Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Стійкість станів рівноваги автономної системи звичайних диференціальних рівнянь

Виконав: студент II курсу магістратури, групи М-М-2

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Моторко Владислав Володимирович

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент______________________________

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Розв’язки більшості диференціальних рівнянь та їх систем не виражаються через елементарні функції, через що при розв’язуванні конкретних рівнянь застосовуються наближені методи інтегрування. Водночас, часто буває необхідно знати не конкретні чисельні розв’язки, а особливості розв’язків: поведінка окремих розв’язків при зміні параметрів систем, взаємна поведінка розв’язків за різних початкових даних, чи є розв’язок періодичним, як змінюється загальна поведінка системи при зміні параметрів. Усі ці питання вивчає якісна теорія диференціальних рівнянь.

Своїй появі теорія стійкості зобов’язана науковцям, яка намагались пояснити існування різних типів космічних об’єктів шляхом розв’язку класичної проблеми рівноваги n тіл у однорідних середовищах, що обертаються.

Найбільш важливі результати в цьому напрямку були отримані в кінці XIX століття вченим А.М. Ляпуновим, який не тільки ввів достатньо загальне поняття стійкості руху, але і створив ефективні методи його дослідження. В останні роки свого життя А.М. Ляпунов працював в Одеському університеті і читав лекції на тему: «Про форму небесних тіл».

На прикладі лінійних диференціальних рівнянь (систем лінійних диференціальних рівнянь і лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку) особливо детально можна зрозуміти основні ідеї, положення і методи теорії стійкості за Ляпуновим. Отримані для таких рівнянь результати є закінченими і досить зрозумілими.

Метою даної магістерської роботи є аналіз, узагальнення і систематизація матеріалів про стійкість станів рівноваги автономної системи звичайних диференціальних рівнянь.

З цією метою були поставлені такі **завдання** дослідження:

- здійснити огляд літератури за темою дослідження;
- дати визначення поняття автономної системи;
- дослідити властивості та види автономних систем;

- охарактеризувати перший та другий метод Ляпунова;
- навести приклади дослідження розв’язків автономних систем рівнянь на стійкість.

Об’єкт дослідження є процес дослідження стійкості станів рівноваги автономної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Предметом дослідження є система задач, яка спрямована на формування вміння розв’язувати задачі на дослідження стійкості.

Апробація результатів дослідження. За результатами роботи було підготовлено доповідь на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2023 рік.

Структура роботи. Структурно робота складається з трьох розділів, які поділяються на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 73 сторінок.

РОЗДІЛ 1. АВТОНОМНА СИСТЕМА ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Загальні відомості про автономні системи

Автономною називають систему звичайних диференціальних рівнянь, якщо до неї явно не входить незалежна змінна t, яку інтерпретують як час [3].

У векторному записі автономна нормальна система має вигляд

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \tag{1.1}$$

Автономність системи (1.1) полягає в тому, що її права частина $\vec{f}(\vec{x})$ є вектор функцією змінних $x_1, \dots, x_n$ і не залежить від часу t.

Припустимо, що умови теореми існування та єдиності розв'язку виконані в деякій області $G \subset R^n$, в якій координатами точки є $(x_1, \dots, x_n)$. Область G може бути як обмеженою, так і необмеженою. Зокрема вона може збігатися з усім простором R^n. Таким чином, припускаємо неперервність функцій

$$f_i(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \ (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

на множині G. Надалі будемо застосовувати позначення

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім наслідком автономності є така властивість розв'язків системи (1.1). Якщо $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ є розв'язком автономної системи, то $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + \text{c})$ де с − стала, також є розв'язком цієї системи. Введемо позначення $\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(t + c)$ та доведемо, що $\vec{\psi}(t)$ – розв'язок. Справді, використовуючи правило диференціювання складеної функції отримаємо [10]:

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t + \text{c}).$$

В тотожності $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t)\big)$, яка має місце для розв'язку $\vec{\varphi}(t)$ замінимо t на $t + \text{c}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t+\text{c}) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t+x)\big).$$

Враховуючи введене позначення, ця тотожність означає, що $\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \vec{f}\left(\vec{\psi}(t)\right)$, тобто $\vec{x} = \vec{\varphi}(t+\text{c}) = \vec{\psi}(t)$ – розв'язок.

Кожен розв'язок $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ автономної системи (1.1) визначає рух точки з координатами $(x_1, \dots, x_n)$ у просторі R^n. Траєкторію цього руху називають фазовою траєкторією. Фазова траєкторія дає не зовсім повне уявлення про розв'язок, ніж процес руху $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$. Часто цю неповноту заповнюють вказанням на фазовій траєкторії напрямку руху вздовж цієї траєкторії [16].

Якщо поряд із розв'язком $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ розглядається інший розв'язок $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ тієї ж системи (1.1), то фазові траєкторії, відповідні цим розв'язкам, або не перетинаються в R^n, або збігаються. Нехай фазові траєкторії мають спільну точку

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2). \tag{1.2}$$

Нехай $\text{c} = t_1 - t_2$ і $\vec{\gamma}(t) = \vec{\varphi}(t+\text{c})$. З огляду на властивості автономної системи $\vec{\gamma}(t)$ є розв'язком цієї системи. З (1.2) випливає рівність

$$\vec{\gamma}(t_2) = \vec{\varphi}(t_2+\text{c}) = \vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2),$$

з якої видно, що розв'язки $\vec{\gamma}(t)$ і $\vec{\psi}(t)$ мають у момент t_2 однакові початкові значення і враховуючи теореми єдиності вони збігаються:

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\gamma}(t) = \vec{\varphi}(t+\text{c}).$$

Таким чином, область $G \subset R^n$, в якій задана права частина автономної системи $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, розшаровується на фазові траєкторії, що не перетинаються. Цей простір називають фазовим простором автономної системи [17].

1.2. Властивості розв'язків автономних систем

Нехай

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega \tag{1.3}$$

– векторний запис автономної системи, причому вектор-функція $\vec{f}(\vec{x})$ задовольняє початкові умови.

Властивість 1.1. Якщо $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – розв'язок рівняння (1.3), то $\vec{x} = \vec{\varphi}_i(t) = \vec{\varphi}(t + C)$ де C – константа, також є розв'язком рівняння (1.3).

Доведення. Так як $\vec{\varphi}(t)$ – розв'язок, то маємо тотожність

$$\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t)\big).$$

Замінивши тут t на $t + C$, отримаємо:

$$\vec{\varphi}(t + C) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t + C)\big).$$

З іншого боку, з правил диференціювання складеної функції випливає співвідношення

$$\vec{\varphi}_i(t) \equiv \vec{\varphi}(t + C).$$

Таким чином, отримаємо тотожність

$$\vec{\varphi}_i(t) \equiv \vec{f}\big(\vec{\varphi}_i(t)\big).$$

Властивість 1.2. Нехай $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ і $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ – два розв'язки рівняння (1.3). Тоді фазові траєкторії, що відповідають цим розв'язкам, або не перетинаються, або співпадають. Саме такі траєкторії мають хоча б одну спідку точку, тобто знайдуться такі t_1 і t_2, що

$$\vec{\varphi}(\, t_1) = \vec{\psi}(t_2), \tag{1.4}$$

то

$$\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + c), \text{ де } c = t_1 - t_2. \tag{1.5}$$

Рівність (1.5) показує, що фазові траєкторії, що описані першим і другим розв'язками, співпадають між собою, але перший розв'язок описує ту ж саме траєкторію, що і другий, з запізненням на час c. Якщо точка, що відповідає першому розв'язку, досягла деякого положення на траєкторії в момент часу $t + c$, то точка, відповідає другому розв'язку, вже була в цьому положенні в момент часу t [14].

Доведення. Оскільки $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – розв’язок, то в силу властивості 1, вектор-функція $\vec{x} = \vec{\varphi}_i(t) = \vec{\varphi}(t + c)$, де $c = t_1 - t_2$ також є розв’язком (1.3). при цьому в силу рівняння (1.4) маємо:

$$\vec{\varphi}_i(t_2) = \vec{\varphi}(t_2 + c) = \vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2).$$

Таким чином, розв’язки $\vec{x} = \vec{\varphi}_i(t)$ і $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ рівняння (1.3) мають загальні початкові умови (їх значення в момент часу t_2 співпадають) і тому в силу теореми єдиності співпадають, то, що маємо:

Властивість 1.3. Нехай

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \tag{1.6}$$

– деякий розв’язок рівняння (1.2.2*). Припустимо, що має місце рівність

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2), t_1 \neq t_2, \tag{1.7}$$

де числа t_1 і t_2 зрозуміло, належать інтервалу $r_1 < t < r_2$ визначення розв’язку (1.6). При цій умові розв’язок (1.6) може бути продовжено на весь нескінченний інтервал $-\infty < t < +\infty$ Тому будемо вважати, що розв’язок (1.6) визначений на всій осі $-\infty < t < +\infty$. Далі, можливі два взаємно випадки [27].

а) Для всіх значень t має місце рівняння

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{a},$$

де $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ точка множини, що не залежить від t. Таким чином, в цьому випадку фазова траєкторія представляє собою нерухому точку. Самий розв’язок (1.6) і точка $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ в цьому випадку називається станом рівноваги системи (1.3).

б) Існує таке додатне число T_0, що при довільному t має місце рівність

$$\vec{\varphi}(t + T_0) = \vec{\varphi}(t),$$

але при $|t_1 - t_2| < T_0$ має місце нерівність

$$\vec{\varphi}(t_1) \neq \vec{\varphi}(t_2).$$

В цьому випадку розв’язок (1.6) називається періодичним з періодом T_0 і його фазова траєкторія називається замкненою траєкторією або циклом.

Коротко, властивість 3 можна записати так: є три види фазових траєкторії: 1) стан рівноваги; 2) періодичні траєкторії (цикли); 3) траєкторії без самоперетинів.

Таким чином, через кожну точку області W задання системи (1.3) проходить траєкторія, що зображає розв'язок системи. Тому, вся область W заповнена траєкторіями, причому, враховуючи властивість 2, ці траєкторії попарно не перетинаються. Серед всіх траєкторій найбільше виділяються ті, які самоперетинаються і є або станом рівноваги, або циклами [5].

Властивість 1.4. Для того, щоб точка $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ множини була станом рівноваги системи (1.3), тобто щоб існував розв'язок $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системи, для якого $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{a}$ необхідно і достатньо, щоб вазова швидкість $\vec{f}(\vec{a})$ в точці дорівнювала нулю. Таким чином для знаходження всіх станів рівноваги системи (1.3) потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\vec{f}_i(a_1, \dots, a_n) = 0, i = 1,2, \dots, n.$$

1.3. Перші інтеграли

Функція $u(x)$ називається першим інтегралом автономної системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad (1.3.1)$$

якщо вона стала вздовж кожної траєкторії цієї системи. Таким чином, якщо $x = \varphi(t)$ – розв'язок системи (1.3.1), то функція $u(\varphi(t)) \equiv const$ при всіх t.

Теорема 1.1. Для того щоб функція $u(x)$ була першим інтегралом системи (1.3.1), необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла рівність

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) = 0. \qquad (1.3.2)$$

Доведення. Нехай $u(x)$ – перший інтеграл (в деякій області D) і $x = \varphi(t)$ – розв'язок системи (1.3.1). Тоді функція $w(t) = u(\varphi(t))$ – стала, так що $\dot{u}(x) \equiv 0$ на цій траєкторії, і з

$$\dot{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) \equiv \big(\nabla u(x), f(x)\big), \qquad (1.3.3)$$

випливає (1.3.2). Нехай співвідношення (1.3.2) виконується в області D і $x = \varphi(t)$ –рівняння фазової траєкторії, що лежить в області D. Тоді

$$\frac{d}{dt} u\big(\varphi(t)\big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x)|_{x=\varphi(t)} = 0$$

враховуючи (1.3.2), тобто $u\big(\varphi(t)\big)$ не залежить від t.

Зауваження 1.1. Аналогічне твердження вірне і при неавтономній системі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x);$$

умова (1.3.2) замінюється наступним:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} f_j(t,x) = 0. \qquad (1.3.4)$$

Зауваження 1.2. Умова (1.3.2) має простий геометричний сенс. Вектор $\nabla u(x)$ ортогональний до гіперповерхні $S: u(x) = c$; із умови (1.3.2) випливає, що вектор $f(x)$ дотикається до поверхні S, так як він ортогональний вектору $\nabla u(x)$. Тому фазова траєкторія γ, що проходить через точку $x_0 \in S_1$лежить на гіперповерхні S так що $u(x) \equiv c$ на γ [11].

Наслідок 1.1. Перші інтеграли інваріантні відносно вибору системи координат.

Зробимо обернену заміну змінних $x = \varphi(y)$ тоді система (1.3.1) перейде в систему

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{f}(y). \qquad (1.3.1^*)$$

Якщо $u(x)$ – перший інтеграл системи (1.3.1), то функція $\tilde{u}(y) = y(\varphi(y))$ – перший інтеграл системи (1.3.1*). Справді, $\dot{\tilde{u}}(y) = \dot{u}(x) = 0$, тобто функція $\tilde{u}(y)$ задовольняє співвідношення (1.3.2), яке записане через змінну y:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_j} \tilde{f}(y) = 0.$$

Приклад 1.1. Розв’язок системи

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \frac{dy_n}{dt} = 1 \qquad (1.3.5)$$

задається формулами

$$y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = t + c_n.$$

Функції $v_1(y) = y_1, \dots, v_{n-1}(y) = y_{n-1}$ – перші інтеграли цієї системи. Будь-який перший інтеграл системи (1.3.5) є функцію, що не залежить від y_n: $u(y) = w(y_1, \dots, y_{n-1})$ [20].

В цьому прикладі є $(n-1)$ незалежних перших інтегралів і будь-який перший інтеграл є функцією від них. Таке ж саме твердження, справедливе для будь-якої автономної системи. [1]

Теорема 1.2. Нехай точка a не є станом рівноваги автономної системи (1.3.1). Тоді в деякому околі U точки a існує $n-1$ незалежних перших інтегралів $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ і кожен перший інтеграл $u(x)$ є функцією від них, тобто

$$u(x) = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)). \qquad (1.3.6)$$

Доведення. Нехай окіл U достатньо малий, тоді існує окіл V точки $y = o$ і обернена заміна змінних ,$x = \varphi(y)$ що перетворює систему (1.3.1) у вигляд (1.3.5). Отримана система має незалежні перші інтеграли $v_1(y) = y_1, .., v_{n-1}(y) = y_{n-1}$, і кожен перший інтеграл $v(y)$ є функцією від них: $v(y) = F\big(v_1(y), \dots, v_{n-1}(y)\big)$. При оберненій заміні змінних $y = \psi(x)$ ці перші інтеграли переходять в перші інтеграли $u_1(x), .., u_{n-1}(x)$ системи (1.3.1), які також незалежні, $v(y)$ перейде в перший інтеграл $u(x)$, звідки випливає (1.3.6).

Приклад 1.2. В теоремі 2 припускається, що точка a не є станом рівноваги системи (1.3.1). Ця умова суттєва: наприклад, будь-який перший інтеграл системи

$$\dot{x} = x, \dot{y} = y,$$

неперервний в околі стану рівноваги $(0, 0)$, є тотожна стала. Справді, фазові траєкторії цієї системи – промені $x = Ae^t, y = Be^t$, що виходять з початку координат. Перший інтеграл $u(x, y)$ сталий вздовж будь-якого такого променя і із неперервності u в початку координат випливає, що $u \equiv const$. В цьому прикладі будь-який перший інтеграл має вигляд $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (якщо розглядати область, що не містить осі x); або можна записати перший інтеграл у вигляді $u(x, y) = F(\varphi)$, де φ – полярний кут.

Перший інтеграл $u(x)$ – це деякий закон збереження: при русі точки вздовж фазової траєкторії $x = \varphi(t)$ величина $u(x)$ зберігає теж значення, що і в початковий момент часу. Саме із таких міркувань (таких як закон збереження) було отримано багато перших інтегралів диференціальних рівнянь класичної механіки.

Приклад 1.3. Функція Гамільтона $H\,(x, p)$ є першим інтегралом гамільтонової системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H\,(x,p)}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H\,(x,p)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Справді, похідна функції H враховуючи систему дорівнює

$$\dot{H}\,(x,p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Функція Гамільтона – це енергія відповідної механічної системи, і той факт, що вона є першим інтегралом, виражає закон збереження енергії.

Приклад 1.4. Одновимірний рух матеріальної точки масою m в потенціальному полі описується рівнянням Ньютона

$$m\ddot{x} = -U'(x).$$

Його перший інтеграл – це функція $v\,(x, \dot{x})$, яка стала при $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$, де $x = \varphi(t)$ – розв’язок. Помноживши обидві частини рівняння на $\dot{x}$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mx^2}{2} + U(x)\right) = 0,$$

так що

$$\frac{mx^2}{2} + U(x) = E,$$

де E – стала. Ліва частина цього рівняння – перший інтеграл. Він називається інтеграл енергії, так як дорівнює семі кінетичної енергії і потенціальної енергії. Аналогічно доводиться, що система рівнянь Ньютона

$$m\ddot{x} = -\nabla U(x), x = (x_1, \dots, x_n),$$

має перший інтеграл (інтеграл енергії)

$$\frac{mx^2}{2} + U(x) = E. \qquad (1.3.7)$$

Для доведення достатньо помножити обидві частини системи скалярно на вектор $\dot{x}$.

Якщо відомий перший інтеграл системи, то її порядок можна понизити на одиницю. Для наочності розглянемо автономну систему із трьох рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, x), \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \qquad (1.3.8)$$

і нехай $u(x, y, x)$ – перший інтеграл. Рівняння $u(x, y, x) = c$ визначає поверхню S в просторі (для цього достатньо, щоб $\nabla u \neq 0$ на S). Ця поверхня розшаровується на фазові траєкторії. Справді, нехай γ – фазова траєкторія, задана рівняннями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$

і нехай точка $(x_0, y_0, z_0) = P_0$, що відповідає значенню $t = t_0$ лежить на S. Так як $u(x_0, y_0, z_0) = c$ і функція u зберігає стале значення вздовж γ, то $u(x, y, z) = c$ вздовж γ, тобто крива γ лежить на поверхні S.

Нехай, для визначеності $\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} \neq 0$; всі наступні дії будемо розглядати в малому околі точки P. За теоремою про неявні функції із співвідношення $u(x, y, z) = c$ можна виразити z через x, y так, що

$$z = \varphi(x, y, c). \qquad (1.3.9)$$

Тоді система (1.3.8) зводиться до системи із двох рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a\big(x, y, \varphi(x, y, c)\big),$$
$$\frac{dy}{dt} = b\big(x, y, \varphi(x, y, c)\big).$$

Розв'язавши цю систему, відновимо z за формулою (1.3.9). Третє рівняння в системі (1.3.8) перетвориться в тотожність. Аналогічно доводиться, що якщо відомий перший інтеграл системи з n рівнянь (1.3.1), то її можна звести до системи із $(n-1)$ рівняння.

Якщо відомі два (незалежні) перших інтеграли $u(x,y,z), v(x,y,z)$ системи (1.3.8), то ця система інтегрується. Дійсно, розглянемо поверхні S_1, S_2, які задані рівняннями

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= c_1, \\ v(x,y,z) &= c_2. \end{aligned} \qquad (1.3.10)$$

Нехай γ – лінія їх перетину, тоді –фазові траєкторія. Справді, випустимо з деякої точки $P_0 \in \gamma$ фазову траєкторію; по доведеному вище вона повинна лежати і на поверхні S_1 і на поверхні S_2, а тому збігається з γ.

Таким чином, інтегрування системи (1.3.8) зводиться до того, щоб із системи (1.3.10) виразити одну змінну через дві інших.

1.4. Дослідження фазових кривих

Нехай в деякій точці $\vec{a} \in G \subset R^n$ права частина автономної системи дорівнює нулю. В такому випадку точка $\vec{a}$ називається точкою спокою або станом рівноваги автономної системи. Вектор-функція $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{a}$ при $\vec{f}(\vec{a}) = 0$ є розв'язком системи (1.1.1). Стан рівноваги є цілою траєкторією. Оскільки фазові траєкторії не перетинаються, інші фазові траєкторії не входять до точки спокою, а можуть необмежено наближатися до неї [2].

Криву називають гладкою, якщо в кожній своїй точці вона має ненульовий вектор. Наприклад, крива з параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = t^2, \end{cases} t \in (-\infty;\ +\infty)$$

має дотичний вектор із компонентами $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 2t$. Довжина цього вектора $\dot{\vec{x}} = \sqrt{1+4t^2}$ ні при якому t не перетворюється на нуль, тому ця крива (парабола) є гладкою. Крива

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = |t|, \end{cases} t \in (-\infty;\ +\infty)$$

немає дотичної в точці $(0,0)$ і не є гладкою у цій точці. Крива

$$\begin{cases} x_1 = t - sint, \\ x_2 = 1 - cost, \end{cases} t \in (-\infty;\ +\infty)$$

має дотичний вектор в кожній своїй точці

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - cost, \\ \dot{x}_2 = sint, \end{cases} t \in (-\infty;\ +\infty),$$

але цей вектор перетворюється в нульовий при $t = 2\pi k$, де k – ціле число. В точках, відповідних значенням параметра гладкість кривої порушується.

Фазова траєкторія рівняння (1.11.), відмінна від стану рівноваги а така, що задається розв'язком $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ цього рівняння, в будь-якій своїй точці $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0)$ має дотичний вектор $\dot{\varphi}(t_0) = \vec{f}(\vec{\varphi}(t_0)) \neq 0$, тобто є гладкою кривою [9].

Можна довести, що можливі лише три типи фазових траєкторій: 1) точка; 2) замкнута гладка крива (цикл); 3) гладка крива без самоперетинів.

Якщо розв'язок $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ визначає у фазовому прості замкнену гладку криву, тобто цикл, то цей розв'язок періодичний:

$$\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t), T > 0.$$

Як приклад, розглянемо фазові траєкторії автономної системи першого порядку $\dot{x} = x^2 - 1$. Фазовий простір цієї системи одновимірний. Прирівнюючи до нуля праву частину: $x^2 - 1 = 0$, знайдемо точки, в яких фазова швидкість дорівнює нулю, тобто точки спокою: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Ці точки розбивають фазову пряму на три проміжки: $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$, які є фазовими траєкторіями. На першому і третьому проміжку фазова швидкість додатна, що зображувальна точка по цих траєкторіях рухається вправо. На проміжку $(-1, 1)$ фазова швидкість від'ємна і зображувальна точка рухається вліво [9].

Зіставимо геометричну інтерпретацію розв'язків (1.1.1.) у просторі R^{n+1}, яке іноді називають розширеним фазовим простором, та геометричну інтерпретацію у фазовому просторі R^n. Геометрична інтерпретація розв'язку

$\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системи (1.1.1) ставить у відповідність цьому розв'язку криву K в $(n+1)$-мірному просторі змінних $t, x_1, \dots, x_n$, що називається інтегральною кривою. Тут t є однією з координат у просторі R^{n+1}. Перехід до інтерпретації у n-вимірному фазовому просторі змінних $x^1, \dots, x^n$ полягає у тому, що величину t не вважаємо координатою точки, а вважаємо її параметром. Таким чином, фазова траєкторія L отримується з кривої K в результаті проектування простору R^{n+1} на простір R^n у напрямку осі t [16].

Геометричну наочність це проектування набуває при $n = 2$. У цьому випадку простір R^{n+1} тривимірний, а простір R^n є площиною. Наприклад, кожий розв'язок автономної системи рівнянь

$$\dot{x} = -\omega y, \dot{y} = \omega x$$

записують у вигляді

$$x = r \cdot \cos(\omega t + \alpha), y = r\alpha \sin(\omega t + \alpha),$$

де r і α – сталі. Розв'язок визначає у тривимірному просторі змінних t, x, y гвинтову спіраль при $r \neq 0$ і пряму лінію при $r = 0$. У фазовій площині R^2 змінних x і y розв'язок визначає коло при $r \neq 0$ і точку (становище рівноваги) при $r = 0$. Перехід від кривих у просторі R^3 до кривих на площині R^2 здійснюється проектуванням у бік осі t на координатну площину xy.

Таким чином, автономна система у фазовому просторі визначає векторне поле фазових швидкостей, а у розширеному фазовому просторі – поле напрямків. Розв'язок автономної системи у фазовому просторі визначає фазову траєкторію, а розширеному фазовому просторі – інтегральну криву [13].

Розглянемо властивість розв'язків автономної системи, яку називають груповою властивістю. Позначимо через $\vec{x}(t;\ \vec{x}_0)$ розв'язок початкової задачі для (1.1.1), що набуває значення $\vec{x}_0$ при $t = 0$, тобто $\vec{x}(0;\ \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Тоді

$$\vec{x}(t_1 + t_2;\ \vec{x}_0) = \vec{x}\big(t_2; \vec{x}(t_1;\ \vec{x}_0)\big). \qquad (1.4.1)$$

Справді, вектор-функції $\vec{\varphi}(t) = \vec{x}\big(t; \vec{x}(t_1;\ \vec{x}_0)\big)$ і $\vec{\psi}(t) = \vec{x}(t_1 + t_2;\ \vec{x}_0)$ є розв'язками (1.1.1). При вони набувають однакових значень:

$$\vec{\varphi}(0) = \vec{x}(t_1), \vec{\psi}(0) = \vec{x}(t_1).$$

За теоремою про єдиність розв'язку вони збігаються, що доводить (1.4.1). Поклавши у співвідношенні (1.4.1) $t_1 = t, t_2 = -t$, отримаємо

$$\vec{x}\big(-t; \vec{x}(0;\ \vec{x}_0)\big) = \vec{x}_0. \qquad (1.4.2)$$

1.5. Випадок автономної системи Гамільтона

Розглянемо гамільтонову систему рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n.$$

Функція $H(x,p)$ називається функцією Гамільтона. Фазовий простір гамільтонової системи має розмірність $2n$: його точки мають координати $(x_1, \dots, x_n, p_1, .., p_n)$ [29].

Наслідок 1.2. Гамільтонова система зберігає фазовий об'єм.

Цей наслідок часто називають теоремою Ліувілля; вона відіграє важливу роль в статистичній механіці.

Введемо функцію Гамільтона

$$H = -L + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i, \qquad (1.5.1)$$

де $H, L, \dot{x}_i$ розглядаються як функції від t, x, p і з'ясуємо як перетворюється рівняння руху

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n. \qquad (1.5.2)$$

при переході до цих змінних. Знайдемо dH, використовуючи інваріантність першого диференціала відносно вибору незалежних змінних. Маємо

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i, \qquad (1.5.3)$$

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^{n} p_i d\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i dp_i. \qquad (1.5.4)$$

Диференціал dL дорівнює

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}d\dot{x}_i$$

і враховуючи, що

$$p_i = \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{d\dot{x}_i}, i = 1, \dots, n,$$

цей вираз дорівнює

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^{n}p_i d\dot{x}_i. \qquad (1.5.5)$$

При підстановці (1.5.5) в (1.5.4) члени, які містять $d\dot{x}_i$, взаємно перемножуються, і в результаті отримуємо

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i dp_i. \quad (1.5.6)$$

Порівнюючи цей вираз з (1.5.3), маємо

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i.$$

Використовуючи ці співвідношення, рівняння (1.5.6) можна записати у вигляді

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (1.5.7)$$

Ця система із $2n$ рівняння першого порядку, еквівалентна системі (1.5.2), називається канонічною (або гамільтоновою) системою рівнянь. Кожному функціоналу вигляду

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dx$$

відповідає канонічна система рівнянь.

РОЗДІЛ 2. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Перший метод Ляпунова

2.1.1. Основні поняття та означення стійкості за Ляпуновим

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), t \geq t_0, \qquad (2.1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.1), $f(x,t)$ – вектор-функція розмірності n, яка задовольняє умови теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші. Позначимо $x(t, x_0, t_0)$ розв’язок задачі Коші (2.1), $x(t_0) = x_0, t \geq t_0$ [12].

Розв’язок, який досліджується на стійкість називається незбуреним. Знайдемо розв’язок системи (2.1), який відповідає зміненим (збуреним) початковим умовам, попередньо замінивши умови, що відповідають незбуреному розв’язку. У теорії стійкості отриманий розв’язок називається збуреним розв’язком [6].

Не обмежуючи загальності, буде вважати, що є незбуреним розв’язком. В іншому випадку змінну можна змінити на систему диференціальних рівнянь, незбурений розв’язок якої дорівнює нулю.

Справді, нехай $z(t)$ є незбуреним розв’язком. Зробимо заміну

$$x = y + z(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = f(x,t) - f(z)t),t) = f(y + z(t),t) - f(z(t),t).$$

Позначимо

$$F(y,t) = f(y + z(t),t) - f(z(t),t).$$

Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = F(y,t),$$

для якої $y(t) = 0, t \geq t_0$ є незбуреним розв’язком.

Тоді, можна вважати, що $x(t) = 0, t \geq t_0$ є розв'язком системи (2.1), що досліджується на стійкість, а отже є незбуреним. Розв'язки відмінні від даних називаються збуреними. Зазначимо, що $x(t) = 0, t \geq t_0$ є точкою рівноваги системи (2.1) так як за означення розв'язку з (2.1) випливає $F(0, t) = 0$, $t \geq t_0$ [13].

Означення 2.1. Незбурений розв'язок $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (2.1) називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon, \qquad t \geq t_0$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

В означенні 2.1. має місце $0 < \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon$. Нульовий розв'язок системи (2.1) називається рівномірно стійким за Ляпуновим, якщо в означенні 2.1. $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$ [7].

Означення 2.2. Незбурений розв'язок $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (2.1) називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він є стійким за Ляпуновим, тобто має місце означення 2.1 та існує $\Delta > 0$ для якого

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0, \|x_0\| \leq \Delta.$$

Множина

$$\Omega(t_0) = \left\{x_0 \in R^n :\ \lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0\right\}$$

називається областю абсолютної стійкості нульового розв'язку системи (2.1)

Якщо $\Omega(t_0) = R^n$ то незбурений розв'язок $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (2.1) називається асимптотично стійким в цілому або глобально асимптотично стійким. Якщо нульовий розв'язок системи (2.1) є глобально асимптотично стійким, то $\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$ для довільного $x_0 \in R^n$ [15].

Означення 2.3. Якщо означення 2.1 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ системи (2.1) називається стійким за Ляпуновим.

2.1.2. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.2)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.2), $A(t)$ – $n \times n$-матриця з непервинними компонентами $t \geq t_0$. Тоді загальний лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (2.2) можна записати у формі Коші

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0, \qquad t \geq t_0 \qquad (2.3)$$

де $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (2.2), нормована за моментом часу $t_0, x(t_0) = x_0$. За означенням фундаментальної матриці

$$\frac{dX(t, t_0)}{rt} = A(t)X(t, t_0), \qquad X(t, t_0) = E, \qquad (2.4)$$

де E – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Не обмежуючи загальності $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. Або ж робимо заміну змінних і отримуємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь з матрицею $A(t)$. Справді, нехай $z(t)$ є незбуреним розв'язком. Зробивши заміну $x = y + z(t)$, отримаємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = f(x, t) - f(z)t), t) = f(y + z(t), t) - f(z(t), t).$$

Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

для якої $y(t) = 0,\ t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. Отже, характер стійкості нульового розв'язку системи (2.2) визначає характер стійкості будь-якого незбуреного розв'язку цієї системи [6].

Аналізуючи властивості фундаментальної матриці $X(t, t_0)$, вирішується проблема стійкості вихідного розв'язку досліджуваної системи (2.2).

Теорема 2.1. Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2.2) був стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ цієї системи була обмеженою, $t \geq t_0$ [13].

Доведення. Доведемо спочатку необхідну умову від супротивного. Нехай нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпуновим, і її фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ необмежена, $t \geq t_0$. Тобто, серед всіх стовпців матриці $X(t,t_0)$ існує хоча б один j-й стовпець $x^{(j)}(t)$, а також послідовність $t_k \geq t_0, k = 1,2 \dots$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x^{(j)}(t_k) \right\| = \infty.$$

Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Так як нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпунови, то за означенням 2.1. існує $\delta.0$ таке, що

$$\|x(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon, \qquad t \geq t_0 \qquad (2.5)$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

З умови $X(t_0,t_0) = E$ маємо що j-й стовчик матриці $X(t_0,t_0)$ співпадає з j-м ортом $e^{(j)}$, тобто $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$. З (2.4) так випливає, що будь-який стовпчик фундаментальної матриці з розв'язком системи (2.2). Отже, $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (2.2.) і за формулою Коші (2.3)

$$x^{(j)}(t) = X(t,t_0)e^{(j)}.$$

Розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2} x^{(j)}(t)$. Оскільки система (2.2) лінійна, то $y(t)$ є розв'язком цієї системи, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. З (2.5) маємо, що $\|y(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$. Але

$$\lim_{k\to\infty} \|y(t_k)\| = \frac{\delta}{2} \lim_{k\to\infty} \left\| x^{(j)}(t_k) \right\| = \infty.$$

Одержали суперечність.

Доведемо тепер достатню умову. Якщо фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ обмежена $t \geq t_0$, то знайдеться константа $C > 0$, така, що $\|X(t,t_0)\| \leq C, t \geq t_0$. Тоді з формули Коші (2.3) маємо

$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leq \|X(t,t_0)\| \|x_0\| \leq C\|x_0\|, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.6)$$

Зафіксовуємо довільне $\varepsilon > 0$ і оберемо $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Тоді з (2.6) при $\|x_0\| < \delta$ отримаємо

$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leq C\|x_0\| < C\delta = \varepsilon, \qquad t \geq t_0.$$

Твердження, що нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпуновим випливає з означення 2.3.

Теорема 2.2. Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2.2) був нестійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ цієї системи не була обмеженою, $t \geq t_0$ [7].

Доведення цієї теореми випливає з теореми 2.1. та означення 2.3. нестійкого незбуреного розв'язку.

Теорема 2.3. Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2.2) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{t\to+\infty}\|X(t, t_0)\| = 0$ [15].

Доведення. доведемо спочатку необхідну умову. Від супротивного, припустимо, що нульовий розв'язок системи (2.2) є асимптотично стійким за Ляпуновим, при цьому умова $\lim_{t\to+\infty}\|X(t, t_0)\| = 0$ не виконується. Отже, знайдеться j-й стовпчик $x^{(j)}(t)$ матриці $X(t, t_0)$ такий, що $\lim_{t\to+\infty}\left\|x^{(j)}(t)\right\| \neq 0$. З умови $X(t_0, t_0) = E$ маємо $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$, де $e^{(j)}$ – j-й орт.

Зафіксуємо довільне $\Delta > 0$ і розглянемо $y(t) = \frac{\Delta}{2}x^{(j)}(t)$. Так як $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (2.2) і система (2.2) лінійна, то $y(t)$ є її розв'язком, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta$. Отже,

$$\lim_{t\to+\infty}\|y(t)\| = \frac{\Delta}{2}\lim_{t\to+\infty}\left\|x^{(j)}(t)\right\| \neq 0.$$

Одержали протиріччя.

Доведемо достатню умову. Якщо $\lim_{t\to+\infty}\|X(t, t_0)\| = 0$ то фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ є обмеженою при $t \geq t_0$. Нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпуновим за теоремою 2.1. З формули Коші (2.3) випливає

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \|X(t, t_0)\|\|x_0\|, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.7)$$

Для довільного $\Delta > 0$ і початкових умова, які задовольняють умову $\|x_0\| < \Delta$ з нерівності (2.7) отримуємо $\lim_{t\to+\infty}\|x(t, x_0, t_0)\| = 0$.

Наслідок 2.1. Для того, що нульовий розв’язок системи (2.2) був стійким (нестійким) за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t)$ цієї системи була обмеженою (необмеженою), $t \geq t_0$. Для того, щоб нульовий розв’язок системи (2.2) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t)$ цієї системи мала властивість [6]:

$$\lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0.$$

2.1.3. Стійкість розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Нехай в системі (2.2) матриця A цієї системи має сталі елементи. Тоді, система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \qquad (2.8)$$

Загальний розв’язок і фундаментальну матрицю $X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ системи можна отримати на основі фундаментальної системи розв’язків. Така система складається з n лінійно незалежних вектор-функцій $x^{(j)}(t), j = 1,2, \dots, n$, для знаходження яких використовуються власні значення та вектори матриці A. Тоді загальний розв’язок системи (2.8) визначається наступним чином

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x^{(j)}(t), \qquad t \geq t_0,$$

де $c_j, y = 1,2, \dots, n$ – довільні сталі.

Розглянемо спосіб знаходження фундаментальної системи розв’язків лінійної стаціонарної системи (2.8). Для цього визначимо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \qquad (2.9)$$

де $p_0, p_1, \dots, p_n$ – дійсні числа, $p_0 \neq 0$.

Кожен корінь характеристичного рівняння відповідає члену основної системи розв’язків, а його лінійна комбінація становить загальний розв’язок системи (2.8). Бувають такі випадки [7].

1. Корінь λ рівняння (2.9) є дійсним, і кратний 1. Відповідний член фундаментальної системи розв’язків буде мати такий вигляд:

$$x(t) = he^{\lambda t},$$

де h – власний вектор матриці, якому відповідає λ, тобто

$$(A - \lambda E)h = 0, h \neq 0.$$

Загальний розв’язок системи звичайних диференціальних рівнянь буде мати даний вигляд, за умови, що корені $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ характеристичного рівняння (2.9) будуть дійсними і різними:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j h^{(j)} e^{\lambda_j t}, \qquad t \geq t_{0,}$$

де c_j – довільні сталі, $h^{(j)}$ – власні вектор матриці A, тобто

$$(A - \lambda_j E)h^{(j)} = 0, \qquad h^{(j)} \neq 0, \qquad j = 1,2, \dots, n.$$

2. Ранг матриці $A - \lambda E$ аналізують коли корінь λ характеристичного рівняння (2.9) характеристичний і кратний k. Якщо $rang(A - \lambda E) = r$ і $r = n - k$, то існує k лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному значенню λ. Тоді рівняння $(A - \lambda E)h = 0$ має k лінійно незалежних розв’язків $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}$.

В результаті таких перетворень одержується k членів фундаментальної системи розв’язків системи (2.8)

$$x^{(j)}(t) = h^{(j)} e^{\lambda t}, \qquad j = 1,2, \dots, k.$$

Якщо $rang(A - \lambda E) = r$ і $r = n - k$, то існує $n - r$ лінійно незалежних власних векторів

$$h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n-r)}$$

матриці A що відповідають власному значенню λ. Додаючи $s = k - (n - r)$ векторів, можна доповнити вказаний власний базис. Ці вектори знаходяться за правилом

$$Ag^{(0)} = \lambda g^{(0)}, \qquad Ag^{(j)} = \lambda g^{(j)} + g^{(j-1)}, \qquad j = 1,2, \dots, s,$$

де $g^{(0)}$ – один з власних векторів матриці A, який відповідає власному значенню λ. Нехай $g^{(0)} = h^{(n-r)}$. Тоді система векторів

$$\{h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n-r)}, g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(s)}\}$$

утворює базис Жордана, який відповідає власному значенню λ. Тоді члени фундаментальної системи розв'язків системи (2.9) будуть такі

$$x^{(j)}(t) = h^{(j)} e^{\lambda t}, \qquad j = 1,2, \dots, n-r,$$

$$x^{(n-r+1)}(t) = \left(g^{(0)} t + g^{(1)}\right) e^{\lambda t},$$

$$x^{(n-r+2)}(t) = \left(\frac{g^{(0)}}{2!} t^2 + g^{(1)} t + g^{(2)}\right) e^{\lambda t},$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)}(t) = \left(\frac{g^{(0)}}{s!} t^s + \frac{g^{(1)}}{(s-1)!} t^{s-1} + \dots + g^{(s-1)} t + g^{(s)}\right) e^{\lambda t},$$

де $g^{(0)} = h^{(n-r)}$.

3. Корінь λ характеристичного рівняння (2.9) – комплексний і кратний 1. Отже $\lambda = a + ib$, де a, b – дійсні числа, $i^2 = -1$ – комплексна одиниця. Тоді $\bar{\lambda} = a - ib$ – корінь характеристичного рівняння. Тоді будемо мати два члени фундаментальної системи розв'язків.

Оскільки корню λ відповідає комлексний власний вектор $h = u + iv$, $u, v \in R^n$, то два лінійно незалежні розв'язки будуть мати такий вигляд:

$$x^{(1)}(t) = Re\left[he^{\lambda t}\right] = Re[(u + iv)e^{at}(cosbt + isinbt)] = e^{at}[ucosbt - vsinbt],$$

$$x^{(2)}(t) = Im\left[he^{\lambda t}\right] = Im[(u + iv)e^{at}(cosbt + isinbt)] = e^{at}[ucosbt - vsinbt].$$

Теорема 2.4. Для того, щоб незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (2.8) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння (2.9) мали від'ємні дійсні частини $Re\lambda_j < 0, j = 1,2, \dots, n$ [15].

Якщо серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (2.8) є нестійким.

Нехай корені характеристичного рівняння (2.9) задовольняють умови: $Re\lambda_i = 0, i = 1,2, \dots, m, Re\lambda_i < 0, i = m+1, \dots, n$. Якщо корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – прості, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (2.8) є стійким. Якщо серед $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ є кратні, але вони задовольняють умову $r = n - k$, $r = rand(A - \lambda E), k$ – кратність кореня, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (2.8) є стійким. В іншому випадку розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ є нестійким.

Теорема 2.5. (критерій Гурвіца). Для того. щоб всі корені характеристичного рівняння (2.9) мали від'ємні дійсні числа необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці Гурвіца були додатними [12].

Разом з теоремою 2.4 критерій Гурвіца забезпечує необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (2.8), тобто нульовий розв'язок системи (2.8) асимптотично стійкий тоді і тільки тоді, коли головні мінори матриці Гурвіца додатні: $\Delta_i > 0, i - 1,2, \dots, n$.

2.1.4. Дослідження стійкості за першим наближенням

Розглянемо метод дослідження стійкості нелінійних систем за допомогою системи першого наближення.

Лема 2.1. (Гронуола-Белмана) Нехай функції $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$ – неперервні при $t \geq t_0, c \geq 0$ – стала і при $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau. \qquad (2.10)$$

Тоді при $t \geq t_0$ справджується нерівність

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}. \qquad (2.11)$$

Доведення. Нехай

$$a(t) = c + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Так як функції $u(t), v(t)$ неперервні і інтеграл від неперервної функції є неперервно диференційований, то функція $a(t)$ є неперервно диференційованою. Враховуючи, що з (2.10) випливає $u(t) \leq a(t)$, отримаємо

$$a'(t) = u(t)v(t) \leq a(t)t(t).$$

Звідси

$$a'(t) - a(t)v(t) \leq 0.$$

Домножимо ліве і праву частини цієї нерівності на функцію $e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. Отримаємо

$$e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} a'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} a(t)v(t) \leq 0$$

Зауважимо, що

$$e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} a'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} a(t)v(t) \leq \frac{d}{dt}\left(a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right).$$

Тому

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right) \leq 0, t \geq t_0.$$

Ця нерівність означає, що функція $F(t) = a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$ не зростає при $t \geq t_0$. Отже

$$F(t_0) = a(t_0) \geq F(t) = a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, t \geq t_0.$$

Врахувавши, що $a(t_0) = c$, отримаємо $c \geq a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, t \geq t_0$.

Звідси

$$a(t) \leq ce^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, t \geq t_0.$$

Оскільки $u(t) \leq a(t)$, то має місце (2.11).

Розглянемо неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad (2.12)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.1), $f(x, t)$ – вектор-функція розмірності n, яка є неперервною за t і неперервно диференційованою за $x, f(0, t) = 0, t \geq t_0$.

Нехай $x(t) = 0$ – незбурений розв'язок системи (2.12), $t \geq t_0$. Проведемо лінеаризацію правої частини системи диференціальних рівнянь (2.12) в околі точки $x(t) = 0$ і отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(x,t), t \geq t_0, \qquad (2.13)$$

де $A(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial x}, R(x,t) = f * xm\ t) = A(t)x$. При цьому система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, t \geq t_0$$

називається системою першого наближення для системи (2.13).

Нехай в достатньо малому околі нуля $\|x\| < \delta$ має місце

$$\|R(x,t)\| \leq \alpha\|x\|, t \geq t_0, \qquad (2.14)$$

де $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ – стала величина. Позначимо $X(t,\tau)$ фундаментальну матрицю системи першого наближенн $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ я нормовану за моментом $\tau \geq t_0$.

Теорема 2.6. Нехай існують незалежні від t, t_0 сталі $k > 0$ і $\rho > 0$ такі, що при будь-яких $t \geq t_0, \tau \geq t_0$

$$\|X(t,\tau)\| \leq ke^{-\rho(t-\tau)} \qquad (2.15)$$

та має місце умова (2.14), $\alpha < \frac{\rho}{k}$. Тоді незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (2.12) асимптотично стійким за Ляпуновим. При цьому для будь-якого розв'язку $x(t, x_0, t_0)$ системи звичайних диференціальних рівнянь (2.12) для якого $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$, справджується нерівність

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq e^{-(\rho - \alpha k)(t - t_0)}\delta, t \geq t_0. \qquad (2.15)$$

Доведення. Подамо розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи звичайних диференціальних рівнянь (2.13) у вигляді

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)R(x(\tau),\tau)d\tau,\ t \geq t_0.$$

Враховуючи (2.14), (2.15), отримаємо

$$\|x(t)\| \le ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau, t \ge t_0.$$

Звідси

$$\|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)} \le k\|x(t_0)\| + k\alpha \int_{t_0}^{t} e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|d\tau, t \ge t_0.$$

Позначимо

$$u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}, c = k\|x(t_0)\|, v = k\alpha.$$

Тоді з леми Гронуола-Белмана слідує

$$u(t) \le k\|x(t_0)\|e^{k\alpha(t-t_0)}, t \ge t_0.$$

Оскільки $u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}$, $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$, то

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}k\|x(t_0)\| \le \delta e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}, t \ge t_0.$$

Так як за умовами теореми $\rho - k\alpha > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0.$$

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \ge 0. \qquad (2.17)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор системи (2.17), $f(x)$ – вектор функція розмірності n, яка є неперервно диференційованою в деякому околі початку координат, $f(0) = 0$ [13].

Нехай $x(t)$ – незбурений розв'язок системи (2.17), $t \ge t_0$. Лінеаризуємо праву частину системи (2.17) в околі точки $x = 0$. Отримаємо систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), t \ge 0, \qquad (2.18)$$

де $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}, R(x) = f(x) - Ax$.

Теорема 2.7. Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A мають від'ємні дійсні частини, тобто $Re\lambda_j < 0, j = 1,2, \dots, n$ то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \ge t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (2.17) асимптотично стійкий за Ляпуновим [7].

Якщо серед власних значень матриці A знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (2.17) є нестійким.

Якщо $max_{j=1,2,\dots,n} Re\lambda_j = 0$, тобто серед власних значень матриці A знайдеться хоча б одне, дійсна частина якого рівна нулю, при цьому решта власних значень мають або від'ємну, або нульову дійсну частину, то наявність стійкості або нестійкості незбуреного розв'язку $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (2.17) залежить не тільки від матриці A, але і від функції $R(x)$ [15].

2.2. Другий метод Ляпунова

2.2.1. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням

Нехай $x = R^n$, функція $V(x)$ неперервно диференційовна в околі U точки $x = a$. Ця функція називається додатно визначеною (в околі U), якщо

$$V(x) > 0, x \neq a; V(a) = 0.$$

Якщо ж виконані умови

$$V(x) < 0, x \neq a; V(a) = 0.$$

то функція $V(x)$ називається від'ємно визначеною.

Приклад 2.1. Функція

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

додатно визначена в будь-якому околі точки $x = 0$.

При $n = 2$ рівняння $V = x_1^2 + x_2^2$ визначає параболоїд обертання, який дотикається до площини (x_1, x_2) в початку координат, а його інші точки лежать вище цієї площини. Лінії рівня функції V – це кола $x_1^2 + x_2^2 = c$ $(c \geq 0)$, які стягуються в точку при $c \to +0$.

Теорема. Нехай функція $V(x), x \in R^n$ додатно визначена в околі U точки a. Тоді множини рівня $V(x) = \varepsilon$, які лежать в U – замкнені гіперповерхні, які оточують точку a, якщо $\varepsilon > 0$ достатньо мале [7].

Приклад 2.2. Розглянемо квадратичну форму

$$V(x) = (Ax, x) = \sum_{j,k}^{n} a_{jk} x_j x_k. \qquad (2.19)$$

Тут $a_{jk} = a_{kj}$ дійсні числа, так що A – дійсна симетрична матриця. Квадратична форма називається додатно визначеною, якщо

$$(Ax, x) > 0, x \neq 0.$$

Додатно визначена квадратична форма є додатно визначеною функцією в будь-якому околі точки $x = 0$.

Лема 2.3. Якщо A – дійсна симетрична $(n \times n)$-матриця, то для будь-якого $x \in R^n$ справедлива рівність

$$\alpha |x|^2 \leq (Ax, x) \leq \beta |x|^2. \qquad (2.20)$$

Тут α – найменше, β – найбільше власне значення матриці A.

Доведення. Із лінійної алгебри відомо, що матрицю A можна звести до діагонального виду за допомогою ортогонального перетворення, тобто існує ортогональна матриця T така, що $T^{-1}AT = \Lambda$, де Λ –діагональна матриця з діагональними елементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Зробимо підстановку $x = Ty$, тоді

$$(Ax, x) = (ATy, Ty) = (T^T ATy, y) =$$

(так як $T^T = T^{-1}$)

$$= (T^{-1}ATy, y) = (\Lambda y, y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2,$$

так що $\alpha |y|^2 \leq (Ax, x) \leq \beta |y|^2$. Ортогональне перетворення зберігає довжину вектора: $|x|^2 = |Ty|^2 = |y|^2$. Отже, (2.20) доведено.

Означення 2.6. Додатно визначена в околі U точки a функція $V(x)$ називається функцією Ляпунова, якщо

$$\dot{V}(x) \leq 0, x \in U. \quad (2.21)$$

Теорема Ляпунова про стійкість. Якщо в деякому околі стану рівноваги існує функція Ляпунова , то цей стан рівноваги стійкий за Ляпуновим [12].

Будемо доводити цю теорему при $n = 2$; і нехай $a = (0, 0)$. Лінії рівня $V(x) = c_1$ – замкнені криві при малих $c > 0$. Ці криві стягуються в точку $(0, 0)$ при $c \to +0$ і при малих $c_j > 0$ лінія рівня $V(x) = c_1$ лежить всередині лінії рівня $V(x) = c_2$, якщо $c_1 < c_2$. Випустимо фазову траєкторію γ в момент часу $t = 0$ із точки $x^0, V(x^0) = c_0$. Так як $\dot{V}(x) \leq 0$, то $V(x) \leq V(x^0) = c_0$ вздовж траєкторії γ, тобто γ лежить всередині лінії рівня $V(x) = c_0$ при всіх $t \geq 0$. Тому точка не може сильно відхилятись від положення рівноваги. Чи менше c_0, тим менша область $V(x) \leq c_0$; вона стягується в точку при $c_0 \to +0$ що і доводить стійкість положення рівноваги [13].

Доведення. Нехай $a = 0$, виберемо $\varepsilon > 0$ таке, що шар $K_\varepsilon: |x| \leq \varepsilon$ лежить в околі U точки $x = 0$. Нехай S_ε – границя шару – сфера $|x| = \varepsilon$. Так як S_ε – замкнена обмежена множина, функція $V(x)$ неперервна і $V(x) > 0$ на S_ε, то $\min_{x \equiv S_\varepsilon} V(x) = k > 0$ Розглянемо шар $K_\delta: |x| \leq \delta$, що міститься в U. Так як $V(0) = 0$, то $\delta > 0$ можна вибрати настільки малим, щоб виконувалась нерівність $V(x) < k$ при $x \in K_\delta$, враховуючи неперервність функції $V(x)$.

Покаже, що якщо $|x^0| \leq \delta$, то $|x(t;\, x^0)| \leq \varepsilon$ при $0 \leq t < \infty$; тим самим теорема буде доведена. Так як $\dot{V}(x) \leq 0$ в околі U і $V(x^0) < k$, то $V(x) < k$ при $0 \leq t < \infty$ вздовж фазової кривої $x = x(t;\, x^0)$. Отже, траєкторія, яка починається в шарі K_δ не може перетинати границю шару $K_\varepsilon: V(x) \geq k$ на S_ε, $V(x) < k$ на траєкторії.

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Нехай в деякому околі U стану рівноваги a існує функція Ляпунова $V(x)$ така, що функція $\dot{V}(x)$ від'ємно визначена в U. Тоді стан рівноваги a асимптотично стійкий [6].

Доведення. Виберемо шари K_ε, K_δ такі що, як і в попередньому доведені. Якщо $|x^0| \leq \delta$, то $|x(t;\, x^0)| \leq \varepsilon$ при $0 \leq t < \infty$. Розглянемо функцію $w(t) = V\big(x(t;\, x^0)\big)$. Так як $V(x^0) < 0$, то функція $w(t)$ не зростає і існує границя $\lim_{t \to +\infty} w(t) = A$. При цьому $A \geq 0$, оскільки $V(x) \geq 0$. Якщо $A = 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t;\, x^0) = 0$, так як $V(x) \geq 0$ при $x \neq 0, V(0) = 0$, і в цьому випадку теорема доведена. Припустимо, що $A > 0$ і приведемо це припущення до протиріччя. В цьому випадку $w(t) \geq A$ при всіх $t \geq 0$, і існує $\alpha, 0 < \alpha < \varepsilon$ таке, що $|x(t;\, x^0)| \geq \alpha$ при $0 \leq t < \infty$. В іншому випадку на траєкторії γ були б точки, як завгодно близькі до точки $x = 0$, а тому функція $V(x)$ на γ приймала би як завгодно мале значення. В шаровому шарі $\alpha \leq |x| \leq \varepsilon$ функція $\dot{V}(x)$ строго від'ємна, за умовою теореми. Враховуючи неперервність $\dot{V}(x) \leq -m < 0$ в цьому шарі, а отже і траєкторії γ. Отже,

$$w'(t) = \dot{V}\big(x(t;\ x^0)\big) \leq -m.$$

Проінтегрувавши, отримаємо $w(t) \leq w(0) - mt$, і права частина цієї нерівності від'ємна при $t > \frac{w(0)}{m}$. Це суперечить припущенню: $w(t) \geq A > 0, t \geq 0$.

Нехай U – окіл стану рівноваги a, U_1 – область, яка міститься в U і в якій a є граничною точкою.

Теорема Четаєва про нестійкість. Нехай функція $\dot{V}(x)$ неперервно диференційовна в області U_1,

$$V(x) > 0, \dot{V}(x) > 0\ (x \in U_1)$$

і $V(x) = 0$ в тих граничних точках області U_1, які лежать в середині околу U. Тоді стане рівноваги a нестійкий [12].

Доведення. Нехай точка $x^0 \in U_1, \gamma$ – фазова траєкторія, що виходить із точки x^0, її рівняння має вигляд $x = x(t;\ x^0)$. Покажемо, що траєкторія γ не може перетинати ту частину границі області U_1, яка лежить всередині U. Розглянемо функцію $V(x)$ вздовж γ: $w(t) = V\big(x(t;\ x^0)\big)$. Так як $w(0) > 0$ і $w'(t) = \dot{V}(x) > 0$, поки γ міститься в U_1, то $w(t) > 0$, поки γ міститься в U_1 і траєкторія не може перетинати ту частину границі області U_1, на якій $V(x) = 0$. Отже, траєкторія γ повинна покинути U_1, Так як U_1 містить точки, як завгодно близькі до точки a, то цей стан рівноваги нестійкий.

Теорема 2.8. Нехай система (2.19) має перший інтеграл $V(x)$, додатно визначений в околі стану рівноваги a. Тоді стан рівноваги стійкий за Ляпуновим.

Справді, $\dot{V}(x) \equiv 0$ і при тому всі умови теореми Ляпунова про стійкість виконані.

Приклад 2.3. Розглянемо матеріальну точку маси m, яка рухається в потенціальному полі сили з потенціальною енергією $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рух частинки описується системою рівнянь

$$m\ddot{x} = -\nabla U(x).$$

Ця система еквівалентна системі рівнянь першого порядку

$$m\dot{x} = y, \dot{y} = -\nabla U(x)$$

і має перший інтеграл

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2m} + U(x).$$

Стан рівноваги визначається з рівнянь $\nabla U(x) = 0, y = 0$, тобто має вигляд $(x^0, 0)$ де x^0 – стаціонарна точка потенціальної енергії.

Нехай x^0 – ізольована точка максимуму потенціальної енергії $U(x)$, тоді стан рівноваги $(x^0, 0)$ стійкий за Ляпуновим.

Теорема 2.9. Нехай $x = 0$ – стан рівноваги системи (2.19) і існує функція Ляпунова $V(x)$ така, що

$$V(x) \leq -\alpha V(x), V(x) \geq A|x|^{\beta} \qquad (2.21)$$

в деякому околі U точки $x = 0$, де A, α, β – додатні сталі. тоді існує додатна стала C така, що

$$|x(t, x^0)| \leq Ce^{-\frac{\alpha t}{\beta}} \; (0 \leq t < \infty), \qquad (2.22)$$

де точка x^0 достатньо близька до точки $x = 0$ [15].

Доведення. Нехай $w(t) = V(x(t, x^0))$ тоді $w'(t) \leq -\alpha w(t)$, або $\left(lnw(t)\right)' \leq -\alpha$ Інтегруючи цю нерівність від 0 до t, отримаємо $w(t) \leq w(0)e^{-\alpha t}$. Враховуючи другу нерівність із (2.22) отримаємо

$$A|x(t, x^0)|^{\beta} \leq V\left(x(t, x^0)\right) \leq V(x^0)e^{-\alpha t}, t \geq 0,$$

звідки випливає (2.23).

2.2.2. Функції Ляпунова

Означення 2.4. Функція $V(\bar{y}) : \; R^n \to R$ називається додатно визначеною на множині $\Omega(\bar{\theta} \in \Omega)$, якщо виконуються наступні дві умови [13]:

1. $V(\bar{y}) \geq 0, \forall \bar{y} \in \Omega$;

2. $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$.

Далі для визначеності будемо вважати, що множина Ω є шаром радіусу $R > 0$ і центром в початку координат:

$$\Omega = \{\bar{y} \in R^n : \|\bar{y}\| \leq R\}.$$

Лема 2.3. Нехай $V(\bar{y})$ – неперeправна і додатно визначена на Ω функція. Тоді:

1. для будь-якого $\varepsilon_1 > 0$ існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що із умов $\bar{y} \in \Omega, \|\bar{y}\| \leq \varepsilon_1$ випливає нерівність $V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$;

2. для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ існує $\varepsilon_3 > 0$ таке, що із умов $\bar{y} \in \Omega, V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$ випливає нерівність $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_3$.

Доведення. Проведемо доведення від супротивного.

1. Припустимо, що перше із доведених тверджень неправильне. Тоді існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ існує точка $\bar{y}$ така, що $\varepsilon_1 \leq \|\bar{y}\| \leq R$ і
$V(\bar{y}) < \varepsilon_2$. В силу довільності ε_2 можна взяти послідовність $0 < \varepsilon_{2k} \to 0$, і тоді знайдеться послідовність точок $\bar{y}_k$, для якої $\varepsilon_1 \leq \|\bar{y}_k\| \leq R, V(\bar{y}_k) \to 0$. Оскільки послідовність $\bar{y}_k$ належить замкненій обмеженій множині, то деяка її послідовність є збіжною, $\bar{y}_{k_m} \to \tilde{y}, \varepsilon_1 \leq \|\tilde{y}\| \leq R$. В силу неперервності $V\left(\bar{y}_{k_m}\right) \to V(\tilde{y}) = 0$, звідки завдяки додатній визначеності маємо $\tilde{y} = \bar{\theta}$ Суперечність.

2. Припустимо, що друге із доведених тверджень неправильне. Аналогічно проведеним вище роздумам існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для деякої послідовності
$0 < \varepsilon_{3k} \to 0$ знайдеться послідовність точок $\bar{y}_k$, для яких $\|\bar{y}_k\| \leq \varepsilon_{3k}, V(\bar{y}_k) \geq \varepsilon_2$. В силу неперервності маємо $V(\bar{y}_k) \to V(0) = 0$, що суперечить попередній нерівності [6].

Геометричний зміст леми полягає в тому, що поверхня рівня функції $V(\bar{y}) = \varepsilon_2$ знаходиться в шаровому шарі, що обмежений всередині сферою $\|\bar{y}\| = \varepsilon_3$ і зовні – сферою $\|\bar{y}\| = \varepsilon_1$.

Наслідок 2.2. Якщо послідовність точок $\bar{y}_k \in \Omega$, то при $k \to +\infty, \bar{y}_k \to \bar{\theta}$ тоді і тільки тоді, коли $V(\bar{y}_k) \to 0$.

Якщо при $t \geq 0$ вектор-функкці $\bar{y}(t) \in \Omega$, я то при $t \to +\infty, \bar{y}(t) \to \bar{\theta}$ тоді і тільки тоді, коли $V(\bar{y}(t)) \to 0$.

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}\big(t, \bar{y}(t)\big), \qquad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \Omega \qquad (2.24)$$

де $\bar{f}(t, \bar{y}) = \big(f_1(t, y_1, \dots, y_n)\big), \big(f_2(t, y_1, \dots, y_n)\big), \dots, \big(f_n(t, y_1, \dots, y_n)\big)^{\top}$ компоненти $f_j(t, y_1, \dots, y_n)$ визначені і неперервні на множині $[0;\, +\infty) \times \Omega$, причому $f_j(t, 0, \dots, 0) = 0, j = 1, \dots, n, t \geq 0$.

Якщо, то система (2.24) має нульові розв'язки $\bar{y}(t;\ \bar{\theta}) = \bar{\theta}$.

Означення 2.5 Неперервно диференційована і додано визначена на Ω функція $V(\bar{y})$ називається функцією Ляпунова системи (2.24), якщо

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_y(t, \bar{y}) \leq 0, \forall \bar{y} \in \Omega, t \geq 0. \quad (2.25)$$

2.2.3. Стійкість точок спокою

Точка $\bar{y}_0 \in R^n$ називається точко спокою (станом рівноваги) автономної системи

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}\big(\bar{y}(t)\big), \qquad (2.26)$$

якщо $\bar{f}(\bar{y}_0) = \bar{\theta}$. Таким чином, координати точко спокою знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} f_1(y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Якщо $\bar{y}_0$ – точка спокою, то функція $\bar{y}(t) = \bar{y}_0$ є незалежним від змінної е розв'язком системи (2.26). Траєкторія такого розв'язку являє собою пряму лінію в просторі $(t, y_1, \ldots, y_n)$, а в фазовому просторі змінних $(y_1, \ldots, y_n)$ – одну точку. Точку спокою $\bar{y}_0$ називають стійкою, асимптотично стійкою або нестійкою за Ляпуновим, якщо відповідний розв'язок $\bar{y}(t) = \bar{y}_0$ стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий за Ляпуновим [15].

Для дослідження стійкості точки спокою можна зробити заміну змінних $\bar{y}(t) = \hat{y}(t) + \bar{y}_0$ і перейти до дослідження нульового розв'язку системи

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = \bar{F}\big(\hat{y}(t)\big), \qquad \bar{F}(\hat{y}) = \bar{f}(\hat{y} + \bar{y}_0).$$

Для застосування теореми про стійкість за першим наближенням знайдемо елементи матриці похідних $A = \big(a_{ij}\big)$:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{y}_0).$$

В результаті отримуємо твердження про стійкість за першим наближенням похідної (не обов'язково нульової) точки спокою.

Теорема 2.8. Нехай $\bar{y}_0$ – точка спокою системи (2.26), функції $f_i(\bar{y})$ двічі неперервно диференційовані в деякому околі $\bar{y}_0, j = 1, \ldots, n$ [7].

Якщо всі власні значення матриці $A = (\partial f_i(\bar{y}_0)/\partial y_j)$ мають від'ємні важливі частини:

$$Re\lambda_k < 0, \forall k = 1, \ldots, n.$$

то точка $\bar{y}_0$спокою асимптотично стійка за Ляпуновим.

Якщо ж знайдеться хоча б одне власне значення матриці $A = (\partial f_i(\bar{y}_0)/\partial y_j)$ є додатною важливою частиною:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \ldots., \lambda_n\} : Re\lambda > 0,$$

то точка спокою $\bar{y}_0$ нестійка за Ляпуновим.

Дослідимо розміщення траєкторій в околі точки спокою розв'язку лінійної системи двох диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \qquad (2.27)$$

Будемо шукати розв'язок (2.27) у вигляді $x(t) = \alpha_1 e^{kt}, y(t) = \alpha_2 e^{kt}$, використовуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0,$$

де α і β знаходяться з точністю до сталого множника підстановкою вихідної системи, тобто

$$(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0. \qquad (1.28)$$

Можливі наступні випадки

1. Корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 дійсні і різні.

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\alpha_2 e^{k_2 t}, \\ y = c_1\beta_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

де константи α_i, β_i отримані із співвідношення (1.28) при $k = k_1$, а c_j – довільні. Тут можливі випадки:

- Якщо $k_1 < 0, k_2 < 0$, то точка спокою асимптотично стійка і називається стійким вузлом.

- Якщо $k_1 > 0, k_2 > 0$, то випадок переходить в попередній при заміні t на $-t$. Отже, траєкторії мають той же вигляд, але протилежний напрямок руху точки. А отже, точка спокою не стійка за Ляпуновим і називається нестійким вузлом.

- Точка спокою нестійка за Ляпуновим і у випадку $k_1 > 0, k_2 < 0$. Таку точку називають сідлом.

2. Корені характеристичного рівняння комплексні: $k_{1,2} = p \pm qi, q \neq 0$.

Загальний розв'язок системи (1.26) подано у вигляді:

$$\begin{cases} x = e^{pt}(c_1 cosqt + c_2 sinqt), \\ y = e^{pt}(\widetilde{c_1} cosqt + \widetilde{c_2} sinqt), \end{cases}$$

де c_1, c_2 довільні сталі, а $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}$ отримають з них деякою лінійною комбінацією. Тут можливі наступні випадки:

- Якщо $p < 0$, то точка спокою асимптотично стійка і має назву стійкого фокусу.

- Якщо $p > 0$, то точка спокою нестійка за Ляпуновим і має назву нестійкого фокусу.
- Якщо $p = 0$, то розв'язки отримуються періодичними, їх періоди співпадають, а отже, траєкторії – замкнені криві. Тут бачимо стійкість за Ляпуновим і відсутність асимптотичної стійкості. Стан рівноваги в цьому випадку має назву центра.

3. Корені характеристичного рівняння співпадають.

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x = e^{kt}(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 t), \\ y = e^{kt}(c_1\beta_1 + c_2\beta_2 t), \end{cases}$$

де всі сталі виведені аналогічно до випадку 1, але не виключена можливість $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, у випадку якої α_1 і β_1 будуть довільними сталими. Можливе наступне:

- Якщо $k > 0$, то точка спокою є стійким вузлом, який у випадку $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ називається декритичним вузлом, який також є асимптотично стійким.
- Якщо $k < 0$, то заміна t на $-t$ приводить до попереднього випадку. Аналогічно отримаємо нестійкий вузол.

2.2.4. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість

Теорема про стійкість. Нехай на множині Ω існує функція Ляпунова для системи (2.24). Тоді нульовий розв'язок $\bar{y}(t;\ \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ системи (2.24) є стійким за Ляпуновим [12].

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon_1 \in (0, R)$. В силу леми знайдеться $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ таке, що як тільки для $\bar{y} \in \Omega$ виконується нерівність $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1$, то

$$V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2. \qquad (2.28)$$

В силу неперервності функції $V(\bar{y})$ в нулі для $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$ таке, що із нерівності $\|\bar{y}\| < \delta$ випливає оцінка

$$V(\bar{y}) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}. \qquad (2.29)$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $\delta \le \varepsilon_1$.

Розглянемо довільну початкову точку $\bar{y}_0$ із δ-околу нульового розв'язку ($\|\bar{y}_0\| < \delta$) і покажемо, що при $t \ge 0$ відповідні розв'язки $\bar{y}(t) = \bar{y}(t;\ \bar{y}_0)$ системи (2.24) задовольняє нерівність

$$\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1.$$

При $t = 0$ ця нерівність виконується, $\|\bar{y}(0)\| = \|\bar{y}_0\| < \delta \le \varepsilon_1$ і силу (2.29) маємо виявиться протилежна нерівність

$$V\big(\bar{y}(0)\big) \le \frac{\varepsilon_2}{2}. \qquad (2.30)$$

В силу неперервності нерівність $\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1$ залишається істиною на деякому півінтервалі $t \in [0;\ t_1)$. Якщо $t_1 = +\infty$, то стійкість доведена. Якщо ж для деякого моменту $t_1 \in (0;\ +\infty)$ виявиться виконаною протилежна нерівність,

$$\|\bar{y}(t_1)\| \ge \varepsilon_1,$$

то в силу (2.28) отримаємо

$$V\big(\bar{y}(t_1)\big) \ge \varepsilon_2.$$

Враховуючи нерівність (2.30), маємо

$$V\big(\bar{y}(t_1)\big) - V\big(\bar{y}(0)\big) \ge \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \quad (2.31)$$

З іншої сторони, в силу (2.25)

$$\frac{dV\big(\bar{y}(t)\big)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V\big(\bar{y}(t)\big)}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V\big(\bar{y}(t)\big)}{\partial y_j} f_y(t, \bar{y}(t)) \le 0, t \in [0, t_1].$$

Отже, функція $V\big(\bar{y}(t)\big)$ не зростає на відрізку $[0, t_1]$, що суперечить (2.31)

Таким чином, за довільним $\varepsilon_1 > 0$ знайдено $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ таке, що із нерівності $\|\bar{y}_0\| < \delta$ випливає оцінка $\|\bar{y}(t; \bar{y}_0)\| < \varepsilon_1$ для всіх $t \ge 0$ що означає стійкість нульового розв'язку.

Теорема (про асимптотичну стійкість). Нехай на множині Ω існує функція Ляпунова $V(\bar{y})$ системи (2.24), що задовольняє нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_y(t, \bar{y}) \le -W(\bar{y}), \qquad \forall \bar{y} \in \Omega, \qquad t \ge 0, \quad (2.32)$$

де $W(\bar{y})$ – деяка неперервна додатно визначена на Ω функція [7].

Тоді нульовий розв'язок $\bar{y}(t;\, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ системи (2.24) є асимптотичною стійкістю.

Доведення. Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку випливає із попередньої теореми. Залишається довести, що для розв'язку $\bar{y}(t) = \bar{y}(t;\, \bar{y}_0)$ задачі коші виконується $\bar{y}(t) \to \bar{\theta}$ при $t \to +\infty$, якщо тільки $\bar{y}_0$ знаходиться в деякому околі нульового розв'язку.

Із доведення попередньої теореми випливає обмеженість траєкторії $\bar{y}(t)$, оскільки вона належить ε_1-околу нульового розв'язку.

Тому і функція $V(\bar{y}(t))$ є скалярною функцією аргументу t, обмежена знизу і такою, що не зростає завдяки нерівності

$$\frac{dV\big(\bar{y}(t)\big)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V\big(\bar{y}(t)\big)}{\partial y_j} f_y(t, \bar{y}(t)) \le -W\big(\bar{y}(t)\big) \le 0,$$

яка випливає із (2.32). Тоді існує границі

$$\lim_{t \to +\infty} V\big(\bar{y}(t)\big) = \alpha \ge 0.$$

Переконаємо, що $\alpha = 0$. Дійсно, якщо $\alpha > 0$, то в силу не зростання $V\big(\bar{y}(t)\big)$ із нерівності $V\big(\bar{y}(t)\big) \ge \alpha$ відповідно до леми випливає оцінка $\|\bar{y}(t)\| \ge \varepsilon_3 > 0$ для всіх $t \ge 0$, де $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$. Застосовуючи лему для додатно визначеної функції $W(\bar{y})$, переконуємося в істотності нерівності $W\big(\bar{y}(t)\big) \ge \beta$ для всіх $t \ge 0$, де $\beta = \beta(\varepsilon_3) > 0$. Тоді при $t \to +\infty$ в силу (2.32) і формули кінцевих приростів Лагранжа маємо

$$V\big(\bar{y}(t)\big) - V\big(\bar{y}(0)\big) = \frac{dV\big(\bar{y}(\xi)\big)}{dt} t \le -W\big(\bar{y}(\xi)\big)t \le -\beta t \to -\infty,$$

що суперечить доданій визначеності $V(\bar{y})$.

Таким чином $V\big(\bar{y}(t)\big) \to \alpha = 0$ і в силу наслідку із леми остаточно переконуємося, що $\bar{y}(t) \to \bar{\theta}$ при $t \to +\infty$.

2.2.5. Теореми Четаєва і Ляпунова про нестійкість

Теорема (теорема Ляпунова про нестійкістть). Якщо для системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad t \geq t_0, \qquad f(0) = 0$$

знайдеться неперервно диференційовна функція $V(x), V(0) = 0$, повна похідна від якої в силу цієї системи є функцією знаковизначеною, але в будь-якому h-околі нуля знайдеться точка x_0, така, що

$$\frac{dV(x_0)}{dt} V(x_0) > 0, \|x_0\| < h,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ є нестійким [13].

Теорема Четаєва (про нестійкість). Нехай в деякому шарі $\Omega_\varepsilon = \{\bar{y} \in R^n : \|\bar{y}\| < \varepsilon\}$ радіусу $\varepsilon > 0$ знайдеться область $D \subset \Omega_\varepsilon$ з границею $\Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon, \bar{\theta} \in \Gamma_0, \|\bar{y}\| = \varepsilon$ при $\bar{y} \in \Gamma_\varepsilon$. Нехай на замикані $D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon, \bar{\theta} \in \Gamma_0$ цієї області визначена неперервно диференційовна функція $U(\bar{y})$, що має властивості [15]:

1. $U(\bar{y}) = 0$ при $\bar{y} \in \Gamma_0, U(\bar{y}) > 0$ при $\bar{y} \in D$;

2. для будь-якого $\alpha > 0$ знайдеться $\beta = \beta(\alpha) > 0$ таке, що із умов $\bar{y} \in D$, $U(\bar{y}) \geq \alpha$ випливає нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \geq \beta, t \geq 0.$$

Тоді нульовий розв'язок задачі $\bar{y}(t;\ \bar{\theta}) = \bar{\theta}$

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}\big(t, \bar{y}(t)\big), \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \Omega$$

нестійкий за Ляпуновим.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Відповідно до визначення стійкості за Ляпуновим для взятого з умови теореми $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $\bar{y}(t) = \bar{y}(t;\ \bar{y}_0)$ задачі Коші, для якого при $t = 0$ виконано нерівність $\|\bar{y}\| < \delta$, для всіх $t \geq 0$ справедлива нерівність $\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon$, тобто

$$\bar{y}(t) \in \Omega_\varepsilon. \qquad (2.33)$$

Так як $\bar{\theta} \in \Gamma_0$ то можна вибрати $\bar{y}_0 \in D$, і тоді $U(\bar{y}_0) = u_0 > 0$. Розглянемо скалярну функцію $U\big(\bar{y}(t)\big)$. Маємо

$$\frac{dU\big(\bar{y}(t)\big)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U\big(\bar{y}(t)\big)}{\partial y_j} f_i\big(t, \bar{y}(t)\big). \qquad (2.34)$$

Тому при $t = 0$ справедлива нерівність $\frac{dU(\bar{y}_0)}{dt} > 0$.

Поки траєкторія $\bar{y}(t)$, що стартувала при $t = 0$ із області D залишається в цій області $(\bar{y}(t) \in D)$, справедлива нерівність

$$\frac{dU\big(\bar{y}(t)\big)}{dt} > 0.$$

Тоді функція $U\big(\bar{y}(t)\big)$ зростає і, відповідно

$$U\big(\bar{y}(t)\big) > U(\bar{y}_0) = u_0 > 0. \qquad (2.35)$$

Розглянута траєкторія не може вийти із області D ні через границю Γ_0 (в силу умови $U|_{\Gamma_0} = 0$) ні через границю Γ_ε (в силу 2.33.)). Тому

$$\bar{y}(t) \in D, \qquad t \geq 0, \qquad (2.36)$$

і нерівність (2.35) виконується для всіх $t > 0$. Тоді в силу неперервності функції $U\big(\bar{y}(t)\big)$ траєкторія не може вийти за границю замкненої обмеженої множини D_0, де

$$D_0 = \{\bar{y} \in D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon : \ U(\bar{y}) \geq u_0\}.$$

Відповідно умові теореми і в силу (2.34), (2.35) і (2.36) для $\alpha = u_0$ знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що в усіх точках траєкторії $\bar{y}(t)$ справедлива нерівність

$$\frac{dU\big(\bar{y}(t)\big)}{dt} \geq \beta_0.$$

Почленно інтегруючи га відрізку і переходячи до границі при маємо

$$U\big(\bar{y}(t)\big) \geq U(\bar{y}_0) + \beta_0 t \to +\infty, \qquad \bar{y}(t) \in D_0,$$

що суперечить обмеженості неперервної функції $U(\bar{y})$ на замкненій обмеженій множині D_0. Тому початкове припущення неправильне. Нестійкість за Ляпуновим нульового розв'язку доведена.

2.2.6. Асимптотична стійкість загалом

Розглянемо дану систему

$$\frac{dx}{dt} = X\ (t,x)\ (X(t,0) = 0,) \quad (2.37)$$

де $X\ (t,x) \in C_{tx}^{(0,1)}\ (I_t^+ \times R_x^n), I_t^+ = \{a < t < +\infty\}$.

Означення 1. Тривіальний розв'язок $\xi = 0$ системи (2.37) асимптотично стійкий загалом, якщо: 1) він асимптотично стійкий за Ляпуновим і 2) для кожного розв'язку $x = x(t, t_0, x_0)(t_0 \in I_t^+)$ виконується умова:

$$\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0. \quad (2.38)$$

Аналогічно визначається асимптотична стійкість загалом нетривіального розв'язку ξ.

Означення 2. Будемо говорити, що $V\ (t,x) \in C_{tx}^{(0,1)}\ (I_t^+ \times R_x^n)$ допускає нескінченно велику нижчу границю при $x \to \infty$, якщо

$$V\ (t,x) \to \infty \text{ при } \|x\| \to \infty, \quad (2.39)$$

тобто для будь-якого $M > 0$ існує $R = R(M)$ таке, що

$$|V\ (t,x)| > M \text{ при } t \in [t_0, \infty) \text{ і } \|x\| \geq R.$$

Означення 3. Будемо говорити, що $V\ (t,x) \in C_{tx}^{(0,1)}\ (I_t^+ \times R_x^n)$ допускає в R_x^n сильну нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$, якщо існує функція $U(x) \in C(R_x^n)$ така, що

$$|V\ (t,x)| \leq U(x) \quad (2.40)$$

при $(t,x)) \in (I_t^+ \times R_x^n), U(0) = 0$.

Теорема Барбашина-Красовського. Якщо для системи (2.37) існує додано визначена скалярна функція $V\ (t,x) \in C_{tx}^{(0,1)}\ (I_t^+ \times R_x^n)$, що допускає в R_x^n сильну нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$ і нескінченно велику нижчу границю при $x \to \infty$, причому похідна $\dot{V}\ (t,x)$ в силу системи від'ємно визначена в R_x^n, то тривіальний розв'язок $\xi = 0$ асимптотично стійкий загалом [12].

Доведення. Так як умови цієї теореми, очевидно, включають умови першої теореми Ляпунова, то тривіальний розв'язок $\xi = 0$ стійкий за Ляпуновим при $t \to +\infty$.

Нехай $x = x(t, t_0, x_0)$ – нетривіальний розв'язок системи (2.37), що визначається початковими умовами: $x(t_0;\ t_0, x_0) = x_0 \neq 0$, де $t_0 \in I_t^+$ і $x_0 \in R_x^n$ – довільні.

Позначимо через K_x деякий компакт (тобто обмежену замкнену множину простору R_x^n), що містить точку x:

$$x_0 \in K_x \subset R_x^n,$$

і нехай

$$M = \sup V\ (t, x) \text{ на } I_t^+ \times K_x.$$

В силу нерівності (2.40) маємо $M < +\infty$.

Так як функція $V\ (t, x)$ має в R_x^n нескінченно велику границю при $x \to \infty$, то існує шар $S\{\|x\| < R\} \supset K_x$ такий, що

$$V\ (t, x) > M \text{ при } \|x\| \geq R. \qquad (2.41)$$

За умовою теореми вздовж траєкторії $x(t, t_0, x_0)$ виконується нерівність

$$\dot{V}\left(t, x(t, t_0, x_0)\right) < 0;$$

тому при $t \geq\ t_0$ маємо

$$V\left(t, x(t, t_0, x_0)\right) \leq V\ (t_0, x_0) \leq M$$

а отже

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < R,$$

тобто всі розв'язки системи (2.37) обмежені.

Покажемо тепер, що

$$V\left(t, x(t, t_0, x_0)\right) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне і $r > 0$ таке, що функція $U\ (x)$ визначається формулою (2.40), задовольняє нерівність

$$0 \leq U(x) < \varepsilon \text{ при } \|x\| \leq r. \qquad (2.42)$$

Покажемо, що розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ при $t \to +\infty$. обов'язково ввійде в замкнутий шар $\|x\| \leq r$.

Справді, припустимо, що

$$0 < r < \|x(t, t_0, x_0)\| < R \text{ при } t \geq t_0.$$

Тоді $\dot{V}\,(t, x)$ будучи від'ємно визначеною, має в області $I_t^+ \times \{r \leq \|x\| \leq R\}$ від'ємну верхню границю – γ $(\gamma > 0)$, а отже, при $t \geq t_0$ істина нерівність

$$\dot{V}\,\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \leq -\gamma.$$

Інтегруючи цю нерівність в межах від t_0 до t $(t > t_0)$, отримаємо

$$V\,\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \leq V\,(t_0, x_0) - \gamma(t - t_0) < 0,$$

якщо тільки

$$t > t_0 + \frac{V\,(t_0, x_0)}{\gamma},$$

що суперечить тому, що функція $V\,(t, x)$ додатна. Отже, існує момент $T > t_0$ такий, що

$$\|\,x(T, t_0, x_0)\| \leq r,$$

тобто

$$U\big(x(T, t_0, x_0)\big) < \varepsilon.$$

Звідси, враховуючи монотонність спадання функції $V\,\big(t, x(t, t_0, x_0)\big)$ при $t > T$ будемо мати

$$V\,\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) < V\,\big(T, x(T, t_0, x_0)\big) \leq U\big(x(T, t_0, x_0)\big) < \varepsilon$$

і таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} V\,\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) = 0. \qquad (2.43)$$

Із останньої рівності отримаємо, що

$$\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0,$$

так як в іншому випадку існувала б послідовність $x(t_k, t_0, x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, t_k \to \infty)$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} V\,(t_k, x(t_k, t_0, x_0)) \neq 0,$$

суперечить рівності (2.43.). Теорема доведена.

Із доведення випливає, що при умові теореми Барбашина-Красовського асимптотична стійкість загалом рівномірна по x_0 на будь-якому компакті K_x, тобто можна гарантувати, що $\| x(t;\ t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t > T\ (\varepsilon, K_x)$, де $x_0 \in K_x$.

2.2.7. Стійкість за Лагранжом

Розглянемо систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad (2.44)$$

де $f(t, y) \in C_{tx}^{(0,1)}\ (I_t^+ \times R_x^n)$ і $I_t^+ = \{a < t < \infty\}$. Очевидно, система (2.44) володіє властивістю єдиності розв'язку $y\ (t;\ t_0, y_0)$, де $t_0 \in I_t^+, y_0 \in R_x^n$.

Означення. Будемо говорити, що система (2.44) стійка за Лагранжом, якщо: 1) кожен розв'язок $y\ (t;\ t_0, y_0)$, де $t_0 \in I_t^+$,необмежено продовжений вправо, тобто має місце зміст при $t_0 \leq t < \infty$; 2) $\|y\ (t;\ t_0, y_0)\|$ обмежена на $[t_0, \infty)$ [12].

Теорема. Для того, щоб система (2.44) була стійка за Лагранжом, необхідно і достатньо, щоб в $I_t^+ \times R_x^n$ існувала функція $V\ (t, y)$ така, що

1) $V\ (t, y) \geq W(y)$, де $W(y) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$;

2) для кожного розв'язку $y\ (t;\ t_0, y_0)$ функція $V(t, y\ (t;\ t_0, y_0))$ була незростаючою відносно змінної t [6].

Зауваження. Для випадку достатності умову 2) можна замінити наступним:

2) $\dot{V}\ (t, y) \leq 0$ в силу теорема (2.44).

Доведення. 1) Доведемо спочатку достатність умови теореми. Нехай для системи (2.44) існує функція $V\ (t, y)$, що має властивості 1) і 2). Для будь-якого розв'язку $y\ (t;\ t_0, y_0)$ $(t_0 < a, \|y_0\| < \infty)$ в силу умови 2) при $t \geq t_0$ маємо

$$V\big(t, y\ (t;\ t_0, y_0)\big) \leq V\big(t_0, y\ (t_0;\ t_0, y_0)\big) = V\ (t_0, y_0).$$

Звідси на основі умови 1) отримаємо

$$W\big(y\ (t;\ t_0, y_0)\big) \leq V\big(t, y\ (t;\ t_0, y_0)\big) \leq V\ (t_0, y_0) \text{ при } t \geq t_0. \qquad (2.45)$$

Із останньої нерівності слідує, що розв'язок $y\,(t;\ t_0, y_0)$ обмежений. Справді, якщо це не так, то знайшлася б послідовність моментів часу $t_k \to \infty$ $(k = 1, 2, \dots, t_k \geq t_0$ така, що

$$\|y\,(t_k;\ t_0, y_0)\| \to \infty \text{ при } k \to \infty$$

а, отже,

$$W\big(y\,(t_k;\ t_0, y_0)\big) \to +\infty, k \to \infty,$$

всупереч нерівності (2.45). Таким чином, розв'язок $y\,(t;\ t_0, y_0)$ обмежено продовжений вправо і

$$sup\|y\,(t;\ t_0, y_0)\| < \infty \qquad (2.46)$$

при $t \in [t_0, \infty)$.

Для цієї частини теореми не потрібно виконання властивості єдиності розв'язку.

2) Доведемо тепер необхідність умови теореми. Нехай будь-який розв'язок $y\,(t;\ t_0, y_0)$ системи (2.45) існує і обмежений на проміжку $t_0 \leq t < \infty$, а, отже, нескінченно продовжений при $t \to +\infty$.

Припустимо, що

$$V\,(t, y) = sup\|y\,(t + \tau; t, y)\|^2,$$

де $t < a, \|y\| < \infty$.

Із формули (2.46) маємо

$$V\,(t, y) \geq \|y\,(t + \tau; t, y)\|^2 = \|y\|^2 \equiv W\,(y),$$

причому, очевидно, $W\,(y) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$, тобто умова 1) виконана.

Далі при $a < t_1 < t_2$, враховуючи, що в силу властивості єдиності розв'язок $y\,(t;\ t_2, y(t_2;\ t_0, y_0))$ є продовженням розв'язку $y\,(t;\ t_1, y(t_1;\ t_0, y_0))$ отримаємо

$$V\,\big(t_1, y(t_1;\ t_0, y_0)\big) = \sup\|y\,(t_1 + \tau;\ t_1, y\,(t_1;\ t_0, y_0)\|^2 \geq$$

$$\geq \sup\|y\,(t_2 + \tau;\ t_2, y\,(t_2;\ t_0, y_0)\|^2 = V\,\big(t_2, y(t_2;\ t_0, y_0)\big).$$

Таким чином, умова 2) також виконана. Теорема доведена.

2.2.8. Теорема Персидського

Теорема Персидського. Нехай дана система

$$\frac{dx}{dt} = X\,(t, x)\ (X\,(t, 0) \equiv 0), \qquad (a)$$

де $X \in C_{tx}^{(1,1)}$ $(t_0 \le t < +\infty, \|x\| < H < \infty)$, допускає тривіальний розв'язок $\xi = 0$, стійкий за Ляпуновим при $t \to +\infty$. Тоді для системи (a) в області

$$t_0 \le t < +\infty, \|x\| < h < H$$

існує функція Ляпунова $V\,(t, x) \in C_{tx}^{(1,1)}$ 1-го роду, тобто така, що задовольняє умови першої теореми Ляпунова про стійкість [7].

Доведення. Розглянемо допоміжну систему

$$\frac{dy}{dt} = Y\,(t, y), \qquad (b)$$

де $Y\,(t, y) = X\,(t, y)\,\varphi(y)$, причому $\varphi(y) \in C^1(R_y^n)$ – скалярна функція, що задовольняє умови:

$$\varphi\,(y) = \begin{cases} 1 \text{ при } \|y\| \le h, \\ 0 \text{ при } \|y\| \ge H. \end{cases} \qquad (2.47)$$

Нехай $x\,(t;\ t_0, x_0)$ і $y\,(t;\ t_0, y_0)$ розв'язки, відповідно систем (a) і (b), визначені початковими умовами: $x\,(t;\ t_0, x_0) = x_0$ і $y\,(t;\ t_0, y_0) = y_0$.

Із умов (2.47) випливає, що розв'язок $y\,(t;\ t_0, y_0)$ можна вважати визначеним на пів осі $t_0 \le t \le \infty$ і таким, що має властивість єдиності.

Фіксуючи t_0, розглянемо функцію

$$V\,(t, x) = (1 + e^{-t})\|y\,(t;\ t_0, x)\|^2 \qquad (2.48)$$

$$(t \ge t_0, \|x\| < H),$$

де норма вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ розуміється в якості евклідової норми:

$$\|y\|^2 = (y, y) = \sum_j y_j^2.$$

Нехай $t \ge t_0$ і $\|x\| < h$. Тоді на основі умови (2.47) праві частини системи (a) і (b) співпадають, а отже, для повних похідних функцій $V\,(t, x)$ в силу систем (a) і (b) маємо

$$\dot{V}_a\,(t,x) = V_b\,(t,x) = \left\{\frac{d}{d\tau}(1+e^{-t})\|y\,(t;\;t_0,x)\|^2\right\}_{\tau=t}, \qquad (2.49)$$

де $y_\tau = y\,(\tau; t, x)$. Але точка $y\,(t_0;\;\tau, y_\tau)$ лежить на траєкторії Γ, що проходить через точку (t, x) і внаслідок теореми єдності точка ї виходу на гіперплощину $t = t_0$ співпадає з слідом $y\,(t_0;\;t,x)$ траєкторії Γ, тобто

$$y\,(t_0;\;\tau, y_\tau) = y\,(t_0;\;t,x) \qquad (2.50)$$

при $t_0 \le \tau < \infty$.

Таким чином, з формули (2.49) отримаємо

$$\dot{V}_a\,(t,x) = \|y\,(t;\;t_0,x)\|^2\left[\frac{d}{d\tau}(1+e^{-t})\right]_{\tau=t} = -e^{-t}\|y\,(t;\;t_0,x)\|^2 < 0 \qquad (2.51)$$

при $x \ne 0$ і $\dot{V}_a\,(t,0) = 0$, тобто похідна $\dot{V}\,(t,x)$ в силу системи (а) знако від'ємна.

Покажемо, що функція $V\,(t,x)$ – додатно визначена в області $t_0 \le t < \infty$, $\|x\| < h$. Так як тривіальний розв'язок $\xi = 0$ як системи (a), так і системи (b) стійке за Ляпуновим, то існує $\delta > 0$ $(\delta < \varepsilon \le h)$ таке, що при $t_0 \le t < \infty$ маємо

$$\|x\,(t;\;t_0,x_0)\| = \|y\,(t;\;t_0,y_0)\| < \varepsilon, \qquad (2.52)$$

якщо тільки $\|x_0\| < \delta$. Тоді, якщо $0 < \varepsilon \le \|x_0\| < h$, то

$$\|y\,(t_0;\;t,y_0)\| \ge \delta \text{ при } t \ge t_0. \qquad (2.53)$$

Дійсно, якщо б $\|y\,(t_0;\;\bar{t},x_0)\| < \delta$ для деякого $\bar{t} \ge t_0$, то $\|y\,(t;\;\bar{t},x_0)\| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$. Звідси, нехай $t = \bar{t}$ будемо мати $\|y\,(\bar{t};\;t,x_0)\| = \|x_0\| < \varepsilon$, що суперечить вибору x_0.

Крім того, що на основі формули (2.47) в силу властивості єдиності розв'язків системи (b) маємо

$$\|y\,(t_0;\;t,x_0)\| < H \text{ при } \|x_0\| < h. \qquad (2.54)$$

Із формули (2.48) отримаємо

$$V\,(t,x_0\,) > \delta^2 = \eta \text{ при } \varepsilon \le \|x_0\| < h. \qquad (2.55)$$

Нехай $\varepsilon = \frac{h}{2}, \dots, \frac{h}{n+1}, \dots$, отримаємо послідовність додатних чисел $\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_n > 0$ таких, що

$$V\,(t,x_0\,) > \eta_n \text{ при } \frac{h}{n+1} \le \|x\| < \frac{h}{n}$$

$(n = 1, 2, \dots)$. Звідси слідує, що існує неперервна додатно визначена функція $W\,(x)$ і задовольняє нерівність

$$V\,(t, x) \geq W(x) > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Наприклад, можна покласти

$$W(x) = \eta_{n+1} + \frac{n(n+1)}{h}(\eta_n - \eta_{n+1})\left(\|x\| - \frac{h}{n+1}\right)$$

при $\frac{h}{n+1} \leq \|x\| < \frac{h}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Отже, функція $V\,(t, x)$ – додатно визначена.

На основі теореми про гладкість розв'язку $y\,(t_0;\ t, y_0)$ за початковими даними t_0, y_0 функція $V\,(t, x)$ неперервна за сукупністю змінних t і x і має неперервні часткові похідні $\frac{\partial V}{\partial t}$ і $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ $(j = 1, \dots, n)m$ причому

$$\dot{V}_a\,(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}\, X_j\,(t, x) < 0$$

при $t \in [t_0, \infty)$ і $\|x\| < h$. Теорема доведена.

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ НА СТІЙКІСТЬ

3.1. Перший метод Ляпунова

Приклад 3.1.1. Дослідити на стійкість точку спокою $(0,0)$ системи

$$\frac{dx}{dt} = -x + z, \frac{dy}{dt} = -2y - z, \frac{dz}{dt} = y - z.$$

Розв’язання

Характеристичне рівняння системи буде мати вигляд

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0.$$

Корені характеристичного рівняння мають від’ємні дійсні частини:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Тоді точка спокою системи асимптотично стійка.

Приклад 3.1.2. Знайти всі дійні значення параметрів α і β при яких розв’язки системи рівнянь будуть стійкими

$$\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y + \beta z, \frac{dy}{dt} = -\alpha x - y + \alpha z, \frac{dz}{dt} = -\beta x - \alpha y - z.$$

Розв’язання

Запишемо характеристичне рівняння системи, за допомогою якої знайдемо власні значення матриці коефіцієнтів:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-\lambda & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \beta^2 + 2\alpha^2) = 0.$$

Дійсні частини коренів характеристичного рівняння будуть від’ємні для будь-яких дійсних α і β Отже, розв’язки даної системи асимптотично стійкі при будь-яких дійсних α і β.

Приклад 3.1.3. Дослідити на стійкість розв’язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y, \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$$

Розв’язання

Характеристичне рівняння системи матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 5 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 2\alpha + 5 = 0.$$

Дійсні частини коренів цього рівняння будуть від’ємні якщо одночасно $2+\alpha < 0, 2\alpha+5 > 0$, тобто якщо $-2{,}5 < \alpha < -2$. В цьому випадку розв’язки будуть асимптотично стійкі. Характеристичне рівняння буде мати один додатний або пару коренів з додатною дійсною частиною, якщо $2\alpha + 5 < 0$, тобто $\alpha < -2{,}5, \alpha > -2$. Тоді розв’язки системи нестійкі.

У випадку коли $\alpha = -2{,}5$ один з коренів характеристичного рівняння дорівнює 0, а інший $-0{,}5$. Тоді розв’язки системи стійкі, так же як при $\alpha = -2$.

Приклад 3.1.4. При яких дійсних a, b і c розв’язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = -bx + cy.$$

асимптотично стійкі?

Розв’язання

Запишемо характеристичне рівняння системи, за допомогою якої знайдемо власні значення матриці коефіцієнтів:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac + b^2 = 0.$$

Від’ємними дійсні частини рівняння будуть тільки тоді, коли

$$a + c < 0, \qquad ac + b^2 > 0.$$

Отже, розв’язки системи асимптотично стійкі, якщо одночасно вкинуються нерівності $a + c < 0$ і $ac + b^2 > 0$.

Приклад 3.1.5. За допомогою визначення стійкості за Ляпуновим показати, що кожний розв’язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

стійкий.

Розв’язання

Запишемо розв'язок $x_1(t)$ цього рівняння, що задовольняє початкову умову $x_1(t_0) = x_1^0$, у вигляді $x_1(t_0) \equiv x_1^0 = const$.

Розглянемо другий розв'язок $x_2(t)$ даного рівняння, що задовольняє початкову умову

$$x_2(t_0) = x_2^0.$$

Для вказаних розв'язків маємо $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$ для всіх t. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що як тільки $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$, то для розв'язків $x_1(t), x_2(t)$ буде виконувати нерівність

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| < \varepsilon \text{ при всіх } t \geq t_0.$$

Отже, будь-який розв'язок даного рівняння стійкий. Але стійкість є неасимптотичною, оскільки не виконана умова:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Приклад 3.1.6. Дослідити за визначенням стійкість розв'язку диференціального рівняння $\dot{x} = a^2 x, a \neq 0$ що визначається початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Розв'язання

Загальним розв'язком цього рівняння є $x(t) = Ce^{a^2 t}$. Навіть при як завгодно малій різниці $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$ в початковий момент часу поступово різниця

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left|x_0 e^{a^2(t-t_0)} - \widetilde{x_0} e^{a^2(t-t_0)}\right| = e^{a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}|$$

зростає і досягає з плином часу довільного більшого значення.

Розв'язок вихідної задачі Коші нестійкий за Ляпуновим.

Приклад 3.1.7. Дослідити за визначенням стійкість розв'язку диференціального рівняння $\dot{x} = -a^2 x, a \neq 0$ що визначається початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Розв'язання

Загальним розв'язком цього рівняння є $x(t) = Ce^{-a^2 t}$. За початковою умовою $x(t_0) = Ce^{-a^2 t_0} = x_0$, звідси $C = x_0 e^{a^2 t_0}$. Тоді частковий розв'язок диференціального рівняння, що відповідає початковій умові, є $x(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$ Стійкість цього розв'язку і потрібно дослідити.

Змінимо початкову умову: $x(t_0) = \widetilde{x_0}$. Очевидно, що новим частковим розв'язком вихідного рівняння буде функція $\tilde{x}(t) = \widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}$. При будь-якому значенні початкового відхиленні $|x_0 - \widetilde{x_0}|$ з плином часу модуль різниці двох розв'язків

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left|x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}\right| = e^{-a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}| \to 0.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі Коші асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Приклади для самостійного розв'язування

I. Використовуючи визначення, дослідити на стійкість за Ляпуновим розв'язки наступних рівнянь:

1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, x(0) = 1.$
2. $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1), x(0) = 1.$
3. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t, x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}.$
4. $\dfrac{dx}{dt} = 2xt, x(0) = 0.$
5. $\dfrac{dx}{dt} = cost, x(0) = 1.$

II. Розгляньте систему диференціальних рівнянь

1. $$\frac{dy}{dt} = y - x + y^2 + x^2 \cdot sint, \quad \frac{dx}{dt} = y + x - x^2;$$

2. $$\frac{dy}{dt} = 2y + 8sinx, \quad \frac{dx}{dt} = 2 - e^y - 3x - cosx.$$

Точка є станом рівноваги. Дослідіть її на стійкість

3.2. Стійкість за першим наближенням

Приклад 3.2.1. Дослідити стійкість станів рівноваги математичного маятника з тертям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + sinx = 0, k > 0.$$

Розв'язання

Дане рівняння еквівалентне системі рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -sinx - 2ky.$$

З рівнянь $y = 0$ і $sinx + 2ky = 0$ визначається стан рівноваги системи. Тоді $x = \pi n, y = 0, n \in Z$. Враховуючи, що праві частини системи періодичні по x, достатньо дослідити стійкість розв'язків: $x = 0, y = 0$ (нижній стан рівноваги маятника) і $x = \pi, y = 0$ (верхній стан рівноваги маятника).

В околі $(0, 0)$ точки лінеаризуємо систему Виділимо з функції $sinx$ її лінійну частину: $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

Система першого наближення буде мати такий вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x - 2ky.$$

Тоді характеристичне рівняння буде:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Його корені мають від'ємні дійсні частини, якщо $k > 0$. Отже, розв'язок $x = 0, y = 0$ рівнянь асимптотично стійкий.

Дослідимо стійкість розв'язку $x = \pi, y = 0$ Так як в околі точки має місце

$$sinx = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \cdots.$$

Тоді система перших наближень має вигляд:

$$\frac{d(x - \pi)}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = (x - \pi) - 2ky.$$

Характеристичне рівняння системи матиме вигляд: $\lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0$. Воно має дійсні корені різних знаків. Тому розв'язок $x = \pi, y = 0$ нестійкий.

Приклад 3.2.2. Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 5y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Розв’язання

Система першого наближення матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння системи, оскільки нелінійні члени задовольняють потрібні умови:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Тоді корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

дійсні і $\lambda_1 > 0$. Отже, нульовий розв’язок системи нестійкий.

Приклад 3.2.3. Дослідити за першим наближення стійкість тривіального розв’язок $x = y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = sinax + \ln(1-4y), \end{cases} \quad a = const.$$

Розв’язання

Система першого наближення:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2a - y + R_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - 4y + R_2(x, y). \end{cases}$$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + (8+a) = 0;$$

характеристичні числа:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

Розглянемо часткові випадки в залежності від параметра a:

1. Якщо $a > 1$, то отримуються комплексні характеристичні числа з від'ємною частино (-3); тривіальний розв'язок асимптотично стійкий.

2. Якщо $-8 < a \leq 1$, то $\lambda_{1,2}$ від'ємні; тривіальний розв'язок асимптотично стійкий.

3. $a = -8$; тоді одне із характеристичних чисел перетворюється в нуль. Це критичний випадок, коли перше наближення не застосовано.

4. $a < -8$; тоді отримується $\lambda_{1,2}$ різних знаків. Тривіальний розв'язок нестійкий.

Приклади для самостійного розв'язування

I. Дослідити на стійкість за першим наближенням гульові розв'язки наступних систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -sinx + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6cosy - 6 - y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + sin^3x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + siny + e^y x^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2siny - y^3 sinx, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8siny, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - cosy; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \dfrac{7}{2}siny - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = 10sinx - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14siny + y^{2.} \end{cases}$

II. За теоремою Ляпунова про стійкість за першим наближенням, дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - cos3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2cosx), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = tg(y-x), \\ \dot{y} = 2^y - 2cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = tg(z-y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x). \end{cases}$

3.3. Другий метод Ляпунова

Приклад 3.3.1. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -f(x),$$

де функція $f(x)$ така, що $f(0) = 0, f(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Розв'язання

Система має перший інтеграл

$$v\,(x,y) \equiv \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(t)dt = C.$$

Так як функція $v\,(x,y)$ є додатно визначеною, похідна складена за системою

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}y + \frac{\partial n}{dy}\big(-f(x)\big) = f(x)y - ff(x) = 0,$$

то точка спокою системи стійка в силу першої теореми Ляпунова.

Приклад 3.3.2. Дослідити на стійкість точку спокою $(0,0)$ системи

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3.$$

Розв'язання

Функція Ляпунова буде мати вигляд: $V\,(x,y) = x^2 + y^2$. Похідна

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 3y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4),$$

буде від'ємно визначено. Точка спокою $(0,0)$ асимптотично стійка, за другою теоремою Ляпунова.

Приклад 3.3.3. За допомогою функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок $x \equiv 0, y \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}.$$

Розв'язання

Функцію Ляпунова шукатимемо у вигляді $V\,(x,y) = ax^2 + by^2$, де $a > 0$, $b > 0$ – параметри Похідна дорівнює

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}\right) =$$

$$= -(2ax^2 + by^2) + (2xy - x^3y^2) * b - 2a).$$

Нехай $b = 2a$, маємо $\frac{dV}{dt} = -2a(x^2 + u^2) \leq 0$. Тоді, при будь-якому $a > 0$ і $b = 2a$, функція $V\,(x,y)$ додатно визначена, а похідна $\frac{dV}{dt}$ від'ємно визначена. Тривіальний розв'язок $x \equiv 0, y \equiv 0$ системи рівнянь асимптотично стійкий за другою теоремою Ляпунова.

Приклад 3.3.4. Дослідити на стійкість точки спокою системи

$$\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = y,$$

Розв'язання

Візьмемо функцію у вигляді: $v\,(x,y) = x^2 - y^2$. Похідна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

додатно визначена. Так як в будь-якому околі точки $(0,0)$, знайдуться точки, у яких $v > 0$. Тоді точка спокою системи рівнянь нестійка (сідло), оскільки виконані всі умови третьої теореми Ляпунова.

Приклад 3.3.5. Дослідити на стійкість тривіального розв'язку $x = y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2 y. \end{cases}$$

Розв’язання

В цьому випадку, система першого наближення має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ – критичний випадок. За системою першого наближення неможливо зробити які-небудь висновки про стійкість тривіального розв’язку вихідної системи.

Використаємо другий метод Ляпунова. Нехай функція Ляпунова $V = x^2 + y^2$. Похідна в силу системи

$$\frac{dV}{dt} = -2(x - y)^2 - 4x^2 y^2$$

визначена від’ємно, тоді і тільки тоді, коли сама функція V – додатно визначена. Отже, тривіальний розв’язок вихідної системи асимптотично стійкий.

Легко перевірити, що система першого наближення має загальні розв’язки

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-2t},$$
$$y(t) = C_1 - C_2 e^{-2t},$$

де $C_{1,2}$ – довільні сталі. Звідси випливає, що тривіальний розв’язок цієї системи стійкий, але не асимптотично.

Приклад 3.3.6. Дослідити на стійкість нульовий розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Розв’язання

Виберемо для системи в якості функції Ляпунова функцію $V = x^2 + y^2$. Вона є, по перше, додано визначеною, а по-друге, для її похідної, знайденої в силу системи, маємо:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) =$$

$$= -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leq 0$$

при достатньо малих x і y. Виконані всі умови теореми Ляпунова про стійкість. Отже, нульовий розв'язок $x_i = 0, y = 0$ системи стійкий.

Приклад 3.3.7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3 \end{cases}$$

Розв'язання

Функція $V = x^2 + y^2$ вибрана для системи, задовольняє умови Ляпунова про асимптотичну стійкість:

$$1)\ V\ (x, y) \geq 0, V\ (0, 0) = 0;$$

$$2)\ \frac{dV}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) =$$

$$= -(4x^4 + 6y^4) \leq 0, \frac{dV}{dt} < 0, \frac{dV}{dt} = 0.$$

тільки при $x = 0, y = 0$ і значить, $\frac{dV}{dt}$ є від'ємною визначеною функцією. Отже, розв'язок $x = 0, y = 0$ системи асимптотично стійкий.

Приклад 3.3.8. Дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2y^3 - x. \end{cases}$$

Розв'язання

Для дослідження системи методом функції Ляпунова, виберемо функцію $V = x^2 + y^2$. Тоді

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4).$$

Отже функція задовольняє умови теореми про асимптотичну стійкість. Можна зробити висновок, що точка спокою є асимптотично стійкою.

Приклади для самостійного розв'язування

I. За допомогою функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

II. Дослідити стійкість нульового розв'язку, побудувавши функцію Ляпунова і застосовувавши теореми Ляпунова або Четаєва.

1) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$

3.4. Критерій Ріса-Гурвіца

Приклад 3.4.1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^{(4)} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0.$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Тут $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10$. Знайдемо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \qquad \Delta_1 = 5 > 0,$$

тобто $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$. Тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння асимптотично стійкий за критерієм Гурвіца.

Приклад 3.4.2. При яких параметрах a і b буде асимптотично стійкий нульовий розв'язок рівняння

$$ay^{(4)} + y''' + y'' + y' + by = 0.$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння буде мати вигляд:

$$f(\lambda) = a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b = 0.$$

Тут $a_0 = a, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = b$. Знайдемо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1 = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 - a - b,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(1 - a - b).$$

Для того, що нульовий розв'язок рівняння був асимптотично стійкий за критерієм Гурвіца, необхідно і достатньо щоб виконувалися нерівності $1-a>0, 1-a-b>0, b(1-a-b)>0, a>0$. Розв'язавши цю систему нерівностей, матимемо: $a>0, b>0, a+b<1$.

Приклад 3.4.3. Знайти область значень параметрів a, b асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння

$$y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Тут $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = a, a_3 = b$. знайдемо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1 = 3 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = 3a - b,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 3 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(3a - b).$$

Для того, що нульовий розв'язок рівняння був асимптотично стійкий за критерієм Гурвіца, необхідно і достатньо щоб виконувалися нерівності $3a-b>0, b(3a-b)>0$. Тоді, область значень параметрів асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи така: $3a>b>0$.

Приклад 3.4.4. За допомогою критерію Гурвіца дослідити на стійкість систему рівняння, в якої характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

Розв'язання

В даному випадку маємо

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 5 > 0, a_4 = 4 > 0,$$

отже, необхідна умова стійкості виконується.

Складемо визначник 4-го порядку:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Головні мінори мають вигляд:

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -29 < 0,$$

отже, за критерієм Гурвіца система нестійка.

Приклад 3.4.5. Визначити характер та дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Розв’язання

В даному випадку характеристичний визначник буде мати вигляд:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного многочлена

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Так як корені дійсні і мають різні знаки, то за таблицею, точка спокою не є стійкою.

Приклад 3.4.6. Дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = -x + 4y + 2z, \\ y' = -4x - y + z. \end{cases}$$

Розв’язання

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ -4 & -1-\lambda & 4 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В даному випадку характеристичний визначник буде мати вигляд:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 37) = 0.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку дійсні частини коренів даного многочлена від'ємні. Отже, система є асимптотично стійкою.

Приклад 3.4.7. Дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = -4x - cosy + e^{3z}, \\ y' = 3sinx + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2cosz + 3y + \sin(-4z). \end{cases}$$

Розв'язання

Лінеаризуємо систему в околі $x = y = z = 0$.

$$\begin{cases} x' = -4x + 3z, \\ y' = 3x - 4y, \\ z' = 3y - 4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння даної системи має вигляд:

$$\lambda^3 + 12\lambda^2 + 48\lambda + 37 = 0.$$

Для з'ясування. коли корені многочлена від'ємні, використаємо критерій Рауса-Гурвца і побудуємо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 37 & 48 & 12 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи додатні головні діагональні мінори останньої матриці:

$$12 > 0, 12 \cdot 48 - 37 \cdot 1 > 0, 37 > 0.$$

Тоді, тривіальний розв'язок буде асимптотично стійкий.

Приклади для самостійного розв'язування

І. Дослідити стійкість нульового розв'язку, використовуючи відомі умови від'ємності дійсних частин всіх коренів многочлена, наприклад, критерієм Рауса-Гурвица:

1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$
3. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$
4. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$
5. $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$
6. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

7. $y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$

8. $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$

9. $y^{IV} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0.$

10. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

11. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

II. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b асимптотично стійкий нульовий розв'язок.

1) $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = y + sinx, \\ \dot{y} = ax + by; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = ln\,(1 + x + ay); \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = ln(e - ax) - e^{y}, \\ \dot{y} = bx + tgy. \end{cases}$

3.5. Інші методи дослідження на стійкість

Приклад 3.5.1. Дослідити за визначенням стійкість розв'язку диференціального рівняння $\dot{x} = 0$ що визначається початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Розв'язання

Розв'язок даної задачі Коші: $x(t) \equiv x_0 \equiv const.$ при іншій початковій умові $(t_0) = \widetilde{x_0}$ отримаємо новий частковий розв'язок $\tilde{x}(t) \equiv \widetilde{x_0} \equiv const.$ Нехай в початковий момент часу $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$. Тоді $\forall t \geq t_0$ залишиться $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \equiv \delta$.

Розв'язок стійкий, але не асимптотично, так як $|x(t) - \tilde{x}(t)| = |x_0 - \widetilde{x_0}| \nrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

Приклад 3.5.2. Показати, що кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x = 0$$

асимптотично стійкий.

Розв'язання

Запишемо загальний розв'язок рівняння:

$$x(t) = Ce^{-t},$$

де $CC = const$. Розв'язки $x_1(t)$ і $x_2(t)$ даного рівняння, що задовольняють початкові умови $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0$, мають вигляд $x_1(t_0) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}$, $x_2(t_0) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}$. Маємо $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \to 0$ при всіх $t \to +\infty$ звідки слідує асимптотична стійкість будь-якого розв'язку вихідного рівняння.

Приклад 3.5.3. Дослідити на стійкість і асимптотичну стійкість нульовий розв'язок системи, загальний розв'язок якої має вигляд:

$$x_1 = C_1 cos^2 t - C_2 e^{-t},$$
$$x_2 = -2C_1 costsint + C_2 e^{-t}.$$

Розв'язання

У відповідності з даними загальними розв'язками, маємо:

$$x_1 = [x_1(0) + x_2(0)]cos^2 t - x_2(0)e^{-t},$$
$$x_2 = -2[x_1(0) + x_2(0)] + x_2(0)e^{-t}.$$

Отже, $|x_1(t)| < |x_1(0)| + 2|x_2(0)| < \varepsilon, |x_2(t)| < 2|x_1(0)| + 3|x_2(0)| < \varepsilon$ при $|x_1(0)| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon), |x_2(0)| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon)$, а це означає, що тривіальний розв'язок стійкий. Але стійкість не є асимптотичною, оскільки x_1 і x_2 не наближається до нуля при $t \to \infty$ при жодних початкових значення, відмінних від нуля.

Приклад 3.5.4. Дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8siny, \\ y' = 2 - e^x - 3y - cosy. \end{cases}$$

Розв'язання

Розкладемо функції в ряд Тейлора і виділимо члени 1-го порядку малості

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y + F_1(x, y), \\ y' = -x - 3y + F_2(x, y), \end{cases}$$

де F_1, F_2 – члени 2-го порядку малості. Система за першим наближенням має вигляд:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

Тоді корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ будуть мати від'ємну дійсну частину. Отже, точка спокої вихідної системи стійка.

Приклад 3.5.5. Дослідити на стійкість точку спокою системи:

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 17, \\ y' = xy + 4. \end{cases}$$

Розв'язання

За допомогою розв'язків системи рівнянь обчислимо положення рівноваги

$$\begin{cases} 0 = x^2 + y^2 - 17, \\ 0 = xy + 4. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо чотири точки стану рівноваги:

$$A\ (-1; 4), B\ (-4; 1), C\ (1;\ -4), D\ (4;\ -1).$$

Розкладемо в ряд Тейлора праві частини в околі стану рівноваги $(x_0; y_0)$ і запишемо лінійні члени

$$\begin{cases} x' = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0), \\ y' = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0). \end{cases}$$

Зробивши заміну $x - x_0$ на x і $y - y_0$ на y отримаємо лінеаризовану систему з станом рівноваги у початку координат

$$\begin{cases} x' = y_0 x + x_0 y, \\ y' = 2x_0 x + 2y_0 y. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} y_0 - \lambda & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 3y_0\lambda + 2(y_0^2 - x_0^2) = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки, якщо $y_0^2 < x_0^2$. Так як координати стану рівноваги в точка B і D задовольняють дану умову, то вказані стани рівноваги не є стійкими. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 12\lambda + 30 = 0$ відповідає точці A. Обидва корені додатні, тому стан рівноваги A нестійкий. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0$ відповідає точці Обидва корені від'ємні, тому стан рівноваги C – асимптотично стійкий.

Приклади для самостійного розв’язування

Визначити, чи стійкий нульовий розв’язок системи:

1) $\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = w, \\ w = -y^{\cdot} - z - v; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = y. \end{cases}$

ВИСНОВКИ

У даній роботі увага приділяється дослідженню на стійкість розв’язків систем звичайних диференціальних рівнянь.

Основні результати роботи:

- ✓ проведено дослідження навчальної літератури з теми дослідження;
- ✓ проаналізовано загальні відомості про автономні системи звичайних диференціальних рівнянь;
- ✓ розглянуто властивості та види автономних систем;
- ✓ розглянуто перший та другий методи Ляпунова;
- ✓ розглянуто та підібрано завдання на дослідження стійкості розв’язків.

Матеріали магістерської роботи можуть бути використані у роботі викладачів та студентів при вивчені курсу «Диференціальні рівняння», «Методи нелінійного аналізу», «Якісна теорія диференціальних рівнянь» та інших.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1984. 271 с.
2. Бугрій О. М. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. Львів, 2011.
3. Бусурулов О. О. Лекції з курсу звичайних диференціальних рівнянь. Днепропетровск : Вид-во ДДУ, 1993. 196 с.
4. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. 142 с.
5. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 470 с.
6. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. Дослідження стійкості розв’язків систем диференціальних рівнянь. Навчальнометодичний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 25с.
7. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задача з диференціальних рівнянь. Київ : Вища школа, 1972. 156 с.
8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. Санкт-Петербург: Лань, 2008. 480 с.
9. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. Львів, 2014.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1971. 576с.
11. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Высшая школа., 1983. 128 с.
12. Краснов М. Л., Киселев А. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Высшая школа, 1978. 287 с.
13. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. Москва : Едиториал УРСС, 2002. 256 с.

14. Кривошея С. А Диференціальні та інтегральні рівняння : підручник. Київ : Либідь, 2004.

15. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва : Наука, 1966. 532 с.

16. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. Москва : Просвещение, 1988. 256 с.

17. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Росвузиздат, 1962. 292 с.

18. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск : Вышэйшая школа, 1967. 564 с.

19. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Москва : Наука, 1976. 306 с.

20. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1982. 331 с.

21. Самойленко А. М., Перестюк І. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.

22. Самойленко А. М., Перестюк І. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння у задачах. Київ : Либідь, 2003. 504 с.

23. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Москва : Высшая школа, 1989. 383 с.

24. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 455 с.

25. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 1994. 360 с.

26. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.

27. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Москва : ГИФМЛ, 1949. 366 с.

28. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1980. 232 с.

29. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1985. 230 с.

30. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.

31. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1992. 126 с

32. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. Київ : Вища школа Головне вид-во, 1971. 228 с.

33. Шкіль М. І., Сотніченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння: Навч.посібник. Київ : Вища школа, 1992. 303 с.

34. Школьник А. Г. Дифференциальные уравнения. Москва : Учпедгиз, 1963. 200 с.

35. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва : Наука, 1969. 424 с.