\
&4x_2 - 3x_3 \le 2,\\
&x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ і цілі.}
\end{aligned}$$

Задача 6. Розв'яжіть задачу 7 із підрозділу 3.2 методом відтинання [2, 3, 20, 21].

ВИСНОВКИ

Задачі математичного програмування виникають у різноманітних сферах людської діяльності і перш за все в економічних дослідженнях, у практиці планування і організації виробництва.

У ході виконанні роботи було розглянуто основи теорії математичного програмування, формулювання та методи розв'язування задач цілочислового лінійного математичного програмування.

До основних методів розв'язування задач ЦЛП відносяться метод гілок та меж і метод відтинань.

Хоча ні метод гілок та меж, ні метод відтинань не дають надійних результатів при розв'язуванні задач цілочислового лінійного програмування, досвід обчислень свідчить, що метод гілок і меж більш успішно розв'язує задачу, ніж метод відтинань. Саме його використовують майже усі комерційні програми, призначені для розв'язування задач ЦЛП. Метод відтинань більш складний і менш надійний, оскільки його реалізація породжує серйозні проблеми, пов'язані з помилками машинного округлення. Було багато спроб зробити цей метод ефективним для комп'ютерних обчислень, але вони не досягли успіху. У більшості випадків метод відтинань застосовується як додатковий метод при розв'язуванні підзадач, що генеруються у процесі застосування методу гілок і меж.

Найбільш важливим фактором, що впливає на процес обчислень у цілочисловому програмуванні, є кількість цілочислових змінних. Існуючі алгоритми не розв'язують задачу ЦЛП послідовно, тобто не дозволяють отримати проміжні цілочислові значення, які не є оптимальними. Тому, з обчислювальної точки зору, у задачі ЦЛП необхідно обмежитись (за можливості) меншим числом змінних, що набувають цілочислових значень.

Таким чином, найважливішим сучасним напрямком розвитку теорії ЦЛП є пошук шляхів підвищення ефективності алгоритмів розв'язування задач ЦЛП відомими методами.

Третій розділ роботи містить практико-методологічний матеріал для самостійного поглиблення розуміння способів застосування методів, що розглядаються.

Магістерська робота може бути корисна здобувачам вищої освіти та викладачам при вивченні математичного програмування у ЗВО.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бакулин М.Г., Варукина Л.А., Крейнделин В.Б. Технология MIMO : принципы и алгоритмы. Москва : Телеком, 2014. 244 с.

2. Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. Москва : Изд-во МГУ, 1997.

3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. Київ : КНЕУ, 2001. 248 с

4. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций : Учеб. для вузов. Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 436 с.

5. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1989. 204 с.

6. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.

7. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій : Підручник. 6 вид., перероб. і доп. Київ : Видавничий дім «Слово», 2003. 688 с.

8. Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Збірник задач. Київ : Видавничий Дім "Слово", 2007. 472 с.

9. Калихман И.С. Сборник задач по математическому программированию. Москва : Высшая школа, 1997.

10. Костевич Л.С. Математическое программирование : Информ. Технологии оптимальных решений : Учеб. пособие. Минск : Новое знание, 2003. 424 с.

11. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике : Учеб. пособие для вузов. Москва : ЮНИТИ, 2004. 407 с.

12. Моклячук М.П., Ямненко Р.Є. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2012. 282 с.

13. Нужна О.А. Оптимізаційні методи та моделі : навч. посіб. Луцьк, 2016. 232 с.

14. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Київ :

Абрис, 1999. 217 с.

15. Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування : Навч. Посібник. Київ : ІЗМН, 1996.

16. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва : Мир, 1994.

17. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. Львів : Світ, 1995.

18. Nemhauser G., Wolsey L. Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, New York, 1998.

19. Salkin H., Mathur K. Foundations of Integer Programming, North-Holland, New-York, 1999.

20. Taha H. Operations research : An introduction. New Jersey : Pearson Education, 2003. 903 p.

21. Taha H. Integer Programming : Theory, Applications and Computations, Academic Press, Orlando, FL, 1995.

22. Wolsey L. Integer Programming, Wiley, New York, 2004.