Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Функції Бесселя та їх застосування

Виконала: студентка II курсу, групи М-М-2

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Ліщук Галина Ігорівна

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент______________________________

Рівне 2023 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Циліндричними функціями називаються розв'язки лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0,$$

де v – довільне дійсне число.

Це рівняння відоме у літературі під назвою диференціальне рівняння Бесселя. Воно виникає під час знаходження розв'язку рівняння Лапласа та рівняння Гельмгольца у циліндричних та сферичних координатах. Тому функції Бесселя застосовуються при розв'язуванні багатьох задач про поширення хвиль, статичні потенціали і т.п.

Функції Бесселя сьогодні широко використовуються в багатьох галузях сучасної прикладної математики та математичної фізики. Області застосування цих функцій різноманітні. Завдяки розвитку комп'ютерних технологій функції Бесселя, також, відіграють провідну роль в математичному моделюванні різних процесів, наприклад природних явищ. Інтерес математиків до спеціальних функцій математичної фізики досі не згасає.

Метаю роботи є вивчення теоретичних даних про функції Бесселя та застосування їх властивостей до розв'язування задач математичної фізики.

Об'єкт дослідження: рівняння та функції Бесселя.

Предмет дослідження: методика застосування різних видів функцій Бесселя.

Завдання:

- вивчити рівняння Бесселя та модифіковане рівняння Бесселя;

- розглянути основні властивості функцій Бесселя: рекурентні співвідношення, коефіцієнти Бесселя, інтегральні формули Бесселя, асимптотику, нулі та ортогональні множини функцій Бесселя;

- розглянути основні моменти методу відоклемлення змінних і звичайної задачі Штурма-Ліувілля;

- розв’язати крайові задачі де застосовуються функції Бесселя: коливання круглої мембрани та поширення теплоти в нескінченному однорідному циліндрі.

Робота складається із вступу, трьох розділів та висновків. Бібліографія містить 25 джерел, включаючи електронні та Інтернет-ресурси.

РОЗДІЛ 1. ПОЧАТКОВІ ПОНЯТТЯ І ВІДОМОСТІ

1.1. Гамма-функція

Гамма-функція визначається наступним інтегралом:

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} \mathrm{d}t \qquad (1.1)$$

для значень v, відмінних від 0,-1,-2,…, де функція є нескінченною [3]. Зазвичай, гамма-функцію записують у вигляді таблиці для різних значень v.

Гамма-функцію дуже часто використовують як розширення факторіального оператора для цілих і від'ємних чисел. Щоб це побачити, виконаємо інтегрування частинами

$$\Gamma(v+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{v} dt = (e^{-t} t^{v})|_0^\infty + v \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{v-1} dt = v\Gamma(v)$$

Отже, отримали ще одну важливу властивість гамма-функції:

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v). \qquad (1.2)$$

Інтеграл (1.1) для $v = 1$ дає:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} dt = 1. \qquad (1.3)$$

Починаючи із значення (1.3) і використовуючи співвідношення (1.2), ітераційно отримаємо наступний ряд значень:

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1\Gamma(1) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2\Gamma(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1\Gamma(1) = 3!$$

…

і так далі. Таким чином, для цілих значень гамма-функція еквівалентна функції факторіалу:

$$\Gamma(v+1) = v!, \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Більше того, Ейлер і Вейєрштрас описують гамма-функцію за допомогою нескінченних добутків. Можна довести, що наведені нище вирази є альтернативними визначеннями гамма-функції для всіх комплексних значень z, за винятком цілих від’ємних чисел.

Ейлерове визначення як нескінченного дробу:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.$$

Визначення Вейєрштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\},$$

де γ – це стала Ейлера

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0{,}5772.$$

Як наслідок цих визначень маємо наступні властивості гамма-функції:

1) якщо $n \in N$, то

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n};$$

2) Ейлерова формула відображення:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad z \notin \mathbb{Z}.$$

Зокрема, для $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3) формула подвоєння Лагранжа:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

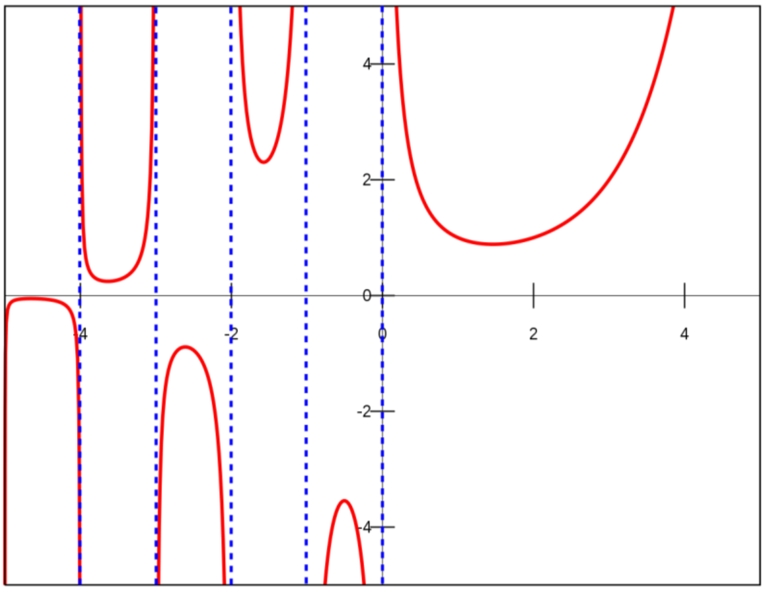

Рис. 1.1. Графік гамма-функції дійсної змінної

1.2. Звичайна задача Штурма-Ліувілля

Будемо використовувати теорію задач Штурма-Ліувілля для отримання властивостей функцій Бесселя у пункті 2.5.6. Тому наведемо й ці проблеми. Почнемо з означення самоспряжених перетворень.

Означення 1. Нехай V — векторний простір зі скалярним добутком $(.,.)$. Лінійне перетворення $T: V \to V$ називається самоспряженим, якщо

$$(T(x),y)=(x,T(y)), \forall x,y \in V.$$

Далі нас цікавить простір $C^2([a,b])$, де $a,b \in R$ і $a<b$, із скалярним добутком, визначеним за формулою

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Означення 2. Якщо $L: C^2([a,b]) \to C^2([a,b])$ — лінійне перетворення

$$L(f) = rf'' + qf' + pf, \qquad p, q, r \in C^2([a,b])$$

(також припускаємо, що p, q, r приймають дійсні значення), то спряжене перетворення для L визначається за допомогою

$$L^*(f) = (rf)'' - (qf)' + pf = rf'' + (2r' - q)f' + (r'' - q' + p)f.$$

Крім того, якщо $L = L^*$, то L називається самоспряженим перетворенням.

Тотожність Лагранжа є добре відомою властивістю самоспряжених операторів.

Лема 1 (тотожність Лагранжа). Якщо $L: C^2([a,b]) \to C^2([a,b])$ є формально самоспряженим оператором для

$$L(f) = rf'' + qf' + pf, \qquad p, q, r \in C^2([a,b]),$$

тоді

$$(L(f), g) = \big(f, L(g)\big) + \big(r(x)(f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{g'(x))}\big)\big|_a^b. \qquad (1.4)$$

Доведення. Оскільки L самоспряжений оператор і тому $L = L^*$, і ми також маємо

$$2r' - q = q \text{ та } r'' - q' + p = p.$$

Тому, $q(x) = r'(x)$ і

$$L(f) = rf'' + r'f' + pf = (rf')' + pf.$$

$$(L(f), g) - \big(f, L(g)\big) = \int_a^b \big(L(f)x\overline{g(x)} - f(x)\overline{L(g)x}\big)dx =$$

$$= \int_a^b \Big(\overline{g(x)}((r(x)f'(x))' + p(x)f(x)) - f(x)\big(\overline{(r(x)f'(x))' + p(x)f(x)}\big)\Big)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\overline{g(x)}(r(x)f'(x))' - f(x)\overline{(r(x)g'(x))'}\right) dx.$$

Використаємо інтегрування частинами:

$$(L(f), g) - (f, L(g)) = \left(\overline{g(x)}r(x)f'(x)\right)|_a^b - \int_a^b r(x)f'(x)\overline{g'(x)}dx -$$

$$-\left(f(x)r(x)\overline{g'(x)}\right)|_a^b + \int_a^b r(x)f'(x)\overline{g'(x)}\, dx =$$

$$= \left(r(x)\left(f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{g'(x)}\right)\right)|_a^b.$$

Означення 3. Нехай $[a, b] \subseteq R$ і $f \in C^2([a, b])$. Крайова умова — це обмеження типу

$$B(f) = \alpha f(a) + \alpha' f'(a) + \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0,$$

де $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ є сталими.

Крім того, нехай $L: C^2([a, b]) \to C^2([a, b])$ є самоспряженим оператором, визначеним як

$$L(h) = rh'' + qh' + ph,$$

де r, p і q — дійсні функції в просторі $C^2([a, b])$. Якщо $\left(r(f'\bar{g} - f\overline{g'})\right)|_a^b = 0$ виконується для всіх f, g таких, що $B(f) = B(g) = 0$, крайова умова B називається самоспряженою.

У нашому випадку ми будемо працювати з граничними умовами типу

$$B(f) = \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0$$

Нарешті, сформулюємо звичайну задачу Штурма-Ліувілля. Ця задача визначається за такими даними.

1. Самоспряжений оператор L, визначений як

$$L(f) = (rf')' + pf,$$

де r, r' і p дійсні та неперервні функції на $[a,b]$ і $r > 0$ на $[a,b]$.

2. Набір самоспряжених крайових умов $B_1(f) = 0$ та $B_2(f) = 0$ для оператора L.

3. Додатна неперервна функція w на $[a,b]$.

Мета полягає в тому, щоб знайти всі розв'язки f крайової задачі

$$\begin{cases} L(f) + \lambda w f = 0, \\ B_1(f) = B_2(f) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

де λ — довільна стала [1].

Для більшості значень λ єдиним розв'язком задачі є нуль-функція. Якщо задача має нетривіальні розв'язки для деяких значень λ, то ці сталі називаються власними значеннями, а відповідні розв'язки — власними функціями.

Більше того, скалярний добуток і норма простору $L_w^2(a,b)$ визначаються як

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx = (wf,g) = (f,wg), \tag{1.6}$$

$$\|f\|_w = \sqrt{(f,g)_w}.$$

Теорема 1. Нехай задано звичайну задачу Штурма-Ліувіля вигляду (1.5). Тоді,

1) усі власні значення є дійсними;

2) власні функції, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними відносно вагової функції w, тобто якщо f і g є власними функціями з власними значеннями λ і μ, $\lambda \neq \mu$, то

$$(f, g)_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx = 0.$$

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Якщо λ є власним значенням (1.5) з власною функцією f, то за тотожністю Лагранжа (1.4) і (1.6),

$$\lambda\|f\|_w^2 = (\lambda wf, f) = -(L(f), g) = -\big(f, L(f)\big) = (f, \lambda wf) = \bar{\lambda}(f, wf) = \bar{\lambda}\|f\|_w^2.$$

Таким чином, $\lambda = \bar{\lambda}$ і власне значення λ є дійсним.

Щоб довести другу частину ми беремо власні функції f і g для власних значень λ і μ відповідно. Тоді, оскільки власні значення є дійсними,

$$\lambda(f, g)_w = (\lambda wf, g) = -(L(f), g) = -\big(f, L(g)\big) = (f, \mu wg) = \mu(f, g)_w.$$

Якщо $\lambda \neq \mu$, то $(f, g)_w = 0$ [9].

Теорія Штурма-Ліувілля також дає нам такий результат.

Теорема 2. Для кожної звичайної задачі Штурма-Ліувілля вигляду (1.5) на $[a, b]$ існує ортонормований базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ від $L_w^2(a, b)$, що складається з власних функцій задачі. Якщо λ_n є власним значення для $\phi_т$, тоді $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Крім того, якщо f належить до класу $C^2([a, b])$ і задовольняє крайові умови $B_1(f) = B_2(f) = 0$, то ряд $\sum(f, \phi_n)\phi_n$ рівномірно збігається до f [6].

1.3. Метод відокремлення змінних

Одним з найбільш ефективних аналітичних способів розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Зазвичай його застосовують у крайових задачах тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними. Цей метод відіграє важливу роль у зведенні деяких важливих рівнянь, таких як рівняння хвилі, коливання струни або теплоти, до кількох рівнянь однієї змінної.

Розглянемо таке диференціальне рівняння:

$$F\left(u(x,y), u_x(x,y), u_{xx}(x,y), u_y(x,y), u_{yy}(x,y)\right) = 0. \tag{1.7}$$

Метод відокремлення змінних знаходить розв'язки рівняння (1.7) у вигляді

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Підставивши $X(x)Y(y)$ у рівняння (1.7), ми зможемо записати його у формі

$$F_1(X(x), X'(x), X''(x)) = F_2(Y(y), Y'(y), Y''(y)) \tag{1.8}$$

Оскільки, зліва отримали вираз, який залежить лише від x, а справа – вираз, що залежить лише від y, то обидві частини (1.8) дорівнюють константі $\xi.$ Таким чином, ми можемо звести задачу (1.7) до розв'язання двох рівнянь, що залежать від однієї змінної

$$F_1(X(x), X'(x), X''(x)) = \xi \text{ та } F_2(Y(y), Y'(y), Y''(y)) = \xi.$$

Слід зазначити, що цей метод не завжди знаходить розв'язок, але його можна застосувати до таких задач, як рівняння теплопровідності або хвильове рівняння.

1.4. Оператор Лапласа у полярних і циліндричних координатах

Перш ніж застосувати метод Фур'є до окремих випадків, розглянемо оператор Лапласа. Ми хочемо перетворити оператор Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ в інший вираз, використовуючи наступну заміну змінних

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \qquad \text{де } r > 0 \text{ і} -\pi < \theta < \pi.$$

Спочатку визначимо $v(r,\theta) = u(x,y)$ і розглянемо частинні похідні від v.

$$u_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$$

$$u_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y$$

$$u_{xx} = (v_{rr} r_x + v_{r\theta}\theta_x) r_x + v_r r_{xx} + (v_{\theta r} r_x + v_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + v_\theta \theta_{xx}$$

$$u_{yy} = \left(v_{rr}r_y + v_{r\theta}\theta_y\right)r_y + v_r r_{yy} + \left(v_{\theta r}r_y + v_{\theta\theta}\theta_y\right)\theta_y + v_\theta\theta_{yy}$$

Але оскільки $r^2 = x^2 + y^2$ ми маємо, що $2rr_x = 2x$, $2rr_y = 2y$ і, таким чином, $r_x = \cos\theta$, $r_y = \sin\theta$. Крім того, $r_{xx} = -\sin\theta\,\theta_x$ і $r_{yy} = \cos\theta\,\theta_y$.

З іншого боку, похідна поy,

$$x = r\cos\theta \Longrightarrow 0 = r_y\cos\theta - r\sin\theta\,\theta_y \Longrightarrow \theta_y = \frac{r_y\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Аналогічно,

$$\theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Знову взявши похідну по x від останньої рівності, отримаємо

$$\theta_{xx} = -\frac{r\cos\theta\,\theta_x - r_x\sin\theta}{r^2} = -\frac{r\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) - r_x\sin\theta}{r^2} = \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta.$$

Так само,

$$\theta_{yy} = -\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta.$$

Таким чином,

$$u_{xx} = v_{rr}cos^2\theta + v_{r\theta}\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) + v_r\left(-\sin\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)$$
$$+ v_{r\theta}\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) + v_{\theta\theta}\frac{sin^2\theta}{r^2} + v_\theta\left(\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\right),$$

$$u_{yy} = v_{rr}sin^2\theta + v_{r\theta}\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) + v_r\left(\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\right) + v_{r\theta}\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)$$
$$+ v_{\theta\theta}\frac{cos^2\theta}{r^2} + v_\theta\left(-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\right).$$

Додамо почленно ці дві рівності, та отримаємо оператор Лапласса в полярних координатах [13]:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

У випадку циліндричних координат r, θ і z маємо:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \\ z = z \end{cases}$$

Повторюючи попередні міркування, дістаємо вираз для рівняння Лапласса в циліндричних координатах

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ ТА ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ

2.1. Диференціальне рівняння Бесселя

Рівняння Лапласа є одним із фундаментальних рівнянь математичної фізики. Деякі явища, пов'язані зі скалярним і векторним полем можна описати за допомогою цього рівняння. Загальне рівняння Лапласа записується так:

$$\Delta u = 0$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - це оператор Лапласа.

Нас цікавить більше розв'язок рівняння Лапласа у циліндричних координатах. У циліндричній системі координат рівняння Лапласа матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Щоб розв'язати рівняння (2.1) використаємо метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Ідея методу Фур'є полягає в тому, щоб шукати невідому функцію $u(\rho, \varphi, z)$ у вигляді добутку трьох функцій від однієї змінної: $P(\rho), \Phi(\varphi)$ та $Z(z)$, тобто

$$u(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\, \Phi(\varphi)\, Z(z) \qquad (2.2)$$

Підставивши (2.2) у рівняння (2.1), одержимо:

$$\Phi Z \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\Phi Z}{\rho}\frac{dP}{d\rho} + \frac{PZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + P\Phi\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Поділимо все рівняння на $P\Phi Z$ та перенесемо вираз, що залежить лише від z у праву сторону,

$$\frac{1}{P}\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}.$$

Зліва отримали вираз, який залежить від $\rho\varphi$, а справа – вираз, що залежить лише від z. Така рівність можлива лише тоді, коли ці вирази є сталими. Нехай вона дорівнює $-l^2$.

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-l^2.$$

Звідси маємо:

$$-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-l^2$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-l^2Z=0 \qquad (2.3)$$

Рівняння (2.3) є звичайним лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Як відомо, загальний розв'язок рівняння (2.3) має вигляд

$$Z(z)=c_1e^{lz}+c_2e^{-lz}$$

Такий розв'язок, коли розглядати конкретні граничні умови, дозволить $Z(z)\to 0$, коли $z\to\pm\infty$. Якщо надати сталій від'ємне значення, отримаємо періодичні тригонометричні функції, які не прямують до нуля, коли $z\to\pm\infty$.

Тепер розглянемо вираз, який залежить $\rho\varphi$

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-l^2,$$

звідки, після відокремлення змінних,

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho}+l^2\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

Знову маємо ситуацію, коли зліва отримали вираз, який залежить від ρ, а справа – вираз, що залежить лише від φ. Цього разу приймемо за сталу v^2.

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho}+l^2\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=v^2 \qquad (2.4)$$

Тоді рівняння для Φ має вигляд:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+v^2\Phi=0.$$

Загальний розв’язок цього рівняння можна записати так:

$$\Phi(\varphi)=k_1\cos(v\varphi)+k_2\sin(v\varphi)$$

Цей розв’язок добре підходить для опису зміни кутової координати, як φ.

З (2.4) також маємо:

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho}+l^2\rho^2=v^2$$

$$\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2}+\rho\frac{dP}{d\rho}+(l^2\rho^2-v^2)P=0 \qquad (2.5)$$

Рівняння (2.5) є відомим рівнянням математичної фізики, яке називається параметричним рівнянням Бесселя. У випадку $l=1$, та позначивши невідому змінну через x, а невідому функцію y, отримаємо що диференціальне рівняння Бесселя має вигляд:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0, \qquad (2.6)$$

де v – довільне дійсне число, що називають порядком.

Функції, які задовільняють рівняння (2.6) називають функціями Бесселя або циліндричними функціями. Знаходження загального розв’язку рівняння Бесселя буде об’єктом кількох наступних пунктів.

2.2. Застосування методу Фробеніуса до рівняння Бесселя

Як вже зазначено в пункті 2.1, будемо шукати функції, які є розв'язками рівняння Бесселя (2.6). Деякі розв'язки можна знайти за допомогою методу Фробеніуса, який полягає в знаходженні розв'язку у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n}, \;\; a_0 \neq 0, \tag{2.7}$$

де слід визначити сталу α та коефіцієнти a_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розглянемо першу й другу похідну ряду (2.7):

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)x^{\alpha+n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2}.$$

Підставивши ці ряди в рівняння (2.6), отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^2 x^{\alpha+n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha+n)x^{\alpha+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^2 x^{\alpha+n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\alpha+n}$$

Кожен коефіцієнт при $x^{\alpha+n}$ повинен дорівнювати нулю. Отже, маємо наступні рівняння:

$$n = 0 \implies a_0\alpha(\alpha-1) + a_0\alpha - a_0 m^2 = 0$$

$$n = 1 \implies a_1(\alpha+1)\alpha + a_1(\alpha+1) - a_1 m^2 = 0$$

$$n = 2 \implies a_2(\alpha+2)(\alpha+1) + a_2(\alpha+2) + a_0 - a_2 m^2 = 0$$

$$\dots$$

$$n = k \implies a_k(\alpha + k)(\alpha + k - 1) + a_k(\alpha + k) + a_{k-2} - a_k m^2 = 0$$

$$\dots$$

Виконаємо спрощення:

$$\begin{cases} a_0(\alpha^2 - m^2) = 0 \\ a_1((\alpha + 1)^2 - m^2) = 0 \\ a_2 = \dfrac{-a_0}{(\alpha + 2)^2 - m^2} \\ \dots \\ a_k = \dfrac{-a_{k-2}}{(\alpha + k)^2 - m^2} \\ \dots \end{cases} \tag{2.8}$$

Рівняння, що відповідає $n = 0$, називається індиціальним рівнянням. Воно має два корені $\alpha = \pm m$. Згідно, методу Фробеніуса два незалежні розв'язки, кожен з яких має вигляд (2.7), можна знайти для рівняння (2.6), якщо різниця між цими двома коренями, тобто $m - (-m) = 2m$, не є ні цілим числом, ні нулем. Отже, розглянемо ті випадки, коли m не кратне $\frac{1}{2}$. Для $\alpha = m$ з другого рівняння (2.8) знаходимо, що $a_1 = 0$. Для решти рівнянь отримуємо:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k + 2m)}, k = 2,3, \dots \tag{2.9}$$

Враховуючи, що $a_1 = 0$, з рівняння (2.9) випливає:

$$\begin{gathered} a_2 = -\frac{a_0}{2(2 + 2m)} \\ a_3 = -\frac{a_1}{3(3 + 2m)} = 0 \\ a_4 = -\frac{a_2}{4(4 + 2m)} \\ a_5 = -\frac{a_3}{5(5 + 2m)} = 0 \\ \dots \end{gathered}$$

Таким чином, усі непарні коефіцієнти дорівнюють нулю. Виразимо парні коефіцієнти з цілим індексом n від 1 до ∞, як

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2m)} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(m+n)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Перші кілька коефіцієнтів будуть такими:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(m+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(m+2)} = -\frac{1}{2^2 \cdot 2(m+2)} \cdot \left(-\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(m+1)}\right)$$
$$= (-1)^2 \frac{a_0}{2^{2\cdot 2}(2\cdot 1)(m+2)(m+1)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(m+3)} = \cdots = (-1)^3 \frac{a_0}{2^{2\cdot 3}(3\cdot 2\cdot 1)(m+3)(m+2)(m+1)}$$

$$\ldots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (2.10)$$

Ми не можемо задати конкретне значення коефіцієнту a_0, оскільки відсутні крайові умови, завдяки яким його можна було б обчислити. Однак, зручно стандартизувати розв’язки рівняння Бесселя, присвоївши

$$a_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)} \qquad (2.11)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція. З таким вибором a_0, рівняння (2.10) можна записати так:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n!\,\Gamma(m+n+1)}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (2.12)$$

Врахувавши (2.12), незалежний розв’язок рівняння Бесселя задається таким виразом:

$$J_m(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+m} n!\, \Gamma(m+n+1)} \tag{2.13}$$

де J_m – функція Бесселя першого роду порядку m [1].

Застосувавши той самий алгоритм для $\alpha = -m$, отримаємо:

$$J_{-m}(x) = \frac{1}{x^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n-m} n!\, \Gamma(-m+n+1)}. \tag{2.14}$$

Теорема 3. Якщо $m \in \mathbb{C} - \left\{\frac{k}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ (відмінним від цілого чи напівцілого числа), то функції Бесселя першого роду J_m та J_{-m} є лінійно незалежними. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2.6) має вигляд:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x), \qquad m \geq 0, m \neq \frac{k}{2}, k = 0,1,2, \ldots \tag{2.15}$$

Доведення. Для доведення достатньо показати, що визначник Вронського не дорівнює 0.

$$W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big) = \begin{vmatrix} J_m(x) & J_{-m}(x) \\ J'_m(x) & J'_{-m}(x) \end{vmatrix}.$$

Оскільки $J_m(x)$ і $J_{-m}(x)$ задовольняють рівняння (2.6), то маємо два рівняння:

$$x^2 J''_m(x) + x J'_m(x) + (x^2 - m^2) J_m(x) = 0,$$

$$x^2 J''_{-m}(x) + x J'_{-m}(x) + (x^2 - m^2) J_{-m}(x) = 0.$$

Помножимо перше рівняння на $J_{-m}(x)$, а друге на $J_m(x)$ відповідно. Віднімемо від другого рівняння перше і поділимо на x, отримаємо:

$$x\big(J_m(x) J''_{-m}(x) - J_{-m}(x) J''_m(x)\big) + J_m(x) J'_{-m}(x) - J_{-m}(x) J'_m(x) = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню:

$$\frac{d}{dx}\Big(x\big(J_m(x) J'_{-m}(x) - J_{-m}(x) J'_m(x)\big)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(x W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big)\Big) = 0.$$

Це означає, що $W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big) = \frac{C}{x}$, де C – стала , яку потрібно визначити.

Враховуючи перший доданок ряду (2.13)

$$J_m(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{\Gamma(m+1)}\big(1 + O(x^2)\big), \qquad J_m'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}}{2\Gamma(m)}\big(1 + O(x^2)\big).$$

Виконавши такі самі дії для $J_{-m}(x)$ і врахувавши властивість гамма-функції,

$$W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(-m)} - \frac{1}{\Gamma(-m+1)\Gamma(m)}\right) + O(x)$$
$$= -\frac{2\sin m\pi}{\pi x} + O(x).$$

Ми стверджували, що $W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big) = \frac{C}{x}$, тому $O(x)$ має дорівнювати нулю. Таким чином,

$$W\big(J_m(x), J_{-m}(x)\big) = -\frac{2\sin m\pi}{\pi x}$$

дорівнює нулю, лише коли m є цілим числом. Згідно з гіпотезою, $2m$ не є цілим числом, тому і m не ціле. Отже, $J_m(x)$ і $J_{-m}(x)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (2.6), яке є лінійним диференціальним рівняння другого порядку. Через те, що розв'язки утворюють двовимірний векторний простір, а $J_m(x)$ і $J_{-m}(x)$ є лінійно незалежними, будь-який розв'язок може бути виражений як їх лінійна комбінація. Теорему доведено.

Слід зауважити, що наявність x^m у виразі (2.15) означає, що потрібно бути обережними при обчислені як J_m, так і J_{-m}. По-перше, $x = 0$ не враховується в діапазоні розв'язків, оскільки x^m стоїть у знаменнику. По-друге, степені від'ємних чисел дають дійсні числа лише для цілих значень степеня. В загальному, нецілим степеням від'ємних чисел не присвоюють жодних дійсних значень. Наприклад, $-2^{0,2}$ є дійсним від'ємним числом, яке дорівнює $\sqrt[5]{-2}$, а $-2^{0,7} = \sqrt[10]{-2^7}$ є комплексним числом. З цієї причини зручніше визначати розв'язок (2.15) лише для $x > 0$.

Обмеження на рівняння (2.15) можна зменшити, показавши, що J_m, і J_{-m} є незалежними, коли m є напівцілим числом. Ми покажемо, що для таких значень m їх можна виразити елементарними комбінаціями алгебраїчних і тригонометричних функцій. Спочатку розглянемо $J_{\frac{1}{2}}$. З рівняння (2.13) отримаємо:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\frac{1}{2}}n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \qquad (2.16)$$

Спростимо знаменник вище наведеного виразу. Перш за все, гамма-функцію перепишемо таким чином:

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

З пункту 1.1 відомо, що $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Таким чином:

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} \qquad (2.17)$$

Зі знаменника (2.16) також маємо:

$$2^{2n+1}n! = 2\cdot 2^n\cdot 2^n\cdot n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = 2^{n+1}\cdot(2n)\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2 \qquad (2.18)$$

Підставимо (2.17) і (2.18) у (2.16), отримаємо:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).$$

У наведеному вище виразі легко розпізнати формулу розкладу в ряд Маклорена функції $\sin x$.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Аналогічно можна показати, що

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

З останніх формул видно що функції $J_{\frac{1}{2}}(x)$ та $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ є незалежними функціями. Отже, загальний розв'язок рівняння Бесселя з $m = \frac{1}{2}$ має вигляд:

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Дійсно, усі функції Бесселя з m що дорівнює напівцілому числу можна виразити через елементарні алгебраїчні та тригонометричні функції, і для цих значень m функція J_m завжди буде незалежною від J_{-m}. Іноді функції Бесселя для напівцілих значень m називають сферичними функціями Бесселя. Таким чином, ми можемо переписати загальний розв'язок (2.15) так:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x), \qquad m \geq 0, m \neq k, k = 0,1,2, \dots \tag{2.19}$$

Неважко переконатися, що радіус збіжності ряду (2.13) нескінченний. Отже, розв'язок (2.19) має місце для всіх дійсних $x > 0$.

2.3. Функції Бесселя другого та третього роду

Коли m є цілим числом, функція $J_{-m}(x)$ лінійно залежить від J_m. Тому лінійна комбінація (2.19) цих функцій не може складати загальний розв'язок рівняння Бесселя. Розглянемо вираз для $J_{-m}(x)$.

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-m}}{2^{2n-m}(n-m)!\, n!}$$

Гамма-функція стає факторіалом (див. пункт 1.1) для додатних $n - m + 1$ і є нескінченною для від'ємних цілих чисел. Таким чином, ми маємо що усі доданки в сумі від 0 до m дорівнюють нулю. Змінюючи в останній формулі індекс сумування $n = n + m$, отримаємо:

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} x^{2n+m}}{2^{2n+m} n!\,(n+m)!} = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+m}}{2^{2n+m} n!\,(n+m)!} \equiv (-1)^m J_m(x)$$

В даному випадку, потрібна нова функція, лінійно незалежна від J_m, коли m є цілим числом. Покажемо, що другий, лінійно незалежний розв'язок рівняння Бесселя задається наступною функцією Бесселя другого роду порядку m (функцією Неймана):

$$Y_m(x) = \frac{\cos(m\pi)\, J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} \tag{2.20}$$

Якщо m у (2.20) не є цілим числом, легко побачити, що Y_m і J_m є незалежними розв'язками рівняння Бесселя. Проте коли m наближається до цілого числа, вираз (2.20) має невизначену форму $\frac{0}{0}$. Проте використовуючи правило Лопіталя, можна показати

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} Y_m(x)$$

є функцією, визначеною для всіх значень $x > 0$ [1].

Теорема 4: Для всіх цілих m функція Бесселя другого роду $Y_m(x)$ є розв'язком рівняння Бесселя і лінійно не залежить від $J_m(x)$.

Доведення

Як зазначалось вище, при $m = n \in \mathbb{Z}$, вираз (2.20) набуває вигляду $\frac{0}{0}$ (звернемо увагу, що $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ і $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$), і ми можемо використати правило Лопіталя, щоб отримати межу. Отже,

$$Y_n(x) = \lim_{m\to n} \frac{-\pi\sin(m\pi)\,J_m(x) + \cos(m\pi)\frac{\partial}{\partial m}J_m(x) - \frac{\partial}{\partial m}J_{-m}(x)}{\pi\cos(\alpha\pi)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial m}J_m(x) + (-1)^{n+1}\frac{\partial}{\partial m}J_{-m}(x)\right]_{m=n}$$

Оскільки J_m є розв’язком рівняння Бесселя, то можемо знайти похідну по m з цього рівняння:

$$\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)J_m(x)\right)\frac{\partial}{\partial m} = 0;$$

$$-2mJ_m(x) + \left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)\right)\frac{\partial}{\partial m}J_m(x) = 0;$$

$$\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2\right)\frac{\partial}{\partial m}J_m(x) = 2mJ_m(x).$$

Цей самий процес можна застосувати для J_{-m}.

Перевіримо чи є функція $Y_n(x)$ розв’язком рівняння Бесселя (2.6):

$$\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2\right)Y_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2\right)\frac{\partial}{\partial m}J_m(x)\right.$$
$$\left. - (-1)^n\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2 - m^2\right)\frac{\partial}{\partial m}J_{-m}(x)\right]_{m=n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}[2mJ_m(x) - (-1)^n 2mJ_{-m}(x)]_{m=n} = \frac{2n}{\pi}(J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x)) = 0.$$

Отже, $Y_n(x)$ є розв’язком рівняння (2.6). Тепер потрібно показати, що $Y_n(x)$ лінійно не залежить від $J_n(x)$. Обчислимо визначник Вронського для $J_n(x)$ і $Y_n(x)$, коли n не є цілим числом.

$$W\big(J_n(x)\,, Y_n(x)\big) = \begin{vmatrix} J_n(x) & Y_n(x) \\ J_n'(x) & Y_n'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_n(x) & \dfrac{\cos(n\pi)\, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \\ J_n'(x) & \dfrac{\cos(n\pi) J_n'\,(x) - J_{-n}'(x)}{\sin(n\pi)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sin n\pi}\big(\cos n\pi\,\big(J_n(x)J_n'(x) - J_n'(x)J_n(x)\big) + J_n'(x)J_{-n}(x) - J_n(x)J_{-n}'(x)\big) =$$

$$= -\frac{1}{\sin n\pi} W\big(J_n(x), J_{-n}(x)\big) = -\frac{1}{\sin n\pi}\cdot\left(-\frac{2\sin n\pi}{\pi x}\right) = \frac{2}{\pi x} \neq 0.$$

Отриманий результат справедливий для будь-якого $n \in N$, тому що функції $J_n(x)$ і $Y_n(x)$ неперервні відносно змінної n. Таким чином, визначник Вронського ніколи не може дорівнювати 0. А $J_n(x)$ і $Y_n(x)$ є лінійно незалежними, більше того $Y_n(x)$ також лінійно не залежить від $J_{-n}(x)$. Теорему доведено.

Загальний розв’язок рівняння Бесселя для всіх значень n має вигляд:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{R}, \qquad x > 0.$$

Інколи бувають випадки, коли розв’язок рівняння Бесселя потрібно виразити іншим способом. Тому розглянемо також функцію Бесселя третього роду, як лінійну комбінацію функцій Бесселя першого та другого роду.

Означення 4. Нехай $v \in \mathbb{C}$. Тоді

$$H_v^{(1)} = J_v(x) + iY_v(x),$$

$$H_v^{(2)} = J_v(x) - iY_v(x)$$

називаються функціями Ганкеля або функціями Бесселя третього роду порядку v.

Будь-який розв’язок рівняння Бесселя можна записати у вигляді комбінації функцій $H_v^{(1)}(x)$ та $H_v^{(2)}(x)$. А саме,

$$y(x) = c_1 H_v^{(1)}(x) + c_2 H_v^{(2)}(x), \qquad \forall v \in \mathbb{C}, \qquad x > 0.$$

2.4. Модифікована функція Бесселя

У деяких задачах виникає таке рівняння:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + v^2) y = 0. \tag{2.21}$$

Справді, (2.21) є результатом заміни x на ix у рівнянні Бесселя (2.6) і має назву модифіковане рівняння Бесселя. Таким чином, $J_v(ix)$ і $J_{-v}(ix)$ є розв'язками рівняння (2.21), якщо v не є цілим числом. Однак зазвичай хочеться отримати ці розв'язки в явній формі (вигляді). Такими функціями є модифіковані функції Бесселя першого роду порядку v і $-v$:

$$I_v(x) = e^{\frac{-v\pi i}{2}} J_v\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = i^{-v} J_v(ix) = i^{-v} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r i^v i^{2r} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2r}}{r!\,\Gamma(v+r+1)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2r}}{r!\,\Gamma(v+r+1)} \tag{2.22}$$

$$I_{-v}(x) = i^v J_{-v}(ix) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2r}}{r!\,\Gamma(-v+r+1)}$$

Оскільки, $J_v(ix)$ і $J_{-v}(ix)$ є лінійно незалежними розв'язками коли $v \notin \mathbb{Z}$, то $I_v(x)$, $I_{-v}(x)$ теж лінійно незалежні. Коли v є цілим числом, ми знову маємо залежність:

$$I_{-v}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(-v+r+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}}{\Gamma(v+s+1)\Gamma(s+1)} = I_v(x)$$

Так само, як із функціями Бесселя першого роду, ми визначаємо нову функцію, яка буде лінійно незалежною від першої. Функція,

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha \to v} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin \alpha\pi} \quad (22)$$

називається модифікованою функцією Бесселя другого роду порядку v або функція Макдональда.

Теорема 5. Модифікована функція Бесселя другого роду порядку $v \in \mathbb{C}$ є розв'язком рівняння (2.21) і лінійно не залежить від модифікованої функції Бесселя першого роду того ж порядку.

Доведення

Якщо $v \notin \mathbb{Z}$, то K_v є лінійною комбінацією $I_{-\alpha}(x)$ та $I_\alpha(x)$, отже, це розв'язок (2.21). Оскільки I_v та I_{-v} є лінійно незалежними, то $I_\alpha(x)$ та лінійні комбінації $I_{-\alpha}(x)$, $I_\alpha(x)$ також є незалежними. Таким чином, нам треба довести лінійну незалежність K_v та I_v, коли $v \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, коли v є цілим числом, то границя потребує розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$. За правилом Лопіталя,

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha \to v} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} I_{-\alpha}(x) - \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha(x)}{\pi \cos \alpha\pi} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} I_{-\alpha}(x) - \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha(x) \right) \Big|_{\alpha = v}$$

Оскільки I_α є розв'язком (21) при $\alpha = v$, то

$$\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - \alpha^2 \right) I_\alpha(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - \alpha^2 \right) I_\alpha(x) \right) = 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha I_\alpha(x) + \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - \alpha^2 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - \alpha^2 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} I_\alpha(x) = 2\alpha I_\alpha(x).$$

Аналогічно для $I_{-\alpha}$. Використавши ці рівності отримаємо,

$$\left(x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}-x^2-\alpha^2\right)K_v(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left(2\alpha I_{-\alpha}(x)-2\alpha I_\alpha(x)\right)\Big|_{\alpha=v}=0$$

що $K_v(x)$ є розв'язком модифікованого рівняння Бесселя.

З іншого боку, з (2.22) шляхом підстановки можна вивести, що для будь-якого $v\notin\mathbb{Z}$,

$$W\big(I_v(x),K_v(x)\big)=I_v(x)K_v'(x)-K_v(x)I_v'(x)=\frac{\pi}{2\sin v\pi}W\big(I_v(x),I_{-v}(x)\big)=-\frac{1}{x}.$$

Тому в силу неперервності цього виразу відносно v, ця рівність виконується і для цілих значень v. Теорему доведено.

Таким чином, загальним розв'язком (2.21) є:

$$y(x)=c_1I_v(x)+c_2K_v(x)\quad\forall v\in\mathbb{C}.$$

2.5. Властивості функцій Бесселя

2.5.1. Рекурентні співвідношення

Проаналізуємо співвідношення між функціями Бесселя першого роду.

Теорема 6. Для рівняння Бесселя: $x^2J_v''(x)+xJ_v'(x)+(x^2-v^2)J_v(x)=0$, коли $v\in C$ існують рекурентні співвідношення вигляду:

$$\frac{d}{dx}(x^{-v}J_v(x))=-x^{-v}J_{v+1}(x); \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{v}J_v(x))=x^{v}J_{v-1}(x); \tag{2.24}$$

$$J_{v+1}(x)=\frac{v}{x}J_v(x)-J_v'(x); \tag{2.25}$$

$$J_{v-1}(x)=\frac{v}{x}J_v(x)+J_v'(x) \tag{2.26}$$

[10].

Доведення

Для того, щоб довести формулу (2.23) ми використаємо степеневий ряд для $J_v(x)$ (13):

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-v}J_v(x)\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+v}n!\,\Gamma(v+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}2n}{2^{2n+v}n!\,\Gamma(v+n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n+v-1}(n-1)!\,\Gamma(v+n+1)}.$$

Змінимо індекс n в останній сумі на $n+1$, та отримаємо доведення співвідношення (2.23):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n+v+1}n!\,\Gamma(v+n+2)} = -x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+v+1}}{2^{2n+v+1}n!\,\Gamma(v+n+2)} = -x^{-v}J_{v+1}(x).$$

Так само доводимо рекурентне співвідношення (2.24):

$$\frac{d}{dx}\left(x^{v}J_v(x)\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2v}}{2^{2n+v}n!\,\Gamma(n+v+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2v-1}(2n+2v)}{2^{2n+v}n!\,\Gamma(n+v+1)} =$$

$$= x^{v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+v-1}(2n+2v)}{2^{2n+v-1}n!\,\Gamma(n+v)} = x^{v}J_{v-1}(x).$$

Щоб довести формулу (23) домножимо функцію Бесселя першого роду порядку v на x^{-v}:

$$x^{-v}J_v(x) = x^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+v}}{2^{2n+v}n!\,\Gamma(v+n+1)} = 2^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}.$$

Візьмемо похідні по x з кожного боку рівності:

$$-v\frac{x^{-v}}{x}J_v(x) + x^{-v}J_v'(x) = 2^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\frac{1}{2}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) - J_v'(x) = -x^v 2^{-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{n!\,\Gamma(v+n+1)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) - J_v'(x) = -x^v 2^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)-1}}{(n+1)!\,\Gamma(v+n+2)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) - J_v'(x) = x^v 2^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,\Gamma(v+n+2)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) - J_v'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2n+1}}{n!\,\Gamma(v+n+2)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) - J_v'(x) = J_{v+1}(x).$$

Таким чином, довели рекурентне співвідношення (2.25). Аналогічно доводимо (2.26):

$$x^v J_v(x) = x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+v}}{2^{2n+v} n!\,\Gamma(v+n+1)} = 2^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2v}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}.$$

$$v\frac{x^v}{x}J_v(x) + x^v J_v'(x) = 2^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2v) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2v-1} \frac{1}{2}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}$$

$$v\frac{x^v}{x}J_v(x) + x^v J_v'(x) = 2^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (v+n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2v-1}}{n!\,\Gamma(v+n+1)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x) + J_v'(x) = x^{-v} 2^v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2v-1}}{n!\,\Gamma(m+n)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x)+J'_v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v-1}}{n!\,\Gamma(m+n)};$$

$$\frac{v}{x}J_v(x)+J'_v(x)=J_{v-1}(x).$$

Теорему доведено.

Комбінуючи формули (2.25) і (2.26), отримаємо нові рекурентні співвідношення для $v\in C$,

$$J_{v-1}(x)+J_{v+1}(x)=\frac{2v}{x}J_v(x),$$

$$J_{v-1}(x)-J_{v+1}(x)=2J'_v(x).$$

Ці формули також можна застосовувати до функцій Бесселя другого та третього роду, оскільки вони є нічим іншим, як лінійними комбінаціями функцій Бесселя першого роду.

Теорема 7. Для модифікованих функцій Бесселя першого роду, коли $v\in C$ існують рекурентні співвідношення вигляду:

$$-I_{v+1}(x)=\frac{v}{x}I_v(x)-I'_v(x), \tag{2.27}$$

$$I_{v-1}(x)=\frac{v}{x}I_v(x)+I'_v(x), \tag{2.28}$$

$$I_{v-1}(x)-I_{v+1}(x)=\frac{2v}{x}I_v(x),$$

$$I_{v-1}(x)+I_{v+1}(x)=2I'_v(x).$$

Доведення. Алгоритм доведення такий самий як і в попередній теоремі. Домножимо модифіковану функцію Бесселя першого роду порядку v на x^{-v},

$$x^{-v}I_v(x) = 2^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}.$$

Взявши похідні по z отримаємо:

$$\frac{v}{x}I_v(x) - I_v'(x) = -x^v 2^{-v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{n!\,\Gamma(v+n+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2n-1}}{n!\,\Gamma(v+n+2)}$$
$$= -I_{v+1}(x)$$

Можна також отримати з

$$x^v I_v(x) = 2^v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2v+2n}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}$$

рекурентне співвідношення

$$\frac{v}{x}I_v(x) + I_v'(x) = I_{v-1}(x).$$

Решту формул отримаємо, поєднуючи рівняння (2.26) і (2.27). Теорему доведено [12].

Наслідком з теореми 7 є той факт, що якщо $v \in C$, то

$$-K_{v+1}(x) = -\frac{v}{x}K_v(x) + K_v'(x), \qquad (2.29)$$

$$-K_{v-1}(x) = \frac{v}{x}K_v(x) + K_v'(x), \qquad (2.30)$$

$$K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x) = -\frac{2v}{x}K_v(x),$$

$$K_{v-1}(x) + K_{v+1}(x) = -2K_v'(x).$$

2.5.2. Коефіцієнти Бесселя

У фізиці часто вивчають наступне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}V(\rho,\phi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho,\phi)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V(\rho,\phi)+k^2V(\rho,\phi)=0.$$

Методом підстановки можна показати, що $V^{(1)}(\rho,\phi)=e^{ik\rho\sin\phi}$ та $V_n^{(2)}(\rho,\phi)=J_n(k\rho)e^{in\phi}$, де $n\in Z,$ — розв'язки цього рівняння. Розглянемо зв'язок між цими функціями.

$V^{(1)}$ можна записати у вигляді ряду Фур'є, оскільки він періодичний відносно ϕ, таким чином,

$$V^{(1)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(k\rho)e^{in\phi}.$$

Обчислимо коефіцієнти $c_n(k\rho)$, використавши експоненціальну генеруючу функцію. Перед цим виконаємо заміну: $\sin\phi=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$, $e^{i\phi}=t$ та $k\rho=z$,

$$V^{(1)}(z,t)=e^{z\frac{t-t^{-1}}{2}}=e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{zt}{2}\right)^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\left(-\frac{z}{2t}\right)^s$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{r!\,s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{r+s}t^{r-s}.$$

Якщо покласти $n=r-s$, то коефіцієнт при t^n для $n\geq 0$ буде мати вигляд:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!\,s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}=J_n(z).$$

З іншого боку, використовуючи співвідношення $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$, коефіцієнт при t^{-n} є

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(-n+s)!\, s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2s} = J_{-n}(z).$$

Отже,

$$V^{(1)}(z,t) = e^{z\frac{t-t^{-1}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z\,)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{(2)}(z,t). \qquad (2.31)$$

Через це співвідношення $J_n(z)$ називаються коефіцієнтами Бесселя, а $V^{(1)}$ називають твірною функцією коефіцієнтів Бесселя.

За допомогою співвідношення (2.31) Якобі отримав такі рівності тригонометричних функцій. Нехай $z \in C$ і $\phi \in R$. Тоді,

I. $\cos(z\sin\phi) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\phi)$;
II. $\sin(z\sin\phi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z)\sin\big((2n+1)\phi\big)$;
III. $\cos(z\cos\phi) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos(2n\phi)$;
IV. $\sin(z\cos\phi) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)\sin\big((2n+1)\phi\big)$ [14].

Для того, щоб отримати ці рівності потрібно повернутися до заміни $t = e^{i\phi}$ у (2.31) і використовуючи співвідношення $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ отримаємо

$$e^{z\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\phi} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(e^{in\phi} + (-1)^n e^{-in\phi}\big)J_n\,(z).$$

Зауважимо, що ліва сторона тотожності $e^{iz\sin\phi} = \cos(z\sin\phi) + i\sin(z\sin\phi)$, і

$$e^{in\phi} + (-1)^n e^{-in\phi} = \begin{cases} 2\cos n\phi\,, \text{якщо } n \text{ парне} \\ 2i\sin n\phi\,, \text{якщо } n \text{ непарне} \end{cases}.$$

Таким чином, прирівнюючи дійсну та уявну частини, отримаємо I і II рівності тригонометричних функцій. Крім того, беручи $\bar{\phi} = -\phi + \frac{\pi}{2}$, отримаємо III і IV.

2.5.3. Інтегральні формули Бесселя

Використовуючи деякі з описаних раніше властивостей, ми можемо вивести кілька тотожностей функцій Бесселя, відомих як інтегральні формули Бесселя.

Теорема 8. Нехай z — комплексне число, а n — ціле число. Тоді,

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

Більше того,

$$J_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta \, d\theta, \text{якщо } n \text{ парне}, \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta \, d\theta, \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Доведення. Використаємо I і II рівності тригонометричних функцій

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\theta);$$

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z)\sin\big((2n+1)\theta\big).$$

Оскільки функція косинус є парною, а функція синус непарною відносно θ, їх можна розглянути як ряди Фур'є. Таким чином,

$$\cos(z\sin\theta) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)\cos n\theta, \qquad \sin(z\sin\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z)\sin n\theta,$$

звідки

$$a_n(z) = \begin{cases} 2J_n(z), \text{якщо } n \text{ парне} \\ 0, \text{якщо } n \text{ непарне} \end{cases}, \quad b_n(z) = \begin{cases} 0, \text{якщо } n \text{ парне} \\ 2J_n(z), \text{якщо } n \text{ непарне} \end{cases}.$$

Зауважимо, що $\frac{a_n+b_n}{2} = J_n(z)$.

З іншого боку, коефіцієнти Фур'є для цих рядів:

$$a_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$b_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta \, d\theta.$$

Додавши і поділивши на 2, матимемо

$$\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(z\sin\theta)\cos n\theta + \sin(z\sin\theta)\sin n\theta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

Отже, прирівнюючи два вирази для $\frac{a_n+b_n}{2}$, отримаємо інтегральну формулу Бесселя

$$J_n(z). = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta.$$

Більше того $J_n(z) = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, \text{якщо } n \text{ є парним} \\ \frac{b_n}{2}, \text{якщо } n \text{ є непарне} \end{cases}.$

Підставивши коефіцієнти Фур'є,

$$J_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta, \text{якщо } n \text{ парне}, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta, \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Оскільки підінтегральні вирази симетричні відносно $\theta = \frac{\pi}{2}$ в інтервалі $(0, \pi)$,то остаточно маємо

$$J_n(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta, \text{якщо } n \text{ парне}, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta, \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Ці інтегральні вирази для $J_n(z)$ можна використовувати для чисельного наближення ряду (2.13) за допомогою таких методів, як правило Сімпсона.

2.5.4. Асимптотика функцій Бесселя

При застосуванні теорії функцій Бесселя для розв'язування задач у фізиці чи інженерії, інколи потрібно оцінити функції Бесселя в точці z або розв'язати рівняння, такі як $J_v(z) = 0$.

Однак через визначення функції рядом, частинні суми забезпечують хорошу апроксимацію функцій Бесселя першого роду лише тоді, коли z мале. Для $0 < x \le \sqrt{v+1}$ і невід'ємних v асимптотичні формули мають вигляд:

$$J_v(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^v;$$

$$Y_v(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \gamma\right), & v = 0 \\ -\dfrac{\Gamma(v)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^v, & v > 0 \end{cases};$$

де γ – стала Ейлера (0,5772…).

Покажемо, як апроксимувати $J_v(z)$ для великих значень z, використовуючи інші, легші для обробки вирази.

Припустимо, що v дійсне і $z = x \in R$ додатним. Розглянемо функцію $g(x) = x^{\frac{1}{2}} f(x)$, де $f(x)$ є розв'язком рівняння Бесселя (2.6). Таким чином,

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}, f'(x) = \frac{g'(x)}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{g(x)}{2x^{\frac{3}{2}}}, f''(x) = \frac{g''(x)}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{g'(x)}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3g(x)}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння Бесселя:

$$0 = x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - v^2) f(x) =$$

$$= x^2 \left(\frac{g''(x)}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{g'(x)}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3g(x)}{4x^{\frac{5}{2}}} \right) + x \left(\frac{g'(x)}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{g(x)}{2x^{\frac{3}{2}}} \right) + (x^2 - v^2) \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} g''(x) - x^{\frac{1}{2}} g'(x) + \frac{3g(x)}{4x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}} g'(x) - \frac{g(x)}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} g(x) - \frac{v^2 g(x)}{x^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} g''(x) + x^{\frac{3}{2}} g(x) + \left(\frac{1}{4} - v^2 \right) \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Помножимо обидві рівності на $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,

$$g''(x) + g(x) + \frac{\left(\frac{1}{4} - v^2 \right)}{x^2} g(x) = 0.$$

При великих x, останній доданок прямує до нуля, тому $g''(x) + g(x) \approx 0$.

Але розв'язки рівняння $g''(x) + g(x) = 0$ є комбінаціями тригонометричних функцій виду

$$A \cos x + B \sin x, \qquad A, B \in R.$$

Ці розв'язки також можна записати так, $\alpha \sin(x + \beta)$, де α і β знову є дійсними сталими. Таким чином, можемо здогадатися, що функції Бесселя можна апроксимувати за допомогою функцій синуса чи косинуса, коли x велике. Наведений результат дає таке наближення.

Теорема 9. Нехай $v \in R$. Тоді існує стала c_v так , що

$$\forall x \geq 1, \qquad J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_v(x), \qquad |E_v(x)| \leq \frac{c_v}{x^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.32)$$

Доведення цієї теореми потребує більш досконалих методів і є громізким [6].

Цей результат дозволяє апроксимувати функцію Бесселя першого роду порядку $v \in R$ і аргументу $x \geq 1$, що дає верхню межу похибки. Крім того, ця похибка зменшується, коли х прямує до нескінченності. За допомогою цього результату ми також можемо дати приблизні значення для інших функцій, розглянутих у попередніх пунктах.

Якщо v — дійсна стала, то для будь-якого $x \geq 1$,

1. $J_{-v}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$,
2. $Y_v(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$,
3. $J_v'(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Щоб довести (2), потрібно взяти до уваги визначення $Y_v(x)$ (2.20), коли v не є цілим числом. Крім того, використовуючи наступну тригонометричну формулу (косинус суми)

$$\cos\left(x + \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(v\pi)\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(v\pi)\sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

і формули (2.32) та (2.31), знаходимо, що

$$Y_v(x) \approx \frac{1}{\sin(v\pi)}\left(\cos(v\pi)\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}{\sin(v\pi)}\left(\cos(v\pi)\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}{\sin(v\pi)} \sin(v\pi) \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Враховуючи неперервність функції $y = \sin x$, для всіх $v \in R$ маємо:

$$Y_v(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поєднуючи (2.32) з рекурентною формулою (2.26), отримуємо асимптотичну формулу (3) для $J_v'(x)$. Дійсно,

$$J_v'(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x).$$

Враховуючи (2.32),

$$J_{v-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(v-1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_{v-1}(x) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_{v-1}(x),$$

$$\left|\frac{v}{x} J_v(x)\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|v|}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{|v| C_v}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Для $x \geq 1$ маємо $x^{-\frac{5}{2}} < x^{-\frac{3}{2}}$, а отже

$$J_v'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{E}_v(x), \qquad \left|\tilde{E}_v(x)\right| \leq \frac{C_v'}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Звичайно, це результат, який отримали б шляхом диференціювання (2.32), якби знали, що в похідній $E_v'(x)$ також домінує $x^{-\frac{3}{2}}$. Але оскільки похідна малої функції не повинна бути малою, це не відбувається автоматично; формула рекурентного співвідношення дозволяє не обчислювати E_v'.

2.5.5. Нулі функцій Бесселя

При розв'язуванні крайових задач, що представляють фізичний інтерес, часто використовуються властивості нулів функцій Бесселя та їх похідні. Зокрема, у крайових задачах виникає таке рівняння

$$aJ_v(x) + bxJ_v'(x) = 0, \tag{2.33}$$

де $v \geq 0$ і $(a, b) \in R^2 - \{(0,0)\}$.

Розглянемо функцію $x^{-v}\big(aJ_v(x) + bxJ_v'(x)\big)$. Ця функція є аналітичною в кожній точці, оскільки усунуто сингулярність при x = 0, тому її нулі ізольовані. Це означає, що в обмеженій області ми маємо лише скінченну кількість нулів. Отже, можна розташувати її додатні нулі наступним чином

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку послідовності $\{\lambda_n\}$ де $n = 1, \ldots, \infty$. Для цього скористаємося наступною лемою.

Лема 2. Нехай f — диференційована дійсна функція, яка задовольняє умови

$$|f(x) - \cos x| \leq \varepsilon \text{ та } |f'(x) + \sin x| \leq \varepsilon, x \geq M\pi, \tag{2.34}$$

де $\varepsilon \ll 1$ і $M \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх цілих чисел $m \geq M,$ функція f має рівно один нуль z_m у кожному інтервалі $[m\pi, (m+1)\pi]$. Крім того, $z_m \sim \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Доведення. Візьмемо ціле число $m \geq M$. Оскільки m є цілим числом, то справедливі наступні формули

$$\cos(m\mu) = (-1)^m, \cos\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0.$$

Таким чином, гіпотеза $|f(x) - \cos x| \le \varepsilon$ означає, що шляхом оцінки f при mπ і $(m+1)\pi$ (обидві більші за $M\pi$),

$$|f(m\pi) - (-1)^m| \le \varepsilon \text{ та } \left|f\big((m+1)\pi\big) + (-1)^m\right| \le \varepsilon.$$

Внаслідок цього,

$$f(m\pi) \in B((-1)^m, \varepsilon) \text{ і } f\big((m+1)\pi\big) \in B(-(-1)^m, \varepsilon),$$

і згідно з гіпотезою $\varepsilon \ll 1$, вони мають різні знаки. Через те, що функція f неперервна (вона диференційовна), за теоремою Больцано-Коші,

$$\exists z_m \in (m\pi, (m+1)\pi), \text{таке що } f(z_m) = 0.$$

Таким чином, доведено існування нуля функції f в інтервалі $(m\pi, (m+1)\pi)$, де $m \ge M$. Тепер нехай z_m буде нулем функції f у цьому інтервалі. З першого рівняння (2.34) отримуємо

$$|f(z_m) - \cos z_m| = |\cos z_m| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon \ll 1.$$

Це означає, що $\cos z_m \sim 0 \Longrightarrow z_m \sim \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$. Крім того, оскільки $\Big(m +$ *12π≥Mπ* і sin*m+12π*=cos*mπ*=−*1m,* то

$$\left|f'\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right) + (-1)^m\right| \le \varepsilon.$$

Таким чином, $f'\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. З цього випливає, що функція f не дорівнює нулю в точках $\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, тобто строго зростає або спадає поблизу $\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$. Отже, в інтервалі $(m\pi, (m+1)\pi\ )$ є рівно один нуль. Лему доведено [7].

У рівнянні (2.33) розглянемо два випадки $b = 0$ і $b \ne 0$. Якщо $b = 0$, то ми хочемо отримати нулі функції $J_v(x)$. У цьому випадку ми можемо легко отримати асимптотичний вираз для нулів рівняння (2.33) на основі асимптотики функції Бесселя першого роду, тобто врахувавши тотожності (2.32)

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Насправді це означає, що велике x задовольнить $J_v(x) = 0$, якщо $\cos\Big(x -$ $v\pi 2 - \pi 4$ близький до нуля. Ми можемо застосовувати лему, щоб довести це.

Розглянемо функцію,

$$f(x) = \tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} = x + \frac{1}{2} v\pi + \frac{1}{4}\pi.$$

Використавши (2.32):

$$f(x) = \tilde{x}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \cos\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \tilde{x}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x.$$

Оскільки

$$f'(x) = \tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x}),$$

то використавши (2.32) і наслідок (*), матимемо:

$$\tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) \approx -\tilde{x}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \sin\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$$

та

$$\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x}) \approx \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \cos\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tilde{x}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x \approx 0$$

для великих значень x. Таким чином,

$$f'(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x.$$

Похибки в апроксимації прямують до нуля, коли x прямує до нескінченності. Застосовуючи лему 2, для $x \geq M\pi$, ми можемо апроксимувати нулі функції $f(x)$. Фактично, для достатньо великого m існує єдиний нуль z_m у кожному інтервалі $[m\pi, (m+1)\pi]$і $z_m \sim \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$. Таким чином,

$$z_m \sim \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{2}v\pi + \frac{1}{4}\pi = \left(m + \frac{v}{2} + \frac{3}{4}\right)\pi.$$

Отже, можна зробити висновок що нулі функції Бесселя першого порядку, які насправді є нулями функції $x^{\frac{1}{2}}J_v(x)$, апроксимуються в $\left(m + \frac{v}{2} + \frac{3}{4}\right)\pi$.

Тепер розглянемо другий випадок, коли $b \neq 0$. Знову застосуємо лему 2, але тепер до функції

$$f(x) = c\tilde{x}^{-\frac{1}{2}}J_v(\tilde{x}) + \tilde{x}^{\frac{1}{2}}J_v'(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} = x + \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi \text{ і } c = \frac{a}{b}.$$

З одного боку,

$$\tilde{x}^{\frac{1}{2}}J_v'(\tilde{x}) \approx -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}}\sin\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}}(-\cos x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$$

для великих значень x. З іншого боку, за (2.32)

$$\tilde{x}^{-\frac{1}{2}}J_v(\tilde{x}) \approx \tilde{x}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}}\cos\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tilde{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x \approx 0.$$

Отже,

$$f(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x.$$

Знайдемо похідну функції f по x,

$$f'(x) = -\frac{c}{2}\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} J_v(\tilde{x}) + c\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) + \tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v''(\tilde{x}).$$

Оскільки $J_v(\tilde{x})$ задовольняє рівняння Бесселя (2.6), то

$$J_v''(\tilde{x}) = -\tilde{x}^{-1} J_v'(\tilde{x}) - (1 - v^2\tilde{x}^{-2}) J_v(\tilde{x}).$$

Тоді,

$$f'(x) = \left(c + \frac{1}{2}\right)\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) + \tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v''(\tilde{x}) - \frac{c}{2}\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} J_v(\tilde{x})$$

$$= \left(c + \frac{1}{2}\right)\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) - \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) - \tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x}) + v^2\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} J_v(\tilde{x}) - \frac{c}{2}\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} J_v(\tilde{x})$$

$$\approx -\tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x})$$

На останньому етапі використали:

$$\tilde{x}^{-\frac{1}{2}} J_v'(\tilde{x}) \approx \frac{1}{\tilde{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0;$$

$$\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} J_v(\tilde{x}) \approx \frac{1}{\tilde{x}^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,$$

обидві рівності прямують до нуля, коли $\tilde{x}$ прямує до нескінченності. Тому

$$f'(x) = -\tilde{x}^{\frac{1}{2}} J_v(\tilde{x}) = -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \cos\left(\tilde{x} - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\tilde{x}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{x}}} \sin x = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$$

Зрештою, застосовуючи лему 2 до функції $\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(x)$, отримуємо, що $\tilde{x}^{\frac{1}{2}}f(x)$ теж має нулі (нулі $\tilde{x}^{\frac{1}{2}}f(x)$ та нулі $\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(x)$ збігаються), коли $x\sim\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, а

$$\tilde{x}\sim\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{2}v\pi-\frac{1}{4}\pi=\left(m+\frac{1}{2}v-\frac{1}{4}\right)\pi.$$

Таким чином, це апроксимація нулів рівняння $aJ_v(x)+bxJ_v'(x)=0$. Залишилось питання про розташування малих додатніх нулів $aJ_v(x)+bxJ_v'(x)$. Наступна лема відповідає на це питання.

Лема 3. Нехай $v\geq 0$, $a,b\geq 0$, де $(a,b)\neq(0,0)$, та ω_v найменший додатній нуль рівняння $aJ_v(x)+bxJ_v'(x)=0$. Тоді, $\omega_v>v$.

Доведення. Випадок $v=0$ є тривіальним, тому ми припускаємо, що $v>0$.

$J_v(x)$ і $J_v'(x)$ додатні для малих $x>0$, оскільки головні члени стапенавого ряду, а саме $\frac{x^v}{2^v\Gamma(v+1)}$ та $\frac{x^{v-1}}{2^v\Gamma(v)}$, додатні. Таким чином, рівняння Бесселя можна записати так:

$$x\frac{d}{dx}(xJ_v'(x))=(v^2-x^2)J_v(x). \tag{2.35}$$

Використаємо метод доведення від супротивного. Нехай $\xi_v\leq v$ найменший додатний нуль функції $J_v(x)$. Тоді, оскільки $x^2\leq v^2$ і J_v додатні для малих значень x, то $(v^2-x^2)J_v(x)$ також додатнє. Отже, згідно з рівнянням (2.35), $xJ_v'(x)$ зростає на інтервалі $[0,\xi_v]$. Це означає, що $J_v'(x)>0$ в цьому ж інтервалі, оскільки $J_v'(x)$ є додатним для малих x і зростає. Але це суперечність, оскільки $J_v(0)=J_v(\xi_v)=0$, то згідно теореми Ролля, існує $\mathrm{C}\in(0,\xi_v)$, така що $J_v'(\mathrm{C})=0$.

Таким чином, $\xi_v>v$. Оскільки $J_v(x)$ неперервна, додатна для малих значень x і не має нулів в інтервалі $(0,v)$, то вона є додатньою в цьому інтервалі. Отже, функція $(v^2 - x^2)J_v(x)$ також є додатна і тому $xJ_v'(x)$ зростає. Тоді $J_v'(x) > 0$ при малих значеннях x і зростає на інтервалі $(0, v]$, то в цьому інтервалі вона також додатня. Отже, $aJ_v(x) + bxJ_v'(x) > 0$ в інтервалі $(0, v]$, а перший позитивний нуль функції більший за v. Лему доведено [5].

За допомогою попередніх лем доведено наступні результати.

Теорема 10. Нехай $v \geq 0$, $a, b \geq 0$, $(a, b) \neq (0,0)$, а $\{\lambda_i\}$, $i \in N$ будуть додатними нуль рівняння $aJ_v(x) + bxJ_v'(x) = 0$, розташовані в порядку зростання. Тоді,

1. $\lambda_1 > v$;
2. Якщо $b = 0$, то існує таке ціле число M_v, що
$$\lambda_k \sim \left(M_v + k + \frac{1}{2}v + \frac{3}{4}\right)\pi \quad \text{при } k \to \infty.$$
3. Якщо $b > 0$, то існує таке ціле число M_v, що
$$\lambda_k \sim \left(M_v + k + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{при } k \to \infty.$$

Знак «~» означає, що різниця між величинами зліва і справа прямує до нуля при $k \to \infty$.

2.5.6. Ортогональні множини функції Бесселя

Згадаємо, що диференціальне рівняння (2.5), з якого виводиться рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2 f''(x) + xf'(x) + (l^2x^2 - v^2)f(x) = 0, \tag{2.36}$$

І що розв'язками цього рівняння є функції $f(x) = g(lx)$, де $g(lx)$ задовольняє рівняння Бесселя (тобто рівняння (2.36) з $l = 1$). Поділивши на x, (2.36) можна записати як:

$$xf''(x) + f'(x) - \frac{v^2}{x}f(x) + l^2xf(x) = \left(xf'(x)\right)' - \frac{v^2}{x}f(x) + l^2xf(x) = 0.$$

Отримали рівняння Штурма-Ліувілля вигляду

$$(rf')' + pf(x) + l^2 wf(x) = 0, \text{де } r(x) = w(x) = x, p(x) = -\frac{v^2}{x}. \qquad (2.37)$$

Якщо розглянути це рівняння на відрізку $[a, b]; 0 < a < b < \infty$ з крайовими умовами

$$\alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0, \qquad \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0,$$

то отримаємо звичайну задачу Штурма-Ліувілля. Оскільки J_v і Y_v є лінійно незалежними розв'язками, то власні функції задачі матимуть вигляд

$$f(x) = c_l J_v(lx) + d_l Y_v(lx). \qquad (2.38)$$

Де l, c_l і d_l повинні бути вибрані так, щоб виконувалися крайові умови. Таким чином, ми отримаємо ортонормований базис $L_w^2(a, b)$ з $w(x) = x$, що складається з функцій вигляду (2.38). Однак знайти власні значення і коефіцієнти c_l і d_l непросто.

Більш важливим і цікавим є розгляд рівняння Штурма-Ліувілля (2.37) на проміжку $[0, b]$, припустивши $v \geq 0$. При $x = 0$, коефіцієнт r дорівнює нулю, а коефіцієнт p зростає. Тому, крайова умова при $x = 0$ є недоцільною, наприклад $\alpha f(0) + \alpha' f'(0) = 0$. Дійсно, оскільки функції Y_v та її похідні приймають нескінченні значення при $x = 0$, слід зробити $d_l = 0$ у (2.38), щоб гарантувати, що розв'язок є неперервним у цій точці. Однак, можна, накласти крайову умову при $x = b$, тому розглянемо таку задачу Штурма-Ліувілля

$$xf''(x) + f'(x) - \frac{v^2}{x} f(x) + l^2 x f(x) = 0,$$

$$f(0^+) \text{ існує і є скінченною}, \qquad (2.39)$$

$$\beta f(b) + \beta' f'(b) = 0.$$

Хоча це окрема задача, вона зберігає деякі властивості звичайної задачі Штурма-Ліувілля [16]. Потрібно перевірити, що якщо f та g є власними функціями задачі (2.39), тобто

$$f(x) = J_v(l_j x), \qquad g(x) = J_v(l_k x).$$

Потім, $(L(f), g) = (f, L(g))$, де лінійне перетворення $L(f) = (xf')' - \frac{v^2}{x} f$ є самоспряженим. Проте, якщо застосувати тотожність Лагранжа до цього перетворення на інтервалі $[\epsilon, b]$, ми маємо

$$\int_{\epsilon}^{b} \left(L(f)(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{L(g)(x)}\right) dx = \left(xf'(x)\overline{g(x)} - xf(x)\overline{g'(x)}\right)\Big|_{\epsilon}^{b}.$$

Крайова умова при $x = b$ призводить до того, що оцінка кінцевої точки при $x = b$ стає нульовою. Справді, для будь-якого розв'язку h задачі

$$\beta h(b) + \beta' h'(b) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} h(b) = -\dfrac{\beta'}{\beta} h'(b), & \text{якщо } \beta \neq 0, \\ h(b) = 0, & \text{якщо } \beta = 0. \end{cases}$$

Оскільки g дійсне, то

$$\left(xf'(x)\overline{g(x)} - xf(x)\overline{g'(x)}\right)_{x=b} = bf'(b) - bf(b)g'(b) =$$

$$= \begin{cases} bf'(b)\dfrac{\beta'}{\beta} g'(b) - b\dfrac{\beta'}{\beta} f'(b)g'(b) = 0, & \beta \neq 0, \\ bf'(b) \cdot 0 - b \cdot 0 \cdot g'(b) = 0, & \beta = 0. \end{cases}$$

Також, маємо

$$J_v(x) \approx \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} x^v, \qquad J_v'(x) \approx \frac{1}{2^v \Gamma(v)} x^{v-1}$$

Коли x мале,обидві функції $J_v(x)$ і $J_v'(x)$ кратні x^v. Так як $v > 0$, то коли x прямує до нуля,

$$(xf'(x)g(x) - xf(x)g'(x)) \to 0.$$

Що стосується $x = \epsilon$: якщо $v > 0$, то $f(x), g(x), xf'(x)$, та $xg'(x)$ є асимптотичними до постійних кратних x^v при $x \to 0$, тому

$$\left(\epsilon f'(\epsilon)\overline{g(\epsilon)} - xf(\epsilon)\overline{g'(\epsilon)}\right) \leq C\epsilon^{2v} \to 0 \text{ при } \epsilon \to 0.$$

Якщо $v > 0$, то $f(0) = g(0) = 1$ та $f'(0) = g'(0) = 0$, а це значить, що

$$\lim_{\epsilon \to 0}(\epsilon f'(\epsilon)g(\epsilon) - xf(\epsilon)g'(\epsilon)) = 0$$

оцінка кінцевої точки при $x = \epsilon$ зникає, коли ϵ прямує до нуля. У будь-якому випадку,

$$(L(f), g) - \left(f, L(g)\right) = 0$$

і тому лінійне перетворення L є самоспряженим.

Хоча задача (2.39) є сингулярною при $x = 0$, теорема 1 щодо реальності власних значень і ортогональності власних функцій відносно вагової функції $w(x)$ все ще виконується.

Якщо $f(x) = J_v(lx)$, то $f'(x) = lJ_v'(lx)$. Отже, розв'язки (2.39) є такі функції $J_v(lx)$, що

$$\beta J_v(lb) + \beta' l J_v'(lb) = 0 \tag{2.40}$$

Якщо покласти $\lambda = lb$, отримаємо два різні випадки:

- $\beta' = 0$, у цьому випадку ми маємо

$$J_v(\lambda) = 0. \tag{2.41}$$

- $\beta' \neq 0$, у цьому випадку позначимо $c = \frac{b\beta}{\beta'}$, отримаємо

$$\mathrm{c}J_v(\lambda) + \lambda J_v'(\lambda) = 0. \tag{2.42}$$

У попередньому підрозділі цю задачу було розв'язано для $\lambda > 0$. Ми отримали послідовність $\{\lambda_i\}, i \in N$ нулів, яка дає нам власні значення $\{l_i^2\} =$

$\left\{\frac{\lambda_i^2}{b^2}\right\}, i \in N$. Залишається тільки перевірити, чи є у цих функцій нульові чи від'ємні власні значення.

Лема 4. Нуль є власним значенням (2.39) тоді і тільки тоді, коли $\frac{\beta}{\beta'} = -\frac{\nu}{b}$, у цьому випадку власна функція є $f(x) = x^{\nu}$. Якщо $\beta' = 0$, чи $\frac{\beta}{\beta'} \geq -\frac{\nu}{b}$, від'ємних власних значень немає.

Доведення. Спочатку доведемо початкове твердження. Якщо нуль є власним значенням, існує ненульова функція f така, що є розв'язком (2.39), коли $l = 0$. Розрізняємо два випадки. Якщо $\nu = 0$, то рівняння зводиться до

$$xf''(x) + f'(x) = 0,$$

тому загальний розв'язок легко отримати за допомогою заміни змінної $g(x) = f'(x)$. Ми отримуємо $g(x) = -xg'(x)$, а тому $g(x) = \frac{C_1}{x}$ (де C_1 є константою), а

$$f(x) = C_1 \log x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in R.$$

Функція f також має задовольняти крайову умову в початку координат, стала C_1 має дорівнювати нулю, таким чином, $f'(x) = 0$. Оскільки потрібно, щоб f задовільняла $\beta f(b) + \beta' f'(b) = \beta C_2 = 0$ (і шукаємо функції, які не є нульовими), отримуємо, що $l = 0$ є власним значенням (2.39) для $\nu = 0$, якщо $\beta = 0$.

Якщо $\nu > 0$, то отримуємо рівняння Ейлера

$$x^2 f''(x) + xf'(x) - \nu^2 f(x) = 0.$$

Оскільки ν і $-\nu$ є коренями многочлена $r(r-1) + r - \nu^2$, то розв'язками рівняння є:

$$f(x) = C_1 x^{\nu} + C_2 x^{-\nu}, \qquad C_1, C_2 \in R.$$

Для того, щоб $f(0+)$ була скінченною, C_2 має дорівнювати нулю. Що стосується другої крайової умови,

$$\beta C_1 b^v + \beta' C_1 v b^{v-1} = C_1 b^{v-1}(\beta b + \beta' v) = 0,$$

і оскільки $b > 0$, $\beta b + \beta' v = 0$. Якщо $\beta' = 0$, то β має дорівнювати нулю і ми б не мали крайової умови. Таким чином, $\beta \neq 0$ і $b \neq 0$, тоді необхідною і достатньою умовою отримуємо

$$\frac{\beta}{\beta'} = -\frac{v}{b}.$$

Крім того, власні функції, які отримуємо, є $1 = x^v$, коли $\nu = 0$ і x^v, коли $\nu > 0$.

Зупинимось тепер на другій частині, візьмемо від'ємні значення l^2. Можна записати $l = ik$, де $k > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння задачі (2.39) має вигляд

$$C_1 J_v(ikx) + C_2 Y_v(ikx), \qquad C_1, C_2 \in R.$$

Знову ж таки, крайова умова в початку координат фіксує $C_2 = 0$, тому що $Y_v(z)$ зростає при $z = 0$. Крайові умови при $x = b$ можна записати як (2.41) або (2.42), залежно від значення β', де $\lambda = ikb$ та $c = \frac{b\beta}{\beta'}$. Якщо позначимо $y = kb > 0$, то потрібно дослідити розв'язки рівнянь

$$J_v(iy) = 0 \text{ (якщо } \beta' = 0) \quad \text{чи} \quad cJ_v(iy) + iyJ_v'(iy) = 0 \text{ (якщо } \beta' \neq 0).$$

Тепер із формули для J_v маємо

$$J_v(iy) = i^v I_v(y), \text{де } I_v(y) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(v+k+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{v+2k}.$$

Крім того, згідно рекурентного співвідношення (2.25), яке справедливе для всіх комплексних x

$$iyJ_v'(iy) = vJ_v(iy) - iyJ_{v+1}(iy) = vi^vI_v(y) - i^{v+2}yI_{v+1}(y)$$
$$= i^v\big(vI_v(y) + yI_{v+1}(y)\big).$$

Отже, крайові умови при $x = b$ можна записати як

$$I_v(y) = 0, \text{чи } (c+v)I_v(y) + yI_{v+1}(y) = 0,$$

де $y > 0$. Але оскільки $y > 0$, то за визначенням маємо $I_v(y) > 0$, тому при $\beta' = 0$ задача (2.39) розв'язків немає. Крім того, якщо $\beta \neq 0$ і $I_{v+1}(y) > 0$ і $c + v = \frac{b\beta}{\beta'} + v \geq 0$, відповідна крайова умова не може бути задоволена. Як наслідок, у встановлених умовах немає жодних від'ємних власних значень. Лему доведено [10].

Отримали сімейство ортогональних наборів функцій на інтервалі $[0, b]$ відносно $w(x) = x$. Цими функціями є

$$f_k(x) = J_v\left(\frac{\lambda_k x}{b}\right). \tag{2.43}$$

Функції в (2.43) дійсні, тому норма цих функцій дорівнює

$$\|f_k\|_w^2 = \int_0^b |f_k(x)|^2 x dx = \int_0^b (f_k(x))^2 x dx.$$

Щодо цього інтеграла маємо такий результат.

Лема 5. Якщо $l > 0, b > 0$ і $v \geq 0$, то

$$\int_0^b (J_v(lx))^2 x dx = \frac{b^2}{2}(J_v'(lb))^2 + \frac{l^2b^2 - v^2}{2l^2}(J_v(lb))^2. \tag{2.44}$$

Доведення. Нехай $f(x) = J_v(lx)$. Ми знаємо, що f є розв'язком рівняння (2.36). Крім того, це рівняння можна записати у вигляді

$$x(xf')' = (v^2 - l^2x^2)f.$$

Помноживши на $2f'$, отримаємо

$$2\big(xf'(x)\big)'\big(xf'(x)\big) = (v^2 - l^2x^2)\big(2f'(x)f(x)\big),$$

$$((xf'(x))^2)' = (v^2 - l^2x^2)(f^2(x))'.$$

Тепер інтегруємо обидві частини рівняння в межах від 0 до b, використовуючи інтегрування за частинами в правій частині рівняння.

$$(xf'(x))^2|_{x=0}^{b} = (v^2 - l^2x^2)(f(x))^2|_{x=0}^{b} + 2l^2\int_0^b x(f(x))^2 dx.$$

При $x = 0$ ліва частина перетворюється в нуль, а член для оцінки в правій частині зменшується до v. Оскільки $(f(0))^2 = (J_v(0))^2 = 0$, коли $v > 0$, цей член також дорівнює нулю для всіх $v \geq 0$. Як наслідок

$$2l^2\int_0^b x\big(f(x)\big)^2 dx = \frac{b^2}{2}\big(f'(b)\big)^2 + (l^2b^2 - v^2)(f(b))^2.$$

Завдяки $f'(x) = lJ_v'(lx)$, отримуємо тотожність (2.44). Лему доведено [1].

Якщо візьмемо розв’язок задачі (2.39), він задовольняє граничну умову (2.41), і можемо спростити праву частину (2.44). Якщо позначимо $l = \frac{\lambda}{b}$, а наша умова має вигляд (2.41), то маємо

$$\int_0^b J_v\left(\frac{\lambda_x}{b}\right)^2 xdx = \frac{b^2}{2}\big(J_v'(\lambda)\big)^2, \tag{2.45}$$

і якщо маємо умову типу (2.42),

$$\int_0^b J_v\left(\frac{\lambda_x}{b}\right)^2 xdx = \frac{b^2(\lambda^2 - v^2 + c^2)}{2\lambda^2}\big(J_v'(\lambda)\big)^2. \tag{2.46}$$

Також можна спростити праву частину (2.45) за допомогою рекурентного співвідношення (2.25). Якщо підставимо $x = \lambda$ у (2.25), то отримаємо $J_v'(\lambda) = -J_{v+1}(\lambda)$, і, таким чином, якщо (2.41) виконується,

$$\int_0^b \left(J_v\left(\frac{\lambda x}{b}\right)\right)^2 x dx = \frac{b^2}{2}\left(J_{v+1}(\lambda)\right)^2. \qquad (2.47)$$

Таким чином, для задачі (2.39), отримуємо ортонормований набір функцій Бесселя, який хочемо вважати ортонормованим базисом. Однак, оскільки (2.39) не є звичайною задачею Штурма-Ліувілля, не можна безпосередньо гарантувати існування достатньої кількості власних функцій для формування ортонормованого базису. Тим не менш, більш досконалими методами можна довести, що сімейство власних функцій типу (2.43) насправді є ортонормованим базисом $L_w^2(0, b)$ [6]. Результати підсумуємо теоремою.

Теорема 11. Нехай $v \geq 0, b > 0$ і $w(x) = x$.

1. Нехай $\{\lambda_k\}$, $k \in N$ — додатні нулі $J_v(x)$ і $\phi_k(x) = J_v\left(\frac{\lambda_k x}{b}\right)$, для всіх $k \in N$. Тоді $\{\phi_k\}, k \in N$ є ортогональним базисом для $L_w^2(0, b)$ і

$$\|\phi_k\|_w^2 = \frac{b^2}{2} J_{v+1}(\lambda_k)^2, \qquad k \in N.$$

2. Нехай $\{\widetilde{\lambda_k}\}$, $k \in N$ — додатні нулі $cJ_v(x) + xJ_v'(x)$ і нехай $\psi_k(x) = J_v\left(\frac{\widetilde{\lambda_k} x}{b}\right)$ для $k \in N$. Також визначимо $\psi_0(x) = x^v$. Якщо $c > -v$, $\{\psi_k\}, k \in N$ є ортогональним базисом для $L_w^2(0, b)$. Якщо $c = -v$, то $\{\psi_k\}, k \in N \cup \{0\}$ є ортогональним базисом для$L_w^2(0, b)$. Крім того,

$$\|\psi_k\|_w^2 = \frac{b^2(\lambda_k^2 - v^2 + c^2)}{2\lambda_k^2} J_v(\lambda_k)^2 \quad (k \geq 1), \ \ \|\psi_0\|_w^2 = \frac{b^{2v+2}}{2v+2}.$$

Будь-яку функцію $f \in L_w^2(0, b)$ можна розкласти в ряд Фур'є-Бесселя такого вигляду

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \text{ чи } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \psi_k(x),$$

де

$$c_k = \frac{1}{\|\phi_k\|_w^2} \int_0^b f(x)\phi_k(x)xdx \text{ та } d_k = \frac{1}{\|\psi_k\|_w^2} \int_0^b f(x)\psi_k(x)xdx.$$

Наведені вище ряди є збіжними для всіх $f \in L_w^2(0, b)$. Можна довести деякі властивості щодо цих рядів. Наприклад, якщо f є кусково-гладкою, тоді ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^{\infty} d_k \psi_k(x)$$

збігаються до $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ.

3.1. Коливання круглої мембрани

У цьому пункті розглядаються деякі застосування функцій Бесселя у математичній фізиці. Вони використовуються для розв'язування диференціальних рівнянь, де виникає рівняння Бесселя. Одним із таких прикладів є задача про коливання кругової мембрани:

дослідити процес вільних коливань круглої однорідної мембрани радіусом R, якщо в початковий момент часу положення та швидкість її точок становить відповідно $\omega_1(x,y)$ і $\psi_1(x,y)$, а край мембрани нерухомо закріплений.

Взявши центр мембрани за початок координат і використавши оператор Лапласа в полярних координатах, прийдемо до наступної мішаної задачі математично фізики: в області $B=\{(t,r,\theta)|t>0, 0\le r<R, 0\le\theta<2\pi\}$ знайти розв′язок диференціального рівняння

$$u_{tt}-c^2\Delta u=u_{tt}-c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right), \tag{3.1}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(0,r,\theta)=\omega(r,\theta), \qquad u_t(0,r,\theta)=\psi(r,\theta), \tag{3.2}$$

$$0\le r<R, 0\le\theta<2\pi$$

та крайову умову

$$u(t,R,\theta)=0, t\ge 0. \tag{3.3}$$

Очевидно, $u(t,r,\theta)=u(t,r,\theta+2\pi)$ [13].

Для побудови розв'язку мішаної задачі (3.1)-(3.3) розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальний розв'язок рівняння (3.1), які задовольняли б крайову умову (3.3).

Шукатимемо ці розв'язки за допомогою методу Фур'є. Ідея цього методу, як відомо, полягає в тому, щоб шукати невідому функцію $u(t,r,\theta)$ у вигляді:

$$u(t,r,\theta)=T(t)v(r,\theta). \tag{3.4}$$

Підставимо це у рівняння (1.3), одержимо:

$$T''(t)v(r,\theta)-c^2T(t)\Delta v(r,\theta)=0,$$

звідси, після відокремлення змінних,

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{\Delta v(r,\theta)}{v(r,\theta)} = -\lambda$$

де λ – стала. З цього рівняння маємо рівняння, що залежить лише від t

$$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0,$$

та рівняння, що залежить від двох змінних r і θ

$$\Delta v(r,\theta) + \lambda v(r,\theta) = 0. \qquad (3.5)$$

З огляду на крайову умову (3.3) й враховуючи періодичність функції $v(r,\theta)$ за θ та її обмеженість у центрі круга, маємо

$$v(R,\theta) = 0, \qquad v(r,\theta) = v(r,\theta + 2\pi), |v(0,\theta)| < \infty. \qquad (3.6)$$

Задачу Штурма-Ліувілля (3.5)-(3.6) також розв’язуємо методом відокремлення змінних. Покладемо

$$v(r,\theta) = z(r)\Theta(\theta) \qquad (3.7)$$

Тоді підставимо (3.7) в (3.5) отримаємо

$$z''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}z'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}z(r)\Theta''(\theta) + \lambda z(r)\Theta(\theta) = 0.$$

Домножимо отримане рівнянна на $\frac{r^2}{z(r)\Theta(\theta)}$,

$$\frac{r^2}{z(r)}\left(z''(r) + \frac{1}{r}z'(r) + \lambda z(r)\right) = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu^2,$$

де μ^2 знову є сталою. Таким чином, врахувавши умови (3.6), отримаємо

$$\Theta''(\theta) + \mu^2\Theta(\theta) = 0, \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi); \qquad (3.8)$$

$$z''(r) + \frac{1}{r}z'(r) + \left(\lambda - \frac{1}{r^2}\mu^2\right)z(r) = 0, \qquad z(R) = 0, |z(0)| < \infty. \qquad (3.9)$$

Нетривіальний розв’язок задачі (3.8) існує тільки при $\mu^2 = n^2$, де n – ціле число. Отже,

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\,, \text{де } A_n, B_n \text{— } const. \tag{3.10}$$

Щоб розв'язати задачу (3.9) введемо нову незалежну змінну $x = r\sqrt{\lambda}$ і позначимо $z(r) = z\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x)$. Тоді маємо

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0, \tag{3.11}$$

$$y\left(R\sqrt{\lambda}\right) = 0, |y(0)| < \infty. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.11) є рівнянням Бесселя порядку n. Використавши метод степеневих рядів можемо переконатися, що будь-який його розв'язок $y_n(x)$ може мати вигляд:

$$y_n(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \tag{3.13}$$

де

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n};$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(ln\frac{x}{2} + c\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \cdots + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right)\right);$$

с =0,577215…— стала Ейлера.

При $x \to 0$ функція $Y_n(x)$ перетворюється в нескінченність, а отже, внаслідок другої умови (3.12) випливає, що $c_2 = 0$. А перша умова дає

$$J_n\left(R\sqrt{\lambda}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Таким чином, задача знаходження власних функцій задачі (3.5)-(3.6) зводиться до знаходження нулів функції Бесселя першого роду. Для коренів трансцендентного рівняння (3.14) справедливі такі твердження:

1) всі корені є простими;
2) всі корені дійсні та їх є нескінченна множина.

Щоб довести перше твердження, використаємо метод доведення від супротивного: нехай $R\sqrt{\lambda} = v_1$ є нулем рівняння (3.14) кратності $p \geq 2$. Тоді $J_n(v_1) = J_n'(v_1) = 0$, тобто

$$w_n(v_1) = w_n'(v_1) = 0. \qquad (3.15)$$

Використавши теорему про єдиність розв'язку задачі Коші для (3.11), (3.15) маємо $w_n(x) \equiv 0$, що суперечить умові. Тепер, нехай корені рівняння (3.14) знайдено; позначимо їх через $v_k = R\sqrt{\lambda_k}, k = 1,2,3,\dots$ Тоді їм відповідатимуть власні функції крайової задачі (3.9), що мають вигляд:

$$w_k(x) = z_k(r) = c_1 J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right), k = 1,2,3,\dots \qquad (3.16)$$

Теорема 12. Власні функції крайової задачі (3.9), які відповідають різним власним значенням λ_k, ортогональні з вагою ρ на відрізку $[0, R]$, тобто

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)J_n\left(\frac{v_m}{R}r\right)dr = 0, k \neq m. \qquad (3.17)$$

Доведення. Із (3.9) маємо

$$r\frac{d}{dr}\left(rz_k'(r)\right) = \left[n^2 - \left(\frac{v_k}{R}\right)^2 r^2\right] z_k(r),$$

$$r\frac{d}{dr}\left(rz_m'(r)\right) = \left[n^2 - \left(\frac{v_m}{R}\right)^2 r^2\right] z_m(r).$$

Домноживши першу рівність на $z_m(r)$, а другу — на $z_k(r)$, а потім віднявши почленно одну від одної і результат проінтегрувавши, отримаємо

$$\int_0^R \left[z_m(r)\frac{d}{dr}\left(rz_k'(r)\right) - z_k(r)\frac{d}{dr}\left(rz_m'(r)\right)\right]dr =$$

$$= \frac{1}{R^2}(v_m^2 - v_k^2)\int_0^R rz_m(r)z_k(r)dr.$$

Взявши інтеграл зліва частинами й врахувавши, що $z_k(R) = z_m(R) = 0$, матимемо:

$$\frac{1}{R^2}(v_m^2 - v_k^2)\int_0^R rz_m(r)z_k(r)dr = r[z_m(r)z_k'(r) - z_k(r)z_m'(r)]_0^R = 0,$$

що й потрібно було довести.

Підставимо (3.16), (3.10) у (3.7), отримаємо:

$$v_{n,k}(r,\theta) = \left(a_{n,k}\cos n\theta + b_{n,k}\sin n\theta\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right), \tag{3.18}$$

де $a_{n,k} = c_1 A_n$; $b_{n,k} = c_2 B_n$.

Очевидно, власні функції (3.18) задачі (3.5), (3.6) є ортогональними з вагою r. Підставивши знайдені власні значення в рівняння (3.4) і проінтегрувавши його, матимемо:

$$T_{n,k} = c_3\cos\frac{av_k}{R}t + c_4\sin\frac{av_k}{R}t,$$

а отже, згідно з (3.3) дістанемо

$$u_{n,k}(t,r,\theta) = \left(\bar{a}_{n,k}\cos\frac{av_k t}{R} + \bar{b}_{n,k}\sin\frac{av_k t}{R}\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos n\theta +$$

$$+\left(\bar{\bar{a}}_{n,k}\cos\frac{av_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k}\sin\frac{av_k t}{R}\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\sin n\theta,$$

де $\bar{a}_{n,k} = c_3 a_{n,k}$; $\bar{b}_{n,k} = c_4 a_{n,k}$; $\bar{\bar{a}}_{n,k} = c_3 b_{n,k}$; $\bar{\bar{b}}_{n,k} = c_4 b_{n,k}$.

Розглянемо ряд

$$u(t,r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{a}_{n,k}\cos\frac{av_k t}{R} + \bar{b}_{n,k}\sin\frac{av_k t}{R}\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos n\theta +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{\bar{a}}_{n,k}\cos\frac{av_k t}{R} + \bar{\bar{b}}_{n,k}\sin\frac{av_k t}{R}\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\sin n\theta \tag{3.19}$$

і припустимо, що в області $\bar{B}$ він збігається рівномірно й в області B його можна почленно диференціювати двічі за t, r і θ. Тоді цей ряд буде розв’язком рівняння (3.1) і задовольняти крайову умову (3.3). Виберемо коефіцієнти ряду (3.19) таким чином, щоб його сума задовольняла й початкову умову (3.2). Маємо

$$\omega(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{a}_{n,k}\cos n\theta + \bar{\bar{a}}_{n,k}\sin n\theta\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right),$$

$$\psi(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{b}_{n,k}\cos n\theta + \bar{\bar{b}}_{n,k}\sin n\theta\right)\frac{av_k}{R}J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right).$$

Як відомо, довільну функцію $\Omega(r,\theta)$, неперервну разом із похідними до другого порядку включно, що задовольняє крайову умову (3.6), можна розвинути в рівномірно збіжний ряд вигляду

$$\Omega(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n,k}\cos n\theta+\beta_{n,k}\sin n\theta\right)J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right),$$

де

$$\alpha_{n,k}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\Omega(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos n\theta\,drd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,J_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos^2 n\theta\,drd\theta},n=0,1,2,\dots;$$

$$\beta_{n,k}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\Omega(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\sin \pi\theta\,drd\theta}{\pi\int_0^R rJ_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)dr},n=1,2,\dots$$

Отже, якщо $\omega(r,\theta)$ і $\psi(r,\theta)$ належать простору $C^2(0\le r\le R,\ 0\le\theta<$ 2π, то порівнюючи ці ряди та ряд $\Omega r,\theta$, отримаємо

$$\bar{a}_{n,k}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\omega(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos n\theta\,drd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,J_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos^2 n\theta\,drd\theta},n=0,1,2,\dots,$$

$$\bar{\bar{a}}_{n,k}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\omega(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\sin n\theta\,drd\theta}{\pi\int_0^R rJ_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)dr},n=1,2,\dots$$

$$\bar{b}_{n,k}=\frac{R\int_0^{2\pi}\int_0^R\psi(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos n\theta\,drd\theta}{av_k\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,J_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)\cos^2 n\theta\,drd\theta},n=0,1,2,\dots,$$

$$\bar{\bar{b}}_{n,k}=\frac{R\int_0^{2\pi}\int_0^R\psi(r,\theta)r\,J_n\left(\frac{v_k}{R}r\right)\sin n\theta\,drd\theta}{av_k\pi\int_0^R rJ_n^2\left(\frac{v_k}{R}r\right)dr},n=1,2,$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (3.19), дістанемо шуканий розв’язок задачі (3.1)—(3.3) [13].

3.2. Поширення теплоти в нескінченному однорідному циліндрі

Ще одним прикладом застосування функції Бесселя до розв’язування диференціальних рівнянь є задача про поширення теплоти в нескінченному однорідному круговому циліндрі радіуса R. Розглянемо цю задачу, якщо в початковий момент часу температура в кожній його точці залежить лише від її відстані до осі циліндра, а бічна поверхня підтримується при температурі, рівній нулеві.

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ і на краю температура циліндра не залежить від координати z і полярного кута φ, то очевидно, що і в будь-який момент часу $t > 0$ температура буде залежати лише від t і r, тобто $u = u(t, r)$. Тоді перейшовши в рівнянні теплопровідності до циліндричних координат і врахувавши умову $u = u(t, r)$, прийдемо до наступної мішаної задачі математично фізики: в області $B = \{(t, r) | t > 0, 0 \leq r < R\}$ знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t(t, r) = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), t > 0, 0 \leq r < R. \qquad (3.20)$$

який задовольняє початкову умову

$$u(0, r) = g(r), 0 \leq r \leq R, \qquad (3.21)$$

де $g(r)$ — задана функція, та крайові умови

$$u(t, R) = 0, |u(t, 0)| < \infty, t \geq 0. \qquad (3.22)$$

Для побудови розв'язку задачі (3.20)-(3.22) застосуємо метод відокремлення змінних [17]. Невідому функцію $u(t, r)$ будемо шукати у вигляді добутку двох функцій від однієї змінної: $T(t)$ та $V(r)$, тобто

$$u(t, r) = T(t)V(r). \qquad (3.23)$$

Підставивши (3.23) у рівняння (3.20), одержимо:

$$T'(t)V(r) = a^2 T(t) \left(V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) \right).$$

Відокремивши змінні у цьому рівнянні та крайових умовах (3.22), дістанемо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad (3.24)$$

$$V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + \lambda V(r) = 0. \qquad (3.25)$$

$$V(R) = 0, |V(0)| < \infty. \qquad (3.26)$$

Рівняння (3.25) є окремим випадком рівняння (3.11). Отже враховуючи вимогу обмеженості розв'язку рівняння (3.25), будь-який його розв'язок можна подати у вигляді:

$$V(r) = c_1 J_0\left(r\sqrt{\lambda}\right) \tag{3.27}$$

де J_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Крайова умова (3.26) дає

$$J_0\left(R\sqrt{\lambda}\right) = 0 \text{ або } J_0(\mu) = 0.$$

Остання рівність означає, що числа $\mu = R\sqrt{\lambda}$ є коренями (нулями) функції Бесселя нульового порядку. Отже, власні значення задачі (3.25), (3.26), мають вигляд:

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2, n = 1,2,\ldots, \tag{3.28}$$

а відповідними власними функціями, що утворюють повну ортонормовану систему на $[0, R]$, будуть

$$V_n(r) = \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{N_n} = \frac{\sqrt{2}}{R} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{J_1(\mu_n)}, \tag{3.29}$$

де

$$N_n^2 = \int_0^R r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2}{2}\left[J_0'(\mu_n)\right]^2 = \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_n).$$

Тепер повернемося до рівняння (3.24). Після підстановки $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, отримаємо для кожного n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T_n'(t) + a^2\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

загальний розв'язок якого є функція

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}.$$

Таким чином, згідно з (3.23) отримано скінченну множину розв'язків

$$u_n(r,t) = V_n(r)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r)$$

рівняння (3.20), кожен з яких задовольняє крайові умови (3.22). Загальний розв'язок рівняння (3.20) шукаємо як суперпозицію цих функцій у вигляді ряду

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r). \qquad (3.30)$$

Припустимо, що він збігається рівномірно в області $B = \{(t,r) | t \geq 0, 0 \leq r \leq R\}$ і його можна почленно диференціювати один раз за t і двічі за r у B. Виберемо коефіцієнти A_n так, щоб ряд (3.30) задовольняв і початкову умову (3.21). Для цього підставляємо (3.30) у (3.21):

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(r) = g(r).$$

Коефіцієнти цього розкладу мають вигляд:

$$A_n = g_n = \int_0^R g(r) V_n(r) r dr.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у ряд (3.30), отримаємо розв'язок задачі (3.20)-(3.22):

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r),$$

який можна переписати у вигляді

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right),$$

де

$$\bar{g}_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R g(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) r dr.$$

ВИСНОВКИ

Перші випадки розгляду рівняння Бесселя і його розв'язків траплялися ще на початку XVIII століття в роботах Д. Бернуллі, Л. Ейлера, Ж. Фур'є. А в 1824 році математик Ф. Бессель найбільш послідовно розглянув ці розв'язки і виділив їх в окремий клас, вони отримали назву функції Бесселя. А рівняння стало називатися диференціальним рівнянням Бесселя:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-v^2)y=0,$$

де v – довільне дійсне число, що називають порядком.

Рівняння Бесселя зустрічається у багатьох задачах фізики, механіки, астрономії тощо. Оскільки наведене рівняння є рівнянням другого порядку, у нього повинно бути два лінійно незалежних розв'язки. Проте залежно від обставин вибираються різні визначення цих розв'язків.

Одним з розв'язків рівняння є функція Бесселя першого роду, яка для будь-яких значень визначається як сума ряду:

$$J_m(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+m}n!\,\Gamma(m+n+1)}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція.

Якщо $m\in\mathbb{C}-\left\{\frac{k}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$ (відмінним від цілого чи напівцілого числа), то функції Бесселя першого роду J_m та J_{-m} є лінійно незалежними. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння Бесселя має вигляд:

$$y(x)=c_1J_m(x)+c_2J_{-m}(x),\qquad m\geq 0, m\neq\frac{k}{2}, k=0,1,2,\ldots$$

Коли m є цілим числом, функція $J_{-m}(x)$ лінійно залежить від J_m. Тому лінійна комбінація цих функцій не може складати загальний розв'язок рівняння Бесселя. У такому випадку, другий, лінійно незалежний розв'язок рівняння Бесселя задається наступною функцією Бесселя (Неймана) другого роду порядку m:

$$Y_m(x)=\frac{\cos(m\pi)J_m(x)-J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}$$

Таким чином, загальний розв’язок рівняння Бесселя набуде вигляду:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x), \qquad \forall m \in \mathbb{R}, x > 0$$

Також в роботі наведено модифіковані функції Бесселя, що є розв’язками модифікованого рівняння Бесселя, та їх властивості.

Найбільш вдалими прикладами застосування функцій Бесселя для розв’язування диференціальних рівнянь є задачі про поширення теплоти в нескінченному однорідному круговому циліндрі та коливання кругової мембрани, розв’язання яких наводиться в останньому розділі роботи.

Існує велика кількість найрізноманітніших завдань, що належать до найважливіших розділів математичної фізики та відповідають на актуальні технічні питання, пов'язані із застосуванням функцій Бесселя. Функції Бесселя широко використовуються при розв’язуванні завдань акустики, радіофізики, гідродинаміки, задач атомної та ядерної фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Folland, G. B. Fourier Analysis and Its Applications. American Mathematical Soc., 1992.

2. K.B.M. Nambudriripad Bessel Functions. Alpha Science International Limited, 2014. – 286 p.

3. Korenev B. G. Bessel Functions and Their Application. CRC Press, 2019. – 286 p.

4. Mathews G. B. A treatise on Bessel functions and their applications to physics. 1895.

5. Tranter, C. J. Bessel Functions with some Physical Applications. Hodder Arnold, 1968.

6. Watson, G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge Mathematical Library, 1995.

7. Вакал Є.С. Методи математичної фізики в прикладах і задачах : навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету / Є. С. Вакал, А. В. Ловейкін. – К. : Видавець Кравченко Я.О., 2020. – 188 с.

8. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики / Н.О. Вірченко. – К. : Інрес, Воля, 2006. – 332 с.

9. Застосування методу відокремлення змінних для розв'язання одновимірних задач: Навчально-методичний посібник з дисципліни "Рівняння математичної фізики". / Упорядники І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. – К.: Видавничополіграфічний центр "Київський Університет", 2006. – 54 с.

10. Кафтанова Ю.В Спеціальні функції математичної фізики. Науково-популярне видання. – Х. : ПП видавництво «Нове слово», 2009. – 596 с.

11. Курпа Л.В. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Г.Б. Лінник. – Харків : НТУ "ХПІ", 2011. – 312 с.

12. Перестюк М.О. Збірник задач з математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець, В.Л. Рего. – Кам'янець Подільський : Аксіома, 2012. – 252 с.

13. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К. : Либідь, 2006. – 424 с.

14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В.3 т. Т.2 Специальные функции. – М. : Физматлит, 2003. – 664 с.

15. Сабитов К.В. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. – М. : Высшая школа, 2005. – 671с

16. Самарский А.А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.

17. Самойленко В.Г. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / В.Г. Самойленко, І.М. Конет. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2014. – 283 с.