Міністерство освіти і науки України

Рівненський державний гуманітарний університет

Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня

на тему:

Методика розв’язування задач з використанням інтеграла в класах профільного рівня

Виконала:

студентка II курсу групи М-М-21

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Катерина Олександрівна Михалко

Керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Ольга Миколаївна Павелків

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад. Степана Дем’янчука

Юрій Георгійович Лотюк

Рівне – 2024 р.

Зміст

ВСТУП

Тема «Методика розв’язування задач з використанням інтеграла в класах профільного рівня» є актуальною для дослідження з різних причин. Вивчення інтегралів розвиває не лише аналітичне мислення, але й навички застосування математичних знань для розв’язування прикладних задач. Це особливо актуально для учнів, які обирають спеціальності, пов’язані з інженеріє, фізикою, економікою та іншими технічними науками. Вивчення даної теми готує учнів до подальшого вивчення математики на університетському рівні.

Методика вивчення інтегралів у сучасній школі повинна бути спрямована на інтеграцію традиційних підходів з новітніми педагогічними технологіями. Згідно з методичними рекомендаціями Міністерства освіти і науки України, вивчення математики на профільному рівні має забезпечувати розвиток ключових компетентностей, включаючи здатність до самостійного аналізу та розв’язування математичних задач із використанням інтегралів. Особлива увага приділяється прикладному характеру задач, що сприяє розвитку навичок учнів щодо застосування теоретичних знань на практиці, зокрема через розв’язання задач на площу фігур, об’єми тіл обертання, тощо.

Одним із важливих аспектів вивчення інтегралів є застосування сучасного програмного забезпечення, зокрема GRAN1, GeoGebra та інші інтерактивні засоби навчання, які рекомендовані Міністерством для використання на уроках математики. Використання цих програмних засобів дозволяє візуалізувати математичні концепції, що значно полегшує розуміння складного матеріалу для учнів.[30]

Актуальність досліджуваної теми також підтверджується необхідністю розробки ефективних методичних підходів до викладання, які б відповідали сучасним освітнім вимогам та стимулювали активне залучення учнів у процес навчання.

Розглянувши прикладну спрямованість інтеграла, прийшли до висновку, що прикладні задачі є одним із засобів формування математичної компетентності.

Мета дослідження: розкрити методику вивчення інтеграла та його застосування до розв'язування задач в класах профільного рівня.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу у класах профільного рівня в закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження: розв'язування прикладних задач з використанням інтеграла.

Основними завданнями дослідження є:

1. Проаналізувати науково-методичну літературу по темі дослідження.
2. Розкрити методику вивчення інтеграла та його застосування до розв'язування задач в класах профільного рівня.
3. Підібрати прикладні задачі з використанням інтеграла.
4. Опрацювати завдання з НМТ по темі дослідження.
5. Розглянути застосування програмного забезпечення GeoGebra до розв'язування задач на інтеграл. Практична перевірка ефективності.

Гіпотеза. Застосування сучасного програмного забезпечення на уроках математики до розв'язування прикладних задач з використанням інтеграла сприятиме підвищенню ефективності та результативності навчання.

Методи дослідження:

- Теоретичні: аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури з теми дослідження, змісту навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, шкільних підручників і посібників профільного рівня;
- Емпіричні: спостереження за процесом вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в класах профільного рівня, перевірка результатів.

Практичне значення дослідження. Матеріали дослідження сприятимуть кращому засвоєнню знань про інтеграл та його застосування, задачі можуть бути використані вчителями математики в освітньому процесі.

Апробація дослідження. Тези по темі дослідження були опубліковані в збірнику матеріалів XVII Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «НАУКА, ОСВІТА, СУСПІЛЬСТВО ОЧИМА МОЛОДИХ» 17 травня 2024 року.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містять 48 найменувань та додатків. Основний текст викладено на 71 сторінку, повний обсяг роботи 89 сторінок.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ

1.1 Історичні відомості про інтеграл

Інтегрування винайшли ще в Стародавньому Єгипті, приблизно в 1800 році до н.е.

Першим відомим методом для обчислення інтегралів був метод вичерпування Евдокса (приблизно 370 до н.е.), який намагався знайти площі та об'єми, розбиваючи їх на нескінченну кількість частин з відомою площею чи об'ємом. Цей метод продовжив розвивати Архімед для обчислення площі параболи і наближеної площі кола. Подібні методи незалежно розвинулися в Китаї в III ст. н. е. Лю Хуейєм, який використовував їх для знаходження площі круга.[17]

Фундаментальним внеском Евдокса в математику став метод вичерпування, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався при доведенні теорем, пов'язаних з обчисленням площ, об'ємів і інших величин. Він вважається першим варіантом теорії меж.

В основі методу лежала лема: якщо a і b, $a > b$ – дві величини, підлеглі аксіоми Евдокса-Архімеда, і якщо відняти з a більше її половини, із залишку більше його половини і продовжувати так необмежено, то після деякого кінцевого числа операцій вийде залишок $\alpha_k < \frac{a}{2^4} \leq b$. Це означає, що межа α_k рівна 0.

Пояснимо застосування методу вичерпування. Припустимо, що необхідно обчислити площу деякої фігури, тобто знайти величину А. У цю фігуру вписувалися фігури, площі яких відомі і утворюють монотонну послідовність $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$ причому повинно бути

$$A - A_1 < \frac{A}{2}, A - A_2 < (A - A_1)/2 < \frac{A}{4}, \dots, A - A_n < \frac{A}{2^n}.$$

Тоді через основну лему при великому n різниця $A - A_n$ може бути менше будь-якої величини b. Далі відшукувалася границя послідовності $\{A_i\}$, тобто таке число B, що різниця $B - A_n$ ставала як завгодно малою. Завершувалося знаходження А доведенням того, що А = В. Якщо скористатися сучасною термінологією елементарного аналізу, то доводилося, що з рівності $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ слідувало А = В.

У стародавні часи, математичний метод вичерпування використовувався для суворого підтвердження достовірності результатів, отриманих різними неправильними операціями з нескінченністю, граничними переходами. Шляхом вичерпування Евдокс довів такі теореми: рлощі кругів відносяться як квадрати діаметрів; об’єм піраміди рівний $\frac{1}{3}$ об’єму призми, що має з пірамідою ті ж основу і висоту; об’єм конуса рівний $\frac{1}{3}$ об’єму циліндра, що має з конусом ті ж основу і висоту. Евклід до них додав ще теорему про те, що об’єми куль відносяться як куби діаметрів.

Архімед покращив метод вичерпування Евдокса і успішно використовував його для доведення багатьох теорем. Це був початок інтегрального методу.

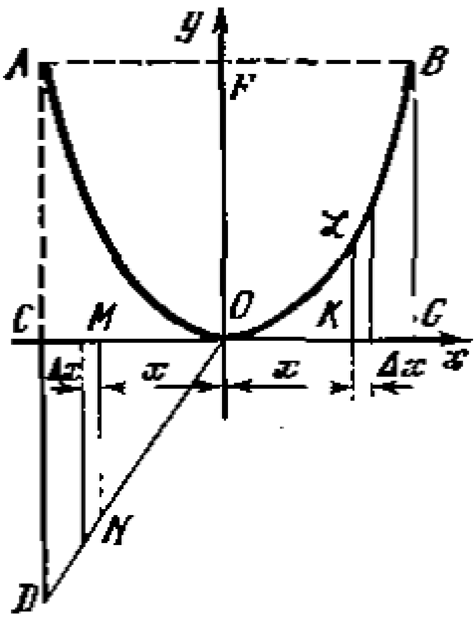
За допомогою методу вичерпування Архімед знайшов, наприклад, наступні найважливіші результати: площа сегменту параболи рівна $\frac{4}{3}$ площі вписаного в нього трикутника; об’єм кулі більший у 4 рази за об’єм конуса, у якого основою служить великий круг кулі, а висотою – його радіус; площа поверхні кулі рівна збільшеній у 4 рази площі великого круга. Архімед застосовував метод вичерпування не тільки для встановлення нових фактів, а і обґрунтування відомих раніше, але не доведених.

Далі Архімед оголосив, що опублікує цей метод, сподіваючись вшанувати попередні згадки про нього та допомогти теперішнім і майбутнім математикам зробити нові відкриття.

При обчисленні площі сегмента параболи, Архімед розглядав його і відповідний трикутник як «суми відрізків», а об’єми – як «суми площ». Він встановив об’єми кулі і кульового сегменту, еліпсоїда обертання, параболоїда обертання, центрів тяжіння фігур і тіл; розглянув завдання про знаходження об’єму «циліндрового копита» - тіла, отриманого при перетині циліндра площиною, що проходить через діаметр основи, і «монастирського зведення»

- частини простору, що висікається двома рівними циліндрами, осі яких перпендикулярні. Об’єм «циліндрового копита» Архімед знаходив за допомогою принципу важеля, після чого проводив геометричне доведення.

Пояснимо суть механічного методу Архімеда на прикладі як він обчислював площу параболічного сегменту. Архімед визначав площу сегменту AOB з основою AB $= 2l$ і висотою $OP = h$. Для простоти знайдемо площу, між дугою параболи $y = ax^2$, віссю Ox прямої $x = l$. Це не буде значним відхиленням від міркування Архімеда. Розглянемо важіль CG довжини $2l$ з точкою опори O. На правому плечі важеля нехай знаходиться фігура OBG; розіб’ємо її на вузькі смуги ширини Δx. На малюнку 1 така смужка KL розташована від початку координат на відстані x. Ордината KL буде ax^2, тому площа смужки приблизно рівна $ax^2 \cdot \Delta x$. Перемістимо цю смужку на кінець важеля, в точку G, і підрахуємо момент її щодо точки O; знайдемо $l \cdot ax^2 \cdot \Delta x$. Зрівняємо цю смужку смужкою площі $MN \cdot \Delta x$, підвішеною до лівої частини важеля на відстані $OM = x$ від точки O. Ординату MN отримаємо, якщо прирівняємо смуги щодо точки O. Це дасть: $x \cdot MN \cdot \Delta x = l \cdot ax^2 \cdot \Delta x, MN = alx$. [17]



Мал. 1

Зробимо так з кожною смужкою і отримаємо на лівому боці важеля ряд безперервно розподілених смужок по всій його довжині OC. Ординати їх пропорційні x, тому кінці підвісків розсташовуються на прямій OND, при цьому $CD = al^2$.

Розміщені таким чином на стороні OC важеля, складові трикутника OCD, вирівняють зосереджену в точці G, площу фігури OBG. Площа трикутника OCD рівна $\frac{1}{2}al^2 \cdot l$; його центр тяжіння знаходиться від вершини O на відстані $\frac{2OC}{3} = \frac{2l}{3}$. Користуючись тим, що важіль знаходиться в рівновазі, прирівняємо моменти щодо точки О площі трикутника OCD і площі фігури OBG, зосередженої в точці G. Отримаємо $\frac{2l}{3} \cdot \frac{al^2}{2} \cdot l = Sl$, звідки $S = \frac{al^3}{3}$. Оскільки ордината точки B рівна al^2 шукана площа буде $S = OG \cdot \frac{BG}{3}$.

Отже, площа сегменту AOB параболи складає $\frac{2}{3}$ площі прямокутника $ABGC$, тобто $\frac{4}{3}$ площі вписаного в сегмент трикутника, що і встановив Архімед.

Наведений приклад, очевидно, що не може залишити байдужими жодного знавця математики. Але він не містить ще початків інтегрального числення. Ці початки з'явилися, коли Архімед ввів аналоги сум Дарбу.

Уточнення Архімедом ідеї Демокріта щодо поділу плоских фігур на елементарні смуги «заповнених» фігур і поділу предметів на шари заповнених фігур мало важливе значення для розвитку числення. Таких елементарних частин могла бути нескінченна множина або скінченне число. Завдяки цим діям Архімед випередив ідеї Каплера і Кавальєрі щодо визначення числових характеристик різних геометричних об'єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру, і про всі плоскі перетини, що заповнюють об'єм.[17]

Метод інтегральних сум розроблений Архімедом і застосований до обчислення площ і об'ємів в його творах «Про кулю і циліндр», «Про коноїди і сфероїди», «Про спіралі».

Отже, вперше ідею інтегрування знаходимо в працях Архімеда. Вона виникла з потреб практики і ніяк не була вільним творінням розуму.

У XVII ст. велика група математиків займалася наступними основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення, і обчислення квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення. Заслуга Ньютона і Лейбніца полягала у відшуканні внутрішнього зв'язку між цими завданнями, синтез яких і був основою для створення могутнього знаряддя науки і наукового природознавства. Користування теоремою про взаємну оберненість операцій диференціювання і інтегрування і знання похідних багатьох функцій дали Ньютону можливість по флюксіях отримати фелюенти (функції), тобто інтегрувати. Якщо інтеграли безпосередньо не обчислювалися, Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневий ряд та інтегрував його почленно. Введення такого прийому – заслуга Ньютона. Для розкладання функцій в ряди він найчастіше користувався відкритим ним розкладанням степеня бінома, діленням чисельника на знаменник, знаходженням кореня.

У творі «Аналіз за допомогою рівнянь з нескінченним числом членів» (1669 р., опублікований 1711 р.) Ньютон обчислив похідну та інтеграл будь-якої степеневої функції.

Різні раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні та деякі трансцендентні функції (логарифмічну, показникову, синус, косинус, арксинус) Ньютон виражав за допомогою нескінченних степеневих рядів. У цій же праці Ньютон виклав метод чисельного розв’язання алгебраїчних рівнянь, а також метод для знаходження розкладання неявних функцій у ряд по дробових степенях аргументу.

Метод обчислення і вивчення функцій їхнім наближенням нескінченними рядами набув величезного значення для всього аналізу і його додатків.

Найбільш повний виклад диференціального й інтегрального числень міститься в «Метод флюксій…» (1670-1671 р., опубліковано 1736 р.). Тут Ньютон формулює дві основні взаємо-зворотні задачі аналізу:

1) Визначення швидкості руху в даний момент часу по відомому шляху чи визначення співвідношення між флюксіями по даному співвідношенню між фелюентами (задача диференціювання)

2) Визначення пройденого за даний час шляху по відомій швидкості руху чи визначення співвідношення між фелюентами по

даному співвідношенню між флюксіями (задача інтегрування диференціального рівняння і, зокрема, відшукування первісних).[17]

Метод флюксій застосовується тут до великого числа геометричних питань (задачі на дотичні, кривизну, екстремуми, квадратури, випрямлення, тощо); тут же виражається в елементарних функціях ряд інтегралів від функцій, що містять квадратний корінь із квадратичного тричлена.

Велика увага приділена в «Метод флюксій» інтегруванню звичайних диференціальних рівнянь, причому основну роль відіграє представлення розв’язку у вигляді нескінченного степеневого ряду.

Ньютонові належить також розв’язок деяких задач варіаційного числення.

У введенні до «Міркування про квадратуру кривих» (основний текст 1665-1666 рр., введення й остаточний варіант 1670 р., опублікований 1704 р.) і в «Початках» він намічає програму побудови методу флюксій на основі вчення про межу, про «останні відношення зникаючих величин» чи «перших відношеннях, що зароджуються», не даючи, формального визначення межі і розглядаючи її як первісне. Необхідно відзначити, що ні у Ньютона, ні у Лейбніца не було формули:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), F'(x) = f(x),$$

називається формулою Ньютона-Лейбніца. Але це правило вони знали. Ньютон писав: «…для отримання належного значення площі, прилеглої до деякої частини абсциси, цю площу завжди слід брати рівній різниці значень z, відповідних частинами абсцис, обмежених початком і кінцем площі».

Викликає інтерес розробка Лейбніцем символіки диференціального і інтегрального числень. Її можна прослідкувати по рукописах. Так, 26 жовтня 1675 року Лейбніц виражав квадратуру у дусі Паскаля словами *omn.* w (всі ординати); 29 жовтня відмітив, що зручніше писати *omn.* l вираз $\int l$ (сума ліній, знак $\int$ походить від першої букви слова summa), і вказав, що тут виникає новий рід числення. Інший рід числення з’являється, по словах Лейбніца, коли з виразу $\int l = a$ слідує $l = \frac{ya}{d}$. Знак $\int$ збільшував число вимірювань, а d – зменшував (d – перша буква слова differentia - різниця). Вже в рукописі 11 жовтня символи $\frac{x}{d}$ і $\frac{y}{d}$ замінені на dx та dy.

Інтеграл Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – визначений інтеграл. У одному з рукописів є запис dx = x. Це означає, що взаємна оберненість дії диференціювання і інтегрування у Лейбніца виступали на оперативному рівні. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів І. Бернуллі.

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні поняття диференціального та інтегрального числення. Він дав загальні правила розв’язування завдань на квадратуру і дотичні, встановив зв’язок між завданнями диференціювання та інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася до сьогодення.

Дві роботи (1701 та 1703 рр.) Лейбніц присвятив інтегруванню раціональних дробів. Для інтегрування раціонального дробу він виділяв з нього цілу частину, після чого, правильний раціональний дріб представляв у вигляді суми простіших. У зв’язку з інтегруванням раціональних дробів в аналіз увійшли комплексні числа і виникла суперечка про логарифми негативних чисел.

Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше воно було доступне лише вузькому колу фахівців, які виконували кожне завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, який застосовується до багатьох завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.[17]

Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямках: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, набував досконалих і всеосяжних форм, знаходив все більше і більше застосування при розв'язуванні задач з математики, механіки, фізики, проник в технічні науки та став інструментом, необхідним у всіх галузях природничих наук; інтеграл , як сімейство первісних, невизначений інтеграл, своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу аналізу – методів інтегрування функцій, а це у свою чергу було зв'язано з появою функцій, невідомих раніше. Найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

Дослідження інтеграла після Рімана не припинилися, а пішли прискореним темпом. Багато математиків зробили значний внесок в теорію інтеграла в другій половині XIX-XX ст. Інтеграл був, є і буде важливим поняттям в математиці.

Для подальших узагальнень інтеграла всередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила, розроблена в кінці XIX ст. – поч. XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини. Виникло нове поняття – інтеграл Лебега, узагальнений інтеграл Рімана. Лебег ввів дескриптивне визначення інтеграла: сформулював його властивості, що не містять вказівок на побудову. Він дав також конструктивне визначення інтеграла – аналітичне та геометричне.

Роботи Лебега послужили значним імпульсом для подальших досліджень в математиці. Теорія міри та інтеграла Лебега служать теоретичним інструментом в сучасній теорії диференціальних рівнянь, в теорії математичної фізики, теорії узагальнених функцій, теорії лінійних операторів і спектральної теорії, теорії імовірності, теорії випадкових процесів та інших розділів математики.[17]

Майже одночасно з Лебегом при розв'язанні задачі про розподіл маси $\varphi(x)$ на інтервалі $[0, x)$ узагальнення інтеграла Рімана здійснив Т. Стілтьєс. Введення інтеграла Стілтьєса (1856-1894) також привело до нових робіт, присвячених його властивостям, різним застосуванням, з’ясуванню зв’язку інтеграла Стілтьєса з інтегралами Рімана і Лебега.

У 1912 році з’явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данджуа (1884-1973), що викликав новий потік досліджень.

1.2 Інтерактивні методи розв’язування задач з використанням інтеграла. Порівняння сучасних та традиційних методів

Тема "Інтеграл та його застосування" у класах профільного рівня є важливою частиною курсу алгебри та початків аналізу, яка готує учнів до розв'язання практичних задач з наукових і технічних дисциплін. Основна мета вивчення цієї теми полягає в тому, щоб учні не тільки засвоїли теоретичні основи інтегралів, але й навчились застосовувати їх для розв’язування прикладних задач.

Згідно з сучасними рекомендаціями Міністерства освіти і науки України, вивчення математики має здійснюватися з використанням інтерактивних методів, які сприяють активній участі учнів у процесі навчання. Застосування інтерактивних засобів, таких як програмне забезпечення GeoGebra, GRAN1, GRAN2D, дозволяє вчителю візуалізувати основні поняття інтегралів та їх геометричну інтерпретацію. Наприклад, учні можуть побачити на екрані, як площа під графіком функції змінюється в залежності від меж інтегрування. Це допомагає краще розуміти поняття визначеного інтеграла як міри площі

Вивчення інтегралів не повинно обмежуватися лише теоретичним матеріалом. Важливою складовою є практика розв’язання задач на обчислення площ, об'ємів, середніх значень функцій тощо. МОН рекомендує використовувати компетентнісний підхід, що передбачає розв'язання задач, які учні можуть зустрічати у реальному житті. Наприклад, задачі на обчислення об'ємів тіл обертання або визначення площі складних фігур допомагають учням зрозуміти практичну цінність інтегралів. У підручнику з алгебри для 11 класу автори Мерзляк та Полонський, є ряд таких задач, які допомагають учням закріпити теоретичний матеріал через практичне застосування.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN1, GRAN2D, GRAN3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших.[30]

Окрім програмного забезпечення, вчителі також можуть використовувати онлайн-платформи, наприклад Всеукраїнську школу онлайн, де є уроки вивчення інтегралів. Важливо, щоб учні могли самостійно повторювати матеріал або виконувати інтерактивні вправи вдома. Такий підхід полегшує засвоєння матеріалу і робить навчальний процес більш гнучким.

Для ефективного засвоєння теми вчителі використовують різні методи навчання — як сучасні, так і традиційні. Кожен із цих підходів має свої переваги та недоліки. Розглянемо детальніше дані методи.

Сучасні методи викладання акцентують увагу на компетентнісному підході, який спрямований на розвиток не тільки теоретичних знань, але й практичних умінь, самостійності та творчого підходу до розв’язування задач. Викладання стає більш інтерактивним та орієнтованим на учня.

1) **Використання інформаційних технологій.** Одним із ключових аспектів сучасного навчання є використання програмного забезпечення для візуалізації математичних концепцій. Наприклад, програми GeoGebra та GRAN1 дозволяють учням експериментувати з графіками функцій і візуально спостерігати, як обчислюються площі під кривими або об'єми тіл обертання. Це допомагає краще зрозуміти ідею інтегралів як кількісної міри. На відміну від традиційного підходу, де вчитель виконує розрахунки на дошці, інтерактивні інструменти дозволяють учням самостійно аналізувати математичні процеси.
2) **Формувальне оцінювання.** Одним із сучасних методів, рекомендованих для профільного рівня навчання, є формувальне оцінювання. Цей підхід дозволяє вчителю не тільки контролювати рівень засвоєння учнями матеріалу, але й надавати їм зворотний зв'язок для коригування навчального процесу. Важливими інструментами

формувального оцінювання є картки з завданнями, самооцінювання та взаємооцінювання. Так, після вивчення інтеграла учні можуть виконувати тестові завдання або брати участь у групових проєктах, де вони обчислюють інтеграли для різних функцій. Це стимулює їх до активної участі в навчальному процесі та допомагає краще засвоїти матеріал.[48]

3) **Диференційований підхід.** Сучасні методики передбачають більш гнучке налаштування навчальних матеріалів під рівень кожного учня. Учні з високим рівнем підготовки отримують складніші задачі, зокрема, на обчислення інтегралів у фізичних чи економічних моделях, тоді як інші учні можуть працювати над простішими задачами, такими як обчислення площ або базові застосування визначених інтегралів. Це дозволяє оптимізувати навчальний процес і забезпечити комфортні умови для всіх учнів.
4) **Проєктне навчання.** Проєктне навчання (project-based learning) – це метод, навчаючись за яким, учні, певний час досліджуючи і реагуючи на справжні, цікаві та складні питання, отримують потрібні знання та навички. Він є ефективним методом вивчення складних математичних тем, таких як інтеграли. Наприклад, учням можна запропонувати розробити проєкт на тему "Використання інтегралів у реальному житті". Це можуть бути проєкти на теми моделювання фізичних процесів, таких як рух тіл або ріст популяцій, де необхідно використовувати обчислення інтегралів. Такий підхід сприяє розвитку аналітичного мислення, вміння працювати з інформацією і застосовувати знання на практиці.[37]

Традиційні методи викладання орієнтовані на репродуктивний підхід до навчання. Це означає, що учні переважно отримують знання у готовому вигляді від вчителя, після чого тренуються розв’язувати задачі за стандартними алгоритмами.

1) **Лекційний.** Вчитель пояснює матеріал, надаючи чіткі алгоритми дій для розв’язування задач. Учні записують теоретичні відомості та зразки

розв’язання задач у зошитах. Цей метод є ефективним для пояснення базових понять, таких як визначений і невизначений інтеграл, та демонстрації простих прикладів. Проте, він часто обмежує можливості для розвитку творчого мислення і самостійного розв’язування нестандартних задач.

2) **Робота з підручниками.** Традиційні підручники пропонують велику кількість типових задач. Учні вирішують їх за аналогією з прикладами, наведеними в книгах. Наприклад, у підручнику з алгебри для 11 класу під редакцією Мерзляка є багато таких задач, що спрямовані на тренування обчислення площ під кривими та об’ємів тіл обертання за допомогою інтегралів. Однак, ці задачі часто формують лише механічні навички, не заглиблюючись у практичне застосування інтегралів у реальному житті.
3) **Фронтальна робота.** У традиційній школі основна форма організації роботи — це фронтальні заняття, де вчитель пояснює матеріал всьому класу одночасно. Це підходить для навчання базовим операціям з інтегралами, але не завжди дозволяє врахувати індивідуальні потреби учнів.

Порівняння традиційних та сучасних методів

Критерій	Традиційні методи	Сучасні методи
Підхід до навчання	Репродуктивний: вчитель передає знання, учні їх засвоюють	Компетентнісний: учні самостійно набувають знання через досвід
Роль учня	Пасивна: учні слухають та виконують вказівки вчителя	Активна: учні беруть участь у навчанні через проєкти та інтерактивні завдання
Застосування технологій	Обмежене: переважно робота з підручниками та зошитами	Широке використання: інтерактивні програми, онлайн-платформи

Критерій	Традиційні методи	Сучасні методи
Форми оцінювання	Традиційні контрольні роботи та домашні завдання	Формувальне оцінювання, взаємооцінювання, самооцінювання
Застосування знань	Переважно для розв'язання типових задач	Застосування знань у реальних ситуаціях та задачах з життя

Табл. 1

Традиційні методи орієнтовані на отримання учнями базових знань та механічне розв’язування задач. Вони добре працюють для розвитку базових навичок, але обмежують можливості для творчого підходу та самостійного аналізу. Сучасні методи роблять акцент на компетентнісний підхід, активне застосування інформаційних технологій та індивідуалізацію навчання. Використання інтерактивних програм та проєктного підходу дозволяє учням глибше зрозуміти тему і побачити практичні аспекти застосування інтегралів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГАЛА

2.1 Основні властивості та геометрична інтерпретація первісної

Введення первісної, як і похідної, можна було б почати з метою детальнішого розбору розв'язування задач, обернених до тих, які привели до поняття похідної. Проте, доцільніше не починати із задач, а із введення на конкретному прикладі первісної як функції. Варто розглянути такі задачі з метою пояснення фізичного і геометричного змісту сталої інтегрування та мотивації введення інтеграла.

Насамперед потрібно звернути увагу учнів на те, що кожна операція, яка вивчалась у шкільному курсі, має обернену: додавання - віднімання, множення - ділення, піднесення до степеня - добування кореня. Деякі обернені операції в цьому разі виявились неоднозначними. Наприклад, дія добування квадратного кореня з числа, яка є оберненою до дії піднесення числа до квадрата, є двозначною. Справді, існують два значення квадратного кореня числа 16: числа 4 і -4.

Основною операцією диференціального числення є знаходження похідної $y' = f'(x)$даної функції $y = f(x)$. Проте під час розв'язування різних задач, зокрема фізичних і геометричних, іноді потрібно виконати обернену задачу: за відомою похідною $y' = f'(x)$ деякої функції знайти (відновити) саму функцію, яку називають первісною для відомої функції $y = f(x)$.

Приклад 1: Нехай дано функцію $f(x) = x^2$, яка є похідною невідомої функції $F(x)$. Треба відшукати невідому функцію F. Поміркувавши, учні самі назвуть функцію $F(x) = \frac{x^3}{3}$похідна якої дорівнює x^2, тобто даній функції $f(x) = x^2$.

Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку (a, b) називається така функція F, похідна якої для всіх x з інтервалу (a, b) дорівнює $f(x)$, тобто $F(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.

Виникає ще одне запитання: чи існують інші функції, похідні яких дорівнюють x^2? Виявляється, що існують, бо не лише $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, а й

$$\left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} - 0{,}2\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} + \sqrt{5}\right)' = x^2, \ldots$$

Отже, існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють x^2. Їх можна записати у вигляді однієї множини $\frac{x^3}{3} + C$, де C - довільна стала. Якщо $F(x)$ - одна первісна, то $F(x) + C$ - загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$.

Геометричне тлумачення первісної $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для даної функції $y = x^2$ зробити неважко - це кубічна парабола, графік якої дістаємо з графіка функції $y = x^3$, стискуючи його у 3 рази до осі $0x$. Загальним виглядом первісної для функції $y = x^2$ є множина кубічних парабол, які дістаємо з графіка $y(x) = \frac{x^3}{3}$ паралельним перенесенням його вгору вздовж осі $0y$ чи вниз на відстань C залежно від знака C. Отже, у загальному вигляді первісною для $y = x^2$ є множина $\frac{x^3}{3} + C$ кубічних парабол.

Операція знаходження первісної F для даної функції $y = f(x)$ називається *інтегруванням*. Вона є оберненою до операції диференціювання. Отже, операція інтегрування є багатозначною.

Приклад 2: Для функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на інтервалах $(-\infty; 0) i (0; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = -\frac{1}{X}$, бо $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

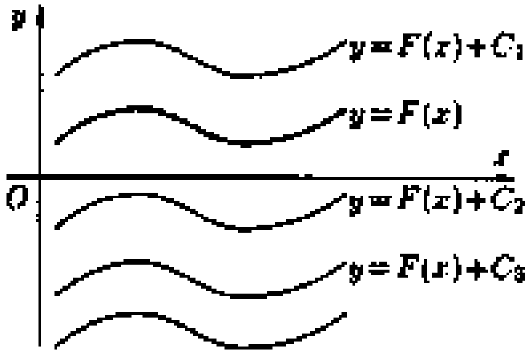
$$F(x) = 2\sqrt{x}, \text{ бо } \left(2\sqrt{x}\right)' = \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Учні зроблять висновок: існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють даній функції $f(x) = \mathrm{x}^2$. Множину всіх первісних записують у вигляді $F(x) + C$, де C - довільна стала. Цей вираз називають загальним виглядом первісної.

Доцільно, щоб, користуючись таблицею похідних, учні самостійно на уроці заповнили таблицю первісних.

Основна властивість первісної

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C – довільна стала, то $F(x) + C$ є також первісною для функції f(x) при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C – довільна стала.



Мал. 2

Графіки будь-яких первісних одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Оу.

Задача 1: Для функції $f(x) =-x^2 + 3x$ обчисліть первісну, графік якої проходить через точку $M(2; -1)$.

Розв'язання:

Знайдемо загальний вигляд первісної даної функції:

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3\ \frac{x^2}{2}\ + \mathrm{C}.$ *(1)*

Оскільки графік шуканої первісної задовольняє рівнянню (1), підставимо в рівняння замість аргументу значення $2,$ замість функції значення -1, матимемо:

$$-1 = -\frac{8}{3} + 6 \ + \text{C},$$

Отже $\text{C} = -\frac{13}{3}$.

Шукана первісна матиме вигляд: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3\ \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3}$.

Правила знаходження первісної

Правило 1: Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) \pm\ G(x)$ є первісною функції $f(x) \pm\ g(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Правило 2: Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а C — стала, то $CF(x)$ — первісна для функції $CF(x)$.

Дійсно, оскільки $F(x) =\ f(x)$ то $\left(CF(x)\right)' =\ CF'(x) =\ Cf(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: постійний множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Правило 3: Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$ а k і b — постійні числа, причому $k \neq 0$, то $F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx +\ b)$.

Це правило можна записати в інтегральній формі:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Приклад 3: Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

1) $f(x) = x^4 + \frac{1}{\cos^2 x}$; 2)$f(x) = 7e^x$

Розв'язання:

1) Оскільки $\frac{x^5}{5}$ первісна для x^4, а $tg(x)$ - первісна для $\frac{1}{\cos^2 x}$, то використовуючи правило 1, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + tgx + C$$

2) Оскільки e^x - первісна для e^x, то використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = 7e^x + C$.

Приклад 4: Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Розв'язання:

Для $\cos x$ однією з первісних є $sinx$. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(\sin 4x - \frac{\pi}{8}\right) + C.$$

Задача 2: Для функції $f(x) = (\frac{1}{6}x - 1)^5$ знайдіть первісну $F(x)$ таку, що

$$F(12) = 3.$$

Розв'язання:

Використовуючи правило 3 та той факт, що однією з первісних для функції x^5 є $\frac{x^6}{6}$ матимемо:

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{6}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6}{6}+C; F(x)=\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6+C.$$

Оскільки $F(12)=\ 3$, то матимемо $3=\left(\frac{1}{6}\cdot 12-1\right)^6+C, 3=1+C, C=2$.

Отже, $F(x)=\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6+2$ - шукана первісна.

2.2 Введення поняття інтеграла та його застосування

Нехай $y=f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку $[a;b]$. Розіб'ємо $[a;b]$ на n частин точками x_i, так що

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i,\ i(\overline{1,n}),\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

Складемо інтегральну суму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Позначимо $\lambda=max\ \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda\to 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)dx$$

де $\int_a^b$ – знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку $[a; b]$; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Означення. Функція, для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

Зауваження: неперервні функції — інтегровані.

Властивості визначеного інтеграла

1) Якщо $f(x) = c = const$, то

$$\int_a^b cdx = c \cdot (b - a).$$

2) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій, тобто:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Ця властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків.

4) Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

6) Якщо точка c ділить проміжок $[a; b]$ на частини $[a;\text{c}]$ і $[\text{c}; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\text{c}} f(x)dx + \int_{\text{c}}^b f(x)dx.$$

7) Якщо $f(x) \geq 0$ інтегрована для $x \in [a, b], b > a$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8) Якщо $f(x),\ g(x)$ — інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b],\ b > a$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

9) Якщо $f(x)$ — інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то

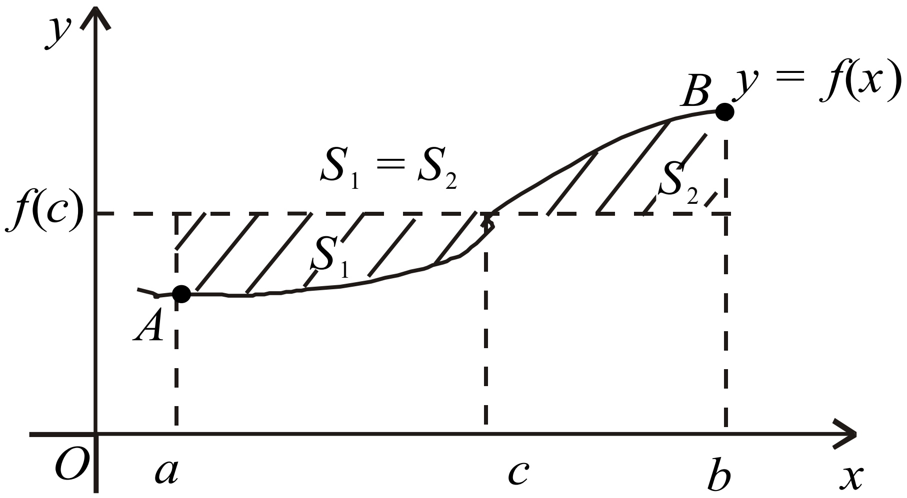
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10) *Теорема про середнє.*

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b],\ b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

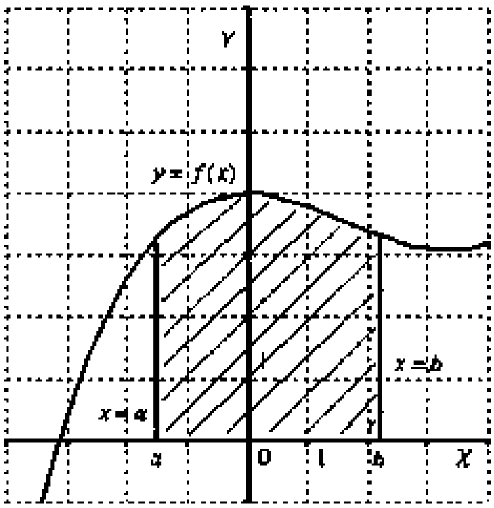
Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c)$, $c \in [a, b]$ та $b-a$, який рівновеликий криволінійній трапеції за умови, що функція $f(x) \geq 0$ неперервна на проміжку $[a; b]$.



Мал. 3

Площа криволінійної трапеції

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює:



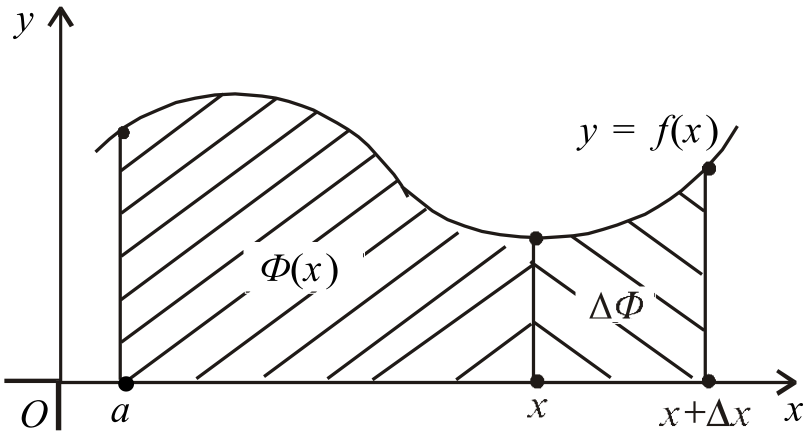
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Мал. 4

Формула Ньютона-Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній х надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$



Мал. 5

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x \in [a,b]$ то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто

$$\Phi'_x(x) = (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x).$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a,b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dt.$$

2.3 Методика розв'язування задач на обчислення площ геометричних фігур

Геометрична інтерпретація визначеного інтегралу, яку часто називають "площею під кривою", є ключовим інструментом для розв'язування багатьох задач з математики. Вона дозволяє знаходити площу фігур, обмежених графіками функцій, що є важливим не тільки для геометрії, але й для фізики та економіки.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можна інтерпретувати як площу фігури між графіком функції $f(x)$ та віссю Ox на відрізку $[a, b]$. Якщо графік функції розташований вище осі Ox, то площа позитивна. Якщо нижче — негативна, тому часто площу під кривою обчислюють як модуль інтегралу.

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$ на інтервалі $[0, 2]$. Площа під кривою між графіком цієї функції і віссю Ox обчислюється за допомогою визначеного інтегралу:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Це результат геометричного інтегрування, який дає площу фігури, обмеженої параболою і віссю.

Задача 3: Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 2x$ на інтервалі $[0, 2]$. Необхідно обчислити інтеграл різниці функцій:

$$\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Таким чином, площа цієї області дорівнює $\frac{4}{3}$ квадратних одиниць.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — дві неперервні функції на інтервалі $[a, b]$, причому $f(x) \geq g(x)$ на всьому інтервалі. Тоді площа фігури між графіками цих функцій обчислюється як різниця визначених інтегралів функцій:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Ця формула говорить, що для кожної точки на відрізку $[a, b]$, від ординати функції $f(x)$ (верхньої функції) віднімається ордината функції $g(x)$ (нижньої функції), а потім сума цих відстаней інтегрується по всьому інтервалу.

Основні кроки для розв'язування таких задач:

1. Знайти точки перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. Для цього потрібно розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

2. Визначити інтервал інтегрування — це може бути відрізок між точками перетину або заданий відрізок.

3. Записати різницю функцій $f(x) - g(x)$, де $f(x)$ — верхня функція, а $g(x)$ — нижня функція.

4. Обчислити інтеграл від цієї різниці на інтервалі $[a, b]$.

Задача 4: Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину графіків, розв'язавши рівняння $x^2 = x + 2$:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо корені $x = -1$ і $x = 2$. Отже, межі інтегрування — це $x = -1$ і $x = 2$.

Верхня функція $y = x + 2$, а нижня $y = x^2$.

Обчислимо інтеграл:

$$S = \int_{-1}^{2} \left((x+2) - x^2\right) dx$$

Спочатку обчислимо первісні:

$$\int (x + 2 - x^2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}$$

Підставимо межі інтегрування:

$$S = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

Обчислюємо значення на межах:

$$S = \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

Після обчислень отримаємо:

$$S = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Отже, площа фігури дорівнює $\frac{9}{2}$ квадратних одиниць.

Задача 5: Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = 2 - x$ на інтервалі $[1; 2]$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину графіків: $\frac{1}{x} = 2 - x$. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$1 = (2 - x)x$$

Це дає нам $x^2 - 2x + 1 = 0$, звідки $x = 1$. Таким чином, точки перетину — $x = 1$ і $x = 2$.

Верхня функція — $y = 2 - x$, а нижня — $y = \frac{1}{x}$.

Обчислимо інтеграл:

$$S = \int_1^2 \left((2 - x) - \frac{1}{x}\right) dx$$

Знайдемо первісні:

$$\int \left(2 - x - \frac{1}{x}\right) dx = 2x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|$$

Підставимо межі:

$$S = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \ln|x|\right] \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Обчислюємо:

$$S = (4 - 2 - \ln 2) - (2 - \frac{1}{2} - \ln 1)$$

$$S = (2 - \ln 2) - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

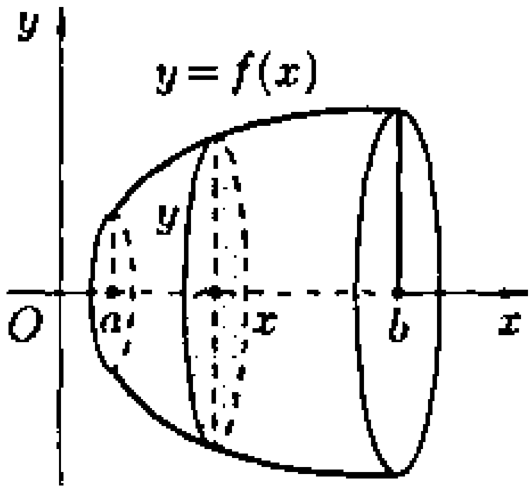
Отже, площа фігури дорівнює $\frac{1}{x} - \ ln\ 2$ квадратних одиниць.

Задачі на знаходження площі між двома функціями дають можливість побачити геометричну інтерпретацію різниці між функціями. Учні мають розуміти, як правильно обирати верхню та нижню функції, знаходити точки перетину та обчислювати визначений інтеграл для розв'язання таких задач.

2.4 Методика розв’язування задач на обчислення об’ємів тіл обертання

Для розв'язування задач на обчислення об'ємів тіл, що утворюються обертанням кривих, у курсі алгебри 11 класу профільного рівня використовується метод обернених кривих та інтегралів. Цей підхід заснований на обчисленні визначеного інтегралу, що дає можливість знаходити об'єми тіл обертання, які утворюються при обертанні графіків функцій навколо осі.

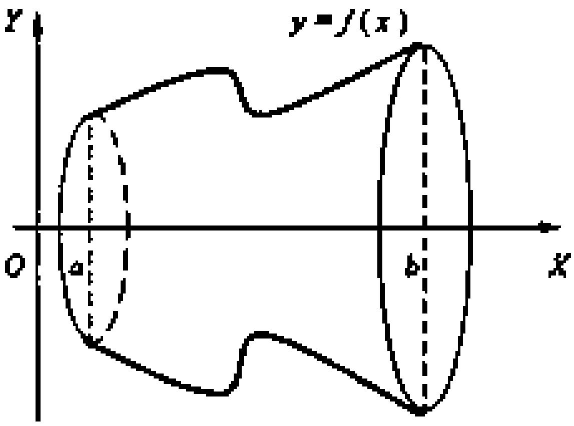
Якщо тіло вміщено між двома перпендикулярними до осі $0x$ площинами, що проходять через точки $x = a$, $\mathrm{x} = b$, функція $S(x)$ задає площу перерізу тіла площиною, яка проходить через довільну точку x відрізка $[a, b]$ і перпендикулярна до осі $0x$, то об’єм тіла знайдемо за формулою:



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Мал. 6

Якщо тіло одержане в результаті обертання навколо осі $0x$ криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід’ємної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $\mathrm{x} = b$, то об’єм тіла знайдемо за формулою:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Мал. 7

Розглянемо приклад

Задача 6: Обчислити об’єм тіла обертання навколо осі абсцис прямих $y = x + 4,\ y = 2x + 1$ на відрізку [0,1].

Шукане тіло знайдемо як різницю тіл утворених обертанням прямої та обертанням прямої . Маємо:

$$V = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16 - 4x^2 - 4x - 1)dx = \pi \int_0^1 (-3x^2 + 4x + 15)dx =$$

$$= \pi(-x^3 + 2x^2 + 15x)\Big|_0^1 = \pi(-1 + 2 + 15) = 16\pi.$$

Ця формула дозволяє знайти об'єм тіла, використовуючи квадрат функції, яка описує криву, що обертається навколо осі. Інтеграл тут відповідає сумуванню нескінченно малих елементів об'єму на проміжку від a до b.

У підручнику з геометрії для 11 класу (автори Є.П. Нелін, О.Є. Долгова) міститься розділ, де розглядаються об'єми тіл обертання, таких як циліндри, конуси та кулі. Наприклад, для циліндра формула об'єму виглядає так:

$$V = \pi r^2 h$$

де r — радіус основи циліндра, а h — висота.[31]

Задача 7: Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні кривої $y = x^2$ на відрізку від 0 до 2 навколо осі x.

Розв'язання:

Обчислюємо визначений інтеграл:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right] \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

Підставляємо межі:

$$V = \pi \left(\frac{32}{5} - 0\right) = \frac{32\pi}{5}$$

Також у підручниках часто зустрічаються задачі на обчислення об'ємів тіл обертання інших функцій, наприклад, для обертання параболи $y = x^2$ або тригонометричних функцій навколо осі. Наприклад, у підручнику з геометрії для 11 класу (автор Мерзляк) наведено задачі на обчислення об'ємів тіл із використанням формул інтегралів для різних типів функцій.[25]

Задача 8: Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої, заданої рівнянням:

$$y = x^2, x \in [0; 2]$$

Розв'язання:

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

де $f(x)$ — функція, що визначає профіль кривої, а $[a; b]$ — межі інтервалу.

Підставимо задану функцію f(x)= x^2:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx$$

Спрощуємо вираз:

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

Обчислюємо інтеграл:

Формула інтегрування степеневої функції:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

У нашому випадку $n = 4$:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}.$$

Виконуємо підстановку меж інтегрування:

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right)$$

Обчислюємо значення:

$$2^5 = 32, 0^5 = 0$$

Тому:

$$V = \pi \left(\frac{32}{5} - 0\right) = \pi \cdot \frac{32}{5}$$

Записуємо остаточний результат:

$$V = \frac{32\pi}{5}$$

Метод обертання навколо осей

При обертанні кривої навколо однієї з осей координат (наприклад, осі x або y), об'єм тіла обчислюється шляхом сумування нескінченно малих циліндричних елементів. Ці елементи мають форму кілець (дисків), що виникають при обертанні кожної точки кривої на нескінченно малу відстань.

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то при її обертанні навколо осі x об'єм тіла визначається за формулою:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

де a і b — межі інтервалу на осі x, між якими визначено функцію $f(x)$.

Якщо крива задана рівнянням $x = g(y)$, то при обертанні навколо осі y об'єм тіла обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy,$$

де c і d — межі на осі y, на яких функція $g(y)$ визначена.

Метод розв'язування задач на обчислення об'ємів тіл обертання полягає в застосуванні визначених інтегралів для опису обертання кривої навколо осей координат. Основний процес розв’язування таких задач включає кілька кроків:

1. Визначення осі обертання

Спочатку потрібно визначити, навколо якої осі здійснюється обертання: осі x або осі y. Це визначає, яку форму інтегралу використовувати і які змінні будуть підінтегральними.

- Якщо обертання відбувається навколо осі x, використовується функція у вигляді $y = f(x)$.

- Якщо обертання відбувається навколо осі y, використовується функція у вигляді $x = f(y)$.

2. Застосування формули для об'єму

3. Підготовка до інтегрування

Потрібно правильно записати підінтегральний вираз. Наприклад, для обертання функції $y = x^2$ навколо осі x, підінтегральний вираз буде $(x^2)^2$. Після цього обчислюється визначений інтеграл для заданих меж.

4. Обчислення інтегралу

Далі потрібно обчислити визначений інтеграл, використовуючи стандартні методи. Якщо інтеграл складний, можуть застосовуватись підстановки або інші техніки інтегрування.

5. Перевірка результату

Після обчислення інтегралу важливо перевірити отримане значення для фізичного сенсу задачі — чи відповідає об'єм результату, чи правильно було визначено межі та підінтегральну функцію.

Розглянемо задачу на обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на інтервалі $[0;\ 1]$ навколо осі x:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Цей приклад є класичним для учнів 11 класу, оскільки дозволяє наочно побачити застосування інтегралу для обчислення об'ємів тіл обертання.

Задача 9: Розглянемо обертання кривої $y = x^3$ навколо осі x на відрізку $[0;\ 2]$. Формула для об'єму тіла буде такою:

$$V = \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \left[\frac{x^7}{5}\right]_0^2.$$

Підставляючи значення, отримуємо:

$$V = \pi \left(\frac{128}{7}\right) = \frac{128\pi}{7}.$$

Цей приклад демонструє, як інтегрування функцій вищих степенів дає об'єм складніших тіл.

Задача 10: Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням функції $x = \sqrt{y}$ на відрізку $y \in [0;\ 9]$ навколо осі y. Формула для об'єму:

$$V = \pi \int_0^9 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^9 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^9 = \frac{81\pi}{2}$$

Цей приклад показує, як обертання навколо осі y також застосовується для розв'язування задач, коли функція задана у вигляді $x = f(y)$.

Задача з варіантів підготовки до НМТ: Знайти об'єм тіла, яке утворюється при обертанні графіка функції $y = sin(x)$ на інтервалі $[0;\ \pi]$ навколо осі x:

$$V = \pi \int_0^\pi (\sin x)^2 dx.$$

Цей інтеграл можна обчислити, використовуючи формулу:

$$V = \pi \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{x}\right).$$

після чого обчислюємо результат:

$$V = \frac{\pi^2}{2}$$

Цей приклад цікавий тим, що використовуються тригонометричні функції для знаходження об'ємів.[14]

Задача 11: Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням експоненційної функції $y = e^{-x}$ на інтервалі $[0;\ 1]$ навколо осі x:

$$V = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = \pi \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1.$$

Підставляючи межі, отримаємо:

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right).$$

Цей приклад демонструє використання інтегралів для складних експоненціальних функцій.

Типові помилки

Проаналізуємо типові помилки учнів під час розв’язування таких задач.

Аналіз вимагає ретельного розгляду кожного етапу розв’язування таких задач. Цей тип задач базується на розумінні принципів обертання кривих, правил застосування визначених інтегралів та правильному проведенні обчислень. Учні можуть робити різні помилки на кожному з цих етапів, і розуміння типових труднощів допоможе як вчителям, так і самим учням уникати їх у майбутньому.

Розглянемо такі помилки:

1. Неправильний вибір осі обертання

Однією з найбільш поширених помилок є невірний вибір осі обертання. Це може відбуватися через неуважне читання умови задачі або плутанину в поняттях обертання навколо осі x чи осі y. Учні можуть неправильно визначити, яку функцію потрібно інтегрувати: $y = f(x)$ для обертання навколо осі x або $x = g(y)$ для обертання навколо осі y. Наприклад, якщо в задачі вказано обертання кривої навколо осі y, учні можуть помилково спробувати застосувати інтеграл для обертання навколо осі x. Це призводить до неправильного підінтегрального виразу та відповідно хибного результату.

Способи уникнення: Учням потрібно чітко розуміти різницю між обертанням навколо осі x і осі y та звертати особливу увагу на умову задачі. Також важливо пояснювати, що графік функції визначає форму тіла і його обертання навколо різних осей дає різні об'єми. Практика з простими прикладами на обидва випадки допоможе учням глибше зрозуміти концепцію.

2. Неправильне записування підінтегрального виразу

Ще однією типовою помилкою є неправильне записування підінтегрального виразу для об'ємів. Формула для обчислення об'ємів тіл обертання виглядає так:

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$ для обертання навколо осі x,

І

$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy,$ для обертання навколо осі y.

Іноді учні плутають цю формулу і записують підінтегральну функцію неправильно, наприклад, забувають звести функцію в квадрат або плутають знак інтегралу з іншим математичним оператором. Це також може бути результатом недостатнього розуміння фізичної суті задачі — що площа кожного кільця дорівнює площі кола з радіусом, рівним значенню функції.

Способи уникнення: Учням слід давати більше вправ на тренування правильного записування підінтегральних виразів і пояснювати фізичну суть методів обчислення об'єму, щоб вони чітко розуміли, чому функція зводиться в квадрат. Використання графічних ілюстрацій і демонстрацій дозволяє краще зрозуміти, як обертання кривої утворює тіло, і чому важливо правильно записувати підінтегральний вираз.

3. Невірне визначення меж інтегрування

Часто учні помиляються у визначенні меж інтегрування. Межі інтеграції повинні відповідати ділянці, на якій здійснюється обертання. Якщо функція задана на інтервалі $[a;\ b]$, то межі інтеграції для обертання навколо осі x будуть a і b. Проте, якщо мова йде про обертання навколо осі y, межі потрібно визначати відповідно до значень y на графіку. Помилка у визначенні цих меж може призвести до обчислення неправильного об'єму або навіть фізично неможливого результату (від'ємного об'єму, наприклад).

Способи уникнення: Під час викладання цього матеріалу варто наголосити на необхідності уважно перевіряти, які саме інтервали слід використовувати для обертання. Наприклад, корисним може бути графічний підхід до розв'язування задач — коли учні зображують графік функції і визначають, на яких проміжках вона обертається. Це допомагає краще зрозуміти, які межі потрібно використовувати.

4. Труднощі з інтегруванням складних функцій

Учні також часто стикаються з проблемами під час обчислення самих інтегралів, особливо якщо підінтегральна функція є складною або вимагає застосування технік інтегрування, таких як часткове інтегрування чи підстановка. У випадках, коли функція вимагає спеціальних прийомів, учні можуть помилково спростити або проігнорувати необхідні кроки, що призводить до невірних результатів.

Способи уникнення: Для запобігання цій проблемі необхідно забезпечити достатню практику з інтегрування, починаючи з простих функцій і поступово переходячи до складніших прикладів. Пояснення методів інтегрування на конкретних прикладах, таких як поліноми або тригонометричні функції, допоможе учням краще зрозуміти, як правильно застосовувати ці методи.

5. Неправильне трактування фізичного сенсу задачі

Ще однією типовою помилкою є неправильне розуміння фізичного сенсу задачі. Учні можуть не до кінця розуміти, що саме вони обчислюють, і як об'єм пов'язаний з площею обертаючої кривої. Наприклад, вони можуть забути про множник π, який з'являється через площу кола, або не зрозуміти, чому функція зводиться в квадрат. Це зазвичай трапляється через недостатнє засвоєння концепцій, що стоять за методом обертання.

Способи уникнення: Для подолання цієї проблеми варто більше уваги приділяти фізичному поясненню процесу обертання та зв'язку між площею і об'ємом. Використання візуальних ілюстрацій або тривимірних моделей допоможе учням зрозуміти, як обертання кривої утворює тіло і чому виникає множник π. Також важливо пояснити зв'язок між площею кілець і об'ємом тіла, що утворюється.

Аналіз типових помилок при розв'язуванні задач на обчислення об'ємів тіл обертання демонструє, що основні труднощі виникають на етапах розуміння фізичної суті задачі, правильного записування інтегралів та обчислення меж інтегрування. Для уникнення таких помилок важливо постійно підкріплювати теоретичний матеріал практичними завданнями, графічними ілюстраціями та методичним поясненням основних етапів розв'язання. Регулярна практика, робота над типовими помилками та аналіз результатів допоможуть учням впевнено розв'язувати подібні задачі й краще засвоювати матеріал.

2.5 Задачі з використанням інтеграла у завданнях НМТ

Національний мультипредметний тест (НМТ) — це форма вступного випробування, яка була запроваджена в Україні як заміна традиційного ЗНО в умовах воєнного стану. Основною метою НМТ є оцінка знань випускників шкіл з основних предметів, необхідних для вступу до закладів вищої освіти. Тест складається з трьох блоків: українська мова, математика та предмет на вибір (історія України, іноземна мова, біологія, фізика або хімія), що дозволяє абітурієнтам продемонструвати свою підготовку з ключових дисциплін.

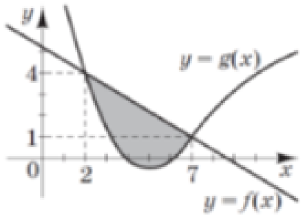
Процедура проведення НМТ передбачає виконання завдань онлайн в комп'ютерних центрах, що дозволяє забезпечити зручність та безпеку для учасників у період військових дій. Тестування триває близько двох годин, і його результати впливають на можливість вступу до університетів та інститутів. Завдання складені таким чином, щоб відповідати стандартам освітньої програми й об'єктивно оцінювати знання кожного учасника.

Запровадження НМТ є вимушеним заходом, який допомагає забезпечити доступ до вищої освіти для молоді у складних умовах. Це рішення отримало підтримку багатьох педагогів та абітурієнтів, оскільки забезпечує справедливість і доступність освітніх можливостей в умовах, коли традиційні форми оцінювання провести неможливо.

Розглянемо завдання з попередніх років, які передбачають використання інтеграла.

1) ЗНО 2016

На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А	$S = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx$
Б	$S = \int_1^4 (g(x) - f(x))dx$
В	$S = \int_2^7 (f(x) + g(x))dx$
Г	$S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$
Д	$S = \int_2^7 (g(x) - f(x))dx$

Зафарбована фігура обмежена графіками функцій $y = g(x)$ та $y = f(x)$.

Площу даної фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла. Абсциси точок перетину графіків $x = 2$ та $x = 7$ – межі інтегрування.

Функція $y = f(x)$ приймає більші значення на заданому проміжку (обмежує фігуру згори), а $y = g(x)$ – менші значення (обмежує знизу).

Тому, $S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$.

Відповідь: Г.

2) ЗНО 2017

Задано функцію $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

1	Визначте координати точок перетину графіка функції f з осями координат.
2	Побудуйте графік функції f.
3	Запишіть загальний вигляд первісних для функції f.
4	Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції f та осями x і y

1. Знайдемо координати точок перетину графіка з осями координат.

$$x = 0, \qquad f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9;$$

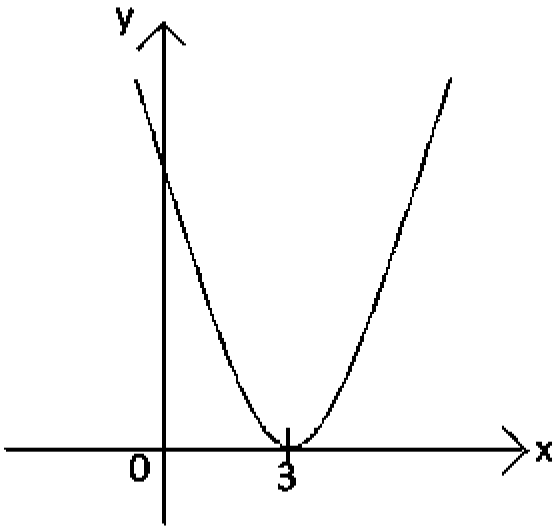
$$f(x), \qquad x^2 - 6x + 9 = 0, \qquad (x-3)^2 = 0, \qquad x = 3$$

Відповідь: $(0; 9)$, $(3; 0)$.

2. Будуємо графік.

$f(x) = x^2 - 6x + 9$ – графік парабола. $f(x) = (x-3)^2$.

Будуємо перетворенням графіка функції $y = x^2$ на 3 одиниці вправо вздовж Ox.



3. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C, \;\; C \in R$

Відповідь: $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C, \;\; C \in R$.

4. Обчислимо площу фігури:

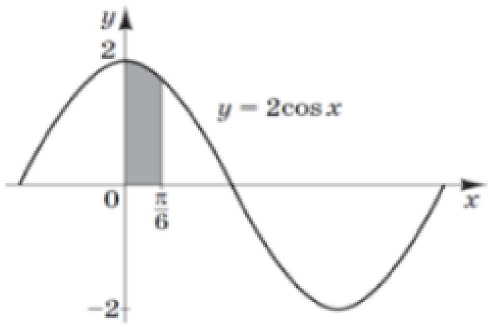
$$S = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Big|_1^2 = \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 =$$

$$= 9 - 27 + 27 - 0 = 9(\text{кв. од.})$$

Відповідь: 9 кв. од.

3) ЗНО 2018

Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

$$S_ф = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx = 2\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin 0 = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 0 = 1$$

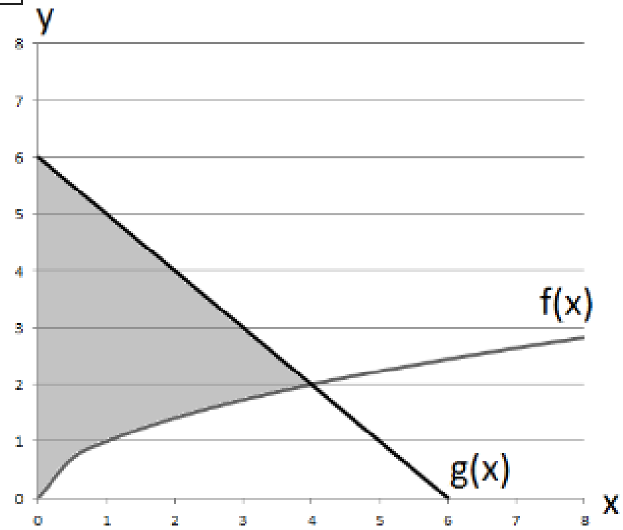
Відповідь: В.

4) ЗНО 2018

1. f(x) = $\sqrt{x}$. Графік – вітка параболи D(f):x ≥ 0.

2. g(x) = 6 – x. Графік – пряма

x	0	6
y	6	0



3. Знайдемо точку перетину графіків $f(x)$ $і$ $g(x)$.

$$\sqrt{x} = 6 - x, \qquad ОДЗ: x \in [0; 6]$$

$$x = (6-x)^2, \qquad x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x_1 = 9 \notin ОДЗ, \qquad x_2 = 4$$

Абсциса точки перетину $x = 4$.

4. Обчислимо площу фігури:

$$S_ф = \int_0^4 (6 - x - \sqrt{x})dx = \left(6 - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4 = 24 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 = \frac{32}{3} =$$

$$= 10\frac{2}{3}(\text{кв. од.})$$

Відповідь: $10\frac{2}{3}(\text{кв. од.})$.

5) ЗНО 2018

Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$

1	Побудуйте графік функції f.
2	Побудуйте графік функції g.
3	Визначте абсциси точок перетину графіків функцій f і g.
4	Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g.

1. Побудуємо графік функції $f(x) = x^3$

x	0	1	2	–1	–2
y	0	1	8	–1	–8

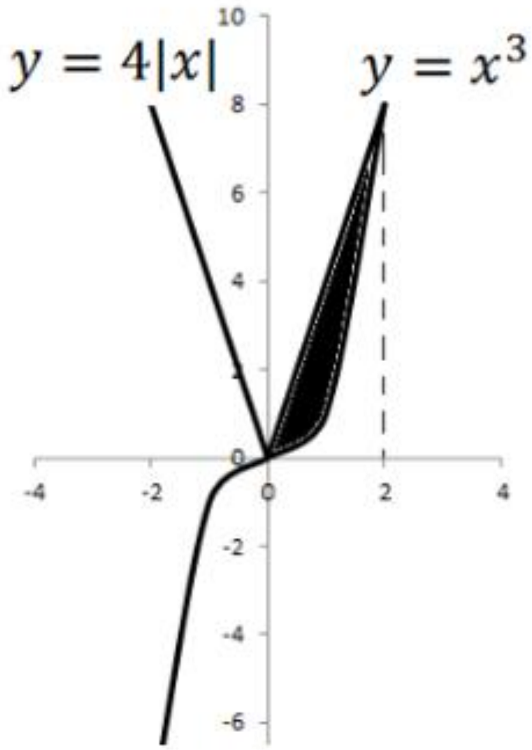
2. Побудуємо графік функції $g(x) = 4|x|$

при $x \geq 0$ будуємо $g(x) = 4x$

x	0	2
y	0	8

при $x < 0$ будуємо $g(x) = -4x$

x	0	–2
y	0	8



3. Абсциси знаходимо графічно $x = 0$ та $x = 2$, або як розв'язки рівняння $x^3 = 4|x|$ при $x \geq 0$ $x^3 = 4x$, $x^3 - 4x = 0$, $x(x^2 - 4) = 0$,

$$x(x-2)(x+2) = 0, \quad x = 0 \text{ або } x = 2 \text{ або } x = -2.$$

Проміжку $x \in [0; +\infty)$ належать корені $x = 0$ та $x = 2$.

При $x < 0$ $x^3 = -4x$, $x^3 + 4x = 0$, $x(x^2 + 4) = 0$, $x = 0$ або $x^2 + 4 = 0$ немає коренів.

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

4. Площу фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла

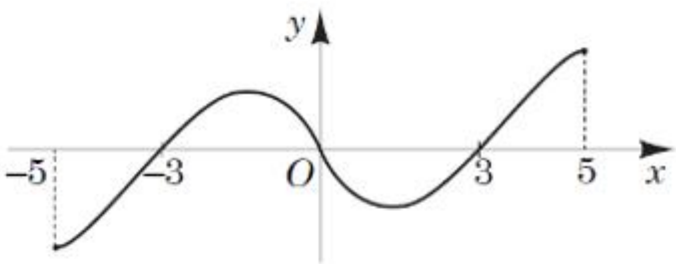
$$S_ф = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0 =$$

$$= 8 - 4 = 4(\text{кв. од.})$$

Відповідь: 4 кв. од.

6) ЗНО 2019

На рисунку зображено графік непарної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Яке з наведених співвідношень є справедливим для $f(x)$?



А	Б	В	Г	Д
$\int_{-3}^{0} f(x)dx < 0$	$\int_{0}^{3} f(x)dx > 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx < 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx > 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$

На малюнку зображено графік непарної функції.

Функція інтегрована на симетричному проміжку $[-5; 5]$.

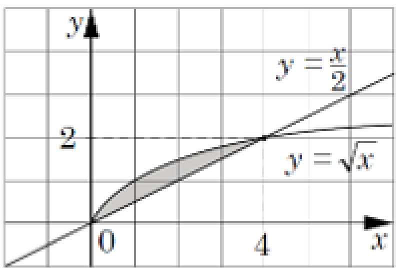
Так як площі фігур, розташованих вище та нижче осі Ox, рівні, то

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$$

Відповідь: Д.

7) ЗНО 2019

На рисунку зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{x}{2}$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А	Б	В	Г	Д
$\int_{0}^{2}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} + \sqrt{x}\right)dx$

Площу фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла. Границі інтегрування – абсциси точок перетину графіків: $x = 0,\ x = 4$.

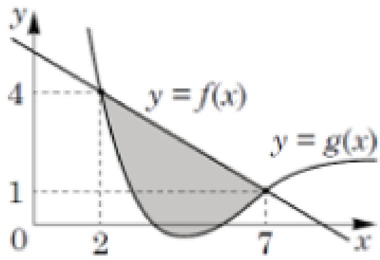
За правилом: від верхньої лінії віднімаємо нижню, знаходимо площу зафарбованої фігури.

$$S = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$$

Відповідь: В.

8) ЗНО 2019

На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А $S = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx$

Б $S = \int_1^4 (g(x) - f(x))dx$

В $S = \int_2^7 (f(x) + g(x))dx$

Г $S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$

Д $S = \int_2^7 (g(x) - f(x))dx$

Коли фігура обмежена графіками двох функцій, границями інтегрування будуть точки їх перетину.

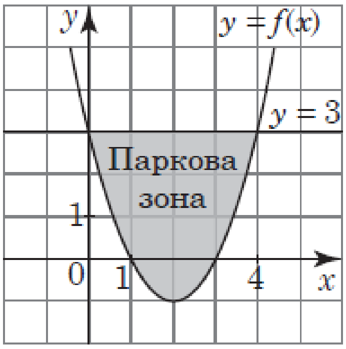
Для знаходження площі фігури від верхньої лінії віднімаємо нижню.

Відповідь: Г.

Тепер розглянемо завдання, які рекомендовані Міністерством освіти і науки для підготовки до НМТ.

1)

У прямокутній системі координат на площині зображено план паркової зони, що має форму фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x)$ і $y = 3$ (див. рисунок). Укажіть формулу для обчислення площі S цієї фігури.



А $S = \int_{-1}^{3}(f(x) - 3)dx$

Б $S = \int_{-1}^{3}(3 - f(x))dx$

В $S = \int_{0}^{4}(f(x) + 3)dx$

Г $S = \int_{0}^{4}(f(x) - 3)dx$

Д $S = \int_{0}^{4}(3 - f(x))dx$

Площа області між кривою $y = f(x)$ та прямою $y = 3$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_{1}^{3}(f(x) - 3)dx$$

де:

- $f(x) - 3$— відстань між графіком $y = f(x)$ та прямою $y = 3$ для кожного значення x;
- dx — "шматочки" ширини, які додаємо по x в межах від $x = 1$ до $x = 3$.

Розглянемо варіанти:

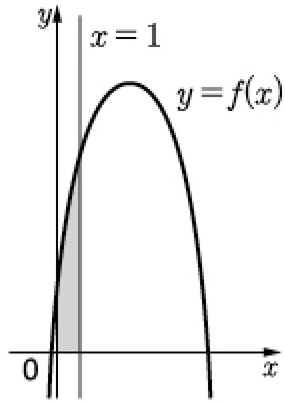
- **А:** $S = \int_{1}^{3}(f(x) - 3)dx$— неправильна, оскільки використовуються неправильні межі та вираз.
- **Б:** $S = \int_{1}^{3}(3 - f(x))dx$— неправильна, оскільки використовуються неправильні межі та вираз.

- **В:** $S=\int_0^4 (f(x)+3)dx$ — неправильно, оскільки це взагалі не формула для площі між кривими.
- **Г:** $S=\int_0^4 (f(x)-3)dx$— неправильна, оскільки невірна площа.
- **Д:** $S=\int_0^4 (3-f(x))dx$— вірна.

Правильна відповідь: **Д**.

2)

На рисунку зображено ескіз графіка квадратичної функції $f(x)=ax^2+\frac{2b}{3}x+5$. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x), y=0, x=0, x=1$, дорівнює 21 *кв. од.* Обчисліть *суму* $a+b$.



Обчислимо інтеграл від $f(x)$:

$$S=\int_0^1 (ax^2+\frac{2b}{3}x+5)dx$$

Розділимо інтеграл на частини:

$$S=\int_0^1 ax^2dx+\int_0^1 \frac{2b}{3}xdx+\int_0^1 5dx$$

Обчислюємо кожний інтеграл:

1. Для $\int_0^1 ax^2dx$:

$$\int_0^1 ax^2dx=a\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=a\cdot\frac{1^3}{3}-a\cdot\frac{0^3}{3}=\frac{a}{3}$$

2. $\int_0^1 \frac{2b}{3}xdx$:

$$\int_0^1 \frac{2b}{3} dx = \frac{2b}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2b}{3} \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{2b}{3} \cdot \frac{0^2}{2} = \frac{b}{3}$$

3. $\int_0^1 5dx$:

$$\int_0^1 5dx = 5|_0^1 = 5 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 5$$

Підставляємо результати в формулу площі. Отримуємо:

$$S = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5$$

За умовою $S = 21$, тому:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5 = 21$$

Спрощуємо рівняння:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} = 21 - 5$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} = 16$$

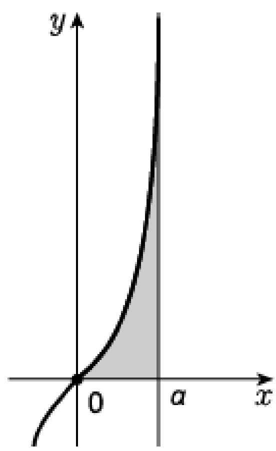
Домножимо на 3, щоб позбутися дробів

$$a + b = 48$$

Відповідь: 48.

3)

У прямокутній системі координат зображено ескіз графіка функції $y = \frac{x^3}{2} + x$ і пряму, задану рівнянням $x = a$ (див. рисунок). При якому додатному значенні a площа заштрихованої фігури дорівнюватиме 40 кв. од.?



Розв'язання:

Нам потрібно знайти таке значення $a > 0$, при якому площа заштрихованої фігури дорівнює 40 кв. од.

Площа заштрихованої області, обмеженої графіком функції $y = \frac{x^3}{2} + x$, прямою $x = a$, та віссю Ox, обчислюється за формулою:

$$S = \int_0^a \left(\frac{x^3}{2} + x\right) dx$$

Інтегруємо функцію $y = \frac{x^3}{2} + x$:

$$\int \left(\frac{x^3}{2} + x\right) dx = \int \frac{x^3}{2} dx + \int x dx$$

Обчислимо кожний доданок окремо:

$$\int \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{8}, \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Отже:

$$\int \left(\frac{x^3}{2} + x\right) dx = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}$$

Запишемо площу з урахуванням меж:

$$S = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

Підставимо межі інтегрування:

$$S = \left(\frac{a^4}{8} + \frac{a^2}{2}\right) - \left(\frac{0^4}{8} + \frac{0^2}{2}\right)$$

Очевидно, що другий вираз дорівнює нулю, тому:

$$S = \left(\frac{a^4}{8} + \frac{a^2}{2}\right)$$

За умовою, $S = 40$. Отже:

$$\frac{a^4}{8} + \frac{a^2}{2} = 40$$

Помножимо рівняння на 8, щоб позбутися знаменників:

$$a^4 + 4a^2 = 320$$

Позначимо $z = a^2$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$z^2 + 4z - 320 = 0$$

Застосуємо формулу коренів:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

де $a = 1, b = 4, c = -320$. Обчислимо дискримінант:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320) = 16 + 1280 = 1296$$

$$\sqrt{1296} = 36, z = \frac{-4 \pm 36}{2}$$

Маємо два розв'язки:

$$z_1 = \frac{-4 + 36}{2} = 16, \quad z_2 = \frac{-4 - 36}{2} = -20.$$

$$z_1 = \frac{-4+36}{2} = 16, z_2 = \frac{-4-36}{2}$$

Оскільки $z = a^2$ не може бути від'ємним, то:

$$z = 16.$$

$$a^2 = 16, a = \sqrt{16} = 4$$

Відповідь: $a = 4$.

2.6 Використання прикладних задач для розвитку математичних компетенцій

Інтегральне числення є однією з ключових частин математичного аналізу, що активно використовується в різних прикладних галузях, таких як економіка, фізика, інженерія, біологія тощо. Інтеграли дозволяють обчислювати площі, об'єми, маси, моменти інерції та багато інших фізичних і економічних показників, що не завжди можливо отримати безпосередньо. За допомогою інтегралів можна вивчати процеси, що змінюються з часом, знаходити оптимальні рішення, а також моделювати складні системи. Розглянемо, як інтеграли використовуються в прикладних галузях, зокрема в економіці та фізиці, а також наведемо кілька практичних прикладів з ілюстраціями.

Використання інтегралів в економіці

В економіці інтеграли широко застосовуються для моделювання процесів накопичення, оцінки вартості, розрахунку прибутковості та оптимізації витрат. Інтегральне обчислення допомагає економістам аналізувати потоки грошових коштів, знижувати ризики та знаходити стратегічні рішення.

1. *Поточна вартість та дисконтовані грошові потоки*

Одним із прикладних завдань, де використовуються інтеграли, є розрахунок поточної вартості грошових потоків. Нехай $C(t)$ — грошовий потік, що надходить у момент часу t, а r — ставка дисконту. Тоді поточну вартість (Present Value, PV) потоку можна розрахувати за допомогою визначеного інтегралу:

$$PV = \int_0^T C(t)e^{-rt}dt$$

де T — кінцевий час. Цей інтеграл описує сукупну вартість грошових надходжень за період з урахуванням дисконтування.

Задача 12: Якщо щорічний грошовий потік є сталим, тобто $C(t) = C_0$, то поточна вартість буде обчислюватись як

$$PV = C_0 \int_0^T e^{-rt}\, dt = \frac{C_0}{r}(1 - e^{-rT}).$$

2. *Сукупні витрати і доходи*

Інтеграли використовуються для обчислення сукупних витрат або доходів компанії протягом певного періоду. Якщо $R(t)$— функція доходу в момент часу t, то загальний дохід R на інтервалі від t_1 до t_2 визначається як

$$R = \int_{t_1}^{t_2} R(t)dt$$

Такий підхід дозволяє оцінити ефективність підприємства або проєкту за тривалий період часу.

Використання інтегралів у фізиці

У фізиці інтеграли дозволяють розв'язувати завдання, пов'язані з обчисленням роботи, енергії, моменту інерції, а також аналізом складних динамічних систем. Багато фізичних явищ описуються законами, які включають інтегральні співвідношення, що визначають зв'язок між фізичними величинами.

3. *Розрахунок роботи змінної сили*

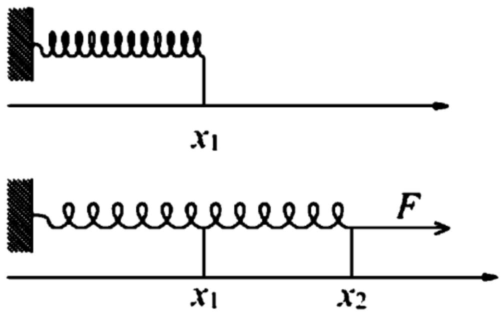
Робота сили, що змінюється на шляху від $x = a$ до $x = b$, може бути обчислена за допомогою інтегралу:

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

де $F(x)$ — сила, що діє на тіло в залежності від його положення x. Цей підхід дозволяє точно визначити роботу, якщо сила змінюється вздовж траєкторії.

Задача 13: Нехай сила $F(x) = kx$, де k — константа, діє на пружину. Тоді робота, виконана при розтягуванні пружини від $x = 0$ до $x = x_0$, обчислюється як

$$W = \int_0^{x_0} kxdx = \frac{kx_0^2}{2}$$



Мал. 8

4. *Момент інерції*

Момент інерції об'єкта, що обертається, є важливою характеристикою у фізиці, оскільки він описує розподіл маси відносно осі обертання. Для неперервного розподілу маси момент інерції I щодо осі обертання обчислюється за формулою:

$$I = \int r^2 dm$$

де r — відстань кожного елемента маси dm від осі обертання, а V — об'єм області, яку займає тіло.

Задача 14: Нехай тонкий стержень маси M і довжини L обертається навколо одного з кінців. Момент інерції щодо цієї осі обертання буде:

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{ML^2}{3}$$

Використання інтегралів в інших прикладних галузях

5. *Біологія: Модель зростання популяції*

У біології інтеграли використовуються для моделювання змін у популяції. Наприклад, приріст популяції можна моделювати диференціальним рівнянням, розв'язок якого включає інтегральні функції. Нехай $P(t)$ — розмір популяції в момент часу t, а r— коефіцієнт зростання. Тоді диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

має розв'язок у вигляді

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

де P_0 — початковий розмір популяції. Інтеграл від швидкості росту дозволяє знайти розмір популяції через певний проміжок часу.

6. *Інженерія: Розподіл напруги в матеріалі*

В інженерії інтеграли використовуються для аналізу розподілу напруги в матеріалах. Наприклад, для оцінки навантаження на конструкцію, інженери можуть обчислювати інтеграл напруги по всьому перетину матеріалу. Це дозволяє оцінити, як матеріал буде поводитись під різними типами навантажень, та визначити його оптимальні параметри для заданих умов експлуатації.

Задача 15: Якщо $\sigma(x)$ — функція розподілу напруги по перетину балки, то сумарну напругу можна знайти як

$$\int_0^L \sigma(x) dx$$

2. 7 Застосування програми GeoGebra, як один з методів інтерактивного навчання. Практична перевірка ефективності дослідження

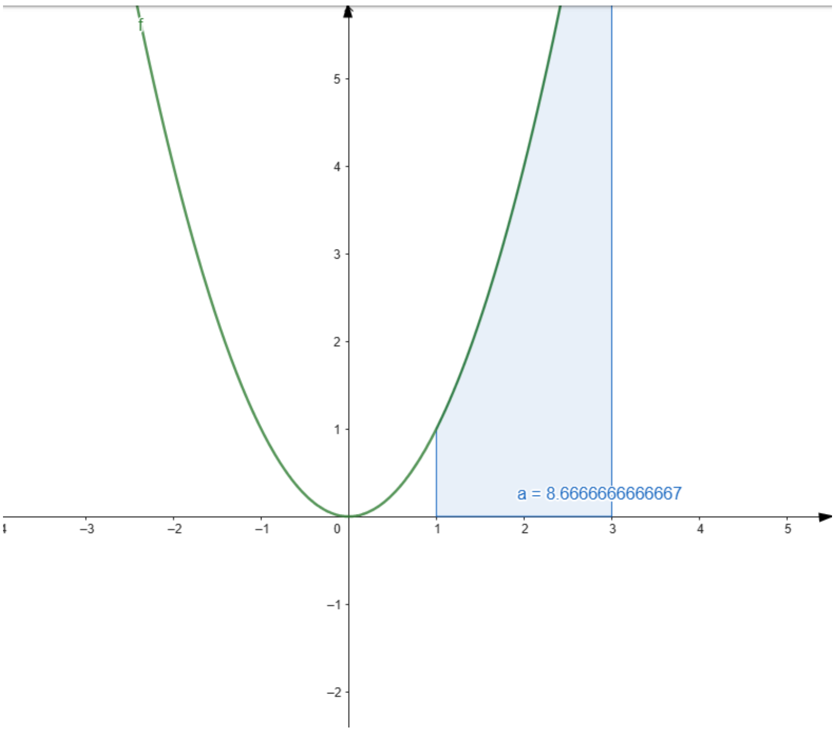
Сучасні інтерактивні програми, такі як GeoGebra, надають широкі можливості для візуалізації математичних задач, що робить процес навчання інтегрального числення більш доступним і зрозумілим для учнів. Використання GeoGebra у вивченні інтегралів допомагає учням візуально уявити собі площі, об'єми, криві та інші об'єкти, які обчислюються за допомогою інтегралів. Це дозволяє зрозуміти складні концепції, глибше засвоїти методи інтегрування, а також набути навичок математичного моделювання. Розглянемо кілька прикладів задач, що демонструють використання GeoGebra для інтерактивного вивчення інтегралів.

Площа під кривою

Однією з основних задач, яка може бути візуалізована в GeoGebra, є обчислення площі під кривою.

Задача 16: Нехай є функція $f(x) = x^2$, і необхідно обчислити площу під цією функцією на інтервалі від $x = 1$ до $x = 3$.

1. **Побудова графіка функції:** У вікні введення GeoGebra введіть формулу функції: $f(x) = x^2$.
2. **Задайте інтервал для обчислення площі:** Введіть команду для обчислення площі під графіком на потрібному інтервалі, наприклад: $Integral(f, 1, 3)$.
3. **Візуалізація площі:** GeoGebra автоматично заштриховує область під графіком функції від $x = 1$ до $x = 3$, що відповідає обчисленій площі. Також буде виведене числове значення інтегралу, що дорівнює площі цієї області.



Мал. 9

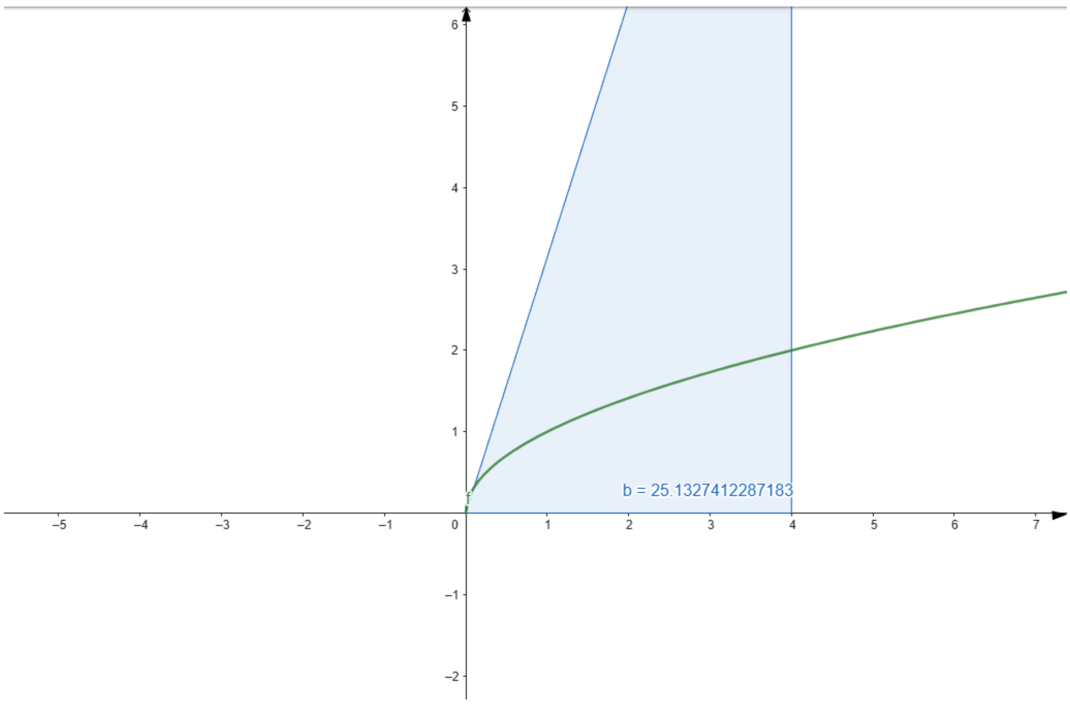
Такий підхід допомагає учням візуально уявити, як інтеграл обчислює площу під кривою і як змінюється ця площа в залежності від меж інтегрування.

Обчислення об'єму тіла обертання

Ще одним важливим застосуванням інтегралів є обчислення об'єму тіла обертання.

Задача 17: Обчислимо об'єм тіла, отриманого при обертанні графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ навколо осі x на інтервалі від $x = 0$ до $x = 4$.

1. **Введення функції:** У вікні GeoGebra введіть функцію: $f(x) = \sqrt{x}$.
2. **Створення обертання:** Використовуйте команду обертання об'єкту навколо осі. Виберіть інструмент "Параметрична поверхня" або введіть команду $Surface((x, f(x), t), x, 0, 4, t, 0, 2\pi)$. Це створить тривимірну поверхню, що представляє обертання функції навколо осі x.
3. **Обчислення об'єму:** Використовуйте команду $Integral(f\hat{}2 * \pi, 0, 4)$ для обчислення об'єму тіла обертання. GeoGebra покаже числовий результат, що відповідає об'єму обертання.



Мал. 10

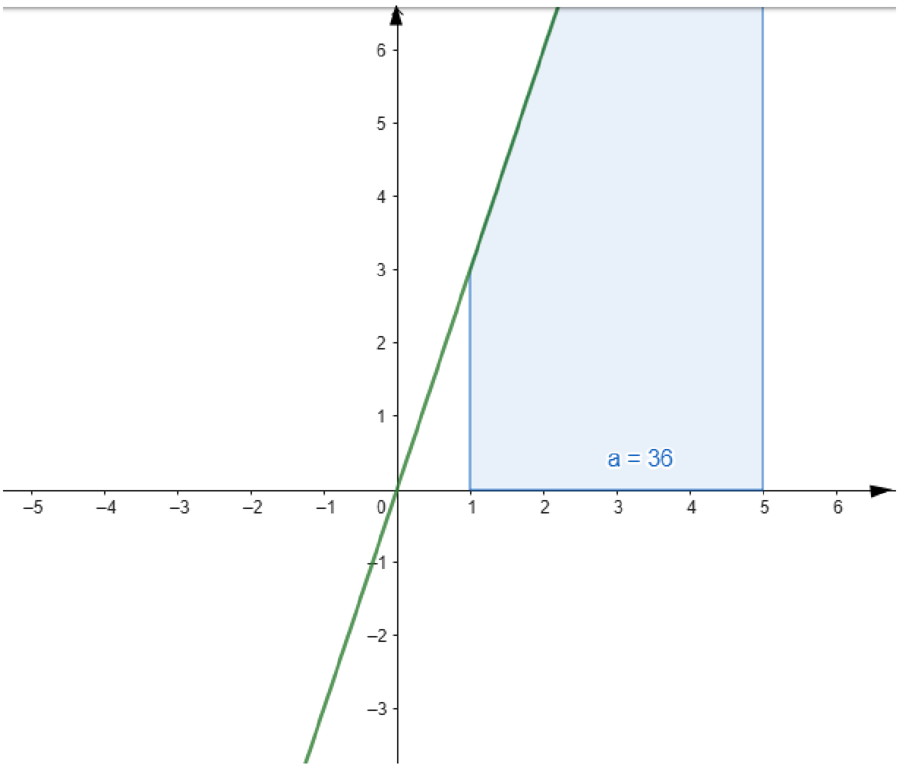
Візуалізація обертання функції допомагає учням краще уявити, як обчислюється об'єм складних тіл за допомогою інтегралів.

Динамічна візуалізація роботи змінної сили

У фізиці інтеграли часто використовуються для обчислення роботи сили, яка змінюється вздовж шляху.

Задача 18: Нехай сила $F(x) = 3x$ діє на тілі, яке рухається вздовж осі x від точки $x = 1$ до $x = 5$. Завдання — обчислити виконану роботу.

1. **Введення функції сили:** Введіть у GeoGebra функцію сили: $F(x) = 3x$.
2. **Обчислення роботи:** Введіть команду для обчислення інтегралу, що відповідає роботі сили: $Integral(F, 1, 5)$.
3. **Візуалізація:** GeoGebra заштриховує площу під кривою $F(x) = 3x$ від $x = 1$ до $x = 5$ та показує числове значення роботи.



Мал. 11

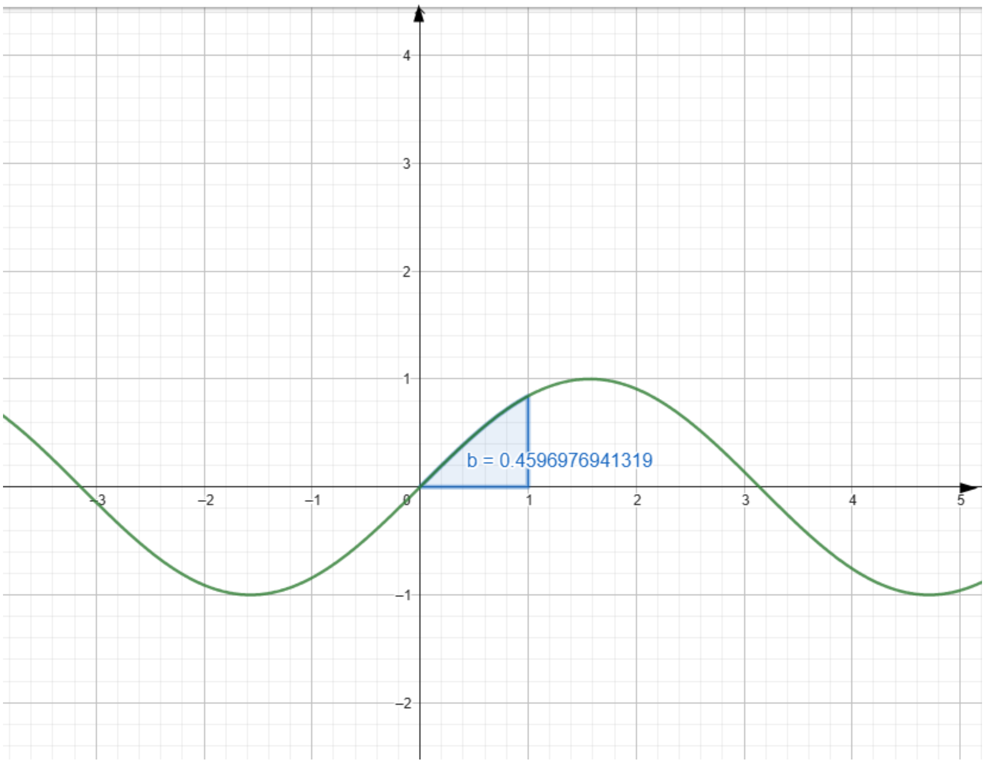
Такий підхід дозволяє побачити, як обчислюється робота змінної сили за допомогою інтеграла, та зрозуміти, як зміна сили впливає на величину виконаної роботи.

Зміна інтеграла при варіації меж інтегрування

Інтерактивна візуалізація дозволяє наочно продемонструвати, як змінюється значення визначеного інтегралу при зміні меж інтегрування. Наприклад, візьмемо функцію $g(x) = sin(x)$ і обчислимо інтеграл на інтервалі від 0 до a, де a змінюється від 0 до 2π.

Задача 19:

1. **Введення функції:** Введіть функцію: $g(x) \ = \ sin(x)$.
2. **Створення параметричної межі інтеграції:** Введіть інтеграл, де верхня межа є змінною: $Integral(g, 0, a)$.
3. **Візуалізація зміни площі:** За допомогою повзунка для параметра a студенти можуть спостерігати, як змінюється заштрихована площа під графіком функції $g(x)$ та значення інтегралу при зміні верхньої межі інтегрування.



Мал. 12

Ця динамічна візуалізація дозволяє побачити залежність значення інтегралу від меж інтегрування, що є важливим для розуміння сутності визначеного інтегралу та його застосувань.

Вивчення середнього значення функції

Середнє значення функції на інтервалі $[a, b]$ визначається як:

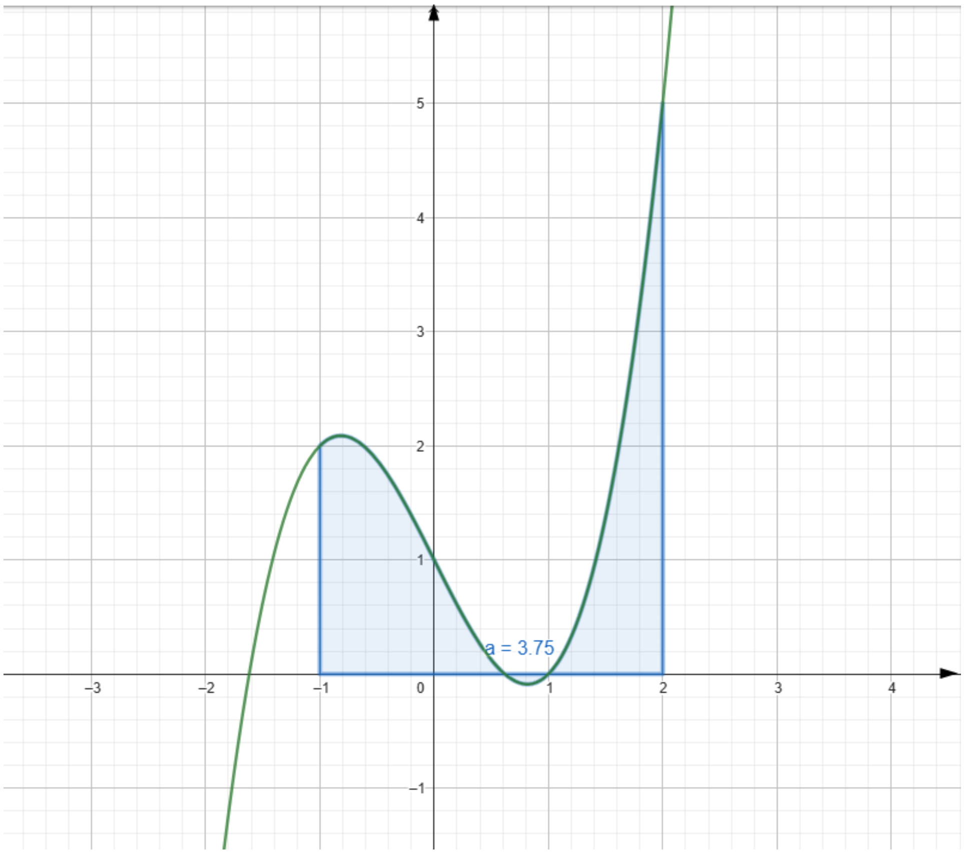
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

GeoGebra дозволяє візуалізувати цей процес і показати, як інтеграл допомагає знайти середнє значення функції.

Задача 20:

1. **Введення функції:** Введіть функцію $h(x) = x^3 - 2x + 1$.
2. **Розрахунок середнього значення:** Введіть команду для обчислення середнього значення на інтервалі, наприклад, від $x = -1$ до $x = 2$: $(Integral(h, -1, 2))/(2 - (-1))$.

3. **Візуалізація:** GeoGebra обчислить і відобразить середнє значення функції, що може бути також показано у вигляді горизонтальної прямої, що відповідає середньому значенню на даному інтервалі.



Мал. 13

Це завдання допомагає учням краще зрозуміти, як можна обчислити середнє значення функції, використовуючи інтеграл.

Розглянемо тепер приклади задач з використанням інтеграла в різних прикладних галузях.

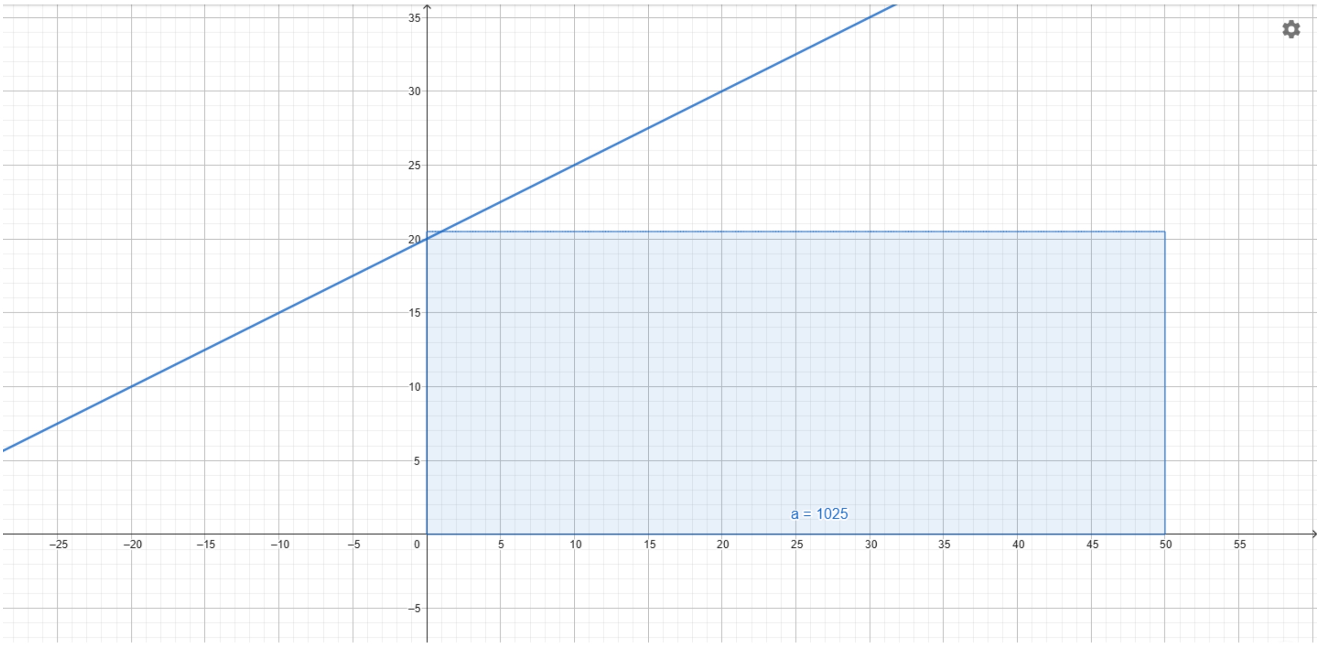
Економіка

Задача 21: (визначення загального доходу)

Функція пропозиції товару $S(p) = 20 + 0.5p$. Визначте загальний дохід, якщо товар продається за ціною $p = 50$.

Реалізація в GeoGebra:

1. Введіть функцію пропозиції: $S(p) = 20 + 0.5p$
2. Використовуйте команду інтеграції: $Integral(20\ +\ 0.5p, 0, 50)$
3. Візуалізація:



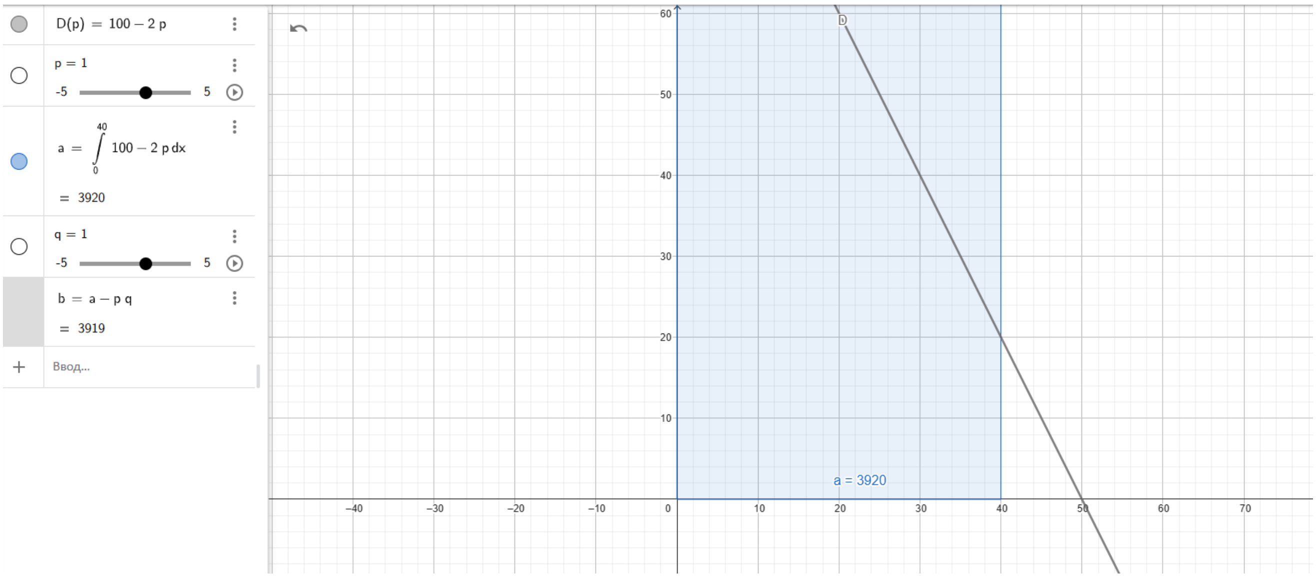
Мал. 14

Задача 22: (визначення споживчого надлишку)

Попит на товар задається функцією $D(p) = 100 - 2p$, де $D(p)$ — кількість товару, яку купують за ціною p. Якщо ціна становить $p = 30$, знайдіть споживчий надлишок.

Реалізація в GeoGebra:

1. Відкрийте GeoGebra і виберіть *Графічний калькулятор.*
2. Введіть функцію попиту: $D(p) = 100 - 2p$.
3. Використовуйте команду інтеграції: $Integral(100\ -\ 2p, 0, 40)$
4. Відніміть від отриманого результату $p \cdot q$, тобто: $a - p \cdot q$
5. Візуалізація:



Мал. 15

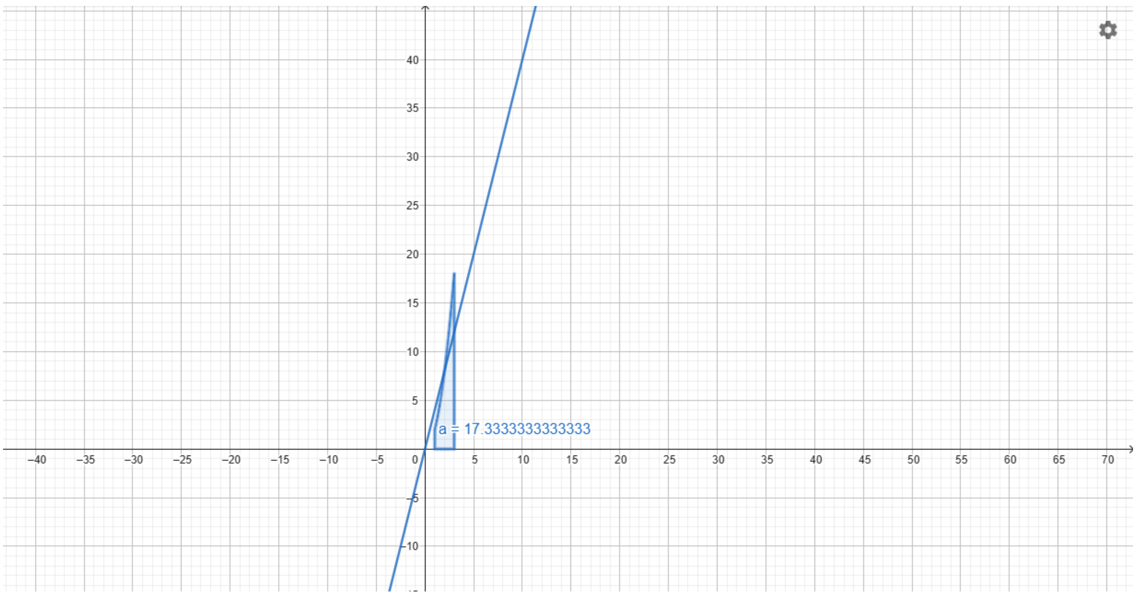
Фізика

Задача 23: (робота сили по переміщенню)

Знайти роботу сили $F(x) = 2x^2$ (у ньютонах), яка діє вздовж осі x на відрізку від $x = 1$ до $x = 3$.

Реалізація в GeoGebra:

1. Введіть функцію: $F(x) = 2x^2$
2. Використовуйте команду інтегрування: $Integral(2x \hat{} 2, 1, 3)$
3. Візуалізація:

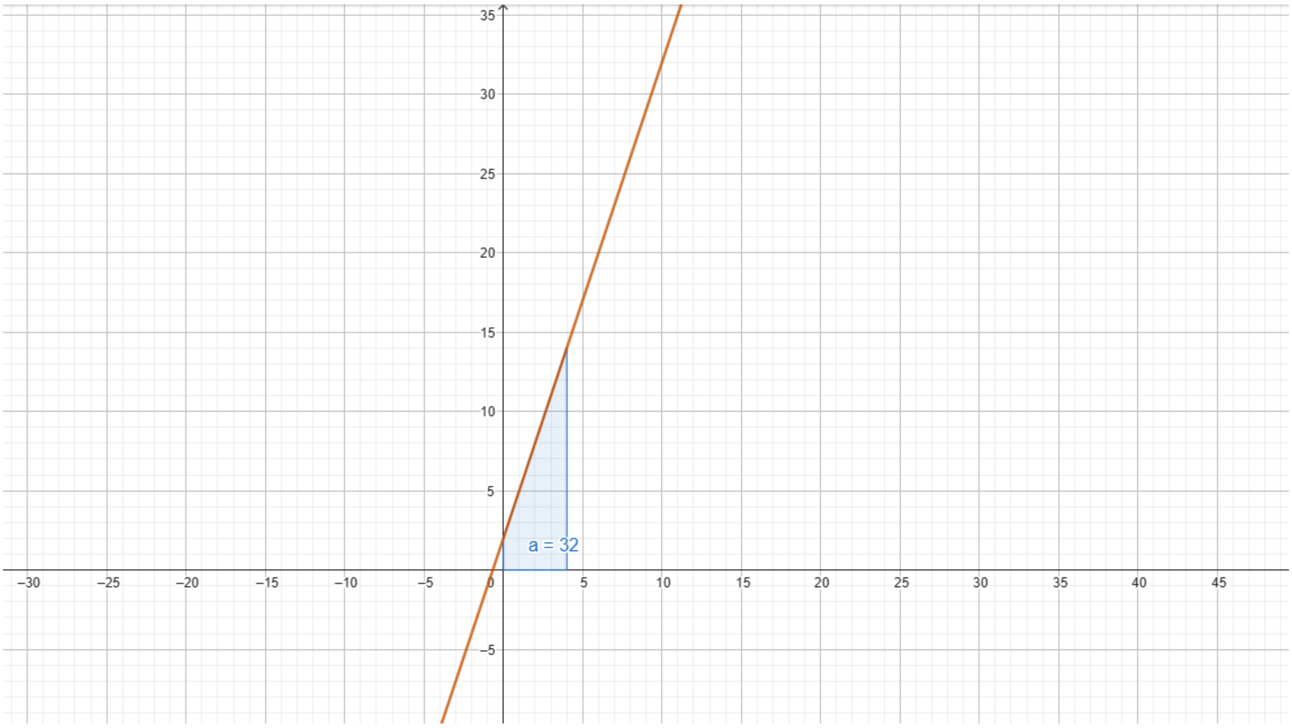


Мал. 16

Задача 24: (обчислення маси стрижня зі змінною густиною)

Стрижень довжиною 4 м має змінну густину, описану функцією $\rho(x) = 3x + 2$ (кг/м). Знайти масу стрижня.

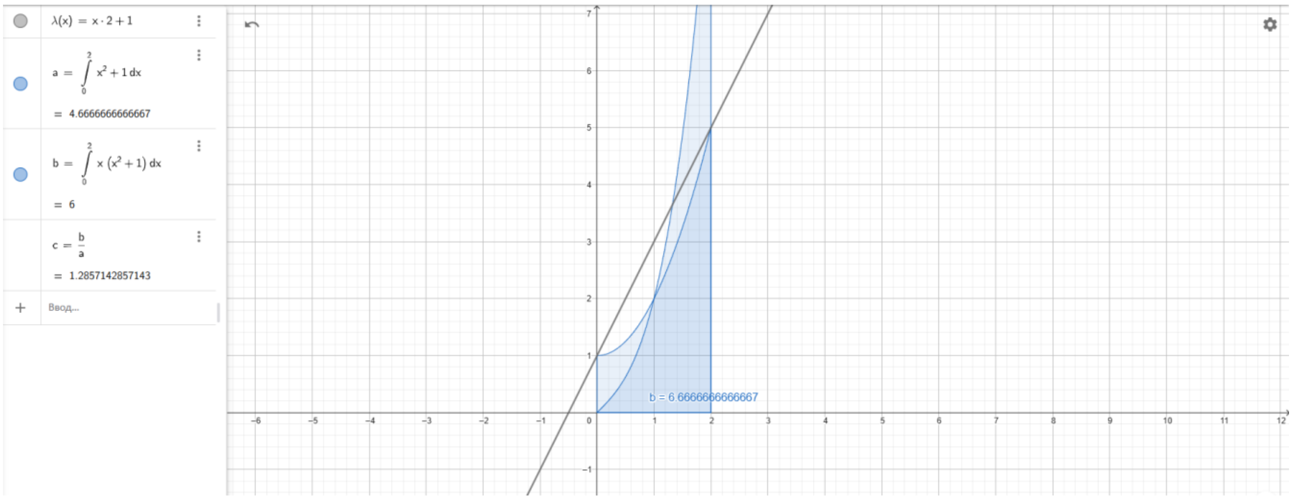
1. Введіть: $\rho(x) = 3x + 2$
2. Використовуйте команду інтегрування: $Integral(3x\ +\ 2, 0, 4)$
3. Візуалізація:



Задача 25: (центр мас пластини)

Знайти координату центра мас тонкої пластини, розташованої над відрізком [0,2], якщо лінійна густина пластини задана як $\lambda(x) = x2 + 1$.

1. Введіть: $\lambda(x) = x2 + 1$
2. Для маси: $Integral(x\text{^}2\ +\ 1, 0, 2)$
3. Для моменту: $Integral(x\ *\ (x\text{^}2\ +\ 1), 0, 2)$
4. Координата центра мас: $x_{cm} = \frac{M}{Mx}$ або $c = b/a$
5. Візуалізація:



Мал. 17

Мета дослідження полягала у вивченні ефективності використання програми GeoGebra до розв’язування задач на застосування інтеграла у класах профільного рівня.

У дослідженні брали участь два 11 класи Рівненського ліцею №22. В 11-Б класі для розв'язування задач по темі «Інтеграл та його застосування» використовували GeoGebra, а в 11-А класі навчання проводилось традиційними методами.

Під час вивчення інтеграла в обох класах було розв’язано такі типи задач:

1. На обчислення визначених і невизначених інтегралів.
2. Геометричні застосування інтегралів (обчислення площі фігур, об'ємів тіл обертання).
3. Аналіз функцій за допомогою інтеграла.

В 11-Б класі розв’язування задач виконувалося за допомогою програми GeoGebra із демонстрацією графіків, площ та інших об’єктів, створених інтерактивно.

Рівень успішності учнів оцінювався за результатами підсумкового тестування. Враховувалася швидкість розв'язання задач, правильність та глибина розуміння матеріалу.

Результати дослідження

Тип задач	11-А клас (традиційні методи)	11-Б клас (GeoGebra)	Максимальний бал	Коментарі
Обчислення визначених і невизначених інтегралів	5,2	6,2	7	Учні 11-Б краще справлялися з інтегралами завдяки інтерактивній побудові графіків.
Геометричні застосування інтегралів	4,8	6,4	7	Візуалізація у GeoGebra допомогла краще зрозуміти задачі на площі й об'єми.
Аналіз функцій за допомогою інтеграла	5,0	6,0	7	GeoGebra підвищила якість аналізу функцій завдяки інтерактивному підходу.
Середній бал	**5,0**	**6,2**	**7**	Учні 11-Б отримали вищі результати у всіх категоріях завдяки використанню технологій.

Табл. 2

Висновки:

Швидкість розв’язування задач: учні 11-Б класу, які використовували GeoGebra, розв’язували задачі швидше завдяки зручним інструментам для побудови графіків, розрахунків та візуалізації результатів.

Правильність рішень: GeoGebra допомогла зменшити кількість помилок, особливо в геометричних задачах, завдяки чіткій демонстрації областей і об'ємів.

Глибина розуміння: учні 11-Б краще зрозуміли взаємозв’язки між теоретичними знаннями та їх практичним застосуванням.

Традиційні методи: в 11-А класі, де використовували традиційні методи, учні показали хороші результати, але поступалися за швидкістю роботи та візуальним розумінням матеріалу.

ВИСНОВКИ

Основним завданням навчальних закладів у навчанні математики є забезпечення усвідомленого оволодіння учнями математичними знаннями та вміннями, формування рівня математичної культури, необхідного для продовження навчання та майбутньої трудової діяльності.

Метою даного дослідження є розробка методики вивчення інтеграла та його застосування, яка сприятиме розвитку функціонального мислення учнів та формуватиме інтерес до вивчення даної теми.

Сучасні освітні програми зазнали значних змін, що призвело до скорочення обсягу навчального матеріалу. Однак такий підхід часто ускладнює глибоке розуміння тем учнями. Тому особливо важливо, щоб викладання матеріалу було не лише доступним, а й захопливим, що сприятиме зацікавленню школярів та ефективному засвоєнню знань.

У вступі було аргументовано актуальність теми, визначено предмет, об’єкт, мету, завдання дослідження.

У першому розділі здійснено огляд з історії розвитку поняття «інтеграл». проаналізовано методи вивчення теми у класах профільного рівня. Особливу увагу було надано другому розділу «Методичні особливості розв’язування задач з використанням інтеграла». В ньому розглянуто теоретичні відомості про інтеграл, використання інтеграла в задачах шкільного курсу, показано використання новітніх інформаційних технологій у вивченні теми «Інтеграл та його застосування», зокрема програму GeoGebra та її застосування для розв’язання задач з інтегралами. Проаналізовано завдання ЗНО попередніх років по темі дослідження.

У ході виконання роботи здійснено аналіз навчальної, науково-методичної літератури з теми дослідження, розкрито методику формування математичної компетентності при розв’язуванні задач з використанням інтеграла на уроках математики в класах профільного рівня.

Під час вивчення теми «Інтеграл та його застосування» можна використовувати різноманітні програмні засоби навчання, такі як: GRAN1, GRAN2D, СДМ, GeoGebra, Mathcad. Правильне використання таких програмних засобів сприяє реалізації одного з головних педагогічних принципів – принципу бачення, який передбачає створення в учня чуттєвого сприйняття об'єктів навчання, сприяння переходу від сприймання конкретних об'єктів до сприйняття абстрактних понять про них, а також надається можливість сприяти розумінню змісту математичних методів і алгоритмів. Правильний вибір наочних засобів навчання може полегшити сприйняття, підвищувати пізнавальний інтерес, активізувати мислення та сприяти розвитку математичних здібностей учнів.

За підсумками проведеної роботи, можна сказати, що тема «Інтеграл та його застосування» є важкою для вивчення учнями і викладання вчителем. Але використовуючи сучасні методи викладання цілком можливо полегшити сприйняття цієї теми для учнів. Дана тема відіграє ключову роль у вивченні алгебри, особливо для учнів, які планують вступати до закладів вищої освіти та обирають майбутню професію, пов'язану з математикою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрєєв А. А. Комп’ютерні та телекомунікаційні технології в сфері освіти. Шкільні технології. 2007. №3. С. 151-170.

2. Антова О. Застосування похідної до розв’язування фізичних задач: інтегрований урок фізики та алгебри і початків аналізу, 11 клас. Математика. 2010. №38. С. 18-22.

3. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Вид. 3-тє, доп. та перероб. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

5. Безсмертна С. В. Дослідження функції за допомогою похідної та побудова їх графіків. Урок алгебри та початку аналізу в 11 класі з використанням 47 інформаційних комп’ютерних технологій. Математика в школах України. 2009. №29. С.18.

6. Бойчук В. В. Математика. Курс інтенсивної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. Тернопіль: Мандрівець, 2012. 256 с.

7. Бурмистренко Т. Похідна функції. Геометричний та механічний зміст похідної: 11 клас гуманітарного профілю. Математика. 2010. №2. С. 16-19.

8. Бучко М. Застосування інтеграла до розв’язування вправ. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. Математика. 2009. №46-47. С.18.

9. Гайштут О. Г. Розв’язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. Київ: Рад. шк., 1991. 224 с.

10. Гуревич Р. С. Впровадження комп’ютерних технологій у навчально-виховний процес закладів освіти. Вінниця: ВДПУ, 1999. 30 с.

11. Гуревич Р. С., Кадемія М. Ю. Інформаційно-телекомунікаційні технології в навчальному процесі та наукових дослідженнях: Навч. посіб. для студентів і слухачів післядипломної освіти. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2004. 366 с.

12. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник. Київ: Академвидав, 2004. 352 с.

13. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Видання 2-ге, перероблене та доповнене. Київ: РННЦ «Дініт», 2003. 324 с.

14. Завдання та тести з теми «Первісна та визначений інтеграл» ЗНО та НМТ.URL:https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-pervisna_ta_viznachenij_integral/

15. Золочівська М. В. Роль і місце комп’ютера в навчально-виховному процесі. Київ, 2002. С. 27-30.

16. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 304 с.

17. Конфорович А. Г. Історія розвитку математики: методичні вказівки. Київ: Вища школа, 1980. 91 с

18. Котла С. Похідна. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. Математика. 2008. №35. С. 15.

19. Кугай Н. Психолого-педагогічні засади навчання доведення у процесі вивчення початків аналізу. Математика в школі. 2008. №4. С. 17-21.

20. Кушнір В. Інноваційність освіти як дидактичний принцип. Рідна школа. 2012. №6(990). С. 3-8.

21. Мальцева Н. О., Роєва Т. Г. Готуємось до зовнішнього незалежного оцінювання. Алгебра. Харків: Країна мрій, 2009. 304 с.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. начальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень. Харків: Гімназія, 2013. 431 с.

23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.

24. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 208 с.

25. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу. Харків: Гімназія, 2021.

26. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : 11 клас, профільний рівень. Харків: Гімназія, 2019.

27. Міністерство освіти і науки України. Рекомендації щодо викладання математики у 10-11 класах на 2023-2024 навчальний рік. URL: https://mon.gov.ua/

28. Москаленко О. А. Сучасні підходи до методичної підготовки вчителя математики. У кн.: Нові пед. технології викладання фіз.-мат. дисциплін у серед. навч. закладах нового типу: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. Полтава, 2001. С. 149-150.

29. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Харків, 2001. 262 с.

30. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

31. Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. Освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. — 304 с. : іл.

32. Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначеного інтеграла. URL:https://cubens.com/uk/handbook/algebra-and-introduction-to-mathematical-analysis/use-of-the-integral/

33.Основне про національний мультимедійний тест. URL: https://testportal.gov.ua/osnovne-pro-nmt/

34. Офіційний сайт Mathcad. URL: https://www.mathcad.com/en/

35. Паламар Л. В. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики. Стрий, 2013. 83 с.

36. Пометун О. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Метод. посіб. Київ: А.П.Н. 2012. 136 с.

37. Проєктне навчання: коротко про головне. URL: https://nus.org.ua/view/proektne-navchannya-korotko-pro-golovne/

38. Прохорова О. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи. Математика в школах України. 2005. №31(6-11).

39. Раков С. А. Математична освіта: компетентний підхід з використанням ІКТ: Моногр. Харків: Факт, 2005. С. 36.

40. Рекомендації щодо викладання навчальних предметів/інтегрованих курсів у школах. URL: https://mon.gov.ua/news/opublikovano-metodychni-rekomendatsii-shchodo-vykladannia-navchalnykh-predmetiv-intehrovanykh-kursiv-u-shkolakh?sfnsn=mo

41. Сидоренко Л. Первісна. Інтеграл: матеріали для діагностики навчальних досягнень учнів. Математика. 2010. №41. С. 11-19; Математика. 2010. №42. С. 15-23; Математика. 2010. №43. С. 17-18.

42. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

43. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.

44. Смульсов М. Л. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів: Рекомендовано Міністерством освіти України. Київ, 1997. 264 с.

45. Стасюк В. Використання похідної функції на прикладах розв’язання економічних задач. Математика в школі. 2008. №5. С. 39-41.

46. Столяр А. А. Методика викладання математики в середній школі. Харків, 1992. 304 с.

47. Суворова Н. А. Інтерактивне навчання: нові підходи. М.: Прогрес, 2005. 214 с.

48. Що таке формувальне оцінювання, чому воно потрібне учням і які основні виклики. URL: https://nus.org.ua/view/shho-take-formuvalne-otsinyuvannya-chomu-vono-potribne-uchnyam-i-yaki-osnovni-vyklyky/

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця інтегралів

Функція f(x)	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Додаток Б

Самостійна робота з теми «Інтеграл та його застосування» на період дистанційного навчання

Інтеграл та його застосування

Самостійна робота.

katyxamyhalko@gmail.com Змінити обліковий запис

Ім’я й фото з вашого облікового запису Google буде записано, коли ви завантажите файли та надішлете цю форму. У відповідь не буде включено вашу електронну адресу.

Ваше ПІБ

Ваша відповідь

1. Як називається операція знаходження первісної? 1 бал

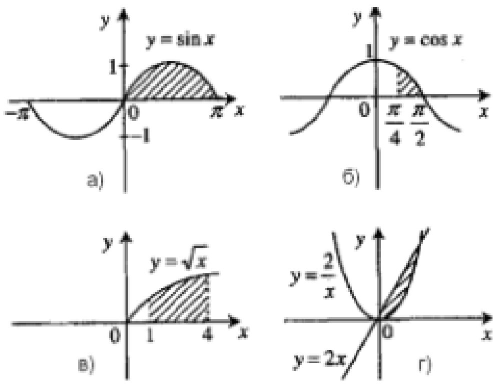
- ○ Інтегрування.
- ○ Потенціювання.
- ○ Інше.
- ○ Інше:

2. Скільки первісних існує для деякої неперервної функції f(x)? 1 бал

- ○ Одна
- ○ Дві
- ○ Безліч
- ○ Жодної

3. Яка з цих фігур не є криволінійною трапецією?

1 бал



- а
- б
- в
- г

4. Обчислити інтеграл:

1 бал

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 dx$$

- 1
- 9
- 7
- 11
- 5

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: y= cosx, x=0, x=π/2

1 бал

- 2
- 0
- 1
- 4

6. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1 бал

$$y=x^2+2,\ y=x+4$$

- 4,5
- 10,5
- 5

7. Обчисліть інтеграл:

1 бал

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$$

- 3
- 3/4
- 4/3
- 4

8. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: (запишіть відповідь самі) — 2 бали

$$y = 4 - 3x - x^2 \text{ , } y = 4 + x$$

Ваша відповідь

9. Обчисліть інтеграл (Відповідь розпшіть на листочку та сфотографуйте — 3 бали

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \, dx$$

Додати файл

Надіслати

Очистити форму

URL посилання на ФОРМУ: https://forms.gle/Lm4HK4KnZQPykebG9

Додаток В

Форма для перевірки ефективності використання програми GeoGebra

Розв'язування задач з використанням інтеграла

Оцінка проведеного дослідження

katyxamyhalko@gmail.com Змінити обліковий запис

Зірочка (*) указує, що запитання обов'язкове

Електронна пошта *

☐ Указати в моїй відповіді електронну адресу katyxamyhalko@gmail.com

Обчисліть визначений інтеграл

1 бал

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x)\,dx$$

○ 6

○ 4

○ 8

○ 10

Знайдіть площу області, обмеженої графіком функції y=x^2 , віссю x, і прямими x=1, x=3: 1 бал

- 26/3
- 22/3
- 16/3
- 30/3

Обчисліть об'єм тіла обертання, яке утворюється обертанням графіка функції y=4−x^2 навколо осі x на відрізку [0;2] 1 бал

- 16π
- 8π
- 12π
- 20π

Визначте значення наступного визначеного інтеграла: 1 бал

$$\int_1^3 (2x - 1)\,dx$$

- 5
- 6
- 8
- 10

Виберіть правильне твердження про інтеграл: 1 бал

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Інтеграл завжди додатній.
- Інтеграл обчислює площу під графіком функції f(x).
- Якщоf(x)<0 на [a;b], то інтеграл буде від'ємним.
- Інтеграл – це просто число, яке не залежить від функції.

Визначте точку перетину графіків функцій f(x)=x^2 і g(x)=2x+3: 1 бал

- x=−1, x=3
- x=1, x=2
- x=-1,x=1
- x=0,x=2

Яка з функцій має більший інтеграл на відрізку [0;2]: 1 бал

f(x)=x^2 або g(x)=2x?

- f(x)
- g(x)
- Вони рівні
- Порівняти неможливо

Надіслати Очистити форму

URL посилання на ФОРМУ:
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSekKP1YxGKqFs13C-BIntGOk4UtNbIGX7TgHQ1drDBNNdkB_w/viewform?usp=sf_link

Додаток Г

Конспект уроку

Тема уроку: Інтеграл та його застосування.

Мета уроку: удосконалюючи, систематизувати й узагальнити знання, вміння та навички учнів використовувати інтеграл для обчислення визначених інтегралів, площ; показати можливість застосування інтеграла в різних галузях фізики, геометрії; розвивати мислення, формування, вміння робити висновки; виховувати потребу залучати власний досвід для розв’язування завдань, самостійність.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань.

Обладнання: ноутбук, роздавальний матеріал.

Хід уроку

I Організаційна частина

II Перевірка домашнього завдання

III Мотивація навчальної діяльності, повідомлення теми й мети уроку

Евдокс Кнідський (бл. 408-355 рр. до н.е.) стародавній учений. Довів теорему про об’єм піраміди. Для доведення застосував метод «вичерпування», який через дві тисячі років був перетворений на метод інтегрування, за допомогою якого вдалося обчислити площі, об’єми, масу, роботу, тиск, електричний заряд тощо. Пізніше метод «вичерпування» застосував Архімед.

Термін «інтеграл» (від лат. Integer – цілий) був запропонований 1696 року Йоганном Бернуллі. Великий внесок у розвиток цього поняття зробили Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц. Інтеграли використовують для розв’язування багатьох задач, і не тільки з математики.

Тема сьогоднішнього уроку «Інтеграл та його застосування». Мета уроку «удосконалюючи,систематизувати й узагальнити знання, вміння та навички учнів використовувати інтеграл для обчислення визначених інтегралів, площ; показати можливість застосування інтеграла в різних галузях фізики, геометрії».

IV Актуалізація опорних знань

Розминка: «Несправний диктофон». Учитель пропонує закінчити речення,

щоб сформульовані твердження були вірними:

«Криволінійною трапецією називається…»

«Дія, обернена до диференціювання …»

«Первісні для однієї і тієї ж функції відрізняються тільки…»

«Визначений інтеграл відрізняється від невизначеного тим, що…»

«Функція записана під знаком інтеграла, закінчується знаками…»

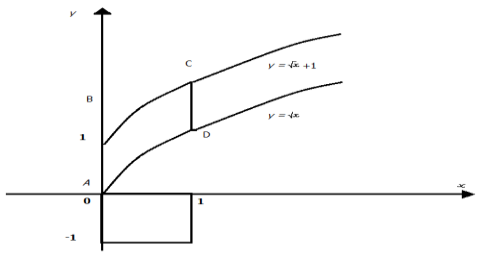
«Геометричним змістом визначеного інтеграла є…»

«Фізичним змістом визначеного інтеграла є…»

«Шлях, пройдений тілом за проміжок часу, виражається через інтеграл так: S=…)

Це цікаво знати

А чи вірите ви, що площа «криволінійного чотирикутника» АВСД дорівнює площі одиничного квадрата, тобто 1. Ви дізнаєтесь відповідь, обчисливши площу «криволінійного чотирикутника» АВСД за допомогою формули Ньютона – Лейбніца.



Розв'язування простої, але не зовсім стандартної задачі може вимагати деякого напруження, натомість дає відчути тріумф відкриття.(Дьордь Пойа(1887-1985) – угорський, швейцарський і американський математик.)

Закінчуючи 11 клас, кожен з вас замислюється над вибором професії. Неабияку роль у цьому грає реклама. А чи знаєте ви, які професії пов'язані з рекламою?

(Роздаю учням пам’ятки про професії, пов’язані з рекламою, і пропоную учням завдання творчого характеру «Зроби рекламу теми «Інтеграл»».)

V Застосування теоретичного матеріалу до розв’язування задач

Зараз виконуємо завдання (працюємо в парах).

1.Гра «Чи правильно, що ...?

Якщо учні погоджуються із твердженням, ставлять знак «+», якщо ні – знак «-».

1)$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$?

2) Визначений інтеграл – це площа криволінійної трапеції?

3) $\int_0^2 \frac{x}{2}dx = 1$?

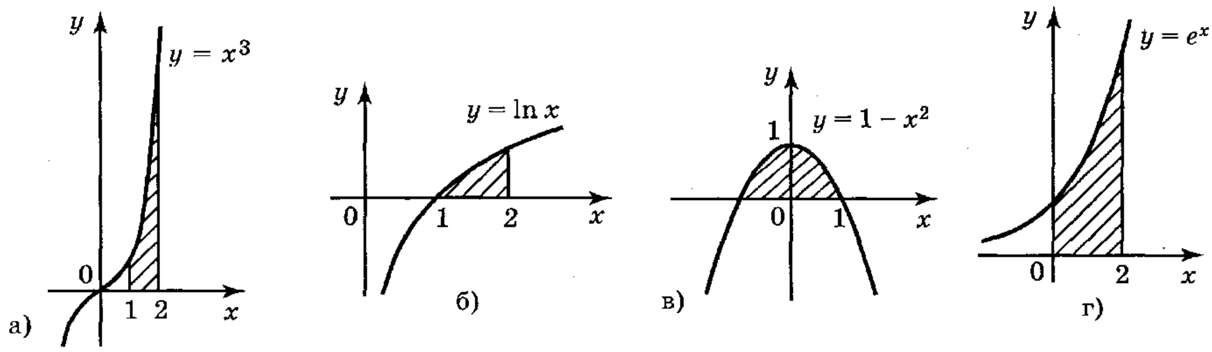
4)$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosxdx = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

5)$\int_2^2 x^3dx = 1$?

6)$\int_a^b dx = b - a$?

(Відповіді:1)ні, 2)ні, 3)так,4)так,5) ні, 6)так.)

2. Запишіть за допомогою інтеграла площі фігур, зображених на рисунку



Відповіді: а) $\int_1^2 x^2dx$; б) $\int_1^2 \ln xdx$; в) $\int_{-1}^1 (1-x^2)dx$; г) $\int_0^2 e^x dx$

3.Обчисліть об’єм тіла утворене обертанням навколо осі х фігури, обмеженої заданими лініями $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$.

543. $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$. $-x^2 + 2x = 0$, $x = 0$ і $x = 2$ — межі інтегрування.

$$V = \pi\int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi\int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2^5}{5} - 2^4 + \frac{4(+2)^3}{3}\right) = \pi \cdot \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \pi \cdot \left(17\frac{1}{15} - 16\right) =$$

$$= \pi \cdot 1\frac{1}{15} = \frac{16\pi}{15} \text{ (куб. од.)}.$$

Відповідь: $\frac{16\pi}{15}$ куб. од.

4. Тіло рухається зі швидкістю $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1=0 до t_2= 2.

547. $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

$$S(t) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (3t^2 - 2t + 3)dt = \left(3 \cdot \frac{t^3}{3} - 2 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= (t^3 - t^2 + 3t)\Big|_0^2 = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 = 8 - 4 + 6 = 10 \text{ (м)}.$$ *Відповідь:* 10 м.

5. Для стиснення пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?

553. $f(x) = kx$, $k = 0{,}098$, $l = 4$ см.

$$A = \frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}098 \cdot 4^2 = 0{,}784 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: 0,784 Дж.

6. сила струму в провіднику з часом змінюється за законом I(t) = 4+2t. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди ?

557. $$q(t) = \int_2^6 I(t)dt = \int_2^6 (4 + 2t)dt = (4t + t^2)\Big|_2^6 = 4 \cdot 6 + 6^2 - 4 \cdot 2 - 2^2 =$$

$$= 24 + 36 - 8 - 4 = 48 \text{ (Кл)}.$$

Відповідь: 48 Кл.

Додаткове завдання

549. $x^2 = \sqrt{x}$, $x = \pm 1$ — абсциси точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$. Отже, сторона квадрата дорівнює 2. $S_{кв.} = 2^2 = 4$ (кв. од.).
Знайдемо площу однієї пелюстки:

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}$$

$$S = S_{кв} - 4S_1 = 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $2\frac{2}{3}$ кв. од.

7. Знайдіть, при якому значенні *a* площа фігури, обмеженої параболою

$y = 6x^2$ і прямими $y = 0$, $x = a - 2$, $x = a$, набуватиме найменшого значення.

Відповідь:a = 1.

VI Підсумок уроку

Щоб кожен міг з_упевненістю сказати, що він досяг успіху, необхідно самостійно попрацювати. Адже китайська мудрість наголошує « … Покажи мені – і я запам'ятаю. Дай мені діяти самому – і я навчуся …».

Усе людське життя - це не що інше, як постійне визначення мети та бажання досягти успіху під час розв'язування нових задач та проблем. Вчіть свій розум та душу бачити добро, і тоді дорога до успіху буде для вас відкрита.

VII Домашнє завдання