Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Виконала: студентка II курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Кулакевич Людмила Миколаївна

Керівник: *кандидат технічних наук, доц.*
Присяжнюк І. М.

Рецензент *професор кафедри автоматизації електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій НУВГП Сафоник А. П*

Рівне – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дистанційне навчання стало невід'ємною частиною української освіти. Його суть полягає у віддаленому форматі отримання знань із використанням передових технологій (комп'ютерних програм, інтернету, електронної пошти, телеконференцій тощо) [41].

Сучасний рівень розвитку інформаційних та комунікаційних технологій виводить дистанційне навчання на зовсім інший якісний рівень розвитку, що дозволяє забезпечувати ефект безпосереднього спілкування між викладачем та учнем, що завжди є перевагою та відмінною рисою очного навчання. Новий етап розвитку дистанційної освіти пов'язаний із створенням такої форми, яка інтегрує у собі раніше існуючі системи очного та заочного навчання. Значною мірою саме нові технологічні та освітні можливості ініціювали бурхливий розвиток системи дистанційної освіти в останні десятиліття [41].

Важливу роль розробці методології дистанційного навчання зіграли роботи А. А. Андрєєва, А. А. Ахаян, А. М. Бершадського, Д. А. Богданової, А. Д. Іваннікова, В. П. Кашиціна, І. Г. Кревського, М. В. Моїсеєвої, Є. С. Полат, О. М. Тихонова, А. Ю. Уварова, присвячені питанням визначення сутності дистанційного навчання та способів його реалізації.

Специфіка використання дистанційного навчання різних вікових етапах освіти відбито у роботах Т. Р. Берлін, В. Т. Волова, В. А. Гневко, О. І. Єршової, В. А. Кайміна, А. М. Романова та ін.

Велике значення вивченню цілей та змісту дистанційного навчання у системі професійної освіти приділяється у працях С. В. Богданова, Ю. А. Володимирова, М. В. Воронова, В. А. Гневко, Є. І. Дмитрієвої, Н. В. Мараховський, С. М. Медведєвої, В. Д. Ногіна, В. П. Тихомирова, М. В. Храмової та ін.

Проте більшість досліджень велася у бік викладання чи гуманітарних, чи спеціальних технічних дисциплін. Значно менше було вивчено питання використання дистанційного навчання у викладанні математичних дисциплін у вищих навчальних закладах, зокрема диференціального числення.

Диференціальне числення – розділ математики, в якому вивчаються похідні та диференціали функцій та їх застосування до дослідження функцій. Основним поняттям диференціального обчислення є поняття похідної, яке визначає швидкість зміни величин, що нерівномірно змінюються [13].

Введення змінних в математику (Р. Дедекінд, Р. Декарт) було головною рушійною силою виникнення диференціального числення. Взагалі числення і побудова числення були розроблені в І. Ньютона і Г. Лейбніц наприкінці XVII ст., однак проблема аргументації з використанням поняття границь була поставлена О. Коші. Лише на початку 19 ст. створити диференціальне і інтегральне числення, що стало початком інтенсивного розвитку математики та суміжних прикладних наук [13].

Проте традиційна методика навчання математики у вузі не забезпечує формування у студентів здібностей до безперервного самонавчання та самоосвіти, здібностей працювати творчо. Сама навчальна діяльність із засвоєння основ наук носить ще односторонній характер: у ній переважає засвоєння та запам'ятовування готових знань і недостатнє місце займає самостійна творча робота – студентів мало вчать самим добувати знання, аналізувати їх, застосовувати в різних ситуаціях [39].

Таким чином, стає очевидним, що в сучасній практиці ВНЗ існує протиріччя між необхідністю науково обґрунтованої організації самостійної роботи студентів при дистанційному навчанні та недостатньою розробленістю педагогічних умов її реалізації при вивченні математичних дисциплін.

Таким чином тема ***«Особливості викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання»*** є актуальною і потребує детального дослідження.

Метою даної магістерської роботи є аналіз, узагальнення і систематизація особливостей викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання.

З цією метою були поставлені такі **завдання** дослідження:

- дослідити навчальну літературу за темою дослідження;

- дати визначення поняття диференціального числення однієї змінної;
- визначити застосування диференціального числення до дослідження функцій та побудови графіків;
- охарактеризувати особливості викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання.

Об’єкт дослідження є процес викладання диференціального числення функції однієї змінної.

Предметом дослідження є система задач, яка спрямована на формування вміння розв’язувати задачі диференціального числення однієї змінної.

Методи досліджень: загально-наукові методи (синтезу, аналізу, дедукції), методи математичного дослідження (моделювання, вимірювання) та аналітичний.

Практична значення. Матеріал викладений у магістерський роботі може бути використаний викладачами ВНЗ, вчителями математики ЗЗСО, а також студентами та учнями в процесі самопідготовки та самонавчання. Створений практичний курс можна також застосувати при розроблені олімпіад, турнірів та інших конкурсів з математики.

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження доповідались та обговорювались на Міжнародній науково-практичній конференції «Стан та тенденції розвитку науки, освіти та суспільства» (15.02.2022р., м. Полтава).

Публікації. Опубліковано тези доповідей «Використання онлайн-дощок при вивченні математичного аналізу в період дистанційного навчання» у збірнику матеріалів Міжнародної науково-практичної конференції «Стан та тенденції розвитку науки, освіти та суспільства» (15.02.2022р., м. Полтава) та «Використання дошки Padlet при вивченні математичних дисциплін в умовах onlineнавчання» у збірнику матеріалів XV Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (17.05.2022р, м. Рівне).

РОЗДІЛ 1.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення функції однієї змінної вивчає одне з основних математичних понять, а саме, поняття похідної та диференціала, їх застосування, включаючи дослідження функцій.

1.1. Похідна та диференціал функції

Поняття похідної широко використовуються при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, насамперед щодо вивчення швидкості протікання різноманітних процесів.

1.1.1. Визначення похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Надамо аргументу x приріст Δx. Тоді функція $y = f(x)$ буде мати приріст $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, який характеризує змінну функції $f(x)$ на відрізку $[x, x + \Delta x]$. Середня швидкість зміни функції на цьому відрізку дорівнює $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, а швидкість зміни функції $f(x)$ в точці x буде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Ця границя, якщо вона існує, називається похідною $f'(x)$ функції $f(x)$ в точці x [15]. Тоді, за визначенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Окрім даного позначення похідної функції $y = f(x)$, існують інші, наприклад: $y'(x), y'_x$.

Приклад 1.1. Довести, що $(sinx)' = cosx$.

Доведення

Скористаємось визначенням похідної і першою визначною границею $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

$$(sinx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x + \Delta x) - sin(x)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = 1 \cdot cosx = cosx.$$

Отже, $(sinx)' = cosx$.

Приклад 1.2. Довести, що $(lnx)' = \frac{1}{x}$, $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$.

Доведення.

Скористаємось визначенням похідної:

$$(lnx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x + \Delta x) - ln(x)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ і фіксованому x функція $ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ еквівалентна функції $\frac{\Delta x}{x}$, тоді

$$(lnx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Так як $log_a x = \frac{lnx}{lna}$, то

$$(log_a x)' = \left(\frac{lnx}{lna}\right)' = \frac{1}{lna} \cdot (lnx)' = \frac{1}{lna} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xlna}.$$

1.1.2. Геометричний і фізичний зміст похідної

Розглянемо на кривій $y = f(x)$ точки M_0, M і січну M_0M (рис. 1.1). При переміщені точки M по цій кривій до точки M_0, січна M_0M займе своє граничне положення [27].

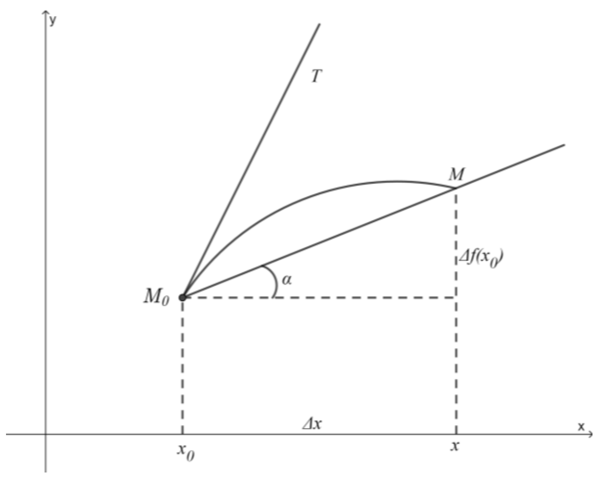


Рис. 1.1. Крива $y = f(x)$ точки M_0, M і січна M_0M

Граничне положення M_0T січної M_0M при переміщені точки M по кривій до точки M_0, називається дотичною до даної кривої в точці M_0 [27].

Знайдемо кутовий коефіцієнт $k_{\text{січ.}}$ невертикальної січної і кутовий коефіцієнт $k_{\text{дот.}}$ невертикальної дотичної:

$$k_{\text{січ.}} = tg\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

$$k_{\text{дот.}} = \lim_{M \to M_0} k_{\text{січ.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Із цієї нерівності випливає геометричний зміст похідної.

Значення похідної $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці M_0 з абсцисою x_0: $f'(x_0) = k_{\text{дот.}}$ [27].

Якщо кут нахилу січної наближається до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 1.2) то дотична – вертикальна.

При цьому $k_{\text{січ.}} \to \infty$ при $M \to M_0$, $k_{\text{дот.}} = \lim_{M \to M_0} k_{\text{січ.}} = \infty$. Тоді, $f'(x_0) = \infty$.

Крива $y = f(x)$ може не мати дотичної (рис. 1.3) за означенням, яке наведене вище, але має правосторонню дотичну l_1 з кутовим коефіцієнтом $k_1 = f'(x_0 + 0)$ і лівосторонню дотичну l_2 з кутовим коефіцієнтом $k_2 = f'(x_0 - 0)$, при цьому $k_1 \neq k_2$. Тоді $f'(x_0)$ не існує [27].

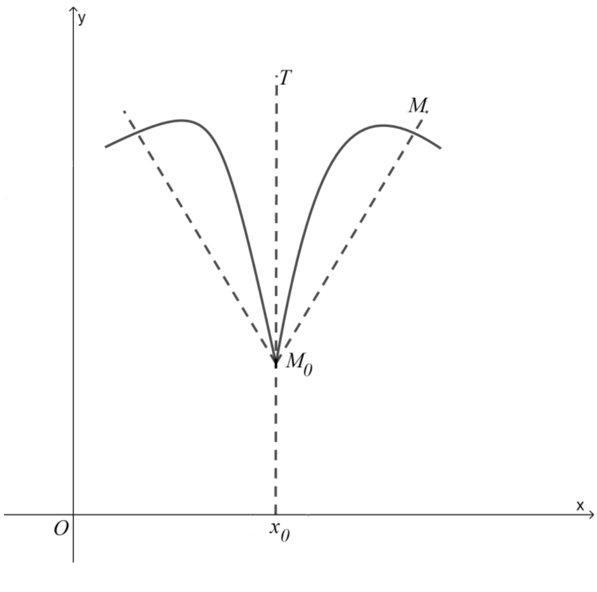


Рис. 1.2. Крива $y = f(x)$, кут нахилу січної наближається до $\frac{\pi}{2}$

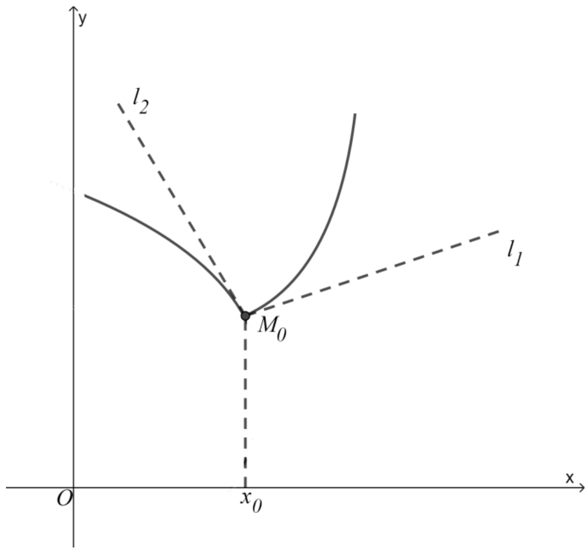


Рис. 1.3. Крива $y = f(x)$

Пряма, яка проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, називаються нормаллю до цієї кривої [29].

Кутовий коефіцієнт нормалі: $k_{\text{норм.}} = \frac{-1}{k_{\text{дот.}}}$.

Рівняння прямої, якщо відомий її кутовий коефіцієнт і точка $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Для запису рівняння дотичної або нормалі до кривої $y = f(x)$ потрібно замінити $y_0 = f(x_0)$ і $k = k_{\text{дот.}}$ або $k = k_{\text{норм.}}$ відповідно.

Фізичний зміст похідної полягає в тому, що значення похідної $f'(x)$ це швидкість зміни функції $f(x)$ в точці x [29]. Тому

1) якщо заданий закон руху матеріальної точки по прямій $S = S(t)$, то швидкість руху $v = S'(t)$, а прискорення a це «швидкість зміни швидкості», тобто $a = v'(t)$;

2) якщо $Q = Q(t)$ це кількість електроенергії, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t, то $Q'(t) = I$ це сила току;

3) якщо $N = N(t)$ це кількість речовини, що ступах в хімічну реакцію за час t, то $N'(t)$ це швидкість хімічної реакції.

1.1.3. Диференційовані функції. Диференціал

Означення. Функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x, якщо вона має похідну в цій точці. [3]

Процес знаходження прохідної називається диференціюванням функції.

Нехай функція диференційована, тобто має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Тоді за теоремою про зв'язок функції з її кінцевою границею ($\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow f(x) = b + a(x)$, де $a(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$) маємо:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + a(\Delta x),$$

де $a(\Delta x)$ це функція нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тому приріст диференційованої функції подамо у вигляді:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + a(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Вираз $f'(x) \cdot \Delta x$ називають диференціалом функції і позначають $df(x)$:

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

1. Диференціал функції лінійний відносно Δx і має при $\Delta x \to 0$ такий же прядок малості, як і Δx.

2. Другий доданок у рівності $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + a(\Delta x) \cdot \Delta x$ є при $\Delta x \to 0$ нескінченно малою $o(\Delta x)$ вищого порядку, порівняно з Δx.

3. Приріст диференційованої функції $f(x)$ подамо у вигляді

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x) = df(x) + o(\Delta x).$$

4. Так як $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$, то для функції, яка дорівнює x, маємо $d(x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто $\Delta x = dx$. Тому

$$df(x) = f'(x)dx, f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

1.1.4. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю

Теорема. Якщо функція диференційована, то вона неперервна.

Дійсно, для диференційованої функції $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Звідси слідує, що нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x)$, а це означає, що функція $f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Неперервна функція може бути не диференційованою.

Прикладом такої функції є функція $f(x) = |x|$. Ця функція неперервна при $x = 0$, так як $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0)$. Але функція не диференційована при $x = 0$, так як

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, \Delta x > 0, \\ -1, \Delta x < 0, \end{cases}$$

а це означає що, $f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не існує; функція $f(x)$ не диференційована при $x = 0$. Зауважимо також, що існують односторонні границі $f'(+0) = 1, f'(-0) = -1$. З геометричної точки зору це означає, що в точці (0; 0) існують, але не співпадають правостороння дотична з кутовим коефіцієнтом $k = 1$ і лівостороння дотична з кутовим коефіцієнтом $k = -1$ (рис. 1.4) [13].

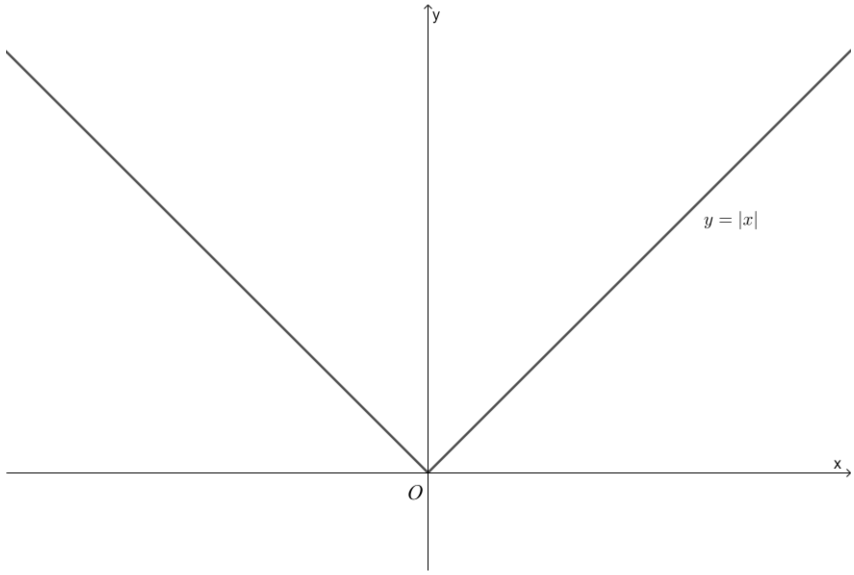


Рис. 1.4. Функція $f(x) = |x|$

1.1.5. Похідна суми, різниці, добутку і частки

Знаходження похідної безпосередньо за означенням не зручно і важко, тому для цього існує сукупність правил та формул.

Теорема. Нехай функції $u = u(x), v = v(x)$ – диференційовані. Тоді сума, різниця, добуток цих функцій, а при $v(x) \neq 0$ і частка диференційовані, причому

$(u \pm v)' = u' \pm v', (uv)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ [11].

Виведемо одну з цих формул, наприклад, другу.

Так як $\Delta u(x) = u(x+\Delta x) - u(x),$ то $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u(x)$.

Аналогічно, $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v(x)$.

Знайдемо приріст функції $f(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= [u(x) + \Delta u(x)] \cdot [v(x) + \Delta v(x)] - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= u(x) \cdot \Delta v(x) + v(x) \cdot \Delta u(x) + \Delta u(x) \cdot \Delta v(x).$$

Тоді

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \Delta u(x) \cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}.$$

Функція $u(x)$ диференційована, а це означає, що вона і неперервна. Тому $\Delta u(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Коли ми перейдемо в останньому рівнянні до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо:

$$(u(x)v(x))' = f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) + 0 \cdot v'(x)$$

або

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Наслідок 1. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}, (ctgx)' = \frac{-1}{sin^2x}$.

Дійсно, за формулою для обчислення похідної частки, маємо:

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)'}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Аналогічно виводиться формула для похідної $ctgx$:

$$(ctgx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx - cosx(sinx)'}{sin^2x} = \frac{-(sin^2x + cos^2x)}{sin^2x} = \frac{-1}{sin^2x}.$$

Наслідок 2. Диференціали суми, добутку і частки диференційованих функцій $u = u(x), v = v(x)$ знаходяться за формулами:

$$d(u+v) = du + dv, d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \ (v \neq 0).$$

Доведемо, наприклад, другу формулу. Скористаємось означенням диференціала та похідної функції:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

1.1.6. Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u), u = \varphi(x)$. Тоді $y = f(\varphi(x))$ – складена функція з проміжним аргументом u, незалежним аргументом x.

Теорема. Нехай функції $y = f(u), u = \varphi(x)$ диференційовані. Тоді складена функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована і для її похідної справджується рівність:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Доведення. Для диференційованої функції $y = f(u)$ маємо:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \Delta u \cdot a(\Delta u),$$

де $a(\Delta u)$ – нескінченно мала функція при $\Delta u \to 0$.

Поділимо дану рівність на Δx, отримаємо: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot a(\Delta u)$.

В отриманій рівності перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} a(\Delta u).$$

Функція $u = \varphi(x)$ диференційована, а це означає, що вона неперервна. Тому її приріст $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді $a(\Delta u) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ остання рівність буде мати вигляд:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x + u'_x \cdot 0 = y'_u \cdot u'_x.$$

Тобто, для знаходження похідної складної функції потрібно похідну функції по проміжному аргументу помножити на похідну проміжного аргументу по незалежному аргументу [26].

Це правило діє, якщо проміжних аргументів декілька.

Приклад 1.3. Знайти похідну функції $y = ln^3 sinx$.

Розв’язання

Дану складену функцію можна подати у вигляді $y = u^3$, де $u = lnv$, $v = sinx$. Тому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot cosx = 3ln^2 sinx \cdot \frac{1}{sinx} \cdot cosx = 3ctgx \cdot ln^2 sinx.$$

1.1.7. Логарифмічне диференціювання

В деяких випадках для знаходження похідної функції зручно рівність спочатку прологарифмувати а потім продиференціювати. Такий прийом називають логарифмічним диференціюванням. Його корисно застосовувати для диференціювання функцій з багатьох множників, або для диференціювання частки, чисельник і знаменник якої містить кілька множників, або для диференціювання степенево-показникових функцій $u(x)^{v(x)}$. При цьому потрібно враховувати, що функція lny – складена, так як $y = y(x)$ і тому $(lny)'_x = (lny)'_y \cdot y'_x = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ [14].

Приклад 1.4. Довести, що $(a^x)' = a^x \cdot lna, (e^x)' = e^x$.

Доведення

Прологарифмуємо рівність $y = a^x$: $lny = xlna$; тоді продиференціюємо рівність по x: $\frac{1}{y} \cdot y'_x = lna$ і виразимо y'_x: $y'_x = y \cdot lna = a^x \cdot lna$.

При $a = e$ отримаємо $(e^x)' = e^x$.

Приклад 1.5. Довести, що $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$.

Доведення

Прологарифмуємо рівність $y = x^a$: $lny = a \cdot lnx$; тоді продиференціюємо рівність по x: $\frac{1}{y} \cdot y'_x = a \cdot \frac{1}{x}$ і виразимо y'_x: $y'_x = \frac{a}{x} \cdot y = \frac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}$.

Приклад 1.6. Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{sinx}}{(x+1)^4}$.

Розв’язання

Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$lny = ln\frac{(x-5)^{\frac{2}{3}} \cdot e^{sinx}}{(x+1)^4} = ln(x-5)^{\frac{2}{3}} + lne^{sinx} - ln(x+1)^4,$$

$$lny = \frac{2}{3}\ln(x-5) + sinx - 4\,ln(x+1).$$

Продиференціюємо останню рівність по x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-5} + cosx - 4 \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Виразимо y':

$$y' = y\left(\frac{2}{3(x-5)} + cosx - \frac{4}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{sinx}}{(x+1)^4} \cdot \left(\frac{2}{3(x-5)} + cosx - \frac{4}{x+1}\right).$$

Приклад 1.7. Знайти похідну функції $y = x^{tgx}$.

Розв'язання

Прологарифмуємо вихідне рівняння: $lny = ln(x^{tgx})$ або $lny = tgx \cdot lnx$.

Тепер продиференціюємо по x, використовуючи формулу для похідної складеної функції (в лівій частині) і формулу для похідної функції (в правій частині):

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (tgx)' \cdot lnx + tgx \cdot (lnx)' = \frac{1}{cos^2x} \cdot lnx + tgx \cdot \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{cos^2x} \cdot lnx + tgx \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{tgx} \cdot \left(\frac{1}{cos^2x} \cdot lnx + tgx \cdot \frac{1}{x}\right).$$

1.1.8. Похідна оберненої функції

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ монотонна і диференційована на інтервалі (a, b) причому $y'(x) \neq 0$. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ диференційована і її похідна знаходиться за формулою $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ [9].

Наслідок. Похідні обернених тригонометричних функцій знаходяться за формулами:

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(arctg)' = \frac{1}{1+x^2}, (arcctg)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Виведемо першу з цих формул. Розглянемо функцію $x = siny, y \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ця функція монотонна, диференційована і $x'_y = cosx \neq 0$ на проміжку що розглядається. Тому обернена функція $y = arcsinx$ – диференційована, при чому

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Під коренем взятий додатній знак, так як $cosy > 0$ при $y \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Крім цього,

$$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}.$$

Тому

$$(arccosx)' = -(arcsinx)', (arcctg)' = -(arctg)'.$$

1.1.9. Диференціювання неявно заданої функції

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x; y) = 0$, не розв'язаного відносно y.

Будь-яку задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявну задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки.

Правило. Якщо неявна функція задана рівнянням $F(x; y) = 0$, то для знаходження похідної від y по x немає необхідності розв'язувати рівняння відносно y; достатньо продиференціювати це рівняння по x, розглядаючи y як функцію від x і отримане рівняння розв'язати відносно y [2].

Похідна неявної функції виражається через аргумент x і функцію y.

Приклад 1.8. Знайти похідну функції y, яка задана рівнянням $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв'язання

Функція y задана неявно. Диференціюємо по x рівняння $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Із отриманого співвідношення $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$ слідкує, що $y^2 \cdot y' - xy' = y - x^2$, тобто

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Приклад 1.9. Нехай функція $y = f(x)$ подана у вигляді рівняння $xy^3 - yx^3 + 4x^2 = 1 - xy + y^3$.

Розв'язання

Продиференціюємо обидві частини цього рівняння по змінній x:

$$y^3 + 3xy^2y' - y'x^3 - 3x^2y + 8x = -y - xy' + 3y^2y'.$$

Тепер, згрупуємо в одній частині доданки, які мають а в інші частині – доданки що залишились

$$y'(3xy^2 - y^3 + x - 3y^2) = (-y - y^3 + 3y^2y - 8x).$$

Тоді

$$y' = \frac{-(y + y^3 - 3y^2y + 8x)}{3xy^2 - y^3 + x - 3y^2}.$$

1.1.10. Застосування диференціалів у наближених обчисленнях

Приріст функції відрізняється від диференціала на нескінченно малу величини:

$$\Delta y = dy + a(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Тому при достатньо малих Δx:

$$\Delta y \approx dy.$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ця формула може використовуватися для наближених обчислень [16].

Приклад 1.10. Наближено обчислити $\sqrt[4]{16{,}64}$.

Розв’язання

Отримаємо спочатку наближену формулу для знаходження коренів n–го степеня:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n \cdot x},$$

$$f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{n \cdot x} \cdot \Delta x = \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{n \cdot x}\right).$$

У нашому прикладі:

$$\sqrt[4]{x+\Delta x}=\sqrt[4]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{4\cdot x}\right).$$

Замість x візьмемо число, близьке до 16,64, але так, щоб був відомий корінь 4 степеня із цього числа, при цьому Δx повинне бути малим:

$$x=16, \Delta x=0{,}64.$$

Тоді

$$\sqrt[4]{16{,}64}\approx\sqrt[4]{16}\left(1+\frac{0{,}64}{4\cdot 16}\right)=2{,}02.$$

1.1.11. Похідні вищих порядків

Нехай $y=f(x)$ – диференційована функція. Похідна $y'=f'(x)$ також є функцією від x. Її похідна $\left(y'(x)\right)'$ називається похідною другого порядку і позначається $y''(x)$, або $f''(x)$, або $\frac{d^2f}{dx^2}$. Аналогічно $\left(y''(x)\right)'=y'''(x)$, $(y'''(x))'=y^{(4)}(x), \ldots$ Похідною n-го порядку функції називається похідна від похідної $(n-1)$–го порядку:

$$y^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}(x))' \text{ [2]}.$$

Приклад 1.11. Знайти формулу для похідної n–го порядку функції $y=a^x$.

Розв’язання

$$y'=a^x lna, y''=(a^x)'lna=a^x ln^2a, \ldots, y^{(n)}=a^x ln^n a.$$

1.1.12. Функції, задані параметрично, та їх похідні

Нехай залежність між аргументом x і функцією y задана за допомогою рівняння

$$x=x(t), y=y(t),$$

де t – допоміжна змінна, яка називається параметром. Припустимо, що функція $x=x(t)$ має обернену функцію $t=t(x)$. Тоді дані рівності визначають складену функцію $y=y(t(x))$, яка задана параметричними рівняннями.

Теорема. Нехай функція $y=y(x)$ задана параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, де $x(t), y(t)$ – диференційовані функції, причому $x\quad(t)\neq 0$ і функція $x(t)$ має обернену Тоді функція $y = y(x)$ диференційована, а її похідна знаходиться за формулою: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ [2].

Якщо функції $x(t), y(t)$ двічі диференційовані, то існує похідна другого порядку y''_{xx}, причому $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Доведення. За правилами диференціювання складеної функції та оберненої функції

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аналогічно

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Приклад 1.12. Знайти y'_x, y''_{xx} для функції $y(x)$, яка задана параметричними рівняннями $x = cos^3 t, y = sin^3 t$.

Розв’язання

Використаємо отримані формули:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3sin^3 t \cdot cot}{3cos^2 t \cdot (-sint)} = -tgt,$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-tgt)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{cos^2 t}}{3cos^2 t \cdot (-sint)} = \frac{1}{3cos^4 t \cdot sint}.$$

1.1.13. Диференціали вищих порядків

Нехай $y = y(x)$ – диференційована функція незалежного аргументу x. Тоді диференціал функції

$$dy(x) = y'(x)dx,$$

причому $dx = \Delta x$ не залежить від x. Диференціал $dy(x)$ при фіксованому dx є функцією від x. Тому можна розглядати диференціал від цієї функції $d\big(dy(x)\big)$, який називається диференціалом другого порядку функції $y(x)$ і позначається $d^2 y(x)$. Аналогічно визначається диференціал третього і більш вищих порядків [1].

Диференціали вищих порядків визначаються при фіксованому dx наступним чином:

$$d^2y = d(dy), d^3y = d(d^2y), \dots, d^{(n)}y = d\big(d^{(n-1)}y\big).$$

Виведемо формули для знаходження диференціалів вищих порядків: $d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = (y''dx)dx = y''(dx)^2$, тобто

$$d^2y = y''(dx)^2.$$

Аналогічно знаходиться диференціал будь-якого n–го порядку:

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Представлені вище формули справедливі тільки, якщо x – незалежно змінна. Тепер розглянемо випадок, коли $y = f(x)$ і $x = x(t)$ – залежна змінна. Тоді функція $y = f(x(t))$ – складена функція аргументу t і для її диференціала отримаємо:

$$dy = y'_t dt = (y'_x \cdot y'_t)dt = y'_x(x'_t dt) = y'_x dx.$$

Форма диференціала першого порядку $dy = y'_x dx$ має один і то же вигляд (тобто інваріантна) у випадку, коли x – залежна змінна, і у випадку, коли x – незалежна змінна.

1.2. Теореми про середнє

1.2.1. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Розглянемо декілька теорем, які мають велике теоретичні і практичне значення. При їх формулюванні згадується таке поняття як «середня» точка, тому їх називають теоремами про середнє. Інколи ці теореми ще називають основними теоремами диференціального числення.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційована на інтервалі (a, b);

3) на кінцях відрізка приймає рівні значення $f(a) = f(b)$.

Тоді знайдеться хоча б одна така точка $c \in (a, b)$, в якої похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль, тобто $f'(c) = 0$ [2].

Доведення. За властивістю функцій, неперервних на відрізку, функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ приймає найбільше значення M і найменше значення m.

Можливі два випадки. а) Якщо $M = m$, то функція $f(x)$ незмінна на $[a, b]$, а це означає, що її похідна $f'(x) = 0$ в будь-якій точці відрізка $[a, b]$.

б) Якщо $M \neq m$, а за умовою $f(a) = f(b)$, то функція $f(x)$ хоча б одне із значень M або m приймає всередині відрізка $[a, b]$ в точці $c \in (a, b)$. Нехай, наприклад, $f(c) = m$. Тоді $f(c) \leq f(c + \Delta x)$ для будь-яких достатньо малих Δx. Тому $\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geq 0$, а це означає, що

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 \text{ при } \Delta x > 0, \quad \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

Так як функція $f(x)$ диференційована в точці c, то існує похідна $f'(c)$, причому $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0$. З іншої сторони $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0$.

Звідси слідує, що $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо виконані умови теореми, що на графіку функції $y = f(x)$ знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка функції паралельна осі OX. На рисунку 5 таких точок дві: це точки C_1 і C_2.

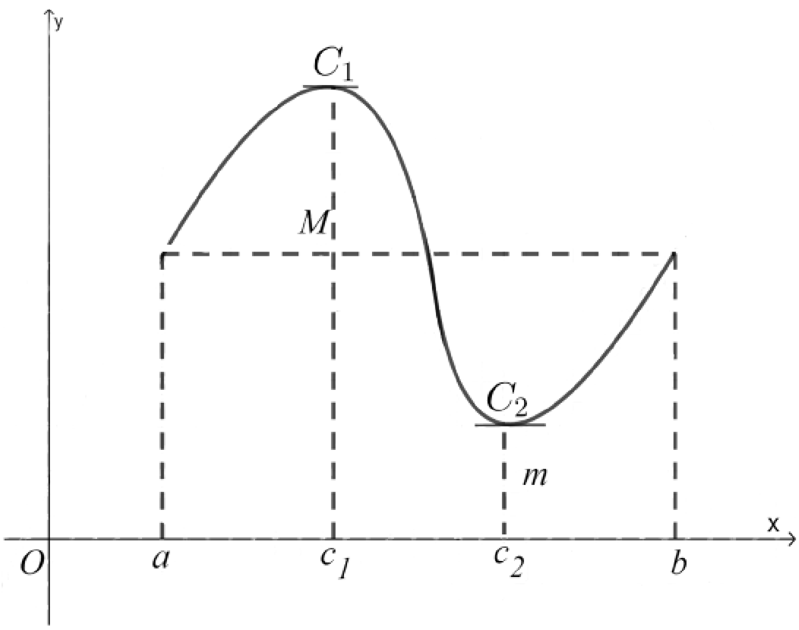


Рис. 1.5. Графік функції $y = f(x)$

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля і $f(a) = f(b) = 0$, то знайдеться хоча б одна така точка $c \in (a, b)$, в якої $f'(c) = 0$. Іншими словами, між двома нулями функції знайдеться хоча б один нуль похідної.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційована на інтервалі (a, b).

Тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a, b)$, така, що

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ або } f(b) - f(a) = f'(c)(b - c).$$

Цю формулу ще називають формулою Лагранжа про скінченні прирости.

Доведення. Введемо допоміжну функцію $\Phi(x) = f(x) - \lambda x$. Підберемо λ так, щоб $\Phi(a) = \Phi(b)$. Тоді

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b,\ \ \lambda = \frac{f(b) = f(a)}{b - a}.$$

Допоміжна функція задовольняє всі умови теореми Ролля: неперервна на відрізку $[a, b]$; диференційована на інтервалі (a, b) і $\Phi(a) = \Phi(b)$. Тому за теоремою Ролля знайдеться точка $c \in (a, b)$, така, що $\Phi'(c) = 0$. Тоді

$$\Phi'(c) = f'(c) - \lambda = 0, f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Відношення дорівнює кутовому коефіцієнту січної (рис. 1.6), а дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої в точці з абсцисою Тому із теореми випливає, що на кривій знайдеться хоча б одна точка в якій дотична до кривої паралельна до січної На рисунку 6 таких дві: це точки C_1 і C_2.

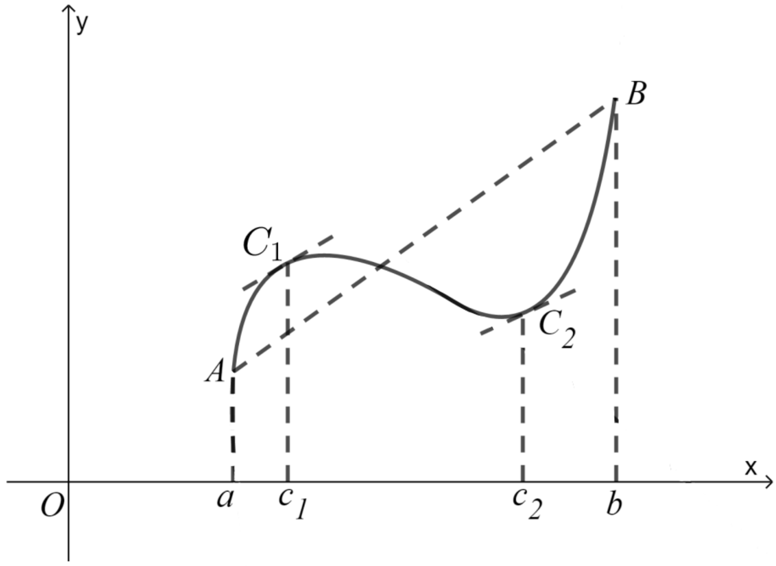


Рис. 1.6. Графік функції $y = f(x)$ і січна

Наслідок. Якщо похідна функція дорівнює нулю на деякому проміжку, то функція незмінна на цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f'(x) = 0$ на інтервалі (a, b). Розглянемо дві довільні точки $x_1 < x_2$ з інтервалу (a, b). Тоді за теоремою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, де c – деяка точка на проміжку (x_1, x_2). Так як $f'(c) = 0$, то $f(x_2) - f(x_1) = 0$. Тому $f(x_2) = f(x_1)$ для довільних точок x_1, x_2 з (a, b), а це означає, що $f(x)$ незмінна на (a, b).

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційована на інтервалі (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ на (a, b).

Тоді знайдеться хоча б одна така точка $c \in (a, b)$, така що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

1.2.2. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, вводиться за допомогою теореми Коші і використовує похідні.

Теорема Лопіталя. Нехай у виколотому околі точки a функції $f(x), g(x)$ – диференційовані і $g'(x) \neq 0$. Тоді, у випадку невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ границя відношення функцій при $x \to a$ дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання границя існує:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ [2].}$$

Доведення покажемо на конкретному випадку, коли точка a кінцева і $f(a) = g(a) = 0$ (невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$). Функції $f(x), g(x)$ будуть неперервні на відрізку $[a, x]$, який лежить в околі точки a, диференційовані на інтервалі (a, x) і $g'(x) \neq 0$ на (a, x). Тому можна застосувати теорему Коші: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, де $c \in (a, x)$. Враховуючи те, що $f(a) = g(a) = 0$ отримаємо:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $x \to a$, а це означає, що і при $c \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тут ми використали той факт, що границя функції не залежить від того, якою буквою позначений аргумент.

Зауваження. Якщо $f'(x)$ і $g'(x)$ нескінченно малі або нескінченно великі при , то спочатку отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і можна ще раз застосувати правило Лопіталя, якщо будуть виконуватися умови теореми для функцій $f'(x)$ і $g'(x)$.

Приклад 1.13. При $a > 0$ маємо:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^a} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(lnx)'}{(x^a)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a \cdot x^a} = 0.$$

Отже, при $x \to +\infty$ функція lnx зростає повільніше, ніж x^a $(a > 0)$.

Приклад 1.14. При $a > 1$ маємо:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x lna}.$$

Якщо $n > 1$, то знову отримаємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і знову застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x(lna)^2} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 1}{a^x(lna)^n} = 0.$$

Отже, при $x \to +\infty$ функція x^n зростає повільніше a^x $(a > 1)$.

Невизначеності виду $[0\cdot\infty], [\infty-\infty], [1^\infty], [\infty^0]$ зводять до невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом тотожних перетворень, а потім застосовують правило Лопіталя.

Приклад 1.15. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to+0} tg\sqrt{x}\cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\sqrt{x}}$.

Розв’язання

а) Маємо невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Зведемо її до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+0} tg\sqrt{x}\cdot ln\left(\frac{1}{x}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{-lnx}{ctg\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{-(lnx)'}{\left(ctg\sqrt{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0}\frac{sin^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{x} = 2\lim_{x\to+0}\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+0} sin\sqrt{x} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Тут ми використали першу визначну границю $\lim\limits_{x\to+0}\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$.

б) Маємо невизначеність виду $[\infty^0]$. Використаємо основну логарифмічну тотожність:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\sqrt{x}} = [\infty^0] = \lim_{x\to+0} e^{ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\sqrt{x}}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+0} tg\sqrt{x}\cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Тут ми використали границю, яку знайшли у пункті а).

1.2.3. Формула Тейлора

В багатьох прикладних задачах потрібно замінити складену функцію $f(x)$ многочленом $P_n(x)$, який близький до $f(x)$ в околі точки x_0, в такому сенсі, що

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Введемо деякі поняття.

1) Многочлен $P_n(x)$, який задовольняє умови $P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ називається многочленом Тейлора т–го порядку функції $f(x)$ в околі точки x_0.

2) Різниця між функцією $f(x)$ і її многочленом Тейлора $P_n(x)$ позначають $R_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - P_n(x) \Rightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

3) Формула $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ називається формулою Тейлора n–го порядку для функції $f(x)$. Тут $P_n(x)$ це многочлен Тейлора n–го порядку функції $f(x)$; $R_n(x)$ – остаточний член формули Тейлора.

Теорема (про вигляд многочлена Тейлора). Нехай функція $f(x)$ диференційована n раз в околі точки x_0. Тоді многочлен Тейлора n–го порядку функції $f(x)$ має вигляд:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ [2].}$$

Доведення. Будемо шукати многочлен $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Знайдемо похідні цього многочлена

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

… …

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n.$$

Знайдемо ці похідні в точці x_0 і використаємо рівності $P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$:

$$P_n(x_0) = a_0;\ P_n(x_0) = f(x_0) \ \Rightarrow\ a_0 = f(x_0);$$

$$P_n'(x_0) = a_1;\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \ \Rightarrow\ a_1 = f'(x_0);$$

$$P_n''(x_0) = 2a_2;\ P_n''(x_0) = f''(x_0) \ \Rightarrow\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};$$

$$P_n'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3;\ P_n'''(x_0) = f'''(x_0) \ \Rightarrow\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!};$$

… …

$$P_n^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n;\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\ \Rightarrow\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Підставимо коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ в многочлен $P_n(x)$ отримаємо формулу

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Тепер формулу Тейлора n–го порядку можна записати у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора називається формулою Маклорена і має вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Розглянемо вигляд залишкового члена $R_n(x)$ формули Тейлора.

Теорема (про залишковий член у формі Пеано). Нехай функція $f(x)$ диференційована n разів в околі точки x_0. Тоді залишковий член формули Тейлора має вигляд:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

і називається залишковим членом у формі Пеано.

Доведення. Із означення многочлена Тейлора слідує, що

$$f(x_0) - P_n(x_0) = 0, f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0, \dots, f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тоді для залишкового члена $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ отримаємо:

$$R_n(x_0) = 0, R_n'(x_0) = 0, R_n''(x_0) = 0, \dots, R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Враховуючи це, знайдемо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$ використовуючи n разів правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Так як $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, то це означає, що $R_n(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $(x - x_0)^n$, тобто, $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Розглянемо ще один вигляд залишкового члена формули Тейлора.

Теорема (про залишковий член у формі Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ диференційована $(n + 1)$ разів в околі точки x_0. Тоді залишковий член формули Тейлора в цьому околі можна записати у вигляді

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де c – деяка точка між x і x_0.

Приклад 1.16. Знайдіть число e з точністю до 0,001.

Розв’язання

Розглянемо функцію $f(x) = e^x$ і $x_0 = 0$. З урахуванням того, що $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, формула Тейлора $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$ прийме вигляд: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$. Запишемо залишковий член $R_n(x)$ в формі Лагранжа за формулою $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, враховуючи, що $x_0 = 0, f^{(n+1)}(x) = e^x$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n + 1)!}x^{n+1}.$$

При $x = 1$ формула Тейлора прийме вигляд:

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

де $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, причому точка c знаходиться між $x = 1$ і $x_0 = 0$, тобто $0 < c < 1$. Тоді $e^c < e^1 < 3$. Підберемо n так, щоб $R_n(1) < 0{,}01$. Так як $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}01$, то $(n + 1)! > 300$. Ця нерівність виконується при $n = 5$ $(4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 5! = 24 \cdot 5 = 120, 6! = 120 \cdot 6 = 720)$. Отже, з похибкою 0,01

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2{,}72.$$

Запишемо формулу Тейлора для деяких елементарних функцій при $x_0 = 0$.

1) Нехай $f(x) = e^x$ і $x_0 = 0$. Знайдемо похідні функції e^x в точці x і в точці x_0: $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$. Використовуючи формули $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$ і $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, отримаємо:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Зокрема, при $n = 1$ і $n = 2$ маємо:

$$e^x = 1 + x + o(x), e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

2) Нехай $f(x) = sinx$ і $x_0 = 0$.Тоді

$$f'(x) = cosx, f''(x) = -sinx, f'''(x) = -cosx, \dots f'(0) = 1,$$
$$f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \dots.$$

Використовуючи формули $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$ і $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $n = 2k$ отримаємо:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}o(x^{2k}).$$

Зокрема, при $k = 1$ і $k = 2$ маємо:

$$sinx = x + o(x^2), sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

3) Аналогічно отримується формула Тейлора і для функції $cosx, \ln(1 + x)$, $(1 + x)^a$.

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}o(x^{2k+1}).$$

Зокрема, при $k = 1$ маємо: $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$.

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}o(x^n).$$

Зокрема, при $n = 1$ маємо: $\ln(1 + x) = x + o(x)$.

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots\big(a-(n-1)\big)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Зокрема, при $n = 1$ маємо:

$$(1+x)^a = 1 + ax + o(x).$$

Формулу Тейлора інколи зручно використовувати для знаходження границь.

Приклад 1.17. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття скористаємося формулою $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}o(x^{2k+1})$ при $k = 2$ і формулою $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ при $n = 2$, до того ж у цій формулі замінимо x на $\frac{-x^2}{2}$:

$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Враховуючи ці розклади, знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

1.3. Вектор-функція

Поняття вектор-функції

Визначення. Якщо кожному числу t із множини T за певним законом поставлений у відповідність вектор $\vec{r}(t)$ то говорять, що на множині T задана вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$ скалярного аргументу t.

Нехай вектори $\vec{r}$ і $\vec{r}(t)$ в базисі $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ мають координати:

$$\vec{r} = \{x, y, z\}, \ \ \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Тоді векторне рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ рівносильне трьом скалярним рівнянням:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Вектор-функція зображується за допомогою годографа (рис. 1.7)

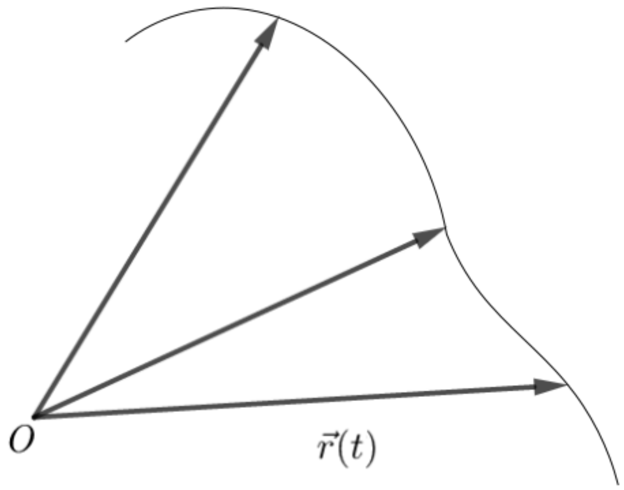


Рис. 1.7. Годограф вктор-функцій

Годограф вектор-функції $\vec{r}(t)$ – це лінія, що проходить через кінці векторів $\vec{r}(t)$, які відкладені із фіксованої точки O.

Наприклад, годограф вектор-функції $\vec{r}(t) = cost \cdot \vec{\imath} + sint \cdot \vec{\jmath}$ це круг, радіус якого дорівнює одиниці. Дійсно, рівняння $\vec{r}(t) = cost \cdot \vec{\imath} + sint \cdot \vec{\jmath}$ в координатній формі має вигляд: $x = cost, y = sint$ або $x^2 + y^2 = 1$.

Границя і неперервність вектор-функції

Границя вектор-функції визначається аналогічно границі скалярної функції.

$\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{b}$, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ таке, що $\left|\vec{r}(t) - \vec{b}\right| < \varepsilon$ для $\forall t \in S_\delta(a)$.

Зауваження. Неважко показати, що, якщо $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to a} x(t) = b_1, \lim\limits_{t \to a} y(t) = b_2, \lim\limits_{t \to a} z(t) = b_3$.

Вектор-функція називається неперервною в точці t_0, якщо $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Похідна вектор-функції

Похідні вектор функції визначаються аналогічно похідним скалярної функції.

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \vec{r}''(t) = \left(\vec{r}'(t)\right)', \vec{r}'''(t) = \left(\vec{r}''(t)\right)'$$

Існують інші позначення похідних: $\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Фізичний зміст похідної

Приріст вектор-функції $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ це зміна $\vec{r}(t)$ на відрізку $[t, t+\Delta t]$. Відношення $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ це середня швидкість зміни $\vec{r}(t)$ на відрізку $[t, t+\Delta t]$.

Похідна вектор-функції $\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ це миттєва швидкість зміни вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точці t.

Якщо в вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тлумачити t як час, то годограф вектор-функції задає траєкторію точки, що рухається; вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ задає швидкість точки, що рухається; вектор $\ddot{\vec{r}}(t)$ задає прискорення точки, що рухається.

Геометричний зміст похідної

Похідна вектор-функції в точці це вектор. З'ясуємо його напрямок. Побудуємо годограф вектор-функції і вектори $\vec{r}(t), \vec{r}(t+\Delta t)$. Вектор різниці $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ напрямлений по січній до годографа (рис. 1.8). В границі при $\Delta t \to 0$ вектор $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ перетворюється в вектор $\vec{r}'(t)$, а січна – в дотичну до годографа.

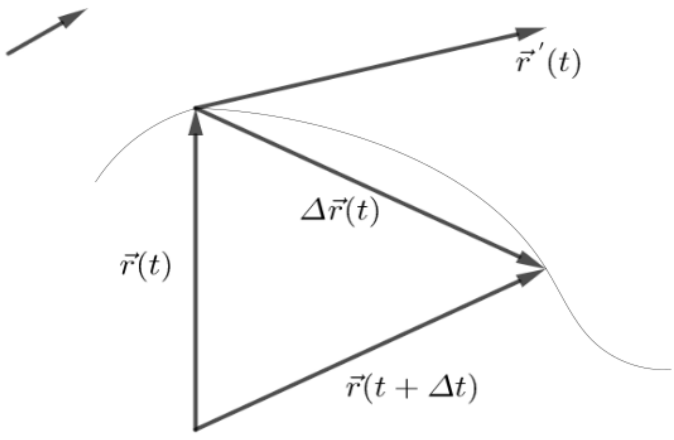


Рис. 1.8. Годограф вектор-функції і вектори $\vec{r}(t), \vec{r}(t+\Delta t)$

Вектор $\vec{r}'(t)$ напрямлений по дотичній до годографа вектор-функції $\vec{r}(t)$.

Правила диференціювання

Правила диференціювання скалярних функцій і їх виведення переноситься і на векторну функцію.

1) $[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$,

2) $[f(t) \cdot \vec{r}(t)]' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r}'(t)$,

$[\lambda \cdot \vec{r}(t)]' = \lambda \cdot \vec{r}'(t)$, ($\lambda$ – число),

$[f(t) \cdot \vec{c}]' = f'(t) \cdot \vec{c}$, ($\vec{c}$ – сталий вектор),

3) $[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t)$,

4) $[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$,

5) для складеної функції $\vec{r} = \vec{r}(u(t))$ маємо $r_t' = \vec{r}_u' \cdot u_t'$,

6) якщо $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то $\vec{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

Диференціал вектор-функції

Диференціал вектор-функції визначається і знаходиться аналогічно диференціалу скалярної функції:

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \cdot dt.$$

Якщо $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \cdot dt = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}dt$ $= \{dx, dy, dz\}$, тобто

$$d\vec{r}(t) = \{dx, dy, dz\}.$$

Геометричні додатки векторні функції

Якщо задана вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то її годограф – лінія L – має векторно-параметричне рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (t – параметр), або координатно-параметричне рівняння:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Нехай $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на цій кривій, t_0 – значення параметра t в точці P_0. Тоді вектор $\vec{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ є напрямним вектором дотичної прямої до лінії L в точці   і канонічні рівняння дотичної прямої мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Площина, яка проходить через точку дотику P_0 перпендикулярно дотичної прямої до лінії L (рис. 1.9), називається нормальною площиною лінії L в точці P_0. Вектор $\vec{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ колінеарний дотичній прямій, а отже, перпендикулярний нормальній площині. Тому рівняння нормальної площини до лінії L в точці має вигляд:

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

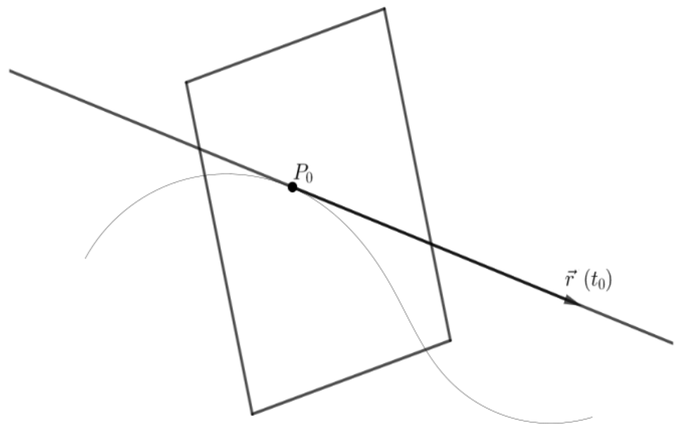


Рис. 1.9. Площина, яка проходить через точку дотику P_0 перпендикулярно дотичної прямої до лінії L

Приклад 1.18. Скласти рівняння дотичної прямої і нормальної площини до ліній $x = 2cost, y = 2sint, z = 3t$ в точці $P_0\left(1, \sqrt{3}, \pi\right)$.

Розв'язання

Для точки P_0 знайдемо значення параметру t_0: $z = 3t_0 = \pi, t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Знайдемо дотичний вектор до лінії в точці P_0:

$$\vec{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} = \{-2sint_0, 2cost_0, 3\} = \left\{-\sqrt{3}, 1{,}3\right\}.$$

Запишемо рівняння дотичної прямої до лінії в точці

$$\frac{x-1}{-\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\pi}{3}$$

і рівняння нормальної площини

$$-\sqrt{3}(x-1) + \left(y - \sqrt{3}\right) + 3(z - \pi) = 0.$$

Зауважимо, що задана лінія є гвинтовою лінією: її проекція на площину xOy є коло $x^2 + y^2 = 4$, а третя координата $z = 3t$ точки лінії росте з ростом t (рис. 1.10)

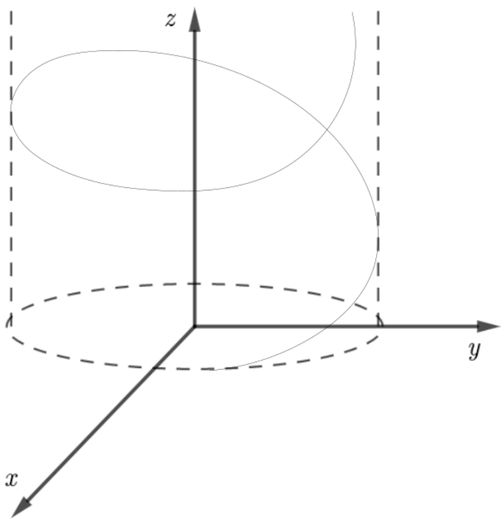


Рис. 1.10. Коло $x^2 + y^2 = 4$ і гвинтокрила лінія

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

Одним із доповнень похідної вважається застосування похідної до дослідження функції та побудови графіка функції. У цьому розділі розглядаються такі характеристики функцій, як монотонність, екстремум, опуклість, а також асимптоти графіка функції.

2.1. Монотонність функції

До монотонних функцій належать функції, які зростають або спадають на деякому проміжку. Пригадаємо, що функція зростає (спадає) на інтервалі (a, b), якщо для будь-яких точок x_1, x_2 із цього інтервалу із нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Теорема (критерій монотонності). Диференційована функція $f(x)$ зростає (спадає) на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на інтервалі (a, b) [5].

Доведення. 1) Нехай функція $f(x)$ зростає на (a, b).

Якщо $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) \geq f(x), \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ і $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) \leq f(x), \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0$ і $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Таким чином $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$ і для $\Delta x > 0$, і для $\Delta x < 0$. Тоді $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$, де x – довільна точка з інтервалу (a, b).

2) З іншої сторони, нехай $f'(x) \geq 0$ на інтервалі (a, b). Застосуємо теорему Лагранжа до функції $f(x)$ на довільному відрізку $[x_1, x_2]$ із (a, b)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \;\; c \in (x_1, x_2).$$

Так як $f'(c) \geq 0,\; x_2 - x_1 \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Таким чином, $f(x_1) \leq f(x_2)$ для довільних точок x_1, x_2 із (a, b) таких, що $x_1 < x_2$; отже функція зростає $f(x)$ на відрізку (a, b) [10].

2.2. Екстремуми функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) який містить точку x_0.

1) Точка x_0 називається точкою максимуму функції $f(x)$, якщо $f(x_0) > f(x)$ для всіх x із деякого виколотого околу точки x_0.

2) Точка x_0 називається точкою максимуму функції $f(x)$, якщо $f(x_0) < f(x)$ для всіх х із деякого виколотого околу точки x_0.

3) Точки максимуму та мінімуму функції називають точками екстремуму функції.

Так як $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, то в околі точки x_0

$\Delta f(x_0) < 0$, якщо x_0 – точка максимуму;

$\Delta f(x_0) > 0$, якщо x_0 – точка мінімуму.

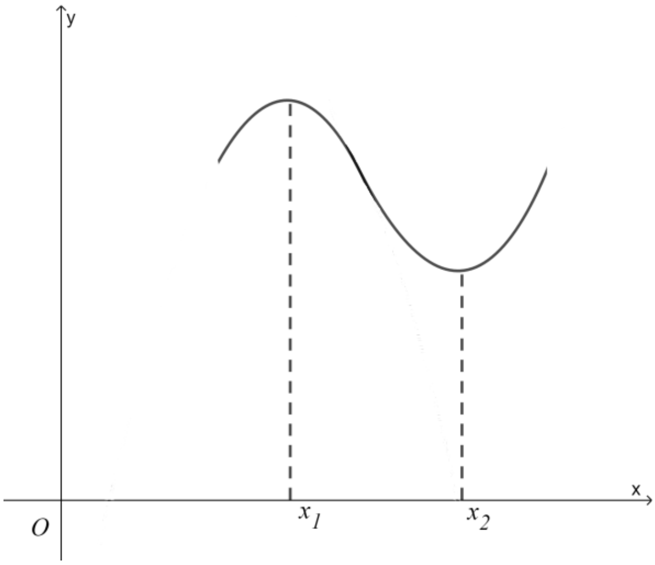


Рис. 2.1. Функція $f(x)$

На рис. 2.1 точка максимуму – x_1, точка мінімуму – x_2.

Для знаходження точок екстремуму існують необхідна та достатні умови екстремуму.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Нехай функція $f(x)$ має екстремум в точці x_0. Тоді похідна $f'(x)$ в точці x_0 дорівнює нулю або не існує [7].

Доведення (від супротивного). Нехай похідна $f'(x)$ в точці x_0 існує і не дорівнює нулю, наприклад $f'(x_0) > 0$. Тоді $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$ і з властивостей границі випливає, що $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ в деякому околі точки x_0. Тому $\Delta f(x_0) > 0,$ якщо $\Delta x > 0$ і $\Delta f(x_0) < 0$ якщо $\Delta x < 0$. Так як $\Delta f(x_0)$ змінює знак в околі точки x_0, то екстремуму в точці x_0 функція не має, що суперечить нашому припущенню.

Виділимо декілька зауважень.

1) Точки екстремуму, в яких $f'(x) = 0$ називають точками гладкого екстремуму. В таких точках дотична до графіка функції паралельна осі OX (рис. 2.2).

2) Точки екстремуму, в яких $f'(x)$ не існує, називають точками гострого екстремуму. В таких точках дотична до графіка функцій перпендикулярна до осі OX (рис. 2.2) або не існує (рис. 2.4).

3) Необхідна умова екстремуму не є достатньою, тобто із того, що $f'(x_0)$ дорівнює нулю або не існує, не випливає, що $f(x)$ має екстремум в точці x_0. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму функції (рис. 2.2)

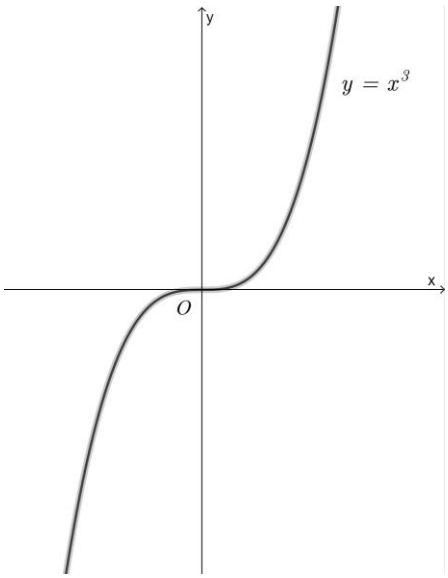


Рис. 2.2. Графік функції $y = x^3$

4) Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Для дослідження критичної точки на екстремум використовують першу або другу достатню умову екстремуму.

Теорема (перша достатня умова екстремуму). Нехай функція $f(x)$ неперервна в околі критичної точки x_0 і диференційована в виколотому околі точки x_0. Якщо похідна $f'(x)$ при переході (зліва на право) через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, то x_0 є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму [7].

Доведення. Нехай $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, тобто $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$. Тоді за теоремою про критерій монотонності функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ і спадає на інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$. Це і означає, що x_0 – точка максимуму функції.

Приклад 2.1. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2x$; побудувати її графік.

Розв’язання

Знайдемо похідну $y' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} - 2 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2$. Похідна не існує при $x = 0$ і дорівнює нулю при $x = 1$. Ці точки і є критичними точками функції. Вони розбивають область визначення функції – інтервал $(-\infty; +\infty)$ на три інтервали $(-\infty; 0), (0; 1), (1; +\infty)$. Дослідимо знаки похідної на цих інтервалах, результати оформимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	∞	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	1 max	$\searrow$

Так як $y' = \infty$, при $x = 0$, то в цій точці дотична перпендикулярна осі OX і екстремум – гострий. Так як $y' = 0$, при $x = 1$, то в цій точці дотична паралельна осі OX до і екстремум – гладкий. При побудові графіка функції (рис. 2.3) врахуємо ще, що $y = x\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\right)$ і це означає, що $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

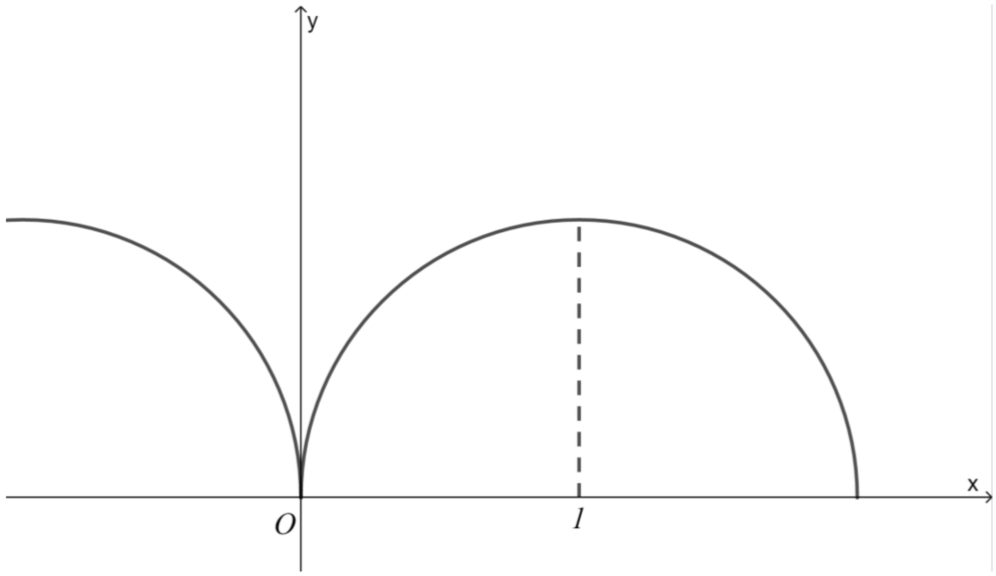


Рис. 2.3. Графік функції $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 2x$

Теорема (друга достатня умова екстремуму). Нехай $f'(x_0) = 0$ і існує $f''(x_0)$ в точці x_0. Якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму для функції $f(x)$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму для функції $f(x)$.

Доведення. За формулою Тейлора другого порядку

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Враховуючи умови теореми, отримаємо:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Так як $(x - x_0)^2 > 0$, то знак $\Delta f(x_0)$ співпадає зі знаком $f''(x_0)$, а саме:

якщо $f''(x_0) < 0$, то $\Delta f(x_0) < 0$, отже, x_0 – точка максимуму;

якщо $f''(x_0) > 0$, то $\Delta f(x_0) > 0$, отже, x_0 – точка мінімуму.

Приклад 2.2. Дослідити на екстремум функцію $y = sinx + cosx$ для $x \in [0; 2\pi]$.

Розв'язання

Знайдемо похідну $y' = cosx - sinx$. Вона всюди існує і дорівнює нулю, якщо $cosx = sinx$. Тому на відрізку $[0; 2\pi]$ отримаємо дві критичні точки $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Досліджувати ці точки на екстремум простіше по знаку другої похідної $y'' = -sinx - cosx$ в самих точках. Так як $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0, y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, то точка $x_1 = \frac{\pi}{4}$ є точкою максимуму, а точка $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ є точкою мінімуму для даної функції.

2.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких потрібно знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку. Пригадаємо, що функція, яка неперервна на відрізку, приймає на цьому відрізку найбільше і найменше значення. Ці значення вона приймає або в критичних точках, або на кінцях відрізка. Тому для знаходження найбільшого і найменшого значення на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ потрібно:

1) знайти критичні точки функції на інтервалі (a, b);

2) знайти значення функції в цих критичних точках і на кінцях відрізка;

3) із всіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше [24].

Приклад 2.3. Знайти найбільше M і найменше m значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ на відрізку $[-1,2]$.

Розв’язання

Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$; $f'(x) = 0$ в точці $x = 1$, яка належить відрізку $[-1,2]$.

Знайдемо значення функції в критичні точці і на кінцях відрізка: $f(1) = -1, f(-1) = -9, f(2) = 0$. Тому на даному відрізку найбільше значення функції $M = 0$, найменше значення $m = -9$.

2.4. Опуклість та вгнутість. Точки перегину

Нехай крива має в будь-якій точці дотичну

Крива називається опуклою (вгнутою), якщо вона розташована нижче (вище) будь-якої дотичної (або на ній).

Точка, яка відділяє опуклу частину кривої від вгнутої називається точкою перегину.

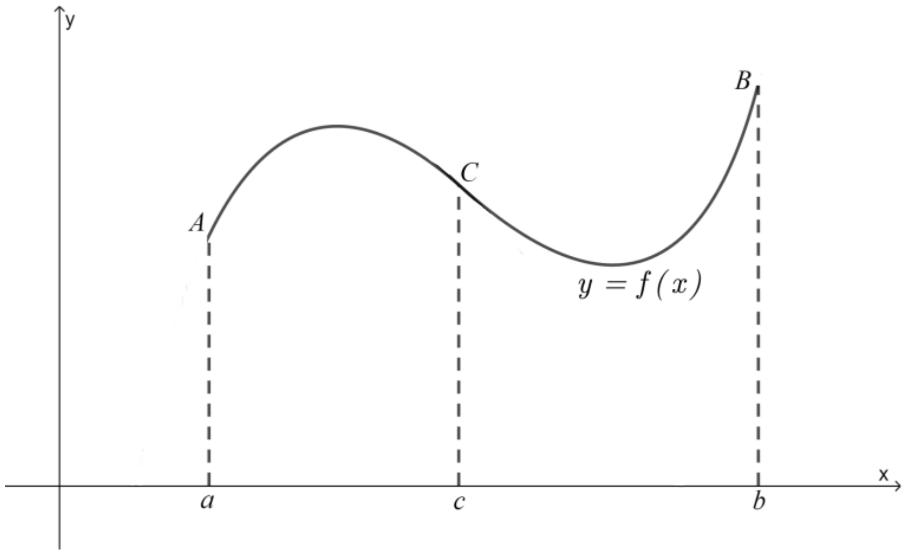


Рис. 2.4. Дуга AC кривої $y = f(x)$

На рис. 2.4 дуга AC кривої $y = f(x), x \in (a, c)$ – опукла, дуга CB кривої $y = f(x), x \in (c, b)$ – вгнута, точка C – точка перегину.

Теорема (умова опуклості).

Якщо $f''(x) \leq 0$ на (a, b), то крива $y = f(x), x \in (a, b)$ опукла.

Якщо $f''(x) \geq 0$ на (a, b), то крива $y = f(x), x \in (a, b)$ вгнута [19].

Доведення. Розглянемо довільну точку $x_0 \in (a, b)$. Знайдемо ординату точки кривої $y_{\text{кр.}}$, використовуючи формулу Тейлора першого порядку з залишковим членом в формі Лагранжа:

$$y_{\text{кр.}} = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

де точка c знаходиться між x і x_0.

Використовуючи рівняння дотичної, знайдемо ординату точки дотичної

$$y_{\text{дот.}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тоді $y_{\text{кр.}} - y_{\text{дот.}} = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$.

Так як за умовою $f''(x) \leq 0$ на (a, b), то $y_{\text{кр.}} - y_{\text{дот.}} \leq 0, y_{\text{кр.}} \leq y_{\text{дот.}}$. Отже, крива $y = f(x)$ є опуклою Аналогічно доводиться, що при $f''(x) \geq 0$ крива є вгнутою.

Теорема (необхідна умова точки перегину). Нехай точка з абсцисою x_0 є точкою перегину кривої $y = f(x)$. Тоді друга похідна $f''(x)$ в точці x_0 дорівнює нулю або не існує [31].

Доведення. Нехай точка перегину $\left(x_0, f(x_0)\right)$ відділяє опуклу частину від вгнутої. Тоді

при $x < x_0$ маємо: $f''(x) \leq 0$ отже, $f'(x)$ спадає;

при $x > x_0$ маємо: $f''(x) \geq 0$ отже, $f'(x)$ зростає.

Це означає, що функція $f'(x)$ має мінімум в точці x_0, а отже, її похідна $\left(f'(x)\right)' = f''(x)$ в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Зауваження. Необхідна умова точки перегину не є достатньою. Наприклад, крива $y = x^4$ є опуклою, та як $y'' = 12x^2 \geq 0$, отже, немає точки перегину, хоча $y'' = 0$ при $x = 0$.

Теорема (достатня умова точки перегину). Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак, то точка $\left(x_0, f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої $y = f(x)$ [24].

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тоді крива $y = f(x)$ опукла при $x < x_0$ і вгнута при $x > x_0$. Отже, точка з абсцисою x_0 є точкою перегину цієї кривої.

Отже, для дослідження кривої $y = f(x)$ на опуклість і точки перегину потрібно:

1) знайти точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує

2) розглянути інтервали, на які ці точки розділяють область визначення функції;

3) дослідити знак $f''(x)$ на цих інтервалах.

Приклад 2.4. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Дослідити графік цієї функції на опуклість, знайти точки перегину. Побудувати графік функції.

Розв’язання

1) Знайдемо першу похідну $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. Вона дорівнює нулю при $x = 0$ і не існує (переходить в нескінченність) при $x = \pm 1$. Знаменник у похідної $f'(x)$ додатний, а чисельник змінює знак тільки при $x = 0$, причому з – на $+$. Отже, $x = 0$ точка мінімуму; $f(0) = -1$.

2) Для дослідження на опуклість знайдемо другу похідну:

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{-2(x^2+3)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}.$$

Похідна $f''(x)$ всюди відмінна від нуля, але не існує при $x = -1, x = 1$.

Ці точки розбивають область визначення функції на інтервали $(-\infty, -1), (-1,1), (1, +\infty)$. Дослідимо знак другої похідної на цих інтервалах, результати оформимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$y = f(x)$	опукла	вгнута	опукла

Точки з абсцисами $x = \pm 1$ є точками перегину. Їх ординати $y = 0$.

3) Для побудови графіка функції (рис. 2.5) спочатку позначимо точку мінімуму $(0; -1)$, потім точки перегину $(-1; 0), (1; 0)$ і врахуємо дані таблиці.

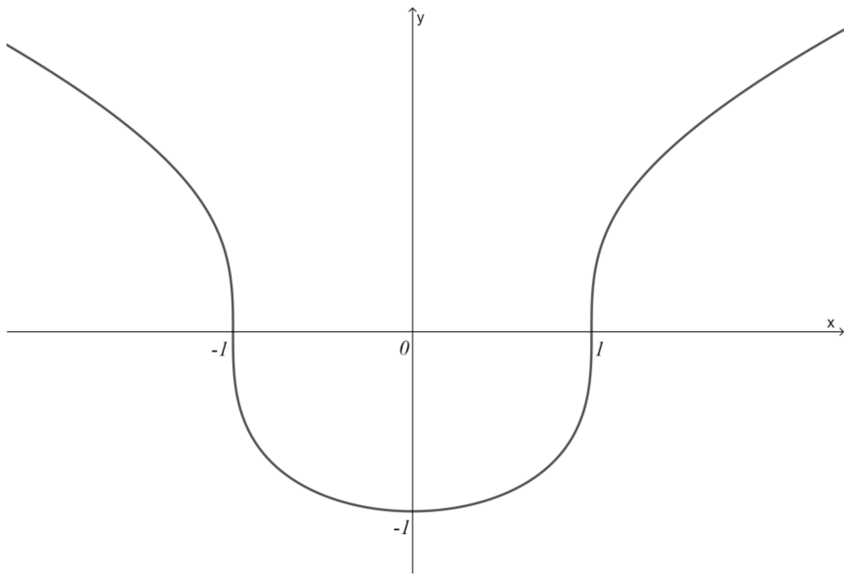


Рис. 2.5. Графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

2.5. Асимптоти графіка функції

Асимптотою кривої називається пряма, відстань до якої від точки, що лежить на кривій, наближається до нуля при необмеженому віддалені цієї точки по кривій від початку координат.

Приклад 2.5. Крива $y = \frac{1}{x}$ (рис. 2.6) має вертикальну асимптоту $x = 0$ і горизонтальну асимптоту $y = 0$.

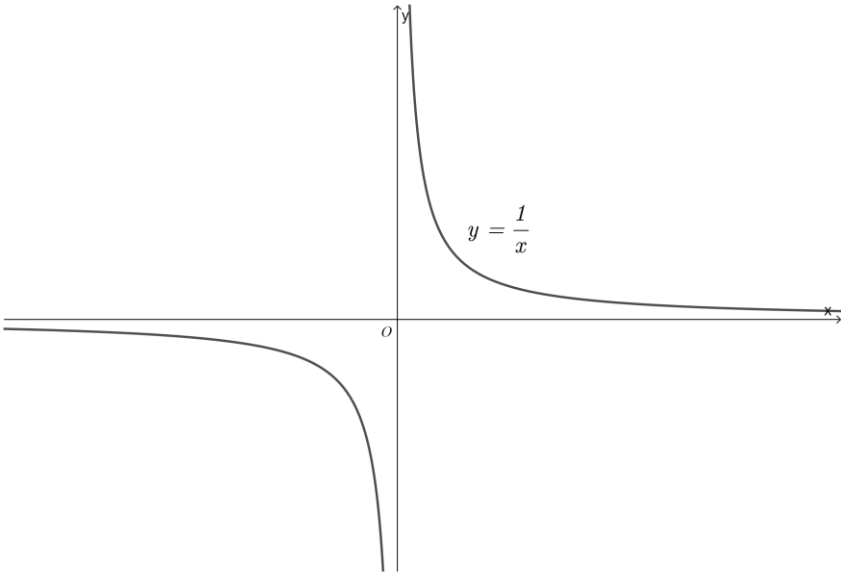


Рис. 2.6. Крива $y = \frac{1}{x}$

Для знаходження вертикальних асимптот потрібно:

1) знайти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, де x_0 – точка розриву функції або гранична точка області визначення;

2) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою (рис. 2.1), якщо тільки правостороння границя $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ є правосторонньою вертикальною асимптотою [6].

Приклад 2.6. Чи мають дані криві вертикальні асимптоти

а) $y = \frac{e^x}{x-3}$, б) $y = e^{\frac{-1}{x}}$, в) $y = lnx$, г) $y = \frac{sinx}{x}$?

Розв’язання

а) Функція $y = \frac{e^x}{x-3}$ має точку розриву $x = 3$. Так як $\lim\limits_{x \to 3} \frac{e^x}{x-3} = \infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою.

б) Функція $y = e^{\frac{-1}{x}}$ має точку розриву $x = 0$. Так як $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{-1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{-1}{x}} = 0$, то пряма $x = 0$ є тільки лівосторонньою асимптотою.

в) Функція $y = lnx$ визначена на інтервалі $(0; +\infty)$ і немає точок розриву. Дослідимо граничну точку $x = 0$ області визначення. Так як $\lim\limits_{x \to +0} lnx = -\infty$, то пряма $x = 0$ є правосторонньою асимптотою.

г) Функція $y = \frac{sinx}{x}$ має точку розриву $x = 0$, але $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$. Пряма $x = 0$ не є асимптотою.

Теорема. Крива $y = f(x)$ має невертикальну асимптоту $y = kx + b$ тоді і тільки тоді, коли існує кінцева границя

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \text{ [6].}$$

Доведення. Нехай крива $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$. Тоді при $x \to \infty$ функція $f(x)$ відрізняється від $kx + b$ на нескінченно малу $\gamma(x)$, тобто $f(x) = kx + b + \gamma(x)$, де $\gamma(x)$ – нескінченно мала при $x \to \infty$. Із цієї рівності маємо

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\gamma(x)}{x} \text{ або } f(x) - kx = b + \gamma(x).$$

Тому

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{b}{x} + \frac{\gamma(x)}{x} \right) = k, \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b + \lim_{x \to \infty} \gamma(x) = b.$$

З іншої сторони, нехай існують кінцеві границі $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$. За властивістю границі функція $f(x) - kx$ відрізняється від своєї границі b на нескінченно малу $\gamma(x)$ при $x \to \infty$. Тому $[f(x) - kx] - b = \gamma(x)$ або $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \infty$. Це означає, що крива $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$.

Приклад 2.7. Знайти асимптоти кривої $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Розв'язання

Ця функція визначена на всій числовій прямій, немає точок розриву, а отже, не має вертикальних асимптот. Для знаходження невертикальної асимптоти $y = kx + b$ знайдемо $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x}$. Розглянемо окремий випадок, коли $x \to +\infty$ і коли $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot \infty] = \infty.$$

Отже, при $x \to -\infty$ асимптоти немає. Продовжимо знаходження асимптоти при $x \to +\infty$ і знайдемо b, враховуючи що $k = 0$:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Отже, $k = 0, b = 0$ при $x \to +\infty$. Тому пряма $y = kx + b$ або, в даному випадку, $y = 0$ є асимптотою при $x \to +\infty$.

2.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка.

При побудові графіка функції в загальному випадку можна використати наступну схему:

1) Знайти область визначення функції.

2) Перевірити функцію на парність, непарність, періодичність.

3) Знайти асимптоти графіка функції.

4) Дослідити функцію на монотонність та екстремум.

5) Дослідити графік функції на опуклість та точки перегину.

6) Знайти (якщо це можливо) точки перетину з осями координат [10].

Не завжди потрібно виконувати усі пункти цієї схеми. Зауважимо деякі випадки:

а) інколи для побудови графіка функції достатньо пунктів 1-4 (коротка схема);

б) якщо функція визначена при $x \geq 0$, то не потрібно перевіряти її парність;

в) якщо функція визначена на кінцевому інтервалі, то не потрібно знаходити її невертикальні асимптоти;

г) якщо функція парна (або непарна), то достатньо дослідження провести для $x \geq 0$, а при побудові графіка функції врахувати, що вона симетрична відносно осі OY для парної функції (відносно початку координат для непарної функції);

д) якщо функція періодична, то достатньо дослідження провести на проміжку з довжиною, яка дорівнює періоду [8].

Приклад 2.8. Дослідити за короткою схемою функцію $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ і побудувати її графік.

Розв'язання

1) Функція не визначена при $x = 1$. Область її визначення складається з двох інтервалів $(-\infty, 1), (1, +\infty)$.

2) Функція – загального вигляду (є не парною, ні непарною), так як

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x}, f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x).$$

3) Знайдемо асимптоти графіка функції.

Дослідимо точку розриву $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x} = \infty$.

Тому пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо невертикальну асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{1-x} + x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + (x - x^2)}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = -1.$$

Тому пряма $y = -x - 1$ є невертикальною асимптотою.

4) Дослідимо функцію на монотонність та екстремум:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2};$$

$f'(x)$ не існує в точці $x = 1$, але ця точка не входить в область визначення функції; $f'(x) = 0$ при $x = 0, x = 2$; ці точки розбивають область функції на інтервали $(-\infty; 0), (0; 1), (1; 2), (2; +\infty)$. Дослідимо знак похідної на цих інтервалах; результати оформимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\nearrow$	-4 max	$\searrow$

Побудуємо асимптоти $x = 1, y = -x - 1$, точку мінімуму $(0; 0)$, точку максимуму $(2; -4)$ і графік функції (рис. 2.7).

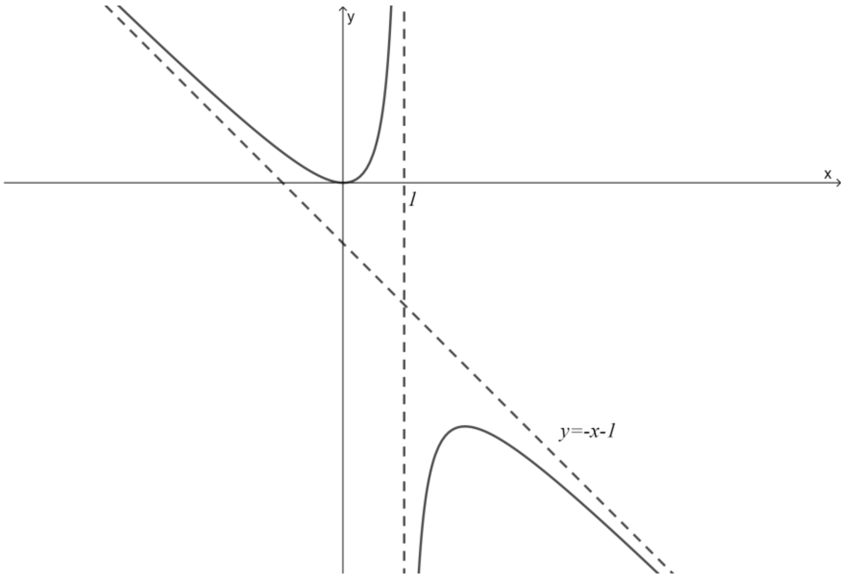


Рис. 2.7. Графік функції $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, асимптоти $x = 1, y = -x - 1$

Приклад 2.9. Дослідити за короткою схемою функцію $f(x) = x^2 e^{-x}$; побудувати її графік.

Розв'язання

1) Область визначення – інтервал $(-\infty; +\infty)$.

2) Функція – загального вигляду (є не парною, ні непарною), так як

$$f(-x) = (-x)^2 e^x = x^2 e^x; f(-x) \neq f(x); f(-x) \neq -f(x).$$

3) Асимптота знайдена в попередньому прикладі. Це – пряма $y = 0$ при $x \to +\infty$.

4) Дослідимо функцію на монотонність та екстремум:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2);$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0, x = 2$. Ці точки розбивають область визначення функції на інтервали $(-\infty; 0), (0; 2), (2; +\infty)$. Дослідимо знак похідної на цих інтервалах, враховуючи, що $e^{-x} > 0$; результати оформимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$4e^{-2}$ max	$\searrow$

Побудуємо асимптоту $y = 0$, при $x \to +\infty$; точку мінімуму $(0; 0)$, точку максимуму $(2; 4e^{-2})$ і графік функції (рис. 2.8).

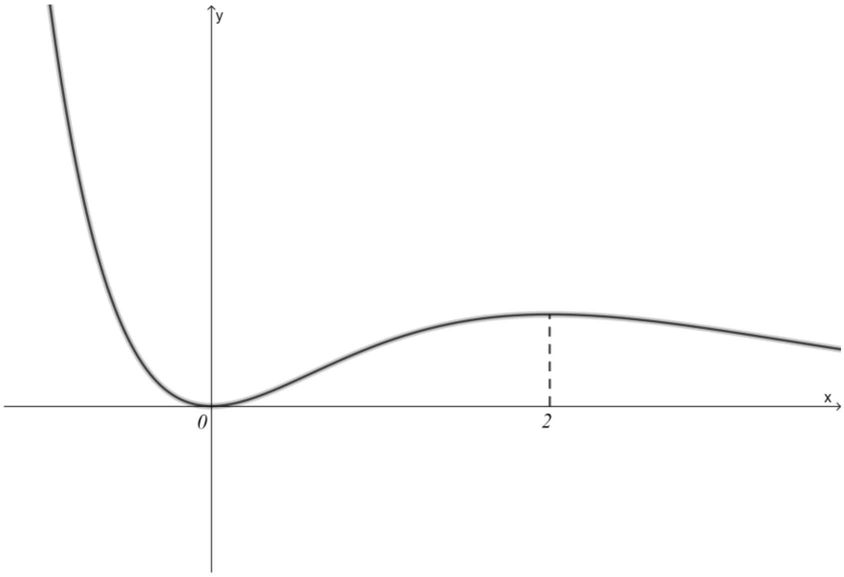


Рис. 2.8. Графік функції $f(x) = x^2 e^{-x}$

РОЗДІЛ 3. ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

3.1. Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в умовах дистанційного навчання

Дистанційне навчання – це деяка сукупність технологій, які забезпечують студента потрібним об'ємом навчального матеріалу, інтерактивний взаємозв'язок між викладачем та студентом в процесі навчання, який надає можливість студенту самостійно працювати над засвоєнням матеріалу [41].

Сучасне дистанційне навчання будується на використанні наступних основних елементів [41]:

- середовище передачі інформації (пошта, телебачення, радіо, інформаційно-комунікаційні мережі);
- методів, що залежать від технічного середовища обніму інформацією.

Використання технологій дистанційного навчання дозволяє:

- зменшити витрати на проведення навчання;
- проводити навчання для більшої кількості студентів;
- збільшити якість навчання за допомогою сучасних засобів навчання, новітніх методик, а також об'ємних електронних бібліотек;
- створити єдине навчальне середовище за допомогою різних онлайн ресурсів та програм.

Дистанційне навчання являє собою цілeнаправленний інтерактивний, асинхронний процес взаємодії суб'єктів та об'єктів навчання між собою та засобами навчальної інформації. Навчальний процес проходить в специфічній педагогічній системі, елементами якої є такі підсистеми як: цілі та зміст навчання, методи та засоби навчання, організація форми навчання, навчально-матеріальна та нормативно правова бази [41].

Інформаційно-комунікаційні технології, які використовуються при дистанційному навчанні, умовно можна поділити на три групи, які в сукупності утворюють технології дистанційного навчання [41]:

- технології представлення навчального матеріалу;
- технології передачі навчальної інформації;
- технології зберігання та обробки навчальної інформації.

Існують три поняття, які мають першочергове значення для дистанційного навчання [30]:

- навчальна інформація – це знання, які потрібно передати студенту для того, щоб він міг правильно виконувати ту чи іншу діяльність;
- навчальні технології – це комплекс дидактичних методів та прийомів, що використовуються для передачі навчальної інформації та залежать від форми її подачі;
- інформаційні технології – процеси, які використовують сукупність засобів та методів збору, обробки, накопичення та передачі даних для отримання нової кількості інформації, а також розповсюдження інформації і способи застосування та використання тих чи інших процесів та методів.

До навчальних технологій, які найчастіше використовуються під час дистанційного навчання можна віднести такі [41]:

- відео-лекції;
- мультимедійні лекції і лабораторні практикуми;
- електронні мультимедійні підручники;
- комп'ютерні програми, які призначенні для навчання та тестування;
- імітаційні моделі та комп'ютерні тренажери;
- консультації та тести з використанням телекомунікаційних засобів;
- відеоконференції тощо.

У дистанційного навчання існують переваги, а також і недоліки, але при правильному використанню ресурсів, переваг все ж таки більше.

3.2. Використання Classroom при вивчені теми дослідження

При написані дипломної роботи був розроблений дистанційний курс «Диференціальне числення функції однієї змінної» для студентів, що вивчають вищу математику.

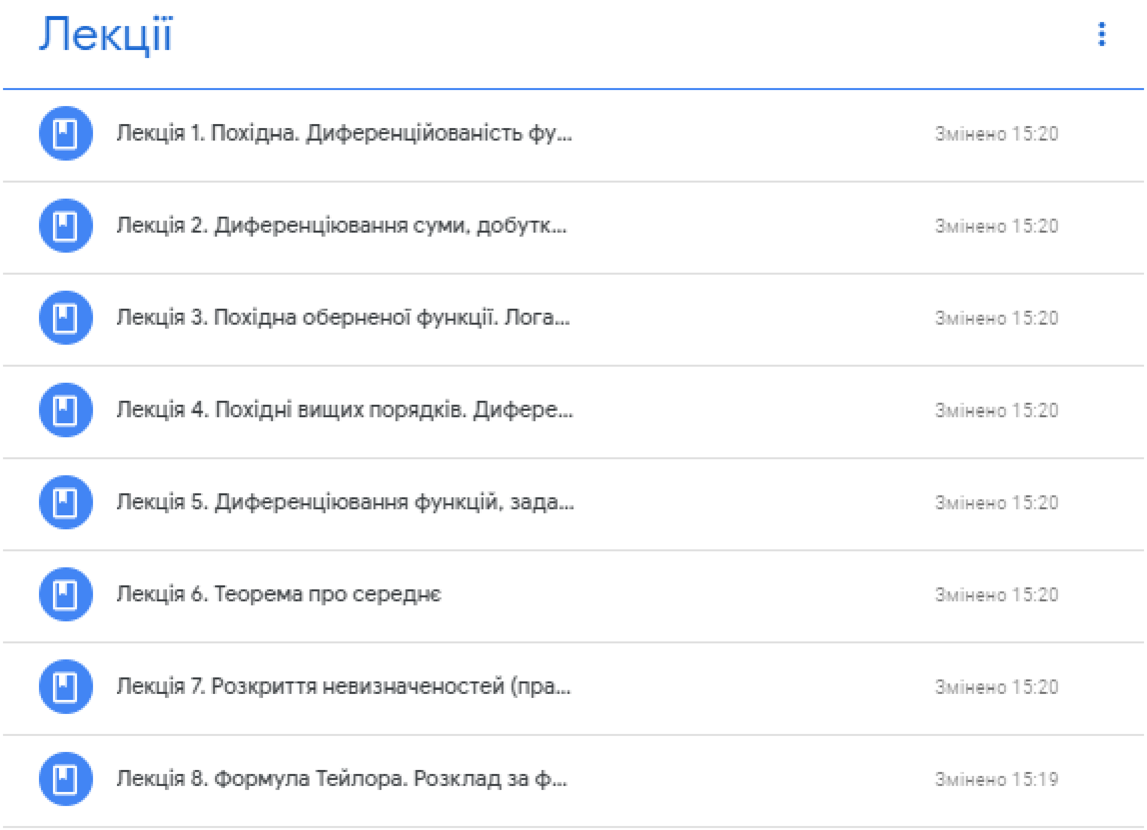
Для створення цього електронного курсу була вибрана платформа Google Classroom, яка надає такі можливості:

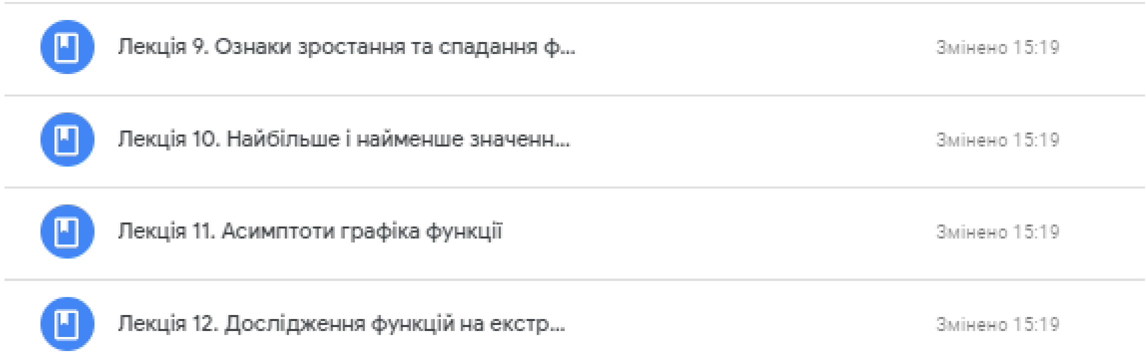
- організація запису студентів на курс;
- підтримка зв’язку між студентом та викладачем з використанням чату, формулу або конференції;
- доступ студентів до навчальних матеріалів в будь-який зручний час, незалежно від місця їх перебування;
- оцінка та аналіз індивідуальних досягнень студентів.

Електронний курс представлений теоретичними і практичними блоками. Після вивчення навчального матеріалу будь-який студент буде мати можливість перейти до практичної частини.

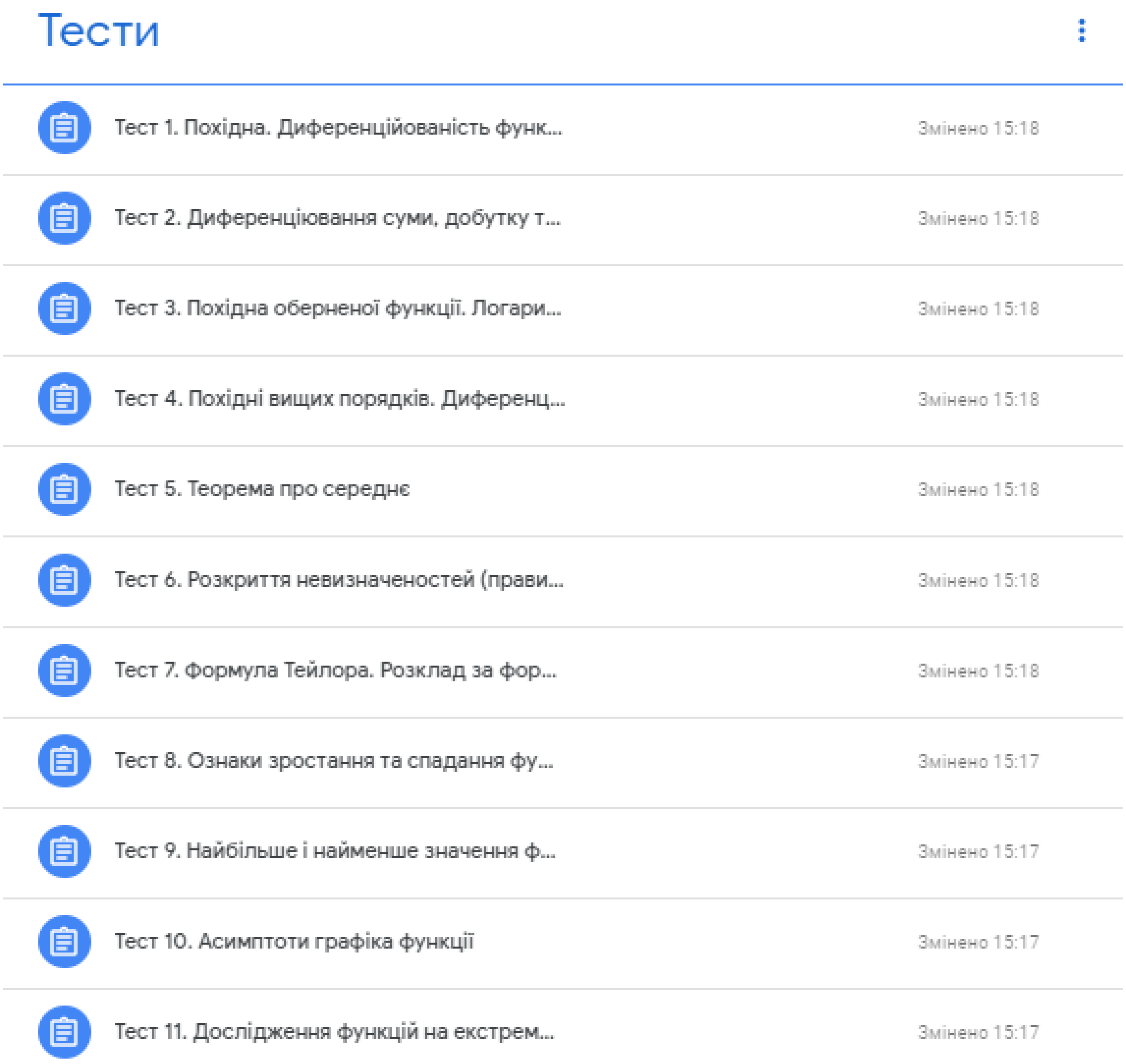
Курс складається з кількох розділів, а саме:

- лекційний матеріал;

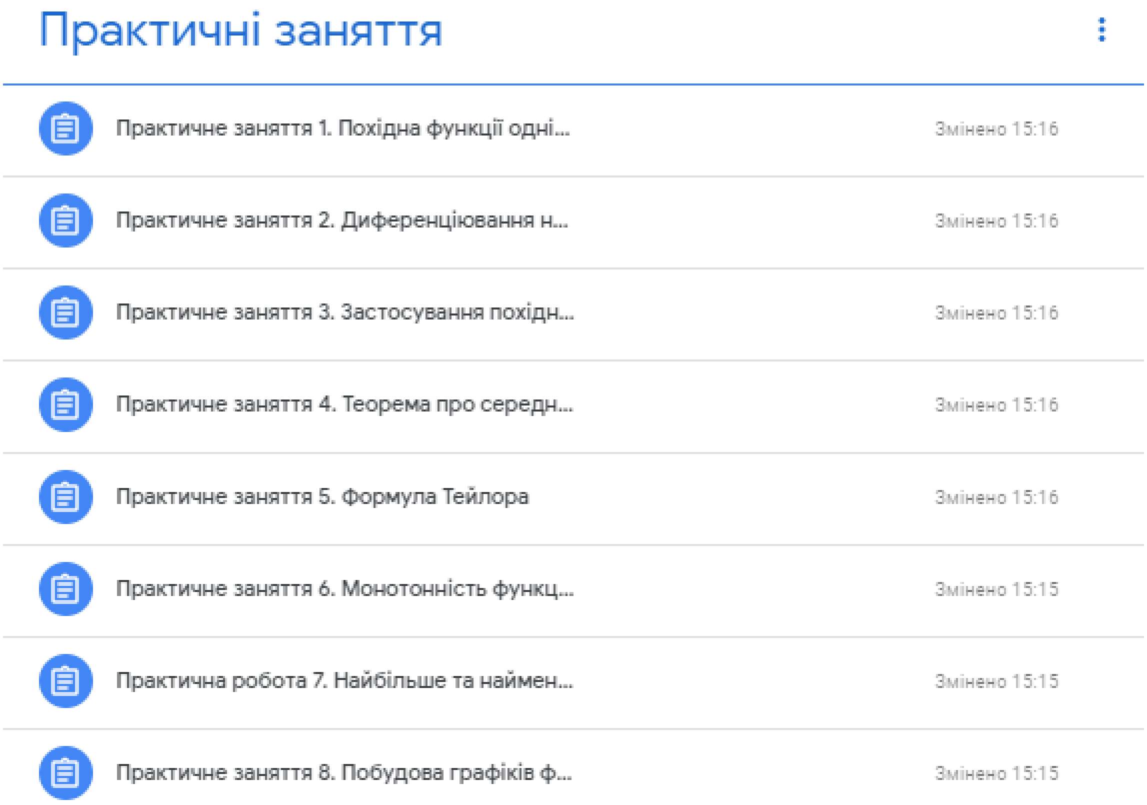




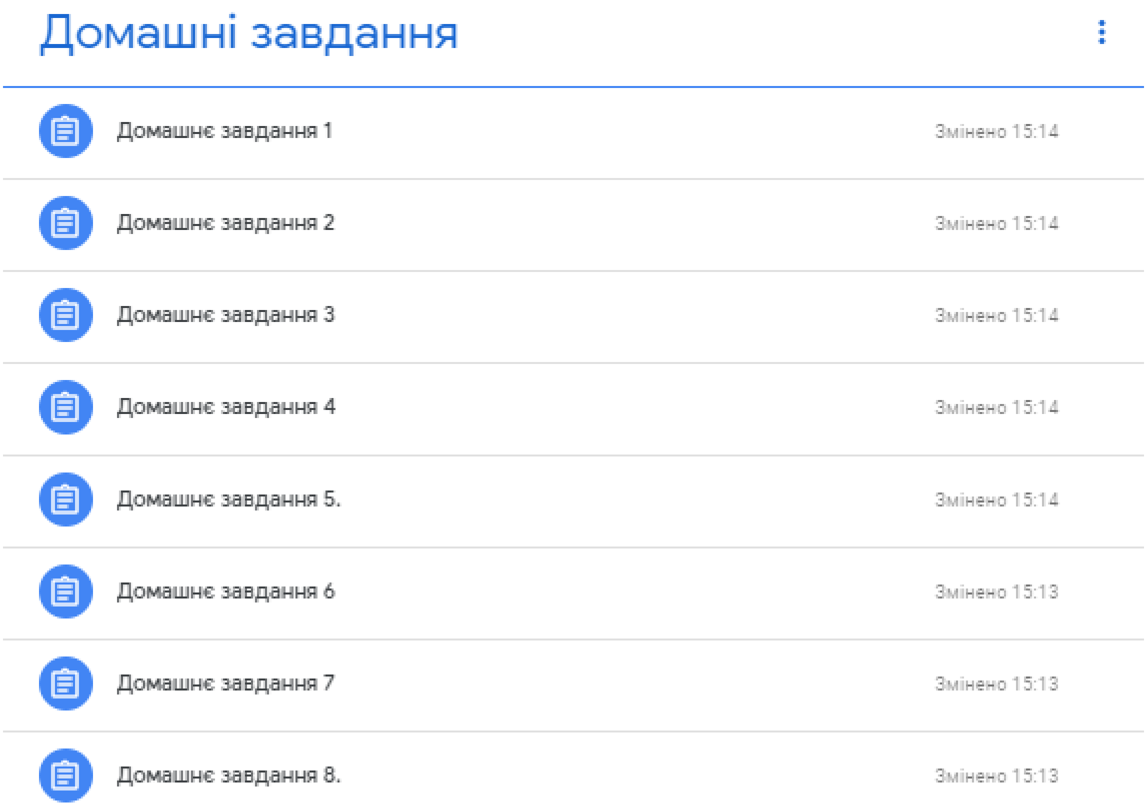
- тести;



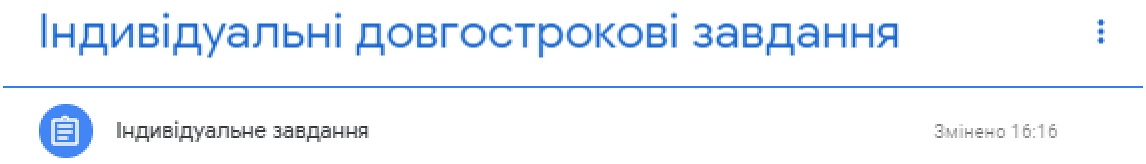
- практичні заняття;



- домашні завдання;



- індивідуальні довгострокові завдання.



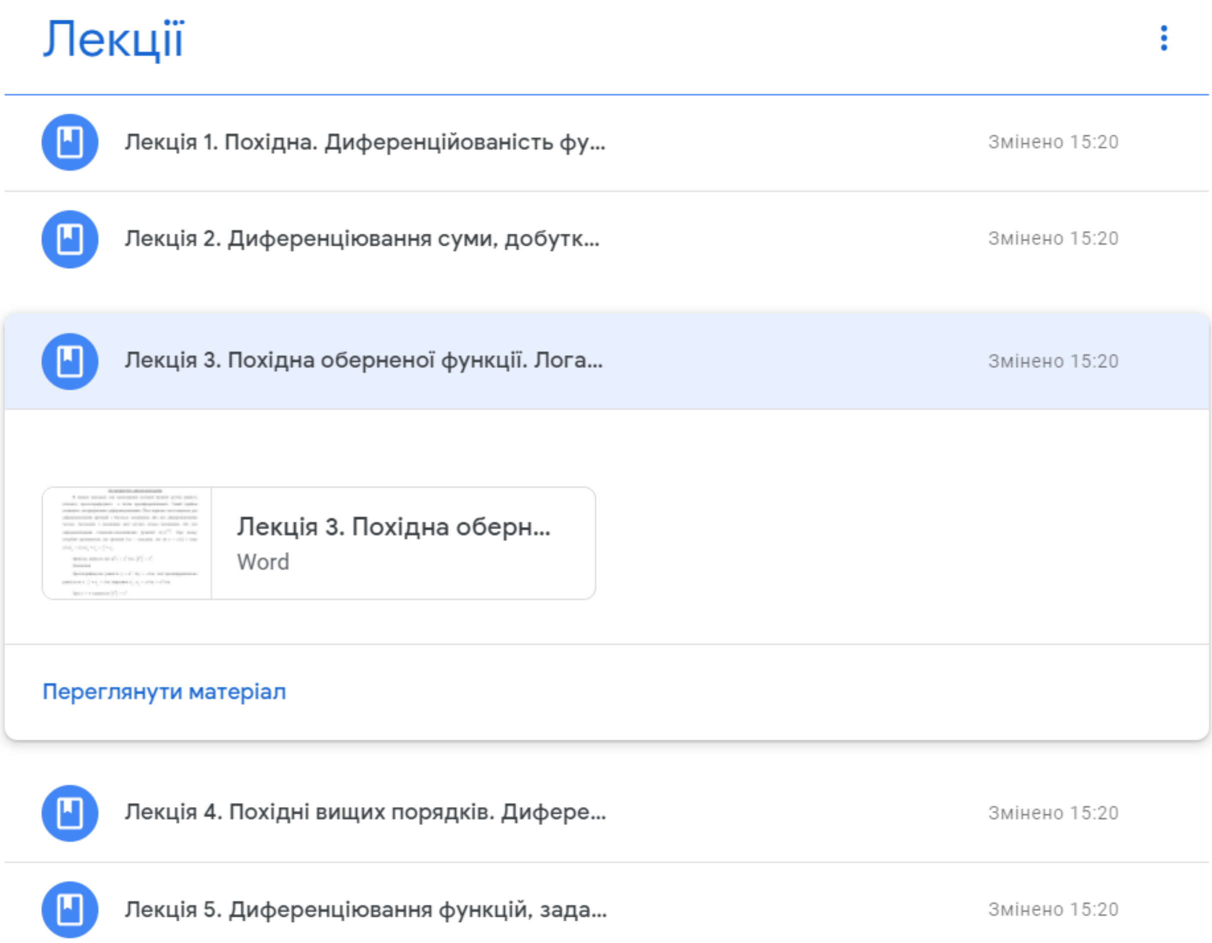
Після кожної вивченої теми студенти мають змогу працювати з інформацією підготовленою викладачем, такою як: лекції, інструкції, приклади розв’язання задач, а також виконання самостійних та контрольних робіт, додаткових завдань.

Для організаційного та методичного забезпечення навчального процесу в умовах дистанційного навчання використовувались:

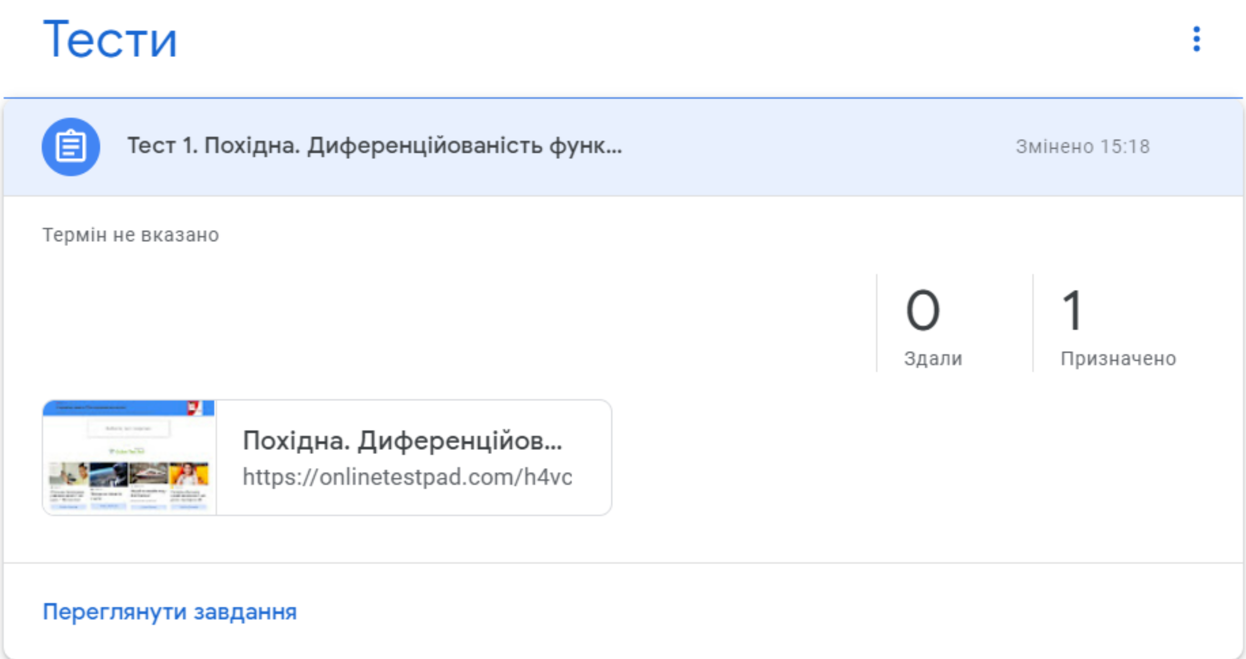
- лекційні матеріали;
- відеоролики;
- завдання для самостійної практичної роботи, приклади розв’язання задач;
- необхідне програмне забезпечення для виконання домашніх завдань;
- контрольно-оцінювальні засоби (онлайн-тести).

Навчальний елемент «Завдання» в електронному курсі дозволяє викладачеві добавляти комунікативні завдання, збирати виконані роботи, оцінювати їх і підтримувати зв’язок з користувачами. Студенти мають можливість відправляти виконані роботи будь-якого цифрового формату для перевірки, а саме текстових і табличних документів, графічних об’єктів, аудіо- та відео- файлів. Завдання для студентів подається у різних форматах, це або текстовий документ з завданнями або онлайн тестування.

У розділі «Лекції» представлений теоретичний матеріал з теми дослідження. Кожна тема виділена окремо і подана у текстових документів, у яких міститься пояснення теми, формули, приклади, а також малюнки.



Розділ «Тести» створений для перевірки матеріалу, який засвоїли студенти після прослуховування лекції. Тести створені у чотирьох програмах, таких як: Online Test Pad, Google форми, Kahoot та Quizizz.



Тест 5. Теорема про середнє

Змінено 15:18

Термін не вказано

0 Здали

1 Призначено

Тест 5. Теорема про сер...
https://create.kahoot.it/share/5

Переглянути завдання

Тест 8. Ознаки зростання та спадання фу...

Змінено 15:17

Термін не вказано

0 Здали

1 Призначено

Тест 8. Ознаки зростанн...
Google Форми

Переглянути завдання

Тест 11. Дослідження функцій на екстрем...

Змінено 15:17

Термін не вказано

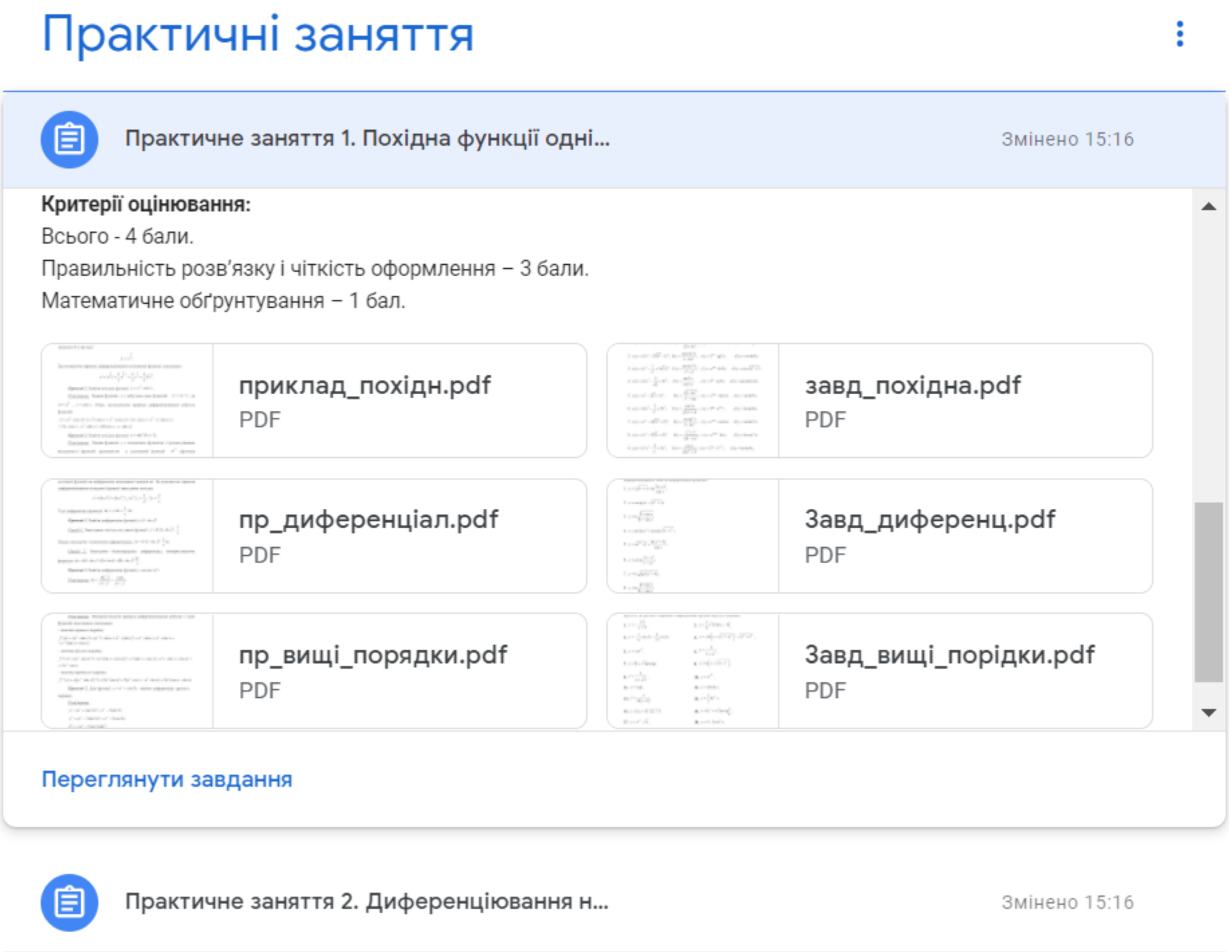
0 Здали

1 Призначено

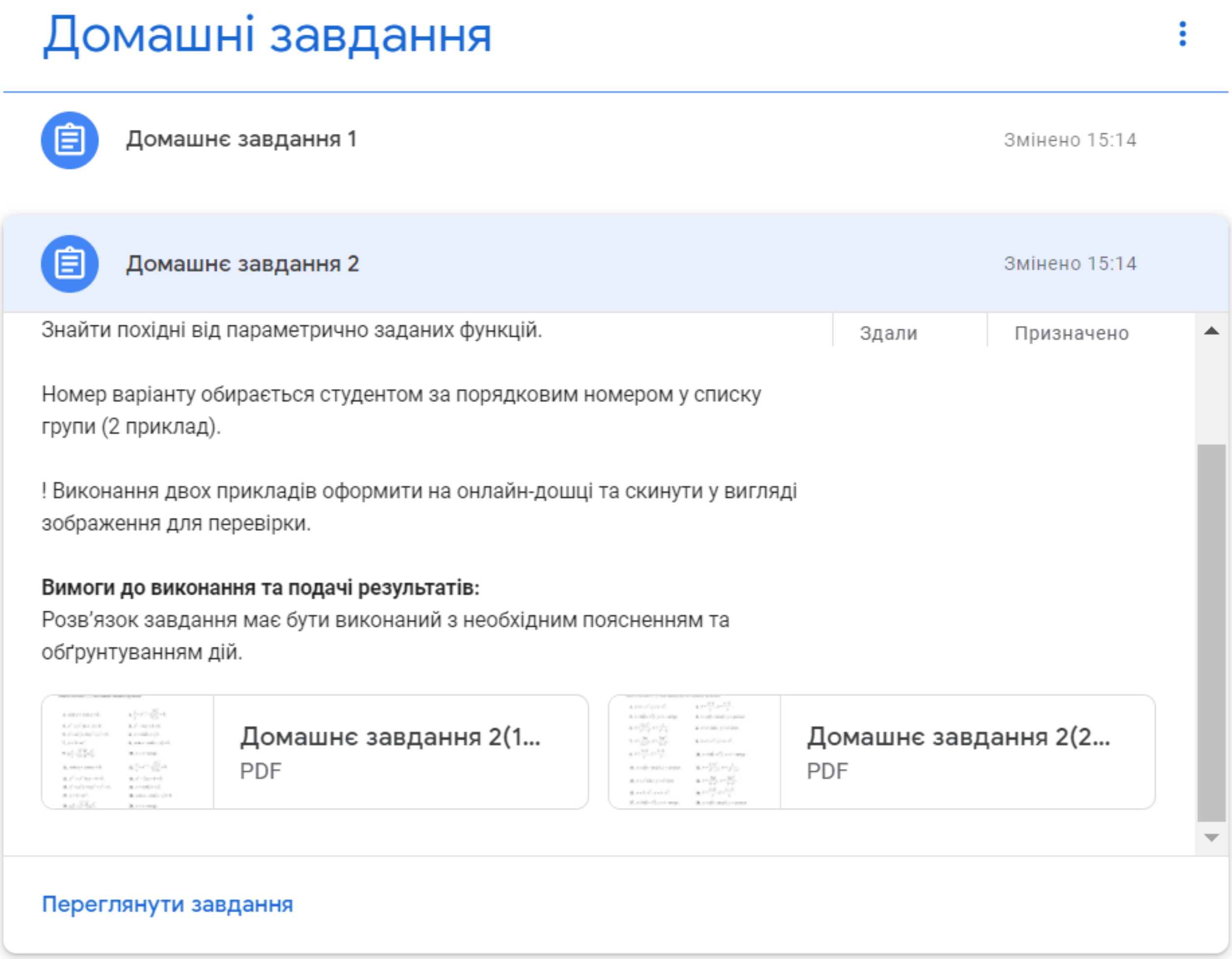
Quizizz - The world's mo...
https://quizizz.com/admin/quiz

Переглянути завдання

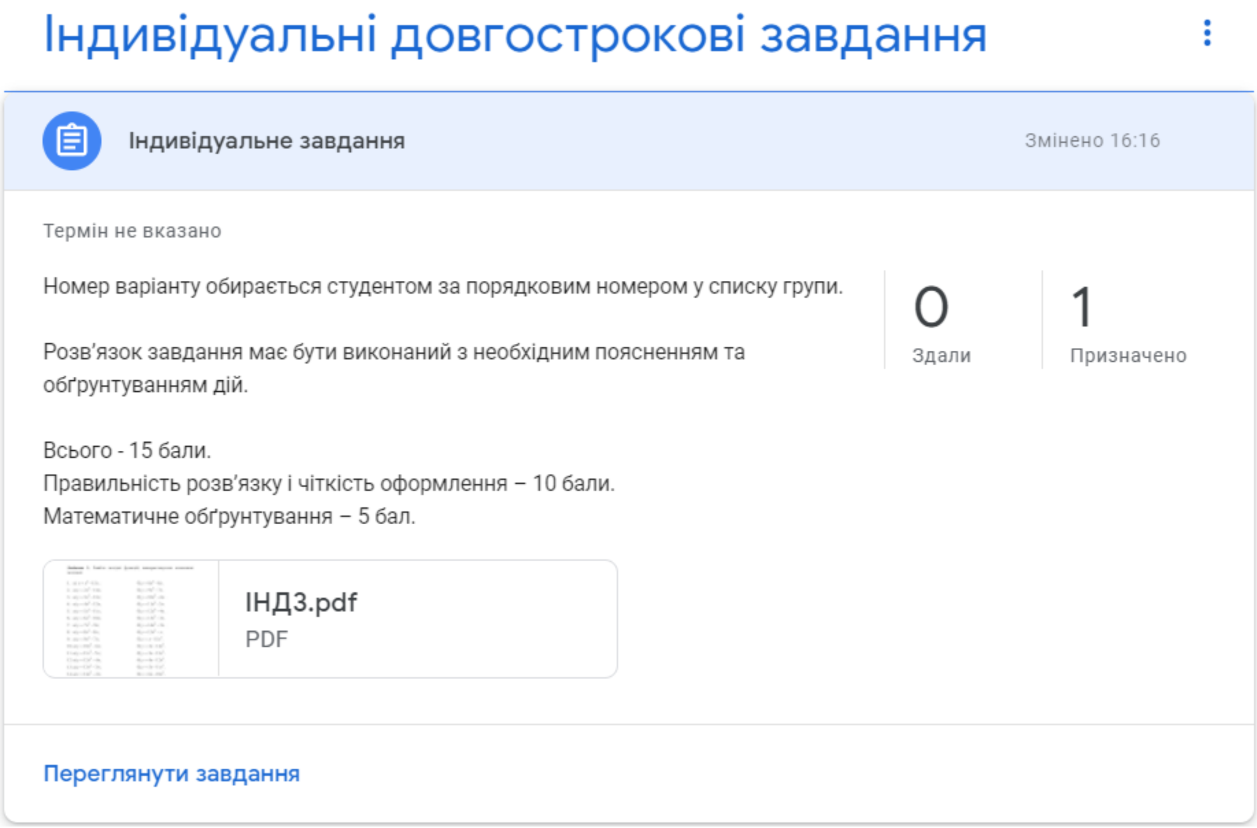
У розділі «Практичні заняття» розміщуються умови завдань для виконання на занятті, завдання для самостійної роботи студентів та приклади завдань з готовим розв’язанням, вказані критерії оцінювання. Важливою умовою для завдань самостійної роботи студентів є представлення розв’язку прикладу на онлайн-дошці для подальшої демонстрації на екрані.



Розділ «Домашні завдання» створений для додаткового опрацювання теми, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.



Для дослідження і проектної роботи студентів створений розділ «Індивідуальні довгострокові завдання», який надає можливість зберігати початкових матеріал завдання і прикріплювати і прикріплювати отриманий результат на спеціально створеній дошці Padlet.



Під час проведення навчальних занять викладач на основі платформи Classroom може переглядати в своєму кабінеті через використання можливостей Google-таблиці час здачі виконаної студентом роботи і переглянути результати прикріплених робіт студентів, які призначені для перевірки.

Студенти проходячи цей курс повинні будуть більшу половину навчального матеріалу опрацьовувати самостійно, це в свою чергу має покращити процес запам'ятовування та розуміння навчального матеріалу, а вміння одразу застосовувати отримані знання на практиці допоможе закріпити їх.

3.3. Використання онлайн-дошок

В умовах дистанційного навчання ефективним способом забезпечення ефективності та інтерактивності навчання є використання онлайн-дошок. Наявність великих бібліотек з готовими шаблонами дозволяють створювати навчальний матеріал (графіки, діаграми, плакати, візуальні матеріали тощо), який можна зберігати в різних цифрових форматах, для того щоб полегшити подальшу роботу з ним [25].

Онлайн-дошка є невід'ємним атрибутом для проведення занять з математичних дисциплін, оскільки вона дозволяє:

- проводити цікаві та більш інтерактивні онлайн-заняття;
- писати, малювати та візуалізовувати інформацію в процесі навчання;
- забезпечувати активну участь студентів в процесі навчання з викладачем та одне з одним;
- створювати презентації, плакати та інші навчальні матеріали для онлайн-навчання. [24]

Онлайн-дошка це перш за все інструмент для спільної роботи. Робота з онлайн-дошкою виглядає так: є робоча область, наприклад білий листок, на якій виконуються певні дії. Одночасно з викладачем в режимі реального часу цю область і всі зміни на ній бачать студенти. Віртуальні дошки, навіть у безкоштовному режимі мають достатньо функціональних можливостей для навчальних цілей.

Розглянемо декілька онлайн-дошок, які схожі між собою функціональними можливостями: Jambord, Padlet та OpenBoard.

При роботі з цими онлайн-дошками з'являється можливість проводити відеоконференцію або записувати подкаст (OpenBoard), а також користуватись функцією спільної роботи в режимі реального часу.

При створені нового документа (нової дошки) можна приєднувати до нього своїх студентів і надати їм доступ до редагування, попередньо поділившись з ними покликанням через електронну пошту або через чат, який використовується для постійного зв'язку викладачів з студентами.

Унікальною можливістю онлайн-дошки є те, що вона надає можливість проводити мозковий штурм під час занять. Для цього потрібно створити новий документ або вибрати один з наявних шаблонів мозкового штурму, а потім добавити студентів. Редагування цього документу можна подати у вигляді самостійної роботи або скористатись функцією відеоконференції для ефективнішої роботи. При цьому можна використовувати різні візуальні методи мозкового штурму, наприклад, діаграми зв’язків, дошка ідей, карти концепцій, діаграми спорідненості, діаграми «Квітка лотоса» і метод зірки [42].

Для домашніх завдань потрібно створювати окремі документи з завданнями за допомогою копіювання оригіналу. Для окремих занять або груп студентів можна створювати окремі папки, які допоможуть систематизувати і відслідковувати виконані завдання або скористатись інтеграцією з Google Drive. Після того як студент виконає завдання, викладач може переглянути документ і залишити свій відгук за допомогою вбудованих коментарів або використати відео зв’язок, щоб дати рекомендації щодо подальшої роботи.

Щоб зробити навчання цікавим і залучити до нього студентів в режимі реального часу, ці дошки дозволяють створювати вікторини, кросворди та інші ігри.

Використовуючи графіки, діаграми, плакати, графічні організатори, інфографіку і так далі, можна простіше пояснити важкий матеріал та систематизувати його. Деякі дошки мають спеціальні бібліотеки з готовими шаблонами для створення різних типів графіків та діаграм, також блок-схем, карт знань, інфографіки тощо. Також можна створювати ці всі типи самостійно, використовуючи наявні інструменти, а також добавляти зображення. Є можливість уже готовий результат експортувати у формати PNG, SVG, JPEG і PDF, для подальшого використання у презентаціях, на сайтах і так далі або просто поділитись покликанням з студентами.

Онлайн-дошки можна використовувати для створення презентації, передньою створивши її структуру, пронумерувавши слайди та до кожного створити заголовок. Для цікавості можна використовувати вже готову інфографіку або залучити до оформлення презентації студентів за допомогою функції спільної роботи.

Усі можливі функції онлайн-дошок могли б допомогти не тільки викладачеві під час заняття, а й студентам. Використовуючи готові шаблони або створюючи власні, студенти можуть вести віртуальні конспекти.

3.4. Онлайн-тестування для контролю знань та засвоєння вивченого матеріалу з теми дослідження

Найпопулярнішою формою контролю рівня знань студентів в умовах дистанційного навчання є тестування.

Контроль знань в онлайн навчанні – це перевірка та оцінювання знань студентів. Сучасні онлайн заняття переважно складаються з двох блоків: теоретичного та практичного, в який і входить тестування.

Виділимо основні функції перевірки засвоєного матеріалу:

- розвиваюча (під час виконання завдань студенти краще засвоюють інформацію і удосконалюють свої знання);
- виховна (регулярна перевірка знань дисциплінує студентів і сприяє формуванню почуття відповідальності);
- контролююча (викладач отримує інформацію про рівень опанування студентами певної інформації);
- діагностична (викладач дізнається які теми студенти сприймають найважче, які помилки вони допускають).

Зазвичай тестування проводиться в трьох випадках:

1) перед навчання (дозволяє оцінити рівень наявних знань);
2) в процесі навчання (допомагає закріпити ключову інформацію);
3) після навчання (допомагає визначити, чому навчився студент).

Варто зазначити, що онлайн тестування може замінити студентам заліки та екзамени.

Розглянемо декілька ресурсів для проведення онлайн-тестування.

Інструмент Google Forms має ряд можливостей, для застосування його під час дистанційного завчання, зокрема це проведення опитувань, а також створення тестів.

Викладач може сам вибирати тип тестування:

- один з списку;
- декілька з списку;

- текст (речення) – коротка відповідь;
- тест (абзац) – розгорнута відповідь на запитання;
- список що розкривається;
- лінійна шкала;
- таблиця з варіантами відповіді;
- сітка (множинний вибір);
- дата;
- час;
- завантаження файлів (наприклад, для здачі домашнього завдання).

Пройдений тест викладач може перевірити або вручну, або налаштувати автоматичну перевірку тесту. Також можна налаштувати, щоб студенти бачили скільки балів набрали, подивилися питання, в яких помилилися. За один урок можна опитати відразу всіх студентів, що призводить до економії паперу, фарби та часу на перевірку. Також для цієї процедури необов’язково потрібні комп’ютери.

Можна налаштувати для кожного варіанта різні номери питань, тоді cnelynfv «важче» буде списати. Відразу можна проводити аналіз роботи як з групою студентів, так і за окремими студентами. Можна додати коментарі викладача до відповіді студентам. Готові Google Форми можна використовувати необмежену кількість разів. За посиланнями можна переходити як на комп'ютері, так і телефоном.

Таблиця 1. Переваги та недоліки Google Forms:

Переваги	Недоліки
Безплатний доступ	Можливість вгадування відповіді
Просте використання	Обмежена можливість перевірки обсягу засвоєного студентами матеріалу
Сервіс доступний на будь-якому пристрої	Для створення і проходження тесту потрібен обліковий запис Google
Автоматична обробка та аналіз результатів	Підготовка до занять займає більше часу, оскільки приходиться самостійно створювати тести.

Різні варіанти застосування	Кількість типів питань та способи їх редагування обмежені
Індивідуальний підхід	Залежність від наявності інтернету
Диференційований підхід	
Індивідуальна робота з студентами, що мають обмежені можливості	
Можливість працювати з студентами дистанційно	

Сервіс Online Test Pad – це безкоштовний, зручний та доступний інструмент для створення тестів.

Даний сервіс дає викладачеві можливість створювати:

- тести з вибором однієї або кількох варіантів відповідей, уведенням числа або тексту у відповіді, а також відповіді у вільній формі; встановлення послідовності та встановлення відповідності; заповнення перепусків тощо;
- опитувальників, анкет;
- кросвордів;
- логічних пар;
- діалогові тренажери.

Використання всіх цих форм дозволяє викладачеві не тільки протестувати студентів, а й дати можливість краще підготуватися до заліків, контрольним роботам, іспитам. Крім того, використання Online Test Pad на занятті дає можливість провести експрес перевірку рівня засвоєння матеріалу з будь-якої теми.

Конструктор тестів дозволяє вставляти зображення як у питання, так і у варіанти відповідей, що дозволяє урізноманітнити навчальні завдання. У тестах на відповідність та відновлення послідовності можна підключити інструмент перетягування (drag-and-drop).

Студенти після виконання тестів одразу можуть бачити свої результати. Активність протестованих фіксується в особистому кабінеті педагога розділ статистика.

Аналіз результатів надається у різних форматах: таблиця із зазначенням даних учасника, відсотком виконання та оцінкою; таблиця з докладними результатами відповіді кожне завдання; статистика окремо з кожного питання та учасника; діаграми за оцінками, за кількістю правильних відповідей та відсотками. По кожному тесту можна отримати статистику відповідей, яку можна завантажити у форматі Excel.

Ще один плюс сервісу Online Test Pad – можливість завантажити створені тести для друку або використання в комп’ютерному класі без доступу до Інтернету.

Kahoot! це безкоштовна навчальна ігрова платформа, яка використовується як унікальна освітня технологія в навчальних закладах по всьому світу. Онлайн сервіс дозволяє оцінювати швидкість та якість засвоєння матеріалу учнями, а також привносить у процес навчання момент змагання та гри.

Kahoot! дозволяє опитувати та тестувати учнів під час аудиторної роботи за допомогою їх особистих мобільних пристроїв, комп’ютера та смартфона викладача, екрана або інтерактивної дошки. Також необхідне підключення до мережі інтернет учнів та викладача.

Kahoot! надає можливість своїм користувачам створювати власні тести та опитування у вигляді інтерактивних онлайн вікторин або використовувати вже створені розробниками та іншими користувачами вікторини. Для створення оригінальної вікторини користувач реєструється на сайті getkahoot.com та отримує доступ до інструментів сервісу.

Сервіс Kahoot! як сучасна освітня технологія, може бути використаний для повторення пройденого матеріалу, для закріплення знань, поточного та проміжного контролю.

Використання командного режиму (Team mode) Kahoot! для поточного та проміжного контролю дозволяє активізувати колективну діяльність студентів, розвинути навички міжособистісного спілкування та згуртувати колектив (Motivate teamwork). Для досягнення кращого ефекту змагань студентів можна розділити на групи.

Після закінчення вікторини на екрані з'являється п'єдестал із трьома найактивнішими та найточнішими у своїх відповідях учасниками. Крім того, викладач може запитати статистику, яку можна проаналізувати. Докладний аналіз результатів дозволить виявити місця у навчанні, які потребують глибшого вивчення чи повторення. Крім того, є можливість вести статистику щодо кожного студента, відстежувати його прогрес та проводити процедуру оцінюючи об'єктивно.

Quizizz – це абсолютно безкоштовний інтернет-додаток, спрямований на навчання студентів, але згодом сервіс став популярним серед учнів. Сервіс встановлює зворотний зв'язок з кожним студентом автоматично, що має значення при дистанційному навчанні.

За допомогою платформи Quizizz можна проводити пізнавальні вікторини, позаурочні заходи, створювати власні тести або вибрати готові, у тому числі задаючи їх у формі домашньої роботи та стежити за результативністю студентів.

Студенти можуть проходити тести через будь-який пристрій, який підтримує Інтернет. Для початку роботи студенту необхідно ввести адресу сайту в адресний рядок та зайти на нього.

Викладачеві математики необхідно попередньо зареєструватися на цьому ресурсі як учитель, щоб з'явилася можливість створювати різні тестові програми. Після цього потрібно зайти в особистий кабінет і формуємо папки, розділені за класами та предметом, у нашому випадку з математики.

Можна скористатися і готовими програмами, які представлені в багатогранній кількості, створені іншими вчителями та розміщені в бібліотеці Quizizz. Їх можна зберігати у вкладці «Колекція», редагувати на свій розсуд і використовувати на своїх заняттях. Власні програми, після їх створення, можна знайти у вкладці «Мої вікторини».

Всі, хто навчається, отримують схожі завдання, але кожен з них на своєму комп'ютері або гаджеті побачить мимовільну послідовність питань і працюватиме з тестом в індивідуальному для себе темпі. На екрані або дисплеї студента з'являється питання з кольоровим зображенням, яке за бажання можна збільшити, і перелік потенційних відповідей.

На даному ресурсі вчитель математики має гарну можливість ефективно керувати всім класом, відстежувати персональну роботу кожного учня та отримувати повну картину активності класу, а також за необхідності експортувати отримані дані до таблиці Excel.

Після повного проходження тесту чи іншого завдання студентам, автоматично формується рейтинг із результатами студентів. Можна відкрити докладний звіт, де відзначаються вірні та невірні відповіді, а також ті завдання, які не встигли пройти. Дані студентів розташовуються від найкращого результату до найгіршого.

Безумовним плюсом для викладача при використанні сервісу Quizizz є те, що на перевірку робіт студентів припадають малі тимчасові витрати. Оскільки всі результати виводяться миттєво, у вигляді звіту про проходження тестування представлені у відсотковому еквіваленті, які можна надалі перевести в бальну шкалу відміток.

Важливими плюсами є:

- зручна та проста форма реєстрації;
- малі тимчасові витрати під час створення власних додатків (трохи більше 15 хвилин);
- автоматична перевірка робіт та вибудовування рейтингу з результатами;
- цікава нетрадиційна форма навчання;
- можливість студентам без реєстрації працювати із завданнями, що забезпечує доступність та суттєво економить час (виключення-режим Контрольна робота).

Звичайно, як і будь-яка платформа даного сервісу має свої мінуси. При організації індивідуальної роботи не можна бути впевненим у тому, що у кожного, хто навчається, буде під рукою смартфон або планшет з виходом в інтернет. На цей випадок можна організувати командну або парну роботу.

ВИСНОВКИ

У даній роботі увага приділяється особливостям викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання.

Основні результати роботи:

- ✓ проведено дослідження навчальної літератури з теми дослідження;
- ✓ дано означення поняття диференціального числення функції однієї змінної;
- ✓ визначено застосування диференціального числення до дослідження функцій та побудови графіків;
- ✓ охарактеризовано особливості викладання диференціального числення функції однієї змінної в умовах дистанційного навчання.

Матеріали магістерської роботи можуть бути використані у роботі викладачів та студентів при вивченні курсу «Диференціальне числення функції однієї змінної».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич М. Д., Куприков С. І. Вища математика. Київ: Київський славістичний університет, 2003, 64 с.

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Матиматика для економістів. Вища математика. Київ : Національна академія управління, 1999. 399 с.

3. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2001. 546 с.

4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник. Київ: Знання, 2007. 454 с.

5. Вища математика : підручник / за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль : вид-во Карп'юка, 2003. 480 с.

6. Вища математика : підручник. У 2-х ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2000. Ч. 1. 592 с.

7. Вища математика : підручник. У 2-х ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2000. Ч. 2. 792 с.

8. Вища математика у прикладах і задачах : навч. посіб. / А. Д. Тевяшев та ін. Київ : Кондор, 2006. 460 с.

9. Вища математика. Збірник задач. У 2-х ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2004. Ч.1. 279 с.

10. Вища математика: збірник задач. / Х. І. Гаврильченко та ін. Київ: Техніка, 2004. 279 с.

11. Вища математика: підручник. / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с. 4.

12. Вища математика: підручник. Спеціальні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ : Либідь, 2003. – 368 с. 5.

13. Геворкян Ю. Л. Теорія границь і диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Київ : ІСДО, 1993. 124 с.

14. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика: навч. посіб. 2-ге видання. Київ: НАУ-друк, 2009. 296 с.

15. Денисюк В. П., Репета В. К., Гаєва К. А., Клешня Н. О. Вища математика. Модульна технологія навчання. : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ : НАУ-друк, 2005. 296 с.

16. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: збірник задач. Київ : А.С.К., 2003. 480 с.

17. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ : Вища школа, 1993. 648 с.

18. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2001. 648 с.

19. Зайцев Є. П. Вища математика. Київ : Алерта, 2018. 608 с.

20. Збірник задач з математики : у 3-х ч. / В. І. Беспальчук та ін.– Житомир: ЖДТУ, 2001. Ч. 1. 162 с.

21. Збірник задач з математики : у 3-х ч. / В. І. Беспальчук та ін.– Житомир: ЖДТУ, 2001. Ч. 2. 176 с.

22. Збірник задач з математики : у 3-х ч. / В. І. Беспальчук та ін.– Житомир: ЖДТУ, 2002. Ч. 3. 156 с.

23. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. 2-ге видання. Київ : Центр навчальної літератури, 2009. 594 с.

24. Кулакевич Л. М., Присяжнюк І. М. Використання дошки Padlet при вивченні математичних дисциплін в умовах Online-навчання. *Наука, освіта, суспільство очима молодих*. Матеріали XV Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених. Рівне: РДГУ, 2022. С. 37-38.

25. Кулакевич Л. М., Присяжнюк І. М. Використання онлайн-дощок при вивченні математичного аналізу в період дистанційного навчання. *Стан та тенденції розвитку науки, освіти та суспільства*. збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Полтава, 15 лютого 2022 р.): у 2 ч. Полтава: ЦФЕНД, 2022. Ч. 1. С. 26-28.

26. Легеза В. П., Мартиненко М. А., Іванова Ю. І. Вища математика: підручник для студ. вищих навч. закладів : у 2 ч. Київ : Четверта хвиля, 2012. Ч.1. 368 с.

27. Легеза В. П., Мартиненко М. А., Іванова Ю. І. Вища математика: підручник для студ. вищих навч. закладів : у 2 ч. Київ : Четверта хвиля, 2014. Ч.2. 368 с.

28. Лиман Ф. М., Власенко В. В., Петренко С. В. Вища математика: навч. посіб. у 2-х частинах. Суми: Вид-во.Університетська книга, 2018. 614 с.

29. Михайленко В. В., Добряков Л. Д. Вища математика: підручник. Житомир: ЖДТУ, 2004 р. 554 с.

30. Морзе Н.В. Інформаційні технології в навчанні : навч. посіб. / за ред. Н.В. Морзе. Київ : Видавнича група BHV, 2004. 240 с

31. Назарова О. П., Рубцов М. О., Іщенко О. А. Індивідуальні завдання з вищої математики. Мелітополь : ТДАТУ, 2011. 236 с.

32. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики. навч. посіб., 3-тє видання. Тернопіль: ТНЕУ вид-во «Економічна думка», 2010. 304с.

33. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник. Київ: Техніка, 2007. 600 с.

34. Основи нових інформаційних технологій навчання : посібник для вчителів / Машбиць Ю. І., Гокунь О. О, Жалдак М. І. та ін.; за ред. Машбиця Ю. І. / Інститут психології ім. Г.С. Костюка АПН України. Київ : ІЗМН, 1997. 264 с.

35. Практикум з вищої математики : навчальний посібник / за ред. В. О. Коваля. Житомир : ЖДТУ, 2008. 448 с.

36. Призва Г. Н., Плахотник В. В., Гординський Л. Д. Вища математика : підручник. Київ : Либідь, 2003. 400 с.

37. Рубцов М. О., Кравець В. І., Назарова О. П. Вища математика : навч. посіб. : у 2-х ч. Мелітополь : ТДАТУ, 2015. Ч.1. 242 с.

38. Свердан П. Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей : підручник. Київ : Знання, 2008. 450 с.

39. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр. Випуск / ред кол. Київ-Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2016. 414 с.

40. Турчанінова Л. І. Вища математика в прикладах і задачах. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 348 с.

41. Що таке дистанційна освіта: як вона працює? URL: http://www.vsemisto.info/osvita/2355-sho-take-vysha-osvita-jakvona-prazjuje. (дата звернення: (06.05.2022).

42. Як організувати простір навчальної взаємодії на Padlet? URL: http://www.kmu.gov.ua/control/uk/photogallery/gallery?gall eryId=15725757& (дата звернення: (06.05.2022).

ДОДАТКИ

Додаток А

Правила диференціювання

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

2. $(uv)' = u'v + uv'$, в тому числі, $(c \cdot u)'c \cdot u'$, де c – число,

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в тому числі, $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-c \cdot v'}{v^2}$ де c – число,

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, де $y = y(u), u = u(x)$,

5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Додаток Б

Формули диференціювання

1. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, в тому числі, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $(a^x)' = a^x lna$, в тому числі, $(e^x)' = e^x$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$, в тому числі, $(lnx)' = \frac{1}{x}$;
4. $(sinx)' = cosx, (cosx)' = -sinx$;
5. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}, (ctgx)' = \frac{-1}{sin^2x}$;
6. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $(arctg)' = \frac{1}{1+x^2}, (arcctg)' = \frac{-1}{1+x^2}$;
8. $(shx)' = chx, (chx)' = shx$;
9. $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}, (cthx)' = \frac{-1}{sh^2x}$.

Додаток В

Тестування

- Google-форми

Тест 6. Розкриття невизначеностей (правило Лопіталя)

kulakevych.liudmyla.mm11@rshu.edu.ua Змінити обліковий запис

Коли ви надішлете відповідь за допомогою цієї форми, ми збережемо вашу електронну адресу

Для чого використовується правило Лопіталя

1 бал

- (•) розкриття невизначеностей
- ( ) знаходження похідних
- ( ) диференціювання
- ( ) логарифмування

Скасувати вибір

1 бал

Формула $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ вказує на теорему

- ( ) Теорема Лагранжа
- ( ) Теорема Тейлора
- ( ) Теорема Коші
- ( ) Теорема Лопіталя

3 бали

Описати як розкриваються невизначеності виду $[0\cdot\infty], [\infty-\infty], [1^{\infty}], [\infty^{0}]$

Ваша відповідь

Надіслати

Очистити форму

- Online Test Pad

Тест 1. Похідна. Диференційованість функції. Диференціал функції

Інструкція

Виберіть одну правильну відповідь

Заповніть форму реєстрації

Прізвище та ім'я студента

Кількість питань у тесті: **8**

Далее

Тест 1. Похідна. Диференційованість функції. Диференціал функції

0.5

1 — 1 из 8

Вкажіть вірний запис похідної функції y=f(x):

- ○ $y_x' = dy$
- ○ $y_x' = dx$
- ○ $y_x' = \frac{dy}{dx}$
- ✔ $y_x' = \frac{dx}{dy}$

0.5

2 — 2 из 8

В чому полягає фізичний зміст похідної першого порядку?

- ○ Середня швидкість зміни функції.
- ✔ Максимальна швидкість зміни функції.
- ○ Миттєве прискорення зміни функції.
- ○ Миттєва швидкість зміни функції.

0.5

3 — 3 из 8

Із якої рівності випливає геометричний зміст похідної

- ✔ $k_{дот.} = k_{січ.} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x0)}{\Delta x} = f'(x_0)$
- ○ $k_{дот.} \approx k_{січ.} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x0)}{\Delta x} = f'(x_0)$
- ○ $k_{дот.} \neq k_{січ.} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x0)}{\Delta x} = f'(x_0)$
- ○ $k_{дот.} = k_{січ.} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

0.5

4 — 4 из 8

Функція f(x) називається диференційованою в точці x, якщо вона має ______ в цій точці.

- ○ нормаль
- ✔ похідну
- ○ дотичну
- ○ інтеграл

5 — 5 из 8

Як позначають диференціал функції?

- $dx = f'x \cdot \Delta x$
- $dfx = f'x \cdot \Delta y$
- $dfx = f(x) \cdot \Delta x$
- ✔ $dfx = f'x \cdot \Delta x$

0.5

6 — 6 из 8

Чи завжди неперервна функція є диференційованою?

- завжди
- ✔ незавжди

0.5

7 — 7 из 8

Якщо функція диференційована, то вона ________

- показникова
- інтегрована
- ✔ неперервна
- логарифмічна

0.5

8 — 8 из 8

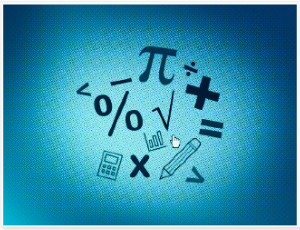
Вказати рівняння прямої, якщо відомий її кутовий коефіцієнт

- ✔ $y - y_0 = k(x - x_0)$
- $y + y_0 = k(x - x_0)$
- $y - y_0 = k(x + x_0)$
- $y + y_0 = k(x + x_0)$

- Kahoot!

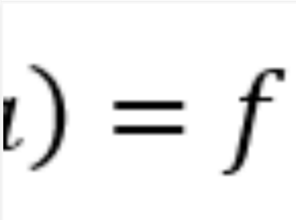
Усі (5) — Пошук

Запитання	Тип	Правильно / неправильно
1 У якій теоремі похідна перетворюється в нуль.	Квіз	100%



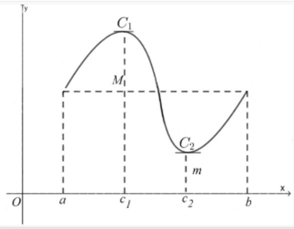
Теорема Лагранжа	✗	0
Теорема Тейлора	✗	0
Теорема Коші	✗	0
Теорема Ролля	✓	1
Немає відповіді	✗	0

2 Як називають формулу	Квіз	0%

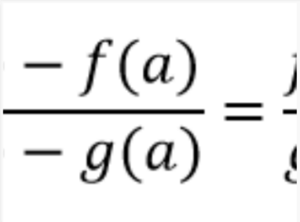


Формула Лагранжа	✓	0
Формула Тейлора	✗	0
Формула Коші	✗	0
Формула Ролля	✗	0
Немає відповіді	✗	1

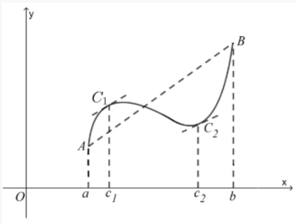
3	На рисунку зображений геометричний зміст теореми	Квіз	0%
	Теорема Лагранжа	✗	0
	Теорема Тейлора	✗	0
	Теорема Ролля	✓	0
	Теорема Коші	✗	0
	Немає відповіді	✗	1



4	До якої теореми відноситься формула	Квіз	0%
	Теорема Лагранжа	✗	0
	Теорема Тейлора	✗	0
	Теорема Коші	✓	0
	Теорема Ролля	✗	0
	Немає відповіді	✗	1



5	На рисунку зображений геометричний зміст теореми	Квіз	0%
	Теорема Лагранжа	✓	0
	Теорема Тейлора	✗	0
	Теорема Коші	✗	0
	Теорема Ролля	✗	0
	Немає відповіді	✗	1



- Quizziz

КОНТРОЛЬНЫЙ ОПРОС

Сохранять 0

Тест 11. Дослідження функцій на екс...

0% средняя точность • 0 игры

University • Mathematics

K Кулакевич Людм...
11 дней

Делиться | Редактировать | Распечатать

1. открытый

5 минуты | 1 точка

Q. Описати, які етапи потрібно виконати для знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

2. Большой выбор

45 секунды | 1 точка


$\Delta f(x_0) < 0$, якщо x_0 – ______

$\Delta f(x_0) > 0$, якщо x_0 – ______

варианты ответов

- опукла, вгнута
- спадає, зростає
- змінює знак на +, –
- точка максимуму, мінімуму

3. Большой выбор

45 секунды | 1 точка

Q. За необхідною умовою точки перегину, друга похідна в точці дорівнює

варианты ответов

- існує
- не існує
- дорівнює нулю
- дорівнює нулю або не існує

4. Большой выбор

45 секунды | 1 точка

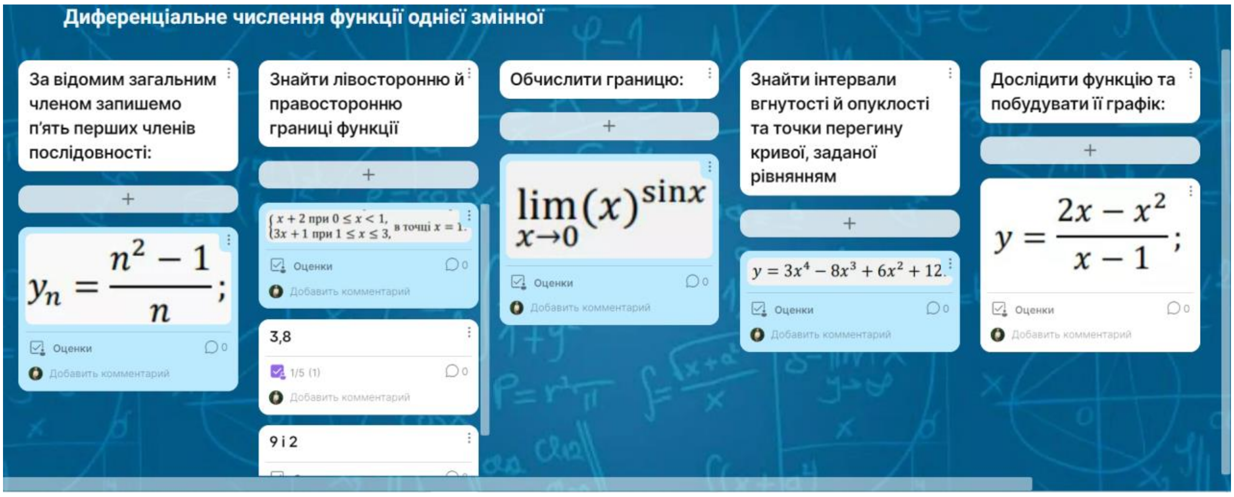
варианты ответов

- не змінює знак
- змінює знак
- змінює площу
- змінює графік

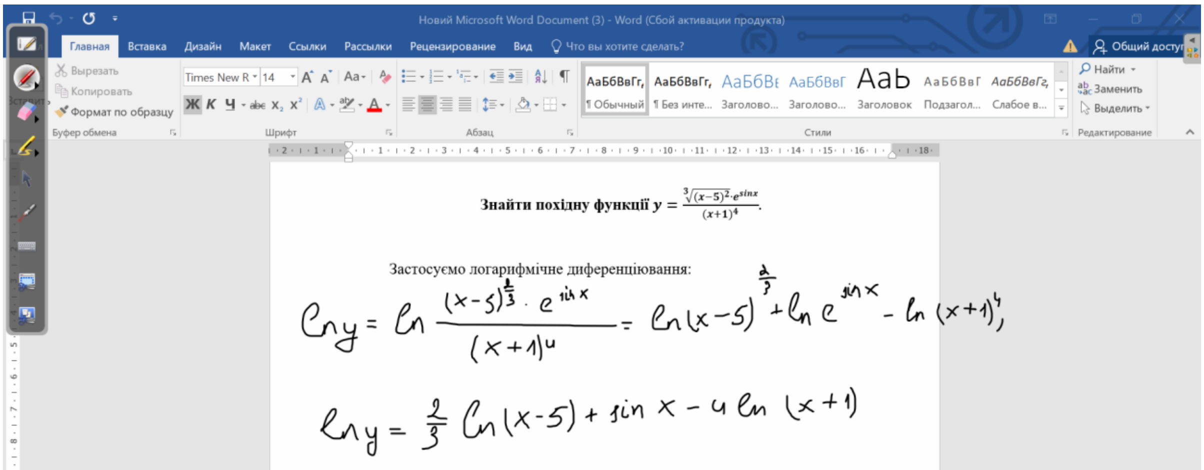
Додаток Г

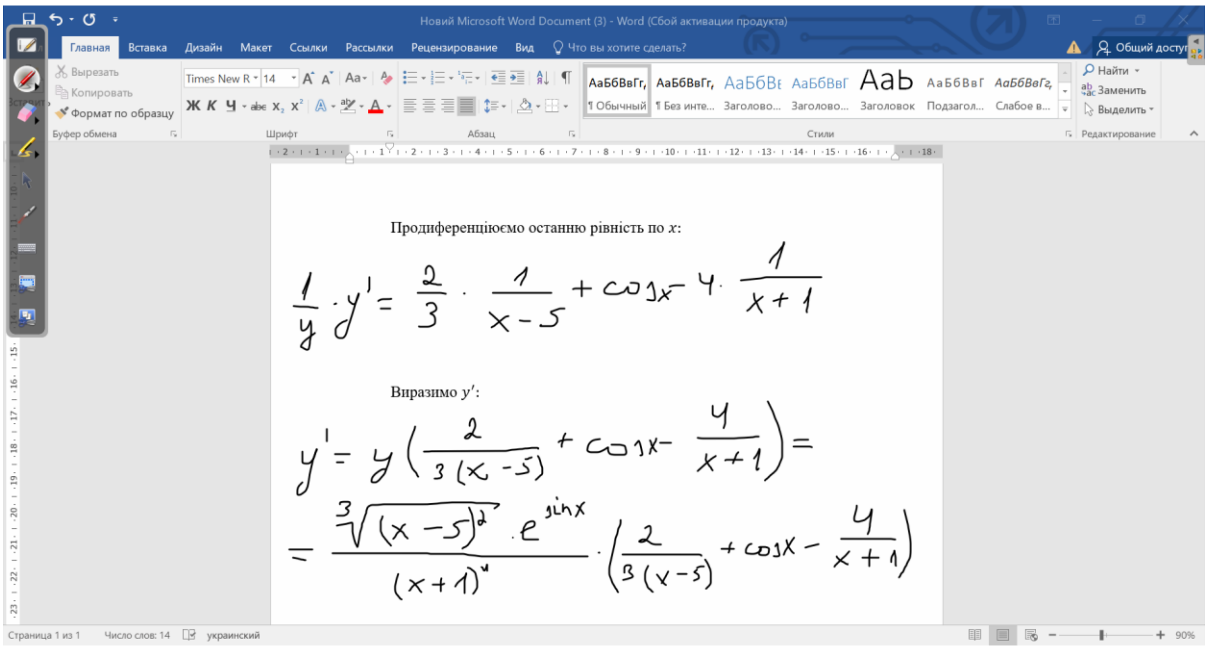
Онлайн-дошки

- Padlet

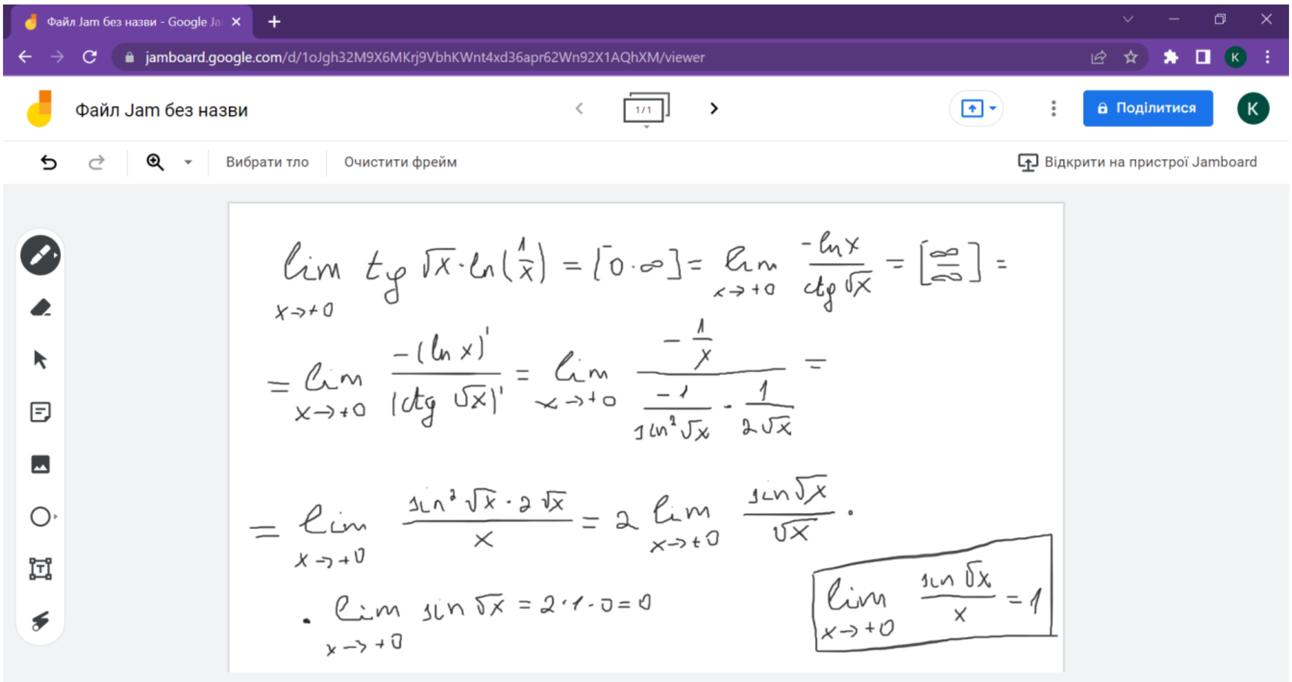


- OpenDoard





- Jambord


Файл Jam без назви - Google Ja
jamboard.google.com/d/1oJgh32M9X6MKrj9VbhKWnt4xd36apr62Wn92X1AQhXM/viewer
Файл Jam без назви
1 / 1
Поділитися
Вибрати тло
Очистити фрейм
Відкрити на пристрої Jamboard
$\lim\limits_{x\to+0} tg\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to+0}\frac{-\ln x}{ctg\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$
$= \lim\limits_{x\to+0}\frac{-(\ln x)'}{(ctg\sqrt{x})'} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$
$= \lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{x} = 2\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot$
$\cdot\lim\limits_{x\to+0}\sin\sqrt{x} = 2\cdot1\cdot0 = 0$
$\boxed{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x} = 1}$

Додаток Д

CENTER FOR FINANCIAL-ECONOMIC RESEARCH
ЦЕНТР ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

CERTIFICATE OF PARTICIPATION
СЕРТИФІКАТ УЧАСНИКА

підтверджує, що

Кулакевич Людмила Миколаївна

взяла участь у роботі Міжнародної науково-практичної конференції

«Стан та тенденції розвитку науки, освіти та суспільства»

International scientific-practical conference

«Status and trends in the development of science, education and society»

Загальна кількість академічних годин: 6 год (0,2 кредита ECTS)

Директор Центру фінансово-економічних наукових досліджень Щербак В. Д.

15 лютого 2022 р.
February 15, 2022

м. Полтава, Україна
Poltava, Ukraine

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Рівненський державний гуманітарний університет
Наукове товариство здобувачів вищої освіти та молодих учених

СЕРТИФІКАТ

засвідчує, що КУЛАКЕВИЧ ЛЮДМИЛА МИКОЛАЇВНА

взяв(ла) участь у XV Всеукраїнській науково-практичній конференції
здобувачів вищої освіти та молодих учених

«НАУКА, ОСВІТА, СУСПІЛЬСТВО ОЧИМА МОЛОДИХ»

17 травня 2022 року, м. Рівне

Підготовка матеріалів, особиста участь у конференції 30 год./1 кредит

Проректор з наукової роботи д.е.н., проф. Дейнега О.В.