

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

**Функціональні рівняння у шкільному курсі математики**

Виконала: студентка II курсу магістратури, групи М-М-21

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Олійник Ольга Олександрівна

Керівник: д. т. н., проф. Бичков О.С.

Рецензент

Рівне 2023 року

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ВИДИ .....	6
1.1. Загальні поняття про функціональні рівняння.....	6
1.2. Функціональне рівняння Коші.....	8
1.2.1. Функціональне рівняння лінійної однорідної функції.....	8
1.2.2. Клас неперервних функцій .....	10
1.2.3. Клас монотонних функцій .....	11
1.2.4. Клас обмежених функцій .....	12
1.2.5. Клас диференційованих функцій .....	14
1.3. Функціональне рівняння показникової функції.....	15
1.4. Функціональне рівняння логарифмічної функції .....	16
1.5. Функціональне рівняння степеневої функції .....	16
1.6. Узагальнене функціональне рівняння Коші.....	18
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ .....	21
2.1. Метод заміни змінної та функції .....	21
2.2. Метод підстановок .....	24
2.3. Розв'язування функціональних рівнянь із застосуванням теорії груп .....	28
2.4. Застосування теорії матриць до розв'язування функціональних рівнянь. 32	
2.5. Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування функціональних рівнянь.....	33
2.5.1. Граничний перехід.....	33
2.6. Диференціювання.....	37
РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ .....	41
3.1. Функціональні рівняння у ШКМ.....	41
3.2. Задачі математичних олімпіад.....	61
ВИСНОВКИ.....	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	69

## ВСТУП

Основна освітня мета шкільного курсу математики полягає у передачі учням певної системи знань, умінь і навичок з математики. У шкільний курс входять такі розділи математики як основи тригонометрії, алгебра, а у старших класах знайомляться з основами математичного аналізу.

У систему важливих елементів математики входять такі поняття як рівняння, функція, прогресія і т.д. Серед представлених понять системоутворюючим елементом у свідомості учня важливу роль відіграє функція.

У шкільному курсі математики поняття функціональні рівняння не вивчаються. Однак учні зустрічаються з деякими видами даних рівнянь, під назвою «парність та непарність функцій». Функціональні рівняння також вивчаються та використовуються студентами вищих навчальних закладів.

Функціональними рівняннями займаються з давніх-давен, але цьому курсу так і не знайшлося гідного місця в математичних програмах. Розв'язання окремих функціональних рівнянь потребує досить глибокого розуміння предмету та прищеплює любов до самостійної творчої роботи. І хоча ця тема в шкільному курсі не вивчається через її складність, при вступі до престижних ЗВО, на олімпіадах такі завдання зустрічаються.

Таким чином тема «Функціональні рівняння в шкільному курсі математики» є актуальною і потребує детального дослідження.

**Метою даної магістерської роботи є аналіз, узагальнення і систематизація матеріалів про функціональні рівняння в шкільному курсі математики.**

З цією метою були поставлені такі **завдання** дослідження:

- дослідити навчальну літературу за темою дослідження;
- дати визначення поняття «функціональне рівняння»;
- дослідити види функціональних рівнянь;
- розглянути методи розв'язання функціональних рівнянь;

- розглянути приклади застосування функціональних рівнянь в шкільному курсі математики.

**Об'єкт дослідження** є процес навчання розв'язування функціональних рівнянь.

**Предметом дослідження** є система задач, яка спрямована на формування вміння розв'язувати функціональні рівняння.

**Апробація результатів дослідження.** За результатами роботи було підготовлено доповідь на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2023 рік. Також за результатами проведених досліджень було опубліковано тези доповіді на IV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Експериментальні та теоретичні дослідження в контексті сучасної науки» (м. Чернігів, 29 вересня 2023 року).

**Структура роботи.** Структурно робота складається з трьох розділів, які поділяються на підрозділи, висновки та список використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 69 сторінок.

# РОЗДІЛ 1. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ВИДИ

## 1.1. Загальні поняття про функціональні рівняння

Функціональним рівнянням називається рівняння, в якому невідома функція пов'язана з відомими функціями з допомогою арифметичних дій та операції утворення складеної функції.

Прикладами функціональних рівнянь можуть бути рівняння:

$$f(x + 3) - 4f(x + 1) + f(x) = 0,$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Деякі функціональні рівняння

$$f(x) = f(-x), f(-x) = -f(x), f(x + T) = f(x),$$

які вивчаються в шкільному курсі математики, визначають такі властивості функцій, як парність, непарність та періодичність [2].

Функція  $f(x)$  називається розв'язком функціонального рівняння в області  $D$ , якщо вона задовольняє його при всіх значеннях незалежних змінних з цієї області [4].

Тобто, функція  $f(x)$  є розв'язком функціонального рівняння, якщо вона, при підстановці в рівняння замість невідомої функції, перетворює його в тотожність [19].

Задачі на розв'язування функціональних рівнянь є одними з найдавніших задач математичного аналізу. Вони виникли майже одночасно з початками теорії функцій. Перший справжній розквіт дисципліни був пов'язаний із задачею про паралелограм сил. Ще в 1769 році Даламбер звів доведення закону додавання сил до розв'язування функціонального рівняння

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y). \quad (1.1)$$

У 1804 році Пуассон розглянув те саме рівняння за певних аналітичних припущень і з тією ж метою, тоді як у 1821 році Коші (1789-1857) знайшов загальні розв'язки цього рівняння, припускаючи лише неперервність  $f(x)$ :

$$f(x) = \cos ax,$$

$$f(x) = \cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2},$$

$$f(x) \equiv 0.$$

М. І. Лобачевський (1792-1856) навіть вивів знамениту формулу неевклідового паралельного кута

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \prod(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

з функціонального рівняння

$$f^2(x) = f(x - y) \cdot f(x + y), \quad (1.2)$$

яке він розв'язав методом, аналогічним Коші. Це рівняння можна звести до рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Англійський математик Ч. Беббідж (1792-1871) розглядав деякі геометричні задачі, що приводять до функціональних рівнянь. Наприклад, він вивчав періодичні криві другого порядку, які визначаються такими властивостями для будь-якої пари точок кривої: якщо абсциса другої точки дорівнює ординаті першої точки, то ордината другої точки дорівнює осі абсцис. Нехай така крива – графік функції  $y = f(x)$ ,  $(x, f(x))$  – її довільна точка. Тоді, згідно з умовою, ордината точки, абсциса якої  $f(x)$ , дорівнює  $x$ . Отже,

$$f(f(x)) = x. \quad (1.3)$$

Одним із найпростіших функціональних рівнянь є рівняння Коші:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (1.4)$$

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad (1.5)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad (1.6)$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y). \quad (1.7)$$

Коші детально вивчив ці рівняння у своїй публікації 1821 року. Неперервні розв'язки цих чотирьох основних рівнянь мають вигляд

$$f(x) = ax, a^x, \log_a x, x^a \quad (x > 0).$$

У класах розривних функцій можуть бути й інші розв'язки. Рівняння (1.4) розглядали Лежандр і Гаусс, коли вони вивели фундаментальну теорему проєктивної геометрії та вивчали закон розподілу ймовірностей Гаусса [4].

Г. Дарбу знову застосовує функціональне рівняння (1.4) до задачі про паралелограм сил і до основної теореми проєктивної геометрії, головним

досягненням якого є значне послаблення припущень. Відомо, що функціональне рівняння Коші (1.4) описує лінійну однорідну функцію  $f(x) = ax$  у класі неперервних функцій. Дарбу показав, що будь-який розв'язок, неперервний принаймні в одній точці або обмежений зверху (або знизу) у довільному малому інтервалі, повинен мати вигляд  $f(x) = ax$ . Далі були отримані результати щодо припущень про ослаблення (інтегрованість, вимірність набору позитивних заходів, навіть більшість вимірних функцій). Тут виникає питання: чи існує хоча б одна адитивна функція (тобто така, що задовольняє (1.4)), яка відрізняється від лінійної однорідної функції. Для раціонального числа  $x$  значення будь-якої адитивної функції повинно узгоджуватися зі значенням деякої лінійної однорідної функції, тобто  $f(x) = ax$  для  $x \in \mathbb{Q}$ . Тоді  $f(x) = ax$  для всіх дійсних  $x$ . Перший приклад розривного розв'язку функціонального рівняння (1.4), відмінного від  $f(x) = ax$ , був побудований в 1905 р. німецьким математиком Р. Гамелем за допомогою введених ним дійсних чисел [2].

Багато функціональних рівнянь визначають не конкретні функції, а великий клас функцій, тобто виражають властивості, що характеризують той чи інший клас функцій. Наприклад, функціональне рівняння

$$f(x + 1) = f(x)$$

характеризує клас функцій, що мають період 1, а рівняння

$$f(1 + x) = f(1 - x) -$$

клас функцій, симетричних щодо прямої  $x = 1$ , тощо [8].

## 1.2. Функціональне рівняння Коші

### 1.2.1. Функціональне рівняння лінійної однорідної функції

Одним із найбільш досліджених у математиці є функціональне рівняння Коші.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), D(f) = \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Неважко помітити, що лінійні однорідні функції виду

$$f(x) = ax \quad (a = \text{const})$$

задовольняють це рівняння:

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Потрібно переконатися в тому, чи ці функції будуть єдиними.

Насамперед, виведемо деякі загальні факти, не накладаючи жодних обмежень на функцію  $f$  (тобто не роблячи жодних припущень щодо неперервності, обмеженості тощо) [5].

Поклавши у рівнянні (1.4)  $y = x$ , отримаємо:

$$f(2x) = 2f(x).$$

Далі, послідовно вважаючи  $y = 2x$ ,  $y = 3x$ ,  $y = 4x$  і так далі, маємо:

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x);$$

$$f(4x) = f(x) + f(3x) = 4f(x);$$

$$f(5x) = f(x) + f(4x) = 5f(x),$$

і взагалі, для будь-якого натурального  $n$

$$f(nx) = n \cdot f(x). \quad (1.5)$$

Замінивши тут  $x$  на  $\frac{1}{n}x$ , ми отримаємо

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

Тоді, якщо ми замінимо  $mx$  ( $m$  – натуральне) замість  $x$  і використаємо попереднє рівняння, ми отримаємо співвідношення

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x). \quad (1.6)$$

Покладемо тепер переважно рівнянні (1.4)  $x = y = 0$ ; отримаємо

$$f(0) = 2f(0), \text{ так що } f(0) = 0. \quad (1.7)$$

Якщо взяти  $y = -x$ , то:

$$0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

$$f(-x) = -f(x),$$

так, що функція  $f(x)$  є непарною. А тоді з (1.5) легко вивести:

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x). \quad (1.8)$$

Отримані співвідношення (1.6)-(1.8) можуть бути об'єднані в рівності

$$f(rx) = r \cdot f(x),$$

яка істинна для будь-якого дійсного значення  $x$ , незалежно від раціонального числа  $r$ .

Якщо взяти тут  $x = 1$ , отримаємо

$$f(r) = r \cdot f(1), \quad (1.9)$$

або, якщо позначити  $f(1)$  через  $a$ , то

$$f(r) = ar.$$

Таким чином, фактично встановлено вигляд функції  $f$ , але поки лише для раціональних значень аргументів. При цьому використано лише те, що функція задовольняє основне рівняння Коші (1.4). У подальших пошуках потрібно виходити із конкретного класу функцій, для якого шукаємо розв'язок. Розглянемо кілька найбільш загальних класів функцій [9, 24].

### 1.2.2. Клас неперервних функцій

Для раціональних чисел  $x$  встановлено, що

$$f(x) = ax.$$

Це все ще показує, що співвідношення також істинне для ірраціонального числа  $x$ . Нехай  $x$  – будь-яке ірраціональне число. Тоді існує послідовність раціональних чисел

$$r_1, r_2, \dots, r_n \dots,$$

що збігається до цього числа  $x$  (це відомий факт; можна, наприклад, взяти відрізки відповідного нескінченного десяткового дробу). За доведеним

$$f(r_n) = ar_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Перейдемо тут до границі при  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ar_n).$$

Праворуч ми отримаємо  $ax$ , зліва ж, саме через припущення неперервності функції  $f$ , отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = f(x)$$

так що, остаточно

$$f(x) = ax.$$

Таким чином, фактично всі послідовні адитивні функції рівномірно лінійні. Останнє формулювання дає загальний розв'язок функціонального рівняння (1.4) [5].

### 1.2.3. Клас монотонних функцій

Тут будемо вважати, що функція  $f$  не спадає на всій дійсній осі (випадок незростаючих функцій розглядається аналогічно). Отже,  $f(x_1) \leq f(x_2)$  для будь-якого  $x_1 < x_2$ .

Для раціональних  $x$  доведено, що

$$f(x) = xf(1).$$

Візьмемо довільне ірраціональне  $x$ . Добре відомо, що будь-яке ірраціональне число можна наблизити як завгодно точно раціональними числами, тому для будь-якого натурального числа  $q$  існує таке ціле число  $p$ , що

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} \quad (1.10)$$

і за досить великих  $q$  число  $x$  розташоване між двома дуже близькими раціональними числами, різниця між якими дорівнює  $\frac{1}{q}$ . Використовуючи монотонність функції  $f$ , знаходимо

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

звідки (скориставшись співвідношенням для раціональних значень функції  $f$ )

$$a\frac{p}{q} \leq f(x) \leq a\frac{p+1}{q}, \quad a = f(1). \quad (1.11)$$

Так як із (1.7)

$$f(0) = 0,$$

то  $f(1) \geq 0$ , адже функція  $f$  не зменшується, значить,  $a \geq 0$ .

Якщо  $a = 0$ , то із нерівності

$$0 \leq f(x) \leq 0,$$

маємо

$$f(x) \equiv 0.$$

Якщо  $a = 0$ , то із (1.11)

$$\frac{p}{q} \leq \frac{f(x)}{a} \leq \frac{p+1}{q}. \quad (1.12)$$

Порівнюючи ці нерівності з (1.10), отримаємо

$$\frac{f(x)}{a} = a.$$

Припустимо, що це не так, наприклад,

$$\frac{f(x)}{a} < a$$

для вибраного ірраціонального  $x$ . Підберемо  $q$  настільки великим, щоб дріб потрапив між  $\frac{f(x)}{a}$  і  $x$

$$\frac{f(x)}{a} < \frac{p}{q} < x$$

що суперечить (1.12). Отримана суперечність показує, що

$$\frac{f(x)}{a} = a$$

для будь-якого заданого ірраціонального  $x$  тому  $f(x) = ax$  для всіх  $x$  [13].

#### 1.2.4. Клас обмежених функцій

Нехай тепер функція  $f(x)$  обмежена з одного боку (тобто обмежена зверху або знизу) на якомусь інтервалі  $(a, b)$ . Потрібно довести, що однорідними лінійними функціями вичерпуються всі розв'язки (1.4) в даному класі. Досліджуємо розв'язок рівняння (1.4), припускаючи, що  $f$  обмеженою зверху (випадок, коли  $f$  обмежена знизу, зводиться до випадку заміни  $f$  на  $-f$ ) [13].

Вважатимемо, що функція  $f$  обмежена зверху константою  $M$ , тобто  $f(x) \leq M$  для всіх  $x \in (a, b)$ . Розглянемо допоміжну функцію

$$g(x) = f(x) - x \cdot f(1).$$

За доведеним вище  $g(x) = 0$  за будь-якого раціонального  $x$ . Крім того, функція  $g(x)$  також є адитивною. Справді,

$$g(x+y) = f(x+y) - (x+y) \cdot f(1) =$$

$$= f(x) + f(y) - xf(1) - yf(1) = g(x) + g(y).$$

Підставимо  $y = r$  ( $r$  – раціональне) у рівність

$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$

отримаємо, враховуючи  $g(r) = 0$ ,

$$g(x + r) = g(x) + g(r) = g(x).$$

Отже, будь-яке раціональне число  $r \in$  періодом функції  $g(x)$ .

Покажемо тепер, що  $g(x)$  обмежена інтервалі  $(a, b)$ . Маємо

$$g(x) = f(x) - xf(1) \leq f(x) + |x| \cdot |f(1)| \leq M + |x| \cdot |f(1)| \leq M_1$$

де  $M_1 = M + \max\{|a|, |b|\}|f(1)|$ , оскільки  $|x| < \max\{|a|, |b|\}$ , при  $a < x < b$ .

Звідси випливає, що  $g(x)$  обмежена зверху по всій осі. Насправді, для будь-якого дійсного  $x$  існує раціональне число  $r$  таке, що  $r \in (a - x, b - x)$ , тобто

$a < x + r < b$ . Тому

$$g(x) = g(x + r) < M_1,$$

оскільки  $x + r \in (a, b)$ , але в інтервалі  $(a, b)$  функція  $g$  обмежена числом  $M_1$ .

Тепер можна стверджувати, що  $g(x) = 0$  для будь-якого дійсного  $x$ . Припустимо, що це не так, тобто для деякого  $x_0$

$$g(x_0) = A, A \neq 0.$$

Оскільки для функції  $g(x)$ , як для будь-якої адитивної функції, вірно співвідношення (1.5), то

$$g(nx_0) = ng(x_0) = nA.$$

для будь-якого цілого числа  $n$ . Очевидно, що  $n$  можна вибрати таким чином (яке може бути досить великим за абсолютною величиною), що

$$nA > M_1, \text{ тобто } g(nx_0) > M_1.$$

Але функція  $g$  обмежена зверху константою  $M_1$ . Отримуємо протиріччя. Значить,

$$g(x) \equiv 0,$$

звідки

$$f(x) = xf(1),$$

що й вимагалось.

### 1.2.5. Клас диференційованих функцій

Легко перевірити, що й функція  $f(x)$  диференційована у точці  $x_0$ , вона безперервна у цій точці, Як показує приклад функції  $f(x) = |x|$ , зворотне твердження, взагалі кажучи, неправильне. Розв'язком рівняння Коші у класі функцій, що диференціюються, є лінійна однорідна функція. Проте, метод розв'язання рівняння Коші у припущенні диференційованості  $f(x)$  становить інтерес через його простоту. При фіксованому  $y \in R$ ,  $f(x + y)$  і  $f(x) + f(y)$  є функціями змінної  $x \in R$ . Зважаючи на їх рівність, рівні також їх похідні (за змінною  $x$ !). Продиференціювавши обидві частини рівності (1.4), отримаємо

$$f'(x + y) = f'(x) \quad (1.13)$$

$((f(y)))' = f'(x)$  як похідна сталої). Рівність (1.13) виконується для будь-яких  $x \in R$ ,  $y \in R$ , так як у можна було вибрати довільно, Поклавши в (1.13)  $x = 0$ , прийдемо до тотожності

$$f'(y) = f'(0) = c$$

для всіх  $y \in R$ . Отже,  $f(x)$  – стала функція. Тому її первісна

$$f(x) = cx + b, \quad (1.14)$$

де  $b$  – деяке дійсне число. Перевірка показує, що (1.14) задовольняє (1.4) лише при  $b = 0$ ,  $c \in R$  [2, 23].

Існують інші класи функцій, де адитивні функції обов'язково лінійно однорідні, але приклади були знайдені для адитивних функцій і класу розривних функцій. Цей приклад був створений Гамелем. Побудована функція має такі властивості: на будь-якому (довільно вибраному) інтервалі  $(a, b)$ , яким би малим він не був, функція  $f(x)$  є необмеженою, тобто між значеннями, яких ця функція набуває на цьому інтервалі, є таке, яке є більшим за будь-яке попередньо визначене додатне число. Щоб побудувати таку функцію, Гамель ввів набір дійсних чисел  $G$ , який тепер називається базисом Гамеля, який має ту властивість, що будь-яке дійсне число  $x$  може бути виражене унікальним способом у формі

$$x = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_k g_k, n_i \in Z, g_i \in G.$$

Довільно поклавши значення  $f(x)$  у точках множини  $G$ , можна однозначно продовжити її на всю числову пряму за допомогою рівності

$$\begin{aligned} f(x) &= f(n_1g_1 + n_2g_2 + \dots + n_kg_k) = \\ &= n_1f(g_1) + n_2f(g_2) + \dots + n_kf(g_k), \end{aligned}$$

що випливає з властивості адитивної функції. Такими функціями вичерпуються розв'язки (1.4) [14].

### 1.3. Функціональне рівняння показникової функції

Доведемо, що всі функції, які неперервні на всій дійсній прямій, задовольняють функціональне рівняння

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \quad (1.15)$$

задаються формулою

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

(якщо не розглядати функції, що дорівнюють 0).

Отже, нехай  $f(x)$  є неперервною і визначеною функцією при всіх дійсних числах  $x$ , що задовольняють (1.15). Виключимо з розгляду очевидний розв'язок  $f(x) \equiv 0$ . Тоді для деякого  $x = x_0$  ця функція є відмінною від нуля. Покладемо у (1.15)  $y = x_0 - x$ :

$$f(x) \cdot f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0.$$

отже, зрозуміло, що  $f(x)$  не дорівнює нулю для будь-якого  $x$ . Підставляючи  $x$  і  $y$  в (1.5) на  $\frac{x}{2}$ , отримуємо

$$f(x) = \left( f\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2.$$

тобто,  $f(x)$  строго більше 0 для всіх  $x$ . Тоді рівняння (1.15) можна прологарифмувати, наприклад, за основою  $e$ :

$$\ln f(x + y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Підставляючи  $\varphi(x = \ln f(x))$  у це співвідношення, отримуємо рівняння функції Коші (1.4):

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Враховуючи, що  $\varphi$  це неперервна функція (як послідовне виконання неперервних функцій), отримаємо за доведенням:

$$\varphi(x) = \ln f(x) = cx \quad (c = \text{const}).$$

звідки знаходимо, що

$$f(x) = e^{ix} = a^x \quad (\text{якщо покласти } a = e^c).$$

Тому єдиними неперервними функціями, що відповідають рівнянню Коші (1.15), є показникові функції (або функція, тотожна нулю) [18].

#### 1.4. Функціональне рівняння логарифмічної функції

Для функціонального рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad (1.16)$$

усі його неперервні розв'язки є істинними для всіх додатних значень  $x$  і  $y$ , та мають вигляд

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Для того, щоб це довести введемо нову змінну  $\xi$ , що змінюється в інтервалі  $(-\infty; +\infty)$ , і задамо

$$x = e^\xi \quad (\text{адже } x > 0), \quad \varphi(\xi) = f(e^\xi),$$

звідки

$$\xi = \ln x, \quad f(x) = \varphi(\ln x).$$

Тоді функція  $\varphi$  є розв'язком функціонального рівняння (1.4) [9]:

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^\xi \cdot e^\eta) = f(e^\xi) + f(e^\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

тому

$$\varphi(\xi) = c\xi \quad \text{і} \quad f(x) = c \ln x.$$

Якщо не враховувати випадок  $c = 0$  (тоді  $f(x) \equiv 0$ ), результат можна записати у такому вигляді

$$f(x) = \log_a x, \quad a = e^{\frac{1}{c}}.$$

#### 1.5. Функціональне рівняння степеневі функції

У класі неперервних функцій рівняння

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad (x > 0, y > 0) \quad (1.17)$$

задовольняють лише функції виду

$$f(x) = x^a.$$

Використовуючи ті самі заміни, що й у підрозділі 1.3, рівняння (1.17) можна перевести у рівняння (1.4):

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^\xi) \cdot f(e^\eta) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta)$$

звідки

$$\varphi(\xi) = c^\xi \quad (> 0), \text{ тобто } f(x) = c^{\ln x} = x^a \quad (a = \ln c).$$

Аналогічним чином можна розв'язувати й інші функціональні рівняння.

Нехай, наприклад, слід знайти функцію  $f$ , яка є визначеною і неперервною на  $R$ ,  $f(1) = 1$  і для будь-яких двох дійсних  $x$  і  $y$

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y).$$

Очевидно, що при  $x = y = 0$ , із вихідного рівняння отримуємо

$$f(0) = 0,$$

при  $y = 0$  маємо

$$f(x) = f(|x|),$$

звідки слідує, що  $f$  – парна, і достатньо обмежитись розглядом тільки додатних значень аргументу [17].

За допомогою індукції, легко отримати, що

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

Справді, за припущенням індукції

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) &= f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right) + \\ &+ f(x_{n+1}) = f\left(\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2}\right). \end{aligned}$$

Вважаючи, що

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{\frac{k}{n}},$$

будемо мати

$$nf\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) = f(\sqrt{k}) = f(\sqrt{1+1+\dots+1}) = kf(1) = k,$$

тобто

$$f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) = \frac{k}{n}.$$

Якщо ж  $x = \frac{p}{q}$  – додатне і раціональне, то

$$f(x) = f\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}\right) = \frac{p^2}{q^2} = x^2,$$

якщо  $x$  – ірраціональне, то  $x$  є границею послідовності раціональних чисел,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$$

і через неперервність  $f$  матимемо

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 = x^2.$$

## 1.6. Узагальнене функціональне рівняння Коші

Нехай  $n$  – фіксоване натуральне число. Розглянемо функціональне рівняння

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n, \quad (1.18)$$

де  $D(f) = R$ . При  $n = 1$  воно стає рівнянням Коші. Як показано, у класі неперервних функцій єдиним розв'язком рівняння Коші є однорідна лінійна функція. Результати Гамеля показують, як розривні функції також можуть задовольняти рівняння Коші. Покажемо, що розв'язок рівняння (1.18) є неперервною функцією при  $n > 1$  [5, 22].

Враховуючи  $x = y = 0$ , отримуємо  $f(0) = 0$ . Отже, для  $x = 0$  з (1.18) маємо  $f(y^n) = (f(y))^n$  для всіх  $y \in R$ . Кожне невід'ємне число  $z$  можна записати як  $z = y^n$ . Звідси

$$\begin{aligned} f(x + z) &= f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n = \\ &= f(x) + f(y^n) = f(x) + f(z), z \geq 0, z \in R. \end{aligned}$$

Зокрема, при  $x = -z$

$$f(x) + f(z) = f(-z) + f(z) = f(-z + z) = f(0) = 0$$

тобто

$$f(-z) = -f(z), z \in R.$$

Якщо ж  $z \geq 0$ , то

$$f(x - z) = -f(-x + z) = -(f(-x) + f(z)) = -f(-x) - f(z) = f(x) - f(z).$$

Звідси випливає, що

$$f(x + w) = f(x) + f(w)$$

для всіх  $x \in R, w \in R$ , тобто  $f(x)$  – адитивна функція. Для адитивної функції при раціональних  $t$  має місце співвідношення  $f(tw) = tf(w)$ . Легко бачити, що

$$f((t + x)^n) = (f(t + x))^n = (f(t) + f(x))^n. \quad (1.19)$$

Скориставшись формулою Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

і адитивністю  $f(x)$ , перетворимо окремо ліву та праву частини (1.19) при раціональних  $t$ :

$$\begin{aligned} f((t + x)^n) &= f\left(\sum_{k=0}^n C_n^k t^{n-k} x^k\right) = \sum_{k=0}^n f(C_n^k t^{n-k} x^k) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^{n-k} f(x^k); \\ (f(t) + f(x))^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (f(t))^{n-k} (f(x))^k = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (tf(1))^{n-k} (f(x))^k = \sum_{k=0}^n C_n^k t^{n-k} (f(1))^{n-k} (f(x))^k. \end{aligned}$$

Праві частини останніх двох рівнянь є многочленами від  $t$ . Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $t$ , отримаємо

$$f(x^k) = (f(1))^{n-k} (f(x))^k, k \in Z_0, n > 1.$$

Зокрема, для  $k = 2$  маємо

$$f(x^2) = (f(1))^{n-2} (f(x))^2. \quad (1.20)$$

Якщо  $(f(1))^{n-2} > 0$ , то  $f(x)$  – функція, що зменшується. Справді, будь-який  $y > 0$  можна подати у вигляді  $y = x^2$ , тому з (1.20) маємо

$$f(y) = f(x^2) \geq 0.$$

При

$$x_1 > x_2, x_1 - x_2 > 0, f(x_1 - x_2) \geq 0,$$

або, через адитивність

$$f(x), f(x_1) - f(x_2) \geq 0.$$

Якщо ж

$$(f(1))^{n-2} < 0,$$

аналогічно доводиться, що функція  $f(x)$  – незростаюча.

Вище було доведено, що адитивна функція також монотонна і має вигляд  $f(x) = ax$ .

Вважаючи в (1.20)  $x = 1$ , отримаємо, що  $f(1)$  дорівнює 0 або 1 при парному  $n$  і  $f(1)$  дорівнює 0, 1 або  $-1$  при непарному  $n > 1$ .

Отже,  $f(x) = x$  або  $f(x) = 0$  при парних  $n$ ;  $f(x) = x$ , або  $f(x) = -x$ , або  $f(x) = 0$  при непарних  $n > 1$  [5].

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 2.1. Метод заміни змінної та функції

Для певних типів функціональних рівнянь можливе зведення до рівнянь, загальні розв'язки яких уже відомі. Найчастіше, такі рівняння зводяться до основних рівнянь Коші. Метод заміни заснований на ідеї введення допоміжної функції, яку підбирають так, щоб після перетворень ставало очевидно, що вона задовольняє те чи інше відоме функціональне рівняння [15, 21].

Проілюструємо практичне застосування методу заміни на прикладах.

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, x, y \in R. \quad (2.1)$$

у класі неперервних функцій.

*Розв'язання.* Замінімо в рівнянні (2.1)  $x$  на  $(x+y)$  і  $y$  на  $0$ , тоді отримаємо

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + f(0)}{2} = \frac{f(x+y) + c}{2}, c = f(0).$$

Порівнюючи отримані співвідношення рівнянням (2.1), маємо:

$$f(x+y) + c = f(x) + f(y). \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) перетворюється в рівняння Коші підстановкою

$$g(x) + f(y) = a,$$

тоді

$$g(x) = ax,$$

$$f(x) = ax + c.$$

Функція  $f(x)$  задовольняє рівняння (2.1), отже, є його розв'язком.

*Приклад 2.* Знайти всі неперервні функції  $f(x), x \in (0; +\infty)$ , для яких різниця  $f(x_1y) - f(x_2y)$  при довільних допустимих значеннях  $x_1$  і  $x_2$  не залежить від  $y$ .

*Розв'язання.* За умовою,

$$f(xy) - f(y) \quad (x_1 = x, x_2 = 1)$$

залежить лише від  $x$ , тому

$$f(xy) - f(y) = f(x) - f(1).$$

Нехай  $g(x) = f(x) - f(1)$ , тоді отримає функціональне рівняння Коші

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Відомо, що в класі неперервних функцій  $g(x) = c \ln x$ . Звідси  $f(x) = c \ln x + b$ , де  $b = f(1)$ . Перевірка показує, що умову задачі задовольняють функції  $f(x) = c \ln x + b$  при довільних  $b$  і  $c$ .

Розглянемо тепер випадок, коли  $x_1$  і  $x_2$  – різні фіксовані числа. Так як  $f(x_1 y) - f(x_2 y)$  не залежить від  $y$ , то

$$f(x_1 y) - f(x_2 y) = c.$$

Нехай  $x_2 y = x$ , тоді

$$f(ax) = f(x) + c,$$

де  $a = \frac{x_1}{x_2} \neq 1, a > 0, c$  – стала.

Замінивши  $x$  на  $e^x$ , отримаємо

$$f(e^{x+\ln a}) - c = f(e^x), x \in R.$$

Виразивши з обох частин  $\frac{cx}{\ln a}$ , отримаємо

$$f(e^{x+\ln a}) - \frac{c(x + \ln a)}{\ln a} = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a}$$

або

$$g(x + \ln a) = g(x),$$

де

$$g(x) = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a}.$$

Рівняння  $g(x + \ln a) = g(x)$  задовольняють періодичні функції, з періодом  $\ln a$ . Звідси

$$g(x) = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a}.$$

При перевірці можна переконатися, що функції виду

$$f(x) = g(\ln x) + a \ln x,$$

де  $a$  – довільна стала, а  $g(x)$  – неперервна періодична функція з періодом  $\ln \frac{x_1}{x_2}$ ,

мають всі необхідні властивості, щоб задовольнити умову задачі.

*Приклад 3.* Відомо, що додавання дійсних володіє сполучною властивістю:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

для будь-яких  $x, y, z \in R$ . Потрібно знайти всі неперервні функції  $f(x)$ , що «зберігають» сполучність, тобто

$$f(x + y) + f(z) = f(x) + f(y + z). \quad (2.3)$$

*Розв'язання.* Перепишемо (2.3) у вигляді

$$f(x + y) - f(x) = f(y + z) - f(z). \quad (2.4)$$

Можна побачити, що ліва частина не залежить від  $x$ , тобто

$$f(x + y) - f(x) = g(y).$$

При  $x = 0$  маємо

$$f(y) = g(y) + a, a = f(0).$$

Отже, отримали функціональне рівняння Коші

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Неперервним розв'язком цього рівняння є функції  $g(x) = cx$ . Таким чином  $f(x) = cx + a$ , де  $a$  і  $c$  – довільні сталі.

*Приклад 4.* Знайти плоскі криві, що мають наступну властивість: для довільних двох точок сума добутку абсциси однієї точки на ординату іншої дорівнює ординаті точки, абсциса якої дорівнює добутку абсцис даних точок.

*Розв'язання.* Обмежимося пошуком кривих, які є графіками неперервних функцій, визначених при додатних значеннях аргументу.

Завдання зводиться до розв'язання функціонального рівняння

$$f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

Нехай  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ . Тоді отримаємо одне з рівнянь Коші виду

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Так як  $g(x)$  неперервна при  $x > 0$ , то  $g(x) = c \ln x$ . Звідси

$$f(x) = cx \ln x$$

з довільною сталою  $c$ .

*Приклад 5.* Знайти розв'язки функціонального рівняння

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

які є неперервними функціями.

*Розв'язання.* Виберемо у якості підстановки функцію:

$$g(x) = f(x) - x^2.$$

Тоді, підставивши у вихідне рівняння

$$f(x) = g(x) + x^2,$$

отримаємо

$$g(x + y) + (x + y)^2 = g(x) + x^2 + g(y) + y^2 + 2xy,$$

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Це рівняння Коші і його розв'язком є функція

$$g(x) = ax.$$

Отже знаходимо, що

$$f(x) = x^2 + g(x) = x^2 + ax,$$

і всі такі функції є шуканими неперервними розв'язками.

## 2.2. Метод підстановок

Заміна деяких змінних функціонального рівняння або конкретними значеннями, або будь-якими іншими виразами допомагає спростити це рівняння, або звести його до такого виду, що подальше розв'язання не становитиме труднощів. Перевага такого способу якраз полягає в тому, що у деяких випадках він дозволяє знайти розв'язок в класі усіх можливих функцій [15].

*Приклад 6.* Знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(xy) = y^k f(x), k \in \mathbb{N}.$$

*Розв'язання.* Нехай в рівнянні  $x = 0$ ;  $f(0) = y^k f(0)$ . Оскільки  $y$  – довільне, то  $f(0) = 0$ .

Нехай тепер  $x \neq 0$ . Підставимо у вихідну рівність

$$y = \frac{1}{x},$$

одержимо:

$$f(1) = \left(\frac{1}{x}\right)^k f(x),$$

або

$$f(x) = ax^k \quad (a = f(1)).$$

А це і означає, що функція  $f(x) = ax^k$  є розв'язком даного рівняння.

*Приклад 7.* Знайдіть всі функції  $f(x)$ , визначені на  $I = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ , для яких

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) - 2f(x) = x.$$

*Розв'язання.* Поклавши по чергово

$$x = \frac{x-1}{x}$$

та

$$x = \frac{1}{1-x},$$

отримаємо систему:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) - 2f(x) = x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}, \\ 2f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{1-x}. \end{cases}$$

Останнє рівняння цієї системи є сумою перших двох, взятою з протилежним знаком, тобто дана система є невизначеною відносно функції  $f(x)$ . З першого та другого рівнянь отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{3} \frac{2x^2 + x - 1}{x}, \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) &= f\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{3} \frac{2x^2 + x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Таким чином,  $f(x)$  можна вибрати довільним чином на одному з інтервалів  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ , а останні рівності визначають її розширення на усю область визначення.

*Приклад 8.* Знайдіть таку функцію  $f(x)$  визначену для всіх  $x \neq 1$ , що задовольняє рівняння

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + g(x),$$

де  $a \neq \pm 1$  – дійсне число,  $g$  – задана функція, визначена при  $x \neq 1$ .

*Розв'язання.* Введемо заміну

$$x = \frac{x}{x-1}.$$

Після підстановки у вихідне рівняння, одержимо систему

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + g(x), \\ f(x) = af\left(\frac{x}{x-1}\right) + g\left(\frac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

розв'язком якої при  $a \neq \pm 1$  є функція

$$f(x) = \frac{ag(x) + g\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}.$$

*Приклад 9.* Знайдіть розв'язок системи функціональних рівнянь відносно невідомих функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ :

$$\begin{cases} f(2x) + 2g(2x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + x + 1}{x}. \end{cases}$$

*Розв'язання.* В першому рівнянні зробимо заміну

$$2x = \frac{1}{z}.$$

При цьому

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x} = \frac{2z^2 + z + 1}{z},$$

і перше рівняння набуде вигляду:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2z^2 + z + 1}{z}$$

або

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}.$$

В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) + 2g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + x + 1}{x}, \end{cases}$$

розв'язком якої є

$$g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = x + 1.$$

*Приклад 10.* Знайдіть всі функції, які визначені на множині  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , і задовольняють співвідношення

$$(x - 1) \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x.$$

*Розв'язання.* Змінімо  $x$  на  $\frac{x+1}{x-1}$ . Отримаємо

$$\left(\frac{x + 1}{x - 1} - 1\right) \cdot f\left(\frac{\frac{x + 1}{x - 1} + 1}{\frac{x + 1}{x - 1} - 1}\right) - f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Звідси

$$\frac{2}{x - 1} \cdot f(x) - f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} (x - 1) \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x, \\ \frac{2}{x - 1} \cdot f(x) - f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{x + 1}{x - 1}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виразимо  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  і підставимо в друге рівняння:

$$f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{f(x) + x}{x - 1}; \quad \frac{2}{x - 1} \cdot f(x) - \frac{f(x) + x}{x - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Звідси

$$f(x) \left(\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1}\right) = \frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 1};$$

$$f(x) \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{2x + 1}{x - 1};$$

$$f(x) = 2x + 1.$$

Перевіримо, чи дійсно функція  $f(x)$  задовольняє рівняння

$$(x - 1) \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x,$$

$$2x + 2 + x - 1 - 2x - 1 = x,$$

$$x = x - \text{правильно.}$$

### 2.3. Розв'язування функціональних рівнянь із застосуванням теорії груп

В рівнянні

$$(a - x)f(x) - 2xf(a - x) = 1$$

під знаком невідомої функції  $f(x)$  стоять функції  $g_1 = x$  і  $g_2 = a - x$ . В результаті заміни  $x$  на  $a - x$  утвориться ще одне рівняння, що містить ті ж функції  $f(x)$  і  $f(a - x)$ . Функції  $g_1$  і  $g_2$  утворюють групу відносно композиції функцій. Поняття групи дозволяє у ряді випадків вибрати доцільні підстановки для розв'язування функціональних рівнянь [18].

Нехай у функціональному рівнянні

$$a_0g(f_0) + a_1g(f_1) + \dots + a_{n-1}g(f_{n-1}) = b \quad (2.5)$$

вирази  $f_0(x) = x, f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ , що стоять під знаком невідомої функції  $g(x)$  є елементами скінченної групи порядку  $n$  відносно композиції функцій. Коефіцієнти рівняння (2.5)  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  в загальному випадку залежать від  $x$ . Деякі з них можуть дорівнювати 0 [15].

Припустимо, що рівняння (2.5) має розв'язок. Замінімо  $x$  на  $f_1(x)$ . Ця заміна рівносильна множенню справа всіх елементів групи на  $f_1$ . В результаті послідовність функцій  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  перетвориться в послідовність  $f_0 \cdot f_1, f_1 \cdot f_1, f_2 \cdot f_1, \dots, f_{n-1} \cdot f_1$ , що складається із всіх елементів групи [18].

Дана заміна звела рівняння (2.5) – лінійне відносно невідомих  $g(f_0) + g(f_1) + \dots + g(f_{n-1})$  до нового лінійного рівняння відносно тих же невідомих. Замінюючи далі

$$x \rightarrow f_2(x), x \rightarrow f_3(x), \dots, x \rightarrow f_n(x),$$

отримаємо систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими.

Розв'язавши цю систему, знайдемо невідому функцію  $g(f_0) = g(x)$ , якщо ця система має розв'язок. Безпосередньою перевіркою слід переконатися, що отримана функція відповідає початковому рівнянню. Розглянутий метод обмежує область визначення функції, оскільки доводиться відкидати значення аргументу, у яких елементи групи не мають сенсу [15].

*Приклад 11.* Знайти функцію  $f(x)$ , яка визначена на множині дійсних чисел, відмінних від  $0, 1, -1$ , і задовольняє рівняння

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1.$$

*Розв'язання.* Вирази  $x, \frac{x-1}{x+1}$  що стоять під знаком невідомої функції, є елементами групи, заданої таблицею:

$x$	$x$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
$x$	$x$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
$\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	$x$
$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	$x$	$\frac{x-1}{x+1}$
$\frac{x+1}{1-x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	$x$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$

Замінюючи послідовно  $x$  на  $\frac{x-1}{x+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+1}{1-x}$  отримаємо систему

$$\begin{cases} xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1, \\ \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1, \\ -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1, \\ \frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1. \end{cases}$$

Послідовно виключаючи невідомі  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right), f\left(-\frac{1}{x}\right), f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ , отримаємо

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}, x \neq 1. \quad (2.6)$$

Міркування проводилися у припущенні, що розв'язок вихідного рівняння існує. Підставляючи у нього отриману функцію, переконуємося, що вона задовольняє це рівняння.

*Приклад 12.* Знайти функцію  $f(x)$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq a$ , що задовольняє рівняння

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x,$$

де  $a$  – стала, відмінна від 0.

*Розв'язання.* Не важко перевірити, що вирази  $x, \frac{a^2}{a-x}$  разом  $\frac{ax-a^2}{x}$  з утворюють групу з таблице:

$x$	$x$	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
$x$	$x$	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	$x$
$\frac{ax-a^2}{x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	$x$	$\frac{a^2}{a-x}$

Тут  $x \in R \setminus \{0, a\}$ .

Провівши міркування, аналогічні тим, що були у прикладі 11, отримаємо систему

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x, \\ f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x}, \\ f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}, \end{cases}$$

з якої

$$f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}.$$

Перевірка показує, що ця функція задовольняє рівняння.

Іноді у функціональному рівнянні вирази, що стоять під знаком невідомої функції, є значеннями елементів певної групи від однієї й тієї функції  $g$ . Після

заміни  $g(x)$  на  $x$  одержуємо рівняння, яке розв'язується викладеним вище методом [2].

*Приклад 13.* Розв'язати рівняння

$$2f(x) + f(1 - x) = 3 - xf(1). \quad (2.7)$$

*Розв'язання.* На множині  $\{x, 1, -x, 1, 0\}$  визначена операція композиції, якщо розглядати числа як функції, що тотожно рівні сталій. Таблиця Келі тут має вигляд:

×	$x$	$1 - x$	$1$	$0$
$x$	$x$	$1 - x$	$1$	$0$
$1 - x$	$1 - x$	$x$	$0$	$1$
$1$	$1$	$1$	$1$	$1$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$

З таблиці видно, що у елементів  $1$  і  $0$  немає обернених, тобто дана множина функцій не є групою відносно множення. В алгебрі множини з асоціативною операцією називають півгрупами. Півгрупи в окремих випадках також можна застосувати для розв'язування функціональних рівнянь.

Виконавши у рівнянні (2.7) послідовно заміни  $x \rightarrow 1 - x, x \rightarrow 1, x \rightarrow 0$  отримаємо систему

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1 - x) = 3, \\ 2f(1 - x) + f(x) + (1 - x)f(1) = 3, \\ 2f(1) + f(0) + f(1) = 3, \\ 2f(0) + f(1) = 3. \end{cases} \quad (2.8)$$

З двох останніх рівнянь системи (2.8) маємо  $f(1) = \frac{3}{5}$ .

Тепер із двох перших рівнянь (2.8) знайдемо:

$$f(x) = \frac{6 - 3x}{5}. \quad (2.9)$$

Безпосередня перевірка демонструє, що знайдена функція (2.9) задовольняє рівняння (2.7).

## 2.4. Застосування теорії матриць до розв'язування функціональних рівнянь

Під знаком невідомої функції можуть стояти дробово-лінійні вирази виду  $\frac{ax+b}{cx+d}$ . Такі дроби повністю визначаються заданням матриці  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , складеної з коефіцієнтів  $a, b, c, d$ .

*Приклад 14.* Знайти функцію  $f$ , визначену при  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\}$  і таку, що задовольняє рівняння

$$3f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}. \quad (2.10)$$

*Розв'язання.* Розв'яжемо матричне рівняння

$$AX = B,$$

де  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Для матриці  $A$  оберненою є матриця  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Тоді

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $X$  має вид  $\begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix}$  тому застосуємо до (2.10) підстановку  $x \rightarrow \frac{x}{2x-1}$ . Її зручно виконувати за допомогою матриці. Права частина рівняння (2.10) відповідає матриці  $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Застосуємо до неї підстановку  $x \rightarrow \frac{x}{2x-1}$  рівносильно множенню  $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  справа на  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . В результаті отримаємо  $\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Таким чином, з (2.10) отримуємо:

$$3f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{16x-8}{-x+1}. \quad (2.11)$$

Виключаючи із рівнянь системи (2.10)-(2.11)  $f\left(\frac{x}{-3x+2}\right)$ , одержуємо

$$f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{3x-4}{x-1}.$$

Із рівняння (2.10) бачимо, що  $x \neq \frac{2}{3}; 2; 1$ . Підстановка зберегла ці обмеження. Крім того,  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Нехай  $\frac{-x+1}{x-2} = z$ . Так як  $x \neq \frac{2}{3}; 2; 1; \frac{1}{2}$ , то  $z \neq -\frac{1}{4}; 0; -\frac{1}{3}$ . Звідси  $x = \frac{2z+1}{z+1}$ .

Замінюючи  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x+1}$ , із (2.11) отримаємо

$$f(x) = \frac{2x-1}{x}, x \neq -\frac{1}{4}; 0; -\frac{1}{3}; -1.$$

Перевірка показує, що ця функція задовольняє умову задачі:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) &= \frac{8}{x-1}. \end{aligned}$$

## 2.5. Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування функціональних рівнянь

### 2.5.1. Граничний перехід

*Приклад 15.* Розв'язати в класі неперервних функцій рівняння

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \quad (2.12)$$

де  $x \in \mathbb{R}$ .

*Розв'язання.* Замінивши  $x$  на  $\frac{x-1}{2}$ , отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{5}{3} \cdot \frac{x-1}{2}. \quad (2.13)$$

Використовуючи цю ж заміну із (2.13) будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right) &= \frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{x-3}{4}, \\ \frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right) &= \frac{1}{27}f\left(\frac{x-7}{8}\right) + \frac{5}{27} \cdot \frac{x-7}{8}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\frac{1}{3^n}f\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{3^{n+1}} \cdot \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}.$$

Склавши усі ці рівняння, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{3} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x-3}{4} + \dots + \frac{5}{3^{n+1}} \frac{x - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}.$$

Так як функція  $f(x)$  неперервна, то при будь-якому фіксованому  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x-1}{2^{n+1}} - 1\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2^{n+1}} - 1\right)\right) = f(-1).$$

Тут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2^{n+1}} = 0.$$

Із (2.12):  $f(-1) = -\frac{5}{2}$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

Переходячи до границі, при  $n \rightarrow \infty$  маємо

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{3} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x-3}{4} + \dots + \frac{5}{3^{n+1}} \frac{x - 2^{n+1} + 1}{2^{n+1}} \right).$$

Права частина останньої рівності є сумою трьох нескінченно спадних прогресій:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}x + \frac{5}{36}x + \dots + \frac{5}{6^{n+1}}x + \dots &= x, \\ -\frac{5}{3} - \frac{5}{9} - \dots - \frac{5}{3^{n+1}} - \dots &= -\frac{5}{2}, \\ \frac{5}{6} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{5}{6^{n+1}} + \dots &= 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = x - \frac{3}{2},$$

що і підтверджується перевіркою.

*Приклад 16.* Розв'язати функціональне рівняння

$$f(2x + 1) + \frac{1}{9}f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3}f(x) + x, x \in R \quad (2.14)$$

в класі неперервних функцій.

*Розв'язання.* Виконаємо заміну  $x \rightarrow \frac{x-1}{2}$ , отримаємо

$$f(2x + 1) + \frac{1}{27}f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x-1}{2}. \quad (2.15)$$

Додавши (2.14) до рівняння (2.15), попередньо помноженого на  $\frac{1}{3}$ , отримаємо

$$f(2x + 1) + \frac{1}{27}f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{7x-1}{6}.$$

Знайдемо підстановку, що перетворює  $2x + 1$  в  $\frac{x-3}{4}$ . Для цього припустимо, що  $2x + 1 = \frac{t-3}{4}$ . Звідси  $x = \frac{t-7}{8}$ . Виконавши  $n$  раз підстановку  $x \rightarrow \frac{t-7}{8}$ , отримаємо систему рівнянь, із якої знаходимо

$$\begin{aligned} f(2x + 1) + (-1)^n \frac{1}{3^{3(n+1)}} f\left(\frac{x - 2^{3n+2} + 1}{2^{3n+2}}\right) &= \\ &= \frac{7x-1}{6} + \dots + (-1)^n \frac{7x + x - 2^{3(n+1)}}{6^{3(n+1)}}. \end{aligned}$$

Звідси при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(2x + 1) &= \frac{36x}{31} - \frac{27}{217}, \\ f(x) &= \frac{18}{31}x - \frac{153}{217}. \end{aligned}$$

що підтверджується перевіркою.

*Приклад 17.* Доведіть, що рівняння

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) - f(x) = x, x \in [0; +\infty).$$

не має неперервних розв'язків.

*Розв'язання.* Припустимо, міркуючи від супротивного, що для даного рівняння неперервний розв'язок. Підставимо у нього замість  $x$  вираз  $\frac{x}{1+x}$  (адже якщо  $x \geq 0$  то і  $\frac{x}{1+x} \geq 0$ ):

$$f\left(\frac{x}{1+2x}\right) - f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x}. \quad (2.16)$$

Тоді виконаємо аналогічну заміну  $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$  в (2.16):

$$f\left(\frac{x}{1+3x}\right) - f\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{x}{1+2x}.$$

Дані дії виконаємо ще декілька раз. На  $n$ -му кроці матимемо:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f\left(\frac{x}{1+(n-1)x}\right) = \frac{x}{1+(n-1)x}.$$

Додамо усі отримані рівності (всього їх буде  $n$ ) і виконаємо зведення подібних доданків:

$$f\left(\frac{x}{1+nx}\right) - f(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \dots + \frac{x}{1+(n-1)x}.$$

Ця рівність справедлива для будь-кого натурального  $n$ . Зафіксуємо  $x$  і  $n \rightarrow \infty$ . З огляду на неперервність  $f(x)$  в точці  $x = 0$ , маємо

$$f(0) - f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x}{1+kx}$$

де

$$\sum_{k=0}^n \frac{x}{1+kx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x}{1+kx}.$$

У лівій частині останньої рівності при конкретному степені  $x$  стоїть певна стала, тобто при такому  $x$  ряд справа збігається до цієї сталої. Далі достатньо показати, що цей ряд розбігається при будь-якому  $x > 0$ , так прийдемо до суперечності.

Для будь-якого натурального  $k$  і  $x > 0$  справедливо, що

$$\frac{x}{1+kx} \geq \frac{x}{k+kx} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{k}$$

так що

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{x}{1+kx} &= x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+2x} + \dots + \frac{x}{1+nx} \geq \\ &\geq x + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= x + \frac{x}{1+x} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Як відомо, гармонійний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

є розбіжним, отже,

$$\sum_{k=0}^n \frac{x}{1+kx}$$

теж розбігається. Що й потрібно було довести.

## 2.6. Диференціювання

У деяких випадках для знаходження розв'язку функціонального рівняння доцільно продиференціювати обидві частини рівняння, якщо, звичайно, ці похідні існують. В результаті отримаємо функціональне рівняння, що містить і похідну невідомої функції. Тоді потрібно розв'язати це рівняння відносно похідної [15].

*Приклад 18.* Знайти в класі функцій, що мають неперервні похідні, розв'язок рівняння

$$f(3x + 2) = 3f(x), x \in R. \quad (2.17)$$

*Розв'язання.* Спроби розв'язати рівняння (2.17) шляхом граничного переходу не приводять до бажаного результату.

В той же час, ліва та права частини (2.17) є функціями від  $x$ . Вони рівні, отже, рівні їх похідні по  $x$ . Продиференціюємо дане рівняння і після спрощення отримаємо

$$f'(3x + 2) = 3f'(x).$$

Це рівняння вже можна розв'язати шляхом граничного переходу. Виконавши підстановку  $x \rightarrow \frac{x-2}{3}$ , отримаємо ланцюжок рівностей

$$f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right) = f'\left(\frac{x-8}{9}\right) = \dots = f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right).$$

Зважаючи на неперервність  $f'(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$ , маємо

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'\left(\frac{x+1}{3^n}+1\right) = f'(-1).$$

Отже,

$$f'(x) = k$$

де

$$k = f'(-1).$$

Первісна функція  $f(x) = kx + b$ . Підставивши в (2.17)  $x = -1$ , отримаємо  $f(-1) = 0$ . Крім цього  $f(-1) = -k + b$ , тобто  $k = b$ .

Легко перевірити, що

$$f(x) = k(x + 1)$$

задовольняє умові за довільного  $k$ .

*Приклад 19.* Знайти всі дійсні функції, що диференціюються та задовольняють функціональне рівняння

$$f(x) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)}$$

*Розв'язання.* Нехай  $f$  – шукана функція. Тоді

$$f(x) = \frac{f(x) + f(0)}{1 - f(x) \cdot f(0)}$$

тобто

$$f(0)[1 + f^2(x)] = 0,$$

а отже

$$f(0) = 0.$$

Після перетворень маємо

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1 + f^2(x)}{1 - f(x)f(h)},$$

звідки, з урахуванням

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(h) = 0,$$

випливає, що

$$f(x) = C(1 + f^2(x)),$$

де  $C = f'(0)$ . Отже,

$$\int_0^{f(x)} \frac{dy}{1 + y^2} = \int_0^x C dc + C_1,$$

$$\arctg f(x) = Cx + C_1,$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(Cx + C_1).$$

Умова  $f(0) = 0$  означає, що  $C_1 = 0$ , тобто

$$f(x) = \operatorname{tg} Cx.$$

Очевидно, що й усі інші функції такого виду є розв'язками вихідного рівняння.

*Приклад 20.* Знайти функцію, що задовольняє рівняння

$$f'(x) + xf(-x) = ax, x \in R, a = \text{const.}$$

*Розв'язання.*

$$f'(-x) - f(x) = -ax.$$

Введемо нові функції

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), G(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Зрозуміло, що функція  $F(x)$  – парна, а  $G(x)$  – непарна, причому

$$f(x) = F(x) + G(x).$$

Отримаємо рівняння відносно нових функцій  $F(x)$  і  $G(x)$ :

$$G'(x) - xG(x) = 0, F'(x) + xF(x) = ax,$$

$$G(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}, F(x) = a + Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Так як  $G(-x) = -G(x)$ , то  $G(x) \equiv 0$  і

$$F(x) = a + Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося у тому, що при будь-яких числах  $a$ , функція  $f(x)$  є розв'язком вихідного рівняння.



## РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

### 3.1. Функціональні рівняння у ШКМ

Подекуди, необхідність розв'язувати функціональні рівняння виникає у шкільному курсі математики (зокрема, алгебри). Однак частіше, функціональні рівняння та їх властивості застосовуються при розв'язуванні інших рівнянь, нерівностей чи їх систем. Розглянемо приклади подібних завдань [2].

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}, \quad (3.1)$$

де квадратний корінь береться  $n$  раз ( $n \geq 2$ ).

*Розв'язання.* Із рівняння (3.1) слідує, що  $x \geq 2$ . Введемо в розгляд функцію

$$f(x) = 2 + \sqrt{x}.$$

Тоді (3.1) набуває вигляду функціонального рівняння

$$\underbrace{f(f(\dots(f)x)) \dots)}_{n \text{ раз}} = x. \quad (3.2)$$

Так як функція  $f(x) = 2 + \sqrt{x}$  зростає при  $x \geq 0$ , то рівняння (3.2) рівносильне рівнянню

$$x = f(x),$$

тобто рівняння (3.1) рівносильне рівнянню

$$x = 2 + \sqrt{x},$$

яке має єдиний додатний корінь  $x = 4$ .

*Приклад 2.* Розв'язати рівняння

$$x^3 - 6 = \sqrt[3]{x + 6}.$$

*Розв'язання.* Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x + 6} + 6}. \quad (3.3)$$

Нехай

$$f(x) = \sqrt[3]{x + 6},$$

тоді рівняння (3.3) набуває вигляду

$$f(f(x)) = x. \quad (3.4)$$

Оскільки функція  $y = f(x)$  зростає на всій числовій осі  $OX$ , то рівняння (3.4) рівносильне рівнянню

$$f(x) = x, \quad (3.5)$$

тобто рівняння (3.3) рівносильне рівнянню

$$\sqrt[3]{x + 6} = x$$

або

$$x^3 - x - 6 = 0. \quad (3.6)$$

Так як

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

і

$$x^2 + 2x + 3 > 0,$$

то рівняння (3.6) має єдиний корінь  $x = 2$ .

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1. \quad (3.6)$$

*Розв'язання.* Область допустимих значень змінної  $x$  в даному рівнянні є  $x \geq 1$ . Рівняння (3.6) рівносильне рівнянню

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}} = x. \quad (3.7)$$

Нехай  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ . Тоді (3.7) набуває вигляду функціонального рівняння (3.4).

Так як функція  $y = f(x)$  є зростаючою на області допустимих значень змінної  $x$ , то рівняння (3.4) рівносильне рівнянню (3.5), тобто (3.7) рівносильне рівнянню

$$1 + \sqrt{x} = x,$$

із якого отримаємо

$$\sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

або

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Приклад 4.* Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 = x.$$

*Розв'язання.* Областю допустимих значень змінної  $x$  в даному рівнянні є числова вісь  $OX$ .

Нехай

$$f(x) = x^2 + 4x + 2, \quad (3.8)$$

тоді вихідне рівняння можна переписати у вигляді функціонального рівняння (3.4).

Однак на всій області допустимих значень змінної  $x$  функція (3.8) не є монотонною. Тому рівняння (3.4) і (3.5) в загальному випадку не є рівносильним, тобто перехід від (3.4) до (3.5) може супроводжуватися втратою частини коренів.

В такому випадку будемо діяти наступним чином.

Розглянемо рівняння (3.5), корені якого є коренями рівняння (3.4), тобто рівняння

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Розв'язавши дане рівняння, отримаємо  $x_1 = -2$  і  $x_2 = -1$ . зрозуміло, що  $x_1, x_2$  – корені вихідного рівняння.

Для пошуку інших коренів вихідного рівняння, представимо його ліву частину у вигляді многочлена четвертого степеня, шляхом розкриття дужок, тобто

$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 31x + 14 = 0.$$

Так як  $x_1 = -2$  і  $x_2 = -1$  є коренями даного рівняння, то для пошуку інших коренів рівняння необхідно поділити многочлен  $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 31x + 14$  послідовно на  $x + 2$  і  $x + 1$ , тобто поділити на вираз

$$(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2.$$

В результаті таких дій отримаємо квадратне рівняння

$$x^2 + 5x + 7 = 0,$$

яке дійсних коренів немає.

*Приклад 5.* Розв'язати рівняння

$$x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 6 = \sqrt[3]{2 - x}.$$

*Розв'язання.* Перетворимо дане рівняння наступним чином:

$$x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8 = \sqrt[3]{2 - x} - 2,$$

$$(x^3 - 2)^3 = \sqrt[3]{2 - x} - 2, (2 - x^3)^3 = 2 - \sqrt[3]{2 - x}.$$

Звідси отримаємо рівняння

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2 - x}}}. \quad (3.9)$$

Нехай

$$f(x) = \sqrt[3]{2 - x},$$

тоді дане рівняння набуває вигляду

$$f(f(f(x))) = x. \quad (3.10)$$

Оскільки функція  $(x) = \sqrt[3]{2 - x}$  є спадною на всій числовій осі  $OX$  і при цьому  $n$ -непарне, то (3.10) рівносильне рівнянню (3.5), тобто (3.9) є рівносильним рівнянню

$$\sqrt[3]{2 - x} = x,$$

або

$$x^3 + x - 2 = 0. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) має єдиний дійсний корінь  $x = 1$ .

*Приклад 6.* Розв'язати рівняння

$$\ln(\ln x + 1) = x - 1.$$

*Розв'язання.* Вихідне рівняння можна переписати як

$$\ln(\ln x + 1) + 1 = x. \quad (3.12)$$

Нехай

$$f(x) = \ln x + 1,$$

тоді (3.12) набуває вигляду (3.4). Оскільки функція  $y = \ln x$  є неперервною і зростаючою при  $x > 0$ , то рівняння (3.4) рівносильне рівнянню (3.5), тобто вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$\ln x + 1 = x. \quad (3.13)$$

Очевидно, що  $x = 1$  є коренем рівняння (3.13). Покажемо, що цей корінь єдиний.

Для цього розглянемо функцію

$$g(x) = \ln x + 1 - x,$$

що задана на інтервалі  $0 < x < \infty$ . Очевидно, що  $g(1) = 0$ . Крім того,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Нехай  $0 < x < 1$ , тоді  $g'(x) > 0$ . Отже, функція  $y = g(x)$  зростає і тому  $g(x) < g(1) = 0$ .

Нехай  $x > 1$ , тоді  $g'(x) < 0$  і функція  $y = g(x)$  є спадною, тобто  $g(x) < g(1) = 0$ .

Звідси слідує, що  $g(x) < 0$  для будь-якого  $x > 0$  і  $x \neq 1$ . Отже, вихідне рівняння має єдиний корінь  $x = 1$ .

*Приклад 7.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1, \\ y - \sqrt{z} = 1, \\ z - \sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо систему наступним чином:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} + 1, \\ y = \sqrt{z} + 1, \\ z = \sqrt{x} + 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Із першого рівняння даної системи слідує, що  $x \geq 1$ . Введемо в розгляд функцію  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ , яка визначена для  $x \geq 1$ . Тоді система (3.14) набуде вигляду

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(z), \\ z = f(x). \end{cases}$$

Звідси, після підстановки, маємо функціональне рівняння

$$f(f(f(x))) = x. \quad (3.15)$$

Так як функція  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  на усій області визначення є зростаючою, то функціональне рівняння (3.15) рівносильне рівнянню (3.5), тобто

$$\sqrt{x} + 1 = x,$$

або

$$\sqrt{x} = x - 1. \quad (3.16)$$

Так як  $x \geq 1$ , то після піднесення до квадрату в обох частин (3.16) отримаємо рівносильне квадратне рівняння

$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$

яке має два корені

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Однак тільки один з них задовольняє умову

$$x \geq 1, \text{ а саме } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Оскільки отримали єдине значення змінної  $x$ , яке задовольняє вихідну систему рівнянь і рівняння заданої системи є симетричними відносно змінних  $x, y$  і  $z$ , то

$$y = z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Приклад 8.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = y - 1, \\ y^2 = z - 1, \\ z^2 = x - 1. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Перепишемо дану систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x = z^2 + 1, \\ y = x^2 + 1, \\ z = y^2 + 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Звідси слідує, що  $x \geq 1$ . Нехай

$$f(x) = x^2 + 1,$$

тоді із (3.17) отримаємо функціональне рівняння (3.15).

Так як функція  $f(x) = x^2 + 1$  при  $x \geq 1$  є зростаючою, тоді замість рівняння (3.15) можна розглядати рівняння (3.5), тобто

$$x^2 + 1 = x,$$

або

$$x^2 - x + 1 = 0. \quad (3.18)$$

Легко бачити, що рівняння (3.18) не має коренів, тому задана система рівнянь також немає розв'язків.

*Приклад 9.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x(1 + \sqrt{y}) = 2, \\ y(1 + \sqrt{z}) = 2, \\ z(1 + \sqrt{x}) = 2. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Областю допустимих значень змінних  $x, y$  і  $z$  для даної системи рівнянь є  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

Систему рівнянь перепишемо в рівносильному вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{2}{1 + \sqrt{y}}; \\ y = \frac{2}{1 + \sqrt{z}}; \\ z = \frac{2}{1 + \sqrt{x}}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Нехай

$$f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x}},$$

де  $x > 0$ . Тоді із системи (3.19) отримаємо функціональне рівняння (3.15). Так як функція  $f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$  є спадною, то (3.15) рівносильне рівнянню (3.5), тобто

$$\frac{2}{1 + \sqrt{x}} = x.$$

Звідси отримаємо

$$x\sqrt{x} + x - 2 = 0,$$

або

$$(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x} + 2) = 0. \quad (3.20)$$

Так як  $x > 0$ , то

$$x + 2\sqrt{x} + 2 > 0,$$

і з (3.20) маємо:

$$\sqrt{x} - 1 = 0,$$

звідки

$$x = 1.$$

Проводячи аналогічні міркування відносно змінних  $y$  і  $z$ , отримаємо  $y = 1$  і  $z = 1$ .

*Приклад 10.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x = \frac{4z^2}{1 + 4z^2}, \\ y = \frac{4x^2}{1 + 4x^2}, \\ z = \frac{4y^2}{1 + 4y^2}. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Із системи рівнянь слідує, що  $0 \leq x < 1$ ,  $0 \leq y < 1$  і  $0 \leq z < 1$ .

Введемо у розгляд функцію

$$f(x) = \frac{4x^2}{1 + 4x^2}.$$

Тоді вихідну систему рівнянь можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = f(x), \\ z = f(y), \end{cases}$$

звідки

$$x = f(z) = f(f(y)) = f(f(f(x))).$$

Оскільки

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1 + 4x^2},$$

то функція

$$f(x) = \frac{4x^2}{1 + 4x^2}$$

є зростаючою при умові, що  $0 \leq x < 1$ . Тому рівняння  $x = f(f(f(x)))$  рівносильне рівнянню (3.5). Отже, маємо рівняння

$$x = \frac{4x^2}{1 + 4x^2}.$$

Звідси отримаємо

$$x(2x - 1)^2 = 0$$

і

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Якщо знайдені значення змінної  $x$  підставити в рівняння вихідної системи, то отримаємо

$$y_1 = z_1 = 0$$

і

$$y_2 = z_2 = \frac{1}{2}.$$

*Приклад 11.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Позначимо

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x.$$

Тоді із вихідна система набуде вигляду:

$$\begin{cases} f(x) = y, \\ f(y) = z, \\ f(z) = x. \end{cases}$$

звідки, шляхом підстановки, отримуємо (3.15).

Оскільки

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0,$$

то функція  $f(x)$  зростає на всій числовій осі  $OX$  і тому рівняння (3.15) рівносильне рівнянню (3.5). Коренями рівняння

$$x^3 + 2x^2 + 2x = x$$

є

$$x_1 = 0 \text{ і } x_2 = -1.$$

Якщо значення  $x_1$  і  $x_2$  підставити в рівняння вихідної системи, то отримаємо

$$y_1 = 0, z_1 = 0$$

і

$$y_2 = -1, z_2 = -1.$$

*Приклад 12.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + x + 6 = 8y, \\ y^3 + y + 6 = 8z, \\ z^3 + z + 6 = 8x. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Нехай

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + x + 6), \quad (3.21)$$

тоді вихідну систему рівнянь можна переписати у вигляді функціонального рівняння (3.15).

Так як функція (3.21) є неперервною і зростаючою на всій числовій осі  $OX$ , то (3.15) рівносильне рівнянню (3.5), тобто

$$\frac{1}{8}(x^3 + x + 6) = x,$$

або

$$x^3 - 7x + 6 = 0. \quad (3.22)$$

Коренями кубічного рівняння є  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  і  $x_3 = -3$ . Використовуючи рівняння вихідної системи, неважко обчислити значення змінних  $y$  і  $z$ .

*Приклад 13.* Розв'язати рівняння

$$(2x + 1) \left( 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 7} \right) + x \left( 1 + \sqrt{x^2 + 7} \right) = 0.$$

*Розв'язання.* Нехай

$$f(x) = x \left( 1 + \sqrt{x^2 + 7} \right). \quad (3.23)$$

Тоді вихідне рівняння набуває вигляду

$$f(2x + 1) + f(x) = 0,$$

або

$$f(2x + 1) = -f(x).$$

Так як функція (3.23) є непарною, то

$$-f(x) = f(-x).$$

Тому вихідне рівняння набуває вигляду функціонального рівняння

$$f(g(x)) = f(h(x)), \quad (3.24)$$

де

$$g(x) = 2x + 1 \text{ і } h(x) = -x.$$

Так як функція  $f(x)$  зростає на числовій осі  $OX$ , то замість рівняння (3.24) можна розглядати рівняння

$$g(x) = h(x), \quad (3.25)$$

тобто

$$2x + 1 = -x.$$

Тоді

$$x = -\frac{1}{3}.$$

*Приклад 14.* Розв'язати рівняння

$$4x - x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1}}.$$

*Розв'язання.* Вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$(4x - x^2) \left(1 + \sqrt{(4x - x^2)^2 + 1}\right) = \sqrt{3} \left(1 + \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}\right). \quad (3.26)$$

Оскільки права частина цього рівняння є додатною, то  $4x - x^2 > 0$  або  $0 < x < 4$ .

Нехай

$$f(x) = x \left(1 + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Тоді (3.26) можна записати як

$$f(4x - x^2) = f(\sqrt{3}), \quad (3.27)$$

де  $0 < x < 4$ .

Так як функція  $f(x)$  є неперервною і зростаючою на всій числовій осі  $OX$ , то (3.27) рівносильне рівнянню  $4x - x^2 = \sqrt{3}$ . Звідси отримаємо рівняння

$$x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0,$$

коренями якого є

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \sqrt{3}}.$$

Оскільки  $0 < x_1 < 4$  і  $0 < x_2 < 4$ , то коренями вихідного рівняння є  $x_1, x_2$ .

*Приклад 15.* Розв'язати рівняння

$$x^4 - 2x^2 + 2|x^2 - 1| + 1 = 4x^2 + 4|x|.$$

*Розв'язання.* Вихідне рівняння можна переписати так

$$(x^2 - 1)^2 + 2|x^2 - 1| = (2x)^2 + 2|2x|. \quad (3.28)$$

Нехай

$$f(x) = x^2 + 2|x|,$$

тоді (3.28) набуває вигляду функціонального рівняння (3.24), де

$$g(x) = x^2 - 1$$

і

$$h(x) = 2x.$$

Зауважимо, що функція  $f(x)$  є парною, так як  $f(-x) = f(x)$ . Неважко помітити, що при  $x \geq 0$  функція  $f(x) = x^2 + 2|x|$  є неперервною і зростаючою, а при  $x < 0$  – неперервною і спадною. Тому функціональне рівняння (3.24) рівносильне сукупності рівнянь

$$g(x) = h(x)$$

і

$$g(x) = -h(x).$$

Рівняння  $g(x) = h(x)$  набуває вигляду

$$x^2 - 1 = 2x,$$

або

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Тоді

$$x_1 = 1 + \sqrt{2},$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Із рівняння  $g(x) = -h(x)$  випливає рівняння

$$x^2 - 1 = -2x,$$

або

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Звідси отримаємо

$$x_3 = -1 + \sqrt{2}$$

і

$$x_4 = -1 - \sqrt{2}.$$

*Приклад 16.* Розв'язати рівняння

$$(x^2 + x - 2)^3 + x^2 - 2 = x^3.$$

*Розв'язання.* Дане рівняння можна записати у такому вигляді:

$$(x^2 + x - 2)^3 + x^2 + x - 2 = x^3 + x. \quad (3.29)$$

Нехай

$$f(x) = x^3 + x, \quad g(x) = x^2 + x - 2, \quad h(x) = x,$$

тоді (3.29) є функціональним рівнянням виду (3.24).

Оскільки функція  $f(x) = x^3 + x$  є неперервною і зростаючою на всій числовій осі  $OX$ , то рівняння (3.24) рівносильне рівнянню (3.25), тобто (3.29) рівносильне рівнянню

$$x^2 + x - 2 = x,$$

або

$$x^2 = 2.$$

Звідси отримуємо

$$x_1 = -\sqrt{2} \text{ і } x_2 = \sqrt{2}.$$

*Приклад 17.* Розв'язати рівняння

$$\sin \frac{x}{x^2 + 1} + \sin \frac{1}{x^2 + x + 2} = 0.$$

*Розв'язання.* Позначимо

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2 + x + 2},$$

тоді вихідне рівняння можна записати у вигляді функціонального рівняння

$$f(g(x)) + f(h(x)) = 0. \quad (3.30)$$

Оскільки функція  $f(x) = \sin x$  є непарною, то

$$-f(h(x)) = f(-h(x)).$$

Тоді рівняння (3.30) буде рівносильне рівнянню

$$f(g(x)) = f(-h(x)). \quad (3.31)$$

Відомо, що функція  $f(x) = \sin x$  на проміжку  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  є зростаючою.

Так як  $-\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$  і  $0 < h(x) \leq \frac{4}{7}$ , то можна стверджувати, що функція

$f(x) = \sin x$  зростає на множині значень функцій  $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $h(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$  і

тому (3.31) є рівносильне рівнянню

$$g(x) = -h(x),$$

тобто

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+2}.$$

звідки отримуємо кубічне рівняння

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0,$$

яке має єдиний дійсний корінь

$$x = -1.$$

*Приклад 18.* Розв'язати рівняння

$$(x-1)^4 + 4x - 4 = x^2 + 4\sqrt{x}.$$

*Розв'язання.* Областю допустимих значень змінної  $x$  в даному рівнянні є  $x \geq 0$ .

Вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$(x-1)^4 + 4(x-1) = x^2 + 4\sqrt{x},$$

яке можна переписати у вигляді функціонального рівняння (3.24), де

$$f(x) = x^4 + 4x, g(x) = x-1, h(x) = \sqrt{x}.$$

Так як  $f'(x) = 4x^3 + 4$ , то функція  $f(x) = x^4 + 4x$  зростає при умові, що  $x \geq -1$ . Оскільки на області допустимих значень змінної  $x$  виконуються нерівності  $g(x) \geq -1$  і  $\sqrt{x} \geq 0$ , то можна стверджувати, що функція  $f(x) = x^4 + 4x$  зростає на множині значень функцій  $g(x)$  і  $h(x)$ . Тому, в даному випадку, рівняння (3.24) рівносильне рівнянню (3.25).

Із рівняння  $x - 1 = \sqrt{x}$  отримаємо

$$\sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

звідки

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Приклад 19.* Розв'язати рівняння

$$\sin^6 x - 3\sin^2 x = \cos^3 2x - 3\cos 2x.$$

*Розв'язання.* Перепишемо дане рівняння у вигляді функціонального рівняння (3.24). Для цього покладемо

$$f(x) = x^3 - 3x, g(x) = \sin^2 x, h(x) = \cos 2x.$$

Оскільки  $f'(x) = 3x^2 - 3$  і  $0 \leq g(x) \leq 1, -1 \leq h(x) \leq 1$ , то функція  $f(x) = x^3 - 3x$  спадає на множині значень функції  $g(x), h(x)$ , тобто на відрізку  $-1 \leq x \leq 1$ . В такому випадку рівняння (3.24) є рівносильним рівнянню

$$\sin^2 x = \cos 2x,$$

звідки

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \cos 2x \text{ або } \cos 2x = \frac{1}{3}.$$

Звідси отримаємо корені вихідного рівняння

$$x_n = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n,$$

де  $n$  – ціле число.

*Приклад 20.* Розв'язати рівняння

$$2^{x^2-3x+1} - 3^{3x-x^2-1} = 4^x - 9^{-x}.$$

*Розв'язання.* Перепишемо рівняння у вигляді рівносильного рівняння

$$2^{x^2-3x+1} - 3^{-(x^2-3x+1)} = 2^{2x} - 3^{-2x}.$$

Нехай

$$f(x) = 2^x - 3^{-x}, g(x) = x^2 - 3x + 1, h(x) = 2x.$$

Тоді дане рівняння набуває вигляду функціонального рівняння (3.24).

Так як

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x + \ln 3 \cdot 3^{-x} > 0,$$

то функція  $f(x) = 2^x - 3^{-x}$  є зростаючою на всій числовій осі  $OX$ . Тоді останнє рівняння рівносильне рівнянню (3.25), тобто

$$x^2 - 3x + 1 = 2x.$$

Квадратне рівняння

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

має два корені:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

*Приклад 21.* Розв'язати рівняння

$$8 \cdot \log_2(x^2 - x + 5) = 3(x^2 - x + 5).$$

*Розв'язання.* Із рівняння слідує, що область допустимих значень змінної  $x$  співпадає з множиною всі дійсних чисел.

Перепишемо вихідне рівняння у вигляді

$$\frac{\log_2(x^2 - x + 5)}{x^2 - x + 5} = \frac{3}{8} \quad (3.32)$$

і нехай

$$f(x) = \frac{\log_2 x}{x}, \quad g(x) = x^2 - x + 5, \quad h(x) = 8.$$

Зауважимо, що тут

$$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 4.$$

Неважко побачити, що останнє рівняння має вигляд функціонального рівняння (3.24), де

$$g(x) > 4, \quad h(x) = 8.$$

Оскільки

$$f'(x) = \frac{\log_2 e - \log_2 x}{x^2},$$

то  $f'(x) < 0$  при  $x > e$ . Звідси випливає, що функція  $f(x) = \frac{\log_2 x}{x}$  спадає на множині значень функцій  $g(x)$  і  $h(x)$ , тобто спадає на інтервалі  $x > 4$ . Тому (3.32) рівносильне рівнянню

$$x^2 - x + 5 = 8.$$

Звідси

$$x^2 - x - 3 = 0,$$
$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

*Приклад 22.* Розв'язати рівняння

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

*Розв'язання.* Якщо поділимо на 2 обидві частини рівняння, то використовуючи властивість логарифму, отримаємо рівняння

$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{7+4\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3). \quad (3.33)$$

Позначимо

$$x^2 - 2x - 3 = a$$

і

$$7 + 4\sqrt{3} = b.$$

Тоді (3.33) можна переписати у вигляді

$$\log_{b+1}(a + 1) = \log_b a.$$

Отримане рівняння перетворимо як

$$\frac{\log_b(a + 1)}{\log_b(b + 1)} = \log_b a,$$

$$\frac{\log_b(a + 1)}{\log_b a} = \log_b(b + 1) \quad \text{або} \quad \log_a(a + 1) = \log_b(b + 1).$$

Нехай  $f(z) = \log_z(z + 1)$ . Знайдемо похідну функції  $f(z)$ :

$$f' = \frac{z \cdot \ln z - (z + 1) \cdot \ln(z + 1)}{z \cdot (z + 1) \cdot \ln^2 z}.$$

Очевидно, що  $f'(z) < 0$  для будь-яких  $z$  із області визначення функції  $f(z)$ . Отже, функція  $f(z)$  спадає при  $0 < z < 1$  і  $z > 1$ . Тому рівняння  $f(a) = f(b)$  рівносильне рівнянню  $a = b$ . Рівносильність даних рівнянь випливає з того, що  $b > 1$ .

Так як  $a = x^2 - 2x - 3$  і  $b = 7 + 4\sqrt{3}$ , то отримаємо рівняння

$$x^2 - 22x - 3 = 7 + 4\sqrt{3},$$

яке має два корені

$$x_1 = 1 - \sqrt{11 + 4\sqrt{3}} \text{ і } x_2 = 1 + \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}.$$

*Приклад 23.* Розв'язати рівняння

$$(x^2 + x + 2)^{x^2+x+1} = 9.$$

*Розв'язання.* Оскільки  $x^2 + x + 2 > 1$  при всіх  $x$ , то областю допустимих значень змінної  $x$  в даному рівнянні є множина всіх дійсних чисел.

Нехай

$$f(x) = x^{x-1}, g(x) = x^2 + x + 2, h(x) = 3,$$

тоді вихідне рівняння набуває вигляду (3.24), де  $g(x) > 1$  і  $h(x) = 3$ .

Так як із подвійної нерівності  $1 < x_1 < x_2$  випливає, що

$$f(x_1) = x_1^{x_1-1} < x_1^{x_2-1} < x_2^{x_2-1} = f(x_2),$$

то функція  $f(x) = x^{x-1}$  є зростаючою на множині значень функцій  $g(x)$  і  $h(x)$ .

Тоді вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + x + 2 = 3,$$

яке має два корені

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

*Приклад 24.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Неважко встановити, що  $x_1 = 0, y_1 = 0$  є коренями системи рівнянь.

Нехай тепер  $y \neq 0$ . Поділимо обидві частини першого рівняння системи на  $y^5$  і перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y, \\ (x^2)^3 + x^2 = (2y)^3 + 2y. \end{cases} \quad (3.34)$$

Нехай

$$f(z) = z^5 + z \text{ і } g(z) = z^3 + z.$$

Тоді остання (3.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y), \\ g(x^2) = g(2y). \end{cases} \quad (3.35)$$

Оскільки функції  $f(z) = z^5 + z$ ,  $g(z) = z^3 + z$  є зростаючими на всій осі  $OZ$ , то із (3.35) отримаємо

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = y, \\ x^2 = 2y \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

Так як  $y \neq 0$ , то коренями останньої системи рівнянь є

$$x_2 = \sqrt[3]{4} \text{ і } y_2 = \sqrt[3]{2}.$$

Отже, вихідна система рівнянь має дві пари коренів

$$x_1 = 0, y_1 = 0$$

і

$$x_2 = \sqrt[3]{4}, y_2 = \sqrt[3]{2}.$$

*Приклад 25.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 7 + \sqrt{y^2 + x - 7}} = x, \\ \sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{x^2 + y + 2}} = y. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Розглянемо функцію

$$f(z) = \sqrt{a + z},$$

де  $a$  – деякий параметр. Очевидно, що ця функція є зростаючою на всій своїй області визначення. Оскільки

$$f(f(z)) = \sqrt{a + \sqrt{a + z}},$$

то рівняння  $f(f(z)) = z$  рівносильне рівнянню  $f(z) = z$ , яке має вигляд

$$\sqrt{a + z} = z.$$

Нехай  $z = x$  і  $a = y^2 - 7$  отримаємо, що перше рівняння системи рівносильне рівнянню

$$\sqrt{y^2 + x - 7} = x.$$

Якщо  $z = y$  і  $a = x^2 + 2$ , то виявиться, що друге рівняння системи рівносильне рівнянню

$$\sqrt{x^2 + y + 2} = y.$$

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини обох рівнянь і тоді отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 + x - 7 = x^2, \\ x^2 + y + 2 = y^2. \end{cases} \quad (3.36)$$

Додавши рівняння системи (3.36), отримуємо

$$x + y - 5 = 0,$$

або

$$y = 5 - x.$$

Підставимо  $y = 5 - x$  в перше рівняння (3.36):

$$(5 - x)^2 + x - 7 = x^2,$$

або

$$x = 2.$$

Так як  $y = 5 - x$ , то

$$y = 3.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що пара  $(2; 3)$  є розв'язком вихідної системи.

*Приклад 26.* Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = e^y - e^x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Із першого рівняння системи отримаємо рівняння

$$x + e^x = y + e^y.$$

Нехай

$$f(x) = x + e^x,$$

тоді маємо функціональне рівняння

$$f(x) = f(y).$$

Відомо, що функція  $f(x) = x + e^x$  зростає на всій числовій осі  $OX$ , тому рівняння  $f(x) = f(y)$  рівносильне рівнянню  $x = y$ . Тому із другого рівняння системи отримаємо

$$3x^2 = 12,$$

звідки

$$x_{1,2} = \pm 2.$$

Так як  $x = y$ , то розв'язками вихідної системи рівнянь є

$$x_1 = -2, \quad y_1 = -2$$

і

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 2.$$

### 3.2. Задачі математичних олімпіад

Досить часто завдання, пов'язані із функціональними рівняннями можна побачити на різноманітних математичних змаганнях. Наведемо приклади розв'язування функціональних рівнянь, які були запропоновані учасникам обласних етапів Всеукраїнських математичних олімпіад та турнірів, а також міжнародних змагань юних математиків [6, 10, 11, 20].

*Приклад 27.* Дослідіть, чи існують такі многочлени  $P(x)$  та  $Q(x)$  з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел  $a$  та  $b$  і для всіх дійсних чисел  $x$  виконуються рівності:

$$\text{а) } P(x + x^2) = x + x^2 + \dots + x^{2013} + x^{2014};$$

$$\text{б) } Q(x + x^2 + x^3) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010} + ax^{2011} + bx^{2012} + x^{2013}.$$

*Розв'язання.* а) Не існує. Підставивши  $x = 1$ , отримуємо  $P(2) = 2014$ , підставивши  $x = -2$  будемо мати

$$\begin{aligned} P(2) &= (-2 + 4) + (-8 + 16) + \dots + (-2^{2013} + 2^{2014}) = \\ &= 2 + 8 + \dots + 2^{2013} \neq 2014. \end{aligned}$$

б) Підставляючи  $x = -1$  та  $x = i$  відповідно отримуємо

$$Q(-1) = -a + b - 1 \text{ та } Q(-1) = b - 1 + (2 - a)i.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини цих значень, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} -a + b - 1 = b - 1; \\ 2 - a = 0, \end{cases}$$

яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена  $Q(x)$  також не існує.

*Приклад 28.* Дослідіть, чи існують такі функції  $f: R \rightarrow R$ , відмінні від  $f(x) \equiv x$ , для яких при всіх дійсних значеннях  $x, y$  виконується рівність

$$f(f(f(x)) + y) = x + y.$$

*Розв'язання.* Підставивши в задане рівняння  $x = t, y = 0$ , отримаємо

$$f(f(f(t))) = t, t \in R.$$

Нехай тепер  $x = t, y = -f(f(t))$ . Звідси випливає, що  $f(0) = t - f(f(t))$  та  $f(f(t)) = t - c$ , де  $c = f(0)$ . При  $t = 0$  будемо мати  $f(c) = -c$ . Крім того, звідси випливає ще й рівність

$$f(f(f(t))) = f(t - c), t \in R.$$

Отже,

$$f(t - c) = t, t \in R. \quad (3.37)$$

Покладаючи у (3.37)  $t = 2c$ , знайдемо  $f(c) = 2c$ . Тому  $-c = 2c$ , тобто  $c = 0$ . Отже,  $f(t) = t$ . Тому розв'язків, відмінних від  $f(x) \equiv x$ , задане рівняння не має.

*Приклад 29.* Знайдіть усі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції  $f$  такі, що для будь-яких  $x \in R$  та  $y \in R$  виконується рівність

$$f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x.$$

*Розв'язання.* З умови задачі маємо:

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0) + f(f(0)) - f(0) \Rightarrow f(f(0)) = 0;$$

$$x = y = 1 \Rightarrow f(f(1)) + f(1 + f(1)) - f(1 + f(1)) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 1;$$

$$\begin{aligned} x = 1, y = 0 \Rightarrow f(f(0)) + f(f(1)) - f(1) = 1 \Rightarrow 0 + 1 - f(1) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = f(f(1)) = 1. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер значення  $f(1) = 0$  та  $f(0) = 1$ , отримаємо:

$$x = 1, y = t, t \in R \Rightarrow f(f(t)) + f(t) = 1 \Rightarrow f(f(t)) \equiv 1 - f(t);$$

$$x = t, t \in R, y = 0 \Rightarrow f(t) + f(f(t)) - f(t) = t \Rightarrow f(f(t)) \equiv t.$$

Звідси випливає, що  $1 - f(t) = t$  для всіх  $t \in R$ . Як показує перевірка, функція  $f(x) = 1 - x, x \in R$  є розв'язком рівняння.

*Приклад 30.* Знайдіть усі функції  $f: R \rightarrow R$  такі, що

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

для всіх  $x \in R, y \in R$ .

*Розв'язання.* Запишемо задане рівняння таким чином:

$$f(y + f(f(x))) = x + f(f(y)). \quad (3.38)$$

Подіємо на обидві частини (3.38) функцією  $f$ . Враховуючи умову задачі, будемо мати

$$f(f(y + f(f(x)))) = f(x + f(f(y))) = y + f(f(x)). \quad (3.39)$$

Оскільки при фіксованому  $x$  значення  $t = y + f(f(x))$  пробігає множину всіх дійсних чисел, то з (3.39) випливає, що  $f(f(t)) = t$  для всіх  $t \in R$ .

Отже, початкове співвідношення можна записати у вигляді  $f(x + y) = y + x$  чи  $f(x) = x$ . Як показує перевірка, така функція справді є розв'язком.

*Приклад 31.* Знайдіть усі функції  $f: R \rightarrow R$  такі, що  $f(0) = \frac{1}{2}$ , для всіх дійсних значень  $x$  та  $y$  виконується рівність

$$f(x + y) = f(x)f(2001 - y) + f(y)f(2001 - x).$$

*Розв'язання.* Поклавши  $x = y = 0$ , знайдемо  $f(2001) = \frac{1}{2}$ . Нехай тепер лише  $y = 0$ . Враховуючи, що

$$f(0) = f(2001) = \frac{1}{2},$$

для всіх  $x \in R$  отримаємо рівність

$$f(x) = f(2001 - x).$$

Тому, підставивши в задане рівняння  $y = 2001 - x$ , для всіх  $x \in R$  будемо мати

$$2f^2(x) = \frac{1}{2}.$$

Оскільки, крім того, при  $y = x$  для всіх  $x \in R$  виконується нерівність

$$f(2x) = 2f^2(x) \geq 0,$$

то отримуємо єдиний розв'язок

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}.$$

*Приклад 32.* Чи існує така функція  $f: R \rightarrow R$ , яка для всіх дійсних значень  $x$  та  $y$  задовольняє рівняння

$$f(x \cdot y) = \max\{f(x); y\} + \min\{f(y); x\} \quad (3.40)$$

*Розв'язання.* Такої функції не існує. Легко бачити, що

$$\max\{a; b\} + \min\{a; b\} = a + b.$$

Тому підставивши у (3.40)  $x = y = 1$ , отримаємо суперечність

$$f(1) = \max\{f(1); 1\} + \min\{f(1); 1\} = f(1) + 1.$$

*Приклад 33.* Знайдіть усі функції  $f: N \rightarrow N$ , які одночасно задовольняють такі три умови:

1)  $f(1) = 1$ ;

2)  $f(n + 2) + (n^2 + 4n + 3)f(n) = (2n + 5)f(n + 1)$  для всіх  $n \in N$  ;

3).  $f(m)$  ділиться без остачі на  $f(n)$  для будь-яких натуральних чисел  $m > n$ .

*Розв'язання.* Нехай  $f(2) = k$  . Тоді  $f(3) = 7k - 8$ , і для подільності  $f(3)$  на  $f(2)$  необхідно, щоб натуральне число  $k$  було дільником числа 8. Розглянемо можливі варіанти.

$k = 1$  не задовольняє, бо тоді  $f(3) = -1 \notin N$ .

$k = 2$ . За індукцією доводимо, що  $f(n) = n!$

$k = 4$ . Аналогічно встановлюємо, що  $f(n) = \frac{(n+2)!}{6}$ .

$k = 8$  не задовольняє, бо тоді  $f(4) = 312$  не ділиться на  $f(3) = 48$  .

*Приклад 34.* Знайдіть усі функції  $f: Z \rightarrow R$ , які для всіх дійсних значень  $x$  та  $y$  задовольняють рівняння

$$f(x + y) + f(xy - 1) = (f(x) + 1)(f(y) + 1). \quad (3.41)$$

*Розв'язання.* Підставляючи по черзі у (3.41)  $x = y = 0$  та  $x = 0, y = -1$ , отримаємо таку систему рівностей:

$$\begin{cases} f(0) + f(-1) = (f(0) + 1)^2, \\ 2f(-1) = (f(0) + 1)(f(-1) + 1). \end{cases}$$

Звідси  $f(0) = 0$  та  $f(-1) = 1$ .

Маючи ці значення функції, підставимо у (3.41)  $x = y = -1$ . Отримаємо:

$$f(-2) + f(0) = (f(-1) + 1)^2,$$

звідки

$$f(-2) = 4.$$

І, нарешті, підставивши у (3.41)  $x = 1, y = -1$ , отримаємо

$$f(0) + f(-2) = (f(1) + 1)(f(-1) + 1),$$

звідки

$$f(1) = 1.$$

Підставимо тепер у (3.41)  $x = n, y = 1$ :

$$f(n + 1) = 2(f(n) + 1) - f(n - 1). \quad (3.42)$$

Методом математичної індукції нескладно переконатися, що

$$f(n) = n^2$$

для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

Аналогічно, записавши (3.42) у вигляді

$$f(n - 1) = 2(f(n) + 1) - f(n + 1),$$

доводимо, що

$$f(n) = n^2$$

для всіх від'ємних цілих чисел. Тому шуканою є функція

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}.$$

*Приклад 35.* Знайдіть усі такі функції  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , які задовольняють умову  $f(1) = 2$  і тотожність

$$f(xy) \equiv f(x)f(y) - f(x + y) + 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}. \quad (3.43)$$

*Розв'язання.* Підставляючи у (3.43)  $y = 1$ , для всіх  $x \in \mathbb{Q}$  отримаємо

$$f(x) = 2f(x) - f(x + 1) + 1,$$

тобто

$$f(x + 1) = f(x) + 1. \quad (3.44)$$

Із (3.44) при  $x = 0$  знайдемо

$$f(0) = 1.$$

Крім того, методом математичної індукції встановимо, що для всіх  $n \in N$ :

$$f(x + n) \equiv f(x) + n.$$

Покладаючи тут  $x = 0$ , отримаємо

$$f(n) = n + 1, n \in N.$$

А при  $x = -n$  знайдемо

$$f(-n) = -n + 1.$$

Тому  $f(x) = x + 1$  для всіх  $x \in Z$ .

Підставимо тепер у (3.43)  $x = \frac{1}{n}, y = n, n \in N$ :

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1,$$

звідки, враховуючи

$$f(1) = 2, f(n) = n + 1, f\left(\frac{1}{n} + n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

знайдемо

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1.$$

І, нарешті, покладаючи у (3.43)  $x = p, p \in Z, y = \frac{1}{q}, q \in N$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1 = \\ &= (p + 1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \left(p + \frac{1}{q} + 1\right) + 1 = \frac{p}{q} + 1. \end{aligned}$$

Таким чином,  $f(x) = x + 1$  для всіх  $x \in Q$ . Зауважимо, що у разі неперервності шуканої функції граничним переходом отримали б  $f(x) = x + 1$  для всіх  $x \in R$ .

*Приклад 36.* Знайдіть усі многочлени  $P(x)$  з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівність

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c) \quad (3.45)$$

для всіх дійсних чисел  $a, b, c$ , таких, що

$$ab + bc + ca = 0.$$

*Розв'язання.* Підставимо у (3.45)  $a = b = c = 0$ . Отримаємо:

$$3P(0) = 2P(0),$$

звідки

$$P(0) = 0.$$

Якщо тепер у (3.45) покладемо  $a = x \in R, b = c = 0$ , то отримаємо

$$P(x) + P(0) + P(-x) = 2P(x),$$

звідки

$$P(-x) \equiv P(x).$$

Таким чином, шуканий многочлен має такий загальний вигляд:

$$P(x) = \sum_{k=1}^n C_k x^{2k}. \quad (3.46)$$

Безпосередньою перевіркою нескладно переконатися, що для  $n = 2$  цей многочлен задовольняє умову задачі за довільних дійсних значень  $C_1$  та  $C_2$ . Доведемо, що інших розв'язків немає.

Зауважимо, що числа  $a = 6x, b = 3x$  та  $c = -2x$  задовольняють умову  $ab + bc + ca = 0$  при кожному  $x \in R$ . Тому за умовою задачі для кожного  $k \leq n$  повинна справджуватися тотожність

$$C_k(6x - 3x)^{2k} + C_k(3x + 2x)^{2k} + C_k(-2x - 6x)^{2k} \equiv 2C_k(6x + 3x - 2x)^{2k}.$$

Але для  $k \geq 3$  вона можлива лише за умови  $C_k = 0$ , бо для них справджується нерівність  $3^{2k} + 5^{2k} + (-8)^{2k} > 8^{2k} > 2 \cdot 7^{2k}$ . Отримана суперечність і означає, що знайдений вигляд многочлена є єдиним.

## ВИСНОВКИ

У даній роботі увага приділяється особливостям вивчення функціональних рівнянь.

Основні результати роботи:

- ✓ проведено дослідження навчальної літератури з теми дослідження;
- ✓ дано означення поняття функціональні рівняння;
- ✓ досліджено види функціональних рівнянь (функціональне рівняння Коші, показникової функції, логарифмічної функції, степеневої функції, узагальнене функціональне рівняння Коші);
- ✓ розглянуто методи функціональних рівнянь (метод заміни змінної та функції, підстановок, розв'язування функціональних рівнянь із застосування теорії груп, застосування теорії матриць, застосування елементів математичного аналізу та диференціювання);
- ✓ розглянуто приклади застосування функціональних рівнянь в шкільному курсі математики, зокрема в олімпіадних завданнях.

Матеріали магістерської роботи можуть бути використані у роботі викладачів та студентів при вивченні курсу «Функціональні рівняння».

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Брайман В. Б., Кукуш О. Г. Відкриті студентські олімпіади механікоматематичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: 1995-2014: навчальний посібник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2015. 188 с.
2. Бродський Я. С., Сліпенко А. К. Функціональні рівняння. Київ : Вища школа, 1983. 96 с.
3. Бродський Я. С., Сліпенко А. К. Граничний перехід і функціональні рівняння. *Математика (газета для освітян)*. 2000. №20 (80).
4. Войцехівська В. Функціональні рівняння. Київ : ТОВ «Праймдрук», 2012. 48 с.
5. Вороний О. М. Застосування методу Коші до розв'язування функціональних рівнянь. *Математика в школі*. 2007. №7.
6. Вороний О. М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: методичний посібник. Кіровоград : РВВ КДПУ імені В. Винниченка, 2010. 68 с.
7. Вороний О. М., Писанко Г. В. Функціональні рівняння з вільними змінними. *У світі математики*. 2003. №9
8. Гопаченко В. В. Функціональні рівняння. *Математика (газета для вчителів)*. 2002. №12(168).
9. Гринчук Л. В., Сорока О. О. Функціональні рівняння та методи їх розв'язування. Хмельницький : ОІППО, 2012. 40 с.
10. Курченко О. О., Рабець Л. В. Задачі студентських олімпіад з математики: навчальний посібник. Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. 166 с.
11. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М. Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр. Київ : Техніка, 2003. 541 с.
12. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рр. Львів : Каменярь, 2008. 348 с.
13. Мітельман І. М. Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного. Одеса : ТЕС, 2014. 67 с.

14. Недокіс В. А. Про функціональне рівняння Коші. *У світі математики*. 1998. т. 6, в. 2.
15. Недокіс В. А. Розв'язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановки. *У світі математики*. 2002. т. 8, в. 4.
16. Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С. Функційні рівняння: методичний посібник. Львів : ЛДУ, 1998. 112 с.
17. Федак І. В. Функціональні рівняння: навчальний посібник. Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. 144 с.
18. Харкевич Ю. І. Функціональний аналіз (теорія і вправи): навч. посіб. Луцьк : Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2017. 247 с.
19. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. Харків : ВГ «Основа», 2005. 96 с.
20. Chung J. K., Ebanks B. R., Ng C. T. On a Functional Equation of Abel, *Results in Mathematics*, Vol.26 , (1994), pp. 241-252.
21. Kestelman H., On the functional equation  $f(x+y) = f(x)+f(y)$ , *Fund. Math.* 34 (1947), 144-147.
22. Kuczma K., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN, Warszawa, 1965.
23. Kuczma M. *Iterative Functional Equations*. New York : Cambridge University Press, 1990. 654 p.
24. Venkatachala B. J. *Functional Equations*. Bangalore : Prism Books Pvt Ltd, 2002. 219 p.