Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра вищої математики

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методичне забезпечення модуля «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів нематематичних спеціальностей

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М-М-21
Спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Панасюк Жанна Володимирівна

Науковий керівник: к. ф. – м. н., доц. Демчик С. П.
Рецензент: к. п. н., доц. Павелків О. М.
к. т. н., доц. Присяжнюк І. М.

Рівне - 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» відіграє важливе значення в навчальному процесі. Він є необхідним для кращого сприйняття студентами вищої математики та фізики.

Вища математика а є однією з найдавніших фундаментальних наук, що зародилась на початку цивілізації. Сучасна лінійна алгебра та аналітична геометрія інтенсивно проникаєу всі сфери діяльності людини, об'єктивно відображаючи універсальні закони навколишнього світу.

В Україні на вагу золота повинні цінуватися ті спеціалісти, які досконало володіють елементами математики і не є вузькими ремісниками, а творцями у своїй справі.

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів та викладачів початківців має стати органічним поєднанням фундаментальної математичної теорії та задач професійної спрямованості.

Особистісно орієнтоване навчання має забезпечувати умови для особистого зростання, самовизначення і самореалізації майбутніх вчителів та викладачів, для підвищення їхнього кругозору, творчої активності у професійній діяльності.

На заняттях з лінійної алгебри та аналітичної геометрії існують всі можливості для використання математичних відомостей, морально-виховних аспектів, сучасних комп'ютерних засобів, які разом із продуманою організацією навчальної діяльності студентів можуть посприяти удосконаленню їхнього як математичного, так і педагогічного способу мислення. Тому процес навчання математики виступає *тренінговою технологією* у набутті життєво важливих та професійних компетентностей.

Актуальність теми «Методичне забезпечення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів нематематичних спеціальності» обумовлена тим, що він є базою для кращого засвоєння студентами математичного аналізу, алгебри, геометрії та інших розділів вищої математики.

Об’єкт дослідження: основні методи розв’язування задач, які базуються на теорії курсу «Лінійної алгебри та аналітичної геометрії».

Предмет дослідження: теоретичний матеріал із курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Мета дослідження: розробити теоретичний матеріал та матеріал для практичних занять з курсу, а також завдання для самостійної, контрольної роботи студентів.

Апробація: матеріали дипломної роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, здобувачів вищої освіти та співробітників РДГУ, 13-15 травня 2021 року. XV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності», 1 листопада 2022 року.

РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТУДЕНТІВ ТЕОРЕТИЧНИМ МАТЕРІАЛОМ

1.1. ***Визначники та їх властивості.***

План

1. Визначник, мінор, алгебраіне доповення.
2. Основні властивості визначників .
3. Методи обчислення визначників.

Контрольні запитання:

1. Що називається визначником, мінором визначника, алгебраїчним доповненням ?
2. Назвіть основні властивості визначників?
3. Сформулюйте методи обчислення визначників і поясніть їх суть.

1.2. ***Матриці. Дії над ними. Властивості.***

План

1. Матриці.
2. Дії над матрицями .
3. Обернена матриця.
4. Ранг матриці).

Контрольні запитання

1. Що таке матриця?
2. Лінійні дії над матрицями, їх властивості.
3. Що таке обернена матриця?
4. Що таке ранг матриці?
5. Сформулювати теорему Кронекера – Капеллі.

1.3. ***Системи лінійних рівнянь та способи їх розв'язання.***

План

1. Основні поняття;
2. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь:
    - Метод Крамера;

- Матричний спосіб;
- Метод Гауса (метод виключення змінних);
- Теорема Кронекера-Капеллі;
- Однорідні системи.

Контрольні запитання

1. Яка система називається однорідною, неоднорідною?
2. Що називають розв'язком системи?
3. Яка система називається сумісною, несумісною?
4. Які матриці називають головною та розширеною матрицями системи?
5. Які системи називають еквівалентними?
6. Запишіть формули Крамера, коли їх можна використовувати?
7. У чому полягає матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь?
8. У чому суть методу Гаусса?
9. За яких умов система сумісна?
10. За якої умови однорідна система має нетривіальний розв'язок?

1.4. Системи координат. Вектори

План

1. Декартова система координат.
2. Прямокутна система координат.
3. Вектори в системі координат.
4. Дії над векторами в координатній формі.
5. Проекція вектора.

Контрольні запитання

1. Що таке декартова система координат?
2. Що таке прямокутна система координат?
3. Що таке вектор?
4. Лінійні вектори. Колінеарність векторів.
5. Дії з векторами в координатній формі.
6. Що таке проекція вектора?

1.5. *Дії з векторами. Застосування секторів*

План

1.Лінійні дії з векторами.

2.Розкладання вектора за базисом.

3.Скалярний добуток двох векторів.

4.Векторний добуток двох векторів.

5.Мішаний добуток двох векторів.

Контрольні запитання

1. Що таке базис і базисний вектор?
2. Який це скалярний добуток векторів? Як його шукати.
3. Властивості скалярного добутку.
4. Що таке векторний добуток? Властивості векторного добутку.
5. Що таке мішаний добуток двох векторів, його властивості.

1.6. *Пряма лінія на площині і в просторі.*

План

1. Різні види рівнянь прямої на площині.
2. Кут між прямими. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Відстань від точки до прямої.
3. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.
4. Різні види рівнянь прямої у просторі.
5. Кут між двома прямими. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.
6. Відстань від точки до прямої.
7. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.
8. Дослідження загального рівняння прямої.

Контрольні запитання

1. Розповісти про види рівнянь прямої на площині.
2. Взаємне розміщення двох прямих на площині.
3. Види рівнянь прямої і просторі.
4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.
5. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

6. Розповісти про дослідження загального рівняння прямої.

1.7. Площина в просторі. Лінії та поверхні другого порядку.

План

1. Різні види рівнянь площини в просторі.
2. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.
3. Поверхні другого порядку.

Контрольні запитання

1. Загальне рівняння площини у тривимірному просторі?
2. Яке взаємне розміщення прямої і площини у просторі?
3. Які це, поверхні другого порядку?
4. Що таке циліндрична поверхня?
5. Поверхня обертання – це?
6. Канонічні поверхні – це?

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТУДЕНТІВ МАТЕРІАЛОМ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З МОДУЛЯ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

2.1. Практичне заняття 1. Визначники та їх властивості.

Означення 1. *Визначником n-го порядку* квадратної числової матриці А порядку n називають число, яке знаходиться з елементів матриці А за певним правилом і позначають |А| або Δ.

Правило обчислення визначника 2 порядку:

Для заходження визначника другого порядку треба від добутку елементів головної діагоналі матриці відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Математично це правило можна записати у вигляді формули:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Наприклад,

$$а)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11;$$

$$б)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-9) \cdot 3 = 10 + 27 = 37.$$

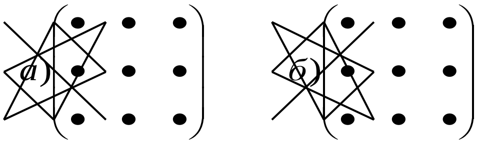
Правило обчислення визначника 3 порядку:

Визначник 3 порядку знаходять за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \qquad (2)$$

яку можна сформулювати за правилом Саріуса.

Перших три доданки є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (див. схему а) мал.1). Три останні доданки в правій частині (7) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі *та елементів вершин трикутників з основами паралельними неголовній діагоналі (мал. 1 б)).*



Мал. 1

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Розв'язання. За правилом Саріуса згідно формули (2) одержимо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot(-3)\cdot(-1) - (-1)\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 3 =$$

$$= 36 + 4 + 12 + 12 - 16 + 9 = 73 - 16 = 57$$

Для обчислення визначників порядку $n > 3$ використовують алгебраїчні доповнення.

Означення 2. *<u>Мінором</u>* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1) порядку, який одержуємо з визначника $|A|$ шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Означення 3. *<u>Алгебраїчним доповненням</u>* A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком (+), якщо сума індексів *(i+j)* - парна, та зі знаком (-), якщо (i+j) - не парна, тобто

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \qquad (3)$$

Приклад 4. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів

a_{32} та a_{13} визначника $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів a_{13} та a_{32} позначимо A_{13} та A_{32}, відповідно. Згідно з означенням 3 маємо:

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$; $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

Мінори M_{13} та M_{32} знайдемо згідно означення 2

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -3 & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4+12=16$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -3 & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-2=1$$

Підставимо значення мінорів у рівності (3), одержимо шукані алгебраїчні доповнення $A_{13} = 16$; $A_{32} = -1$

Правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначник n порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

У випадку використання і-го рядка це правило математично виглядає так

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ - & - & - & - & - & -\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ - & - & - & - & - & -\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\dots+a_{ij}A_{ij}\ +..+a_{in}\cdot A_{in} \qquad (4)$$

Рівність (4) називають *розкладом визначника за елементами і-го рядка.*

Зауваження. Обчислення визначника **n** порядку зводиться до обчислення **n** визначників **(n-1)** порядку. Для скорочення обчислень визначник доцільно розкладати за елементами рядка або стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. До нулів не треба знаходити алгебраїчних доповнень тому, що добуток 0 на його алгебраїчне доповнення дорівнює нулю. Властивості визначника дозволяють робити еквівалентні перетворення визначника і одержувати якомога більше нулів в деякому рядку або стовпці.

Приклад 5. Обчислити визначник 4-го порядку.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ -3 & 2 & 1 & 5\\ 5 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

Розв'язання.

Якщо цей визначник обчислювати шляхом його розкладу за елементами 1-го стовпця або 2-го рядка (вони містять один нуль), то треба буде знайти та обчислити три алгебраїчних доповнення – визначники третього порядку.

Перетворимо цей визначник так, щоб одержати якомога більше нулів у другому рядку, бо там вже є один нуль і є одиниця, яка спрощує перетворення. Елементи другого стовпця помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів третього стовпця**,** потім елементи другого стовпця помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця. Одержимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 13 \\ 5 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Тепер визначник доцільно розкласти за елементами другого рядка

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 \\ -3 & -3 & 13 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 13 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Останню рівність одержали шляхом виносу за знак визначника загального множника (-3) елементів другого стовпця.

Використовуючи правило обчислення визначника третього порядку, одержимо

|**A**| = -3 (7 + 130 - 33 - 55 + 42 - 13) = -3(179 - 101**)** = (-3)·78 = -234

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 27 & 20 \\ 2 & -11 & 10 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 13 & 11 & -18 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

3. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} -2-к & 2 & 0 \\ 2 & 4-к & 6 \\ 1 & 2 & 3-к \end{vmatrix}$.

.

4. Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -6 \\ 3 & 15 & 11 & -16 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2.2. Практичне заняття 2. Матриці дії над ними. Властивості.

Розглянемо прямокутну матрицю розмірності m x n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виділимо в матриці А будь-які *к* рядків і стільки ж стовпців, де число *к* не більше чисел m і n.

Визначник порядку *к*, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають *мінором к-го порядку матриці А*.

Означення. *Рангом матриці А* називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r(A)$.

Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці.

Із означення випливають такі властивості рангу матриці.

1. Ранг матриці дорівнює нулю тільки тоді, якщо матриця нульова. В інших випадках ранг матриці дорівнює деякому додатному числу.
2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n, тобто $0 \le r \le \min(m, n)$
3. Для квадратної матриці n-го порядку r=n тільки тоді, коли матриця невироджена.
4. Якщо $r < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

Наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

має такі мінори другого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Мінором третього порядку даної матриці є її визначник.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають <u>*базисним*</u>. У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Розглянемо два методи знаходження рангу матриці.

1. *Метод окантування* - полягає у такому. Якщо всі мінори 1-го порядку, тобто елементи матриці, дорівнюють нулю, то г = 0.

Якщо хоч один із мінорів 1-го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то г = 1. Аналогічно, якщо мінор 2-го порядку не дорівнює нулю, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять мінор k-го порядку, що не дорівнює нулю, і перевіряють, чи є не нульові мінори *(k* + 1)-го порядку. Якщо всі мінори *(k* + 1)-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці *A* дорівнює числу *k.* Такі мінори *(к* + 1)-го порядку, як правило, знаходять шляхом «окантування» мінора k-го порядку

Приклад 1. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Усі мінори 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Отже, $r(A) = 1$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Оскільки в матриці *A* є мінори 1-го порядку, які не дорівнюють нулю, то ранг її може дорівнювати одиниці. Мінор 2-го порядку

$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$, але, наприклад, мінор $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$.

Окантовуючи мінор M_2, одержимо мінор 3-го порядку

$$M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Розглянемо мінори 4-го порядку, які окантовують даний мінор M_3:

$$M_4 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \ M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \ M_6 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 10 & 4 \end{vmatrix},$$

$$M_7 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \end{vmatrix}, \ M_8 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Усі вони дорівнюють нулю, оскільки перший і четвертий рядки пропорційні. Значить ранг матриці А дорівнює 3.

Найбільш ефективним методом знаходження рангу матриці є метод елементарних перетворень.

<u>**Означення**</u>**.** ***Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці А, якщо виконуються рівності***

$$\boxed{AA^{-1} = \mathbf{A}^{-1} A = E} \qquad \textbf{(1)}$$

Ці рівності означають, що матриці А та A^{-1} комутують і їх добуток є одиничною матрицею.

Не кожна матриця має обернену матрицю.

Матриця А має обернену матрицю A^{-1} лише при виконанні умов:

1. Матриця А - квадратна;

2. Визначник |A| матриці А не дорівнює нулю.

Якщо обернена матриця A^{-1} до матриці А існує, то її можна знаходити за формулою:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}} \qquad (2)$$

де Aij - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}- матриці А, причому алгебраїчні доповнення до елементів і-го рядка матриці А розташовані у і-тому стовпці.

Приклад 1. Знайти обернені матриці до матриць

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}3 & 15\\ -1 & -5\end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця С- не квадратна, тому не існує оберненої до неї матриці.

Матриця В - квадратна, але її визначник |В| = -3•5 -(-1)• 15 = -15 + 15 = 0, тому матриця В також не має оберненої матриці.

Матриця А- квадратна, її визначник за правилом Саріуса

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -4 & 2\\ 3 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 7\cdot 8+4\cdot 11\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 7\cdot 1+3\cdot 4\cdot 8-1\cdot 11\cdot 5=$$

$$=280+44-6-14+96-55=420-75=345$$

Отже, матриця A^{-1} існує. Будемо шукати матрицю A^{-1} за формулою (2).

Спочатку знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці А.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}7 & -11\\ -1 & 8\end{vmatrix}=45; \quad A_{21}=30; \quad A_{31}=30$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -11\\ 1 & 8\end{vmatrix}=-35; \quad A_{22}=38; \quad A_{31}=61$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-10; \quad A_{23}=1; \quad A_{33}=47$$

Відмітимо, що алгебраїчні доповнення до елементів і-го рядка ми одержали в і-тому стовпці, що спрощує їх підстановку до формули (2).

Одержали обернену матрицю вигляду:

$$A^{-1}=\frac{1}{345}\begin{pmatrix}45 & -30 & 30\\ -35 & 38 & 61\\ -10 & 1 & 47\end{pmatrix}$$

Матричні рівняння.

Нехай потрібно знайти матрицю X, що задовольняє матричне рівняння XA=B, де A – не вироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо:

$(XA)A^{-1}=BA^{-1}$, $X(AA^{-1})=BA^{-1}$, $XE=BA^{-1}$, або $\mathbf{X=BA^{-1}}$

Розв’язок матричного рівняння AX=B знаходять за формулою $\mathbf{X=A^{-1}B}$.

1. Розв'яжіть матричне рівняння: $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

2. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3.Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3. Практичне заняття 3. Системи лінійних рівнянь та способи їх розв'язання.

Метод Крамера.

Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ - коефіцієнти при невідомих; $в_1, в_2, \dots, в_n$ - вільні члени.

Коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ утворюють матрицю, визначник якої назвемо <u>*визначником системи*</u> і позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Розв'язком системи (1) називається сукупність значень невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, які при підстановці їх у (1) перетворюють кожне з рівнянь у рівність.

Якщо система лінійних рівнянь (СЛР) має хоча б один розв'язок, то вона називається <u>*сумісною*</u>, у протилежному разі – <u>*несумісною*</u>. Якщо розв'язок системи єдиний, то СЛР називається <u>*визначеною*</u>. У разі, коли розв'язок сумісної системи не єдиний, систему рівнянь називають <u>*невизначеною*</u>.

Розв'язати систему (1) можна, користуючись правилом Крамера. Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої не дорівнює нулю, завжди сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться так: значення кожного із невідомих дорівнює дробові, знаменником якого є визначник системи, а чисельник є також визначник, який отримуємо з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів при шуканій змінній стовпцем вільних членів.

Таким чином, розв'язок системи (1) знаходять за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots\dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ і $B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & в_n \end{array}\right)$

називають *<u>основною</u>* та *<u>розширеною</u>* матрицями системи (1) відповідно.

Зауваження 1. Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$ (j=$\overline{1,n}$), то система лінійних рівнянь має безліч розв'язків.

Зауваження 2. Якщо $\Delta = 0$ і хоч один із визначників Δ_j (j=$\overline{1,n}$) не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь не має розв'язків.

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

При розв'язуванні системи n лінійних рівнянь з n невідомими за правилом Крамера потрібно обчислювати ($n+1$) визначники n-*го* порядку. Тому при $n \geq 4$ знаходження визначників призводить до громіздких обчислень, а значить, користуватись формулами Крамера стає нераціонально.

Серед інших методів розв'язування системи лінійних рівнянь розглянемо метод Гаусса, який ще називається *<u>методом послідовного виключення невідомих.</u>* Він полягає в тому, що при виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, x_2 – з усіх рівнянь, починаючи з третього і т.д., система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \qquad (1)$$

зводиться до системи рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + в_{12}x_2 + в_{13}x_3 + \cdots + в_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad\quad x_2 + в_{23}x_3 + \cdots + в_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + в_{(n-1)n}x_n = c_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = c_n \end{cases} \quad (2)$$

Таке перетворення системи (1) до системи (2) називається прямим ходом методу Гаусса. Обернений хід методу Гаусса полягає в тому, що підставивши знайдене з останнього рівняння x_n у передостаннє, одержимо значення x_{n-1} і т.д.; з першого рівняння знаходимо значення x_1.

Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих, і стовпця з вільних членів, який для зручності виділимо вертикальною лінією. Таку матрицю $\widetilde{A}$ називають розширеною матрицею системи, тобто

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & в_n \end{array}\right)$$

З допомогою елементарних перетворень її зводять до трапецоїдального вигляду.

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

2.4. Практичне заняття 4. Системи координат. Вектори. Дії над векторами. Застоування секторів.

Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм чисельним значенням, а й напрямом (швидкість, прискорення, сила та ін.).

Геометрично вектор являє собою *напрямлений відрізок* і позначається $\overline{a}$, або $\overline{AB}$, де точка A – початок вектора, а B – його кінець.

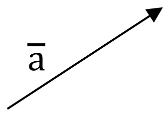


Рис.2

Відстань між початком вектора і його кінцем називають *довжиною* (або *модулем*) вектора і позначають $|\bar{a}|$, або $|\overline{AB}|$.

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих, називають *колінеарними.*

Рис.3

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{в}$ *рівні*, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і однакові напрями.

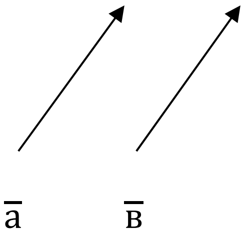


Рис.4

Два вектори називають протилежними, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і протилежні напрями.

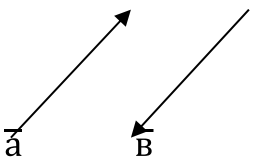


Рис.5

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором*. Напрям його не визначений.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним вектором*.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, називають ортом вектора $\bar{a}$ і позначають $\bar{a}_0$.

Вектори можна вільно переміщувати по площині (у просторі). Тому в аналітичній геометрії їх називають *вільними*.

Кутом між векторами $\bar{\text{а}}$ *і* $\bar{\text{в}}$, зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор $\bar{\text{а}}$ навколо спільного початку, щоб він збігся з вектором $\bar{\text{в}}$.

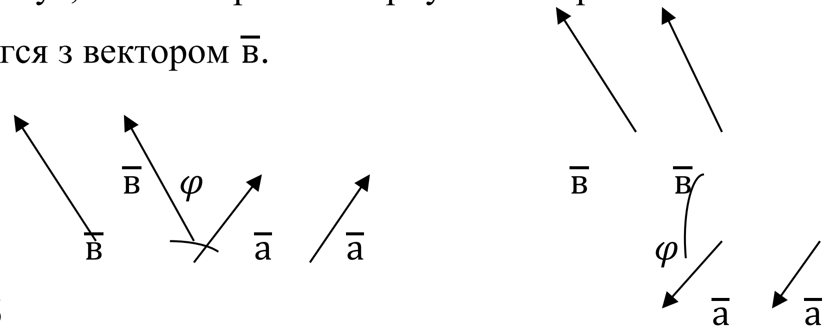


Рис.6

Три вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Зокрема, три вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з них – нуль-вектор.

Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис.

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити вирази вигляду

$$\text{х}_1\bar{\text{а}}_1 + \text{х}_2\bar{\text{а}}_2 + \cdots + \text{х}_n\bar{\text{а}}_n,$$

Які називають *лінійними комбінаціями векторів* $\bar{\text{а}}_1, \bar{\text{а}}_2, \ldots, \bar{\text{а}}_n$; числа х_1, $\text{х}_2, \ldots, \text{х}_n$ - коефіцієнти.

Вектори $\bar{\text{а}}_1, \bar{\text{а}}_2, \ldots, \bar{\text{а}}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\text{с}_1, \text{с}_2, \ldots, \text{с}_n$ не всі рівні нулю, що лінійна комбінація

$$\text{с}_1\bar{\text{а}}_1 + \text{с}_2\bar{\text{а}}_2 + \cdots + \text{с}_n\bar{\text{а}}_n = 0,$$

і *лінійно незалежними*, якщо ця рівність виконується лише за умови, коли всі числа $\text{с}_1, \text{с}_2, \ldots, \text{с}_n$ рівні нулю.

Сукупність лінійно незалежних векторів $\bar{\text{а}}_1, \bar{\text{а}}_2, \ldots, \bar{\text{а}}_n$ називають *базисом* простору R^n, якщо для кожного вектора з R^n існують такі дійсні числа х_1, $\text{х}_2, \ldots, \text{х}_n$, що виконується рівність

$$\bar{\text{в}} = \text{х}_1\bar{\text{а}}_1 + \text{х}_2\bar{\text{а}}_2 + \cdots + \text{х}_n\bar{\text{а}}_n.$$

Цю рівність називають розкладом вектора $\bar{\text{в}}$ у базисі $\bar{\text{а}}_1, \bar{\text{а}}_2, \ldots, \bar{\text{а}}_n$.

Базисом на прямій *називають довільний ненульовий вектор на цій прямій.*

Якщо вектор $\bar{\text{а}}$ - базис, то існує єдиний розклад вектора $\bar{\text{в}}$: $\bar{\text{в}} = \lambda\bar{\text{а}}$, де λ - координата вектора $\bar{\text{в}}$ за базисом $\bar{\text{а}}$.

Базисом на площині *називають довільну упорядковану пару неколінеарних векторів.*

Базисом у просторі *називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів*.

Якщо вектори $\overline{\mathrm{a}}$ та $\overline{\mathrm{в}}$ - базис на площині і $\overline{\mathrm{c}}$ - довільний ненульовий вектор площини, то існують сталі α та β такі, що $\overline{\mathrm{c}} = \alpha\overline{\mathrm{a}} + \beta\overline{\mathrm{в}}$ (рис.7)

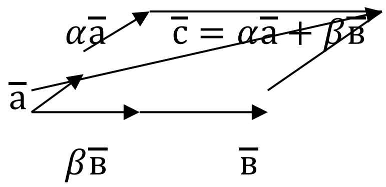


Рис.7

Коефіцієнти α , β називають *координатами вектора* $\overline{\mathrm{c}}$ в даному базисі.

Якщо вектори $\overline{\mathrm{a}}$, $\overline{\mathrm{в}}$ і $\overline{\mathrm{c}}$ - базис у просторі і вектор $\overline{d}$ розкладений за базисом, тобто $\overline{d} = \alpha\overline{\mathrm{a}} + \beta\overline{\mathrm{в}} + \gamma\overline{\mathrm{c}}$, то числа $\alpha, \beta,\ \gamma$ називають координатами вектора $\overline{d}$ в даному базисі.

Таким чином, базис у просторі дає змогу кожний вектор одночасно зіставити з упорядкованою трійкою чисел (координатами цього вектора) і, навпаки, кожну упорядковану трійку чисел $\alpha, \beta,\ \gamma$ за допомогою базису можна зіставити з єдиним вектором

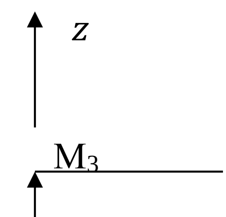
$$\overline{d} = \alpha\overline{\mathrm{a}} + \beta\overline{\mathrm{в}} + \gamma\overline{\mathrm{c}}.$$

Точку О й упорядковану трійку некомпланарних векторів $\overline{\mathrm{e}_1}, \overline{\mathrm{e}_2}, \overline{\mathrm{e}_3}$ (базису) називають <u>*декартовою системою координат у просторі*</u>.

Точка О – початок координат, а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають <u>*осями координат*</u>.

Упорядковану трійку одиничних попарно ортогональних векторів $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{\kappa}$ ($|\bar{\imath}| = 1$, $|\bar{\jmath}| = 1$, $|\bar{\kappa}| = 1$) називають <u>*ортонормованим базисом*</u>.

Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають декартову систему, базис якої ортонормований, і позначають її через $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат (рис.8)).



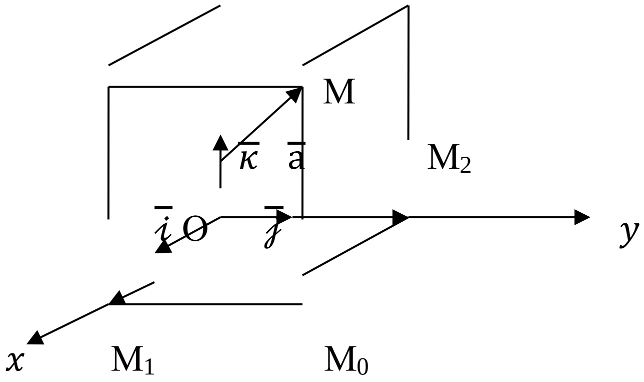


Рис.8

Розклад вектора за ортами координатних осей.

Нехай $\bar{a}$ - довільний ненульовий вектор простору, сумістимо його початок з початком координат: $\bar{a} = \overline{OM}$ (рис.1).

Проведемо через точку M площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо через M_1, M_2 та M_3. Дістанемо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overline{OM}$. Тоді $\text{пр}_{Ox}\bar{a} = \text{пр}_{Ox}\overline{OM} = \left|\overline{OM_1}\right|$, $\text{пр}_{Oy}\bar{a} = \left|\overline{OM_2}\right|$, $\text{пр}_{Oz}\bar{a} = \left|\overline{OM_3}\right|$.

Позначимо $\left|\overline{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overline{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overline{OM_3}\right| = a_z$.

Враховуючи векторні рівності

$$\overline{OM_1} = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \bar{\imath} = a_x \cdot \bar{\imath},\ \overline{OM_2} = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \bar{\jmath} = a_y \cdot \bar{\jmath},\ \overline{OM_3} = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \bar{\kappa} = a_z \cdot \bar{\kappa},$$

$$\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_0} + \overline{M_0M} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3},$$

дістанемо

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{\imath} + a_y \cdot \bar{\jmath} + a_z \cdot \bar{\kappa}} \quad (1)$$

Ця формула є основною у векторній алгебрі і називається <u>*розкладом вектора* $\bar{a}$ *за ортонормованим базисом* $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{\kappa}$.</u>

Векторну рівність (1) у символічній формі ще записують так:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \text{або}\ \bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

Довжина вектора. Напрямні косинуси.

<u>*Довжину (модуль) вектора*</u> $\bar{a}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Ця формула безпосередньо випливає з того факту, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер.

Оскільки координати вектора $\overline{a}$ - це проекції вектора $\overline{a}$ на координатні осі, то

$$\boxed{\begin{array}{l} a_x = пр_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha \\ a_y = пр_y\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta \\ a_z = пр_z\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma \end{array}}$$

де α, β, γ - кути, які вектор $\overline{a}$ утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис.9)

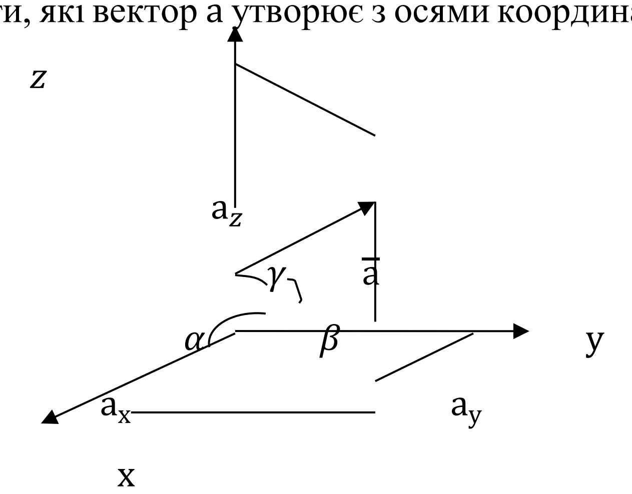


Рис.9

Тоді $$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}} \quad (2)$$

Косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ кутів α, β, γ називають *<u>напрямними</u>* *<u>косинусами</u>* вектора $\overline{a}$; вони визначають напрям вектора $\overline{a}$ в системі $Oxyz$ і задовольняють рівність

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Звідси випливає, що орт вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ має вигляд

$$\overline{e_a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

де напрямні косинуси визначають за формулою (2).

Дії над векторами.

Нехай вектори задані своїми координатами, тобто

$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{в} = (в_x, в_y, в_z)$,

тоді

$$\boxed{\overline{a} + \overline{в} = (a_x + в_x, a_y + в_y, a_z + в_z),}$$

$$\boxed{\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)}$$

Іншими словами, при додаванні векторів їхні відповідні координати додають; при множенні вектора на скаляр координати вектора множать на цей скаляр.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ *<u>рівні</u>* тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати:

$a_x = в_x, a_y = в_y, a_z = в_z$.

Колінеарність векторів.

З’ясуємо умови колінеарності векторів $\overline{a}$ і $\overline{в}$, заданих своїми координатами. Нехай $\overline{a} \parallel \overline{в}$, тоді $\overline{a} = \lambda\, \overline{в}$, де $\lambda \neq 0$ - деяке число. Тоді

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k} = \lambda\left(в_x \cdot \overline{i} + в_y \cdot \overline{j} + в_z \cdot \overline{k}\right).$$

Звідси

$$a_x = \lambda в_x, \quad a_y = \lambda в_y, \quad a_z = \lambda в_z$$

тобто

$$\boxed{\frac{a_x}{в_x} = \frac{a_y}{в_y} = \frac{a_z}{в_z}} \qquad (3)$$

Отже, координати колінеарних векторів пропорційні. І навпаки, якщо координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.

Координати точки.

Довільній точці M простору можна зіставити у ПДСК вектор $\overline{r} = \overline{OM}$, який називають радіус-вектором точки M. Тоді існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що

$$\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}.$$

Координати x, y, z радіус-вектора $\overline{OM}$ називають <u>*координатами точки M*</u> і пишуть M(x, y, z).

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overline{AB}$, то його координати знаходять за формулою

$$\boxed{\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

<u>*Довжину вектора* $\overline{AB}$</u> (або відстань між точками A та B) записують так:

$$\boxed{\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Поділ відрізка у даному відношенні.

Нехай задано відрізок A_1A_2 точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді *координати точки M(x, y, z), яка ділить цей відрізок у відношенні* λ, тобто $\left|\overline{A_1M}\right| : \left|\overline{MA_2}\right| = \lambda$, знаходять за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}} \qquad (4)$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок навпіл ($\lambda = 1$), такі:

$$\boxed{x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}, z = \frac{z_1+z_2}{2}}$$

Скалярний добуток векторів.

<u>*Скалярним добутком двох векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{в}$</u> називають число $\bar{a} \cdot \bar{в}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{в} = |\bar{a}||\bar{в}| \cos\varphi}$$

Якщо хоча б один із векторів $\bar{a}$ чи $\bar{в}$ нульовий, то за означенням

$$\bar{a} \cdot \bar{в} = 0.$$

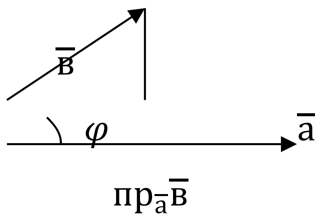
Оскільки виконуються рівності

$$|\bar{a}| \cos\varphi = пр_{\bar{в}}\bar{a}\ , \quad |\bar{в}| \cos\varphi = пр_{\bar{a}}\bar{в}$$

то

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{в} = |\bar{в}| пр_{\bar{в}}\bar{a} = |\bar{a}| пр_{\bar{a}}\bar{в}}$$

<u>*Геометричний зміст*</u> скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора (рис.1).



Тоді

$$\boxed{пр_{\bar{в}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{в}|}} \quad (1)$$

Формула (1) – робоча формула для обчислення проекції вектора на вектор (або вісь).

Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.

Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{в}$ задані своїми координатами

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{в} = (в_x, в_y, в_z).$$

Тоді

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z} \quad (3)$$

Висновки з формули (3) такі:

1. умова перпендикулярності векторів $\overline{a}$ і $\overline{\text{в}}$:

$$a_x \text{в}_x + a_y \text{в}_y + a_z \text{в}_z = 0;$$

2. довжина вектора $\overline{a}$: $|\overline{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2};$

3. косинус кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{\text{в}}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{\text{в}}}{|\overline{a}||\overline{\text{в}}|} = \frac{a_x \text{в}_x + a_y \text{в}_y + a_z \text{в}_z}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}\sqrt{{\text{в}_x}^2+{\text{в}_y}^2+{\text{в}_z}^2}}.$$

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ.

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ *на вектор* $\overline{\text{в}}$ називають вектор $\overline{c}$, який задовольняє такі три умови:

1) модуль вектора $\overline{c}$ обчислюють за формулою:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{\text{в}}|\sin\varphi,$$

де φ - кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{\text{в}}$;

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{\text{в}}$;

3) вектори $\overline{a}$, $\overline{\text{в}}$ і $\overline{c}$ утворюють *праву трійку*, тобто якщо дивитися з кінця результуючого вектора $\overline{c}$, то найкоротший поворот від першого вектора $\overline{a}$ до другого вектора $\overline{\text{в}}$ видно проти годинникової стрілки (рис.10).

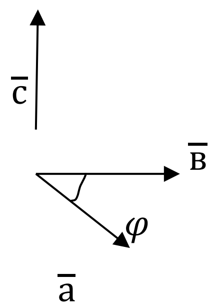


Рис.10

Позначення векторного добутку: $\overline{a} \times \overline{\text{в}}$, $[\overline{a}\,,\overline{\text{в}}]$.

З означення векторного добутку безпосередньо випливають векторні рівності між ортами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$$\boxed{\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k},\ \ \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i},\ \ \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}.}$$

Властивості векторного добутку.

Розглянемо алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку:

1) геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\overline{\text{а}}$ і $\overline{\text{в}}$ (рис.11).

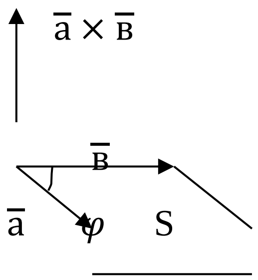


Рис.211

2) антикомутативність множення:

$$\overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}} = -\overline{\text{в}} \times \overline{\text{а}}$$

3) $(\lambda\overline{\text{а}}) \times \overline{\text{в}} = \lambda(\overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}})$; $\overline{\text{а}} \times (\lambda\overline{\text{в}}) = \lambda(\overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}})$;

4) $\overline{\text{а}} \times (\overline{\text{в}} + \overline{\text{с}}) = \overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}} + \overline{\text{а}} \times \overline{\text{с}}$;

5) два ненульові вектори $\overline{\text{а}}$ і $\overline{\text{в}}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли векторний добуток цих векторів дорівнює нуль-вектору, тобто

$$\boxed{\overline{\text{а}} \parallel \overline{\text{в}} \Leftrightarrow \overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}} = 0}$$

Зокрема,

$$\boxed{\bar{i} \times \bar{i} = 0,\ \ \bar{j} \times \bar{j} = 0,\ \ \bar{k} \times \bar{k} = 0}$$

Зауваження. Якщо відомі координати вершин трикутника АВС, то його площу доцільно шукати за формулою

$$\boxed{S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AC}}\right|.}$$

Векторний добуток векторів, заданих координатами.

Нехай вектори $\overline{\text{а}} = (\text{а}_\text{x}, \text{а}_\text{y}, \text{а}_z)$, $\overline{\text{в}} = (\text{в}_\text{x}, \text{в}_\text{y}, \text{в}_z)$ задані своїми координатами у ПДСК. Тоді векторний добуток знаходять за формулою

$$\boxed{\overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \text{а}_\text{x} & \text{а}_\text{y} & \text{а}_z \\ \text{в}_\text{x} & \text{в}_\text{y} & \text{в}_z \end{vmatrix},}$$

або

$$\overline{\text{а}} \times \overline{\text{в}} = (\text{а}_\text{y}\text{в}_z - \text{а}_z\text{в}_\text{y})\bar{i} - (\text{а}_\text{x}\text{в}_z - \text{а}_z\text{в}_\text{x})\bar{j} + (\text{а}_\text{x}\text{в}_\text{y} - \text{а}_\text{y}\text{в}_\text{x})\bar{k}$$

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{\text{M}_1\text{M}_2}$;

б) координати точки М, якщо $М_1М : ММ_2 = m : n$;

в) координати точки $М_3$, якщо $\overline{М_1М_3} = \lambda\overline{М_1М_2}$

$М_1(-5; 17; 21)$, $М_2(4; 5; 1)$, $m : n = 4 : 3$, $\lambda = -5$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{с}_1$ і $\overline{с}_2$, побудовані на векторах $\overline{а}$ і $\overline{в}$?

$\overline{а} = \{3; -2; 0\}$, $\overline{в} = \{3; 0; -4\}$, $\overline{с}_1 = 2\overline{а} + 3\overline{в}$, $\overline{с}_2 = 4\overline{в} - \overline{а}$.

3. Обчисліть: а) $(\overline{а} + \overline{в})(\overline{а} - 2\overline{в})$; б) $|\overline{а} - \overline{в}|$, якщо $|\overline{а}| = 3$, $|\overline{в}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p} = -\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{a} = \{3; -2; 1\}$, $\overline{b} = \{-1; -2; 2\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{х}$, якщо $\overline{x} \cdot (3\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}) = 11$, $\overline{x} \cdot (5\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{k}) = 13$, $\overline{x} \cdot (11\overline{i} + \overline{j} + 18\overline{k}) = 3$.

2.5. Практичне заняття 5. Пряма лінія на площині і в просторі.

Приклад 1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), якщо вона проходить через дві точки: $A(5; 6; 1)$ і $B(9; 4; 8)$.

Розв'язання.

1. Канонічне рівняння. Скористаємось формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

$$\frac{x - 5}{9 - 5} = \frac{y - 6}{4 - 6} = \frac{z - 1}{8 - 1}, \quad \frac{x - 5}{4} = \frac{y - 6}{-2} = \frac{z - 1}{7};$$

2. Параметричне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 5}{4} = t \\ \dfrac{y - 6}{-2} = t \\ \dfrac{z - 1}{7} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = -2t + 6 \\ z = 7t + 1 \end{cases}.$$

3. Рівняння прямої як лінії перетину двох площин:

Використаємо канонічне рівняння прямої, прирівняємо перший і другий, перший і третій вирази:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-6}{-2} \\ \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{z-1}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+10 = 4y-24 \\ 7x-35 = 4z-4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y-34=0 \\ 7x-4z-31=0 \end{cases}.$$

Приклад 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;5;7)$ паралельно прямій $\begin{cases} x-y+4z-1=0 \\ 3x+y-z+10=0 \end{cases}$.

Розв'язання. Знайдемо направляючий вектор прямої. Нормальні вектори площин, які утворюють пряму, матимуть координати $\overline{N}_1\{1;-1;4\}$, $\overline{N}_2\{3;1;-1\}$.Напрямний вектор $\overline{q}$ прямої знайдемо як векторний добуток векторів $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:

$$\overline{q} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-3;13;4\};$$

Запишемо рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-5}{13} = \frac{z-4}{4}.$$

Приклад 3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases} (*)$$

Розв'язання. Цю пряму задано як лінію перетину двох площин. Канонічні рівняння у просторі мають вигляд:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}.$$

Напрямний вектор $\overline{q}$ цієї прямої знайдемо як векторний добуток нормальних векторів $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:

$$\overline{q} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\overline{i} + 14\overline{j} + 13\overline{k}.$$

За точку M_1 візьмемо точку перетину цієї прямої з площиною Oyz, тоді $x=0$. Дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -y+3z-1=0, \\ 4y-z-7=0. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, маємо $y_1=2,\ z_1=1$. (Точку M_1 можна обрати будь-яким чином, необхідно, щоб вона задовольняла систему рівнянь *)Отже, точка M_1 матиме координати $M_1(0;\,2;\,1)$ і канонічне рівняння прямої запишеться у вигляді:

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-1}{13}.$$

Приклад 4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;3;1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

Розв’язання.

1) Рівняння площини, що проходить через точку $A(2;3;1)$ перпендикулярно заданій прямій, має вигляд $2x-y+3z-4=0$;

2) Знайдемо координати точки B перетину площини $2x-y+3z-4=0$ і прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x-y+3z-4=0, \\ x=2t-1, \\ y=-t, \\ z=3t+2 \end{cases} \Rightarrow t=0.$$

Координати точки $B(-1;\,0;\,2)$.Тепер запишемо рівняння перпендикуляра

$$AB:\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 5. Перевірити, чи лежать три точки на одній прямій:

1) $M_1(1;-1;\,2);\ M_2(-2;\,0;1);\ M_3(0;-3;-4);$

2) $M_1(3;\,0;1);\ M_2(0;\,2;\,4);\ M_3(1;\frac{4}{3};\,3).$

Розв’язання

1) Складемо рівняння прямої яка проходить через точки $M_1,\ M_2$:

$$\frac{x-1}{1+2}=\frac{y+1}{-1+0}=\frac{z-2}{2-1};\qquad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1};$$

Підставимо точку M_3 в дане рівняння:

$$\frac{0-1}{3}=\frac{-3+1}{-1}=\frac{-4-2}{1}; \qquad -\frac{1}{3}=\frac{2}{1}=-\frac{6}{1};$$

З отриманої неправильної рівності, слідує, що точки не лежать на одній прямій.

2) Складемо рівняння прямої яка проходить через точки M_1, M_2:

$$\frac{x-3}{3-0}=\frac{y-0}{0-2}=\frac{z-1}{1-4}; \qquad \frac{x-3}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-3};$$

Підставимо точку M_3 в дане рівняння:

$$\frac{1-3}{3}=\frac{\frac{4}{3}}{-2}=\frac{3-1}{-3}=-\frac{2}{3};$$

З отриманої рівності, слідує, що точки лежать на одній прямій.

Відповідь: 1) Ні; 2) Так.

Приклад 6. Скласти рівняння прямої: параметричні і канонічні, якщо пряма задана загальними рівняннями:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-4=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\overline{S}=\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}=\{-3;4;5\};$$

2) Знайдемо координати точки, що належить прямій:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} -y+2z-4=0, \\ 2y-z-1=0; \end{cases} \begin{cases} y=2z-4, \\ 4z-8-z-1=0; \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ z=3; \end{cases}$$

3) Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=2+4t, \\ z=3+5t; \end{cases}$$

4) Запишемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Приклад 7. Знайти сліди прямої

$$\begin{cases} x - z - 5 = 0; \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$ у площинах Oxy і Oxz побудувати їх.

Розв'язання.

а) у площині Oxy, $z = 0$, $\begin{cases} x = 5, \\ y = 4 \end{cases}$ (5; 4; 0);

б) у площині Oxz, $y = 0$, $\begin{cases} x = 7; \\ z = 2 \end{cases}$ (7; 0; 2).

Приклад 8. Обчислити кут між прямими

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Знайдемо координати напрямного вектора другої прямої:

$$\overline{S} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{7; 14; 7\}, \text{ або } \overline{S} \| q\{1; 2; 1\};$$

2) За формулою косинуса кута між прямими маємо :

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Приклад 9. Дослідіть паралельність прямих $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ та

$$\frac{x + 7}{3} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z - 9}{4}.$$

Розв'язання.

$$\overline{S} = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right\} = \{-3; 1; -4\}.$$

Застосуємо умову паралельності прямих $\frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} = \frac{-4}{4} = -1$, отже, прямі

паралельні.

Приклад 10. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; 0; -3)$ паралельно:

а) вектору $\overline{S}\{2; -3; 5\}$;

б) прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox ;

г) осі Oz ;

д) прямій $\begin{cases} x=-2+t; \\ y=2t; \\ z=1-\frac{1}{2}t. \end{cases}$

Розв'язання.

а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;

в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$;

д) $\bar{S}\left\{1;\,2;\,-\frac{1}{2}\right\}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-\frac{1}{2}}$.

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки: $M_1(0;-3;4)$ і $M_2(4;1;9)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;-6;3)$ паралельно прямій $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 6x+y-5z+10=0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 8x+3y-z-11=0 \\ -x+2y+z+1=0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(0;0;-1)$ на пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(0;1;-1)$ щодо площини $2x+y-2z+6=0$.

<u>2.6. Практичне заняття 6. Площина у просторі. Лінії та поверхні другого порядку.</u>

Приклад 1. Знайти точку B, симетричну точці $A(1;3;-4)$ щодо площини $3x+y-2z=0$.

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку A, перпендикулярно площині:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}.$$

2) Знайдемо точку перетину прямої і площини:

а) Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t+3, \\ z=-2t-4; \end{cases}$$

б) Підставимо отримані рівності в рівняння площини:

$$9t+3+t+3+4t+8=0;$$

$$14t+14=0;$$

$$t=-1.$$

$(-2;2;-2)$ - проекція точки A на площину, середина відрізка AB;

в) Запишемо рівняння для відшукання координат точки B:

$$-2=\frac{1+x}{2}; \qquad 2=\frac{3+y}{2}; \qquad -2=\frac{-4+z}{2};$$

$$x=-5; \qquad y=1; \qquad z=0.$$

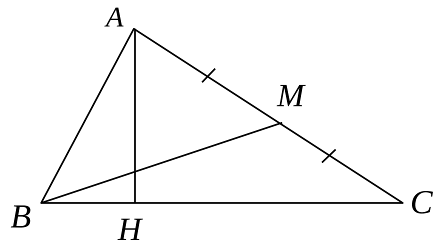
Відповідь: $B(-5;1;0)$.

Приклад 2. Дано три вершини трикутника: $A(2;4;5)$, $B(-1;3;2)$, $C(4;-4;1)$. Скласти рівняння висоти AH ,медіани BM.

Розв'язання

1)Складемо рівняння медіани. Знайдемо координати точки M . Так як BM медіана, то $AM = MC$.Звідси

маємо:



$$x_M = \frac{2+4}{2}; \quad x_M = 3;$$
$$y_M = \frac{4-4}{2}; \quad y_M = 0;$$
$$z_M = \frac{5+1}{2}; \quad z_M = 3;$$

Маємо координати двох точок, тому можна записати рівняння медіани:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{0-3} = \frac{z-2}{3-2};$$
$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

2)Складемо рівняння висоти.

1. Рівняння прямої BC :

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-3}{-4-3} = \frac{z-2}{1-2}; \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-2}{-1};$$

2. Рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно прямій BC :

$$5(x-2) - 7(y-4) - z - 5 = 0; \quad 5x - 7y - z + 13 = 0;$$

3.Знайдемо точку H перетину прямої BC і площини $5x - 7y - z + 13 = 0$,

для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 5x - 7y - z + 13 = 0 \\ \dfrac{x+1}{5} = t \\ \dfrac{y-3}{-7} = t \\ \dfrac{z-2}{-1} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 7y - z + 13 = 0 \\ x = 5t - 1 \\ y = -7t + 3 \\ z = -t + 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow t = \frac{1}{5};$$

Координати точки $H(0; \frac{8}{5}; \frac{9}{5})$. Тепер запишемо рівняння перпендикуляра:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-\frac{8}{5}}{4-\frac{8}{5}} = \frac{z-\frac{9}{5}}{5-\frac{9}{5}}; \quad \frac{x}{2} = \frac{5y-8}{12} = \frac{5z-9}{16}.$$

Приклад 3. Дано вершини трикутника ABC: $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ і $C(-5;14;-3)$.Скласти канонічні рівняння бісектриси внутрішнього кута B заданого трикутника.

Розв'язання. Складемо рівняння бісектриси. Канонічні рівняння прямої у просторі задається таким чином:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Сталі $(x_1;y_1;z_1)$ – це координати точки, через яку проходить пряма (В даному випадку це координати точки B); $(x_2;y_2;z_2)$ − координати D - точки перетину бісектриси зі стороною AC. Очевидно, що розв'язок задачі зводиться до пошуку координат точки D.

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні відповідним прилеглим сторонам трикутника. Тобто: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\lambda$, де λ – число, яке показує в якому відношенні точка D ділить відрізок AC. Знайдемо λ . Для цього попередньо визначимо довжини відрізків AB і BC:

$$AB=\sqrt{4+9+36}=7,$$

$$BC=\sqrt{36+144+16}=14.$$

Отже: $\lambda=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$

Тепер знайдемо координати точки D:

$$x=\frac{3+0.5\cdot(-5)}{1+0.5}=\frac{1}{3},\qquad y=\frac{-1+0.5\cdot14}{1+0.5}=4,$$

$$z=\frac{-1+0.5(-3)}{1+0.5}=-\frac{5}{3},\qquad \text{тобто } D(\frac{1}{3};4;-\frac{5}{3}).$$

2)Маємо координати двох точок, через які проходить пряма BD, отже можна записати рівняння бісектриси:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+7}{-\frac{5}{3}+7};\quad \frac{x-1}{-\frac{2}{3}}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+7}{\frac{16}{3}};\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}.$$

Відповідь: Канонічне рівняння бісектриси BD має вигляд:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}.$$

Приклад 4. Скласти рівняння площини, що проходить точку $A(1;-2;3)$ і пряму $\begin{cases}2x-3y+z-3=0;\\ x+3y+2z+1=0\end{cases}$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x;y;z)$ належить площині , а точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ - прямій. $\overline{AM}$, $\overline{AM_1}$ і $\overline{S}$ компланарні, тобто рівняння площини π має вигляд:

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}=0.$$

Знайдемо координати точки M_1:

$$\begin{cases}2x-3y+z-3=0,\\ x+3y+2z+1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=0,\\ 2x+z-3=0,\\ x+2z+1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=0,\\ -2-4z+z-3=0,\\ x=-1-2z;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0,\\ z=-\dfrac{5}{3}, \quad M_1(\dfrac{7}{3};0;-\dfrac{5}{3})\\ x=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

$$\overline{S}=\left\{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{-9;-3;9\};\ \overline{S}\,\|\,\{3;1;-3\}$$ − напрямний вектор прямої.

Точка A збігається з точкою M_0.

$$\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-3\\ \dfrac{7}{3}-1 & 2+0 & -3-\dfrac{5}{3}\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -\dfrac{14}{3}\\ 1 & -3\end{vmatrix}-(y+2)\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{4}{3} & -\dfrac{14}{3}\\ 3 & -3\end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{4}{3} & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\cdot\left(-6+4\frac{2}{3}\right)-(y+2)\cdot(-4+14)+\left(\frac{4}{3}-6\right)=0;$$

$$-(x-1)\cdot\frac{4}{3}-10\cdot(y+2)-(z-3)\cdot\frac{14}{3}=0;$$

$$-4x+4-30y-60-14z+42=0;$$

$$4x+30y+14z+14=0;$$

$$2x+15y+7z+7=0.$$

Приклад 5. Задано пряму $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ і точку $M(0;1;2)$. Необхідно

1) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M;
2) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;
3) обчислити відстань від точки до прямої;
4) зайти проекцію точки M на пряму.

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 2-0 & 0-1 & -1-2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;$

$3x-6(y-1)+4(z-2)=0; \quad 3x-6y+4z-2=0.$

2) рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої: $2x+y-1=0;$

3) знайдемо точку перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x=2t+2, \\ y=t, \\ z=-1; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(2t+2)+t-1=0, \\ 4t+4+t-1=0, \\ 5t=-3, \quad t=-\dfrac{3}{5}; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}, \\ y=-\dfrac{3}{5}, \\ z=-1; \end{cases}$$

$M_1\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5};-1\right)$ – точка на прямій, найближча до M, проекція точки M на пряму.

4) $d(M,l)=d(M,M_1)=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(1+\frac{3}{5}\right)^2+(2+1)^2}=$

$=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}+9}=\sqrt{\frac{61}{5}}.$

Приклад 6. Задано площину $x-y-z+1=0$ і пряму $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Необхідно:

1) обчислити синус кута між прямою і площиною;
2) координати точки перетину прямої і площини;
3) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму, перпендикулярно до площини.

Розв'язання.

1) $\sin\varphi=\frac{|0\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot(-1)|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{5}};$;

2) $\begin{cases} x=1; \\ y=2t; \\ z=t-1; \end{cases}$ $1-2t-t+1+1=0;$ $t=1\Rightarrow(1;2;0)$ – точка перетину прямої і площини;

3) а) рівняння прямої, що проходить точку $(1;2;0)$ перпендикулярно до площини $x-y-z+1=0$, має вигляд:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-1};$$

б) проведемо площину через отриману пряму і точку даної прямої $(1;0;-1)$

$$\Pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1-1 & 2 & 0+1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot y-2\cdot(z+1)=0;$$

$$-x+1+y-2z-2=0;$$

$x-y+2z+1=0.$

1. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба. $2x-4y+4z-3=0$, $x-2y+2z-4=0$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (-1,4,3) перпендикулярно до двох заданих площин $2x - y + 3z = 0$, $4x + 3y - z + 4 = 0$.

3. Дано вершини трикутника M_1 (2,3,1), M_2 (-6,5,-3), M_3 (4,5,-1).

Скласти параметричне рівняння медіани, проведеної з вершини M_3.

РОЗДІЛ ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З МОДУЛЯ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

3.1. Самостійна робота №1 з теми «Визначники, їх властивості та обчислення. Матриці. Обернена матриця. Ранг матриці»

Варіант 1

1.Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$.

2.Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -14 & 21 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Варіант 2

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -22 \end{vmatrix}$.

2.Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -12 & 19 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Варіант 3

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 121 & 110 \\ 132 & 121 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & -10 & 17 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Варіант 4</u>

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & -8 & 15 \end{vmatrix}$.

3. Розв’яжіть матричне рівняння: $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Варіант 5</u>

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} \log_2 5 & -\log_9 16 \\ \log_8 3 & \log_5 2 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & -6 & 13 \end{vmatrix}$

3. Розв’яжіть матричне рівняння: $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$

<u>Варіант 6</u>

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 16 & 10 \\ 2 & -2 & -4 & 11 \end{vmatrix}$.

3. Розв’яжіть матричне рівняння: $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

3.2. Самостійна робота №2 з теми «Системи лінійних рівнянь та способи їх розв'язання»

Варіант 1

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$.

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$

Варіант 2

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 2x + y + 3z = -9 \\ 8x + 3y + 5z = -13 \\ 2x + 5y - z = -5 \end{cases}$.

Варіант 3

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + y + 2z - 16 = 0 \end{cases}$.

Варіант 4

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 10 = 0 \\ 3x + 7y + 4z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - \qquad x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 24 \end{cases}$

Варіант 5

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

Варіант 6

1. Розв'яжіть систему рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad = 5 \end{cases}$

3.3. *Самостійна робота №3 з теми «Системи координат. Вектори. Дії над векторами. Застосування секторів»*

Варіант 1

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(1; 2; -1)$, $M_2(3; 4; -2)$, $m : n = 2 : 5$, $\lambda = 3$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a} = \{1; 2; 3\}$, $\overline{в} = \{3; 0; -1\}$, $\overline{c}_1 = 2\overline{a} + 4\overline{в}$, $\overline{c}_2 = 3\overline{в} - \overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(4\overline{a} + 7\overline{в})(\overline{a} - 2\overline{в})$; б) $|2\overline{a} - 3\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{в}| = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p} = 2\overline{a} + 4\overline{b}$, $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{a} = \{-1; 3; 4\}$, $\overline{b} = \{-5; 1; 2\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x} \cdot (\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = 1$, $\overline{x} \cdot (\overline{i} + 3\overline{k}) = 5$, $\overline{x} \cdot (\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}) = 2$.

Варіант 2

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-2; 0; -4)$, $M_2(-4; 1; -2)$, $m : n = 3 : 1$, $\lambda = 2$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a} = \{1; 0; 1\}$, $\overline{в} = \{-2; 3; 5\}$, $\overline{c}_1 = \overline{a} + 2\overline{в}$, $\overline{c}_2 = 3\overline{a} - \overline{в}$

3. Обчисліть: а) $(2\overline{a} + 5\overline{в})(3\overline{a} - 2\overline{в})$; б) $|\overline{a} - 3\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{в}| = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=5\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{a}=\{-2;1;2\}$, $\overline{b}=\{-2;4;3\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=2$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=8$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-4\overline{j}+8\overline{k})=2$.

Варіант 3

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-5;1;4)$, $M_2(1;3;1)$, $m : n = 3 : 2$, $\lambda = 4$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a}=\{-2;4;0\}$, $\overline{в}=\{1;-2;7\}$, $\overline{c}_1=5\overline{a}+3\overline{в}$, $\overline{c}_2=2\overline{a}-\overline{в}$.

3. Обчисліть: а) $(3\overline{a}+\overline{в})(2\overline{a}+3\overline{в})$; б) $|2\overline{a}-3\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}|=\sqrt{2}$, $|\overline{в}|=3$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=-2\overline{a}+7\overline{b}$, $\overline{q}=3\overline{a}-2\overline{b}$, $\overline{a}=\{2;-3;4\}$, $\overline{b}=\{-1;-1;3\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k})=5$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k})=11$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-5\overline{j}+10\overline{k})=2$.

Варіант 4

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(5;-1;-4)$, $M_2(11;1;-1)$, $m : n = 2 : 1$, $\lambda = -2$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a}=\{1;2;-3\}$, $\overline{в}=\{2;-1;-1\}$, $\overline{c}_1=4\overline{a}+3\overline{в}$, $\overline{c}_2=8\overline{a}-\overline{в}$.

3. Обчисліть: а) $(4\overline{а}+3\overline{в})(\overline{а}-4\overline{в})$; б) $|2\overline{а}+3\overline{в}|$, якщо $|\overline{а}|=1$, $|\overline{в}|=6$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=3\overline{a}+4\overline{b}$, $\overline{q}=2\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{a}=\{-4;3;1\}$, $\overline{b}=\{2;2;1\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-3\overline{j}+9\overline{k})=14$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-3\overline{j}+6\overline{k})=2$.

Варіант 5

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-3;-1;8)$, $M_2(-7;-5;6)$, $m:n=1:4$, $\lambda=-3$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{с}_1$ і $\overline{с}_2$, побудовані на векторах $\overline{а}$ і $\overline{в}$?

$\overline{а}=\{3;5;4\}$, $\overline{в}=\{5;9;7\}$, $\overline{с}_1=-2\overline{а}+\overline{в}$, $\overline{с}_2=3\overline{а}-2\overline{в}$.

3. Обчисліть: а) $(4\overline{а}+5\overline{в})(\overline{а}-2\overline{в})$; б) $|2\overline{а}-\overline{в}|$, якщо $|\overline{а}|=\sqrt{3}$, $|\overline{в}|=1$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=\overline{a}-4\overline{b}$, $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{a}=\{-4;3;2\}$, $\overline{b}=\{-2;4;5\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot(\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-4\overline{j}+11\overline{k})=17$, $\overline{x}\cdot(\overline{i}-7\overline{j}+14\overline{k})=2$

Варіант 6

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(15;-2;-14)$, $M_2(11;0;10)$, $m:n=2:3$, $\lambda=4$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{с}_1$ і $\overline{с}_2$, побудовані на векторах $\overline{а}$ і $\overline{в}$?

$\overline{а} = \{1; 4; -2\}$, $\overline{в} = \{1; 1; -1\}$, $\overline{с}_1 = \overline{а} + \overline{в}$, $\overline{с}_2 = 4\overline{а} + 2\overline{в}$.

3. Обчисліть: а) $(5\overline{а} + 3\overline{в})(\overline{а} + 2\overline{в})$; б) $|\overline{а} - \overline{в}|$, якщо $|\overline{а}| = 3$, $|\overline{в}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p} = -\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{q} = 2\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = \{3; 3; 1\}$, $\overline{b} = \{-2; -3; -2\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x} \cdot (\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{k}) = 26$, $\overline{x} \cdot (\overline{i} - 5\overline{j} + 13\overline{k}) = 20$, $\overline{x} \cdot (\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k}) = 2$.

3.4. Самостійна робота №4 з теми «Пряма лінія на площині і в просторі. Площина в просторі. Лінії та поверхні другого порядку.»

Варіант 1

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки: $M_1(0; -3; 4)$ і $M_2(4; 1; 9)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -6; 3)$ паралельно прямій $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 6x + y - 5z + 10 = 0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 8x + 3y - z - 11 = 0 \\ -x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(0; 0; -1)$ на пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(0; 1; -1)$ щодо площини $2x + y - 2z + 6 = 0$.

Варіант 2

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(7;5;11)$ і $M_2(8;3;4)$.

2. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;-3;1)$ паралельно вектору $\bar{S}\{3;1;2\}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x+y-2z-11=0 \\ -x+2y+z+1=0 \end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(-1;-4;-3)$, $B(1;1;0)$, $C(3;2;1)$. Скласти рівняння висоти AH.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(6;5;4)$ щодо площини $-x+4y+2z+20=0$.

Варіант 3

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(2;0;1)$ і $M_2(15;11;-6)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(0;2;-1)$ паралельно прямій $\begin{cases} -3x-2y+z-5=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 5x+3y+z+2=0 \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-1;2;1)$ на пряму $\frac{x+2}{3}=\frac{y+8}{1}=\frac{z}{2}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(2;0;3)$ щодо площини $2x - y + z - 1 = 0$.

<u>Варіант 4</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(-4;-5;-3)$ і $M_2(1;1;6)$.

2. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;5;10)$ паралельно осі Oz.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 3x - y - z + 3 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(4;5;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(2;1;1)$. Скласти рівняння висоти AH.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(-4;3;2)$ щодо площини $5x - 4y + z - 12 = 0$.

<u>Варіант 5</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(4;-1;-2)$ і $M_2(13;0;3)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-11;3;2)$ паралельно прямій $\begin{cases} 3x + 3z - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 7 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(9;-1;-1)$ на пряму $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{5}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(2;0;-7)$ щодо площини $-x+3y-z+6=0$.

Варіант 6

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(-5;0;6)$ і $M_2(-3;7;6)$.

2. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;2;-6)$ паралельно прямій: $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-5t+2 \\ z=4t-3 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 5x-y-3z+3=0 \\ -4x+y+z+2=0 \end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(4;3;3)$, $B(1;1;1)$, $C(3;2;4)$. Скласти рівняння висоти AH.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(6;1;0)$ щодо площини $2x-y-4z+31=0$.

3.5. Контрольна робота №1 з теми «Визначники, їх властивості та обчислення. Матриці. Обернена матриця. Ранг матриці»

Варіант 1

1.Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 19 & 11 \\ 2 & -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Варіант 2

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -16 \\ -4 & -2 & 13 \\ 8 & -4 & -23 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 22 & 12 \\ 2 & -4 & -10 & 7 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Варіант 3

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 25 & 13 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Варіант 4

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & -8 & 34 & 16 \\ 10 & -8 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 28 & 14 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$..

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 5

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 27 & 20 \\ 2 & -11 & 10 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 13 & 11 & -18 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

3. Розв'яжіть матричне рівняння: $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 6

1. Обчисліть визначники: $\begin{vmatrix} -2-к & 2 & 0 \\ 2 & 4-к & 6 \\ 1 & 2 & 3-к \end{vmatrix}$.

.

2. Обчисліть визначники четвертого порядку**:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -6 \\ 3 & 15 & 11 & -16 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Розв’яжіть матричне рівняння: $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

4.Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6. Контрольна робота №2 з теми «Системи лінійних рівнянь та способи їх розв’язання»

Варіант 1

1. Розв’яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$.

2. Розв’яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

3. Розв’яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

Варіант 2

1. Розв’яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

2. Розв’яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

3. Розв’яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$.

Варіант 3

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

Варіант 4

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - \qquad x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 24 \end{cases}$

Варіант 5

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Варіант 6

4. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь методом Крамера:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

5. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

6. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

3.6. Контрольна робота №3 з теми «Системи координат. Вектори. Дії над векторами. Застосування секторів»

Варіант 1

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-1; 8; 26)$, $M_2(23; 0; 20)$, $m : n = 3 : 2$, $\lambda = -4$.

2. Чи колінеарні вектори $\bar{c}_1$ і $\bar{c}_2$, побудовані на векторах $\bar{a}$ і $\bar{в}$?

$\bar{a} = \{5; 0; -1\}$, $\bar{в} = \{7; 2; 3\}$, $\bar{c}_1 = 2\bar{a} - \bar{в}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{в} + 6\bar{a}$.

3. Обчисліть: а) $(5\bar{a} + \bar{в})(\bar{a} + \bar{в})$; б) $|\bar{a} + \bar{в}|$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{в}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо) $\overline{p} = -\overline{a} + 4\overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = \{-1; 4; 4\}$, $\overline{b} = \{3; 1; -2\}$.

5. Знайдіть вектор $\bar{x}$, якщо: $\bar{x} \cdot (\bar{i} - \bar{j} - 5\bar{k}) = 37$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 6\bar{j} - 9\bar{k}) = -13$, $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}) = 2$.

Варіант 2

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-7; 7; 15)$, $M_2(-1; -1; -9)$, $m : n = 2 : 7$, $\lambda = 2$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a} = \{0; 3; -2\}$, $\overline{в} = \{1; -2; 1\}$, $\overline{c}_1 = 5\overline{a} - 2\overline{в}$, $\overline{c}_2 = 5\overline{в} + 3\overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(3\overline{a} + 4\overline{в})(-3\overline{a} - \overline{в})$; б) $|\overline{a} + 2\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{в}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{q} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{a} = \{-5; 1; 2\}$, $\overline{b} = \{-3; 4; 3\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x} \cdot (\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = 3$, $\overline{x} \cdot (\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) = 1$, $\overline{x} \cdot (3\overline{i} + \overline{j} + 10\overline{k}) = -1$.

Варіант 3

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-4; 5; 22)$, $M_2(4; -1; -2)$, $m : n = 6 : 5$, $\lambda = 4$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a} = \{-2; 7; -1\}$, $\overline{в} = \{-3; 5; 2\}$, $\overline{c}_1 = 2\overline{a} + 3\overline{в}$, $\overline{c}_2 = 2\overline{в} + 3\overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(5\overline{a} + 2\overline{в})(-\overline{a} + 3\overline{в})$; б) $|\overline{a} + 4\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{в}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p} \cdot \overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p} = -3\overline{a} - 4\overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{a} = \{0; -2; 2\}$, $\overline{b} = \{-2; -3; 0\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot\left(3\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}\right)=10$, $\overline{x}\cdot\left(2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}\right)=4$, $\overline{x}\cdot\left(5\overline{i}+\overline{j}+12\overline{k}\right)=0$

Варіант 4

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(1;-8;12)$, $M_2(25;-2;4)$, $m:n=1:2$, $\lambda=-2$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a}=\{3;7;0\}$, $\overline{в}=\{1;-3;4\}$, $\overline{c}_1=4\overline{a}-2\overline{в}$, $\overline{c}_2=\overline{в}-2\overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(4\overline{a}+3\overline{в})(3\overline{a}-2\overline{в})$; б) $|2\overline{a}+5\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}|=2$, $|\overline{в}|=4$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=-3\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{q}=2\overline{a}+9\overline{b}$, $\overline{a}=\{2;3;2\}$, $\overline{b}=\{2;-1;-4\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot\left(2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}\right)=7$, $\overline{x}\cdot\left(3\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}\right)=7$, $\overline{x}\cdot\left(7\overline{i}+\overline{j}+14\overline{k}\right)=1$.

Варіант 5

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(4;9;14)$, $M_2(-2;-15;22)$, $m:n=1:3$, $\lambda=-3$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a}=\{3;7;0\}$, $\overline{в}=\{1;-3;4\}$, $\overline{c}_1=4\overline{a}-2\overline{в}$, $\overline{c}_2=\overline{в}+2\overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(2\overline{a}+5\overline{в})(\overline{a}+\overline{в})$; б) $|2\overline{a}-\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}|=\sqrt{3}$, $|\overline{в}|=1$, $\varphi=6$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=5\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{q}=\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{a}=\{-2;4;2\}$, $\overline{b}=\{-3;0;3\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо: $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k})=18$, $\overline{x}\cdot(4\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k})=10$, $\overline{x}\cdot(9\overline{i}+\overline{j}+16\overline{k})=2$.

<u>Варіант 6</u>

1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки М, якщо $M_1M : MM_2 = m : n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$

$M_1(-5;17;21)$, $M_2(4;5;1)$, $m:n=4:3$, $\lambda=-5$.

2. Чи колінеарні вектори $\overline{c}_1$ і $\overline{c}_2$, побудовані на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$?

$\overline{a}=\{3;-2;0\}$, $\overline{в}=\{3;0;-4\}$, $\overline{c}_1=2\overline{a}+3\overline{в}$, $\overline{c}_2=4\overline{в}-\overline{a}$.

3. Обчисліть: а) $(\overline{a}+\overline{в})(\overline{a}-2\overline{в})$; б) $|\overline{a}-\overline{в}|$, якщо $|\overline{a}|=3$, $|\overline{в}|=4$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

4. Знайдіть скалярний добуток $\overline{p}\cdot\overline{q}$, кут між векторами $\overline{p}$ і $\overline{q}$ та проекцію вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{q}$, якщо: $\overline{p}=-\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{q}=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{a}=\{3;-2;1\}$, $\overline{b}=\{-1;-2;2\}$.

5. Знайдіть вектор $\overline{x}$, якщо$\overline{x}\cdot(3\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k})=11$, $\overline{x}\cdot(5\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k})=13$, $\overline{x}\cdot(11\overline{i}+\overline{j}+18\overline{k})=3$.

3.7. <u>Контрольна робота №4 з теми «Пряма лінія на площині і в просторі. Площина в просторі. Лінії та поверхні другого порядку.»</u>

<u>Варіант 1</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(7;3;-2)$ і $M_2(-3;7;6)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5;9;-1)$ паралельно прямій $\begin{cases} 5x+y+4z+5=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x+y+5z+7=0 \\ 2x-y-2z+2=0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-3;0;4)$ на пряму $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(3;5;0)$ щодо площини $-3x+y+z-7=0$.

Варіант 2

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(1;4;-1)$ і $M_2(6;7;8)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1;-2;0)$ перпендикулярно площині α: $2x-3y+2z-6=0$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x-y+5z+3=0 \\ -x+y+z-2=0 \end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(3;-6;-7)$, $B(2;1;2)$, $C(3;5;1)$. Скласти рівняння висоти AH.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(-1;0;2)$ щодо площини $x+y-2z-13=0$.

<u>Варіант 3</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(14;15;16)$ і $M_2(16;17;18)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;0;2)$ паралельно прямій $\begin{cases} -2x-3y+3z+1=0 \\ x+y+2z+6=0 \end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x+y+8z+3=0 \\ -x+2y+2z+6=0 \end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-1;1;5)$ на пряму $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{-3}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(-2;1;4)$ щодо площини $x+3y-z-8=0$.

<u>Варіант 4</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(-12;0;5)$ і $M_2(7;1;8)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;1;9)$ перпендикулярно площині $\alpha: -y+5z-1=0$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x+3y+z-8=0 \\ 3x+y+z-2=0 \end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(-10;1;1)$, $B(4;0;1)$, $C(5;3;0)$. Скласти рівняння висоти AH.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(5;1;2)$ щодо площини $x+2y-3z+13=0$.

<u>*Варіант 5*</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(3;-2;2)$ і $M_2(-1;1;0)$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3;7;-7)$ паралельно прямій $\begin{cases}7x+y-2=0\\5x-y-3z=0\end{cases}$.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases}6x+3y-z=0\\4x-2y+z+1=0\end{cases}.$$

4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(1;-2;3)$ на пряму $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$.

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(-1;1;9)$ щодо площини $2x-2y+z+22=0$.

<u>*Варіант 6*</u>

1. Скласти рівняння прямої (канонічне, параметричне і рівняння прямої як лінії перетину двох площин), яка проходить через дві точки $M_1(0;-1;0)$ і $M_2(1;4;5)$.

2. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;7;3)$ паралельно осі Oy.

3. Привести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases}4x+y+2z-9=0\\-x+y-3z+1=0\end{cases}.$$

4. Дано три вершини трикутника: $A(1;-7;-7)$, $B(0;1;2)$, $C(4;3;3)$. Скласти рівняння висоти AH

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(0;5;2)$ щодо площини $2x+2y-z+1=0$.

ВИСНОВКИ

Курс «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є невід'ємною частиною в розвитку математичних здібностей студентів. Вивчення даного курсу дозволяє студентам збільшити глибину засвоєння знань, формуванню наукових понять та законів. Крім того, даний матеріал сприяє підвищенню наукового рівня знань студентів, розвитку логічного мислення та їх творчих здібностей.

Використання матеріалу дипломної роботи у навчальному процесі допоможе студентам вищих навчальних закладів засвоїти знання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії; сприяти їхньому математичному розвитку і також допоможе удосконалювати абстрактне й логічне мислення, що є необхідною складовою сучасного педагога, сприятиме формуванню в студентів стійкогоінтересу до вивчення вищої математики.

Даний матеріал сприяє систематизації, поглибленню і розширенню математичних знань, умінь і навичок необхідних у майбутній професійній діяльності, вміння бачити та застосовувати математику в реальному життя.

Вивчення даного матеріалу у вищих навчальних закладах забезпечує:

– формування особистості студентів, розвиток їхнього інтелектуального, аналітичного та синтетичного мислення, математичної культури та інтуїції.

– володіння основними математичними поняттями, необхідними для аналізу і модулюванню явищ, які відбуваються у різних професіях, пошуку оптимальних рішень з метою підвищення ефективності роботи у вибраній професії, опрацювання й аналіз результатів обчислювальних експериментів.

– формування високого рівня математичної підготовки випускників навчальних закладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Басманов О. Є. Вища математики: навч. пос. / О. Є. Басманов. – Харків: Дільниця оперативної поліграфії АПБ України, 2003. – 138 с.
2. Вища математика: Збірник задач: навч. пос. / [Дубовик В. П., Юрик І. І. та ін.]. – Київ: А. С. К., 2005. – 480 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. пос. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик. – 4-е вид. – Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
4. Збірник задач з Вищої математики / [Бабенко В. В., Зіневич А. Г., Кучура С. М. та ін.]. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана франка, 2005. – 256 с.
5. Кривула В. Г. Вища математика: практикум / В. Г. Кривула,В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
6. Литвин І. І. Вища математика: навч. пособ. / І. І. Литвин,О. М. Конопчук, Г. О. Желізняк. – Київ: Центр навчальної літератури., 2014. – 368 с.
7. Львовський С. М. Лекции по математическому аналізу / С. М. Львовський. – Москва: МЦНМО, 2008. – 296 с.
8. Роганін О. М. Математика: практ. довід. / О. М. Роганін,О. І. Каплун. – Харків: ФОП Сівак Т. К., 2009. – 416 с.
9. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах /А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків: ХТУРЕ, 2002. – Ч. 1. – 552 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: учеб. для вузов / Г. М. Фихтенгольц. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: «Лань», 2015. – Ч. 1. – 448 с.
11. https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/zilenko_l1.pdf
12. https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/zilenko_l2.pdf

13. https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/115662/mod_folder/content/0/%D0%92%D0%9C%20%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F%204..pdf?forcedownload=1
14. https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/21/3-21-kl43.pdf
15. http://matan.kpi.ua/public/files/citritska_vm-l3.pdf
16. https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/L5.pdf
17. https://studfile.net/preview/10042932/#3
18. https://studfile.net/preview/10042932/page:2/#6
19. https://studfile.net/preview/5483240/page:12/
20. https://studfile.net/preview/7019552/
21. STEM education. State scientific institution "Institute of Modernization of the Content of Education": website. URL: https://imzo.gov.ua/stem-osvita/ (date of application: 13.01.2021).
22. On the formation of a working group on the implementation of STEM education in Ukraine: Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated February 29, 2016 No. 188. URL: https://imzo.gov.ua/2016/02/29 /nakaz-mon-vid-29-022016-188-pro-utvorennya-robochoyi-grupi-z-pitan-vprovadzhennya-stem-osviti-v-ukrayini/? (date of application: 13.01.2021).
23. On conducting research and experimental work at the all-Ukrainian level on the topic: "Scientific-methodical principles of the creation and functioning of the All-Ukrainian scientific-methodical virtual STEM center (BHMB STEM-center)" for 2017-2021: Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine from May 17, 2017. No. 708. URL: https://ips.ligazakon.net/document/view/MUS28643?an=1 (access date: 01/13/2021).
24. On approval of the Standard list of teaching aids and equipment for classrooms and STEM laboratories: Order of the Ministry of Education and Science of

Ukraine dated April 29, 2020 No. 574. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0410-20#n17 (access date: 01/13/2021)

25. http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf
26. https://matan.kpi.ua/public/files/PraktykumLAAG.pdf
27. https://ep3.nuwm.edu.ua/19003/1/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%9E%D1%81%D0%B0%D0%B4%D1%87%D0%B0%20%D0%9B.%20%D0%9A._%282%29.pdf
28. http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstu/1622
29. https://www.ukma.edu.ua/~bogd/Lin_Algebra/PosibnykAlg.pdf
30. https://learn.ztu.edu.ua/course/view.php?id=445
31. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0
32. https://web.kpi.kharkov.ua/apm/wp-content/uploads/sites/82/2020/03/Dzyubak-ta-in-Linijna-algebra-Zbirka-zavdan.pdf
33. http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstu/301
34. https://ep3.nuwm.edu.ua/19003/1/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%9E%D1%81%D0%B0%D0%B4%D1%87%D0%B0%20%D0%9B.%20%D0%9A._%282%29.pdf
35. http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Rudavskiy_2002_260.pdf

http://194.44.152.155/elib/local/sk689518.pdf

37. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41914/1/lin_alg_zadachnik.pdf

ДОДАТКИ

Додаток А. Лекції

1.1 Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення.

Розглянемо систему рівнянь, яка має *n* – рядків і *n* – невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Така система має числову характеристику, яка називається визначником (або детермінантом: det): $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$. Даний визначник має порядок *n*.

Мінором визначника Δ порядку *n* називається визначник *(n-1)* порядку, який отримуємо в результаті викреслювання з визначника Δ *i* – того рядка і *к* – того стовпця. Позначають M_{ik} .

Приклад: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} називається величина $(-1)^{i+k} M_{ik}$: $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Приклад: $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Значення визначника Δ дорівнює сумі добутків елементів якого – небудь стовпця (або рядка) на їх алгебраїчні доповнення:

$\Delta_n = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + ... + a_{n2} \cdot A_{n2}$ (розклад за елементами другого стовпця).

Обчислимо визначник другого порядку: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

2.1 Основні властивості визначників.

1. значення визначника не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями;
2. якщо поміняти місцями два відповідних рядка визначника, то результат змінить знак на протилежний;
3. визначник з двома однаковими паралельними рядками дорівнює нулю;
4. якщо елементи деякого рядка (або стовпця) мають спільний множник, то його можна виносити за знак визначника;
5. якщо всі елементи деякого рядка дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю
6. визначник, у якого елементи двох паралельних рядків пропорційні, дорівнює нулю;
7. визначник не зміниться, якщо до елементів якого – небудь стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка) помножені на одне і те ж число; $\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
8. якщо кожний елемент якого – небудь стовпця є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями є відповідні доданки, а решта збігається з стовпцями заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3.1 Методи обчислення визначників.

1. Визначники 3го – порядку обчислюються за правилом Саррюса (правило трикутників).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

2. Обчислення визначників (третього та вищих порядків) розкладанням за елементами i - рядка або j - стовпця.

Теорема: визначник дорівнює сумі добутків елементів якого – небудь рядка (стовпця)на їх алгебраїчні доповнення, тобто $\Delta = \sum a_{ik} A_{ik}$ або $\Delta = \sum a_{k\,i} A_{k\,i}$

Розкладання визначника *4 – го* порядку за елементами *2 – го* рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24}(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + +a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

3. Обчислення визначників методом ефективного зниження порядку.

Використовуючи основні властивості визначників, обчислення визначника $\Delta_n \neq 0$ завжди можна звести до обчислення визначника *(n-1)*-го порядку, зробивши в якому – небудь рядку (стовпці) всі елементи рівні нулю, крім одного.

Приклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ зробимо нулі в третьому стовпці: для цього елементи першого і четвертого рядка залишаємо без зміни; елементи першого рядка множимо на 3 і додаємо до відповідних елементів другого рядка і записуємо в другому рядку; відповідні елементи першого і третього рядків додаємо і записуємо в третьому рядку =

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 14 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

зробимо нулі в третьому рядку: для цього елементи першого стовпця залишаємо без зміни; елементи першого стовпця множимо на 2 і додаємо до відповідних елементів другого стовпця і записуємо в другому стовпці; елементи першого стовпця множимо на -3 і додаємо до відповідних елементів третього стовпця і записуємо в третьому стовпці

$$= -1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(-24+8) = 16$$

3.2 Метод зведення визначника до трикутного вигляду.

Використовуючи основні властивості визначників, обчислення визначника зводимо визначник до трикутного вигляду, тоді значення визначника дорівнює добутку його діагональних елементів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

поміняємо місцями перший та другий стовпці

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 64 = -64$$

1.1 Матриці.

В техніці дуже часто зустрічаються випадки, коли треба розв'язати систему рівнянь, яка містить 1000 і більше невідомих. Зараз це здійснюється за допомогою комп'ютерної техніки, в основі якої лежать стандартні методи розв'язання цих систем рівнянь.

В загальному вигляді система рівнянь записується так:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

де n - невідомих, m – рівнянь, $x_1; x_2; x_3\cdots$ - невідомі, $a_{11};\ a_{12};\ a_{13}\cdots$ - коефіцієнти при невідомих, $b_1; b_2;\ b_3\cdots$ - вільні члени.

Запишемо таблицю, складену з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ або $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Означення. Прямокутна таблиця, складена з елементів a_{ij} $\left(i = \overline{1,\ldots m};\ \ j = \overline{1,\ldots n}\ \right)$ деякої множини називається матрицею.

Елементи матриці нумеруються двома індексами: перший *i* – означає номер рядка, другий j - означає номер стовпця. Матриця має розмір $m \times n$ (– рядків, - стовпців).

Матриця називається числовою, якщо її елементи a_{ij} - числа, функціональною, якщо її елементи - функції, векторною, якщо її елементи - вектори і т.д.

Дві матриці А і В називаються рівними, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ (відповідні елементи рівні). Рівними можуть бути тільки матриці однакової розмірності.

Матриця, у якої $n = m$ називається квадратною: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Якщо *m=1*, то матриця називається матрицею – рядком: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Якщо *n=1*, то матриця називається матрицею – стовпцем: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля тільки елементи головної діагоналі, називаються діагональними:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці рівні між собою, то така матриця називається скалярною: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Якщо елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то така матриця називається одиничною: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матриця називається трикутною, якщо всі елементи розміщені вище (або нижче) головної діагоналі дорівнюють нулю: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

2.1. Лінійні дії над матрицями

1. Добутком числа α на матрицю $A=(a_{ij})_{mn}$ розміру $m\times n$ називається матриця $B=(b_{ij})_{mn}$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці *A* помноженому на число α

$$B=\alpha\cdot A=A\cdot\alpha=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Сумою двох матриць $A=(a_{ij})_{mn}$ і $B=(b_{ij})_{mn}$ розміру $m\times n$ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриці доданків, тобто $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ і позначається С=А+В.

Аналогічно дається означення різниці матриць: $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$; $\mathrm{C}=\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}+(-\mathrm{B})$

Дії додавання, віднімання і множення на число називається лінійними діями над матрицями.

2.2. Властивості лінійних дій над матрицями

1. А+В=В+А –комутативний
2. (А+В)+С=А+(В+С) –асоціативний
3. А+0=А
4. А+(-А)=0
5. $1\cdot A=A$
6. $\alpha(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$
7. $\alpha(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ – дистрибутивний
8. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

0 – нульова матриця -А –матриця, протилежна до матриці А

2.3. Множення матриць

Для множення матриці А розміру $m\times n$ на матрицю В розміру $n\times k$ – необхідна їх узгодженість.

Означення: матриці А і В називаються узгодженими, якщо число стовпців матриці А (першого співмножника) збігалося з числом рядків матриці В (другого співмножника).

У нашому випадку матриця А є узгодженою з матрицею В, але матриця В не є узгодженою з матрицею А.

Будь які квадратні матриці одного розмірі є узгодженими.

Означення: добутком матриці А розміру $m\times n$ на матрицю В розміру $n\times k$ називається матриця С розміру $m\times k$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів і-того рядка матриці А на відповідні елементи j-того стовпця матриці В, тобто $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underset{m\times n}{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ знайти $A\cdot B$ та $B\cdot C$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -3+14 & 2+2 \\ 9+28 & -6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 37 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -3-6 & -6+8 \\ 7-3 & 14+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$A\cdot B\neq B\cdot A$ – комунікативний закон множення не виконується!

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4+8+3 & 5+4-6 & -6+2+9 \\ 16+15+0 & 20+10+0 & -8-5+0 \\ 28-9-1 & 35-6+2 & -14+3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 31 & 30 & -13 \\ 18 & 31 & -14 \end{pmatrix}$$

Властивості множення матриць

1. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(C\cdot B)$ – асоціативність відносно множення
2. $(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$
3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ – дистрибутивний закон множення відносно додавання

4. $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$

Маємо на увазі, що матриці A,B,C – узгоджені.

2.4. Дії над матрицями.

1. Додавання матриць.

Означення. Сумою двох матриць *A* і *B* називається матриця *C,* елементи якої

дорівнюють сумі відповідних елементів матриць *A* і *B*: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Сума матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

2. Віднімання матриць.

Означення. Різницею двох матриць *A* і *B* називається матриця *C,* елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць *A* і *B*: $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Різниця матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

2. *Множення матриці на число.*

Означення. Добутком матриці *A* на число λ називається матриця *C,* елементи

якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці *A* на число λ: $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$

$$C=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад: $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}$

$C=A+B=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ $C=A-B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}$ $C=-2A=\begin{pmatrix}-2 & 12\\ -4 & 8\\ 6 & -18\end{pmatrix}$

3. ***Обернена матриця***.

Квадратна матриця А називається невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\Delta \neq 0 \quad (\det A \neq 0)$. Якщо $\Delta = 0 \quad (\det A = 0)$, то матриця називається виродженою.

Тільки для невироджених матриць вводиться поняття оберненої матриці.

Означення. Нехай *A* – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці *A*, якщо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{mn}\end{pmatrix}$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці *A*.

Приклад. Знайти матрицю , обернену до матриці *A*, якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}=-3+28+0-(18+0-14)=21$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=3-14=-11$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(2-6)=4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=14-9=5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-(0-14)=14$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-(-7-0)=7$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0-6=-6$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-2-4)=6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3-0=-3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-11 & 14 & -6\\ 4 & -7 & 6\\ 5 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-11 & 14 & -6\\ 4 & -7 & 6\\ 5 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}11+28-18 & 0+42-42 & -22+28-6\\ -4-14+18 & 0-21-49 & 8-14+6\\ -5+14-9 & 0+21-21 & 10+14-3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21 & 0 & 0\\ 0 & 21 & 0\\ 0 & 0 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

4. *Ранг матриці.*

Нехай маємо матрицю розміром , елементами якої є числа. Вилучаючи з цієї матриці певну кількість рядків і стовпців, можна скласти визначники, які можуть як дорівнювати нулю, так і не дорівнювати нулю. Найбільший порядок таких визначників – це мінімальне з чисел m і n.

Означення. Рангом матриці A ($r(A),\ \ rang(A)$) називається найбільший порядок, відмінного від нуля визначника, складеним зазначеним способом з матриці A.

Приклад: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$

З даної матриці можна скласти три визначники другого порядку і шість визначників першого порядку:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $|1| = 1$, $|2| = 2$, $|3| = 3$, , $|6| = 6$, $|9| = 9$

Всі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а жоден з визначників першого порядку не дорівнює нулю. Тому $rang(A) = 1$.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

1. переставити місцями два рядки (стовпці);
2. помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий, відмінний від нуля множник;
3. додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Одним із методів знаходження рангу матриці є метод одиниць та нулів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad r(A) = 3$$

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

Розглянемо основну матрицю *A* і розширену матрицю $\overline{A}$ даної системи

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера – Капеллі: для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо $r(A)=r(\overline{A})=n$, то система має єдиний розв'язок. Якщо $r(A)=r(\overline{A})<n$, то система має безліч розв'язків.

Приклад: знайти ранг основної і розширеної матриці для системи

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2, \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7. \end{cases}$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & -4 \\ 3 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$+\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=r(\overline{A})=n=3 \Rightarrow$$

система має єдиний розв'язок.

1.1. ***Основні поняття.***

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \text{--} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі змінні, що знаходяться в першій степені (лінійні). Коефіцієнти при невідомих a_{ij} утворюють головну матрицю системи, яку позначають:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Невідомі змінні складають матрицю-стовпець невідомих:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти $b_1, b_2, \dots, b_m$ утворюють матрицю-стовпець вільних членів:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Дану систему (3.1) можна записати в матричній формі:

$$A \cdot X = B.$$

Означення. Якщо матриця B є нульовою, то система називається *однорідною*.

Означення. Якщо матриця B не нульова, то система називається *неоднорідною*.

Означення. Числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ є *розв'язком* системи (4.1), якщо при підстановці $x_i = c_i$ всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв'язати систему означає знайти всі її розв'язки.

Означення. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має один розв'язок і *невизначеною* – коли безліч.

2. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Нехай задана система n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{---} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

де головна матриця невироджена, тобто $\Delta \neq 0$.

I. Метод Крамера.

Використаємо рівняння $X = A^{-1} \cdot B$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ A_{31} \ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22}\ A_{32} \ldots\ldots A_{n2} \\ \text{------------------------} \\ A_{1n}\ A_{2n}\ A_{3n} \ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \text{-----------------------------------} \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Чисельники отриманих дробів є розкладами визначників Δ_i за елементами i-стовпців вільних членів, підставлених у головний визначник системи.

Отже, обчислюємо додатково визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$

Δ_i – це визначник, отриманий з головного визначника Δ заміною відповідного i стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ b_2\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \text{-------------------} \\ b_n\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_1\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ b_2\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \text{-------------------} \\ a_{n1}\ b_n\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ і т.д}$$

Знаходимо невідомі змінні x_i за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

I. Матричний спосіб.

Нехай задана система в матричній формі (4.2), тоді розв'язок матричного рівняння шукаємо в вигляді:

$X = A^{-1} \cdot B$.

Отже, щоб розв'язати систему матричним способом, необхідно знайти обернену матрицю до головної матриці системи A^{-1} і помножити її на стовпець вільних членів, в результаті отримаємо матрицю-стовпець невідомих.

ІІІ. Метод Гауса (метод виключення змінних).

Метод Крамера та матричний спосіб не є зручним для випадку великого значення n, а також не застосовні для випадку виродженої та прямокутної головної матриці системи. Тому розглянемо універсальний метод розв'язання систем лінійних рівнянь, а саме метод Гауса.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Запишемо *розширену матрицю* системи (4.1), яку дістаємо з головної матриці A приєднанням стовпця вільних членів:

$$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ldots a_{2n} & b_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \ldots a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Прямий хід методу Гауса. Зводимо розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою еквівалентних перетворень. Можливі наступні випадки:

1) $$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a'_{11}\ a'_{12}\ a'_{13} \ldots\ldots a'_{1n} & b'_1 \\ 0 \quad a'_{22}\ a'_{23} \ldots\ldots a'_{2n} & b'_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \ldots\ldots a'_{nn} & b'_n \end{array} \right);$$

2) $A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \ldots\ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \ldots\ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & b'_m \end{array}\right)$;

3) $A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \ldots\ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \ldots\ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & a'_{m(n-1)} & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$.

Зворотний хід методу Гауса. За отриманою матрицею східчастого виду записуємо відповідну систему.

Для випадку 1) з останнього рівняння системи знаходимо невідому змінну x_n, підставляємо її значення в попереднє рівняння та знаходимо x_{n-1} і т.д. Таким чином отримуємо єдиний розв’язок системи (4.1).

У випадку 2) система розв’язків немає ($b'_m \neq 0$).

Для випадку 3) з останнього рівняння системи неможливо однозначно знайти змінну x_n чи x_{n-1}, x_{n-2}…У цьому випадку система має безліч розв’язків.

Теорема Кронекера-Капеллі (*про сумісність системи лінійних рівнянь).* Система (4.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг головної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(A|B)$.

Отже, перш ніж розв’язувати систему, потрібно дослідити її на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.

Спочатку знаходимо $r(A)$ та $r(A|B)$ і порівнюємо їх:

– якщо $r(A) \neq r(A|B)$, то система не сумісна, тобто розв'язків немає;

– якщо $r(A) = r(A|B) = r = n$ (n – кількість невідомих), то система має єдиний розв'язок;

– якщо $r(A) = r(A|B) = r < n$, то система має безліч розв'язків.

В останньому випадку вибираємо r базисних або головних невідомих та решту $n-r$ вільних. І виражаємо базисні невідомі через вільні. Таким чином знаходимо загальний розв'язок системи.

Однорідні системи.

Нагадаємо, що в випадку нульового стовпця вільних членів система (4.1) називається однорідною:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{------------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Дана система завжди сумісна, зокрема вона завжди має нульовий або тривіальний розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Тривіальний розв'язок єдиний, якщо $r(A) = n$.

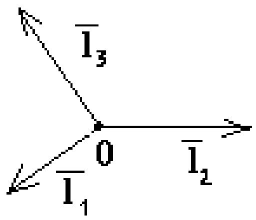
Теорема. Однорідна система n рівнянь з n невідомими має нетривіаль ний розв'язок тоді і тільки тоді, коли головний визначник рівний нулю ($\Delta = 0$).

Зауваження: у випадку квадратної матриці тривіальний розв'язок буде єдиним, якщо визначник матриці $\det A \neq 0$.

В іншому однорідна система буде мати безліч розв'язків, які знаходимо за допомогою методу Гауса.

1. **Декартова система координат**

Розглянемо в просторі точку О і деякий базис, що задається векторами $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$. Сукупність точки і базису називається декартовою системою координат.



В цій системі координат вектор $\overline{OM}$ може бути розкладений

$$\overline{OM} = x_1\bar{l}_1 + x_2\bar{l}_2 + x_3\bar{l}_3$$

де x_1, x_2, x_3 – координати цього вектора.

2. Прямокутня система координат

Ясно, що декартових систем координат може бути скільки завгодно. Серед них широко використовується прямокутня декартова система координат. Для визначення цієї системи введемо такі поняття.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається **ортонормованим базисом**.

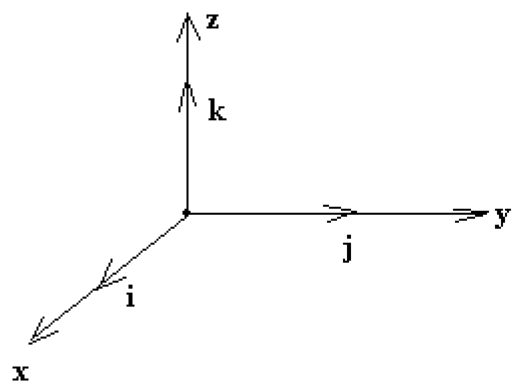
$(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, $\left(\bar{i} \,\hat{}\, \bar{j}\right) = \left(\bar{j} \,\hat{}\, \bar{k}\right) = \left(\bar{k} \,\hat{}\, \bar{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Прямокутню систему координат позначаємо Oxyz. (Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат).

А площини Oxy, Oyz, Ozx – координатні площини.

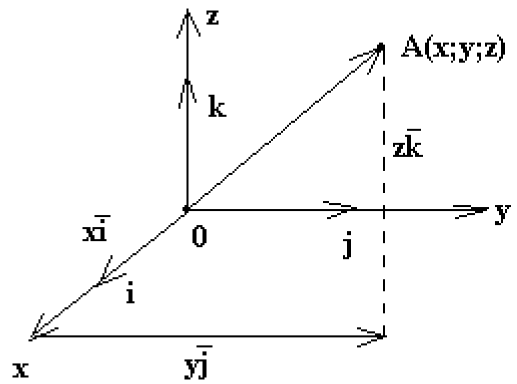
Прямокутна система координат називається правою, якщо її ортонормований базис утворює праву трійку векторів $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, тобто з кінця

вектора $\bar{k}$ найкоротший поворот від першого вектора $\bar{i}$ до другого вектора $\bar{j}$ видно проти годинникової стрілки. В протилежному випадку – ліва.



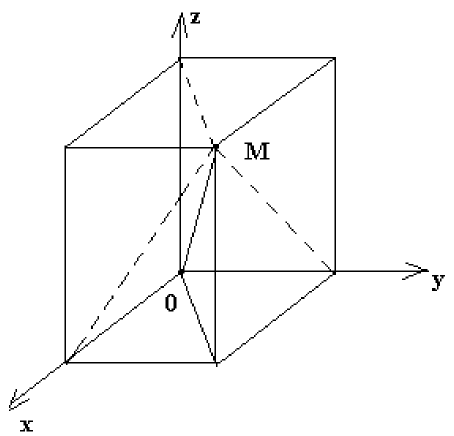
Надалі ми будемо користуватися правою системою координат.

Нехай задана прямокутна система координат Oxyz і довільна точка M.



Тоді $\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Координати вектора $\overline{OM}$ (x;y;z) називають координатами точки M. M (x;y;z).

З ортогональності базисних векторів системи Oxyz випливає, що координати точки M дорівнюють відповідним проекціям радіус-вектора цієї точки на осі координат:



x = пр.$_x$ $\overline{OM}$; y = пр.$_y$$\overline{OM}$; z = пр.$_z$$\overline{OM}$.

Якщо прямокутна система задана на площині, то точка має дві координати: М(x;y).

3. Вектори в системі координат.

3.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора.

1. Координати вектора. Нехай в прямокутній системі координат O_{xyz} задано вектор $\overline{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, який задає цю систему, вектор

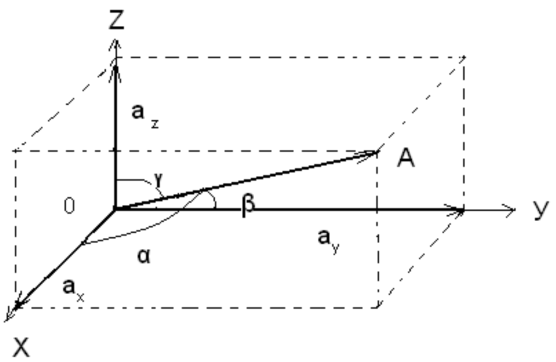
$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k},$$

Де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\overline{a}$ в цьому базисі. Але

$$\begin{cases} a_x = \text{пр}_x \overline{a} \\ a_y = \text{пр}_y \overline{a} \end{cases}$$
$$a_z = \text{пр}_z \overline{a}$$

Отже, координати вектора в системі координат O_{xyz} це його проекції на осі координат.

2. Довжина вектора .Зобразимо вектор $\overline{OA} = \overline{a}$ в декартовій системі координат.



Вектор $\overline{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з векторами $|a_x|, |a_y|, |a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

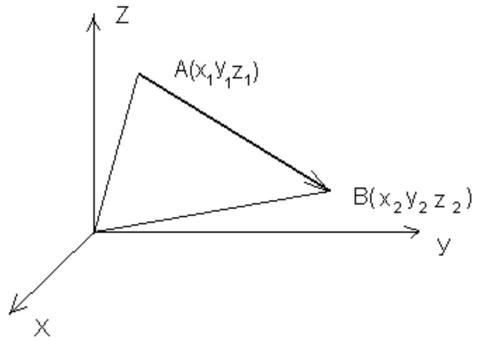
Якщо початок вектора $\overline{a} = \overline{AX}$ міститься в точці A(x_1;y_1;z_1), а кінець у точці B(x_2;y_2;z_2), то впливає, що

$$\overline{a_x} = x_2 - x_1;$$

$$\overline{a_y} = y_2 - y_1;$$

$$\overline{a}_z = z_2 - z_1.$$

тобто $\overline{AX} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ - координати вектора $\overline{AB}$



Довжина вектора $\overline{AB}$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Цю формулу використовують, коли знаходять відстань між точками A і B.

3.3. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів

1. Дії з векторами. Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

   Нехай задамо вектори $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\overline{в}(в_x; в_y; в_z)$ і дійсне число λ. Тоді

   $$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z); \overline{a} \pm \overline{в} = (a_x \pm в_x; a_y \pm в_y; a_z \pm в_z)$$

2. Рівність векторів. Нехай вектори $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\overline{в} = (в_x; в_y; в_z)$ рівні, тобто

   мають однакові довжини і напрям, тоді

   $a_x = в_x; a_y = в_y; a_z = в_z$ і навпаки: з рівності координат випливає рівність векторів.

3. Колінеарність векторів. Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\overline{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\overline{в}(в_x; в_y; в_z)$ колінеарні, є пропорціональність їх проекцій:

$$\frac{a_x}{в_x} = \frac{a_y}{в_y} = \frac{a_z}{в_z}.$$

Приклад: Знайти вектор $\overline{a} = (a_x; -1; a_z)$, колінеарний вектору $\overline{в} = (1; -2; 3)$,

$$\frac{a_x}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{a_z}{3};$$

$$a_x = \frac{1}{2};$$

$$a_z = \frac{3}{2}.$$

4. Дії над векторами в координатній формі.

1)	Координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат цих векторів: $\overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\}$.
2)	Координати різниці двох векторів дорівнюють різницям відповідних координат цих векторів: $\overline{a} - \overline{b} = \{a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z\}$.

3)	Координати вектору $\lambda\,\overline{a}$ дорівнюють координатам вектору $\overline{a}$, які помножено на число λ: $\lambda\,\overline{a}=\{\lambda\, a_x;\,\lambda\, a_y;\,\lambda\, a_z\}$.

Модуль вектора $\overline{a}$ дорівнює кореню квадратному з суми квадратів його координат:

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \quad (2.3)$$

Приклад 2.1.	У просторі задані точки $A(1;2;1)$ і $B(-3;0;1)$. Знайти величину проекції вектора $\overline{AB}$ на вісь l, якщо кут між ними складає $\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати вектору $\overline{AB}$ за формулою (2.2):

$$\overline{AB}=\{-3-1;\,0-2;\,1-1\}=\{-4;-2;0\}.$$

За формулою (2.3) обчислимо модуль вектору $\overline{AB}$:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

За четвертою властивістю проекції вектора на вісь знайдемо величину проекції: $np_l\,\overline{AB}=2\sqrt{5}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{10}$.

4. Проекція вектора.

Означення. Проекцією вектора $\boxed{AB}$ на вісь l називається число, що дорівнює величині відрізку A_lB_l вісі l, де точки A_l і B_l є проекціями точок A і B на вісь l. (рис. 1).

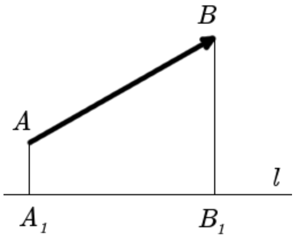


рис. 12

Означення. Проекцією вектора $\vec{a}$ на напрямок вектору $\vec{b}$, називається число, яке дорівнює величині проекції вектора $\vec{a}$ на вісь, що проходить через вектор $\vec{b}$.

Формула Обчислення проекції вектора на вектор

Для обрахунку проекції вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ з означення <u>скалярного добутку</u> отримана формула:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Приклади задач на проекцію вектора

Приклади обчислення проекції вектора для плоских задач

Приклад 1. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{1; 2\}$ на вектор $\vec{b} = \{3; 4\}$.

Розв'язок:

Знайдемо скалярний добуток цих векторів

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$

Знайдемо модуль вектора $\vec{b}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Знайдемо проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{5} = 2.2$$

Відповідь: Пр $_b a$ = 2.2.

Приклади обчислення проекції вектора для просторових задач

Приклад 2. Знайти проекцію вектора a = {1; 4; 0} на вектор b = {4; 2; 4}.

Розв'язок:

Знайдемо скалярний добуток цих векторів

$a \cdot b = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 4 + 8 + 0 = 12$

Знайдемо модуль вектора b

$$|b| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Знайдемо проекцію вектора a на вектор b

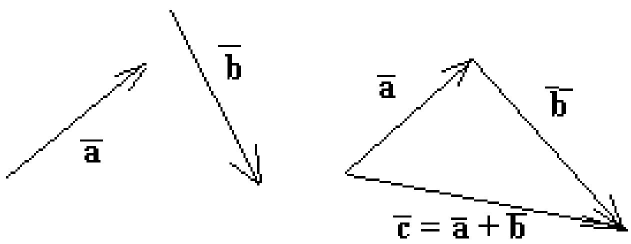
$$\text{Пр}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{12}{6} = 2$$

Відповідь: Пр $_b a$ = 2.

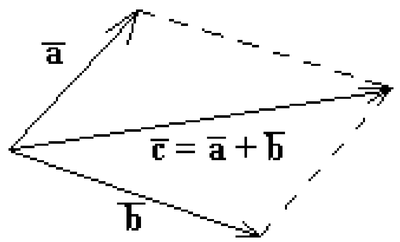
1. Лінійні дії з векторами.

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

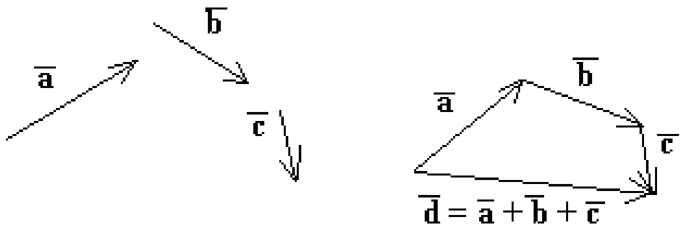
1. Додавання векторів. Сума $\bar{a} + \bar{в}$ двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{в}$ є вектор $\bar{c}$, напрямлений з початку вектора $\bar{a}$ в кінець вектора $\bar{в}$ за умови, що початок вектора $\bar{в}$ збігається з кінцем вектора $\bar{a}$. Це правило називають правилом трикутника.



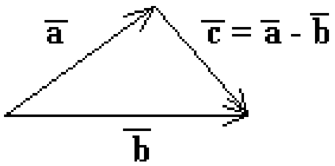
Суму двох векторів можна побудувати за правилом паралелограма.



Щоб побудувати суму будь-якого скінченого числа векторів, потрібно в кінці першого вектора побудувати другий, в кінці другого побудувати третій і т.д. Напрямлений відрізок, що йде з початку першого вектора в кінець останнього і буде сумою даних векторів.



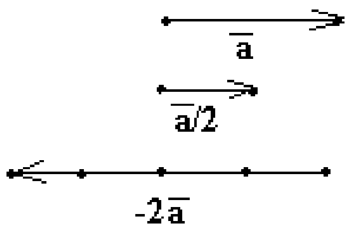
2. Віднімання векторів визначається як дія, обернена додаванню. Різницею $\overline{a}-\overline{в}$ називається вектор $\overline{c}$, який, будучи доданий до вектора $\overline{в}$, дає вектор $\overline{a}$.



$\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$

$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$

3. Множення вектора на число. Цю операцію можна розширити, як „розтяг” вектора $\overline{a}$ в $\lambda > 1$ і „стиск” при $0 < \lambda < 1$. При $\lambda < 0$ відбувається ще й зміна напрямку.



Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

1. $\overline{a}+\overline{в}=\overline{в}+\overline{a}$

2. $(\overline{a}+\overline{в})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{в}+\overline{c})$

3. $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$

4. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$

5. $\lambda(\overline{a}+\overline{в})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{в}$

2. Розкладання вектора за базисом

Базисом на прямій називається ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називається довільна упорядкована пара не колінеарних векторів.

Базисом у просторі – довільна упорядкована трійка не компланарних векторів.

Вектори, що складають базис, називаються **базисними.** Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{в}$, $\overline{c}$ складають базис і вектор $\overline{d}$, розкладений за базисом, тобто $\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$, то числа α, β, γ називаються координатами вектора $\overline{d}$ в даному базисі.

Вектор $\overline{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{a}$, $\overline{в}$, $\overline{c}$.

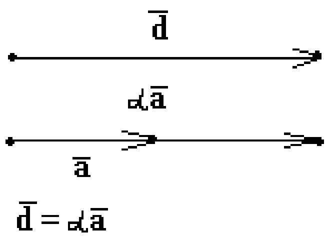
Теорема.

1) Кожен вектор, паралельний якій-небудь прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій.
2) Кожен вектор, паралельний якій-небудь площині, можна розкласти за базисом на цій площині.
3) Кожен вектор можна розкласти за базисом у просторі.

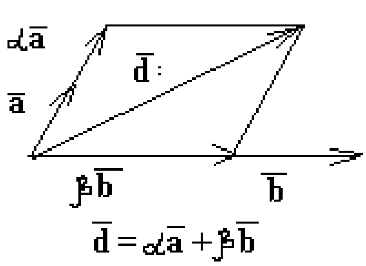
Координати вектора у кожному випадку визначаються однозначно.

Розглянемо геометричний зміст цієї теореми.

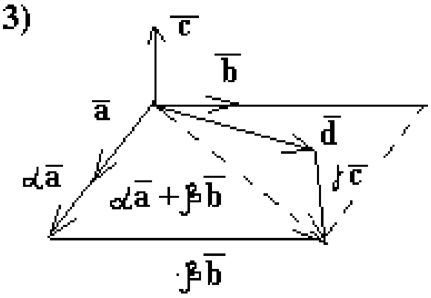
1)



2)



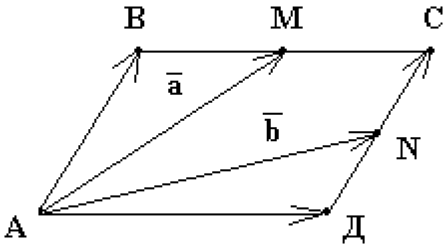
3)



Приклад.

Нехай АВСД – паралелограм, M і N – середини його сторін.

Розкласти вектор $\overline{ДС}$ за векторами $\bar{a} = \overline{AM}$ та $\bar{в} = \overline{AN}$



З ΔANД: $\bar{в} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC}$

З ΔAMB: $\bar{a} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{ДС} + \frac{1}{2}\overline{АД}$

З 1-ї рівності $\overline{АД} = \bar{в} - \frac{1}{2}\overline{ДС}$. Підставимо у 2:

$$\bar{a} = \overline{ДС} + \frac{1}{2}\left(\bar{в} - \frac{1}{2}\overline{ДС}\right) = \frac{1}{2}\bar{в} + \frac{3}{4}\overline{ДС}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{в} + \frac{3}{4}\overline{ДС}$$

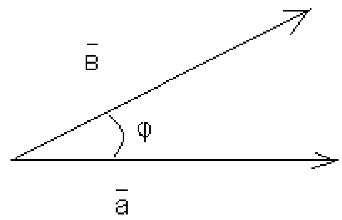
$$\frac{3}{4}\overline{ДС} = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{в}$$

$$\overline{ДС} = \frac{4}{3}\bar{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\bar{в} = \frac{4}{3}\bar{a} - \frac{2}{3}\bar{в}$$

Тобто, якщо базисними векторами є вектори $\bar{a} = \overline{AM}$ та $\bar{в} = \overline{AN}$, то координати вектора в цьому базисі є числа (4/3) та (-2/3).

3. Скалярний добуток двох векторів.

3.1. Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку.



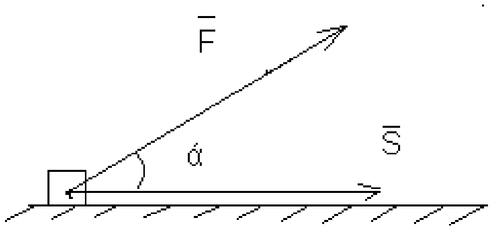
Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{в}|\cos\varphi.$$

Оскільки $|\bar{a}|$cosφ= $пр_{\bar{в}}\bar{a}$; $|\bar{в}|$cosφ= $= пр_{\bar{a}}\bar{в}$; то маємо:

$$\overline{a\cdot в} = |\bar{a}|.пр_{\bar{a}}\bar{в} = |\bar{в}|пр_{\bar{в}}\bar{a}\ .$$

Ці формули виражають геометричній зміст скалярного добутку - скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.



З фізики видимо, що робота A сили $\overline{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\overline{S}$, який утворює з вектором $\overline{F}$ кут α, дорівнює:

$A = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cos\alpha$, або

$A = \overline{F} \cdot \overline{S}.$

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного скалярного добутку.

3.2. Властивості скалярного добутку.

1) $\overline{a} \cdot \overline{в} = \overline{в} \cdot \overline{a}$

2) $(\lambda \overline{a}) \cdot \overline{в} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{в})$

3) $\overline{a} \cdot (\overline{в} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{в} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

4) Якщо $\overline{a} \neq 0,$ $\overline{в \neq 0}$, то $\overline{a} \cdot \overline{в} > 0,$ коли кут $\overline{a}\overline{в}$-гострий, і $\overline{a} \cdot \overline{в} < 0,$ коли кут $\overline{a}\overline{в}$-тупий.

5) $\overline{a} \cdot \overline{в} = 0$, коли $\overline{a} \perp \overline{в}$

6) Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\overline{a^2} = |a|^2 \rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a^2}}$$

Приклади:

1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{m} = 2\overline{a} - 3\overline{в}$ і $\overline{n} = 4\overline{a} + 5\overline{в}$, якщо $|\overline{a}| = 1; |\overline{в}| = 2; (\overline{a, в}) = \dfrac{\pi}{3}$

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = (2\overline{a} - 3\overline{в}) \cdot (4\overline{a} + 5\overline{в}) = 8\overline{a^2} + 10\overline{a} \cdot \overline{в} - 12\overline{в} \cdot \overline{a} - 15\overline{в}^2 = 8\overline{a}^2 + 10\overline{a} \cdot \overline{в} - 12\overline{a} \cdot \overline{в} - 15\overline{в}^2 =$$

$$= 8\overline{a}^2 2\overline{a} \cdot \overline{в} - 15\overline{в}^2 = 8|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^\circ - 2|\overline{a}||\overline{в}|\cos\frac{\pi}{3} - 15|\overline{в}||\overline{в}|\cos 0 = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot 2 \cdot 2 = -54$$

2. Знайти довжину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{в}$, якщо $|\bar{a}| = 1; |\bar{в}| = 4; (\overline{a : в}) = \dfrac{\pi}{3}$

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} - 3\bar{в})^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 - 12\bar{a}\cdot\bar{в} + 9\bar{в}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\bar{a}||a|\cos 0 - 12|\bar{a}||\bar{в}|\cos\frac{\pi}{3} + 9|\bar{в}||\bar{в}|\cos^{\circ}} = \sqrt{4\cdot 1 - 12\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4\cdot 4} =$$

$$= \sqrt{4 - 24 + 144} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$$

3.3. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.

Отримаємо скалярний добуток векторів-ортів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{i}^2 = |\bar{i}||\bar{i}|\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\bar{j}^2 = 1;$$

$$\bar{k}^2 = 1;$$

$\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$ (так як $\bar{i}\perp\bar{j}\perp\bar{k}$), тому

$$\bar{a}\cdot\bar{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z.$$

Вкажемо на ряд важливих висновків з цієї формули:

1) Якщо $\bar{a}\perp\bar{в}$, то $a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z = 0$.

2) Довжина вектора $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3) Кут φ між векторами $\bar{a}$ та $\bar{в}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{в}|} = \frac{a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{в_x^2 + в_y^2 + в_z^2}}.$$

Приклади:

1. Задані вектори $\bar{a} = (2;0;-2)$ і $\bar{в} = (-2;1;2)$.

Знайти проекцію вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{в}$ на вектор $\bar{в}$.

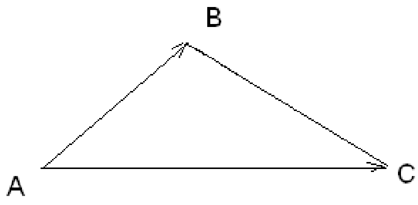
Координати вектора $\bar{c} = (4-2; 0+1; -4+2) = (2;1;-2);$

$$np_{\bar{в}}\bar{c}=\frac{\bar{в}\cdot\bar{c}}{|\bar{в}|}=\frac{2(-2)+1\cdot1+(-2)\cdot2}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{7}{3}.$$

2. Трикутник заданий векторами A(0;-1;2); B(-1;-2;7); C(1;-2;6).

   Знайти його внутрішній кут при вершині A.

Знайдемо вектори $\overline{AB}(-1;-1;5);\ \overline{AC}(1;-1;4)$



$$\cos A=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}=\frac{-1+1+20}{\sqrt{1+1+25}\cdot\sqrt{1+1+16}}=$$

$$\frac{20}{\sqrt{27}\sqrt{18}}=\frac{20}{3\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}}=\frac{20}{9\sqrt{6}}=\frac{20\sqrt{6}}{54}=\frac{10\sqrt{6}}{27};\qquad \varphi=ak\cos\frac{10\sqrt{6}}{27}\approx25^{\circ}.$$

4. Векторний добуток двох векторів

4.1. Означення і властивості векторного добутку.

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{в}$ називається вектор $\bar{c}$, який визначається трьома умовами:

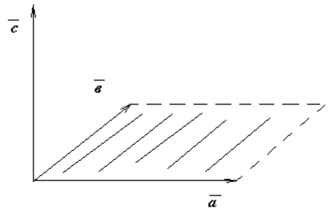
1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{в}$;

2) вектор $\bar{c}$ має такий напрямок, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{в}$ виконується проти годинникової стрілки;

3) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{в}$;

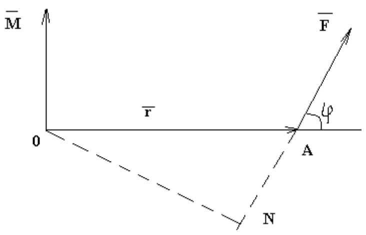
4)

$$\left|\overline{a}\times\overline{в}\right| = \left|\overline{a}\right|\times\left|\overline{в}\right|\sin\varphi$$



Вектор добуток позначають $\overline{a}\times\overline{в}$; або [$\overline{a}\ \overline{в}$].

Розглянемо приклад.



Нехай в т. А прикладена сила $\overline{F}$ і О – деяка фізична точка. Відомо, що моментом сили $\overline{F}$ від точки О називається вектор $\overline{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який направлений по осі одержання так, що коли дивитись з його кінця, то одержання тіла відбувається проти руху стрілки годинника.

$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{F}\right|\cdot ON = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{r}\right|\sin\varphi = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{OA}\right|\sin\varphi.$$

Тобто момент сили $\overline{F}$, прикладеної у точку А відносно т. О виражається векторними добутком

$$mom_0\overline{F} = \overline{OA}\times\overline{F}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку.

1.$\overline{a}\times\overline{в} = -(\overline{в}\times\overline{a})$

2.$\lambda\overline{a}\times\overline{в} = \lambda(\overline{a}\times\overline{в})$;

$\overline{a}\times\lambda\overline{в} = \lambda(\overline{a}\times\overline{в})$

3.$\overline{a}\times(\overline{в}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{в}+\overline{a}\times\overline{c}.$

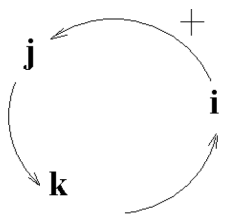
Геометричні властивості векторного добутку.

1. $\bar{a} \times \bar{в} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\bar{a}$ і $\bar{в}$ колінеарні.

2. Модуль векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{в}$, віднесених до спільного початку.

S=$|\bar{a} \times \bar{в}|$.

Векторні добутки ортів будуть:



$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$$
$$\bar{i} \times \bar{j} = k$$
і т.д.

Приклад.

Обчислити $\left|(3\bar{a} - \bar{в}) \times (\bar{a} - 2\bar{в})\right|$.

Якщо $|\bar{a}| = 3, |\bar{в}| = 4, (\bar{a}, \bar{в}) = \dfrac{П}{2.}$

$$(3\bar{a} - \bar{в}) \times (\bar{a} - 2\bar{в}) = 3\bar{a} \times \bar{a} - 6\bar{a} \times \bar{в} - \bar{в} \times \bar{a} - 2\bar{в} \times \bar{в} = -6\bar{a} \times \bar{в} + \bar{a} \times \bar{в} = -5(\bar{a} \times \bar{в});$$
$$\left|-5(\bar{a} \times \bar{в})\right| = 5|\bar{a}||\bar{в}| \sin\frac{П}{2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 60.$$

4.2. Векторній добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\bar{в}(в_x, в_y, в_z)$. Покажемо, що їх векторний добуток визначається за формулою:

$$\overline{a} \times \overline{в} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_{z1} \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

Маємо:

$$\overline{a} \times \overline{в} = (a_x \bar{i} + a_y j + a_z k) \times (в_x i + в_y j + в_z k) = a_x в_x (\bar{i} \times \bar{i}) + a_x в_y (i \times j) + a_x в_z (i \times k) +$$

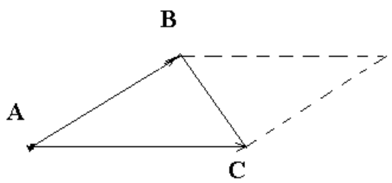
$$+ a_y в_x (j \times i) + a_y в_y (j \times j) + a_y в_z (j \times k) + a_z в_x (k \times i) + a_z в_y (k \times j) + a_z в_z (k \times k) =$$

$$= a_x в_y \overline{k} - a_x в_z \overline{j} - a_y в_x \overline{k} + a_y в_z i + a_z в_x j - a_z в_y \bar{i} = (a_y в_z - a_z в_e) \bar{i} - (a_x в_z - a_z в_x) \overline{j} +$$

$$+ (a_x в_y - a_y в_x) \overline{k} = \begin{vmatrix} a_x a_z \\ в_y в_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x a_z \\ в_x в_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x a_y \\ в_x в_y \end{vmatrix} \overline{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_{z1} \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

Приклад.



Знайти площу трикутника заданого вершинами A(1;2;0), B(0;-2;1), C(-1;0;2). Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Знайдемо $\overline{AB}$ =(-1;-4;1); $\overline{AC}$ = (-2;-2;2)

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 6\overline{k}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{36+36}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{22}\text{ ед.}$$

5. Мішаний добуток векторів.

5.1. Означення і обчислення мішаного добутку

Множення трьох векторів $\overline{a}$,$\overline{в}$ і $\overline{c}$ можна виконати різними способами. Розглянемо найбільш важливий з них.

Спочатку знайдемо векторний добуток $\overline{a}\times\overline{в}$, а потім одержаний новий вектор полярно помножимо на $\overline{c}$, тобто отримаємо $(\overline{a}\times\overline{в})\overline{c}$. Це і буде мішаним добутком векторів $\overline{a}$,$\overline{в}$ і $\overline{c}$.

Якщо векторі задані координатами, тобто $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\overline{в}(в_x, в_y, в_z)$ і $\overline{c}(c_x, c_y, c_z)$, то

$$(\overline{a}\times\overline{в})\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Доведемо цю формулу . Знайдемо

$$\overline{a}\times\overline{в}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}=$$

Тепер $(\overline{a}\times\overline{в})\overline{c}=\ (a_y в_z - в_y a_z)c_x + (-(a_x в_z - в_x a_z)c_y) +$

$$+(a_x в_y - в_x a_y)c_z = a_y в_z c_x - в_y a_z c_x - \ a_x в_z c_y + в_x a_z c_y + \ + a_x в_y c_z - в_x a_y c_z.$$

А це і є визначення $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ у розкритому вигляді

5.2. Властивості мішаного добутку

1. Якщо поміняти місцями які-небудь два множниками, то мішаний добуток змінить знак:

$(\bar{a} \times \bar{в})\bar{c} = -(\bar{в} \times \bar{a})\bar{c}$

2. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$(\bar{a} \times \bar{в})\bar{c} = \bar{a}(\bar{в} \times \bar{c})$

Тому мішаний добуток позлягають так: $\bar{в}\,\bar{a}\,\bar{c}$.

3. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{в} = \bar{в}\,\bar{c}\,\bar{a}$

Наступні три властивості виражають геометричний зміст мішаного добутку.

4. Модуль мішаного добутку $\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{в}$ і $\bar{c}$, віднесених до спільного початку:

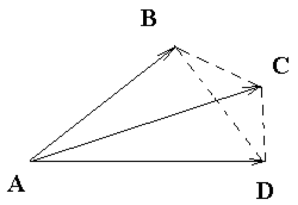
$V = |\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c}|$.

5. Якщо мішаний добуток $\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c}$ додатній, то вектори $\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c}$ утворюють праву трійку, якщо від’ємний, то ліву.

6. Вектори $\bar{a}\,\bar{в}\,\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, нам їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад.

Знайти об’єм тетраедра, заданого вершинами А(2;-1;0), В(5;5;3), С(3;2;-2), Д(4;1;2).



Відомо, що об'єм тетраедра, побудованого на векторах дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Тому маємо

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$$

Знаходимо $\overline{AB}$=(3;6;3), $\overline{AC}$=(1;3;-2), $\overline{AD}$= (2;2;2)

$$N = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

1. Різні види рівнянь прямої на площині.

Пряма лінія на площині найчастіше задається у вигляді рівняння

$$y = k{\cdot}x + b \qquad (1)$$

де $k=tg\alpha$ - нахил цієї прямої до осі OX (рис 1,а).

Часткові випадки розташування прямої ($y=kx$, $x=a$, $y=b$) показані, відповідно, на рис.1.б-г.

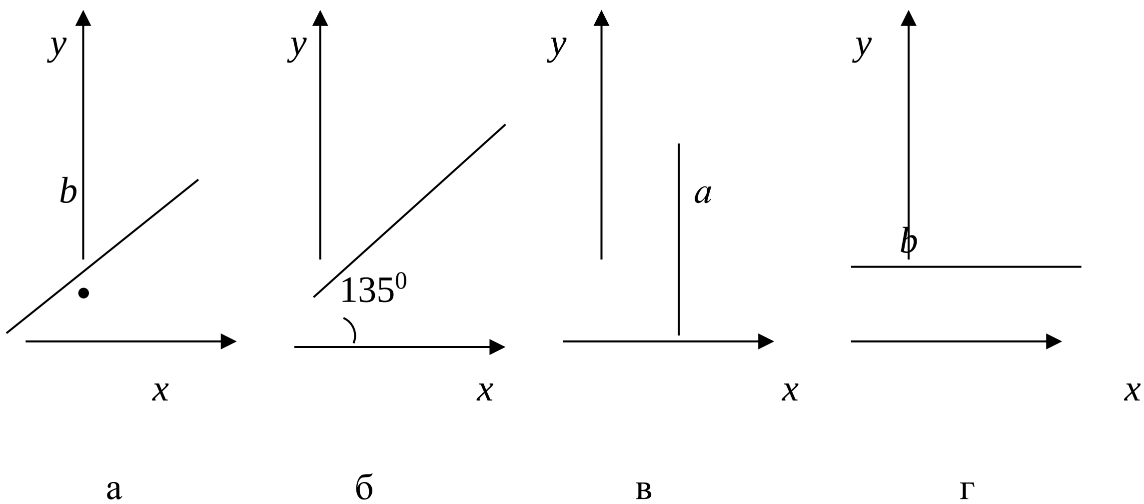


Рис.13

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

Якщо $B\neq 0$, то рівняння (2) можна перетворити у (1).

<u>Приклади</u>. Побудувати графіки прямих y=1-x та 2x-y+2=0. У першому прикладі $k=tg\alpha$= -1, отже $\alpha=135^0$ (рис. 2,а). В другому прикладі маємо y=2x+2 , отже, $k=tg\alpha$=2 (рис. 2,б).

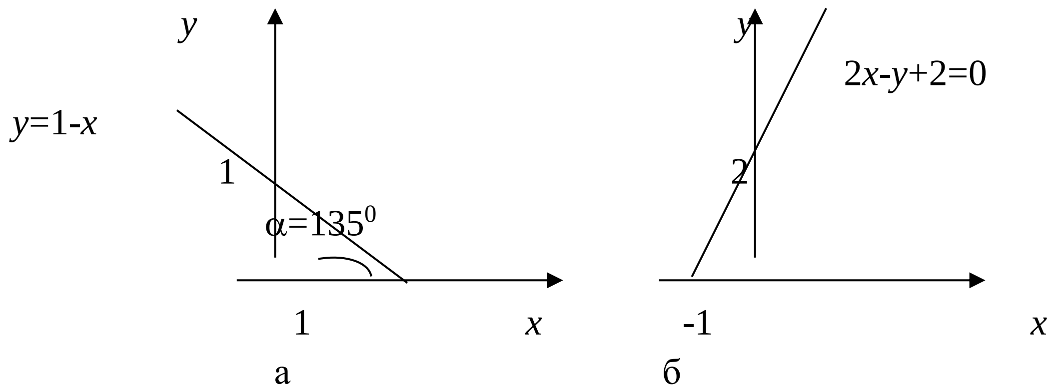


Рис. 14

Наведемо ще деякі з рівнянь, які задають пряму на площині.

Пряма, яка проходить через дві задані точки (x_1;y_1) та (x_2;y_2):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ , \qquad (3)$$

або, що те саме,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x-x_1 & y-y_1 \end{vmatrix}=0\ . \qquad (3')$$

Пряма, яка проходить через задану точку (x_1;y_1) паралельно до заданої прямої $y=ax+b$:

$$y-y_1=a(x-x_1) \qquad (4)$$

Пряма, яка проходить через задану точку (x_1;y_1) перпендикулярно до заданої прямої $y=ax+b$:

$$y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1) \qquad (5)$$

Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (6)$$

Переходи від одного вигляду рівняння прямої до іншого виконують за допомогою нескладних перетворень.

<u>Приклад</u>. Загальне рівняння прямої має вигляд 2x-y+2=0.

Перейдемо до рівняння прямої у відрізках:

$-2x+y=2,$

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1.$$

Перейдемо до рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y=2x+2$$

Візьмемо на нашій прямій дві точки, наприклад, $(x_1;y_1)=(-1;0)$ та $(x_2;y_2)=(0;2)$,і побудуємо рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки:

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x+1}{0+1}.$$

2. Кут між прямими. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Відстань від точки до прямої.

Кут між прямими $y=a_1x+b_1$ та $y=a_2x+b_2$ обчислюється за формулою

$$tg\alpha=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$$

Прямі $y=a_1x+b_1$ та $y=a_2x+b_2$ отже, є паралельними, якщо $a_1=a_2$, та перпендикулярними, якщо $a_1 \cdot a_2=-1$.

Точка перетину прямих є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}.$$

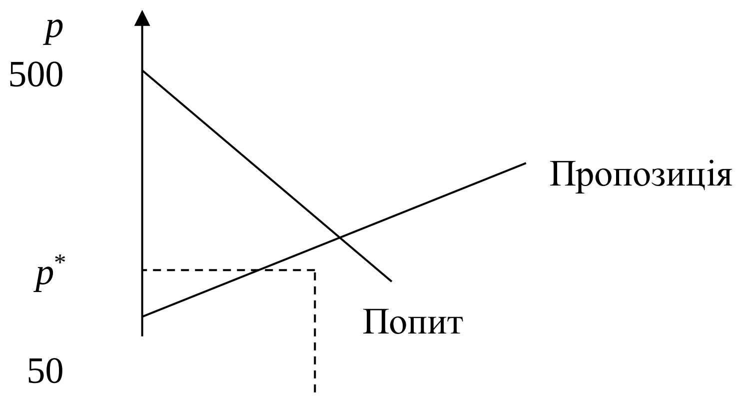
Відстань від точки $M(x_1;y_1)$ до прямої $Ax+By+C=0$ визначають за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B_2}}\right|.$$

<u>Приклад</u>. Попит Q (кількість товару, що буде куплено) на товар залежно від його ціни p на ринку задається формулою $p=p(Q)=500-10Q$. Пропозицію Q (кількість товару, що потрапить на ринок) залежно від ціни задає формула $p=p(Q)=50+5Q$.

Зобразити графічно криві попиту та пропозиції і визначити ціну рівноваги.

Маємо такий графік (рис.15).



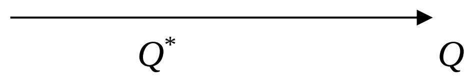


Рис. 15

Ціну рівноваги p^* (а також рівноважний випуск Q^*) визначаємо як точку перетину прямих попиту та пропозиції, тобто розв’язуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} p = 500 - 10Q \\ p = 50 + 5Q \end{cases}.$$

Помноживши друге рівняння на 2 і додавши до першого, отримаємо $p^*=200$ та $Q^*=30$.

<u>Приклад</u>. Нехай ринкова ціна за одиницю деякого виробу становить $p=10$. Витрати, пов’язані з випуском кожної одиниці цього виробу в деякій фірмі, $V_c=5$ (змінні витрати). Постійні витрати фірми становлять $F_c=40$. Визначити обсяг виробництва Q, за якого фірма матиме прибуток.

Загальні витрати фірми на виготовлення Q одиниць продукції описуються залежністю

$$T_c = F_c + Q \cdot V_c = 40+5Q .$$

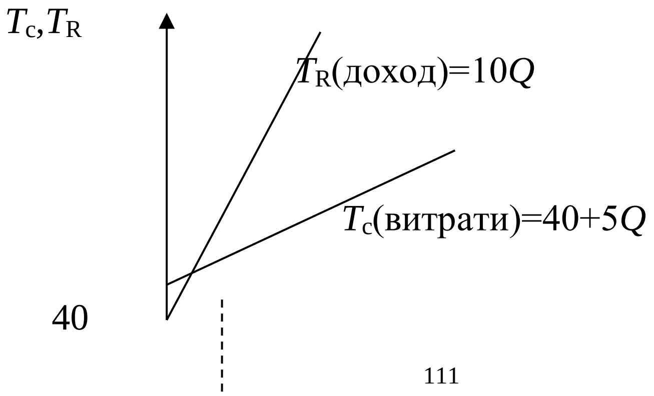
Доход фірми від виготовлення і реалізації Q одиниць продукції становить

$$T_R = p \cdot Q = 10Q .$$

Визначимо такий випуск Q^*, за якого доход фірми збігається з її витратами:

$$T_R = T_C ,$$
$$10Q = 40+5Q ,$$
$$Q^* = 8 .$$

Отже, прибуток (різниця між доходом і витратами) в цій моделі починається при $Q^*>8$ і далі необмежено зростає (рис. 16).



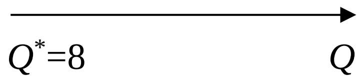


Рис. 16.

3. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.

Розглянемо основні *криві другого порядку* та їхні рівняння. Це такі криві, рівняння яких містять змінні x^2 і/або y^2.

Рівняння кола з центром у точці ($a;b$) та радіусом **r** має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 .$$

У частковому випадку (коло одиничного радіуса з центром у початку координат) це рівняння спрощується:

$$x^2+y^2=r^2 .$$

Рівняння еліпса (геометричного місця точок, сума відстаней до яких від двох заданих точок є сталою) записується так (рис. 17):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

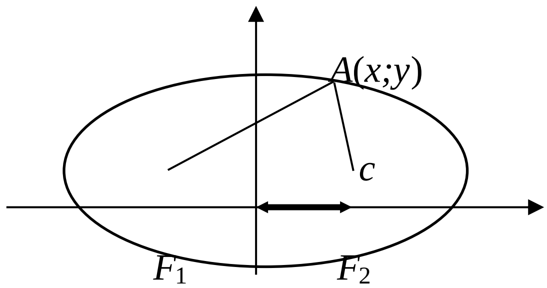


Рис. 17.

Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$ називаються при цьому *фокусами*.

Виконуються такі властивості:

- для довільної точки A на еліпсі $\left|\overline{AF_1}\right|+\left|\overline{AF_2}\right|=2a$;
- $c^2=a^2-b^2$.

Рівняння гіперболи (геометричного місця точок ($x;y$), для яких різниця відстаней до фокусів F_1 та F_2 є сталою) має вигляд (рис. 18):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Для гіперболи виконуються такі властивості:

- для довільної точки A на гіперболі $\left|\overline{AF_1}\right| - \left|\overline{AF_2}\right| = 2a$;
- $c^2=a^2+b^2$.

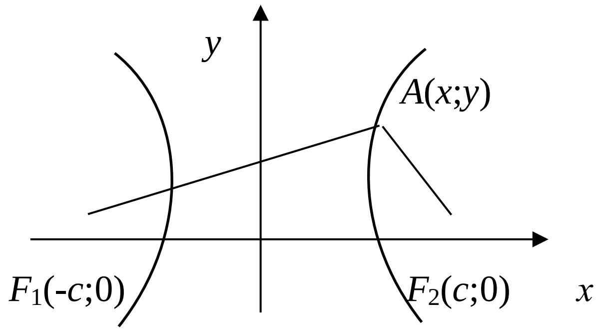


Рис. 18.

Рівняння параболи (геометричного місця точок, однаково віддалених від заданої точки $F(\frac{p}{2};0)$ і заданої прямої $x = -\frac{p}{2}$) є таким (рис. 19): $y = 2px$.

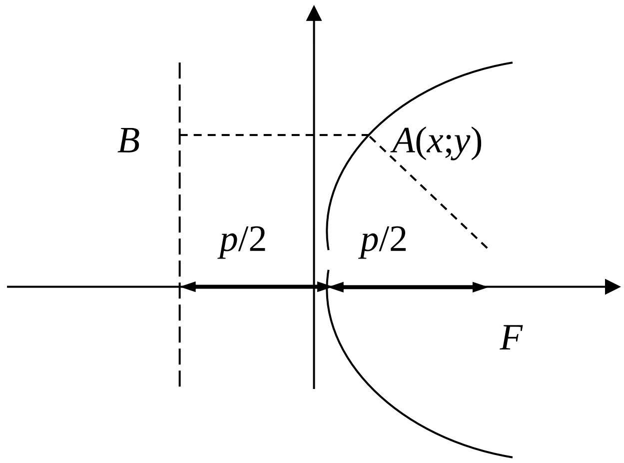


Рис. 19.

Тут для довільної точки $A(x;y)$ параболи $y = 2px$ виконується рівність $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AF}\right|$, де $\left|\overline{AB}\right|$ - відстань від точки A до прямої $x = -\frac{p}{2}$.

4. Різні види рівнянь прямої у просторі.

Рівняння *прямої у тривимірному просторі* також записується багатьма способами.

Пряму як перетин двох площин задають системою лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}. \qquad (6)$$

Симетричне (канонічне) рівняння прямої, що проходить через точку $(x_0;y_0;z_0)$ паралельно до напрямного вектора $\overline{a}(l;m;n)$, має вигляд

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\quad . \qquad (7)$$

Параметричне рівняння прямої є таким:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} . \qquad (8)$$

Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві точки $(x_1;y_1;z_1)$ та $(x_2;y_2;z_2)$, є подібним до рівняння прямої на площині:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\quad . \qquad (9)$$

Приклад. Пряма в просторі проходить через дві точки: $M_1(1;2;3)$ та $M_2(4;6;8)$. Рівнянням цієї прямої згідно (9) є рівняння

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{8-3}\quad .$$

Виконавши операції віднімання, отримуємо канонічне рівняння

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}\quad .$$

Від останнього рівняння перейдемо до параметричного задання прямої (формула 8): $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \\ z = 3+5t \end{cases}$.

5. Кут між двома прямими. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\ .$$

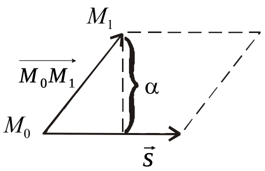
З останньої формули випливає умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0\ ,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

6. Відстань від точки до прямої.



Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рис. 3). Відомо, що площа

Рис. 3

паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

7. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax+By+\quad+Cz+D=0$ у просторі. Якщо $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$, то пряма перпендикулярна до площини, а коли

$Am+Bn+Cp=0$, пряма паралельна площині.

Нехай $Am+Bn+Cp\neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.

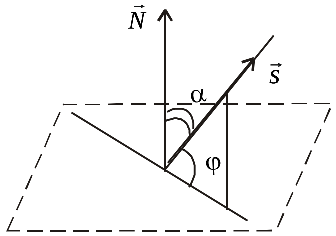


Рис. 20

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис. 20). Вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ — перпендикулярний до площини, а кут

α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°. Тобто α + φ = 90°.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha<90^\circ$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=\sin\varphi$, а якщо $\alpha>90^\circ$, то $\cos\alpha=\cos(90-\varphi)=-\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi=|\cos\alpha|$. Отже,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

8. Дослідження загального рівняння прямої.

Загальне рівняння називається повним, якщо всі його коефіцієнти A, B, C відмінні від нуля. Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, рівняння називається неповним.

Розглянемо всі можливі види неповних рівнянь:

$Ax+By-Ax_0-By_0=0$, $Ax_0-By_0=c$

$Ax+By+c=0$ (2)- загальне рівняння прямої на площині, де А,В- координати нормального вектора до прямої, с-вільний член, х,у- змінні.

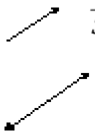
3. Дослідження загального рівняння.

1. Якщо в рівнянні (2) с=0, а і в$\neq$0, то пряма проходить через початок координат.
2. Якщо А=0, в і с $\neq$0, то пряма l $\parallel$ осі 0Х.
3. Якщо А=0, с=0, то і у=0 – рівняння осі 0Х.
4. Якщо В=0, то пряма l $\parallel$ осі 0Y.
5. Якщо В=0, с=0, то і х=0 – рівняння осі 0Y.

4. Рівняння прямої через напрямний вектор і точку.

Любий вектор $\parallel$ до прямої називається – напрямним $\bar{s}$.

Знайдемо рівняння прямої що проходить через т.M_0 (x_0,y_0) $\parallel$ $\bar{s}$ (m,n).



$\bar{s}$ l

M_0 M(x;y)

На прямій беремо біжучу точку М з координатами (х; у).

Розглянемо $\overline{M_oM}$ $(x-x_0;y-y_0)$.

M_0M $\parallel$ $\bar{s}$ - колінеарні.

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}$$ (3) - канонічне рівняння прямої.

Наприклад: Написати рівняння прямої, що проходить через т.M_0 (2;-1) $\parallel$ $\bar{s}$ (0;3).

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{3}$$

5.Параметричне рівняння прямої.

В рівності (3)відношення позначимо через t.

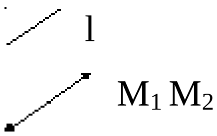
$$\frac{x-x_o}{m}=t, \quad \frac{y-y_o}{n}=t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

$y=y_0+mt$ (4) – параметричне рівняння прямої.

6.Рівняння прямої через 2 точки.

Нехай пряма l проходить через 2 точки : $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$.



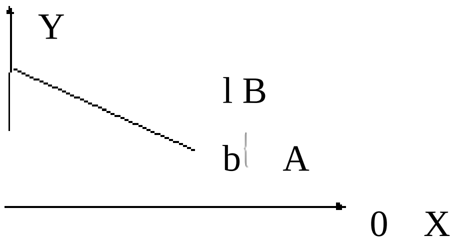
$\overline{S} = \overline{M}_1\overline{M}_2 = (x_2-x_1;y_2-y_1)$

Вектор M_1M_2 колінеарний прямій l і може грати роль вектора $\overline{S}$ - напрямного вектора.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (5)- рівняння прямої через 2 точки.

7.Рівняння прямої у відрізках на осях координат.

Нехай пряма l від осі 0X відсікає відрізочок a, від 0Y- в.



Оскільки пряма перетинає осі, то знайдені точки перетину:

B(0;b), A(a;0)

Використаємо рівняння (5)

$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$, $\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}$, $\frac{-x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, (6)- рівняння прямої у відрізках на осях координат.

8. Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт.

а) нехай пряма l проходить через т. $M_0(x_0;y_0)$ і має кутовий коефіцієнт з додатнім напрямком осі 0X.

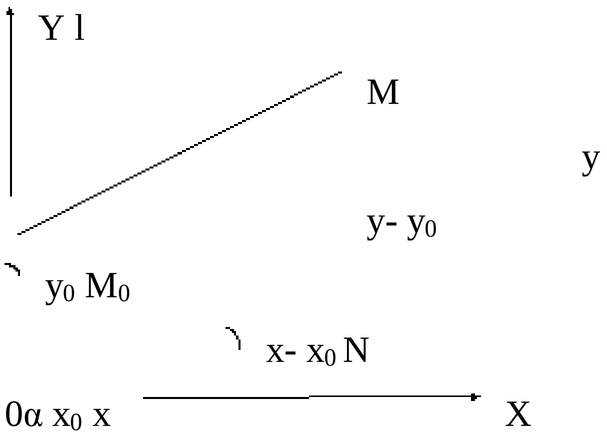
Кутовий коефіцієнт прямої - це tg кута нахилу прямої з додатнім напрямком осі 0X.

$tg\alpha=k$,

$M_0(x_0;y_0)$, $M(x;y)$.

З ΔM_0MN: $tgk=tg\alpha=tg\alpha=\frac{y-y_o}{x-x_o}$ =>

$y-y_0=k(x-x_0)$, (7)- рівняння прямої через кутовий коефіцієнт і точку.



б) З рівності (7) розкриємо дужки і знайдемо y. Величину y_0-kx_0 позначимо через b і отримаємо рівняння:

$y=kx+b$, (8) – рівняння прямої через кутовий коефіцієнт, де b – відрізок, відсікає пряма від осі 0Y.

Взаємне розміщення прямих на площині.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$A_1x+B_1y+c_1=0$,

$A_2x+B_2y+c_2=0$

1. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ => $l_1 \parallel l_2$,

2. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} =>$ l_1, l_2 – перетинаються,

3. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{c_1}{c_2} =>$ l_1, l_2 – співпадають.

Кут між прямими на площині.Умови ‖та прямих

Задані загальним рівнянням	Задані канонічно	Задані через кутовий коефіцієнт
$l_1: A_1x+b_1y+c_1=0$, $\overline{n_1}$ $(A_1;B_1)$; $l_2: A_2x+b_2y+c_2=0$, $\overline{n_2}$ $(A_2;B_2)$; n_1 n_2 l_2 α $\cos\alpha = \frac{\overline{n_1 n_2}}{\lvert n_1\rvert\lvert n_2\rvert} =$	$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$, $\overline{S}_1 (m_1;n_1)$; $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, $\overline{S}_2 (m_2;n_2)$; $\cos\alpha = \frac{\overline{S_1 S_2}}{\lvert S_1\rvert\lvert S_2\rvert} =$ $= \frac{M_1M_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$	$l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$, $\alpha = \beta - \gamma$ $tg\,\alpha = tg(\beta - \gamma) =$ $= \frac{tg\beta - tg\gamma}{1 + tg\beta tg\gamma}$ $tg\,\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$

$\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}}$		

Умови паралельності прямих.

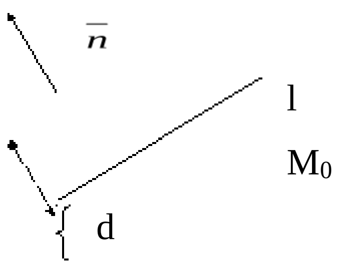
$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \parallel \overline{S_2}$, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_2=k_1$

Умови перпендикулярності векторів.

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1}\ \overline{n_2}=0$, $A_1A_2+B_1B_2=0$	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{S_1}\ \overline{S_2}=0$, $m_1m_2+n_1n_2=0$	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$

Відстань від точки до прямої.

Знайдемо відстань т.$M_0(x_0;y_0)$ до прямої l, заданої рівнянням: Ax+By+c=0



M

$\overline{n}$ (A;B),

M(x;y),

d=M_0M

Розглянемо вектор $\overline{M_0M}$ =(x-x_0;y-y_0)

т.M є l, $\overline{n}\ \overline{M_0M}$ =A(x-x_0)+B(y-y_0)=-Ax_0-By_0-c

Ax+By=-c

Розглянемо скалярний добуток за означенням цих векторів.

$\overline{n}\ \overline{M_0M} = |\overline{n}||\overline{M_0M}|\cos\varphi = \pm\sqrt{A^2+B^2}\, d$

d= $\dfrac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ - Відстань від точки до прямої.

1. Різні види рівнянь площини в просторі.

Загальне *рівняння площини в тривимірному просторі*, яка проходить через точку (x_0;y_0;z_0) перпендикулярно до вектора $\overline{N}(A,B,C)$ має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) \qquad (1)$$

або

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (3)$$

Спеціальними площинами є площини OXY (рівняння z=0), OXZ (рівняння y=0) та OYZ (рівняння x=0).

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки (x_0;y_0;z_0), (x_1;y_1;z_1), (x_2;y_2;z_2) (якщо ці точки не лежать на одній прямій), є таким:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

<u>Приклад</u>. Записати рівняння площини, яка проходить через точки M_0(1;2;3), M_1(2;1;2) та M_3(3;3;1).

Маємо $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

звідки $x+4y-4=0$.

Рівняння площини у відрізках є таким:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ . \qquad (5)$$

Ця площина проходить через точки (a;0;0), (o;b;0) та (0;0;c).

<u>Приклад</u>. Ціни за одиницю кожного з трьох товарів становлять, відповідно, 2, 3 та 4 умовні одиниці. Бюджет споживача дорівнює 120 умовних одиниць. Зобразити графічно бюджетне обмеження цього споживача.

Нехай споживач на всі гроші купив x одиниць першого товару, y одиниць другого та z одиниць третього. Тоді виконується рівність

$$2x+3y+4z=120.$$

Ми отримали бюджетне обмеження споживача як загальне рівняння площини.

Зручніше записати це обмеження у вигляді рівняння площини у відрізках (виконавши ділення на 120):

$$\frac{x}{60}+\frac{y}{40}+\frac{z}{30}=1\ .$$

\`Отже, споживач може купити або тільки 60 одиниць першого товару, або тільки 40 другого, або тільки 30 третього, а також може перебувати в довільній іншій точці площин $\frac{x}{60}+\frac{y}{40}+\frac{z}{30}=1$ за умов $x\geq0$; $y\geq0$; $z\geq0$ (рис .21).

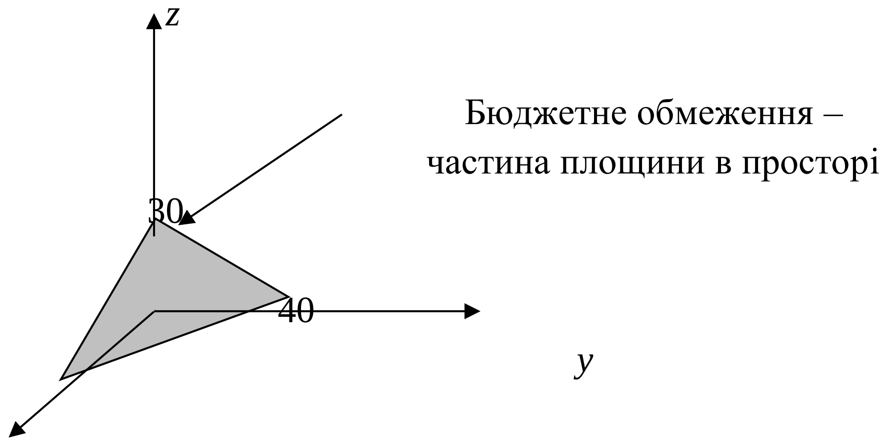


Рис. 21.

Якщо ж витрачають не всі гроші, то бюджетне обмеження буде тетраедром:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z\leq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ z\geq 0 \end{cases}.$$

Розглянемо випадок, коли споживач зовсім не купує третього товару (z =0). Тоді бюджетне обмеження представлятиме собою відрізок прямої на площині

$$\begin{cases} 2x+3y=120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases},$$

або множину точок всередині трикутника (рис. 22)

$$\begin{cases} 2x+3y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

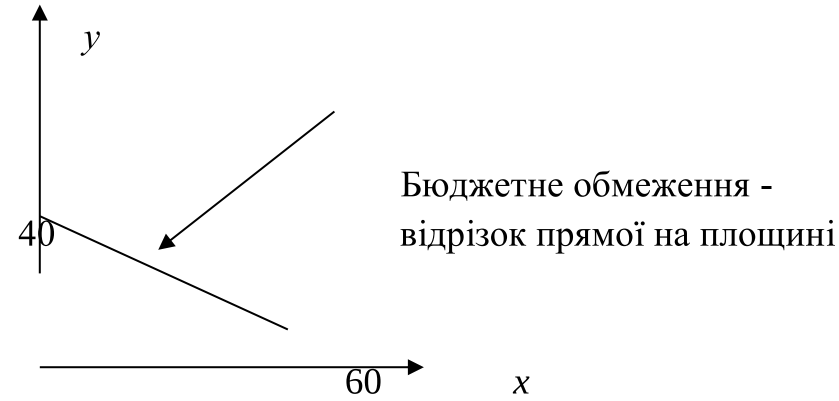


Рис. 22.

2. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax+By+ \quad +Cz+D=0$ у просторі. Якщо

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C},$$

то пряма перпендикулярна до площини, а коли

$$Am+Bn+Cp=0,$$

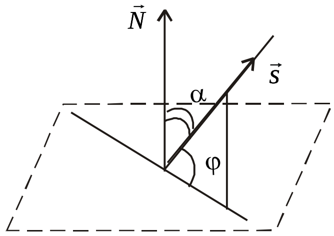
пряма паралельна площині.

Нехай $Am+Bn+Cp \ne 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x=x_0+mt, \quad y=y_0+nt, \quad z=z_0+pt$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.

Рис. 23



Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис. 23). Вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ — перпендикулярний до площини, а кут α, який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90°. Тобто α + φ = 90°.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90-\varphi) = \sin\varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90-\varphi) = -\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi = |\cos\alpha|$. Отже,

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

3. Поверхні другого порядку.

Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0$, (1)

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння(1) називається загальним рівнянням поверхні другого порядку. Поверхня другого порядку як геометричний об’єкт не змінюється, якщо він заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентні.

Можна довести, що існує система координат, в якій рівняння має найпростіший (або канонічний вигляд.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, одно порожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій l. Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до цієї площини.

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні осі Oz, а напрямна лежить в площині Oxy.

Нехай задано рівняння

$$f(x; y) = 0, \qquad (2)$$

яке в площина Oxy визначає деяку лінію L – множину точок M (x; y), координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок N(x; y; z) простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки ліні L, а третя координата z – довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Oxy в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці M (x; y). Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння (2) не задовольняють. Отже, рівняння (2) визначає поверхню σ. Таким чином, рівняння f (x; y) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівняння f (x; y) =0. Ця сама лінія в просторі Oxzy задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння f (x; y) =0, в якому відсутня зміна y, визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oy, а напрямна L в площині Oxz задається тим самим рівнянням f (x; y) =0; рівняння f (y; z) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ox.

Поверхня обертання

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l, називають поверхнею обертання.

Нехай лінія l, що лежить в площині Oyz, задана рівняннями

$$\begin{cases} f(Y,Z)=0 \\ X=0. \end{cases}$$

(X,Y, Z – змінні координати точок лінії l, а x, y, z)= змінні координати точок поверхні).

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Oz і знайдемо рівняння поверхні обертання.

Проведено через довільну точку M (x, y, z) поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Oz, і позначимо через K і N точки перетину цієї площини з віссю Oz і лінією l. Оскільки відрізки $|Y|$, KN KM рівні між собою як радіуси, KP = y, PM = x, то Y=$\pm\sqrt{x^2+y^2}$, крім того Z=z. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння F(X, Z) = 0, то, підставляючи в це рівняння замість Y, Z рівні їм величини $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, z, дістанемо рівняння

F=$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,z) = 0,

яке задовольняє довільна точка M (x; y; z) поверхні обертання. Можна показати, що короординати точок, які н лежать на цій поверхні, рівняння не задовольняють. Отже, рівняння є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ox і Oy. Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком + або -.

Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні, точка P – її вершиною, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, - твірною.

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0 \\ F_2(X,Y,Z)=0 \end{cases} \quad (1)$$

а точка P (x_0; y_0;z_0) – вершина конічної поверхні. Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку M (x; y; z) і позначимо точку перетину твірної PM з напрямною L через N(X,Y, Z).

Канонічні рівняння твірних, які проходять через точку N і P, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0} \quad (2)$$

Виключаючи X,Y, Z з рівнянь дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.

Додаток Б. Додаткові задачі для практичних занять

Обчисліть визначники:

а) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 8 \cdot (-2) = 16;$

б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta);$

в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \lg 10 \\ \log_2 8 & \log_3 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log_2 3 & 2 \\ 3 & \log_3 2 \end{vmatrix} = \log_2 3\cdot\log_3 2 - 2\cdot 3 = 1 - 6 = -5.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. *Перший спосіб*. За правилом трикутників маємо

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-4)\cdot 3\cdot 1 - (1\cdot(-1)\cdot(-4) + 2\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 1) = -9 + 2 - 12 - (4 + 18 + 3) = -19 - 25 = -44$

Другий спосіб. Використовуючи властивості визначника, дістаємо

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \text{ рядок} - 2 \text{ рядок} & \rightarrow \\ 2 \text{ рядок} + (-3)\cdot 3 \text{ рядок} & \rightarrow \\ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} =$

$= 1\cdot(-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 20 = -44.$

Третій спосіб. Розкладемо визначник за першим рядком:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - 2\cdot 8 - 4\cdot 4 = -44.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпцеві. Зробимо, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпця перший, після чого помножимо елементи першого стовпця на -2 і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпця. Дістанемо

$$\Delta= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2 \\ 1 & 2 & -2+1 & 0-2 \\ -1 & 3 & 0-1 & 2+2 \\ 2 & 1 & -1+2 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta= a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Занулимо два елементи другого стовпця. Для цього до першого і другого рядків по черзі додамо третій рядок. Тоді

$$\Delta= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо утворений визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta= a_{32}A_{32} = 1 \cdot (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(15+12) = -27.$$

Відповідь: -27.

4. Розв'яжіть рівняння: $\begin{vmatrix} -2-к & 2 & 0 \\ 2 & 4-к & 6 \\ 1 & 2 & 3-к \end{vmatrix} = 0.$

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -2-к & 2 & 0 \\ 2 & 4-к & 6 \\ 1 & 2 & 3-к \end{vmatrix} = (-2-к)\begin{vmatrix} 4-к & 6 \\ 2 & 3-к \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3-к \end{vmatrix} + 0 =$$

$= -(2+\text{к})\big((4-\text{к})(3-\text{к})-12\big)-2(6-2\text{к}-6)$=$-(2+\text{к})(\text{к}^2-7\text{к})+$ $4\text{к} = -(\text{к}^3+2\text{к}^2-7\text{к}^2-14\text{к})+4\text{к} = -\text{к}^3+5\text{к}^2+18\text{к}.$

Отже, вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$-\text{к}^3+5\text{к}^2+18\text{к}=0$$

Далі маємо

$-\text{к}(\text{к}^2-5\text{к}-18)=0;$ $\text{к}_1=0$ або $\text{к}^2-5\text{к}-18=0,$ звідси $\text{к}_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{97}}{2}$.

Відповідь: $\text{к}=0$; $\frac{5\pm\sqrt{97}}{2}$.

1. Знайдіть ранг матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Виділений у матриці мінор другого порядку

$$M^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Обвідними для нього мінорами третього порядку є:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ і } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Обидва мінори третього порядку рівні нулю, а мінор другого порядку відмінний від нуля, отже *r(A)*=2.

2. Знайдіть ранг матриці: $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Виконавши елементарні перетворення, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Визначник третього порядку, складений з елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці, не дорівнює нулю, а всі мінори четвертого порядку рівні нулю. Отже, *r(A)*=3.

1. Розв'яжіть матричне рівняння X·A·B=C, якщо $A = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{pmatrix}$

$C = (1 \quad -2)$.

Розв'язання. Послідовно дістаємо $X \cdot A \cdot B = C$, $X \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A \cdot E = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A = C \cdot B^{-1}$, $X \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$, $X \cdot E = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$, $X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1}:

$|A| = \begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -4 \neq 0$, $A_{11} = 1$, $A_{21} = -2$, $A_{12} = -3$, $A_{22} = 2$.

$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$;

$|B| = \begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $B_{11} = -7$, $B_{21} = -4$, $B_{12} = -2$, $B_{22} = -1$.

$B^{-1} = -\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Тоді $X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = (1 \quad -2)\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{4}(1 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \quad 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(3 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{4}(3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \quad 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2) = -\frac{1}{4}(-3 \quad -2) = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Зазначимо, що матрицю X можна відшукувати також за формулою

$X = C(AB)^{-1}$.

Користуючись методом Крамера, розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 - 9 + 1 - 24 + 6 = -41;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 24 - 2 - 3 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 72 - 3 - 6 + 16 = 82.$$

Значить, за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$ - єдиний розв'язок системи.

1. Записати і розв'язати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо через $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі $A \cdot X = B$. Матричний розв'язок системи буде $X = A^{-1}B$.

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&4&3\\9&8&5\end{vmatrix}=40+24+56-36-30-48=4.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то для матриці А існує обернена A^{-1} , а значить, можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=\begin{vmatrix}4&3\\8&5\end{vmatrix}=20-24=-4,$ $A_{12}=-\begin{vmatrix}3&3\\9&5\end{vmatrix}=-(15-27)=12,$

$A_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\9&8\end{vmatrix}=24-36=-12,$ $A_{21}=-\begin{vmatrix}2&1\\8&5\end{vmatrix}=-(10-8)=-2,$

$A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\9&5\end{vmatrix}=10-9=1,$ $A_{23}=-\begin{vmatrix}2&2\\9&8\end{vmatrix}=-(16-18)=2,$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=6-4=2,$ $A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-(6-3)=-3,$

$A_{33}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=8-6=2.$

Отже, $\overline{A}=\begin{pmatrix}-4&12&-12\\-2&1&2\\2&-3&2\end{pmatrix}$. Транспонуємо $\overline{A}$, тоді $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\12&1&-3\\-12&2&2\end{pmatrix}$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\widetilde{A}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&-2&2\\12&1&-3\\-12&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\3&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\-3&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Перевіряємо:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&4&3\\9&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\3&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\-3&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2+6-3&-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\-3+12-9&-\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}&\frac{3}{2}-3+\frac{3}{2}\\-9+24-15&-\frac{9}{2}+2+\frac{5}{2}&\frac{9}{2}-6+\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю знайдено правильно.

Знаходимо розв’язок заданої системи:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-5+7 \\ 9+\frac{5}{2}-\frac{21}{2} \\ -9+5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи лінійних рівнянь: $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3.$

1. Користуючись методом Гаусса, розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-5 \end{cases}$$

Розв’язання. Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при невідомому x_1 дорівнює одиниці. Для цього ліву і праву частини можна поділити на 2. Однак у даному прикладі краще поміняти місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-5 \end{cases}$$

Виключимо невідому x_1 у другому та третьому рівняннях системи. Для цього перше рівняння помножимо на -2 і додамо до другого рівняння, а потім помножимо на -3 і додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_2-5x_3=-3 \\ -6x_2-x_3=-13 \end{cases}$$

Для виключення невідомої x_2 у третьому рівнянні додамо до нього друге, помножене на 6:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_2-5x_3=-3 \\ -31x_3=-31 \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо$x_3=(-31)/(-31)=1.$ Підставивши значення x_3=1 у друге рівняння, одержимо

$$x_2 = -3 + 5x_3 = -3 + 5 = 2$$

Із першого рівняння $\quad x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 2 - 1 = -1$

Відповідь: розв'язком вихідної системи є числа $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

2. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання. Заданій системі лінійних рівнянь відповідає розширена матриця

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right).$$

Зведемо її до трапецоїдального вигляду з допомогою елементарних перетворень:

1. Поміняємо місцями перший та другий рядки.

2. Додамо до елементів другого, третього і четвертого рядків елементи першого рядка, помножені, відповідно, на -2, -2, -1.

3. Додамо відповідні елементи другого і третього рядків.

4. Поділимо всі елементи четвертого рядка на -2 і поміняємо місцями з третім рядком.

5. Додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи третього рядка, помножені на 6.

6. Поділимо всі елементи четвертого рядка на -7.

Розглянуті етапи зобразимо у вигляді схеми:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&-1&-7&-2&-5\\0&0&-2&2&-4\end{array}\right)\overset{(3)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&-6&-1&-5\\0&0&-2&2&-4\end{array}\right)\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&-6&-1&-5\end{array}\right)\overset{(5)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-7&7\end{array}\right)\overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&-1&1\end{array}\right)$$

Останній розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases}x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\ \quad x_2+x_3+x_4=0\\ \quad\quad x_3-x_4=2\\ \quad\quad\quad x_4=-1\end{cases}$$

розв'язок якої буде розв'язком вихідної системи. Оскільки $x_4=-1$, то з третього рівняння $x_3=2+x_4=2+(-1)=1$

Підставивши знайдені значення $x_3=1$, $x_4=-1$ у друге рівняння, знайдемо

$$x_2=-x_3-x_4=-1-(-1)=-1+1=0$$

Із першого рівняння одержимо

$$x_1=1-x_2-5x_3-2x_4=1-0-5\cdot1-2\cdot(-1)=1-5+2=-2.$$

Розв'язком системи будуть такі числа: $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=1$; $x_4=-1$.

1. Дано точки $M_1(3;3;-2)$, $M_2(0;1;4)$. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\left|\overline{M_1M}\right|:\left|\overline{MM_2}\right|=2:3$.

Розв'язання.

а) $\overline{M_1M_2}=(0-3;1-3;4-(-2))=(-3;-2;6)$

$\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{9+4+36}=7;\quad \cos\alpha=-\frac{3}{7},\ \cos\beta=-\frac{2}{7},\ \cos\gamma=\frac{6}{7}.$

Орт вектора $\overline{M_1M_2}$ такий:

$\overline{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{-\frac{3}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{6}{7}\right\}.$

б) $\lambda = \frac{2}{3}$, тоді

$$x_M = \frac{3+\frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{5}, \quad y_M = \frac{3+\frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{11}{5}, \quad z_M = \frac{-2+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

2. Знайдіть вектор $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, якщо він утворює з осями координат однакові кути і $|\overline{a}| = 2\sqrt{3}$.

Розв'язання. Враховуючи рівності

$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\overline{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\overline{a}|\cos\gamma$

і умову $\alpha = \beta = \gamma$, записуємо співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

звідки дістаємо $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_x = a_y = a_z = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ або $a_x = a_y = a_z = -2$.

Відповідь: $\overline{a} = \{2; 2; 2\}$ або $\overline{a} = \{-2; -2; -2\}$.

3. Чи колінеарні вектори $\overline{c_1} = 2\overline{a} - 5\overline{в}$ і $\overline{c_2} = \overline{a} - 2\overline{в}$ побудовані на векторах $\overline{a} = \{1; -2; 3\}$ і $\overline{в} = \{4; 2; -1\}$?

Розв'язання. Послідовно дістаємо

$\overline{c_1} = 2\overline{a} - 5\overline{в} = \{2; -4; 6\} - \{20; 10; -5\} = \{-18; -14; 11\}$

$\overline{c_2} = \overline{a} - 2\overline{в} = \{1; -2; 3\} - \{8; 4; -2\} = \{-7; -6; 5\}.$

Оскільки координати векторів $\overline{c_1}$ і $\overline{c_2}$ не пропорційні, то ці вектори не колінеарні.

4. Початком вектора $\overline{a} = (1; -2; 3)$ є точка $M(3; 4; -2)$. Знайдіть координати точки P, яка є кінцем вектора $\overline{a}$.

Розв'язання. Враховуючи умову рівності двох векторів, дістанемо

$$\overline{a} = \overline{MP} = (x_p - x_м, y_p - y_м, z_p - z_м),$$

або

$$(1;-2;3)=\left(x_p-3, y_p-4, z_p+2\right)$$

звідси $x_p=4$, $y_p=2$, $z_p=1$, тобто $P(4;2;1)$ - кінець вектора $\bar{a}$.

5. Відомо, що вектори $\bar{a}=\alpha\bar{i}+6\bar{j}-8\bar{k}$ та $\bar{в}=2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β.

Розв'язання. Записуємо умову колінеарності заданих векторів:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{6}{3}=\frac{-8}{\beta}$$

звідси $\alpha=4$, $\beta=-4$.

6. Знайдіть подання вектора $\bar{a}=5\bar{i}+4\bar{j}$ у базисі $\bar{p}=2\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{q}=-\bar{i}+2\bar{j}$.

Розв'язання. Передусім переконуємось, що вектори $\bar{p}$ і $\bar{q}$ утворюють базис: $\frac{2}{-1}\neq\frac{3}{2}$. Записуємо розклад $\bar{a}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}$, де коефіцієнти α та β підлягають визначенню. Далі маємо

$$5\bar{i}+4\bar{j}=\alpha\left(2\bar{i}+3\bar{j}\right)+\beta(-\bar{i}+2\bar{j})$$

або $$5\bar{i}+4\bar{j}=(2\alpha-\beta)\bar{i}+(3\alpha+2\beta)\bar{j}$$

Звідси дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=5\\3\alpha+2\beta=4\end{cases},$$

розв’язок якої $\alpha=2$, $\beta=-1$.

Отже, $\bar{a}=2\bar{p}-\bar{q}$.

1. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{в}$ утворюють кут $\varphi=120^0$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{в}|=4$, обчисліть: а) $(3\bar{a}-2\bar{в})(\bar{a}+2\bar{в})$; б)$|\bar{a}-\bar{в}|$.

Розв'язання.

а) $A=(3\bar{a}-2\bar{в})(\bar{a}+2\bar{в})=3\bar{a}^2-2\overline{вa}+6\overline{aв}-4\bar{в}^2=3\bar{a}^2+4\overline{aв}-4\bar{в}^2$

Оскільки правильні рівності

$\overline{\text{а}}^2 = |\overline{\text{а}}|^2 = 9,\ \overline{\text{в}}^2 = |\overline{\text{в}}|^2 = 16,\ \overline{\text{а}}\overline{\text{в}} = |\overline{\text{а}}||\overline{\text{в}}|\cos 120^0 = 3 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) = -6$

то $A = 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 16 = -61;$

б) скориставшись формулою (2) , дістанемо

$|\overline{\text{а}} - \overline{\text{в}}| = \sqrt{(\overline{\text{а}} - \overline{\text{в}})^2} = \sqrt{\overline{\text{а}}^2 - 2\overline{\text{а}}\overline{\text{в}} + \overline{\text{в}}^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot (-6) + 16} = \sqrt{37}.$

2. Дано вектори $\overline{\text{а}} = \{1; 2; -2\}$ і $\overline{\text{в}} = \{3; 3; -4\}$. Знайдіть:

а) скалярний добуток $(4\overline{\text{а}} + 3\overline{\text{в}})(\overline{\text{а}} - 2\overline{\text{в}})$; б) кут між векторами $\overline{\text{а}} + \overline{\text{в}}$ та $\overline{\text{а}} - \overline{\text{в}}$.

Розв'язання.

а) $4\overline{\text{а}} + 3\overline{\text{в}} = \{4; 8; -8\} + \{9; 9; -12\} = \{13; 17; -20\},$

$\overline{\text{а}} - 2\overline{\text{в}} = \{1; 2; -2\} - \{6; 6; -8\} = \{-5; -4; 6\},$

$(4\overline{\text{а}} + 3\overline{\text{в}})(\overline{\text{а}} - 2\overline{\text{в}}) = 13 \cdot (-5) + 17 \cdot (-4) - 20 \cdot 6 = -253;$

б) $\overline{\text{с}} = \overline{\text{а}} + \overline{\text{в}} = \{4; 5; -6\},\ \overline{d} = \overline{\text{а}} - \overline{\text{в}} = \{-2; -1; 2\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{\text{с}} \cdot \overline{d}}{|\overline{\text{с}}||\overline{d}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-25}{3\sqrt{77}},$$

звідси $\varphi = \pi - arccos\frac{25}{3\sqrt{77}}$.

3. Дано вектори $\overline{\text{а}} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{\kappa},\quad \overline{\text{в}} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{\kappa},\quad \overline{\text{с}} = -2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{\kappa}.$ Знайдіть вектор $\overline{\text{х}}$, який задовольняє рівності: $\overline{\text{х}} \cdot \overline{\text{а}} = 8,\ \overline{\text{х}} \cdot \overline{\text{в}} = -3$ та $\overline{\text{х}} \cdot \overline{\text{с}} = 13.$

Розв'язання. Нехай $\overline{\text{х}} = \{x_1, x_2, x_3\}$, тоді умова $\overline{\text{х}} \cdot \overline{\text{а}} = 8$ рівносильна рівнянню $x_1 - x_2 + 4x_3 = 8$. Аналогічно дістаємо ще два рівняння

$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3$ та $-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \end{cases}$$

дістанемо значення : $x_1 = -1,\ \ x_2 = -1,\ \ x_3 = 2.$

Відповідь: $\overline{\text{х}} = \{-1; -1; 2\}$.

4. Точки $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ - вершини трикутника АВС. Знайдіть кут у трикутнику при вершині В і проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, що збігаються з відповідними сторонами трикутника:

$$\overline{BA} = \{3;0;4\},\ \overline{BC} = \{7;0;1\}.$$

Косинус кута φ між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}||\overline{BC}|} = \frac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{\sqrt{9+0+4}\sqrt{49+0+1}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi = 45^0$. Отже, $\angle B = 45^0$.

Проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$ знайдемо за формулою:

$$\text{пр}_{\overline{BC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{-3\cdot7+0+(-4)\cdot1}{\sqrt{50}} = \frac{-25}{5\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. Нехай точки $A(1;4)$, $B(-2;5)$, $C(-3;a)$, $Д(3;-3)$ - послідовні вершини чотирикутника АВСД. При якому значенні *a* діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Утворимо вектори :

$$\overline{AC} = (-4, a-4),\ \ \overline{ВД} = (5,-8).$$

Діагоналі чотирикутника будуть взаємно перпендикулярні тоді, коли скалярний добуток $\overline{AC}\cdot\overline{ВД} = 0$, тобто

$$-4\cdot5 + (a-4)(-8) = 0,$$

звідки дістанемо a=1,5.

1. Обчисліть $|(3\overline{a} - 2\overline{в}) \times (\overline{a} + 2\overline{в})|$, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{в}| = 4$, $\varphi = 30^0$.

Розв'язання. Оскільки

$$(3\overline{a} - 2\overline{в}) \times (\overline{a} + 2\overline{в}) = 3\overline{a}\times\overline{a} - 2\overline{в}\times\overline{a} + 6\overline{a}\times\overline{в} - 4\overline{в}\times\overline{в} =$$

$$= \overline{0} + 2\overline{a}\times\overline{в} + 6\overline{a}\times\overline{в} - \overline{0} = 8\overline{a}\times\overline{в},$$

то

$$|(3\overline{a} - 2\overline{в}) \times (\overline{a} + 2\overline{в})| = 8|\overline{a}\times\overline{в}| = 8|\overline{a}||\overline{в}|\sin 30^0 = 8\cdot3\cdot4\cdot0{,}5 = 48.$$

2. Знайдіть вектор $(2\overline{а}-\overline{в})\times(3\overline{а}+2\overline{в})$, якщо $\overline{а}=\{2;3;1\}$, $\overline{в}=\{-2;4;0\}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$$2\overline{а}-\overline{в}=\{4;6;2\}-\{-2;4;0\}=\{6;2;2\},$$

$$3\overline{а}+2\overline{в}=\{6;9;3\}+\{-4;8;0\}=\{2;17;3\}.$$

Тоді

$$(2\overline{а}-\overline{в})\times(3\overline{а}+2\overline{в})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 2 & 2\\ 2 & 17 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 17 & 3\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 17\end{vmatrix}\bar{k}=$$

$$=-28\bar{i}-14\bar{j}+98\bar{k}.$$

3. Обчисліть площу грані АВС і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $\mathrm{А}(2;-1;1)$, $\mathrm{В}(5;5;4)$, $\mathrm{С}(3;2;-1)$, $\mathrm{Д}(4;1;3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{\mathrm{АВ}}$, $\overline{\mathrm{АС}}$ і $\overline{\mathrm{АД}}$, на яких побудована піраміда:

$$\overline{\mathrm{АВ}}=\{3;6;3\},\ \overline{\mathrm{АС}}=\{1;3;-2\},\ \overline{\mathrm{АД}}=\{2;2;2\}.$$

Площу грані АВС визначаємо за формулою: $S_{\Delta\mathrm{АВС}}=\frac{1}{2}\left|\overline{\mathrm{АВ}}\times\overline{\mathrm{АС}}\right|$.

Маємо

$$\overline{\mathrm{АВ}}\times\overline{\mathrm{АС}}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-21\bar{i}+9\bar{j}+3\bar{k}=3\left(=-7\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}\right);$$

$$S_{\Delta\mathrm{АВС}}=\frac{1}{2}\left|\overline{\mathrm{АВ}}\times\overline{\mathrm{АС}}\right|=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}=\frac{3}{2}\sqrt{59}.$$

Об'єм піраміди $V_{\mathrm{АВСД}}$ дорівнює 1/6 частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{\mathrm{АВ}}$, $\overline{\mathrm{АС}}$ і $\overline{\mathrm{АД}}$, тобто

$$V_{\mathrm{АВСД}}=\frac{1}{6}mod\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}mod(-18)=3.$$

Отже, $S_{\Delta\mathrm{АВС}}=\frac{3}{2}\sqrt{59}$ кв. од., $V_{\mathrm{АВСД}}=3$ куб. од.

4. Доведіть, що вектори $\overline{\text{а}} = \{2; 1; 3\}$, $\overline{\text{в}} = \{2; -3; 1\}$ і $\overline{\text{с}} = \{1; 2; 1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\overline{\text{р}} = \{0; 11; 3\}$ за цим базисом.

Розв'язання. Нагадаємо, що базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів. Тому дані вектори утворюють базис, якщо мішаний добуток цих векторів не дорівнює нулю. Перевіримо цю умову:

$$\overline{\text{а}}\,\overline{\text{в}}\,\overline{\text{с}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overline{\text{а}}$, $\overline{\text{в}}$ і $\overline{\text{с}}$ - базис.

Вектор $\overline{\text{р}}$ розкладений за базисом $\overline{\text{а}}$, $\overline{\text{в}}$ і $\overline{\text{с}}$, якщо $\overline{\text{р}} = \alpha\overline{\text{а}} + \beta\overline{\text{в}} + \gamma\overline{\text{с}}$, $\alpha, \beta, \gamma -$ невідомі числа (координати вектора $\overline{\text{р}}$ у даному базисі).

Запишемо векторне рівняння у розгорнутому вигляді

$$0 \cdot \bar{i} + 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = \alpha\left(2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}\right) + \beta\left(2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}\right) + \gamma\left(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}\right)$$

або

$$0 \cdot \bar{i} + 11 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = (2\alpha + 2\beta + \gamma)\bar{i} + (\alpha - 3\beta + 2\gamma)\bar{j} + (3\alpha + \beta + \gamma)\bar{k}.$$

Враховуючи умову рівності двох векторів, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 2\beta + \gamma \\ 11 = \alpha - 3\beta + 2\gamma \\ 3 = 3\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

Звідси $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 2.$

Отже, $\overline{\text{р}} = \overline{\text{а}} - 2\overline{\text{в}} + 2\overline{\text{с}}.$