Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр» на тему

Методи розв'язування тригонометричних задач при реалізації диференційованого підходу в процесі навчання математики

Виконала:
здобувачка ступеня вищої освіти «магістр»
спеціальності 014 «Середня освіта. Математика»
Михалюк Наталія Петрівна

Керівник:
доктор технічних наук, професор
Бичков Олексій Сергійович

Рецензент:
кандидат технічних наук, доцент
Тимощук Олександр Станіславович

Рівне, 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. В умовах розбудови системи освіти відповідно до Закону України «Про освіту», Державної національної програми «Освіта», відтворення та зміцнення інтелектуального потенціалу нації, виходу науки і техніки в Україні на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти, переходу до ринкових відносин і конкуренції будь-якої продукції, в тому числі і інтелектуальної, особливо важливим є забезпечення належного рівня математичної підготовки підростаючого покоління. Це пов'язано з тим, що математика має великі можливості для інтелектуального розвитку особистості, перед усім розвитку логічного мислення, просторових уявлень, алгоритмічної та інформаційної культури, формує уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації.

У Державному стандарті базової і повної середньої освіти освітньої галузі "математика" зазначено, що основною метою навчання математики є опанування учнями системи математичних знань, навичок і вмінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти; формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності; інтелектуальний розвиток учнів. Але в реальній педагогічній практиці багато років основною метою навчання математики було оволодіння системою знань, які складають "основи наук".

Питанням змістової диференціації математичної освіти присвячені праці багатьох вітчизняних та зарубіжних математиків та методистів.Зокрема, проблеми змісту математичної освіти в контексті забезпечення процесу навчання математики в класах з поглибленим вивченням математикизнайшли відображення в працях Б. В. Гнеденко, Є. П. Неліна, М. І. Шкіля,В. О. Швеця, Ф. В. Фірсова та інші. Зміст та специфіку навчання математики у школах (класах) гуманітарного профілю навчання досліджували М. І. Бурда, Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Ю. М. Колягін, Ю. І. Мальований та інші.

Реалізація компетентнісного підходу до навчання математики спирається на праці, присвячені загальним методичним аспектам упровадження цього підходу в освіті як засобу організації особистісно орієнтованого навчання (праці Н. М. Бібік, І. Г. Єрмакова, О. В. Овчарук, О. І. Пометун та інші), та на праці, присвячені питанням реалізації компетентнісного підходу в математичній освіті (В. В. Ачкан, О. Я. Бабич, М. С. Головань, І. М. Зіненко, С. А. Раков, І. Я. Сафонова, С. О. Скворцова,Н. А. Тарасенкова, Н. Г. Ходирєва та інші).

Питаннями, присвяченними власне навчанню учнів розв'язуванню рівнянь і нерівностей і формуванню відповідних розумових прийомів займалися Г. П. Бевз, І. Т. Бородуля, Т. А. Грицик, В. Я. Забранський, Я. Л. Каплан, Є. П. Нелін та інші.

Вище наведені міркування свідчать про актуальність вибраної теми дослідження: ***«Методи розв'язування тригонометричних задач при реалізації диференційованого підходу в процесі навчання математики»***.

Мета дослідження: на основі аналізу науково- методичної, навчальної літератури, вивчення та узагальнення педагогічного досвіду, систематизувати теоретичний матеріал з методів розв'язування тригонометричних задач у школі та навести методичні рекомендації щодо його використання в умовах диференційованого навчання.

Для досягнення поставленої мети розв'язувались такі **завдання:**

1) опрацювати науково – методичну літературу за темою дослідження;
2) зробити огляд методів розв'язування тригонометричних задач в умовах диференційованого навчання;
3) проаналізувати шкільні підручники та чинні програми в контексті дослідження;
4) розглянути основні науково – методичні підходи до вивчення тригонометричних функцій;
5) розробити приклади конспектів уроків для різних класів з тем, що стосуються тригонометричних задач.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів у школі.

Предметом дослідження є методи розв'язування тригонометричних задач при реалізації диференційованого підходу в процесі навчання математики.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених завдань використано такі методи дослідження:

1) теоретичні – системний та порівняльний аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури з проблеми дослідження;

2) емпіричні – спостереження за процесом навчання учнів, аналіз їх навчальної діяльності; анкетування, бесіди з вчителями та учнями; систематизація й узагальнення передового досвіду вчителів, методистів;

3) *статистичні:* методи математичної статистики для обробки даних зі з'ясування достовірності результатів експериментального дослідження.

Практичне значення дослідження полягає у систематизації теоретичного матеріалу та розробці методичних рекомендацій щодо вивчення тригонометричних задач при реалізації диференційованого підходу в процесі навчання математики.

Апробація і впровадження результатів дослідження Основні положення і результати дослідження доповідалися та обговорювались на Всеукраїнській науково-практичній конференції «Міжкультурна комунікація у професійній підготовці майбутнього педагога XXI століття» (Рівне, РДГУ, 12 травня 2023 р.).

Структура роботи. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історія розвитку тригонометрії як науки

Історія тригонометрії як науки про співвідношення між кутами і сторонами трикутника та інших геометричних фігур охоплює понад два тисячоліття. Більшість таких співвідношень неможливо відтворити за допомогою звичайних алгебричних операцій, тому було уведено до обігу особливі тригонометричні функції, які відпочатку оформлювали у вигляді таблиць.

Історики справедливо уважають, що тригонометрію створили стародавні астрономи, трохи пізніше її почали використовувати в геодезії й архітектурі задля практичних потреб. З часом сфера застосування тригонометрії постійно розширювалась. Зокрема, нині тригонометрія стає основою при розробленні методології природничих наук, використовується у розробках, які стосуються технічної й інших галузей діяльності. Тригонометричні функції виявились особливо корисними для вивчення коливних процесів, оскільки на них заснований також гармонічний аналіз функцій та інші інструменти аналізу. Доведенням правомірності такого узагальнення слугує висловлення Томаса Пейна, який у своїй книзі «Доба Розуму» (1794) назвав тригонометрію «душею науки».[63]

У наведеній таблиці на основі аналізу літературних джерел [1, 2, 11, 15, 19, 21, 28, 32, 36, 42, 43, 52] відтворено відомості, які засвідчують розвиток тригонометрії, а також її використання в різних галузях у різні часи розвитку науки і виробництва.

Таблиця 1.1

Періоди розвитку науки «Тригонометрія»

Країна	Досягнення
Ранній період	
Єгипет, Вавилон, Китай	Зародки тригонометрії в математичних рукописах
Стародавня Греція	Загальне й логічно зв'язне викладення тригонометричних співвідношень. Тригонометрія становить складник астрономічної теорії. Кілька теорем тригонометричного характеру містять «Начала» Евкліда (IV століття до н. е.). У другій книзі «Начал» теорема 12 становить словесний аналог теореми косинусів, зміст якої має таке формулювання: У тупокутних трикутниках квадрат на стороні, що стягує тупий кут, більше (суми) квадратів на сторонах, що містять тупий кут, на двічі взятий прямокутник, поміщений між однією зі сторін при тупому куті, на яку спадає перпендикуляр, і відрізком при тупому куті, який відтинає цей перпендикуляр ззовні.[11] Подальший розвиток тригонометрії пов'язаний з ім'ям астронома Аристарха Самоського (III століття до н. е.). У його трактаті «Про величини і відстані Сонця і Місяця» була поставлена задача про визначення відстаней до небесних тіл; ця задача потребувала обчислення співвідношення сторін прямокутного трикутника при відомому значенні одного з кутів. Водночас Аристарх довів нерівність, яка в сучасних термінах передається такою формулою: $$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{tg\, a}{tg\, b}$$ Наведену нерівність Архімед подає в «Обчисленні піщинок». У працях дослідника, який у своїх дослідженнях (III століття до н. е.) наводить теорему ділення хорд, яка по суті є еквівалентною формулі синуса половинного кута: $$sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$ Перші тригонометричні таблиці були складені у III столітті до н. е. За гіпотезою, такі таблиці були складені Апполонієм Перзьким. Мовою хорд були сформульовані перші відкриті греками тригонометричні співвідношення. Прикладом може слугувати використовувана сучасна формула:

	$$sin^2 a + cos^2 a = 1$$ у греків викладеній вище формулі відповідала теорема: $$(chord_a)^2 + (chord_{180-a})^2 = d^2$$ Основним досягненням античної тригонометричної теорії став розв'язок у загальному вигляді задачі «розв'язування трикутників», тобто знаходження невідомих елементів трикутника, коли відомі його три елементи (з яких хоча б одним є стороною).[11] Клавдій Птолемей у своїх працях «Географія», «Аналемма» і «Планісферій» наводить докладний виклад застосування тригонометрії у галузі картографії, астрономії й механіки, насамперед на прикладі інженерних розробок.
Наша ера до кінця XIII століття	
Індія	Дослідники змінили деякі концепції тригонометрії, наблизивши й адаптуваши їх до сучасних шляхом здійснення заміни античних хорд на синуси (назва синус походить від слова *тятива* на санскриті) у прямокутному трикутнику. Такі зміни стали початком розвитку тригонометрії як загального вчення про співвідношення у трикутнику, хоча, на відміну від грецьких хорд, індійський підхід обмежувався тільки функціями гострого кута. Вперше ввели до обігу поняття косинуса. Тригонометрія як наука розвивалася переважно у тісному взаємозв'язку з її астрономічним застосуванням, більшою мірою – для використання в теорії руху планет і для вивчення небесної сфери. Задля застосування астрономічних розрахунків було розроблено низку тригонометричних таблиць. Дослідник Брахмагупта (VII століття) відкрив кілька тригонометричних співвідношень, зокрема й ті, що в сучасному запису набули вигляду: $$cos^2 a + cos^2 a = 1$$ $$sin a = \cos(90^o - a)$$
Ісламські країни	У працях аль-Хорезмі й аль-Марвазі (IX століття) розглянуто разом із відомими (ще в епоху індійського бачення розглянутого вчення) синусом і косинусом нові тригонометричні функції: тангенс, котангенс, секанс і косеканс. Так, Ібн Юніс (X століття) відкрив перетворення добутку тригонометричних функцій на суму, наприклад:[11] $$sin a * sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$ У IX столітті аль-Хорезмі склав таблиці синусів з кроком 1°, його сучасник аль-Марвазі додав до них перші таблиці тангенсів, котангенсів і косекансів (з тим самим кроком). На початку X століття аль-Баттані опублікував таблиці з кроком

<table>
<tr><td></td><td>30'. Варто зауважити, що динаміка у пізнанні окреслених понять засвідчена у працях Ібн Юніса, який наприкінці того ж століття склав таблиці з кроком 1'. При складанні таблиць ключовим питанням було обчислення значення sin 1.
Фундаментальне викладення тригонометрії як самостійної науки (як плоскої, так і сферичної) навів перський математик і астроном Насир ад-Дін ат-Тусі у 1260 році.[63]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Викладене вище дозволяє дійти висновку про те, що до кінця XIII століття дослідниками було відкрито базові теореми, що складають зміст тригонометрії. Ідеться про такі тригонометричні аспекти:
Вираження будь-якої тригонометричної функції через будь-яку іншу.
Формули для синусів і косинусів кратних і половинних кутів, а також для суми і різниці кутів.
Теореми синусів і косинусів.
Розв'язування плоских і сферичних трикутників.
Варто зауважити, що відсутність алгебричної символіки зумовила потребу виражати теореми словесно, де опис почасти мав значний обсяг, водночас по суті і з урахуванням прогресивних досягнень на той час такі докладні описи еквівалентними їх сучасному розумінню.[36]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Наша ера від XIV століття</td></tr>
<tr><td>Європа</td><td>У роботі Фібоначчі «Практика геометрії» тригонометрія викладається як частина геометрії і як така, що може застосовуватися при інженерних розробках.
Трактат європейського математика Леві бен Гершома «Про синуси, хорди і дуги», перекладений латинською мовою 1324 року, містить доведення теореми синусів і п'ятизначні таблиці синусів.
Великим досягненням стала монографія Регіомонтана «П'ять книг про трикутники всіх видів» (опублікована у 1462–1464), у якій були зведені опрацьовані й на тогочасному етапі знання з плоскої та сферичної тригонометрії і прикладені семизначні таблиці синусів (з кроком 1') і тангенсів (з кроком 1'). Суттєвим щодо змістового викладу таблиць є те, що саме в таблицях Регімонтана, порушуючи астрономічну традицію, уперше використовувалась десяткова система (а не архаїчна шістдесяткова).[11]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Новий час XVI–XVII століття</td></tr>
<tr><td>Європа</td><td>Укладено 15-значні тригонометричні таблиці Ретика, учня Коперника, з кроком 10"(1551).
Термін «тригонометрія» як назву математичної дисципліни увів до обігу німецький математик Б. Пітискус, який опублікував у 1595 році книгу «Тригонометрія, або стислий і ясний трактат про розв'язування трикутників».
До кінця XVII століття уведено до обігу сучасні назви</td></tr>
</table>

	тригонометричних функцій, унормовано їх класифікаційну номінацію. Застосування Ф. Вієтом в тригонометрії розробленої ним загальної алгебричної символіки дозволило записати в компактному й загальному вигляді тригонометричні тотожності. Прикладом можуть слугувати формули кратних кутів:[42] $\cos ma = cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} cos^{m-2} a \cdot sin^2 a + \cdots$ $\sin ma = mcos^{m-1} a \cdot sina - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} cos^{m-3} a \cdot sin^3 a + \cdots$ У 1630-х роках дослідник Жиль Роберваль на основі результатів дослідження циклоїди накреслив перший графік синусоїди. Науковцем було опубліковано формулу тангенса подвійного кута. Джон Валліс у праці «Механіка» (1670) правильно вказав знаки синуса у всіх квадрантах і вказав, що у синусоїди нескінченно багато обертів. Графік тангенса для першого квадранта вперше накреслив Джеймс Грегорі (1668). Для тригонометричних функцій важливі результати отримав Блез Паскаль (опубліковані у його книзі «Листи А.Деттонвілля про деякі його геометричні відкриття», 1659 рік). У сучасній термінології дослідник Паскаль обчислив інтеграли від натуральних ступенів синуса й косинуса, вказавши на деякі, пов'язані з ними, а також відзначив, що *d(sin x) = cos x dx.*[36]
Новий час XVIII століття	
Європа	Відкриття й подальше застосування радіанної міри кутів (Роджер Котс, 1714). Власне термін «радіан» виник пізніше, його у 1873 році запропонував англійський інженер Джеймс Томсон. Тригонометричні уявлення комплексного числа і формула Муавра: $(\cos \varphi + i \sin \varphi) n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$ Початок використання (Ньютон і Грегорі) полярної системи координат, пов'язаної з декартовою тригонометричними співвідношеннями; до загального обігу окреслені координати увів Ейлер (1748). У 1706 році швейцарський математик Якоб Герман опублікував формули для тангенса суми і тангенса кратних кутів. Науковець Йоганн Ламберт у 1765 році знайшов формули, що виражають різні тригонометричні функції через тангенс половинного кута.[43]

1.2. Особливості вивчення тригонометричних задач

Розділ «Тригонометричні рівняння» займає один із основних розділів у шкільному курсі математики. Однією з особливостей змісту матеріалу даного розділу є те, що розв'язання тригонометричних рівнянь створює передумови для систематизації та узагальнення знань учнів як з розділу «Тригонометричні функції», так і за вивченим алгебраїчним матеріалом з курсу основної школи. Тому перед вчителем стоїть завдання виділення тих ідей матеріалу, що вивчається, які лежать в основі способів і прийомів розв'язання розглянутих завдань.

У навчально-методичній літературі є різні точки зору щодо класифікації тригонометричних рівнянь. Це пов'язано насамперед з тим, що тригонометричні рівняння є винятково різноманітними. Якщо за класифікації як основи дотримуватися виділення прийому чи способу розв'язання тригонометричного рівняння, можна виділити такі види:

1) рівняння, у процесі розв'язання яких використовуються властивості тригонометричних функцій;

2) найпростіші та зведені до них тригонометричні рівняння після виконання тотожних перетворень;

3) тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних щодо будь-якої тригонометричної функції;

4) рівняння виду $a\,sinx + b\,cosx = c$, де $a, b, c \in R$, $a \neq 0, b \neq 0$ та зведені до них;

5) однорідні щодо синуса та косинуса одного і того ж аргументу тригонометричні рівняння;

6) тригонометричні рівняння, спосіб розв'язання яких зводиться до застосування штучних прийомів;

7)змішані тригонометричні рівняння.

Аналіз навчальної та методичної літератури показує, що види (2-5) тригонометричних рівнянь досить добре описані, зокрема у шкільних підручниках та посібниках, а першому та останнім двом видам рівнянь не приділяється належної уваги, більше того – у деяких підручниках та посібниках вони відсутні.

В основі розв'язання тригонометричних рівнянь першого виду лежать висновки про такі властивості тригонометричних функцій, як область визначення або область значень. Розв'язання зводиться до встановлення областей визначення або значень виразів, що задають ліву та праву частини рівняння. У деяких випадках, коли розв'язання тригонометричного рівняння зводиться лише до знаходження області значень лівої та правої частин рівняння, цей спосіб називають способом або прийомом оцінки.

Оскільки в шкільних підручниках та посібниках вони практично відсутні, то вчителю доцільно самому конструювати такі приклади, починаючи з найпростіших. Наприклад, запропонувати розв'язати рівняння усно, обґрунтовуючи відповідь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

а) $sin2x = \sqrt{2}$

б) $cos3x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

в) $cosx \cdot tgx = 1$ г)

$cos^2x = 2$

У рівнянні (в) відповідь отримуємо з висновку області визначення функції тангенс: $cosx \cdot \frac{sinx}{cosx}$ звідси, $sinx = 1, cosx \neq 0$

Система немає розв'язків, отже, дане рівняння немає розв'язків.

Рівняння (а), (б), (г) є найпростішими і не мають розв'язків, тому що ліві частини є числами, що перевищують за модулем 1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $sin7x - sinx = 3$

Спроба застосувати формулу перетворення різниці синусів призведе до громіздких перетворень, що є нераціональним.

Перенесемо *sinx* у праву частину і отримаємо $sin7x = sinx + 3$.

Оцінивши праву та ліву частини рівняння, отримаємо: $-1 \leq sin7x \leq 1, 2 \leq sinx + 3 \leq 4$, звідки робимо висновок – рівняння не має розв'язків.

Можна видозмінити рівняння так, щоб безліч значень лівої та правої частин рівняння мали перетин.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $sin7x - sinx = 2$

Розмірковуючи аналогічно, отримаємо $-1 \leq \sin 7x \leq 1$,

$1 \leq sin\, x + 2 \leq 3$.

Тоді рівність можлива, коли обидві частини рівняння дорівнюють 1 і розв'язок рівняння зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} sin7x = 1 \\ sinx + 2 = 1 \end{cases}$$

При розв'язанні деяких рівнянь даного виду часто доводиться виконувати тотожні перетворення, після чого необхідно оцінити праву та ліву частини рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $sin^3x + sin^2x - 2sinx - 3 = 0$Перетворимо рівняння до виду $sin^2x \cdot (sinx + 1) - 2\,sinx - 2 = 1$, звідки $sin^2x \cdot (sinx + 1) - 2 \cdot (sinx + 1) = 1$. Тоді $(sinx + 1)(sin^2x - 2) = 1$. Оцінимо ліву частину рівняння. Оскільки $sinx \geq -1$, то $sinx + 1 \geq 0$, оскільки $sin^2x \leq 1$, то $sin^2x - 2 < 0$.

Отже, $(sinx + 1)(sin^2x - 2) \leq 0$. З іншого боку, у правій частині $1 > 0$. Отже, рівняння не має розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$|5 - 6x| - 4sin\frac{\pi x}{3} - 4sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1 + tg^2\frac{\pi x}{3}} = 0$$

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3} + 4sin\frac{2\pi x}{3} - \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1+tg^2\frac{\pi x}{3}}$$

Перетворимо праву частину рівняння, враховуючи область допустимих значень, тобто $x \neq \frac{3}{2} + 3k$ де $k \in Z$.

Зробимо заміну, що $\frac{\pi x}{3} = t$, тоді $4sint + 4sin2t - \frac{8tgt}{1+tg^2t} = 4sint + 4sin2t - 8sint \cdot cost = 4sint + 4sin2t - 4sin2t = 4sint$

Тоді вихідне рівняння зводиться до більш простого вигляду:

$$|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3}$$

Розв'яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій, що представляють ліву та праву частини рівняння (рис.1.1).

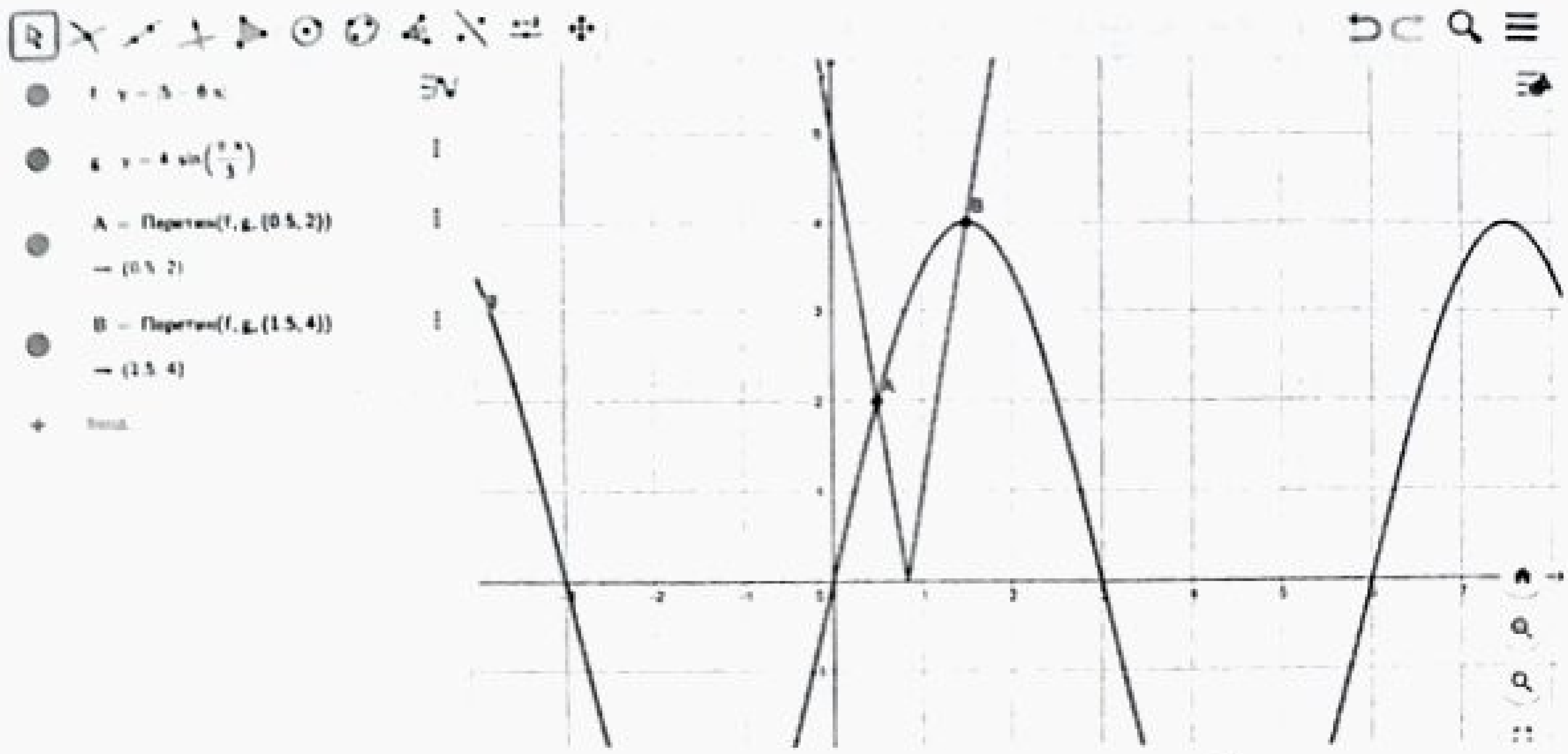


Рис. 1.1. Графік функції $|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3}$

З рис.1.1. видно, що графіки перетинаються у двох точках із абсцисами $x = \frac{1}{2}$ і $x = \frac{3}{2}$, але значення $x = \frac{3}{2}$ не задовольняє області допустимих значень, отже, рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$.

Зупинимося на деяких штучних прийомах розв'язання тригонометричних рівнянь. Одним з таких прийомів є прийом розв'язання тригонометричних рівнянь, що базується на використанні зв'язку між виразами $sinx + cosx$ або $sinx - cosx$ і $sinx \cdot cosx$

Якщо $sinx + cosx = t$, то $sinx \cdot cosx = \frac{t^2-1}{2}$

Аналогічно, якщо $sinx - cosx = t$, то $sinx \cdot cosx = \frac{t^2+1}{2}$

Тому при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, в яких ліва і права частини містять вирази $sinx \pm cosx$ і $sinx \cdot cosx$, доцільно застосувати підстановку $sinx \cdot cosx = t$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $sin^3x - cos^3x = 1$.

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, отримаємо

$(sinx - cosx) \cdot (sin^2x + sinxcosx + cos^2x) = 1$ або $(sinx - cosx) \cdot (1 + \frac{1}{2}sin2x) = 1$

Застосовуючи підстановку $sinx - cosx = t$, отримаємо $t(1 + \frac{1}{2}(1 - t^2))=0$ або $t^3 - 3t + 2 = 0$.

Отримане кубічне рівняння розв'яжемо, розклавши на множники за допомогою групування:

$t^3 - 2t - t + 2 = 0$ або $(t^3 - t) - (2t - 2) = 0$. Тоді $t(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0$ або $(t - 1)(t^2 + t - 2) = 0$, звідки $t = -2$ та $t = 1$.

Повертаючись до змінної t, приходимо до сукупності рівнянь

$sinx - cosx = 1$ або $sinx - cosx = -2$.

Оскільки $|sinx - cosx| \leq \sqrt{2}$, то друге з рівнянь розв'язків не має, а розв'язками першого рівняння є:

$$x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z \ i \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$$

В основі розв'язання деяких тригонометричних рівнянь лежить так званий прийом згортання (багаторазове застосування формули синуса подвійного аргументу). Розглянемо деякі приклади.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$cosx \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = \frac{1}{8} cos15x$$

Ліва частина рівняння є діленням косинусів, аргументи яких підпорядковуються наступній залежності: кожен наступний аргумент вдвічі більший за попередній. Його можна спростити, використовуючи прийом згортання.

У цьому прикладі він полягає у множенні на $8sinx$ і скористаємося кілька разів формулою синуса подвійного аргументу. Тоді ділення у лівій частині «згорнеться».

$8sinx \cdot cosx \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = sinx \cdot cos15x$

$4sin2x \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = \frac{1}{2}(sin16x - sin14x)$

$4sin4x \cdot cos4x \cdot cos8x = sin16x - sin14x$

$2sin8x \cdot cos8x = sin16x - sin14x$

$sin16x = sin16x - sin14x$

$sin14x = 0$

$14x = \pi n, n \epsilon Z$

$x = \frac{\pi n}{14}, n \epsilon Z$

30

Отже, під час навчання учнів розв'язуванню тригонометричних задач вчителю необхідно формувати різні прийоми.

1.3. Психолого – педагогічні основи вивчення тригонометричних задач

Математика, поряд з іншими шкільними предметами, розв'язує задачу усестороннього, гармонійного розвитку і формування особистості. Отримані при вивченні математики знання, вміння і навики, отриманий розумовий розвиток повинні допомогти випускникам школи в майбутньому.

Потрібно сказати, що процес розв'язування задач повинен складатись з чотирьох етапів:

1) аналіз умови задачі;
2) пошук плану розв'язку;
3) виконання даного плану, перевірка та доведення того, що отримані розв'язки задовольняють умову задачі;
4) аналіз проведеного розв'язку.

Не менш важливою та актуальною є проблема забезпечення в процесі навчання міцних математичних знань, вмінь та навиків. На запам'ятовування впливають: зміст, форма, трудність та об'єм учбового матеріалу, значущість, осмисленість, а також структура учбового матеріалу, яка проявляється в логічних, семантичних та синтаксичних зв'язках.

Повторення та тренування є основним засобом заучування, що підтверджується дослідами психологів, фізіологів. Повторення необхідне не лише для кращого запам'ятовування, але і для того, щоб виявити нові зв'язки між елементами учбового матеріалу і привести в систему раніше вивченого.

Для забезпечення міцності засвоєних математичних знань важливе значення мають спеціальні прийоми запам'ятовування. Психологи та педагоги встановили наступні основні прийоми запам'ятовування:

1) смислове групування матеріалу (учень повинен осмислити матеріал, виділити основне і, якщо він працює з книгою, розбити текст на окремі смислові частини);

2) виділення речень, які мають основний смисл;

3) складання плану – словесного чи у вигляді графічної схеми, таблиці;

4) виділення схеми, яка відображає структуру матеріалу.

Наприклад, при вивченні ведучих понять важливо виокремити суттєві та несуттєві ознаки, означення, властивості поняття, приклади його застосування. При доведенні теорем необхідно чітко виділити логічну схему доведення.

Багато залежить від організації системи повторення в кінці теми, четверті, учбового року і при підготовці до екзамену. Таке повторення повинно бути напрямлене на глибину та систематизацію учбового матеріалу, усвідомлення ведучих понять, ідей та методів, структури предмету в цілому. При повторенні є можливість розкрити перед учнями ряд філософських проблем математики, походження математичних понять, зв'язок математики з іншими предметами.[24]

Сучасний етап розвитку економіки, техніки, промисловості повинен знайти відображення в характері задач і прикладів шкільного курсу математики, в методах їх розв'язування.

Однією з характерних рис сучасного технічного прогресу широке використання в багатьох областях діяльності електронно – обчислюваної техніки, автоматичних систем управління. Саме тому принципово важливе значення набуває алгоритмічна культура випускників середньої школи. Їх потрібно познайомити з найпростішими електронно – обчислюваними пристроями. В учнів повинно бути сформоване поняття про алгоритм та його види, навики описання алгоритмів і створення найпростіших програм.

Мета базової загальної середньої освіти: розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку й самонавчання в сучасних умовах, здатності ідентифікувати себе як важливу і відповідальну складову українського суспільства, яка готова змінювати і відстоювати національні цінності українського народу.

Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях, під час розв'язання практичних завдань і здатності визначати й обґрунтовувати власну життєву позицію, застосовувати в подальшій фаховій діяльності набуті предметні знання, виявляти міжпредметні зв'язки під час вивчення математики, розвивати інтегративне бачення спостережуваних явищ.[44]

Науковці наголошують [60, 61, 70], що одним із головних завдань курсу математики на базовому рівні є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

• уміє будувати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач;

• уміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати й застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі;

• володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;

• уміє проектувати і здійснювати алгоритмічну й евристичну діяльність на математичному матеріалі;

• уміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші);

• уміє читати й будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;

• уміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;

• вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);

- уміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій.

- Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.[48]

Мета навчання математики на профільному рівні полягає в забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін і продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких ***завдань:***

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої мотивації до навчання;

- оволодіння учнями мовою математики системою математичних знань, навичок і вмінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;

- інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток в учнів логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;

- екологічне, естетичне, громадянське виховання та формування позитивних рис особистості; формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей учня.[51]

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка надає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах. Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- розпізнає проблеми довкілля, які можна розв'язати математичними методами, формулює їх математичною мовою, досліджує та розв'язує ці проблеми, використовуючи математичні знання та методи, інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей дослідження, застосовує математичні моделі при вивченні профільних предметів (інформатики, фізики, хімії, біології, технологій);
- логічно мислить (аналізує, порівнює, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади); володіє алгоритмами та евристиками;
- користується джерелами математичної інформації, може самостійно її відшукати, проаналізувати та передати інформацію, подану в різних формах (графічній, табличній, знаково-символьній);
- виконує математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення;
- виконує тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів;
- аналізує графіки функціональних залежностей, досліджує їхні властивості; використовує властивості елементарних функцій при аналізі та описуванні реальних явищ, процесів, залежностей;
- володіє методами математичного аналізу в обсязі, що дозволяє досліджувати властивості елементарних функцій, будувати їх графіки і розв'язувати нескладні прикладні задачі;
- обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання;
- зображує геометричні фігури, встановлює і обґрунтовує їхні властивості; застосовує властивості фігур при розв'язуванні задач; вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об'єми).[48]

Розв'язок поставленої задачі можливий при умові комплексного підходу до навчання, важливими параметрами якого являється єдність всіх функцій навчання (навчальної, розвиваючої, виховної) і всіх компонентів навчального процесу (цілей, змісту, методів та організації навчання), використання новіших досягнень педагогіки, психології і методики навчання.

Висновки до першого розділу

Оволодіння основами математичної культури допомагає кожному учневі розвивати навчально-пізнавальну мотивацію, мислення, творчі здібності; успішно оволодівати дійовими математичними знаннями та вміннями. Це сприяє застосуванню знань при вивченні інших предметів, в житті, продовженні освіти, можливості отримання або зміни професії, враховує вікові та індивідуальні особливості, напрями розвитку суспільства, його культури.

Проведений логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми засвідчує, що учні опановують наступні предметні математичні компетентності: розв'язує найпростіші тригонометричні рівняння – на базовому рівні; формулює означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\ x = a$, $\mathrm{ctg}\ x = a$; розв'язує тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами – на профільному рівні. Також тема передбачає формування ключових компетентностей. Методика формування предметних і ключових компетентностей передбачає обґрунтування добору форм і методів навчання теми, які будутьпредставлені у наступному розділі.

Шкільний курс алгебри та геометрії містить широкі можливості розвитку таких важливих компонентів математичної культури учнів як алгоритмічну, логічну, графічну, культуру перетворень, культуру побудови креслення, обчислювальну культуру, математичну мову.

Тригонометричні функції часто виступають математичними моделями реальних процесів, тому вивчення теми «Тригонометричні функції» має носити прикладний характер.

Вивчення математичної та навчально-методичної літератури дозволило нам систематизувати відомості про різні види тригонометричних рівнянь та нерівностей і способів їх розв'язання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ПІДХОДУ

2.1. Тригонометричні тотожності та їх застосування.

Формули додавання

Косинус суми і різниці

Нехай $\alpha > \beta$ і $\alpha - \beta < \pi$. При повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола перейшов у радіус OP_α, P_α $(x;\ y)$ (рис.1.4.1.). Оскільки $x = \cos\alpha;\ y = \sin\alpha$, то маємо вектор $\overline{OP_\alpha}$ $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Аналогічно $\overline{OP_\beta}$ $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

Тоді: $\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

З іншого боку: $\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = |\overline{OP_\alpha}| \cdot |\overline{OP_\beta}| \cdot \cos\angle P_\alpha O P_\beta$.

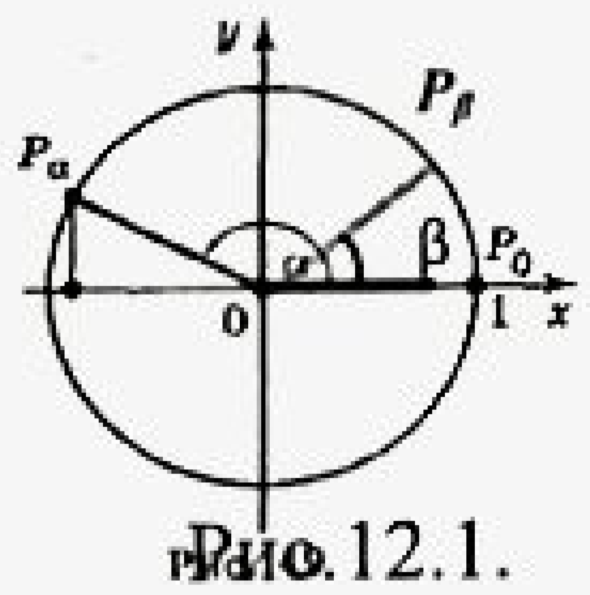


Рис.12.1.

Але $|\overline{OP_\alpha}| = 1$; $|\overline{OP_\beta}| = 1$; $\angle P_\alpha OP_\beta = \alpha - \beta$. Тому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Аналогічно розглядають і випадки, коли $\alpha < \beta$ і $\alpha - \beta > \pi$.

З формули $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ маємо: $\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$ [20, 225]

Приклад 2.1. Знайдіть значення виразу $\cos37°\cos23° - \sin37°\sin23°$.

Розв'язання. $\cos 37°\cos 23° - \sin37°\sin23° = \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Синус суми і різниці

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Аналогічно $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta)) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) - \cos\alpha\cdot\sin(-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + + \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + + \cos\alpha\sin\beta$$ [20, 226].

Приклад 2.2. Обчисліть $\sin 15°$.

Розв'язання. $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Тангенс різниці і суми

Якщо виразити $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ через $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ за умови, що кожен із цих виразів має зміст, тобто за умови, що $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, то будемо мати:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на $\cos\alpha\cdot\cos\beta \neq 0$.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\alpha-(-\beta))=\frac{tg\,\alpha-tg\,(-\beta)}{1+tg\,\alpha\,tg\,(-\beta)}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}.$$

$$tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$ [20, 227].

Приклад 2.3. Обчислити $\frac{tg\,42°+tg\,18°}{1-tg\,42°\,tg\,18°}$

Розв'язання. $\frac{tg\,42°+tg\,18°}{1-tg\,42°\,tg\,18°}=\operatorname{tg}(42°+18°)=\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}.$

Відповідь. $\sqrt{3}$

Формули подвійного кута

Синус подвійного кута

З формули $sin\ (\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + + cos\alpha \cdot sin\beta$, якщо α = β, то

$$sin\ (\alpha + \alpha) = sin\ \alpha \cdot\ cos\ \alpha + + cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha, \Rightarrow$$

$$sin\ 2\alpha = 2\ sin\alpha \cdot cos\ \alpha$$ [20, 234].

Косинус подвійного кута

Аналогічно $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot\ sin\beta$, якщо α = β, то

$$cos(\alpha + \alpha) = cos\alpha \cdot cos\alpha - sin\alpha \cdot\ sin\alpha, \Rightarrow$$

$cos\ 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha;\ cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha;\ cos\ 2\alpha = 2\ cos^2\alpha - 1$ [20, 235].

Тангенс подвійного кута

З формули $tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$, ,якщо α = β, то $tg\ (\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha tg\alpha} \Rightarrow$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$ [20, 235].

Приклад 2.3. Обчислити 1) $\cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8}$; 2) $\sin 45° \cdot \cos 45°$.

Розв'язання. 1) $\cos^2\frac{3\pi}{8} - \sin^2\frac{3\pi}{8} = \cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin 45° \cos 45° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 45° \cos 45° = \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 45°) = \frac{1}{2}\sin 90° = \frac{1}{2}$

Відповідь. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

Формули пониження степеня

Якщо з формули $cos\ 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha$ виразимо $sin^2\alpha$, а з формули $cos\ 2\alpha = 2\ cos^2\alpha - 1$ виразимо $cos^2\alpha$, то отримаємо:

$$sin^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{2};\ cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}.$$

Оскільки $tg^2\alpha = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{\frac{1-cos2\alpha}{2}}{\frac{1+cos2\alpha}{2}} = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}$, при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + +\pi k, k \in Z$

маємо:

$$tg^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}$$ [20, 236].

Приклад 2.4. Виконайте пониження степеня у виразі: 1) $\cos^2 3\alpha$; 2) $\sin^2(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$; 3) $tg^2(\alpha + \frac{3\pi}{4})$.

Розв'язання. 1) $\cos^2 3\alpha = \frac{1+\cos(2\cdot 3\alpha)}{2} = \frac{1+\cos 6\alpha}{2}$;

2) $\sin^2(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = \frac{1-\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)}{2} = \frac{1+\sin 2\alpha}{2}$;

3) $tg^2(\alpha + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1-\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})}{1+\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})} = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

Відповідь. 1) $\frac{1+\cos 6\alpha}{2}$; 2) $\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$; 3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

Формули перетворення суми і різниці однойменнихтригонометричних функцій на добуток

Додамо формули додавання: $\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2\sin x \cos y$.

Нехай $x + y = \alpha$ а $x - y = \beta$. Тоді $2x = \alpha + \beta$; $2y = \alpha - \beta \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

Зробимо заміну у виразі $\sin(x+y) + \sin(x-y = 2\sin x \cdot \cos y$, маємо

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Якщо замінити β на $-\beta$, отримаємо:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Аналогічно можна отримати формули суми та різниці косинусів:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Для суми тангенсів маємо:

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ [20, 24].

Приклад 2.5. Подайте вираз у вигляді добутку: 1) $\cos 36° - \cos 18°$; 2) $\cos 32° + \sin 40°$

Розв'язання. 1) $\cos 36° - \cos 18° = -2\sin\frac{36°+18°}{2}\sin\frac{36°-18°}{2} = -2\sin 27° \cdot \sin 9°$;

2) $\cos 32° + \sin 40° = \sin 58° + \sin 40° = 2\sin 49° \sin 9°$.

Відповідь. 1) $-2\sin 27° \cdot \sin 9°$; 2) $2\sin 49° \sin 9°$.

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Додамо формули косинус різниці та косинус суми кутів:

$$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta \Rightarrow$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Віднімемо від косинуса різниці кутів косинус суми кутів:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = = 2\sin\alpha\sin\beta \Rightarrow$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

Додамо формули додавання: $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) =$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$ [20, 249].

Приклад 2.6. Спростити вираз: $2\cos 7x\cdot\cos 5x - \cos 2x$.

Розв'язання. $2\cos 7x\cdot\cos 5x - \cos 2x = 2\,\frac{1}{2}(\cos(7x-5x) + \cos(7x+5x)) - \cos 2x =$

$= \cos 2x + \cos 12x - \cos 2x = \cos 12x$.

Відповідь. $\cos 12x$.

Формули половинного кута

Якщо у формулах

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \; tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

замість кута α підставити кут $\frac{\alpha}{2}$ отримаємо формули половинного кута:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}; \; tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \Rightarrow$$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ (знак перед радикалом залежить від того, в якій координатній чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$).

Для $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ існує ще дві формули, адже

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отже, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ $(\alpha \neq \pi k,\ k \in Z)$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z)$.

А, $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq \pi k,\ k \in Z)$; $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 2\pi k,\ k \in Z)$ [20, 237].

Приклад 2.7. Обчислити 1) cos 15°; 2) sin 15°; 3) tg 15°.

Розв'язання. 1) $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$;

2) $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$.

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2-\sqrt{3}$.

Приклад 2.8. Доведіть тотожність: $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3$.

Розв'язання. $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos^3\alpha-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}$

$= \frac{3\cos\alpha-3\cos^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha-3\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\cos\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha\,(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha} =$

$= 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = = 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3.$

Тотожність доведено.

2.1.1. Метод допоміжного кута

Крім основних формул тригонометрії, при розв'язуванні задач часто використовують метод введення допоміжного кута для виразів виду

$c = a\ sin\alpha + b\ cos\alpha$, де $a \neq 0,\ b \neq 0$. Цей вираз можна перетворити у добуток у такий спосіб:

$c = a\cdot sin\alpha + b\cdot cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,(\frac{a\ sin\alpha + bcos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}) =$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}(cos\varphi sin\alpha + sin\varphi cos\alpha)$

$== \sqrt{a^2+b^2}sin\ (\alpha+\varphi)$, *де* $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (такий кут φ існує, оскільки $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$).

Таким чином, $a\cdot sin\alpha + b\cdot cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}sin\ (\alpha+\varphi)$, де аргумет φ визначається із співвідношень: $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(tg\ \varphi = \frac{b}{a})$ [20,227].

Приклад 2.9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких можлива рівність: $12\sin 4x - 5\cos 4x = a$.

Розв'язання. $12\sin 4x - 5\cos 4x = a$;

$\sqrt{12^2+5^2} = 13$;

$12\sin 4x - 5\cos 4x = 13(\frac{12}{13}\sin 4x - \frac{5}{13}\cos 4x) =$

$= 13(\cos\alpha\sin 4x - \cos 4x\sin\alpha) = 13\sin(4x-\alpha)$, $13\sin(4x-\alpha) = a$

$\sin(4x-\alpha) = \frac{a}{13}$, $-1 < \sin(4x-\alpha) < 1 \Rightarrow\ -1 < \frac{a}{13} \leq 1, -13\ \leq a \leq 13.$

Відповідь. $-13 \leq a \leq 13$.

2.2. Тригонометричні рівняння

2.2.1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння *cosx = a* (рис. 1.5.5.)

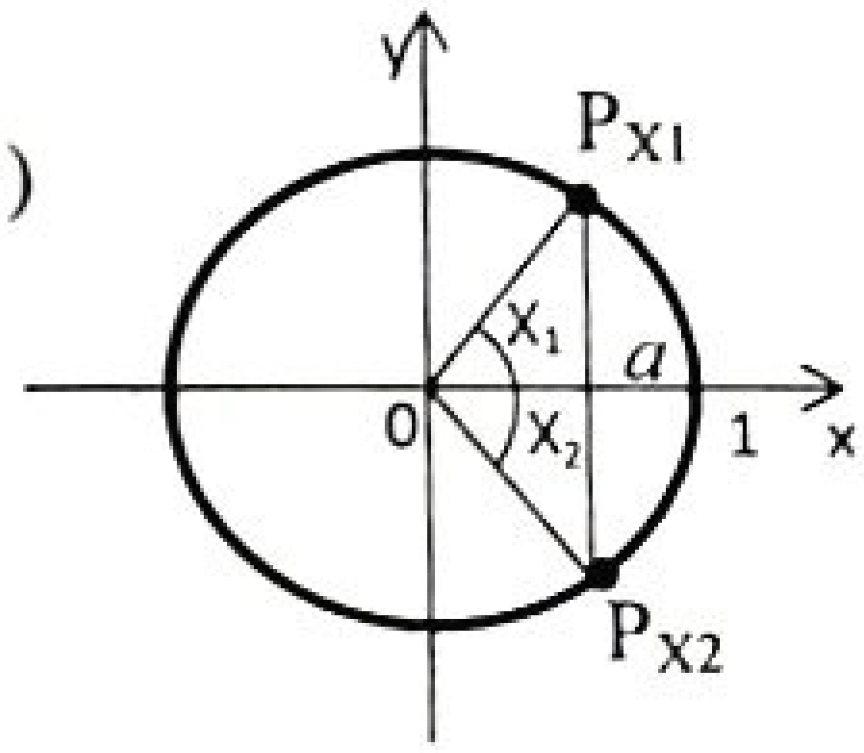


Рис. 1.5.5.

При $|a|>1$, $x \in \emptyset$,

$|a| \leq 1$, $x = \pm\ arccosa + 2\pi n,\ n \in Z$.

Окремі випадки розв'язування рівняння *cosx = a*.

$$cosx = 0;\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$cosx = 1;\ x = 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$cosx = -1;\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Приклад 1.5.5. Розв'яжіть рівняння: 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; 4) $\cos x = \sqrt{5}$;

Розв'язання. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$;

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

3) $\cos(\frac{\pi}{6} - 2x) = -1$;

$$\frac{\pi}{6} - 2x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$-2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{-5\pi}{12} \pm \pi n,\ n \in Z.$$

4) $\cos x = \sqrt{5}$, $x \in \emptyset$, бо $\sqrt{5} > 1$.

Відповідь. 1) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; 3) $x = \frac{-5\pi}{12} \pm \pi n,\ n \in Z$; 4) $x \in \emptyset$;

Рівняння *sinx* = *a* (рис. 1.5.6.)

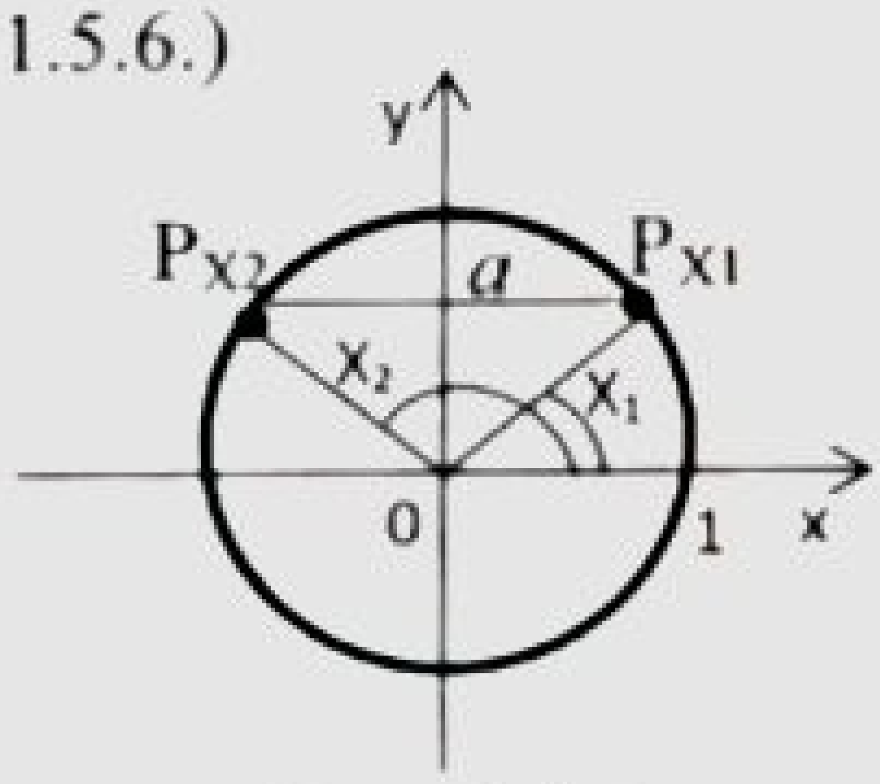


Рис. 1.5.6.

При $|a|>1$, $x \in \emptyset$

$|a| \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

Окремі випадки розв'язування рівняння *sinx* = *a*

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

Приклад 2.2 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -2$; 3) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $2\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$;

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

2) $\sin x = -2$, $x \in \emptyset$, бо $-2 < -1$.

3) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}(1 + (-1)^{n+1}) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{4\pi}{3}(1 + (-1)^{n+1}) + 4\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; 2) $x \in \emptyset$; 3) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 4) $x = \frac{4\pi}{3}(1 + (-1)^{n+1}) + 4\pi n,\ n \in Z$.

Рівняння *tgx = a, ctgx = a*

$tgx = a,\ x = arctg\ a + \pi n,\ n \in Z$;

$ctgx = a,\ x = arcctg\ a + \pi n,\ n \in Z$;

Окремі випадки розв'язування рівнянь *tgx = a, ctgx = a*

$tgx = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$;

$ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

Приклад 2.3. Розв'яжіть рівняння: 1) $tg\,3x = 1$; 2) $ctg^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. 1) $tg\,3x = 1$;

$$3x = arctg\ 1 + \pi n,\ n \in Z;$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$$

2) $ctg^2(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$;

$$ctg\,(2x - \frac{\pi}{4}) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = arcctg\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in Z; \\ 2x - \frac{\pi}{4} = arcctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \\ x = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. 1) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 2) $x_1 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x_2 = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

2.2.2. Розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших

1) Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь [9, 335]

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою буквою). Розв'язавши отримане рівняння, перейти до розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння: 1) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{5-4tgx} = tgx$.

Розв'язання. 1) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$:

Нехай $cosx = t$, $|t| \le 1$, тоді маємо рівняння:

$$4t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$(2t+1)^2 = 0;$$

$$2t + 1 = 0;$$

$$t = -\frac{1}{2};$$

$$\cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2) Нехай $tg\,x = t$, тоді маємо рівняння $\sqrt{5-4t} = t$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} 5 - 4t = t^2 \\ t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t^2 + 4t - 5 = 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$t_1 = 1$; $t_2 = -5$ (сторонній корінь)

$$tg\,x = 1;$$

$$x = arctg\,1 + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. 1) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

2) Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї

функції (з однаковим аргументом).

Цей спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь базується на тотожних перетвореннях тригонометричних виразів.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння: $\operatorname{tg}x + 2\operatorname{ctg}x = -3$.

Розв'язання. ОДЗ: $\cos x \neq 0$; $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x};$$

$$\operatorname{tg}x + \frac{2}{\operatorname{tg}x} = -3.$$

Нехай $tgx = t$, тоді маємо рівняння:

$$t + \frac{2}{t} = -3;$$

$$\frac{t^2+2+3t}{t} = 0;$$

$$t^2 + 3t + 2 = 0;$$

$$t_1 = -1;\ t_2 = -2;$$

1) $\text{tg}\, x = -1;$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

2) $\text{tg}\, x = -2;$

$$x = -\text{arctg}\, 2 + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = -\text{arctg}\, 2 + \pi k,\ k \in Z$.

3) Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного.

Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається однорідним. Розв'язують однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї зі змінних.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння: $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Розділимо на $\cos^2 x \neq 0$ обидві частини рівняння. Якщо $\cos^2 x = 0$, то рівняння буде мати вигляд $\sin^2 x = 0$, а одночасно $\cos^2 x = 0$ та $\sin^2 x = 0$ не можуть. Будемо мати:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg}\, x;\ \text{tg}^2 x - \text{tg}\, x - 2 = 0;$$

Нехай $tgx = t$, тоді маємо рівняння:

$$t^2 - t - 2 = 0;$$

$$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

1) $\text{tg}\, x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\text{tg}\, x = 2;\ x = \text{arctg}\, 2 + \pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$.

4) Розв'язування тригонометричних рівнянь виду $f\ (x)\ =\ 0$ за допомогою розкладання на множники.

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, ліву частину якого можна розкласти на множники, тобто звести до вигляду $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots f_n(x)$. Тоді рівняння $f(x) = 0$ буде рівносильне сукупності рівнянь виду: $f_1(x) = 0;\ f_2(x) = 0;\ f_n(x) = 0$ за умови урахування його ОДЗ.

Приклад 2.7. Розв'язати рівняння: $\sin x + \sin 3x = 0$.

Розв'язання. $\sin x + \sin 3x = 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2};$

$$2\sin 2x\cos(-x) = 2\sin 2x\cos x = 0;$$

$$2\sin 2x\cos x = 0\ |:2$$

$$\sin 2x\cos x = 0$$

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{або} \qquad \cos x = 0$$

$$2x = \pi k,\ k \in Z; \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x_1 = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$$

і разом $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Відповідь. $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Приклад 2.8. Розв'язати рівняння: $3\sin x - 4\cos x = 3$.

Розв'язання. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$;

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 3\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right);$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

Отримали однорідне рівняння. Поділимо його на $\cos^2\frac{x}{2}$ $(\cos^2\frac{x}{2} \neq 0)$. Маємо:

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - 7\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 0;$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 7 = 0;$$

Нехай $tgx = t$, тоді маємо рівняння:

$$t^2 + 6t - 7 = 0$$

$$t_1 = -7;\ t_2 = 1.$$

1) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = -7$; або 2) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1$;

$x = -2\mathrm{arctg}\,7 + 2\pi n,\ n \in Z$; $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $x_1 = -2\mathrm{arctg}\,7 + 2\pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

5) Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою метода допоміжного кута.

Метод уведення допоміжного кута розглянуто в пункті 1.4., Покажемо його застосування до розв'язування рівнянь на прикладі.

Приклад 2.9. Розв'язати рівняння: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Розв'язання. $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$;

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \,|: 2;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6};\ \sin\varphi = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

2.3. Основні тригонометричні нерівності

Означення. [20. 31] Нерівність, що містить змінну під знаком тригонометричних функцій, називають тригонометричною нерівністю.

Тригонометричні нерівності виду $sinx > a$, $cosx > a$, $tgx > a$, $ctgx > a$ та ті, які отримаємо, якщо в них знак > замінимо на один із знаків <, ≤, ≥ називають найпростішими.

Приклад 2.3.1. Розв'язати нерівність $sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

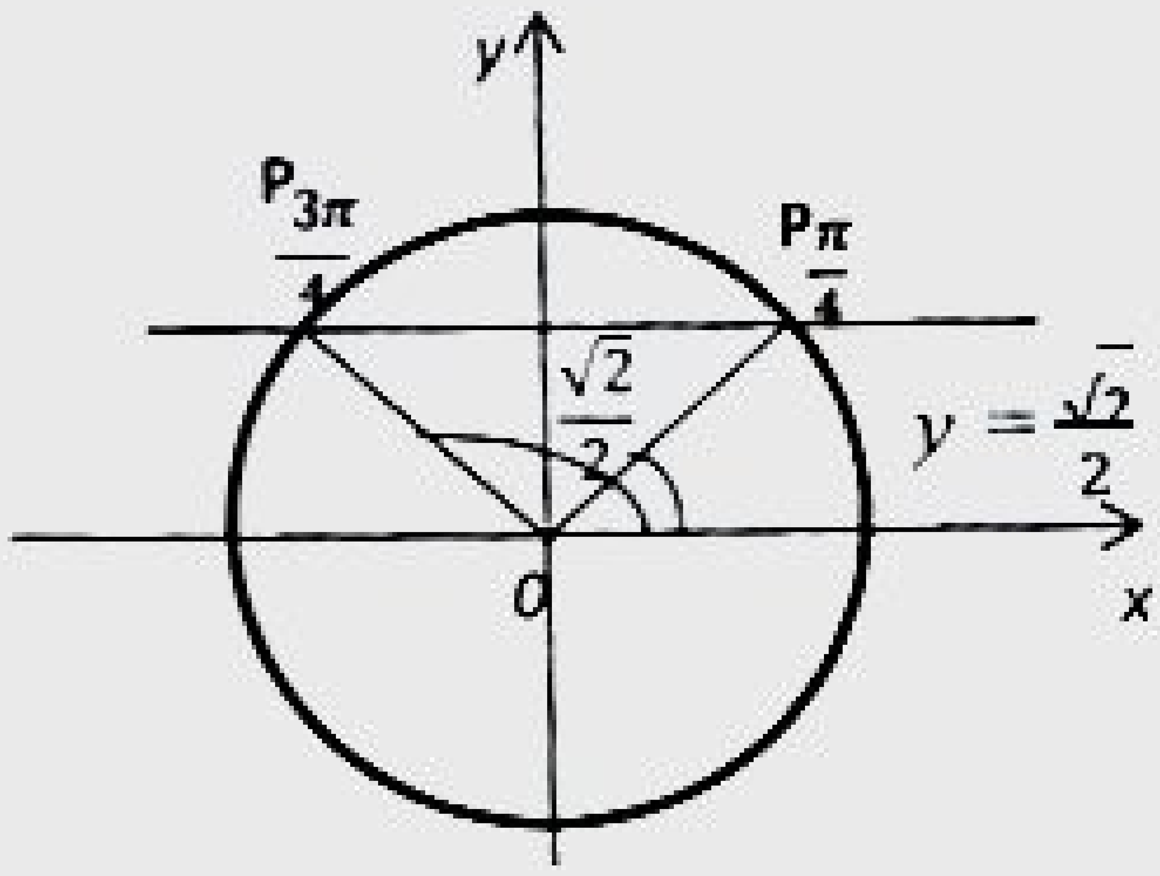


Рис.1.6.1.

Розв'язання. $sinx$ - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту x. На одиничному колі позначимо всі точки, ордината яких більші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$, вони лежать вище прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис 1.6.1.). Множина таких точок утворює дугу l. Якщо рухатися проти годинникової стрілки, тобто в додатньому напрямі, то перша точка дуги l відповідає куту $x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, кінцева $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ Період функції синуса дорівнює 2π, тому множиною розв'язків нерівності є : $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Приклад 2.3.2. Розв'язати нерівність: $cos(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$

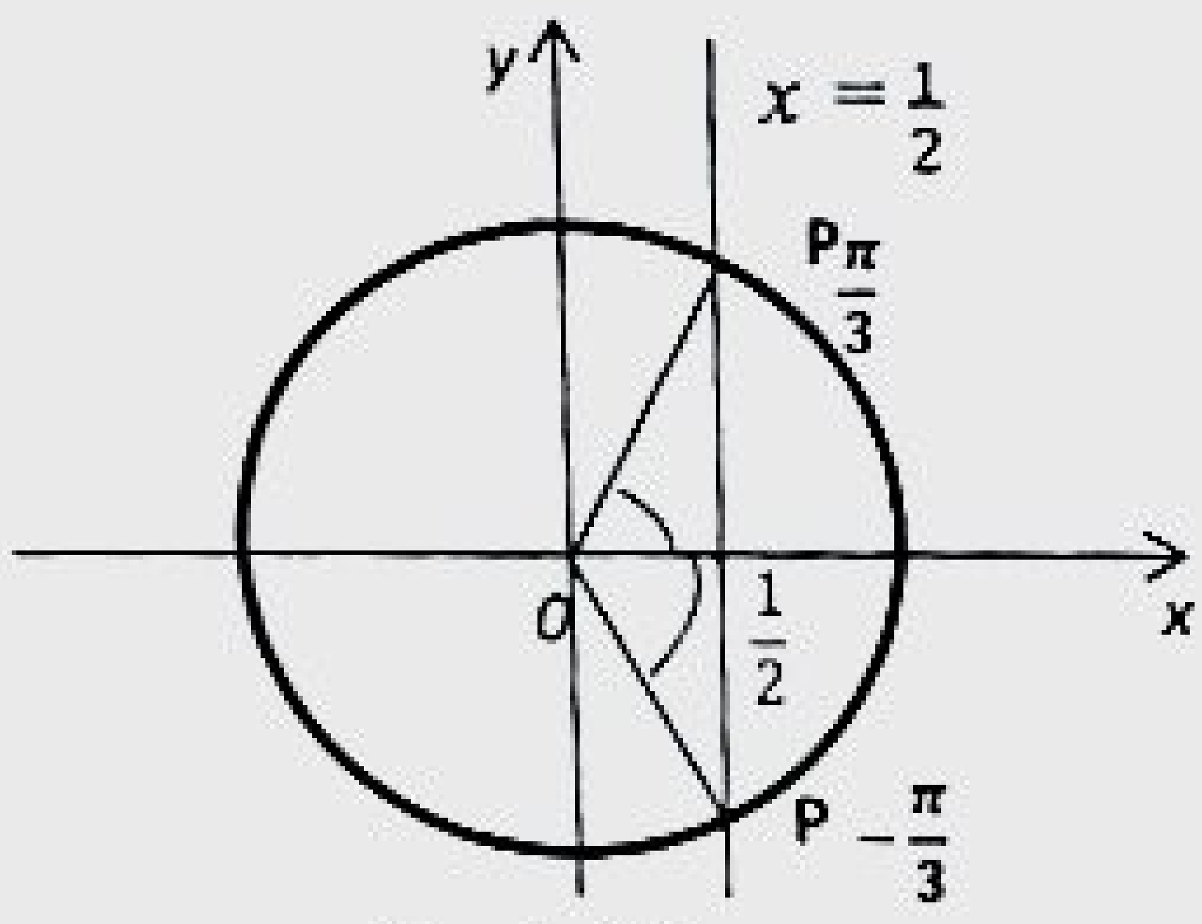


Рис.1.6.2.

Розв'язання. Нехай $x + \frac{\pi}{3} = t$, тоді $cost > \frac{1}{2}$

На одиничному колі (рис.1.6.2.) позначимо всі точки, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$. Всі вони належать дузі l, де перша точка відповідає куту $t_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$, остання куту $t_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\cos t > \frac{1}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Повернемося до заміни:

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in Z$.

Для розв'язання нерівностей виду $tgx > a$, $ctgx > a$ використовують лінії тангенсів та котангенсів.

Лінії тангенсів та котангенсів

Означення. [9, 24] Тангенс кута (числа) α – це ордината відповідальної точки на лінії тангенсів.

Через точку P_0 одиничного кола проведемо пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис.1.6.3.). Ця пряма називається *лінією тангенсів.*

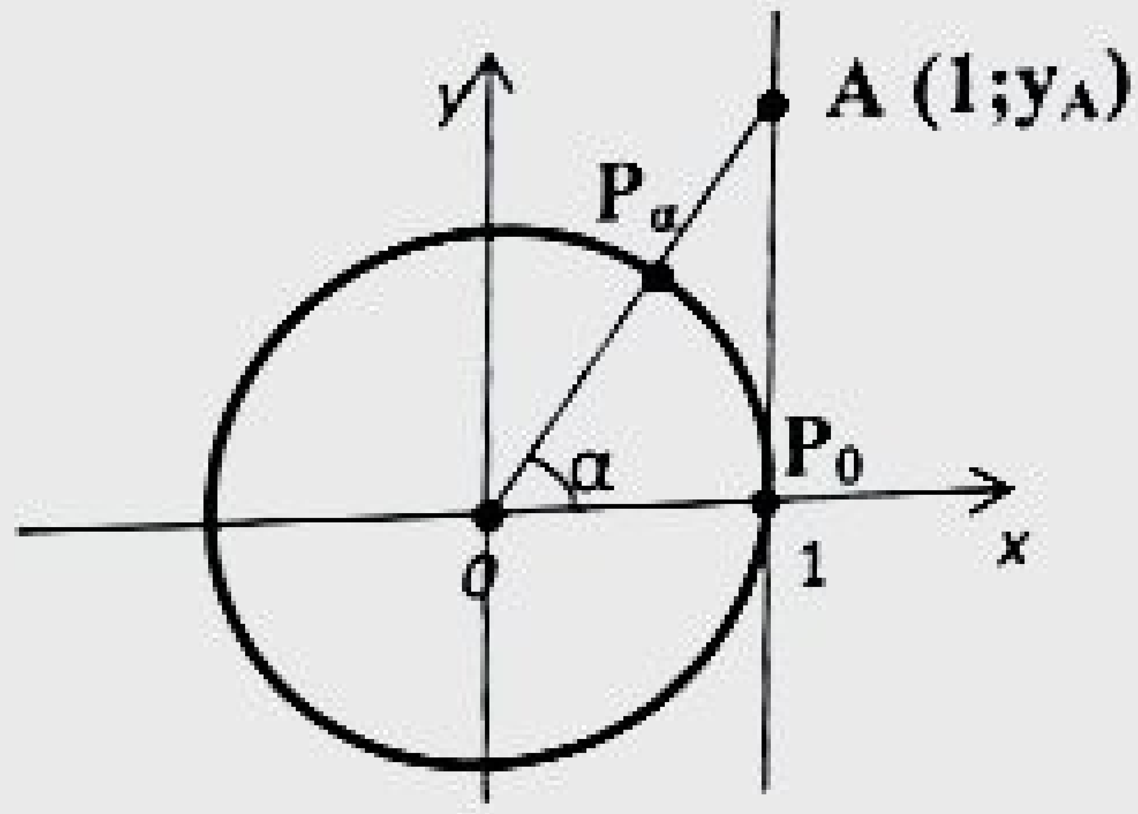


Рис.1.6.3.

Нехай α – довільне число (кут), для якого $\cos\alpha \neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів в точці A.

Рівнянням прямої OP_α є рівняня $y = kx$, тому що пряма OP_α проходить через початок координат. Оскільки дана пряма проходить через точку $P_\alpha (\cos\alpha; \sin\alpha)$, то координати точки P_α задовольняють рівняння прямої $y = kx$, тобто $\sin\alpha = k\cos\alpha$. Тому $k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$. Отже, пряма OP_α має рівняння $y = (tg\alpha)x$.

Пряма AP_0 має рівняння $x = 1$. У рівняння прямої OP_α, $y = (tg\alpha)x$, підставимо $x = 1$, маємо $y_A = tg\alpha$.

Означення. [9, 24] Котангенс кута (числа) α – це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

Поняття про лінію котангенсів вводиться аналогічно до поняття про лінію тангенсів. Пряма CB проходить через точку $C(0; 1)$ одиничного кола паралельно осі Ox (рис.1.6.4.).

Якщо α – довільне число (чи кут), для якого $\sin\alpha \neq 0$, то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці B (x_B ;1).

Аналогічно попередньому обґрунтуванню $x_B = ctg\alpha$.

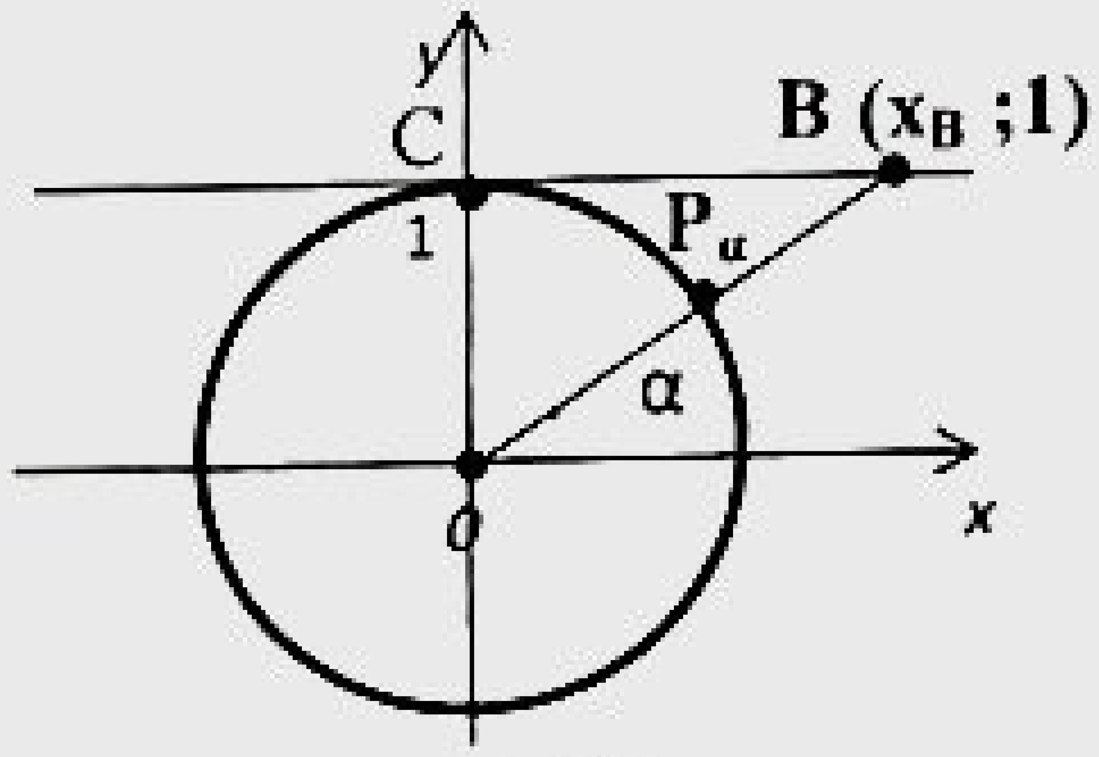


Рис.1.6.4.

Приклад 2.3.3. Розв'язати нерівність $tgx \leq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Проведемо лінію тангенсів. Тоді tgx – це ордината точки на лінії тангенсів, що відповідає куту x. На лінії тангенсів позначимо точку, ордината якої дорівнює $\sqrt{3}$ (рис.1.6.5.) . Ця точка відповідає куту $x = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, точки лінії тангенсів у яких ординати менші за $\sqrt{3}$, відповідають кутам від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{3}$.

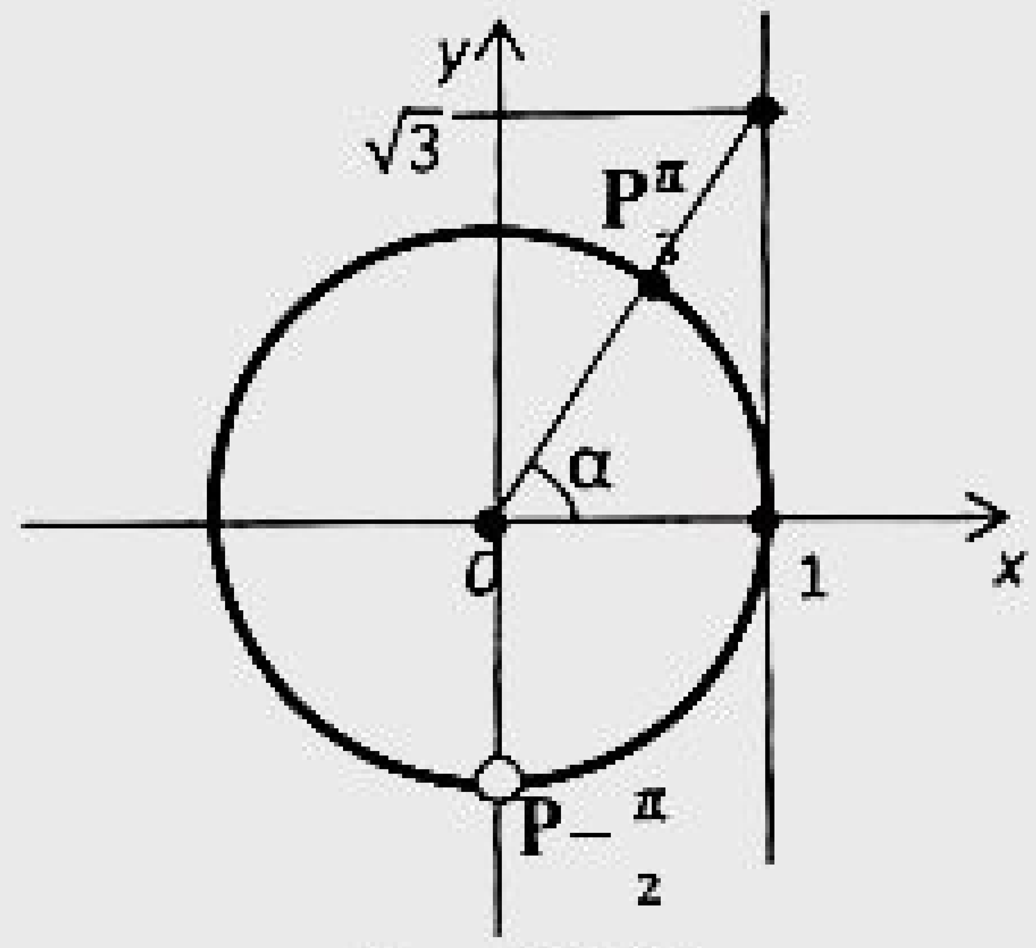


Рис.1.6.5.

На проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ маємо: $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{3}$. Враховуючи період функції тангенс, який дорівнює π, отримаємо: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Приклад 2.3.4. Розв'язати нерівність $ctgx > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Використовуючи лінію котангенсів (рис.1.6.6.), маємо розв'язки нерівності на проміжку (0; π): $0 < x < \frac{2\pi}{3}$.

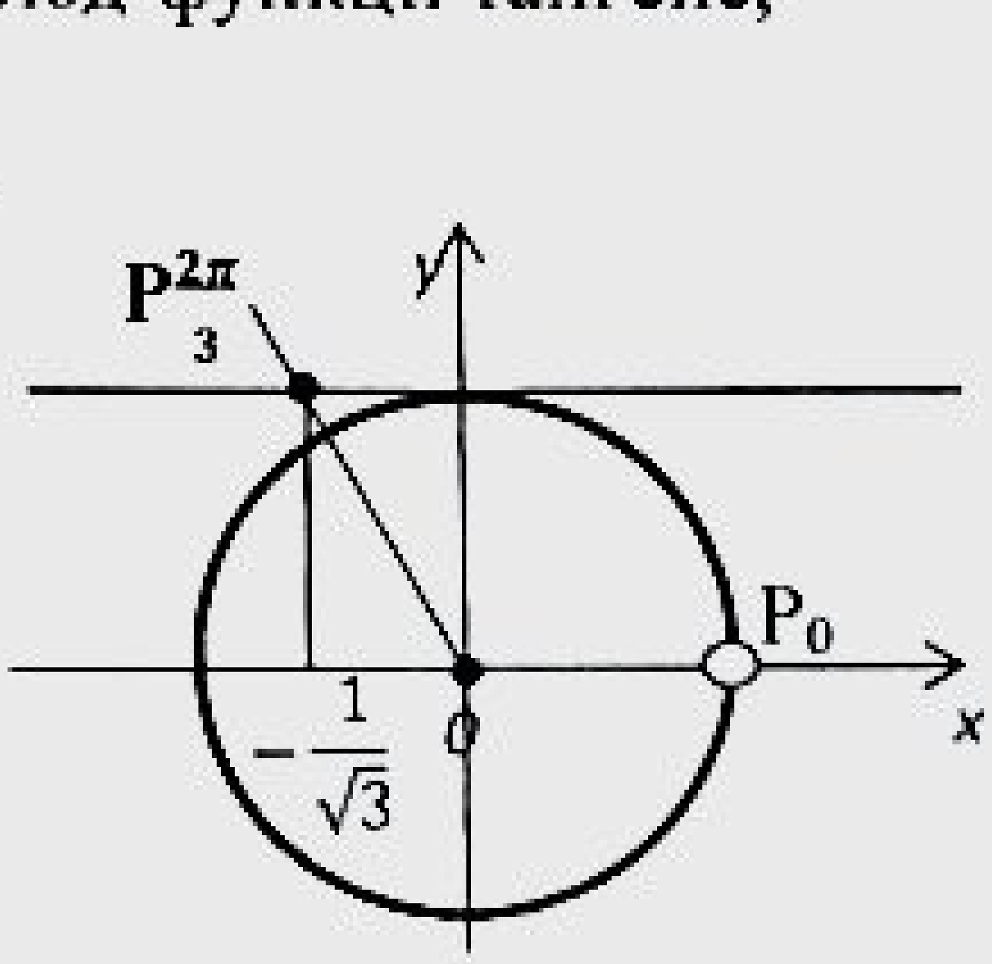


Рис.1.6.6.

Враховуючи період функції котангенс, маємо:

$\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. $\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Висновки до другого розділу

Шкільний курс алгебри та геометрії містить широкі можливості розвитку таких важливих компонентів математичної культури учнів як алгоритмічну, логічну, графічну, культуру перетворень, культуру побудови креслення, обчислювальну культуру, математичну мову.

Після вивчення найпростіших тригонометричних рівнянь, переходимо до вивчення методів розв'язування складніших тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших.

Потрібно сказати, що в результаті розв'язання одного і того самого тригонометричного рівняння різними способами можна дістати різні загальні формули розв'язків рівняння. Їх еквівалентність можна довести, перетворивши формули та об'єднавши кілька формул в одну.

Тригонометричні функції часто виступають математичними моделями реальних процесів, тому вивчення теми «Тригонометричні функції» має носити прикладний характер. Вважається, що тригонометрія – це не лише один із найцікавіших розділів математики, а й дуже важкий. При спрощенні тригонометричних виразів необхідно не тільки добре знати тригонометричні формули, але й володіти навичками перетворення виразів алгебри: правилами розкриття дужок і укладення в дужки, формулами скороченого множення і т.п. Саме недостатнє знання формул алгебри часто призводить до нерозуміння подальшого матеріалу, що викликає труднощі у вивченні математики в цілому.

Отже, проблема засвоєння учнів тригонометричних функцій полягає над запам'ятовуванні різноманітних формул, а організації вчителем плану, яким необхідно рухатися їх розв'язання.

Вивчення математичної та навчально-методичної літератури дозволило нам систематизувати відомості про різні види тригонометричних рівнянь та нерівностей і методів їх розв'язання.

РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯТРИГОНОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ І СТАРШІЙ ШКОЛІ

3.1. Аналіз програм і підручників у контексті дослідження

Неперервність навчання реалізується в програмі, зокрема через принцип систематичності та послідовності навчання, з урахуванням вікових особливостей учнів.

За результатами аналізу навчальних програм з математики в основній школі (8-9 клас) рівня стандарту [11] та поглибленого рівня вивчення математики [12], складено таблицю 3.1., в якій порівнюються теми та кількість годин, які відводяться на вивчення тригонометричних функцій у кожному з класів.

Таблиця 3.1.

Аналіз програм з геометрії для 8-9 класу

Рівень стандарту	Поглиблений рівень вивчення математики
8 клас (Геометрія)	
2 год на тиждень (14 годин)	3 год на тиждень (21 година)
Тема 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Теорема Піфагора. Перпендикуляр і похила, їх властивості. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів. Розв'язування прямокутних трикутників	**Тема 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ** Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. Теорема, обернена до теореми Піфагора. Перпендикуляр і похила, їх властивості. Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Тотожності: $sin(90^0-\alpha) = cos\alpha$, $cos(90^0-\alpha) = sin\alpha$, $tg(90^0-\alpha) = ctg\alpha$, $ctg(90^0-\alpha) = tg\alpha$, $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Сспіввідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів. Розв'язування прямокутних трикутників.
9 клас (Геометрія)	
2 год на тиждень (3 + 10 годин)	3 год на тиждень (20 годин)
Тема 1. КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°. Тотожності: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. **Тема 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**	**Тема 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ** Синус, косинус, тангенс і котангенс як функції кута від 0° до 180°. Тотожності: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^0-\alpha) =-\cos\alpha$,

ТРИКУТНИКІВ Теореми косинусів і синусів. Формули для знаходження площі трикутника	$tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha$, $ctg(180^0-\alpha)=-ctg\alpha$. Теореми косинусів і синусів. Властивість сторін і діагоналей паралелограма. Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника. Застосування формули $a = 2R\sin\alpha$. Розв'язування трикутників. [*Тригонометрична форма теореми Чеви. Формула Ейлера для знаходження відстані між центрами вписаного і описаного кіл трикутника*]. Формули для знаходження площі трикутника. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними

Однією з основних задач вивчення курсу геометрії є розв'язування трикутників. У 8 класі учні вчаться розв`язувати прямокутні трикутники, для цього вводиться означення синуса, косинуса, тангенса і конгангенса, як відношення сторін прямокутного трикутника. Тема розв'язування трикутників продовжується у 9 класі, учні вчаться розв'язувати косокутні трикутники. Реалізація цього завдання відбувається за рахунок введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теореми синусів і теореми косинусів.

Проаналізувавши навчальні програми з математики, можна зробити висновок, що на поглибленому рівні вивчення математики кількість годин на тиждень не значно збільшена, а тема розкривається значно ширше за рахунок цікавих тем. Таких як: теорема Чеви, коло Ейлера, терема Менелая.

За результатами аналізу навчальних програм із математики в старшій школі (10 клас) рівня стандарту [13], поглибленого рівня вивчення математики (початок вивчення з 10 класу) [21] та поглибленого рівня вивчення математики (початок вивчення на з 8 класу) [14] складено таблицю 3.2, у якій порівнюються теми та кількість годин, які відводяться на вивчення тригонометричних функцій у кожному з класів.

Таблиця 3.2. Аналіз програм з алгебри та початків аналізу для 10класу

Рівень стандарту	Поглиблений рівень вивчення математики (початок вивчення на поглибленому рівні з 10 класу)	Поглиблений рівень вивчення математики (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу)
10 клас (Алгебра і початки аналізу)		
1.5 години на тиждень (18 годин)	6 годин на тиждень (34 + 32 = 66 годин)	6 годин на тиждень (42 + 42=84 годин)
Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них. Найпростіші тригонометричні	**Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ** Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму,	**Тема 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ** Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму,

рівняння.	формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. **Тема 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ** Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.	формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. **Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ** Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції. Побудова графічних образів.

Проаналізувавши програми на різних рівнях вивчення математики, ми бачимо значну різницю у кількості годин на вивчення тригонометричних елементів у курсі алгебри та початків аналізу. На рівні вивчення стандарту – це всього 18 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 10 класу – 66 годин, початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу – 84 години.

Це зумовлено тим, що програми вивчення математики на різних рівнях (рівень стандарту та поглиблений рівень) ставлять перед собою різні цілі та завдання.

Головним завданням вивчення математики на рівні стандарту є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. Запровадження компетентнісного підходу в освітній процес закладу загальної середньої освіти передбачає формування в учнів умінь застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях та під час розв'язування практичних завдань [13, 1].

Метою вивчення математики на профільному рівні є забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і у майбутній трудовій діяльності [14, 1].

Основним джерелом знань, крім знань вчителя, для учнів є підручник. Дослідивши підручники, за якими навчаються діти, можна краще зрозуміти методику вивчення тригонометрії в шкільному курсі математики. Крім того, зміст підручників повинен відповідати чинній програмі з математики.

Проведемо аналіз таких підручників:

1. Підручники з геометрії для 8 класу:

1.1. Істер О.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) [3].

1.2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) [25].

1.3. Апостолова Г.В. Геометрія дворівневий підручник для 8 класу 2008р.[1].

1.4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень)[4].

2. Підручники з геометрії для 9 класу:

2.1. Істер О.С., Геометрія , 2017р. (рівень стандарту)[18].

2.2. Апостолова Г.В. Геометрія : 9 : дворівневий підручник 2009р.[17].

2.3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія 2017р. (рівень стандарту)[22].

2.4.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, 2017р. (поглиблений рівень)[23].

3. Підручники з математики та алгебри і початків аналізу для 10 класу:

3.1. Істер О.С.,Математика, 2018р. (рівень стандарту) [5].

3.2. Нелін Є.П., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2010р. (академічний рівень) [9].

3.3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Математика підручник для 10 класу 2018р. (рівень стандарту) [10].

3.4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Д.А. Номіровський, Якір М.С., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2018р. (профільний рівень) [24].

Під час проведення аналізу підручників ми звернули увагу на такі особливості: назви розділів та параграфів, що стосуються досліджуваної теми; виділення математичних об'єктів; наявність прикладів та їх відповідність завданням для розв'язування; наявність питань після параграфа; розподіл завдань за рівнями складності; наявність завдань для підготовки до контрольної або самостійної роботи в кінці вивченої теми; нестандартні задачі в параграфі або пункті.

Результати аналізу підручників для 8 класу висвітлені в таблиці 3.2. (додаток А). Підручники з геометрії для 8 класу створено відповідно до Державного стандарту загальної середньої освіти і нової програми з математики (від 07.06.2017 № 804). У всіх розглянутих підручниках уводиться означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса та основні співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Автори всіх підручників в останньому параграфі вивченої теми пропонують учням чотири види задач на розв'язування прямокутних трикутників та дають зразки запису їх розв'язування у загальному вигляді.

У підручнику Істер О.С, Геометрія для 8 класу 2016 р. (рівень стандарту) вивчення 3 розділу «Розв'язування прямокутних трикутників» розпочинається з вивчення теореми Піфагора, яка доводиться за теоремою про середні пропорційні відрізки. Потім вивчаються перпендикуляр і похила та їх властивості.Вивчається означення синуса, косинуса і тангенса (означення котангенса автор не дає), як відношення сторін прямокутного трикутника. Твердження, що синус, косинус та тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежить лише від градусної міри кута доводиться за другою ознакою подібності трикутників. Автор не знайомить учнів з основними тригонометричними тотожностями та формулами зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$.

Апостолова Г.В. у дворівневому підручнику з геометрії для 8 класу 2008р., вивчення IV розділу "Тригонометричні функції гострого кута. Обчислення прямокутного трикутника" розпочинає з встановлення відповідностей між відношеннями сторін та мірою гострих кутів у прямокутному трикутнику. На прикладі чверті одиничного кола доводить твердження, що при зростанні кута від $0°$ до $90°$синус цього кута зростає від 0 до 1, а косинус спадає від 1 до 0.Тригонометричні функції доповняльних кутів вивчає в окремому параграфі. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута доводить за допомогою теореми Піфагора. У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, підручник для 8 класу 2016 р. (рівень стандарту) третій параграф "Розв'язування прямокутних трикутників" розпочинається з вивчення метричних співвідношень у прямокутному трикутнику. Потімавтори доводять теорему Піфагора за теоремою 15.1. [25]. У пункті 18 «Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника» автори дають означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса прямокутного трикутника, доводять, що синус, косинус, тангенса і котангенса гострого кута залежить тільки від величини цього кута. На відміну від інших авторів вводиться означення *тригонометричної функції*. В цьому ж пункті за теоремою Піфагора доводять основні тригонометричні тотожності. Вивчають формули зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень) теоретичний матеріал поданий аналогічно до підручника цих же авторів рівня стандарту. Єдина відмінність, що в кожному пункті додано для прикладу одна задача з розв'язанням та коментарями. Але значно збільшено кількість задач та вправ для розв'язування. Ключові задачі виділені спеціальними позначками.

Результати аналізу підручників для 9 класу висвітлені в таблиці 3.3. (додаток Б). Підручники створено відповідно до Державного стандарту загальної середньоїосвіти і нової програми з математики. Автори всіх розглянутих підручників розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів від *0°* до *180°* на прикладі півкола одиничного радіуса за допомогою координат. Усі автори підручників в останньому параграфі вивченої теми пропонують учням чотири види задач на розв'язування косокутних трикутників та дають зразки запису їх розв'язування в загальному вигляді.

У підручнику Істер О.С. Геометрія для 9 класу, 2017р. (рівень стандарту) синус, косинус, тангенс, тригонометричні тотожності та формули зведення для кутів *0°* до *180°* вивчаються у 1 розділі «Метод координат на площині». У 3 розділі «Розв'язування трикутників» доводиться теорема косинусів для трьох різних випадків ($\angle C$ – гострий, прямий, тупий). У цьому параграфі автор дає для прикладу 6 різних типів задач із розв'язуванням та коментарями. Перш ніж довести теорему синусів, автор доводить лему, що хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду [22, 21], далі пропонує учням 3 задачі з розв'язанням та коментарями до їх розв'язування.У §13 «Розв'язування трикутників» вдало підібрані задачі прикладногозмісту.

У підручнику Апостолової Г.В. Геометрія, дворівневий підручник для 9 класу, 2009 р. у І розділі «Координатна площина. Тригонометричні функції кутів від *0°* до *180°*. Розв'язування трикутників» спочатку вивчаються тригонометричні функції кутів від *0°* до *180°*, потім доводиться справедливість основних тригонометричних тотожностей для кутів від *0°* до *180°* та вивчаються формули зведення для кутів виду *(180° – α)*, на основі отриманих співвідношень формулюється твердження про значення кутового коефіцієнта прямої. Теорему синусів авторка доводить двома способами: 1) за теоремою про площу трикутника [17, 46]; 2) за допомогою кола описаного навколо трикутника, розглядаючи три випадки (∠ A – гострий, прямий, тупий). Теорему косинусів доводить за допомогою системи координат та основної тригонометричної тотожності.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 9 класу (рівень стандарту) у §1 «Розв'язування трикутників» дається означення синуса, косинуса і тангенса кутів від 0° до 180, вводяться формули зведення для кутів виду *(180° – α)* та повторюються основні тригонометричні тотожності. Потім доводиться теорема косинусів, розглядають 3 випадки (∠ A – гострий, прямий, тупий), автори пропонують чотири види задач із розв'язанням та коментарями. Теорема синусів доводиться на основі леми, що хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду [22, 21], також для прикладу наводять 4 види задач. Вдало підібрані задачі прикладного змісту.

У підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (поглиблений рівень) теоретичний матеріал поданий майже такий самий, як і в підручнику цих же авторів рівня стандарту. Відмінність утому, що автори у першому пункті до означень синуса, косинуса, тангенса додають означення котангенса. У кожному пункті додані для прикладу задачі з розв'язанням та коментарями. Порівняно з підручником рівня стандарт значно збільшено кількість задач та вправ для розв'язування. Ключові задачі виділені спеціальними позначеннями.

Результати аналізу підручників для 10 класу висвітлені в таблиці 3.4. (додаток В). Проаналізувавши підручники на предмет вивчення тригонометричних функцій числового аргументу, можна зробити висновок, що теоретичний матеріал відповідає чинним навчальним програмам із математики. Всі проаналізовані підручники повністю охоплюють теоретичний матеріал.

3.2. Особливості навчання тригонометричним функціям в основній школі і старшій школі

Як вже зазначалося раніше, поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута вперше вводиться у 8 класі, як відношення сторін прямокутного трикутника через означення. Попередньо учні повинні засвоїти назви сторін прямокутного трикутника (катети і гіпотенуза) і їх положення відносно прямого кута. Доцільно розглянути прямокутні трикутники, в яких вершина прямого кута має різне розташування, при цьому назвати сторони, прилеглі та протилежні, відносно кутів трикутника.

З метою попередження типових помилок учнів варто звернути увагу на позначення тригонометричних функцій, наголосити, що скорочення «sinα» означає «синус кута альфа», і ні в якому разі це не добуток, а записи sin, cos, tg не мають змісту, так як вони безпосередньо пов'язані з певним гострим кутом прямокутного трикутника.

Важливо, щоб, учні усвідомили, що синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника залежить лише від градусної міри кута. У підручнику з геометрії Істер О.С, для 8 класу 2016р. (рівень стандарту) дане твердження доводиться на основі подібності трикутників [3, 134]:

Нехай дано ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, у яких $\angle C=\angle C_1=90°, \angle A = \angle A_1$ (рис. 3.2.).

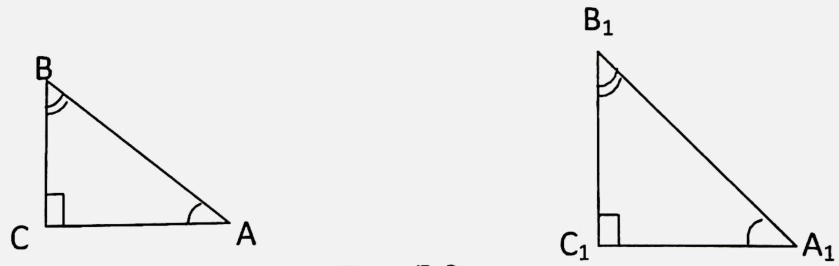


Рис. 3.2.

Тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (за гострим кутом). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ і $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, а $sin\ A = sin\ A_1$, $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, $cos\ A = cos\ A_1$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тому $tg\ A = tg\ A_1$.

Після ознайомлення учнів із вказаними співвідношеннями потрібно навчити їх за допомогою таблиць визначати синуси, косинуси, тангенси і котангенси гострих кутів і навпаки та навчити знаходити значення тригонометричних функцій гострих кутів за допомогою мікрокалькулятора.

Властивість – зростання синуса гострого кута при зростанні кута і спадання косинуса гострого кута за зростання кута. На цьому етапі вивчення тригонометрії може бути сформульовано у вигляді твердження: більшому гострому куту прямокутного трикутника відповідає більше значення синуса і менше значення косинуса.

Основні тригонометричні тотожності доводяться за допомогою теореми Піфагора. При цьому слід наголосити, що тригонометричні тотожності застосовують длязнаходження невідомих тригонометричних величин деякого гострого кута, знаючи одну з них. Учні повинні навчитися перетворювати тригонометричні вирази та доводити тригонометричні тотожності.

Формули зведення для кутів виду $(90° - \alpha)$ доводять відразу після вивчення основних тригонометричних тотожностей.

Методична схема розв'язування прямокутних трикутників

Розв'язування прямокутних трикутників зводиться до знаходження невідомих сторін та кутів за відомими сторонами та кутами.:

1) **За двома сторонами.** Якщо дані дві сторони прямокутного трикутника то третю сторону знаходять за "теоремою Піфагора". Визначення гострих кутів здійснюється за однією з формул вказаних в пункті 1.1., в залежності від того, які сторони дані в умові задачі.

Приклад 3.2.1. Дано катети а = 8,3 см, b = 12,4см. Знайти гіпотенузу та гострі кути *A* та *B*.

Розв'язання. 1)$\angle C = 90^0$; а = 8,3 см; в = 12,4 см $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8{,}3^2 + 12{,}4^2} \approx 14{,}9$ (см);

2) $tg\,A = \frac{a}{b} = \frac{8,3}{12,4} \approx 0,67$; $\angle A \approx 34^0$;

3) $\angle B = 90^0 - 34^0 = 56^0$

Відповідь. $c \approx 14,9$ (см); $A \approx 34^0$; $\angle B = 56^0$.

2) **За стороною та гострим кутом.** Якщо дано гострий кут *A*, то кут *B* знайдемо за формулою $\angle B = 90^0 - \angle A$. Сторони можна знайти за формулами, вказаними в пункті 1.1., які можна представити у вигляді:

$a = c\,sinA$; $b = c\cos A$; $a = b\,tg\,A$;

$b = c\,sinB$; $a = c\cos B$; $b = a\,tg\,B$;

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{cosA}.$$

Обирати потрібно ті формули, в які входить дана або вже знайдена сторона.

Деякі автори підручників пропонують ці формули вивчати напам'ять, у цьому немає необхідності. Оскільки учні, витративши багато зусиль на запам'ятовування, досить швидко забувають їх і починають плутати, допускаючи грубі помилки. Потрібно навчити учнів знаходити їх із основних тригонометричних співвідношень (знаходити невідомий член пропорції) :

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\,sinA;\ c = \frac{a}{\sin A}$$

Приклад 3.2.2. Дано гіпотенуза c = 79,79(м) та $\angle A = 66^0 36'$. Знайти $\angle B$, катети *a* та *b*.

Розв'язання. 1) $\angle B = 90^0 - 66^0 36' = 23^0 24'$;

2) $a = c\,\sin A = 79,79 \cdot \sin 66^0 36' = 79,79 \cdot 0,9178 \approx 73,23$ (м);

3) $b = c\cos A = 79,79 \cdot \cos 66^0 36' = 79,79 \cdot 0,3971 \approx 31,68$ (м).

Відповідь. 1) $\angle B = 23^0 24'$; 2) $a \approx 73,23$ (м); 3) $b \approx 31,68$ (м).

У 9 класі розширюють поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса для будь-яких кутів від 0° до 180°. Розглянемо на координатній площині півколо одиничного радіуса з центром у початку координат (рис.2.3.2.).

З ΔOKA ($\angle K=90°$), α – гострий кут, якому відповідає точка $A\ (x;y)$, $OA = 1$, $OK = x$, $AK = y$ маємо: $cos\alpha = \frac{OK}{OA} = \frac{x}{1} = x$; $sin\alpha = \frac{AK}{OA} = \frac{y}{1} = y$; $tg\alpha = \frac{y}{x}$; $ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

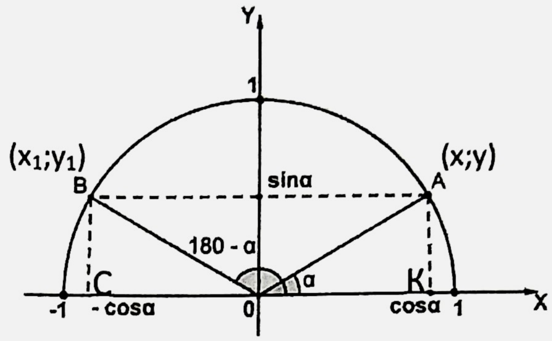


Рис.2.3.2.

Приходимо до висновку, що, косинус гострого кута α – це абсциса точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, синус гострого кута α – це ордината точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, тангенс гострого кута α – це відношення ординати до абсциси точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту, котангенс гострого кута α це відношення абсциси до ординати точки A одиничного півкола, що відповідає цьому куту.

За такою ж схемою даємо означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса довільного кута α, де $0° \le \alpha \le 180°$.

Формули зведення для кутів $(180° - \alpha)$ вводяться наступним чином: нехай кутам α і $(180° - \alpha)$ відповідають точки $A\ (x;y)$ і $B(x_1;y_1)$ одиничного півкола (рис.2.3.2.). $\Delta OKA\ (\angle K=90°) = \Delta OCB\ (\angle C=90°)$:

$(OA= OB=1,\ \angle AOK=\angle BOC=\alpha) \Longrightarrow\ y= y_1$ і $x=-x_1$. Отже,

$sin\ (180° - \alpha) = sin\alpha;\ cos\ (180° - \alpha) = - cos\alpha;$

$tg\ (180° - \alpha)=\frac{sin\ (180° - \alpha)}{cos\ (180° - \alpha)} = \frac{sin\alpha}{- cos\alpha} = - tg\ \alpha$ (при $\alpha \ne 90°$);

$ctg\ (180°-\alpha)=\frac{cos\ (180° - \alpha)}{sin\ (180° - \alpha)} = -\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = - ctg\ \alpha$ (при $\alpha \ne 0°,\ \alpha \ne 180°$).

Учням можна запропонувати самостійно переконатися в тому, що ці рівності є справедливими для кутів $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$. Доводимо, що тригонометричні тотожності, які вивчалися у 8 класі, справедливі для кутів $0° \le \alpha \le 180°$. Таким чином, продовжується робота з перетворенням тригонометричних виразів та доведення тригонометричних тотожностей.

Теорема косинусів є узагальнення теореми Піфагора на видадок довільного трикутника.

Теорема косинусів. *Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.*

Доведення. У $\Delta\, ABCAB = c,\ AC=b,\ BC=a.$

1) $\angle C=90°$. Тоді $\cos C = 0 \Longrightarrow c^2=a^2+b^2 - 2ab\cdot 0 = a^2+b^2.$

2)$\angle C$ – гострий. Тоді $\angle B$ також гострий, проведемо висоту AD, *т. D* належить стороні BC оскільки $\angle C$ і $\angle B$ – гострі (Рис.2.3.3.).

У $\Delta\, ADC(\angle D=90°)$:

$AD = b \sin C,\ CD = b \cos C$, а $BD = BC - CD = a - b\cdot \cos C.$

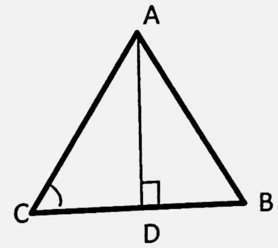


Рис.2.3.3.

У $\Delta\, ADB(\angle D=90°)$:

$c^2= AB^2 = AD^2+BD^2 = (b \cdot \sin C)^2+(\, a - b \cdot \cos C)^2=$

$= b^2\cdot \sin^2 C+a^2\cdot\ 2ab \cdot \cos C+b^2\cdot \cos^2 C=$

$= a^2+b^2\cdot (\sin^2 C+ \cos^2 C) - 2ab \cdot \cos C,$

$c^2=a^2+b^2 - 2ab \cos C.$

3) $\angle C$ – тупий (рис.2.3.4.). Позначимо $\angle ACB = \alpha$, проведемо висоту AD, *т.D* лежить на продовженні променяBC, тому $\angle ACD = 180° - \alpha$.

У $\Delta\, ADC(\angle D=90°)$:

$AD = b\cdot\sin(180° - \alpha) =b\cdot\sin \alpha$

$CD = b \cdot \cos\, (180° - \alpha) = - b \cdot \cos \alpha$

$BD = BC+ CD = a - b\cdot\cos\alpha$, далі доведення аналогічне, коли $\angle C$ – гострий.

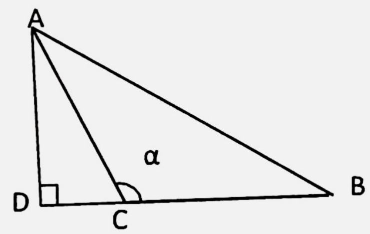


Рис.2.3.4.

Теорема синусів [18,с.104] Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорему синусів можна доводити спираючись на формулу знаходження площі трикутника $S = \frac{1}{2} ab \sin C$, якщо така формула на момент вивчення теореми синусів учням невідома, то можна скористатися властивостями висоти трикутника або властивостями кола описаного навколо трикутника.

Доведення. Який би не був ΔABC: $AC = b,\ AB = c,\ BC = a.$

Опустивши з його вершини C висоту CD (рис.2.3.5.), матимемо

$$CD = a \cdot sinB,$$

$CD = b \cdot sinA$, якщо $\angle A < 90°$ і $CD = b \cdot sin\,(180° - A) = b \cdot sinA$, якщо $\angle A > 90°$.

Отже, в кожному трикутнику $a \cdot sinB = b \cdot sinA$, тому $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB}$, аналогічно $\frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$. Тому в кожному ΔABC $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$.

Якщо описати навколо трикутника коло, то $a = 2R \cdot sinA$, $b = 2R \cdot sinB$, $c = 2R \cdot sinC$, *тому* $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$, де R–радіус описаного кола.

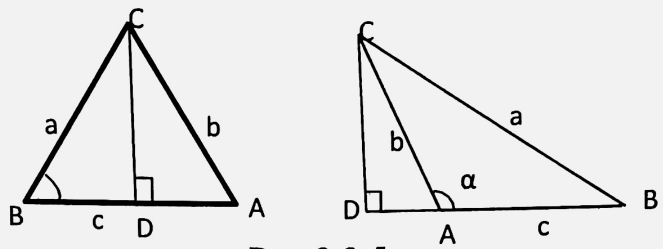


Рис.2.3.5.

Методична схема розв'язування довільних трикутників. Розв'язування довільних трикутників, так як і прямокутних, зводиться до знаходження невідомих сторін і кутів за відомими сторонами і кутами. Задачі можна поділити на такі типи:

1) Розв'язування трикутника за трьома сторонами.

Дано три сторони a, b, c. Знайти кути $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

а) Спочатку знайдемо один із кутів за теоремою косинусів: $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

б) другий кут B знайдемо за теоремою синусів: $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB}$, $sinB = \frac{bsinA}{a}$;

в) третій кут знаходимо за формулою: $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$.

Приклад 3.2.3. Дано: ΔABC, $a = 7$ см, $b = 8$ см, $c = 9$ см. Знайти: кути A, B та C.

Розв'язання. 1) $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $cosA = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6666$, $\angle A \approx 48°12'$;

2) $sin\,B = \frac{b\,sin\,A}{a}$; $sin\,B = \frac{8\,sin48°12'}{7} = \frac{8 \cdot 0{,}7455}{7} \approx 0{,}852$, $\angle B = 58°30'$;

3) $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$; $\angle C = 180^0 - (48°12' + 58°30') = 73°18'$.

Відповідь. 1) $\angle A \approx 48°12'$; 2) $\angle B = 58°30'$; 3) $\angle C = 73°18'$.

2) Розв'язування трикутника за двома сторонами і кутом між ними.

Дано дві сторони a, b і кут між ними $\angle C$. Знайти сторону c, і кути A та B.

а) спочатку за теоремою косинусів знаходимо сторону c: $c^2=a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos C$;

б) потім кут $\angle A$ за теоремою косинусів: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

в) третій кут знаходимо за формулою $\angle B = 180^0 -(\angle A+ \angle C)$.

Приклад 3.2.4. Дано: ΔABC, $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\angle C = 40°$. Знайти: сторону c, кути A та B.

Розв'язання. 1) За теоремою косинусів $c^2 = a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos C$

$c^2 = 16 +49 - 2\cdot 4\cdot 7\cos 40° = 65 - 56 \cdot 0{,}766 = 22{,}104$, $c \approx 4{,}7$ см;

2) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos A = \frac{7^2+4{,}7^2-4^2}{2\cdot 7\cdot 4{,}7} \approx 0{,}8372$, $\angle A = 33°09'$;

3) $\angle B = 180^0 - (\angle A+ \angle C)$, $\angle B = 180^0 - (33°09'+ 40°) = 106°51'$.

Відповідь. $c \approx 4{,}7$ см; $\angle A = 33°09'$; $\angle B =106°51'$.

3) Розв'язування трикутників за стороною і двома прилеглими кутами.

Дано два кути $\angle C$ та $\angle B$ і сторона a. Знайти кут $\angle A$ та сторони c, b.

а) спочатку знаходимо третій кут трикутника: $\angle A = 180^0 - (\angle C + \angle B)$;

б) сторони c та b знаходимо за теоремою синусів: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$

Приклад 3.2.5. Дано: ΔABC, $a = 8$ см, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$. Знайти c, b, $\angle A$.

Розв'язання. 1) $\angle A = 180^0 - (\angle C + \angle B)$, $\angle A = 180^0 - (80°+ 40°) = 60°$.

2) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $b = \frac{8 \sin 40°}{\sin 60°} \approx 5{,}94$ см;

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $c = \frac{8 \sin 80°}{\sin 60°} \approx 9{,}1$ см.

Відповідь. $\angle A = 60°$; $b \approx 5{,}94$ см; $c \approx 9{,}1$ см.

4) Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом протилежним до однієї з них. Дано дві сторонни a і b та кут $\angle B$ протилежний до сторони b. Знайти сторону c, кути $\angle A$ і $\angle C$.

а) Спочатку знаходимо кут $\angle A$ за теоремою синусів: $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$.

При цьому можуть виникнути наступні варіанти:

- $a > b;\ a \sin B > b$ - задача не має розв'язку;
- $a > b;\ a \sin B = b$ - один розв'язок, кут A- прямий;
- $a > b;\ a \sin B < b$ - задача має два розв'язки: кут$\angle A$, який відповідає знайденому синусу, можна вважати гострим або тупим;
- $a \leqslant b$ - задача має один розв'язок: кут $\angle A$ - гострий.

б) Знайшовши кут $\angle A$, знаходимо $\angle C$ за формулою: $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$. Якщо кут $\angle A$ може мати два значення, то два значення матиме і кут $\angle C$.

в) третю сторону c знаходимо за теоремою синусів $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$, якщо знайдено два значення кута $\angle C$, то і для сторони c отримуємо два значення, таким чином умову задовольняють два різних трикутники.

Приклад 3.2.6. Дано: ΔABC, $a = 8$ см, $b = 10$ см, $\angle B = 70°$. Знайти сторону c, кути A та C.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів: $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$; $\sin A = \frac{8 \sin 70°}{10} =$ $= \frac{8 \cdot 0{,}9397}{10} \approx 0{,}7518$, $\angle A = 48°45'$ або $\angle A = 180° - 48°45' = 131°15'$. Оскільки $\angle A + \angle B = 131°15' + 70° > 180°$, то $\angle A = 131°15'$ не є розв'язком задачі.

2) $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$; $\angle C = 180^0 - (48°45' + 70°) = 61°15'$;

3) $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$; $c = \frac{10 \sin 61°15'}{\sin 70°} = \frac{10 \cdot 0{,}8763}{0{,}9397} \approx 9{,}33$ см.

Відповідь. 1) $\angle A = 48°45'$; 2) $\angle C = 61°15'$; 3) $c \approx 9{,}33$ см.

У курсі алгебри і початків аналізу в 10 класі вивчається тема «Тригонометричні функції числового аргументу», навчання якої спирається на знання учнів про функції взагалі та синус, косинус, тангенс і котангенс зокрема. Перш ніж розглядати тригонометричні функції числового аргументу, розглядається поняття «радіанної міри кутів» та проводиться робота з колом довільного радіуса. Важливо наголосити на перевагах використання радіанної міри кутів. Як пропедевтичну роботу доцільно розглядати з учнями геометричні завдання на знаходження довжини дуги половини кола, його чверті та третини, тощо. У процесі виконання завдань необхідно підвести учнів до того, що для подальшого вивчення теми вигідніше обирати коло одиничного радіуса. Вводиться поняття «кут повороту». Особливу увагу слід звернути на те, що додатнім вважається рух початкового радіуса проти годинникової стрілки, а від'ємним – за годинниковою стрілкою

У процесі роботи з одиничним колом в учнів мають бути сформовані наступні вміння: знаходити на числовому колі точки, що відповідають заданим числам; складати аналітичні записи для дуг числового кола; визначати належність точки певній координатній чверті; знаходити координати точок числового кола та за заданими координатами точку на колі; визначати знаки тригонометричних функцій у різних координатних чвертях [28]. Особливих труднощів застосування формул переходу від градусної міри до радіанної і навпаки в учнів не виникає.

Після вивчення тригонометричного кола, як самостійного об'єкта, переходимо до вивчення тригонометричних функцій. Оскільки первинне означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса було введене за допомогою відношення сторін прямокутного трикутника, то означення тригонометричних функцій за допомогою тригонометричного кола важко вкладаються в свідомості учнів.

Вивчення поняття тригонометричних функцій числового аргументу відбувається шляхом розширення вже вивчених тригонометричних функцій кута на будь – яку градусну міру. Слід переконати учнів, що існує відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок одиничного кола. Означення тригонометричних функцій числового аргументу вводиться поступово. Спочатку учні згадують означення тригонометричних функцій для гострих кутів прямокутного трикутника, потім означення тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°, які були введені у 9 класі, за допомогою одиничного півкола з центром у початку координат. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса довільного кута спочатку вводяться для кола довільного радіуса R із центром у початку координат, потім розглядають коло, в якому $R = 1$ і формулюють остаточні означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргументу. Для кращого усвідомлення вивченого матеріалу учням доцільно дати завдання для знаходження значень тригонометричних функцій числового аргументу. Учням потрібно наголосити на тому, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільних кутів, зазвичай, знаходять за допомогою чотиризначних таблиць або калькулятора

Доведення періодичності тригонометричних функцій відбувається за допомогою методу від супротивного. Користуючись означенням синуса, косинуса, тангенса, котангенса, будують графіки тригонометричних функцій виду: $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ та виконують деякі перетворення цих графіків. За допомогою графіків виявляють та обґрунтовують 7 властивостей тригонометричних функцій:

3) область визначення та область значень;

4) парність або непарність функції;

5) період функції;

6) нулі функції;

7) проміжки знакосталості функції;

8) проміжки зростання і спадання функції;

9) найбільше і найменше значення функції.

З метою закріплення вивчених властивостей учням можна запропонувати такі вправи: на знаходження області значень та області визначення складних функцій, у формули яких входять тригонометричні функції; на порівняння числових значень тригонометричних виразів; побудова графіків функції за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

Потім учні повторюють основні тригонометричні тотожності та наслідки з них, приходять до висновку, що вони є справедливими для будь – яких кутів.

Вивчаючи формули зведення, для полегшення запам'ятовування, доцільно користуватися таким правилом:

«У правій частині формули зведення записуємо той знак (+ або −), який має ліва частина формули за умови, що кут α – гострий, при цьому для кутів $\pi \pm\alpha$, $2\pi \pm\alpha$ назву тригонометричної функції не змінюємо, а для кутів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ − назву змінюємо на конфункцію» [20, 202].

Вивчаючи обернені тригонометричні функції, застосовують їх до розв'язування тригонометричних рівнянь.

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь, слід наголосити на принциповій відмінності тригонометричних рівнянь від алгебраїчних: тригонометричні рівняння, в яких змінна входить під знак тригонометричної, або зовсім не мають розв'язків, або мають їх здебільшого безліч. Це пов'язано з періодичністю тригонометричних функцій.

Важливо щоб учні, під час розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь, не формально запам'ятовували формули загального розв'язку, а усвідомлювали, чому одержуються саме такі формули, а не інші. Це допоможе уникнути помилок при розв'язуванні складніших тригонометричних рівнянь.

У програмі курсу алгебри і початків аналізу для 10 класу поглибленого рівня вивчення передбачено ознайомлення учнів лише з найпростішими тригонометричними нерівностями, при чому найзручніше це робити за допомогою одиничного кола.

Таким чином, врахування принципів наступності математичної освіти в основній та старшій школі, дозволяє вчителю створювати оптимальні умови для оволодіння учнями навчальним матеріалом.

3.3. Приклади конспектів уроків із використанням елементів тригонометрії

Геометрія, 8 клас

(згідно чинної програми з математики для 5-9 класів (рівень стандарту))

Тема. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета: узагальнити, систематизувати та закріпити знання учнів про теорему Піфагора, про вивчені співвідношення сторін і кутів у прямокутному трикутнику. Навчити учнів застосовувати набуті знання і вміння у практичній діяльності. Розвивати вміння аналізувати, робити висновки, знаходити власні способи розв'язку. Виховувати акуратність під час оформлення математичних записів.

Тип уроку: узагальнення та систематизації знань.

Хід уроку

I. Організаційна частина.

II. Повідомлення теми і мети уроку.

Сьогодні ми з вами проведемо урок, на якому узагальнимо та систематизуємо знання з вивченої теми «Розв'язування трикутників» і вдосконалимо вміння застосовувати отримані знання в реальному житті. Скажіть, будь ласка, що означає розв'язати трикутник?

III. Актуалізація опорних знань.

Повторимо матеріал, який ви вивчили на уроках.

1. Онлайн опитування з використанням Google-форм.

https://docs.google.com/forms/d/1-n19abNzP9UOTujKo2FmIvRvrO2ulhSTtoQu_Rbrnso/edit (Додаток Г)

2. Гра «Продовж речення».

1. Трикутник, що має прямий кут, називається… (прямокутним)
2. Трикутник, у якого дві сторони рівні називається … (рівнобедреним)
3. Трикутник, у якого всі сторони рівні називається … (рівностороннім)
4. Сторони прямокутного трикутника називаються … (катет, катет, гіпотенуза)
5. Твердження, що потребує доведення – це… (теорема)
6. Промінь, який виходить з вершини кута і ділить його навпіл – це… (бісектриса)
7. Прямі, які не перетинаються, називаються … (паралельними)
8. Прямі, які перетинаються під прямим кутом, називаються … (перпендикулярними)

9. Запишіть основну тригонометричну тотожність … ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

10. Синус кута ($90° - \alpha$) дорівнює … ($\cos\alpha$)

11. Косинус кута ($90° - \alpha$) дорівнює … ($\sin\alpha$)

3. Фронтальне опитування (Учні по черзі виходять до дошки, всі інші пишуть у зошити)

1. Запишіть формулу для обчислення квадрату гіпотенузи в прямокутному трикутнику.($c^2 = a^2 + b^2$)

2. Запишіть формулу для обчислення синуса гострого кута прямокутного трикутника. ($\sin A = \frac{a}{c}$)

3. Запишіть формулу для обчислення катета протилежного до одного з гострих кутів прямокутного трикутника, якщо відома довжина гіпотенузи і градусна міра кута. ($a = c \sin A$)

4. Запишіть формулу для знаходження невідомого катета в прямокутному трикутнику. ($a^2 = c^2 - b^2$)

5. Запишіть формулу для обчислення косинуса гострого кута прямокутного трикутника. ($\cos A = \frac{b}{c}$)

6.Запишіть формулу для обчислення тангенс гострого кута прямокутного трикутника. ($tg\, A = \frac{a}{b}$)

7. За якою формулою знайдемо довжину прилеглого катета, якщо відома градусна міра кута і довжина гіпотенузи? ($b = c \cos A$)

IV. Застосування знань на практиці.

1. **Задача**. Знайдіть синус кута підйому драбини, якщо на кожний метр довжини вона піднімається на 0,75 м [1, 181].

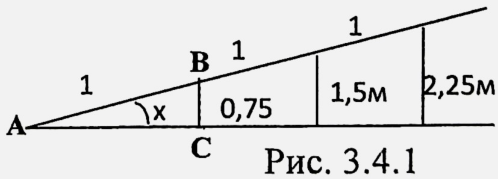


Рис. 3.4.1

Розв’язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC (рис 3.4.1), у якому гіпотенуза дорівнює 1 м, а катет протилежний до шуканого кута 0,75 м. За означенням синуса маємо:

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{0,75}{1} = 0,75$

Відповідь. 0,75

2. **Задача.** Людина, яка йде шляхом, практично не спостерігає підйому, якщо висота підйому менша ніж 1/25 пройденого шляху. Чому дорівнює синус кута підйому? [1, 181]

Розв'язання. Пройдений шлях приймемо за 1 (гіпотенуза), тоді висота підйому 1/25 (катет) . У прямокутному трикутнику з означення синуса маємо:

$\sin x = \frac{a}{c} = \frac{1}{25} : 1 = \frac{1}{25}$

Відповідь. $\frac{1}{25}$.

3. **Задача**. Висота сонця становить 48°. Довжина тіні телевежі — 76 м. Знайдіть висоту телевежі [1, 181].

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 3.4.2.) . З ΔABC маємо: $AC = 76$ м (довжина тіні), $\angle A = 48°$ (висота сонця) (за умовою). Знайти BC (висота телевежі). За означенням тангенса кута прямокутного трикутника маємо:

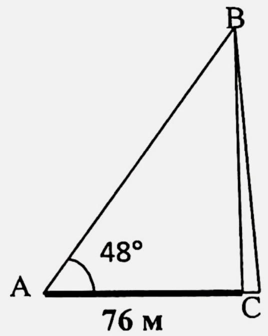


Рис. 3.4.2.

$\text{tg } 48° = \frac{BC}{AC}$; BC= AC · tg 48° = 76 · 1,1106 =84,4 (м).

Відповідь. 84,4 м.

4. **Задача.** Кут підйому шляху дорівнює 15°30'. На яку висоту підніметься пішохід, якщо він пройде 200 метрів?

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 2.5.3.) . З ΔABC маємо: $AB = 200$ м (пройдений шлях), $\angle A = 15°30'$ (кут підйому) (за умовою). Знайти BC (висоту). З означення синуса маємо: $\sin A = \frac{BC}{AB}$; $BC = AB \cdot \sin A = 200 \cdot 0{,}2672 = 53{,}44$ м

Відповідь. 53,44 м.

V. Підсумок уроку.

Сьогодні на уроці ми з вами узагальнили знання, отримані під час вивчення теми «Розв'язування трикутників», і навчилися застосовувати їх до розв'язування прикладних задач. Для узагальнення вивченого матеріалу, я пропоную вам розгадати кросворд.

VI. Домашнє завдання.

Геометрія, 9 клас

(згідно чинної програми з математики для 5-9 класів (рівень стандарту))

Тема. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета: узагальнити, систематизувати та закріпити знання учнів про теорему синусів та теорему косинусів. Закріпити основні алгоритми розв'язування трикутників. Навчити учнів застосовувати набуті знання і вміння до розв'язування прикладних задач. Розвивати вміння аналізувати, робити висновки, знаходити власні способи розв'язку. Виховувати акуратність під час оформлення математичних записів, наполегливість, інтерес до математики.

Тип уроку: урок – практикум.

Хід уроку

I. Організаційна частина.

II. Повідомлення теми і мети уроку.

Сьогодні ми з вами проведемо урок, на якому узагальнимо та систематизуємо знання з вивченої теми, вдосконалимо вміння застосовувати отримані знання до розв'язування задач прикладного змісту.

III. Мотивація навчальної діяльності

Слово “тригонометрія” штучно складене з грецьких слів: “тригонон” - трикутник та “метрео” - міряю, виміряю (відповідним українським терміном було б “трикутниковимірювання”).

Основна задача тригонометрії полягає в розв’язуванні трикутників, тобто знаходження невідомих величин трикутника за даними значеннями інших його величин. Так, у тригонометрії розв’язують задачу на знаходження кутів трикутника за даними його сторонами, задачу на знаходження сторін трикутника - за площею та двома кутами тощо.

Тригонометрія широко застосовується у фізиці, геодезії, топографії, архітектурі, медицині та біології. Без тригонометрії не можна обійтися у випадках, коли необхідно знайти результати з досить великою точністю.

Вимірювання кутів транспортиром або іншими найпростішими кутомірними приладами дає дуже грубе наближення, внаслідок чого кінцеві результати матимуть дуже великі похибки. Тригонометрія дає можливість знаходити кути не безпосереднім їх вимірюванням, а за допомогою обчислень.

IV. Актуалізація опорних знань.

Повторимо матеріал, який ви вивчили на уроках.

1. Математичний диктант

1. Запишіть теорему косинусів для сторони c.
2. Запишіть теорему косинусів для сторони a.
3. Запишіть теорему косинусів для сторони b.
4. З останньої формули виразіть $cos\beta$.
5. Запишіть теорему синусів.
6. Запишіть рівності, що випливають із теореми синусів для ΔMKB.
7. Відомо, що сторона a менша за кожну з двох інших сторін. Який кут трикутника найменший?
8. Який кут трикутника найбільший, якщо його сторони $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$?
9. Запишіть чому дорівнює квадрат сторни MK ΔMKB.

1. Знайдіть невідому величину за малюнком (рис 3.4.3.)

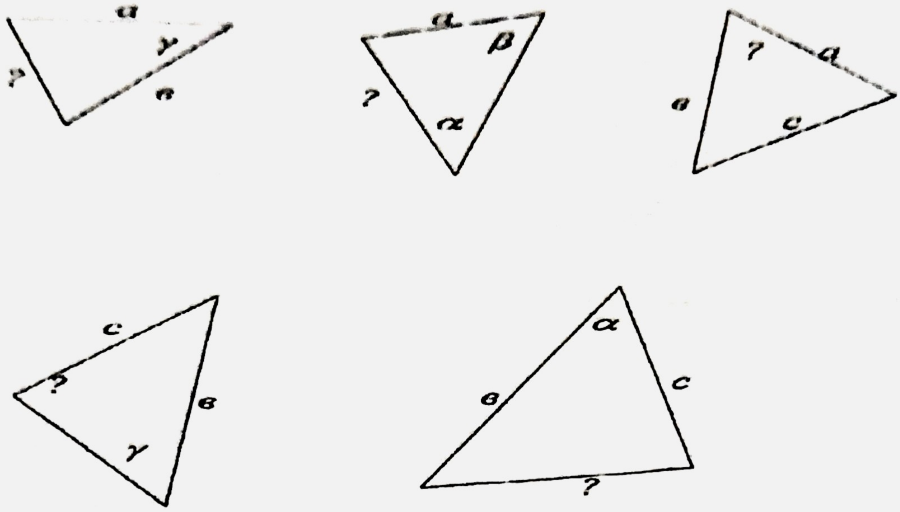
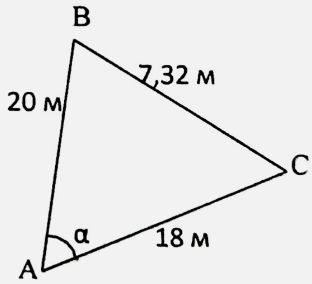


Рис. 3.4.3.

IV. Використання знань на практиці

Задача 1. Футбольний м'яч знаходиться у точці *A* футбольного поля на відстанях 18 м і 20 м від основ *B* та *C* стійок воріт. Футболіст спрямовує м'яч у ворота. Зайдіть кут α (з точністю до градуса), під яким м'яч влучає у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,32 м.



(Рис 3.4.4.)

Розв'язання. Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 3.4.4.) За теоремою косинусів маємо:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \cdot AC \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\ AB \cdot AC} = \frac{20^2 + 18^2 - 7.32^2}{2 \cdot 20 \cdot 18} \approx 0{,}9311;$$

$\alpha = 21°24'$.

Відповідь. $\alpha = 21°24'$.

Задача 2. За допомогою дальноміра були виміряні відстані $AC = 30$ м і $BC = 45$ м, а за допомогою астролябії $\angle ACB = 40$ (рис 3.4.5.). Більшою чи меншою

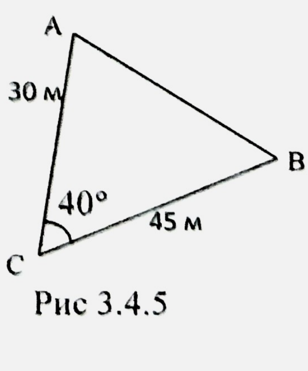


Рис 3.4.5

за 30 м є відстань між двома недоступними точками *A* і *B*? [18, 117]

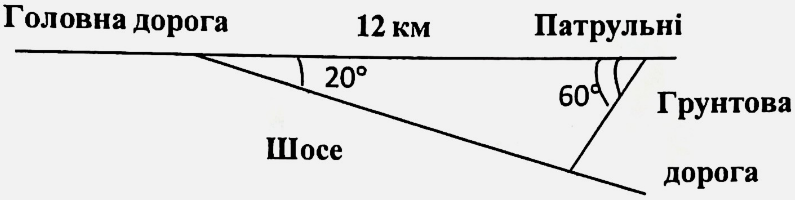
Розв'язання. За теоремою косинусів маємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ BC \cdot AC \cdot \cos 40° =$$

$= 30^2 + 45^2 - 2 \cdot 30 \cdot 45 \cdot 0{,}7660 = 225$, $AB = \sqrt{856{,}8} \approx \approx 29{,}27$ (м), 29,27 м < 30 м

Відповідь. *AB* = 29,27 м < 30 м.

Задача 3. О 8:00 порушник правил дорожнього руху повернув із головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 150 км/год. О 8:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому на переріз грунтовою дорогою зі швидкістю 80 км/год (рис 3.4.5.). Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і грунтової дороги?



(Рис 3.4.5.).

Розв'язання.Зобразимо дані задачі на рисунку (рис 3.4.6.)

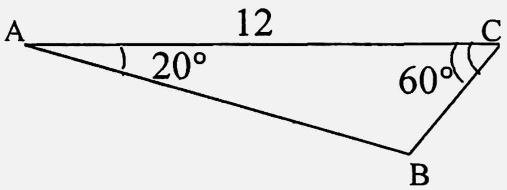


Рис 3.4.6.

$\angle ABC = 180° - (\angle CAB + \angle ACB) =$

$= 180° - (20° + 60°) = 100°$

За теоремою синусів маємо: $\dfrac{AC}{\sin 100°} = \dfrac{AB}{\sin 60°} = \dfrac{BC}{\sin 20°}$

$$AB = \frac{AC \sin 60°}{\sin 100°} = \frac{12 \cdot 0{,}866}{0{,}9848} \approx 10{,}55 \text{ (км)}$$

$$BC = \frac{AC \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{12 \cdot 0{,}342}{0{,}9848} \approx 4{,}17 \text{ (км)}$$

10,55 : 150 = 0,07 (год), 0,07 (год) = 4,2 хв

4,17 : 80 = 0,05 (год), 0,05 (год) = 3 хв, отже патрульні прибудуть на місце події на 12 секунд раніше, ніж порушник.

Відповідь. Так.

Задача 4. Щоб за відсутності дальноміра знайти відстань між двома недоступними точками A і B, вибрали дві доступні точки C і D, провели вимірювання й отримали, що $CD = 50$ м, $\angle ADB = 50°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle ACB = 40°$, $\angle BCD = 45°$ (Рис 3.4.7.). Знайдіть відстань AB (з точністю до метра).

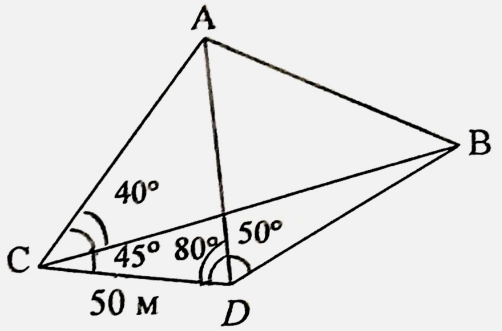


Рис 3.4.7.

Розв'язання. З $\Delta\ CAD$:

$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 45° + 40° = 85°$

$\angle CAD = 180° - (\angle ACD + \angle ADC) = \ =180° - (85° + 80°) = 15°$

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin C};\ AD = \frac{CD \sin 85°}{\sin 15°} = \frac{50 \cdot 0{,}9962}{0{,}2588} \approx$$

$$\approx 192{,}46 \text{ м};$$

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AC}{\sin D};\ AC = \frac{CD \sin 80°}{\sin 15°} = \frac{50 \cdot 0{,}9848}{0{,}2588} \approx 190{,}26;$$

З$\Delta\ CBD$: $\angle CDB = \angle CDA + \angle ADB = 80° + 50° = 130°$;

$\angle CBD = 180° - (\angle BCD + \angle CDB) = \ =180° - (45° + 130°) = 5°$;

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BC}{\sin D};\ BC = \frac{CD \sin 130°}{\sin 5°} = \frac{50 \cdot 0{,}766}{0{,}0872} \approx 439{,}2;$$

З$\Delta\ CAB$ за теоремою косинусів маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos C =$ $= 190{,}26^2 + 439{,}2^2 - 2 \cdot 190{,}26 \cdot 439{,}2 \cdot 0{,}766 \approx 36\,198{,}87 + 192\,896{,}64 - 128\,017{,}28 \approx 101\,078{,}23$;

$AB = \sqrt{101\,078{,}23} \approx 317{,}9$ (м);

Відповідь. $AB \approx 317{,}9$ м.

V. Підсумок уроку

Сьогодні на уроці ми з вами навчилися розв'язувати прикладні задачі.

Що вам сподобалося найбільше?

Що вам не сподобалося?

Які труднощі виникли під час розв'язування задач?

V. Домашнє завдання

Алгебра і початки аналізу, 10 клас

(рівень стандарту)

(за підручником А.Г.Мерзляк «Математика» алгебра і початки аналізу та геометрія)

Тема уроку. Радіанна міра кутів

Мета уроку: сформувати в учнів поняття радіанної міри кутів; виробити вміння переходити від радіанної міри кутів до градусної і навпаки; розвивати критичне мислення, інтелектуальні здібності, вміння аналізувати та робити висновки; виховувати акуратність при оформленні математичних записів.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

І Організаційна частина

ІІ. Актуалізація опорних знань учнів та мотивація навчальної діяльності

Сьогодні ми розпочинаємо вивчення нового розділу «Тригонометричні функції». І розпочинає вивчення даного розділу з теми «Радіанна міра кутів».

Слово "тригонометрія" штучно складене з грецьких слів: "трігонон" - трикутник та "метрео" - міряю, виміряю (відповідним українським терміном було б "трикутниковимірювання").

Крім градусної міри кутів використовують й інші одиниці вимірювання кутів. Вам було дане завдання підготувати інформацію про те, якими одиницями можуть вимірюватися кути.

В астрономії одиницею вимірювання кутів є кутова година. 1 кутова година дорівнює 1/6 частині прямого кута.

У техніці одиницею вимірювання кутів є повний оберт.

В артилерії кути вимірюють у «поділках кутоміра». Велика поділка – це 1/60 частина повного оберту, а мала поділка – це 1/100 частини великої поділки (позначення 22-39, означає 22 великі і 39 малих поділок кутоміра).

У моряків кути вимірюються в румбах. 1 румб = 1/16 частині розгорнутого кута.

У картографії в деяких країнах одиницею вимірювання є 1 град.(g) 1g = 1/200 частині розгорнутого кута.

У математиці та фізиці використовують поряд градусною мірою кутів ще й радіанну міру.

III. Повідомлення теми та мети уроку.

Сьогодні на уроці ми з вами ознайомимося з радіанною мірою кутів та навчимося переходити з градусної міри в радіанну і навпаки.

IV.Вивчення нового матеріалу.

Означення. [10, 49] Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

Кут в один радіан *(рад.)*– це центральний кут кола *AOB* (рис. 3.4.8.), що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу($\cup AB=OB$). Величина цього кута не залежить від радіуса кола та від положення дуги *AB* на колі. Оскільки півколо видно з центра кола під кутом 180^0, а довжина півкола дорівню є π радіусам, то один радіан в π раз менше, ніж кут в 180^0 тобто:

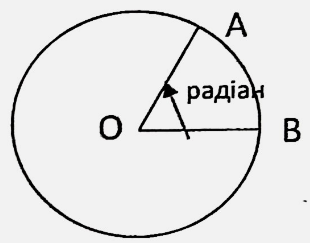


Рис. 3.4.8.

$$180^0 = \pi \text{ рад}$$

$$1 \text{ рад.} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 18',$$

і навпаки один градус дорівнює $\frac{\pi}{180^0}$ радіана $1^0 = \frac{\pi}{180^0}$ рад $\approx$ 0,017453 радіана.

Таблиця 3.4.1. градусних та радіанних мір кутів, які трапляються найчастіше:

Градусна міра кута	0°	30°	5°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Приклад 1. Виразіть у радіанах величини кутів 30°; 90°.

Розділимо ліву і праву частини рівності $180° = \pi$ рад послідовно на 6, 2, одержимо $30° = \frac{\pi}{6}$ рад, $90° = \frac{\pi}{2}$ рад.

Приклад 2. Виразітьуградусахвеличиникутів $\frac{\pi}{5}$ рад, $\frac{\pi}{18}$ рад.

Розділимо ліву і праву частини рівності $180° = \pi$ рад послідовно на 5; 18, одержимо $\frac{\pi}{5} = 36°$; $\frac{\pi}{18}$ рад $= 10°$.

Приклад 3. Знайдіть у градусах 3,5 рад.

Через те що 1 рад $=\frac{180°}{\pi}$, 3,5 рад $= 3{,}5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{630°}{\pi} = 201°$.

Приклад 4. Знайдіть радіанну міру кута в 72°.

Через те що $1° = \frac{180°}{\pi}$ рад, $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180°}$ рад $= \frac{2\pi}{5}$ рад $\approx$ 1,3 рад.

Радіанна міра кута зручна для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює $\boldsymbol{\alpha R}$. Довжину дуги позначимо через $\boldsymbol{l}$, тоді маємо:

$$\boldsymbol{l = \alpha R}.$$

Якщо радіус кола дорівнює одиниці, то $\boldsymbol{l = \alpha}$, тобто довжина дуги дорівнює величині центрального кута, що опирається на цю дугу в радіанах.

IV. Формування умінь визначати радіанну міру кута за градусною і навпаки

1. Виконання вправ. Робота з підручником

№ 8.1. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 5) 210°; 6) 300° [10, 53].

1) $25° = \frac{\pi}{180°} \cdot 25° = \frac{5\pi}{36}$;

2) $40° = \frac{\pi}{180°} \cdot 40° = \frac{2\pi}{9}$;

5) $210° = \frac{\pi}{180°} \cdot 210° = \frac{7\pi}{}$;

6) $300° = \frac{\pi}{180°}$

Відповідь. 1) $\frac{5\pi}{36}$; 2) $\frac{2\pi}{9}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{5\pi}{3}$

№ 8.2. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) 1,2 π; 5) 3π [10, 53].

2) $\frac{2\pi}{5} = 72°$;

3) $\frac{\pi}{9} = 20°$;

4) $1{,}2\,\pi = 216°$;

5) $3\pi = 540°$;

Відповідь. 2) 72°; 3) 20°; 4) 216°; 5) 540°.

№ 8.3. Заповніть таблицю градусних та радіанних мір кутів [10, 53].

Градусна міра кута	**10°**	12°	6°	**80°**	**108°**	105°	225°	**720°**	**324°**	240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{5}}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\boldsymbol{\frac{7\pi}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$	4π	$1{,}8\pi$	$\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$

№ 8.4. Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якої дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$ [10, 53].

R= *12 см*, $l = \alpha R$.

1) $l = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi$ см;

2) $l = 2 \cdot 12 = 24$ см;

3) $l = \frac{5\pi}{6} \cdot 12 = 10\pi$ см.

Відповідь. 1) 6π см; 2) 24 см; 3) 10π см.

№ 8.5. Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола: 1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см; [10, 53].

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; $l = \alpha R$, $l = 3 \cdot 5 = 15$ см;

3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см; $l = \alpha R$, $l = 0{,}4\pi \cdot 2 = 0{,}8\pi$ см.

Відповідь. 1) 15 см; 2) $0{,}8\pi$ см.

V. Підведення підсумків уроку.

Продовжіть речення:

Сьогодні я

дізнався…Було

цікаво…

Було не

зрозуміло…

Тепер я знаю…

VI. Домашнє завдання:

Висновки до третього розділу

Введення нових технологій вносить радикальні зміни у систему освіти: раніше її центром був учитель, а тепер – учень. Це дає можливість кожному учню навчатися у відповідному йому темпі і тому рівні, що відповідає його здібностям.

Досягнення необхідних результатів, розвиток мотивації вимагають застосування особистісно-орієнтованого підходу. Сучасний вчитель має становити індивідуальні навчальні програми, формувати кожному за дитини конкретну траєкторію. У разі застосування дистанційних освітніх технологій стає вимогою часу.

Вивчення предмета математики потребує особливого підходу. Особливо, якщо учень пропустив серію уроків з поважної причини чи має гуманітарний склад розуму, у разі йому буває недостатньо часу освоїти і зрозуміти ту чи іншу тему під час уроку.

Тема «Розв'язання тригонометричних функцій» є об'єктивно важкою для сприйняття та осмислення учнями 10-11 класів. Тому дуже важливо послідовно, від простого до складного, формувати розуміння алгоритму та виробляти стійку навичку розв'язання тригонометричних функцій.

Очевидно, що функції, що вивчаються у старшій школі, освоюються учнями гірше, тому що на їх розгляд відводиться незначна кількість годин.

А для їх розв'язання учневі необхідно володіти комплексом умінь, отриманих в основній школі та новими знаннями, пов'язаними з кожним із нових видів функцій. Такий обсяг вправ, що пропонується в підручниках з алгебри та початків аналізу для 10-11 класів [4], явно недостатній для формування вміння розв'язувати тригонометричні функції. Таким чином, за будь-якого підходу до вивчення тригонометрії, роль вивчення функцій незмірно велика, незалежно від місця їх вивчення.

РОЗДІЛ IV. ОРГАНІЗАЦІЯ І ПРОВЕДЕННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Дослідження проводилося на базі ЗЗСО "Камінь-Каширський ліцей" №2 Камінь-Каширської міської ради Волинської області. В дослідженні приймало участь 58 учнів 9-х класів.

У процесі проходження педагогічної практики в школі був проведений педагогічний експеримент з метою кращого засвоєння учнями знань, умінь та навичок, для підвищення інтересу учнів до вивчення тригонометрії.

Для проведення експерименту було вибрано два класи: 9-А і 9-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий.

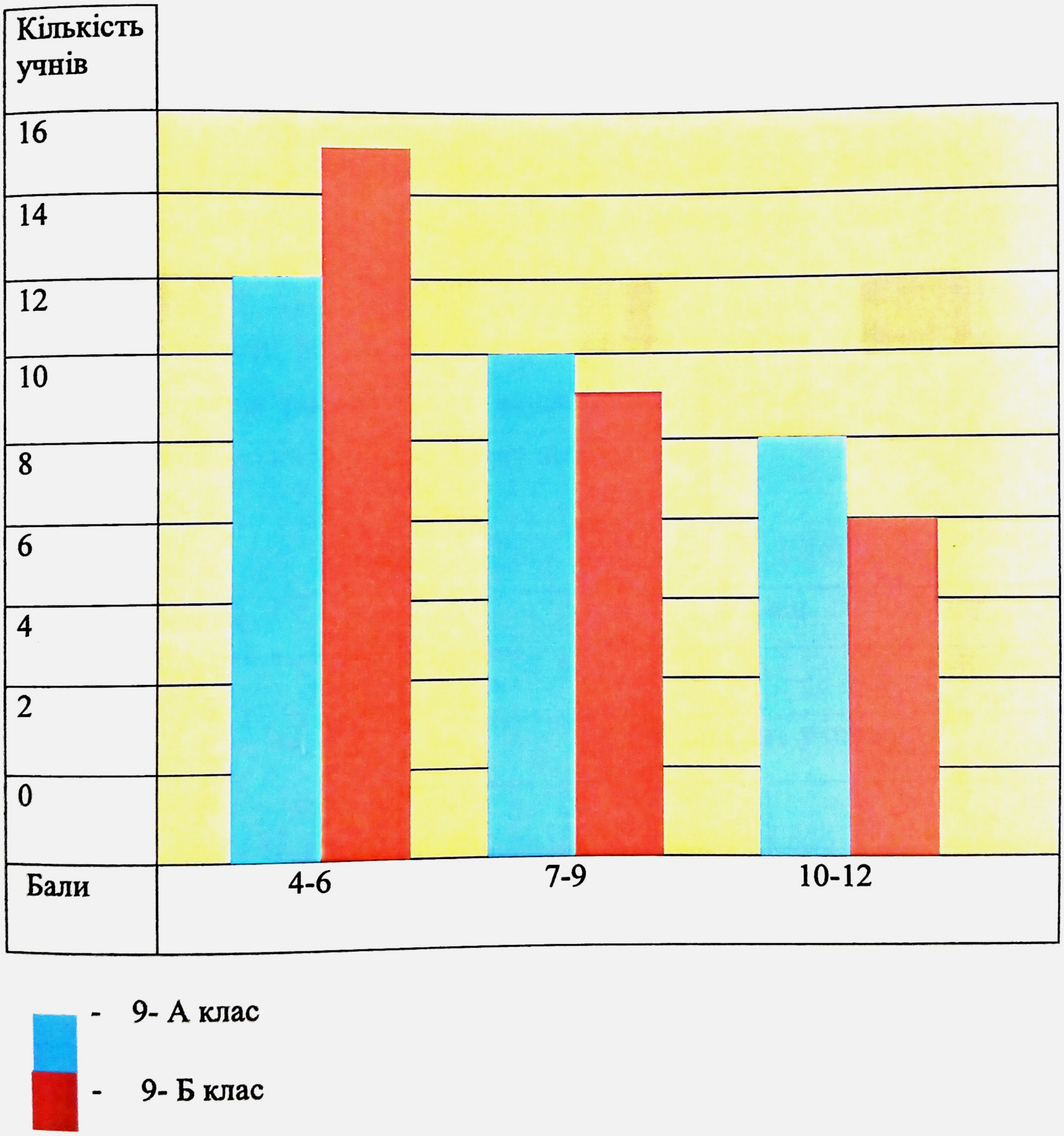
Спочатку у цих двох класах була запропонована нульова контрольна робота. Результати контрольної роботи наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Бали	Класи	
	9-А	9-Б
	Кількість учнів	
	29	27

	Позитивні результати	
4-6	11	12
7-9	9	7
10-12	9	8

Результати нульової контрольної роботи візуально проілюстровані на діаграмі 4.1.



Діаграма 4.1. Результати нульової контрольної роботи

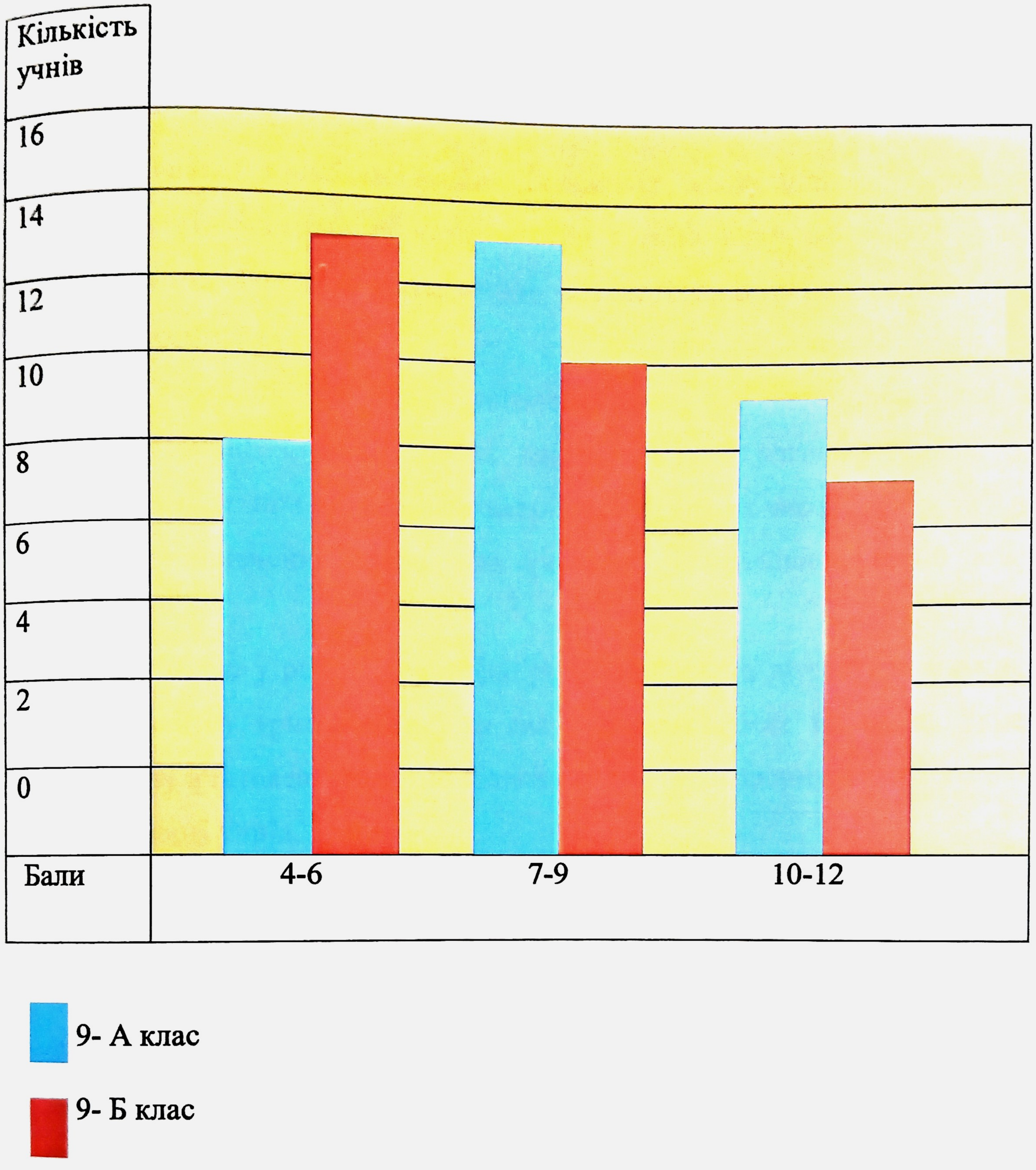
У процесі вивчення в курсі геометрії теми «Розв'язування трикутників. Прикладні задачі» у 9-А класі на уроках було використано розроблені нами диференційовані завдання. Під час уроку учням надавалися різні методи розв'язування тригонометричних задач і вони могли обрати для себе найефективніший – найпростіший та звірити розв'язання з однолітками, які розв'язували їх іншими способами. У результаті учні свідомо зацікавились вивченням теми «Розв'язування трикутників. Прикладні задачі» та навчилися робити перевірку. У 9-Б класі тема «Розв'язування трикутників. Прикладні задачі» вивчалася традиційними засобами. На підсумковому уроці одочасно була проведена контрольна робота у 9-А і 9-Б класах. Після перевірки та опрацювання результатів виконання підсумкової контрольної роботи було оцінено та порівняно навчальні здобутки учнів обох класів. Результати виконання підсумкової контрольної роботи подані в таблиці 4.2.

Як свідчать результати підсумкової контрольної роботи, фактичний рівень засвоєння розв'язування завдань теми «Розв'язування трикутників. Прикладні задачі» в учнів 9-А класу помітно виріс.

Таблиця 4.2.

Бали	Класи	
	9-А	9-Б
	Кількість учнів	
	29	27
	Позитивні результати	
4-6	7	12
7-9	11	10
10-12	10	5

Результати підсумкової контрольної роботи візуально проілюстровані на діаграмі 4.2.



Діаграма 4.2. Результати підсумкової контрольної роботи

Отже, результати підсумкової контрольної роботи свідчать про те, що учні 9-А класу показали кращу успішність, ніж учні 9-Б класу, оскільки використання диференційованих завданнь зацікавлює дітей, дозволяє учням краще засвоїти навчальний матеріал, дає можливість перевірити свої знання та розвиває їх логічне мислення формує в них математичні компетентності.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження дає змогу зробити наступні висновки.

1. Однією з найважливіших складових змісту шкільної математичної освіти є тригонометричний матеріал. Він в свою чергу забезпечує прикладну спрямованість навчання математики, розвиток практичних навичок і вмінь, науковий світогляд учнів.

На сьогоднішній день тригонометрія – це дисципліна, що вивчає тригонометричні функції та їх застосування. Тригонометричні функції застосовуються: при вивченні геометрії, комплексних чисел, при розв'язуванні рівнянь, при вивченні коливальних процесів, при вивченні функцій загального вигляду.

Задля цього у роботі проведено ретельний аналіз літератури і досліджено історію розвитку тригонометрії як галузі математичних знань, що дозволить майбутньому вчителеві грамотно підходити до питань формування математичної компетентності учнів.

2. Розглянуто методи розв'язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем в класичному курсі тригонометрії, які є основою шкільного в умовах диференційованого навчання. Потрібно сказати, що в результаті розв'язання одного і того самого тригонометричного рівняння різними способами можна дістати різні загальні формули розв'язків рівняння. Їх еквівалентність можна довести, перетворивши формули та об'єднавши кілька формул в одну.

3. Аналіз чинних програм та підручників для 10-11 класів в аспекті досліджуваної проблеми дав можливість з'ясувати особливості навчання теми на різних рівнях математичної підготовки учнів та розробити методику формування практичної компетентності учнів на базовому рівні підготовки у процесі розв'язання тригонометричних задач. Елементи методики подано як в основній частині роботи так і в додатках, розробки уроків різних типів, системи вправ з теми орієнтовані на формування ключових компетентностей учнів у процесі розвязування тригонометричних задач, передбачених програмою.

4. Розглянуто методику формування ключових і предметних компетентностей учнів профільних класів у процесі розв'язання

тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем. Розроблено систему вправ як для відпрацювання предметних математичних компетентностей з теми так і для моніторингу рівня сформованих компетентностей. Досягнення необхідних результатів, розвиток мотивації вимагають застосування особистісно-орієнтованого підходу. Сучасний вчитель має становити індивідуальні навчальні програми, формувати кожному за дитини конкретну траєкторію. У разі застосування дистанційних освітніх технологій стає вимогою часу.

5. Розроблено приклади конспектів уроків для різних класів з тем, що стосуються тригонометричних задач. Експеримент показав, що для розв'язування тригонометричних задач учням необхідно добре знати всі тригонометричні тотожності та властивості тригонометричних функцій, а також теоретичний матеріал, бо учні інколи розгублюються в пошуку методу розв'язування певного завдання.

Поставлена мета досягнута, завдання розв’язані.

Магістерська робота може бути використана педагогами і студентами фізико – математичних факультетів, вчителями математики при підготовці та проведенні уроків з даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас, дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2008. 278с.

2. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень .Харків : Основа, 2011. 253 с.

3. Бардушкін В. Тригонометричні рівняння. Відбір коріння. *Математика.* 2005. №12. С. 23–27.

4. Бормотова А. Г., Мамалига Р. Ф. З досвіду проектування уроку математики з використанням моделі «перевернутий клас». *Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій: міжвузівська збірка наукових праць.* Київ : Київський державний педагогічний університет, 2018. С. 188–195.

5. Виготський Л. С. Психологія. Київ : ЕКСМО-Прес, 2020. 1008 с.

6. Вікіпедія. Одиничне коло [Електронний ресурс] Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%BE

7. Волчаста М. М. Наступність у вивченні геометричного матеріалу в початковій та основній школі: автореф. дис на здобуття ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики». Київ. 2003. 20 с. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/6003/1/Vo

8. Галіцина І. М., Половнікова Н. Л. Мобільне навчання як нова технологія в освіті. *Освітні технології та суспільство.* 2011. № 1. С. 241–252.

9. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань. Харків : Вид-во «Ранок», 2010. 176 с.

10. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія : посіб. [для слухачів підгот. відділень та вступників до пед. ін-тів]. Київ : Либідь, 1994. 144 с.

11. Гилемханов Р. Г. Звільнімося від зайвої роботи (при рішенні однорідних тригонометричних рівнянь). *Математика в школі.* 2000. № 10. С. 9.

12. Городніченко В.Д.Тригонометрія. Конкурсні задачі. *Математика в школах*

України. 2011. № 1–2. С. 34– 39.

13. Дацук В. В., Ковшова Ю. М. Контроль засвоєння знань учнями під час навчання математики із застосуванням Google-класу та електронного освітнього ресурсу Matific. *Молодь XXI століття: освіта, наука, інновації:* матеріали VII Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції з міжнародною участю (м. Дніпро, 19-21 грудня 2018 р.). Дніпро: НДПУ, 2018. С. 191–192.

14. Довідник з елементарної математики, механіки та фізики. Ред. С.Г. Максимова. 1996. 192 с.

15. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі. *Наука і освіта*. 2014. № 1. С. 127-131. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NiO_2014_1_29.

16. Збірник завдань з математики для вступників до вузів. Навчальний посібник. за ред. М. І. Сканаві. Київ : Вища школа. 2012.

17. Значення тригонометричних функцій для деяких значень аргументу. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/7mihalevich_elementarna_matematika_algebra_ch2/8.htm

18._Істер О.С. Геометрія: підруч. Для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 216с.

19. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 384с.

20. Історія тригонометрії. Електронний ресурс. – Режим доступу https://www.turkaramamotoru.com/uk97-209105.html

21._Капіносов А.М. Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. Алгебра 10 клас. Київ: А.С.К., 1997. 80 с.

22. Каплун О. І. Алгебра і початки аналізу + геометрія. 10 клас: навчально-методичний посібник. Харків : ФОП Співак В. Л., 2010. 320 с.

23. Кара-Сал Н. М. Використання властивостей функцій під час вирішення математичних завдань. Навчально-методичний посібник з практикуму вирішення математичних завдань. Київ : ТДІПК та ПКК Уряду України, 2017.

24. Коробова Т. М., Овчарова Л. А. Застосування Web 2.0 технологій під час

уроків математики для формування основних математичних компетенцій за умов ДОС. *Школа як платформа для успішної соціалізації учнів лише на рівні професійної освіти* : матеріали IV регіональної науково-практичної (очно-заочної) конференції. Одеса: Одеський державний технічний університет, 2017. С. 333–337.

25. Лапчик М. П. Інформатика та технологія: компоненти педагогічної освіти. *Інформатика та освіта.* 2012. № 1. С. 3–6.

26. Лернер І. Я. Дидактичні засади методів навчання. Дніпро : Педагогіка, 2011. 186 с.

27. Ліпатнікова І. Г. Зміст математичної освіти в контексті реалізації концепції математичної освіти державного стандарту загальної освіти. *Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій.* 2015. № 1. С. 5–13.

28. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / І.В.Лов'янова. – Кривий Ріг: КДПУ, 2009. – 192с.

29. Македонська С.І. Побудова графіків тригонометричних функцій / С.І. Македонська. *Математика.* 2003. березень (№12) С. 8–11.

30. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням алгебри : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів Харків : Гімназія, 2016. 384 с.

31. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибл. вивч. математики. Харків: Гімназія, 2016. 224 с.

32. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі .Київ : Генеза, 2008. 312 с.

33. Навчальна программа з математики (5 – 9клас) для загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту). [Електронний ресурс] Режим доступу:https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni- programi-5-9-klas

34. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8–9 класах загальноосвітніх навчальнихз акладів. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-

klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

35. Навчальна програма з математики (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. . Рівень стандарту. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

36. Навчальна програма з математикидля учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

37. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. Рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416с.

38. Означення синуса, косинуса, тангенса та котангенса [Електронний ресурс] Режим доступу: http://geom9klas.blogspot.com/2015/01/blog-post_31.html

39. Офіційний веб – сайт Міністерства освіти і науки України [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua

40. Означення формул зведення [Електронний ресурс] Режим доступу: https://infopedia.su/9x52df.html

41. Петрова В. І. Використання сервісу Google Диска у створенні методичних матеріалів під час роботи з обдарованими дітьми з математики. *Вчитель створює націю.* Збірник матеріалів IV міжнародної науково- практичної конференції. Харків : Харків. державний педагогічний університет, 2019. С. 400–403.

42. Підкасистий П. І. Самостійна пізнавальна діяльність школярів у навчанні. Вінниця : Педагогіка, 2010. 240 с.

43. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми. *Наука і сучасність: зб. наук. пр.* / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. Київ. Логос, 2002. Том XXXIII. С.109–116.

44. Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв'язках. 10 клас. Тернопіль: Мандрівець. 2014. 80 с.

45. Позднякова Н. В., Колесникова О. І. Дидактичний потенціал мобільних

технологій у навчанні школярів математики на щаблі основної загальної освіти. *Психолого-педагогічний журнал ГАУДЕАМУС.* 2019. № 3(41). С. 19–26.
46. Пруднікова Т. А., Покакалова Т. А. Зарубіжний досвід застосування інформаційно-комунікаційних технологій для підвищення навчальної мотивації. *Сучасна зарубіжна психологія.* 2019. № 2. С. 67–82.
47. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Харків : Вид. група «Основа», 2011. 94 с.
48. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11.Харків: Вид. група «Основа». 2008. 96 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України». – Вид. 9 (69)).
49. Роганін О. М. Математика : Практичний довідник. Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. 416 с.50.
50. Роганова І. І. Використання мобільних додатків на уроках алгебри у 8 класі. *Міжнародний журнал гуманітарних та природничих наук.* 2018.№ 11-1. С. 103–106.
51. Семенова І. М., Слєпухін А. В. Визначення та дидактична конструкція методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. *Педагогічна освіта в Україні.* 2012. № 2. С. 184–189.
52. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики. 5–11 класи. 2-ге вид., перероб. і доп. Харьков: Видавництво «Ранок», 2011. 128 с.
53. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак – ЕКО, 2000. 512с.
54. Смоляков А. Н. Прийоми рішення тригонометричних рівнянь. *Математика в школі*. 2004. № 1. С. 24– 26.
55. Старостіна А. Є., Винокурова С. З. Формування математичних понять у шкільному курсі математики (на прикладі вивчення теми «Квадратні рівняння»). *Навчання та виховання: методика та практика 2016/2017 навчального року.* Київ : Товариство з обмеженою відповідальністю «Центр розвитку наукового співробітництва», 2017. С. 99–103.
56. Стратегія розвитку інформаційного суспільства в Україні, схвалена розпорядженням Кабінету Міністрів України від 15 травня 2013 р. № 386-р. URL: https://www.kmu.gov.ua/npas/246420577.

57. Тализіна Н. Ф. Управління процесом засвоєння знань. Миколаїв, 2014.234 с.
58. Тарасенкова Н. А. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Математика в школі.* 2008. №6. С. 3–9.
59. Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навч. посібник. Тернопіль : Вид-во «Освіта», 2010. 65 с.
60. Тригонометрична функція. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://formula.co.ua/uk/content/trigonometric-functions.html
61. Тригонометричні функції. Завдання та розв'язки. – К.: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. – Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».
62. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. Харків : Вид. група «Основа», 2010. 159 с.
63. Шабашова О. В. Прийоми відбору коренів в тригонометричних рівняннях. *Математика в школі*. 2004. №1. С.20–24.
64. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. 272 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця 2.3. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії у 8 класі

8 клас				
Автори, назва	Істер О.С, Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту)	Апостолова Г.В. Геометрія дворівневий підручник для 8 класу 2008р.	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія підручник для 8 класу 2016р. (поглиблений рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 3. «Розв'язування прямокутних трикутників»: § 18. Теорема Піфагора. § 19. Перпендикуляр і похила, їх властивості. § 20. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. §. 21. Розв'язування	IV розділ "Тригонометричні функції гострого кута. Обчислення прямокутного трикутника": § 26. Відповідність між відношеннями сторін і мірою гострих кутів у прямокутному трикутнику. § 27.(додатковий) Побудова кута за його тригонометричними функціями. Зміна значень тригонометричних функцій на інтервалі (0;90) §28.Тригонометричні функції доповняльних кутів §29.Співвідношення між	§ 3. "Розв'язування прямокутних трикутників": 15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику; 16.Теорема Піфагора 17.Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника 18.Розв'язування прямокутних трикутників	§5. "Розв'язування прямокутних трикутників": 22. Метричні співвідношенняв прямокутному трикутнику; 23. Теорема Піфагора 24.Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника 25. Розв'язування прямокутних трикутників

	прямокутних трикутників.	тригонометричними функціями одного і того самого кута §30.Значення тригонометричних функцій деяких кутів §31.Розв’язування прямокутних трикутників §32.(додатковий) Практичні задачі із застосуванням тригонометрії		
Виділення математичних об’єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Основний теоретичний матеріал позначено вертикальною кольоровоюрискою,за нею,нібизамітки на полях, розміщено головну опорну інформацію.	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом. жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою
Наявність прикладів, та їх віцдповідність завданням для розв’язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування.	Приклади з поясненнями є, але не в усіх параграфах. Ті, що, є відповідають завданням для розв’язування	У підручнику недостатня кількість прикладів з детальними поясненнями. Ті, що є, відповідають завданням для розв’язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв’язування
Наявність питань після параграфа для повторення	+	-	+	+

Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий рівень 2. Достатній рівень; 3.Середній рівень; 4.Високий рівень	Завдання поділено на чотири рівні: 2. Найпростіші 3. Дещо складніші 4. Завдання, які вимагають більш глибоких міркувань 5. Найскладніші	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 2. Початковий та середній рівень навчальних досягнень 3. Достатній рівень навчальних досягнень 4. Високий рівень навчальних досягнень завдання підвищеної складності	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями: 2. Початковий та середній рівень навчальних досягнень 3.Достатній рівень навчальних досягнень 4.Високий рівень навчальних досягнень завдання підвищеної складності
Наявність прикладу контрольної або самостійної роботи з теми	+	+	+	+
Нестандартні задачі в параграфі	Виділені окремою рубрикою «Цікаві задачі для учнів неледачих».	Виділені окремою рубрикою «Для допитливих»	Виділені окремою рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте»	Відсутні

Додаток Б

Продовження таблиці 2.3. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії в 9 класі

9 клас				
Автори, назви	Істер О.С. Геометрія; підручник для 9 класу, 2017р. (рівень стандарту)	Апостолова Г.В. Геометрія,дворівневийпідручник для 9 класу, 2009р.	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б. Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б. Якір М.С., Геометрія, підручник для 9 класу (поглиблений рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 1. Метод координат на площині §2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180°. Тригонометричні тотожності Розділ 3. Розв'язування трикутників § 11. Теорема косинусів § 12. Теорема синусів § 13. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі § 14. Формули для знаходження площі трикутника	Розділ І. Координатна площина. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°. Розв'язування трикутників: § 4. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180° §5. Теорема синусів §6. Теорема косинусів §7. Розв'язування трикутників §8. Площа трикутника і чотирикутника §9. (додатковий) Метод площ у теоремах і задачах §10.(додатковий) Метод координат як засіб розв'язування геометричних задач	§1. Розв'язування трикутників 1.Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180° 2.Теорема косинусів 3.Теорема синусів 4.Розв'язування трикутників 5.Формули для знаходження площ трикутника	§2. Розв'язування трикутників 2.Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180° 3. Теорема косинусів 4. Теорема синусів 5.Розв'язування трикутників 6. Формули для знаходження площі трикутника
Виділення математичних об'єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом. Основний теоретичний матеріал позначено вертикальною кольоровою рискою,за нею ніби замітки на полях, розміщено головну	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою

		опорну інформацію.		
Наявність прикладів, та їх відповідність завданням для розв'язування	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	Приклади з поясненнями є, але не в усіх параграфах. Ті, що є, відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.
Наявність питань після параграфа для повторення	+	-	+	+
Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1. Початковийрівень; 2. Достатній рівень; 3. Середній рівень; 4. Високий рівень	Завдання поділено на чотири рівні: 1.найпростіші; 2.дещо складніші; 3.завдання, які вимагають більш глибоких міркувань; 4.найскладніші	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий та середній рівень навчальних досягнень; 2.Достатній рівень навчальних досягнень; 3.Високий рівень навчальних досягнень; 4. Завдання підвищеної складності	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.Початковий та середній рівень навчальних досягнень; 2.достатній рівень навчальних досягнень; 3.високий рівень навчальних досягнень; 4. завдання підвищеної складності
Наявність контрольної або самостійної роботи з теми	+	+	+	-
Нестандартні задачі в параграфі	Виділені окремою рубрикою «Цікаві задачі для учнів неледачих».	Виділені окремою рубрикою «Для допитливих»	Виділені окремою рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте»	Відсутні

Додаток В

Продовження таблиці 2.4. Аналіз підручників щодо вивчення елементів тригонометрії у 10 класі

10 клас				
Автори, назви	Істер О.С. Математика, підручник для 10 класу, 2018 р. (рівень стандарту)	Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2010 р. (академічний рівень)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Математика, підручник для 10 класу (рівень стандарту)	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Д.А. Номіровський, Якір М.С., Алгебра і початки аналізу, підручник для 10 класу, 2018р.(профільний рівень)
Назви розділів та параграфів, що відносяться до даної теми	Розділ 2. Тригонометричні функції §7. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута §8. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. §9.Властивості тригонометричних функцій §10.Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу §11.Формули зведення §12.Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. §13.Тригонометричні формули додавання	Розділ3.Тригонометричні функції §16.Радіанна міра кутів §17.тригонометричні функції кута і числового аргументу §18.Властивості тригонометричних функцій §19.Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості. §20.Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу §21.Формули додавання та їх наслідки §22.Додаткові формули тригонометрії Розділ4.Тригонометричні рівняння й нерівності §23.Обернені тригонометричні функції	§2. Тригонометричні функції 8. Радіанна міра кутів 9.Тригонометричні функції числового аргументу 10.Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій 11. Властивості та графіки тригонометричних функцій 12.Основні співвідношенняміж тригонометричними функціями одного й того самого аргументу 13.Формули додавання 14.Формули зведення 15.Рівняння $cosx = b$ 16. Рівняння $sinx = b$і	§3.Тригонометричні функції 10.Радіанна міра кута 11.Тригонометричні функції числового аргументу 12..Знаки значень тригонометричних функцій. 13.Періодичні функції 14.Властивості та графіки функцій $y = sinx$і$y = cosx$ 15. Властивості та графіки функцій $y = tgx$і$y = ctgx$ 16. Основні співвідношенняміж тригонометричними функціями одного й того самого аргументу 17. Формули додавання 18. Формули зведення

	§14. Формули подвійного і половинного кута. Формули пониження степеня. §15.Формули суми й різниці однойменних тригонометричних функцій. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. §16.Найпростіші тригонометричні рівняння	§24.Розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь §25. .Розв’язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших §26.Розв’язування систем тригонометричних рівнянь §27.Найпростіші тригонометричні нерівності §28.Приклади розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем §29.Тригонометричні рівняння з параметрами §30.Розв’язування тригонометричних нерівностей.	$tgx = b$ 17. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних	19.Формули подвійного, потрійного та половинного кутів 20.Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій §4.Тригонометричні рівняння і нерівності *21.* Рівняння $cosx = b$ *22.* Рівняння $sinx = b$ *23.* Рівняння $ctgx = b$ $tgx = b$ *24.* Функції $y=arccosx$ $y=arcsin\ x$ *25.* Функції $y=arctgx$ $y=arcctg\ x$ 26. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних 27.Розв’язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники 28. Приклади розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь 29.Про рівносильні переходи під час розв’язування тригонометричних рівнянь

				30. Тригонометричні нерівності 31. Тригонометрична підстановка
Виділення математичних об'єктів	Теореми, означення, властивості, аксіоми позначені спеціальним знаком, надруковані жирним шрифтом та надруковані на кольоровому фоні.	Теореми, означення, властивості, аксіоми надруковані жирним шрифтом та виділені іншим кольором. Основні формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою	Означення, теореми, основні математичні твердження виділені жирним шрифтом, жирним курсивом та курсивом, формули виділені синьою рамкою
Наявність прикладів, та їх відповідність завданням для розв'язування	У підручнику достатня кількість прикладів з детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів з детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.	У підручнику достатня кількість прикладів із детальними поясненнями, які відповідають завданням для розв'язування.
Наявність питань після параграфа для повторення	-	+	+	-
Розподіл завдань за рівнями складності	Завдання розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий рівень 2. середнійрівень; 3.достатнійрівень; 4.високий рівень	Завдання розподілено за 3 рівнями складності: 1.середній рівень; 2.достатній рівень; 3.високий рівень.	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий та середній; 2.достатній рівень; 3.високий рівень; 4. завдання підвищеної складності;	Завдання в кожному пункті розподілено за 4 рівнями складності: 1.початковий та середній; 2.достатній рівень; 3.високий рівень; 4. завдання підвищеної складності;
Нестандартні задачі в параграфі	-	-	-	-

Додаток Г

Розв'язування трикутників

*Обов'язкове поле

1. Прізвище ім'я *

2. Синус гострого кута прямокутного трикутника це * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- відношення протилежного катета до гіпотенузи
- відношення прилеглого катета до гіпотенузи
- відношення протилежного катета до прилеглого катета
- відношення гіпотенузи до протилежного катета

3. Чи правильно, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

4. Чи правильно, що $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$ 1 бал

Виберіть лише один варіант.

- Так
- Ні

5. Чи правильно, що cos (90°-α) = sin α * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

Так

Ні

6. Чому дорівнює тангенс кута, якщо прилеглий катет дорівнює 6 см, а протилежний - 2 см 1 бал

Виберіть лише один варіант.

2/6

6/2

1/4

2/3

7. Чому дорівнює довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють 3 і 4 см відповідно? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

7 см

8 см

2 см

5 см

8. Чи правильне твердження, що синус прямокутного трикутника не залежить від градусної міри кута? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

Так

Ні

9. Чи правильне твердження, що якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні? * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

Так

Ні

10. Косинус гострого кута прямокутного трикутника це * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

відношення протилежного катета до гіпотенузи

відношення прилеглого катета до гіпотенузи

відношення протилежного катета до прилеглого катета

відношення гіпотенузи до протилежного катета

11. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника це * 1 бал

Виберіть лише один варіант.

відношення протилежного катета до прилеглого катета

відношення прилеглого катета до гіпотенузи

відношення гіпотенузи до протилежного катета